UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DOUTORADO EM MATEMÁTICA

DAVI LOPES ALVES DE MEDEIROS

GEOMETRIA LIPSCHITZ AMBIENTE DAS SUPERFÍCIES NORMALMENTE MERGULHADAS

FORTALEZA

2023

DAVI LOPES ALVES DE MEDEIROS

GEOMETRIA LIPSCHITZ AMBIENTE DAS SUPERFÍCIES NORMALMENTE MERGULHADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Singularidades

Orientador: Prof. Dr. Lev Birbrair

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M438g Medeiros, Davi Lopes Alves de.
Geometria Lipschitz ambiente das superfícies normalmente mergulhadas / Davi Lopes Alves de Medeiros. – 2023.
112 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Lev Birbrair.

1. Geometria Lipschitz. 2. Mergulho normal. 3. Singularidade de superfícies. 4. Nós métricos. I. Título.
CDD 510

DAVI LOPES ALVES DE MEDEIROS

GEOMETRIA LIPSCHITZ AMBIENTE DAS SUPERFÍCIES NORMALMENTE MERGULHADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Singularidades

Aprovada em: 01/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lev Birbrair (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Edson Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros
Universitat de València (UV)

Prof. Dr. Maciej Denkowski
Jagiellonian University (JU)

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a Deus, minha família e meus amigos.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo milagre da minha existência, e por amar e cuidar de mim em todos os momentos, mesmo sendo eu um mísero pecador, mas que admira a Sua Divina Perfeição, transcrita em todas as coisas por meio da matemática, alfabeto que Ele utilizou para escrever o universo.

Aos meus pais, Francisca e Tarciso, por todo o amor, educação, paciência e dedicação. Ao meu irmão Daniel, por ser o primeiro a acreditar no meu potencial para a matemática, à minha irmã Débora, por seu exemplo de resiliência, e à minha caçulinha Dâmaris, pelos momentos divertidos jogando videogame e batendo papo sobre a vida.

À minha amada esposa, Valeska Kilvia, por toda a serenidade, compreensão e incentivo a seguir com o doutorado até o fim. Que o nosso amor prospere por toda a eternidade, e que os nossos frutos sejam abençoados, assim como Deus me abençoou com a dádiva de ter você na minha vida. Ao nosso filho Miguel, que ainda está no ventre, mas que eu já amo imensamente.

Ao meu orientador Lev Birbrair, por todo o apoio durante esse doutorado, sempre acreditando na minha capacidade de vencer desafios e resolver problemas difíceis, mesmo quando o desânimo e o cansaço tomaram conta de mim durante a pandemia.

Aos professores Alexandre Fernandes, Edson Sampaio e Rodrigo Mendes, por todas as sugestões e correções que elevaram o nível desta tese. Agradeço também aos demais membros da banca, Juan José Ballesteros e Maciej Denkowski, por conseguirem um espaço em suas agendas tão lotadas, para apreciarem meu trabalho.

Aos meus amigos e colegas de doutorado, pelos momentos incríveis e divertidos que compartilhamos dentro e fora dessa universidade. Desejo a vocês todo o sucesso do mundo. Aos professores da PGMAT-UFC, pelo ensino e orientação, e que Deus continue iluminando cada vez mais o dom do magistério em vocês.

Aos professores, coordenadores e diretores do Farias Brito, por ser como uma segunda família que me acolheu e me ajudou a crescer profissionalmente no mundo do ensino. A sabedoria que vocês me passaram e os momentos alegres e vitoriosos estarão eternamente vivos em meu coração.

Aos amigos internautas do meu canal do Youtube e do Instagram. Mesmo eu publicando vídeos e materiais com a frequência totalmente irregular, vocês ainda continuam me seguindo, apoiando e curtindo meu trabalho. A energia positiva que vocês exalam é a força que me faz buscar sempre ser um campeão, mesmo sendo eu um mero matemático por diversão.

Às secretárias Andréia e Jessyca, pela agilidade e pela disposição em colocar os trâmites desta tese em ordem. À bibliotecária Diana Flor, por todo o auxílio prestado em ajustar esta tese para atender às normas técnicas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Shakespeare foi otimista quando se sentiu pessimista. Isto é a definição de uma fé. Fé é aquilo capaz de sobreviver a um estado de ânimo."(G. K. CHESTERTON)

RESUMO

Neste texto, é estudada a geometria Lipschitz ambiente de superfícies definíveis em estruturas o-minimais sobre os reais polinomialmente limitadas, com ênfase das superfícies semialgébricas. É demonstrado que se um germe de superfície semialgébrica normalmente mergulhado em $\mathbb{R}^3$ possui link simples, isto é, isomorfo a um segmento ou a um círculo, então tal superfície é ambiente bi-Lipschitz equivalente a um triângulo de Hölder no primeiro caso, ou a uma corneta, no segundo caso.

Palavras-chave: geometria Lipschitz; mergulho normal; singularidade de superfícies; nós métricos.

ABSTRACT

In this paper, it is studied ambient Lipschitz geometry of definable surfaces in a polynomially bounded o-minimal structure over the reals, with emphasis on semialgebraic surfaces. We show that if a semialgebraic, normally embedded surface germ in $\mathbb{R}^3$ has a simple link, that is, isomorphic to either a segment or a circle, then such surface is ambient bi-Lipschitz equivalent to a Hölder triangle in the first case, or to a horn in the second case.

Keywords: Lipschitz geometry; normal embedding; surface singularities; metric knots.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Lipschitz é uma área na Matemática que busca compreender a geometria das variedades métricas através de um ponto de vista analítico. Nas últimas décadas, essa teoria experimentou um rápido desenvolvimento no estudo de conjuntos e funções semialgébricas, ou, mais geralmente, conjuntos e funções definíveis em uma estrutura o-minimal polinomialmente limitada. A compreensão geométrica de tais conceitos tem se mostrado muito relevantes em diversos campos, como teoria de singularidades, teoria das folheações, análise e topologia. Uma das principais questões abordadas pela Geometria Lipschitz é a classificação de singularidades mediante equivalência bi-Lipschitz. Tal problema é uma fonte prolífica de pesquisa, uma vez que a equivalência bi-Lipschitz é uma classificação intermediária entre a equivalência bi-regular, que é muito restritiva, e a equivalência topológica, que é muito abrangente. Dado um conjunto semialgébrico conexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (ou um conjunto subanalítico em $\mathbb{C}^n$), existem duas métricas naturais sobre ele: a métrica intrínseca, que é definida como o ínfimo dos comprimentos das curvas que conectam dois pontos em X, e a métrica exterior, que é a distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), conectando dois pontos em X. Dessa forma, podemos classificar conjuntos X e Y como bi-Lipschitz equivalentes na métrica intrínseca ou exterior, se existe uma aplicação $\varphi : X \to Y$ que é Lipschitz em uma dessas duas métricas, e cuja aplicação inversa possui a mesma propriedade. Podemos ainda classificar conjuntos X e Y como ambiente bi-Lipschitz equivalentes se existir uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ou $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) bi-Lipschitz exterior, tal que $\varphi(X) = Y$.

A compreensão dessas equivalências bi-Lipschitz é fundamental para entender como os conjuntos semialgébricos e subanalíticos “distorcem” o espaço ambiente em que eles estão, bem como eles “entrelaçam” entre si. O primeiro resultado dessa natureza a se ter notícia foi o artigo de Pham e Teissier (PHAM; TEISSIER, 1969), onde foi demonstrado que dois germes de curvas complexas algébricas planas são meromorficamente (pela métrica exterior) bi-Lipschitz equivalentes se, e somente se, são bi-Lipschitz ambiente equivalentes. O entendimento de como são tais aplicações bi-Lipschitz é igualmente importante, e seu estudo é objeto de ampla pesquisa. Em (FERNANDES, 2003), Fernandes melhorou tal resultado, assumindo a condição de que o homeomorfismo bi-Lipschitz entre os germes de curvas pode ser subanalítico. Em (NEUMANN; PICHON, 2014), Neumann e Pichon provaram que a condição de o homeomorfismo ser subanalítico não era necessária para obter a equivalência ambiente entre curvas, e em (FERNANDES *et al.*, 2018), Fernandes, Sampaio e Silva provaram que a classe de equivalência bi-Lipschitz de germes de curvas complexas planas é completamente determinada pelos pares essenciais de Puiseux dos seus ramos irredutíveis, e pela ordem de contato entre os ramos.

No que diz respeito à equivalências bi-Lipschitz entre superfícies definíveis reais, as ideias seminais de equisingularidade e estratificação Lipschitz foram desenvolvidas por Mostowski em (MOSTOWSKI, 1985) e por Parusinski em (PARUSIŃSKI, 1994). Os teoremas de finitude obtidos nesses trabalhos motivaram pesquisas em busca de classificações bi-Lipschitz de germes de superfícies semialgébricas reais. Em (BIRBRAIR, 1999), Birbrair utilizou os conceitos de complexos de Hölder para estabelecer uma classificação completa de germes de superfícies semialgébricas reais 2-dimensionais fechadas sob equivalência bi-Lipschitz intrínseca. A classificação de tais germes sob equivalência bi-Lipschitz exterior e ambiente, entretanto, é um problema mais profundo, e uma breve análise dos avanços obtidos nessa questão é realizada no Capítulo 2, subseção 2.3.4. Um tipo específico de superfícies, que é objeto de intensa pesquisa nos últimos anos e em que o referido problema de classificação demonstra progressos promissores são as superfícies normalmente mergulhadas, isto é, superfícies onde as métricas intrínseca e exterior são equivalentes. Essas superfícies "distorcem" de modo mais rígido o espaço ambiente, de modo que a classificação de superfícies sob equivalência bi-Lipschitz ambiente é simplificada nesse caso. A presente tese visa estudar essa questão no caso de germes de superfícies normalmente mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, com link simples, isto é, homeomorfo a $[0,1]$ ou a $\mathbb{S}^1$. De modo mais preciso, objetiva-se aqui demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1.0.1. *Seja* $(X,0) \subset (\mathbb{R}^3,0)$ *um germe de superfície semialgébrica normalmente mergulhado.*

1. *Se o link de X é homeomorfo a* $[0,1]$*, então* $(T,0)$ *é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe de um* α*-triângulo de Hölder com vértice principal na origem, para algum racional* $\alpha \geq 1$.
2. *Se o link de X é homeomorfo a* $\mathbb{S}^1$*, então* $(T,0)$ *é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da* β*-corneta padrão* $(H_\beta,0)$*, para algum racional* $\beta \geq 1$.

No Capítulo 2, são estabelecidos os conceitos preliminares para a devida compreensão desta tese. Na seção 2.1, é dada uma ênfase a resultados clássicos de geometria semialgébrica real; na seção 2.2 são definidos alguns dos fundamentos de geometria Lipschitz e de conjuntos normalmente mergulhados, e também são demonstrados proposições básicas para os propósitos de nosso trabalho; na seção 2.3 é realizado um estudo introdutório com ênfase específica na geometria Lipschitz das superfícies.

No Capítulo 3, é demonstrado que o problema de classificação bi-Lipschitz ambiente pode ser reduzido à análise de superfícies no interior de cones adequadamente escolhidos, bem como a manipulação delas ao longo de links planos. No mesmo capítulo, desenvolvemos alguns lemas que nos permitem realizar translações e dilatações como aplicações bi-Lipschitz ambiente em tais cones.

No Capítulo 4, são introduzidos os conceitos elementares envolvendo triângulos sincronizados, retângulos curvilineares e regiões delimitadas por dois triângulos sincronizados. As propriedades básicas de tais elementos também são desenvolvidas nessa parte, bem como a demonstração de que toda superfície semialgébrica admite uma decomposição convexa.

O Capítulo 5 é o coração da presente tese, uma vez que nele é estabelecida a isotopia bi-Lipschitz ambiente e condições suficientes para a referida aplicação acontecer, o que permite analisar o problema de classificação bi-Lipschitz ambiente em superfícies de maneira local nos links planos. Dentre as várias aplicações dessa técnica, é realizada neste capítulo uma demonstração de que todo triângulo linear delimitado por arcos é ambiente bi-Lipschitz equivalente a um triângulo de Hölder padrão.

No Capítulo 6, a noção de triângulos amassáveis é feita, motivada pela isotopia bi-Lipschitz ambiente, e alguns exemplos e propriedades básicas acerca deles são provados, com ênfase no fato de que todo triângulo sincronizado é amassável. Ao final, é demonstrado que o problema de classificação bi-Lipschitz ambiente para superfícies normalmente mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ é reduzido ao caso em que tal superfície é a união de triângulos lineares, e resolvemos tal problema no caso específico de a superfície ser a união de três desses triângulos.

No Capítulo 7, focamos nosso estudo em superfícies cujo link é simples, e para isso estabelecemos a definição de superfícies poligonais. Provamos que toda superfície poligonal, de modo geral, é bi-Lipschitz ambiente equivalente a uma superfície poligonal composta por um número menor de triângulos lineares, reduzindo a prova do resultado principal aos casos particulares estudados nos capítulos anteriores, finalizando assim a demonstração.

Por fim, na Conclusão é realizada uma série de observações sobre a tese, sobre o porquê de a demonstração vista no Capítulo 7 não poder se estender para superfícies em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e também listamos sugestões de pesquisa futura sobre temas envolvendo a tese.

2 PRELIMINARES

2.1 Fundamentos de geometria semialgébrica real

2.1.1 Conjuntos semialgébricos

Nesta seção, faremos uma breve exposição dos conceitos e definições iniciais em geometria semialgébrica real, bem como algumas versões do teorema de Tarski-Seidenberg e como tal propriedade estrutural pode ser usada para deduzir que certos conjuntos e aplicações são semialgébricas. Um estudo mais aprofundado pode ser encontrado em (COSTE, 2000b).

Definição 2.1.1. *Um conjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ é qualquer conjunto de pontos $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo uma combinação booleana de equações e inequações polinomiais com coeficientes reais. Dito de outra forma, definimos os conjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^n$ como a menor classe SA_n de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que:*

1. *Para cada $P \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$, os conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}$ pertencem a SA_n.*
2. *Para todos $A,B \in SA_n$, cada um dos conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, e $\mathbb{R}^n \setminus A$ pertencem a SA_n.*

Exemplo 2.1.2. *Os exemplos a seguir são obtidos de modo imediato pela definição.*

1. *Todo conjunto finito $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico.*
2. *Todo conjunto algébrico é semialgébrico.*
3. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, entao $A \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é semialgébrico.*
4. *Os conjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}$ são uniões finitas de pontos e intervalos abertos ou fechados.*
5. *O produto cartesiano $A \times B$ de conjuntos semialgébricos $A \in SA_m$ e $B \in SA_n$ é semialgébrico.*
6. *Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial. Se $A \in SA_n$, então $F^{-1}(A) \in SA_m$.*
7. *Para cada $p = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ fixos, a bola de centro x e raio r:*

$$\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n}(x_i - p_i)^2 \le r^2\}$$

   é um conjunto semialgébrico.

8. *Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\Delta_n = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \ge 0\,;\, x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ o n-simplexo de probabilidades. Para qualquer lista fixa de números reais a_{ij}, $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m$,*

o conjunto de estratégias optimais e valor do jogo de soma zero para duas pessoas, isto é:

$$\{(x,y,v) \in \mathbb{R}^{n+m+1} \mid x \in \Delta_n \ ; \ y \in \Delta_m \ ; \ v \in \mathbb{R} \ ; \ \forall j, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq v \ ; \ \forall i, \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} \leq v\}$$

é um conjunto semialgébrico.

Definição 2.1.3. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto semialgébrico. Uma aplicação $f : A \to \mathbb{R}^n$ é semialgébrica se seu gráfico $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ é semialgébrico. Se $m = n = 1$, dizemos que f é uma função semialgébrica.*

Exemplo 2.1.4. *Os exemplos a seguir são aplicações semialgébricas.*

1. *A aplicação $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, para todo $|x| \leq 1$, é semialgébrica.*
2. *Toda aplicação polinomial é semialgébrica. De modo geral, toda aplicação regular (i.e. aplicaçãoes cujas coordenadas são funções racionais cujo denominadores não se anulam sobre um domínio semialgébrico) são aplicações semialgébricas.*

Observação 2.1.5. *A estrutura $\{SA_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um exemplo específico de uma estrutura O-minimal polinomialmente limitada sobre $\mathbb{R}$, e os conjuntos e aplicações semiagébricos, exemplos de conjuntos definívies. Para um estudo mais aprofundado sobre tais estruturas, a leitura de (DRIES, 1998) e (COSTE, 2000a) é recomendada.*

A propriedade de estabilidade mais fundamental dos conjuntos semialgébricos é o teorema de Tarski-Seindenberg, que é enunciado a seguir.

Teorema 2.1.6 (Tarski-Seidenberg: Versão de Projeção)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto semialgébrico e seja $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ a projeção nas primeiras n coordenadas. Então $\pi(A) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto semialgébrico.*

Demonstração. Veja (COSTE, 2000b), Theorem 2.3. □

Exemplo 2.1.7. *As propriedades a seguir são consequências do teorema de Tarski-Seidenberg.*

1. *Seja $k < n$ inteiros positivos, $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e seja $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a projeção em k das n coordenadas. Então $\pi(A) \subset \mathbb{R}^k$ é um conjunto semialgébrico.*
2. *Se $f : A \to B$ é uma aplicação semialgébrica, então A e $f(A) \subseteq B$ são conjuntos semialgébricos. Além disso, dado $C \subseteq B$ semialgébrico, $f^{-1}(B) = A$ é semialgébrico.*

3. *Um homeomorfismo semialgébrico $h : A \to B$ é uma aplicação semialgébrica, contínua e bijetiva. Se h é homemorfismo semialgébrico, então h^{-1} também é homeomorfismo semialgébrico.*
4. *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são aplicações semialgébricas, então $g \circ f : A \to C$ é aplicação semialgébrica.*
5. *Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e sejam $f, g : A \to \mathbb{R}^n$, $h : A \to \mathbb{R}$ aplicações semialgébricas. Então $f \pm g : A \to \mathbb{R}^n$ e $hf : A \to \mathbb{R}^n$ são aplicações semialgébricas.*
6. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, então o fecho $\overline{A}$, o interior $int(A)$ e a fronteira ∂A são conjuntos semialgébricos.*

Do teorema de Tarski-Seindenberg resulta que imagens e imagens inversas de conjuntos semialgébricos por aplicações semialgébricas são semialgébricas. Também, composições de aplicações semialgébricas são semialgébricas, e também o fecho e o inteiror de todo conjunto semialgébrico é semialgébrico.

Outra aplicação do teorema de Tarski-Seindenberg diz respeito à definição de conjuntos semialgébricos por meio de uma linguagem lógica, mediante as fórmulas de primeira ordem.

Definição 2.1.8. *Uma fórmula de primeira ordem é o menor conjunto de fórmulas que seguem as seguintes regras:*

1. *Se $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, então $P = 0$ e $P > 0$ são fórmulas de primeira ordem.*
2. *Se γ, δ são fórmulas de primeira ordem, então $\gamma \wedge \delta$, $\gamma \vee \delta$ e $\gamma \neg \delta$ são fórmulas de primeira ordem.*
3. *Se γ é uma fórmula de primeira ordem e x uma variável sobre $\mathbb{R}$, então $\exists x \gamma$ e $\forall x \gamma$ são fórmulas de primeira ordem.*

As fórmulas obtidas utilizando apenas as regras (1) e (2) são denominadas livres de quantificadores. Pela definição, um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico se, e somente se, existe uma fórmula livre de quantificadores $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \in A \Leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n)$.

Theorem 2.1.9 (Tarski-Seidenberg: Versão de Eliminação de Quantificadores)**.** *Se $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$ é uma fórmula de primeira ordem, então o conjunto dos pontos $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$ é semialgébrico. Em outras palavras, toda fórmula de primeira ordem é equivalente a uma fórmula livre de quantificadores.*

Demonstração. Veja (COSTE, 2000b), Theorem 2.6. □

2.1.2 Séries de Puiseux e diferenciabilidade

Nesta seção, definiremos as séries de Newton-Puiseux, suas operações e propriedades básicas, e veremos sua utilidade no estudo de funções semialgébricas, sobretudo para obter as propriedades de monoticidade e diferenciabilidade ao redor de um ponto específico. Mais detalhes podem ser encontrados em (NEYMAN, 2003).

Definição 2.1.10. *Uma série de Puiseux sobre um corpo F é uma série formal f da forma $f = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M}$, onde $a_i \in F$, k é inteiro e M é um inteiro positivo. Em outras palavras, uma série de Puiseux é uma série formal de Laurent em potências fracionárias de x.*

Duas séries de Puiseux $f = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M}$ e $g = \sum_{j=l}^{\infty} b_j x^{j/N}$ são consideradas idênticas se, e somente se, para todo $i \geq k$ com $a_i \neq 0$, temos que $j = \frac{iN}{M}$ é um inteiro maior ou igual a l satisfazendo $b_j = a_i$, e para todo $j \geq l$ com $b_j \neq 0$, temos que $i = jMN$ é um inteiro maior ou igual a k satisfazendo $b_j = a_i$. Em particular, dado inteiros positivos M, N, a série de Puiseux $f = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M}$ é identificada com a série de Puiseux $f = \sum_{j=kN}^{\infty} \tilde{a}_j x^{j/MN}$, onde $\tilde{a}_{iN} = a_i$ para todo $i \geq k$ e $\tilde{a}_j = 0$ caso j não é divisível por N.

Portanto, dadas duas séries de Puiseux $f = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M}$ e $g = \sum_{j=l}^{\infty} b_j x^{j/N}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $M = N$ e $k = l$, e com essa suposição podemos definir a soma, a subtração e o produto de séries de Puiseux como as seguinte séries formais:

$$f \pm g = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M} \pm \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^{i/M} = \sum_{i=k}^{\infty} (a_i \pm b_i) x^{i/M}$$

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M} \right) \left(\sum_{i=k}^{\infty} b_i x^{i/M} \right) = \sum_{i=2k}^{\infty} (\sum_{j=k}^{i-k} a_j b_{i-j}) x^{i/M}$$

A coleção $F(x)^{\wedge}$ de todas as séries de Puiseux sobre um corpo F é um corpo, e se F é ordenado, $F(X)^{\wedge}$ também é ordenado ao se definir $\sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M} > 0$ sempre que $a_k > 0$. A coleção $\mathbb{R}(x)^{c\wedge}$ de todas as séries de Puiseux convergentes sobre $\mathbb{R}$, isto é, $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| x^{i/M}$ converge para todo $x > 0$ suficientemente pequeno, também é um corpo ordenado. Dado $f = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M} \in \mathbb{R}(x)^{c\wedge}$, temos que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que f é diferenciável em $(-\varepsilon, \varepsilon) \backslash \{0\}$, e para cada $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \backslash \{0\}$, $f'(x) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i}{M} a_i x^{i/M-1}$. Caso $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ exista e seja um número real, definimos tal limite como $f'(0)$.

Theorem 2.1.11. *Seja $\varphi : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ uma função semialgébrica. Então, existe um inteiro positivo M, um inteiro k, um real $\delta \in (0, \varepsilon)$ e uma sequência de números reais $a_k, a_{k+1}, \dots \in \mathbb{R}$*

tal que $\sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M}$ *converge e é igual a* $\varphi(x)$*, para todo* $0 < x < \delta$*. Em particular,* $\varphi(x)$ *é diferenciável e monótona, para todo x suficientemente pequeno.*

Demonstração. Veja (NEYMAN, 2003), Theorem 2. □

Observação 2.1.12. *Se* $\varphi : (0,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ *uma função semialgébrica, com série de Pusieux* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i/M}$*, escrevemos* $\varphi(x) = a_k x^{k/M} + o(x^{k/M})$*.*

2.1.3 Complexos simpliciais e estrutura local

Apresentaremos, de modo breve, os conceitos e resultados mais básicos sobre teoria dimensional em conjuntos semialgébricos. Mostraremos também alguns fatos elementares sobre topologia local de conjuntos semialgébricos, que culminam nas definições de vizinhança e link. A consulta de (COSTE, 2000b) pode ser feita para um maior aprofundamento.

Theorem 2.1.13. *Seja* $S \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto semialgébrico e sejam* $T_1, \ldots, T_m$ *uma coleção finita de subconjuntos semialgébricos de S. Então S pode ser decomposto como uma união finita* $S = \cup_{i=1}^{p} C_i$*, onde:*

- *cada* C_i *é semialgebricamente homeomorfo a um cubo aberto* $(0,1)^{d_i}$*, isto é, existe um homeomorfismo semialgébrico* $h_i : C_i \to (0,1)^{d_i}$*;*
- *o fecho de* C_i *em S é a união de* C_i *e alguns* C_j *com* $d_j < d_i$*;*
- *todo* T_k *é a união de alguns* C_i*.*

Demonstração. Veja (COSTE, 2000b), Corollary 3.8. □

Observação 2.1.14. *Cada decomposição de S como acima é chamada de* ***estratificação de S compatível com*** $T_1, \ldots, T_m$ *e cada* C_i *é denominado* ***strata*** *dessa estratificação. Para cada* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \infty$*, a estratificação é dita* C^k *se cada* h_i *é aplicação* C^k*. A dimensão de S é, por definição,* $d = \max\{d_i : i = 1, \ldots, p\}$*. Tal dimensão independe da estratificação escolhida (veja (COSTE, 2000b), Proposition 3.15).*

As definições seguintes acerca de complexos simpliciais foram baseadas no exposto em (LEE, 2010).

Definição 2.1.15. *Sejam* $0 \leq d \leq n$ *inteiros e sejam* $a_0, \ldots, a_d$ *pontos de* $\mathbb{R}^n$ *que são estão contidos num subespaço afim de dimensão* $d-1$*. O simplexo d-dimensional de vértices* $a_0, \ldots, a_d$

é definido como sendo o conjunto de dimensão d:

$$[a_0,\ldots,a_d] = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\lambda_0,\ldots,\lambda_d \in [0,1]\ ;\ \sum_{i=0}^{d}\lambda_i = 1\ ;\ x = \sum_{i=0}^{d}\lambda_i a_i\right\}$$

O simplexo aberto correnspondente a $\sigma = [a_0,\ldots,a_d]$ é denotado por:

$$int(\sigma) = (a_0,\ldots,a_d) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\lambda_0,\ldots,\lambda_d \in (0,1]\ ;\ \sum_{i=0}^{d}\lambda_i = 1\ ;\ x = \sum_{i=0}^{d}\lambda_i a_i\right\}$$

Definimos ainda uma face do simplexo $\sigma = [a_0,\ldots,a_d]$ como qualquer simplexo $\tau = [a_{i_0},\ldots,a_{i_k}]$ tal que $0 \leq k < d$ e $\{i_0,\ldots,i_k\} \subset \{0,\ldots,d\}$.

Definição 2.1.16. *Um complexo simplicial K é um conjunto de simplexos que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo $\sigma \in K$ e toda face τ de σ, $\tau \in K$;*
2. *Se $\sigma_1,\sigma_2 \in K$ e $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$, então $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é uma face de σ_1 e σ_2.*

Um complexo simplicial K é d-dimensional se a maior dimensão de um simplexo em K é igual a d. Um complexo simplicial K é d-dimensional puro K é d-dimensional e se todo simplexo de K, de dimensão menor que d, é uma face de um simplexo de K.

Dado um complexo simplicial K, definimos $|K| = \cup_{\sigma_i \in K}\sigma_i$; este é um conjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$, formado pela união disjunta dos conjuntos $int(\sigma_i)$, $\sigma_i \in K$.

Teorema 2.1.17 (Teorema da Triangulação de Lojasiewicz)**.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico localmente fechado e sejam $T_1,\ldots,T_m$ subconjuntos semialgébricos de S. Então, existe um par (K,h) de um complexo simplicial localmente finito K e um homeomorfismo semialgébrico $h : |K| \to S$ tal que $\{h(int(\sigma))\ ;\ \sigma \in K\}$ é uma estratifiicação C^k de S compatível com $T_1,\ldots,T_m$. Em particular, se S é um conjunto semialgébrico compacto, K é um complexo simplicial finito.*

Demonstração. Veja (LOJASIEWICZ, 1964), Theorem 2, e (SHIOTA, 1997), II.2.1. □

Observação 2.1.18. *Dado um conjunto semialgébrico S e um complexo simplicial K satisfazendo o Teorema da Triangulação de Lojasiewicz, dizemos que S é um conjunto semialgébrico d-dimensional puro se K é um complexo simplicial d-dimensional puro.*

Os dois resultados estruturais a seguir são de grande importância para a fundamentação da topologia local dos conjuntos semialgébricos.

Lema 2.1.19 (Lema de Seleção de Curva)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e seja a um ponto de acumulação de A. Então, existe uma aplicação semialgébrica e contínua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma((0,1]) \subset S$.*

Demonstração. Veja (COSTE, 2000b), Theorem 3.13. □

Teorema 2.1.20 (Estrutura Cônica Local)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico e a um ponto não isolado de A. Para $\varepsilon > 0$, seja $\mathbb{B}(a,\varepsilon)$ (resp. $\mathbb{S}(a,\varepsilon)$) a bola aberta (resp. a esfera) de centro a e raio ε, isto é:*

$$\mathbb{B}(a,\varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p-a\| < \varepsilon\} \; ; \; \mathbb{S}(a,\varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p-a\| = \varepsilon\}$$

Seja ainda $a * (\mathbb{S}(a,\varepsilon) \cap A)$ o cone de vértice a e base $\mathbb{S}(a,\varepsilon) \cap A$, isto é:

$$a * (\mathbb{S}(a,\varepsilon) \cap A) = \{\lambda a + (1-\lambda)x \mid \lambda \in [0,1] \; ; \; x \in \mathbb{S}(a,\varepsilon) \cap A\}$$

Então, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e um homeomorfismo semialgébrico $h : \mathbb{B}(a,\varepsilon) \cap A \to a * (\mathbb{S}(a,\varepsilon) \cap A)$ tal que $\|h(x) - a\| = \|x - a\|$, para todo $x \in \mathbb{B}(a,\varepsilon) \cap A$, e $h|_{\mathbb{S}(a,\varepsilon)\cap A} = id_{\mathbb{S}(a,\varepsilon)\cap A}$.

Demonstração. Veja (COSTE, 2000b), Theorem 4.4. □

Corolário 2.1.21. *Todo conjunto semialgébrico conexo é conexo por caminhos.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico conexo. Como o cone $a * (\mathbb{S}(a,\varepsilon) \cap A)$ é conexo por caminhos, temos que A é localmente conexo por caminhos, e como A é conexo, segue que A é conexo por caminhos. □

Como consequência do Teorema da estrutura cônica local, as definições seguintes de vizinhança e link estão bem definidas.

Definição 2.1.22. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico e seja $p \in X$. Definimos a vizinhança de X em p como o tipo topológico do conjunto:*

$$X_p[t] = X \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < t\}$$

E o link de X em p como o tipo topológico do conjunto:

$$X \cap \mathbb{S}^{n-1}(p,t); \; S(t) = \{x \in X : \|x\| = t\}$$

para cada $t > 0$ suficientemente pequeno.

2.2 Excertos de geometria Lipschitz

2.2.1 Aplicações bi-Lipschitz em espaços métricos

A seção a seguir visa estabelecer o conceito de aplicações bi-Lipschitz em espaços métricos e expor alguns resultados clássicos a respeito, cuja demonstração será realizada para fins de completitude.

Definição 2.2.1. *Dados dois espaços métricos $(X_1,d_1),(X_2,d_2)$, dizemos que uma aplicação $\varphi : X_1 \to X_2$ é **bi-Lipschitz com respeito às métricas** d_1,d_2 (abreviadamente bi-Lipschitz) se existe um número real $C \geq 1$ tal que:*

$$\frac{1}{C} \cdot d_1(p,q) \leq d_2(\varphi(p),\varphi(q)) \leq C \cdot d_1(p,q), \quad \forall p,q \in X_1$$

Para cada $C \geq 1$ que satisfaz tal condição, dizemos que a aplicação φ é C-bi-Lipschitz. Dizemos ainda que os espaços métricos (X_1,d_1), (X_2,d_2) são bi-Lipschitz equivalentes (ou bi-Lipschitz homeomorfos) se existe uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi : X_1 \to X_2$.

Observação 2.2.2. *A equivalência bi-Lipschitz é, evidentemente, uma relação de equivalência sobre o conjunto dos espaços métricos.*

Proposição 2.2.3. *Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos, e sejam $U_1 \subseteq X_1, U_2 \subseteq X_2$ conjuntos abertos tais que $\overline{U_1} = X_1, \overline{U_2} = X_2$. Se $\varphi : X_1 \to X_2$ é um homeomorfismo, tal que $\varphi(U_1) = U_2$ e $\varphi|_{U_1} : U_1 \to U_2$ é uma aplicação C-bi-Lipschitz, então φ é uma aplicação C-bi-Lipschitz de X_1 em X_2 (com respeito às métricas d_1,d_2).*

Demonstração. Dados $p,q \in X_1$, existem sequências $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U_1$ tais que $p_n \to p$ e $q_n \to q$ quando $n \to \infty$. Sendo φ contínua (por conta do homeomorfismo), temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_0 > 0$ inteiro tal que, para todo $n > N_0$:

$$d_1(p,p_n), d_1(q,q_n), d_2(\varphi(p),\varphi(p_n)), d_2(\varphi(q),\varphi(q_n)) < \varepsilon$$

Além disso, $\varphi|U_1$ é C-bi-Lipschitz, donde, para todo $n > N_0$, temos:

$$d_2(\varphi(p),\varphi(q)) \leq d_2(\varphi(p),\varphi(p_n)) + d_2(\varphi(p_n),\varphi(q_n)) + d_2(\varphi(q_n),\varphi(q)) <$$

$$< \varepsilon + C \cdot d_1(p_n,q_n) + \varepsilon \leq 2\varepsilon + C \cdot (d_1(p_n,p) + d_1(p,q) + d_1(q,q_n)) <$$

$$< 2\varepsilon + C \cdot (\varepsilon + d_1(p,q) + \varepsilon) = 2(C+1)\varepsilon + C \cdot d_1(p,q)$$

Como tal desigualdade vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $d_2(\varphi(p),\varphi(q)) \leq C \cdot d_1(p,q)$. De modo análogo, temos que $d_1(p,q) \leq C \cdot d_2(\varphi(p),\varphi(q))$. Portanto, φ é C-bi-Lipschitz e o resultado está demonstrado. $\square$

Proposição 2.2.4. *Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos e seja $\varphi : X_1 \to X_2$ uma aplicação C-bi-Lipschitz com respeito às métricas d_1,d_2, para algum $C \geq 1$. Então, para toda curva retificável $\gamma : [0,1] \to X$, temos $\frac{1}{C} \cdot l_1(\gamma) \leq l_2(\varphi(\gamma)) \leq C \cdot l_1(\gamma)$. Ademais, $l_1(\gamma) = \infty \Leftrightarrow l_2(\varphi(\gamma)) = \infty$. Aqui, l_1,l_2 denotam comprimento da curva nas métricas d_1,d_2, respectivamente.*

Demonstração. Seja $S = \{(n,T) : n \in \mathbb{N}; T = \{t_0,t_1,\ldots,t_{n+1} : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n + 1 = 1\}\}$. Dado um inteiro positivo n e reais $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{n} d_1(\gamma(t_k),\gamma(t_{k+1})) \leq \left(\sum_{k=0}^{n} C \cdot (d_2(\varphi(\gamma(t_k)),\varphi(\gamma(t_{k+1}))))\right) \leq$$

$$\leq C \cdot \sup_{(n,T)\in S} \left(\sum_{k=0}^{n} d_2(\varphi(\gamma(t_k)),\varphi(\gamma(t_{k+1})))\right) = C \cdot l_2(\varphi(\gamma)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1(\gamma) = \sup_{(n,T)\in S} \left(\sum_{k=0}^{n} d_1(\gamma(t_k),\gamma(t_{k+1}))\right) \leq C \cdot l_2(\varphi(\gamma))$$

Analogamente, $l_2(\varphi(\gamma)) \leq C \cdot l_1(\gamma)$, provando o resultado. Tais desigualdades implicam $l_1(\gamma) < \infty \Leftrightarrow l_2(\varphi(\gamma)) < \infty$, o que resulta na segunda afirmação da proposição. $\square$

2.2.2 Métricas exterior, intrínseca e ambiente

Nesta seção, estabelecemos as métricas exterior, intrínseca e ambiente para conjuntos em $\mathbb{R}^n$ e provamos algumas proposições envonvendo tais métricas.

Definição 2.2.5. *Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, definimos a* ***métrica exterior de*** *X como a aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, dada por $d(x,y) = \|x-y\|$, para todos $x,y \in X$.*

Se X é conexo por caminhos, definimos também a ***métrica intrínseca de*** *X como a aplicação $d_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$, dada por $d_X(x,y) = \inf\{l(\alpha)\}$, para todos $x,y \in X$, onde o ínfimo é tomado sobre todos os caminhos retificados $\alpha \subset X\backslash\{0\}$ de x a y, e $l(\alpha)$ é o comprimento de α. Se tal caminho retificado α não existe, defina $d_X(x,y) = \infty$.*

Observação 2.2.6. *É evidente que as definições vistas acima satisfazem as propriedades de uma métrica.*

Definição 2.2.7. *Dados dois conjuntos $X_1 \subset \mathbb{R}^m$, $X_2 \subset \mathbb{R}^n$, uma* ***aplicação bi-Lipschitz exterior entre*** *X_1, X_2 é uma aplicação bi-Lipschitz com respeito às metricas exteriores de X_1, X_2, e uma* ***aplicação bi-Lipschitz intrínseca entre*** *X_1, X_2 (assuma X_1, X_2 conexos por caminhos) é uma aplicação bi-Lipschitz com respeito às metricas intrínsecas de X_1, X_2. Finalmente, uma* ***aplicação bi-Lipschitz ambiente entre*** *X_1, X_2 é uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, com respeito à métrica euclidiana, tal que $\varphi(X_1) = X_2$ (se tal aplicação bi-Lipschitz a existir, então $m = n$).*

Definição 2.2.8. *Dados dois conjuntos $X_1 \subset \mathbb{R}^m$, $X_2 \subset \mathbb{R}^n$, e dados $p \in X_1$, $q \in X_2$, uma* ***aplicação bi-Lipschitz exterior (resp. intrínseca) entre*** *$(X_1, p), (X_2, q)$ é uma aplicação bi-Lipschitz exterior (resp. intrínseca) $\varphi : X_1 \cap U \to X_2 \cap V$, onde U é uma vizinhança de p e V é uma vizinhança de q. Uma* ***aplicação bi-Lipschitz ambiente entre*** *$(X_1, p), (X_2, q)$ é uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi : U \to V$, com respeito à métrica euclidiana (U é uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^m$ e V é uma vizinhança de q em $\mathbb{R}^n$), tal que $\varphi(X_1 \cap U) = X_2 \cap V$. Denotaremos tais aplicações entre germes por $\varphi : (X_1, p) \to (X_2, q)$.*

Proposição 2.2.9. *Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos e não vazios, e sejam $\psi : \overline{U} \to \overline{V}$, $\varphi : \overline{V} \to \overline{V}$ aplicações bi-Lipschitz exteriores. Se $\varphi(p) = p$ para todo $p \in \partial V$, então, a aplicação $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por:*

$$\Phi(p) = \begin{cases} p, & p \notin U \\ \psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi(p), & p \in \overline{U} \end{cases}$$

é uma aplicação bi-Lipschitz exterior.

Demonstração. Suponha que φ, ψ sejam C-bi-Lipschitz, para algum $C \geq 1$. Assim, a aplicação $\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi : \overline{U} \to \overline{U}$ é aplicação C^3-bi-Lipschitz. Note também que, para $p \in \partial U$, $\psi(p) \in \partial V$ (pois ψ é homeomorfismo), de modo que $\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi(p) = \psi^{-1} \circ \psi(p) = p$, o que mostra que Φ está bem definida.

Agora, provemos que Φ é C^3-bi-Lipschitz. Se $p, q \in U$ ou $p, q \notin U$, o resultado é imediato. Caso $p \in U, q \notin U$, seja $r \in \partial U$ um ponto no segmento de reta $\overline{pq}$. Assim:

$$|\Phi(p) - \Phi(q)| \leq |\Phi(p) - \Phi(r)| + |\Phi(r) - \Phi(q)| = |\Phi(p) - \Phi(r)| + |r - q| \leq$$

$$\leq C^3 \cdot |p - r| + |r - q| \leq C^3 \cdot (|p - r| + |r - q|) = C^3 \cdot |p - q|$$

Analogamente, temos que $|p-q| \leq C^3 \cdot |\Phi(p) - \Phi(q)|$, e o resultado está provado. $\square$

Proposição 2.2.10. *Sejam $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos conexos por caminhos tais que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, e sejam ainda $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, tais que $\varphi_1 : X_1 \to Y_1$ e $\varphi_2 : X_2 \to Y_2$ sejam aplicações bi-Lipschitz intrínsecas satisfazendo $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ para todo $p \in X_1 \cap X_2$. Então, se $X = X_1 \cup X_2$ e $Y = Y_1 \cup Y_2$, a aplicação $\varphi : X \to Y$, dada por $\varphi(p) = \varphi_i(p)$, se $p \in X_i$ ($i = 1,2$), é uma aplicação bi-Lipschitz intrínseca.*

Demonstração. Note inicialmente que $\varphi_1(p) = \varphi_2(p), \forall p \in X_1 \cap X_2$, o que implica que φ está bem definida. Além disso, como φ_1, φ_2 são homeomorfismos (pois são aplicações bi-Lipschitz), então φ é homeomorfismo, pelo lema da colagem para homeomorfismos. Observe também que, como X_1, X_2 são conexos por caminhos, $X = X_1 \cup X_2$ é conexo por caminhos e como φ é homeomorfismo, Y também é conexo por caminhos.

Para $k = 1,2$, note que, de $X_k \subseteq X$ e $Y_k \subseteq Y$, temos $d_{X_k}(a,b) \geq d_X(a,b), \forall a,b \in X_k$ e $d_{Y_k}(a,b) \geq d_Y(a,b), \forall a,b \in Y_k$. Suponha que φ_k seja aplicação C_k-bi-Lipschitz intrínseca e que $C = \max\{C_1, C_2\}$. Provaremos que se $d_X(p,q) < \infty$, então:

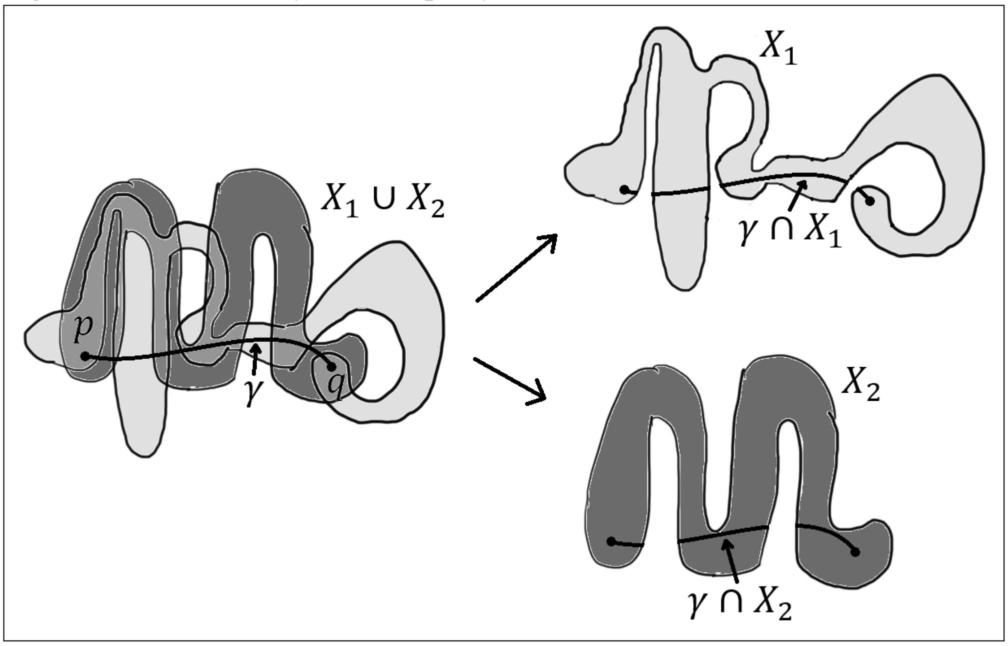
$$\frac{1}{2C} \cdot d_X(p,q) \leq d_Y(\varphi(p), \varphi(q)) \leq 2C \cdot d_X(p,q), \quad \forall p,q \in X$$

Considere uma curva retificável $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ e $l_X(\gamma) < l + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Temos que $\gamma \cap X_1$ e $\gamma \cap X_2$ são uniões de curvas e pontos, cada um, cuja soma dos comprimentos em X_1, X_2 é menor ou igual ao comprimento da curva em X.

Pela Proposição 2.2.4, a soma dos comprimentos em Y_1 de $\varphi(\gamma \cap X_1) = \varphi_1(\gamma \cap X_1)$ é menor ou igual a $C_1 \cdot l(\gamma) < C \cdot (l + \varepsilon)$, e a soma dos comprimentos em Y_2 de $\varphi(\gamma \cap X_2) = \varphi_2(\gamma \cap X_2)$ é menor ou igual a $C_2 \cdot l(\gamma) < C \cdot (l + \varepsilon)l$. Portanto, o comprimento em Y de $\varphi(\gamma) = \varphi_1(\gamma \cap X_1) \cup \varphi_2(\gamma \cap X_2)$ é menor ou igual à soma dos comprimentos de $\varphi_1(\gamma \cap X_1)$ em Y_1 e de $\varphi_2(\gamma \cap X_2)$ em Y_2, que é menor que $C \cdot (l + \varepsilon) + C \cdot (l + \varepsilon) = 2C \cdot (l + \varepsilon)$. Como podemos tomar $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que $l_Y(\varphi(\gamma)) \leq 2C \cdot l_X(\gamma)$.

Trabalhando com φ^{-1}, provamos de modo similar que $l_X(\gamma) \leq 2C \cdot l_Y(\varphi(\gamma))$, o que encerra a demonstração no caso $d_X(p,q) < \infty$. Um argumento análogo prova a proposição no caso $d_Y(\varphi(p), \varphi(q)) < \infty$, e isso faz com que $d_X(p,q) = \infty \Leftrightarrow d_Y(\varphi(p), \varphi(q)) = \infty$, encerrando a demonstração. $\square$

Figura 1 – Demonstração da Proposição 2.2.10



Fonte: elaborado pelo autor.

2.2.3 Diferenciabilidade em aplicações bi-Lipschitz

Esta seção será devotada à demonstração de proposições relacionadas a aplicações Lipschitz diferenciáveis. As ideias de estimativas de curva pelo jacobiano foram baseadas no trabalho realizado em (KURDYKA; ORRO, 1997), e as estimativas acerca da norma da matriz inversa são baseadas nos argumentos vistos em (DAHLEH *et al.*, 2004).

Proposição 2.2.11. *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e conexo por caminhos, e seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $X = \{(p, f(p)) \mid p \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de f, $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base ortonormal canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$, $R = span\{e_1, \dots, e_n\} \simeq \mathbb{R}^n$ e $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to R$ a projeção, ou seja, $\pi(p,t) = p$, para todo $p \in R$. Se existe $\delta > 0$ tal que $\angle(T_q(X), R) < \frac{\pi}{2} - \delta$, para todo $q \in X$, então $\pi|_{\overline{X}}$ é uma aplicação bi-Lipschitz intrínseca.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\pi|_{\overline{X}}$ é injetiva (pois é projeção de gráfico de função), e a condição $\angle(T_p(X), R) < \frac{\pi}{2} - \delta$ implica que $\pi|_X$ é difeomorfismo local. Portanto, $\pi|_X$ é difeomorfismo global, cuja inversa é $\varphi : U \to X$; $\varphi(x_1, ..., x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, ..., x_n))$. Ademais, a condição $\angle(T_p(X), R) < \frac{\pi}{2} - \delta$ implica também que $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| < \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = M$. O jacobiano de φ é dado por:

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(n+1)\times n}$$

Assim, dados $a,b \in U$ e $\varepsilon > 0$, sendo $\gamma : [0,1] \to X$ uma curva suave de comprimento $l(\gamma)$ tal que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ e $l(\gamma) < d_U(a,b) + \varepsilon$, temos:

$$d_X(\varphi(a),\varphi(b)) \leq l(\varphi(\gamma)) = \int_0^1 \|(\varphi\circ\gamma)'(t)\|\,dt = \int_0^1 \|J_\varphi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\|\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 + (\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t))^2}\,dt \leq \int_0^1 \sqrt{1+M^2}\|\gamma'(t)\|\,dt =$$

$$= \sqrt{1+M^2}\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \sqrt{1+M^2}\cdot l(\gamma) < \sqrt{1+M^2}(d_X(a,b)+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow d_Y(\varphi_0(a),\varphi_0(b)) < \sqrt{1+M^2}\cdot d_X(a,b) + \sqrt{1+M^2}\cdot\varepsilon$$

Como tal desiguladade vale para todo $\varepsilon > 0$, então $d_X(\varphi(a),\varphi(b)) \leq \sqrt{1+M^2}\cdot d_X(a,b)$. Isso, somado ao fato de que $d_X(\varphi(a),\varphi(b)) \geq d_U(a,b)$ (consequência direta da projeção) mostram que φ é bi-Lipschitz intrínseca, donde $\pi|_X$ também é. Pela Proposição 2.2.3, $\pi|_{\overline{X}}$ é bi-Lipschitz intrínseca, completando a demonstração. □

Proposição 2.2.12. *Sejam $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos conexos e abertos, e seja $\varphi : \overline{X} \to \overline{Y}$ um homeomorfismo tal que $\varphi_0 := \varphi|_X : X \to Y$ é um difeomorfismo. Se J_{φ_0} é positivamente limitado em X, isto é, se existe $M > 0$ tal que, para todo $p \in X$, $\frac{1}{M} < \left\|J_{\varphi_0}(p)\right\| < M$ (J denota o jacobiano) e se uma das duas condições acontecer:*

1. *$J_{\varphi_0}^{-1}$ é positivamente limitado em Y;*
2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $p \in X$, $C > \left|\det J_{\varphi_0}(p)\right| > \frac{1}{C}$*

Então φ é uma aplicação bi-Lipschitz intrínseca.

Observação 2.2.13. *$\|\cdot\|$ denota uma norma matricial fixa. Observe que, como todas as normas matriciais em $\mathbb{R}^{n^2}$ são equivalentes, então o fato de uma matriz ser positivamente limitado em todo X ou e todo X^{-1} independe da norma escolhida. Salvo mencionado contrário, em todas as vezes em que o módulo do jacobiano será calculado, utilizaremos a norma do máximo.*

Demonstração. Inicialmente, provemos que a condição (2) implica a condição (1). Considere a norma em $M_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\| := \sup_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ \|v\|=1}} \|Av\|$$

Sabe-se que, para toda matriz invertível A de ordem n:

$$1 = \|I_n\| = \left\|AA^{-1}\right\| \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \Rightarrow \frac{1}{\|A\|} \leq \left\|A^{-1}\right\|$$

E se $\sigma_1(A), \sigma_2(A) \ldots, \sigma_n(A)$ são os valores singulares de A, com $\sigma_1(A) \leq \cdots \leq \sigma_n(A)$, então $\|A\| = \sigma_n(A)$, $\left\|A^{-1}\right\| = \dfrac{1}{\sigma_1(A)}$ e $\det A = \sigma_1(A) \cdot \sigma_2(A) \ldots \sigma_n(A)$, donde:

$$\frac{\|A\|^{n-1}}{\det A} = \frac{\sigma_n(A)^{n-1}}{\sigma_1(A) \cdot \sigma_2(A) \ldots \sigma_n(A)} = \frac{1}{\sigma_1(A)} \cdot \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{\sigma_n(A)}{\sigma_k(A)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sigma_1(A)} \cdot \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{\sigma_k(A)}{\sigma_k(A)}\right) = \frac{1}{\sigma_1(A)} = \left\|A^{-1}\right\|$$

Portanto:

$$\frac{1}{\|A\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{\|A\|^{n-1}}{\det A}$$

Dessa forma, se $A = J_{\varphi_0}(p)$, temos que $A^{-1} = J_{\varphi_0^{-1}}(\varphi(p))$, e como $\frac{1}{M} < \|A\| < M$ e $C > \det A, \det A^{-1} > \dfrac{1}{C}$, vem:

$$\frac{1}{M} < \frac{1}{\|A\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{\|A\|^{n-1}}{\det A} < M^{n-1} \cdot C$$

Demonstrando que $J_{\varphi_0^{-1}}$ é positivamente limitado em Y. Portanto, basta provar que φ é bi-Lipschitz assumindo apenas a condição (1). Por simplicidade, suponha que para todo $p \in X$, $\frac{1}{M} < \left\|J_{\varphi_0}(p)\right\|, \left\|J_{\varphi_0}^{-1}(\varphi_0(p))\right\| < M$.

Dados $a, b \in X$ e $\varepsilon > 0$, seja $\gamma : [0,1] \to X$ uma curva suave de comprimento $l(\gamma)$ tal que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ e $l(\gamma) < d_X(a,b) + \varepsilon$. Temos que:

$$d_Y(\varphi_0(a), \varphi_0(b)) \leq l(\varphi_0(\gamma)) = \int_0^1 \|(\varphi_0 \circ \gamma)'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|J_{\varphi_0}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\| \, dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 \|J_{\varphi_0}(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt \leq \int_0^1 M \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = M \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

$$= M \cdot l(\gamma) < M(d_X(a,b) + \varepsilon) \Rightarrow d_Y(\varphi_0(a), \varphi_0(b)) < M \cdot d_X(a,b) + M\varepsilon$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon > 0$, temos $d_Y(\varphi_0(a), \varphi_0(b)) \leq M \cdot d_X(a,b)$, para todos $a,b \in X$. Trabalhando com φ_0^{-1}, obtemos de modo análogo que $d_X(a,b) \leq M \cdot d_Y(\varphi_0(a), \varphi_0(b))$, provando assim que φ_0 é uma aplicação bi-Lipschitz. Como φ é um homoeomorfismo, a Proposição 2.2.3 garante que φ é aplicação bi-Lipschitz. $\square$

2.2.4 Conjuntos normalmente mergulhados

Aqui, definiremos o conceito de conjunto Lipschitz normalmente mergulhado e mostraremos alguns resultados técnicos elementares que serão úteis no decorrer desta tese.

Definição 2.2.14. *Dizemos que um conjunto conexo por caminhos $X \subset \mathbb{R}^n$ é **Lipschitz Normalmente Mergulhado (LNE)** se a métrica exterior e a métrica intrínseca são bi-Lipschitz equivalentes, isto é, existe uma constante $C \geq 1$ tal que:*

$$\frac{1}{C} \cdot d_X(x,y) \leq d(x,y); \quad \forall\, x,y \in X$$

*Neste caso, dizemos que X é C-LNE. Dado $p \in X$, dizemos que X é **Lipschitz normalmente mergulhado em** p (abreviadamente LNE em p) se existe uma vizinhança U de p tal que $X \cap U$ é LNE, ou, equivalente, que o germe (X,p) é LNE. Caso $X \cap U$ seja C-LNE, para algum $C \geq 1$, dizemos que (X,p) é C-LNE.*

Exemplo 2.2.15. *O gráfico da função modular $X = \{(t, \|t\|) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ é normalmente mergulhado. Com efeito, dados $x = (a, \|a\|)$ e $y = (b, \|b\|)$, temos dois casos a analisar:*

- *Se $ab \geq 0$, então $d(x,y) = \sqrt{2}|a-b| = d_X(x,y)$.*
- *Se $ab < 0$ então $d(x,y) = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (b\sqrt{2})^2} \geq |a| + |b| = \frac{1}{\sqrt{2}} d_X(x,y)$*

Em todo caso, X é $\sqrt{2}$-LNE.

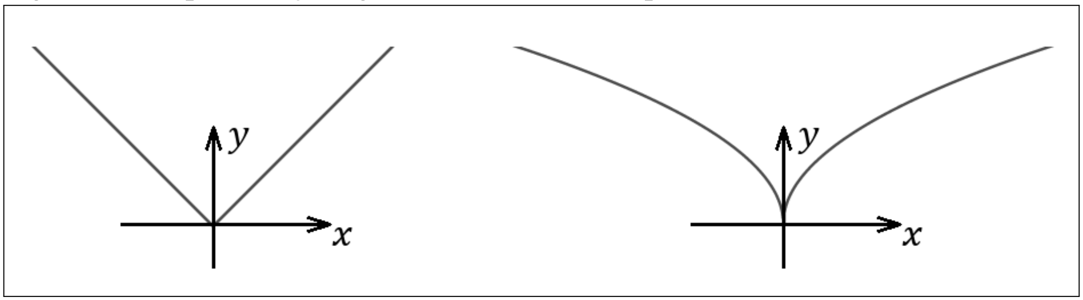
Exemplo 2.2.16. *O gráfico da cúspide $X = \{(t, |t|^{1/2}) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ não é normalmente mergulhado. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}})$ e $y_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}})$. Temos que $d(x_n, y_n) = 2n^{-1}$ e $d_X(x_n, y_n) = 2n^{-1/2} + o(n^{-1/2})$. Assim:*

$$d_X(x_n, y_n) = (\sqrt{n} + o(\sqrt{n}))d(x_n, y_n)$$

Como $\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \to \infty$ quando $n \to \infty$, não existe $C > 1$ tal que X é C-LNE.

As duas proposições seguintes são bastante conhecidos dentro da teoria de Geometria Lipschitz, mas daremos uma demonstração a cada uma delas, por completitude.

Figura 2 – Representações geométricas dos Exemplos 2.2.15 e 2.2.16



Fonte: elaborado pelo autor.

Proposição 2.2.17. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico normalmente mergulhado e seja $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação bi-Lipschtiz exterior. Então, $\Phi(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto semialgebrico normalmente mergulhado.*

Demonstração. Suponha que $C > 1$ é tal que X é C-LNE e Φ é C-bi-Lipschitz exterior. Dados $a = \Phi(p), b = \Phi(q) \in X$, seja $\gamma \subset X$ uma curva conectando p a q, de comprimento l. Como X é C-LNE, temos $l \leq C.\|p-q\|$, e como Φ é C-bi-Lipschitz exterior, pela Proposição 2.2.4, temos que o comprimento de $\Phi(\gamma)$ é menor ou igual a $C.l$. Portanto:

$$d_{\Phi(X)}(a,b) \leq C.l \leq C^2.\|p-q\| \leq C^3.\|a-b\|$$

Mostrando que $\Phi(X)$ é C^3-LNE. □

Proposição 2.2.18. *Sejam $x_1 < x_2$ números reais e sejam $f, g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ funções suaves por partes satisfazendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [x_1, x_2]$. Se existe $M > 0$ tal que $|f'(x)|, |g'(x)| < M$, para todo x onde f, g são diferenciáveis, então o conjunto:*

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x \leq x_2 \ ; \ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

É normalmente mergulhado.

Demonstração. Inicialmente, provemos o seguinte lema auxiliar:

Lema 2.2.19. *Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ pontos distintos. Se existe $T > 1$ tal que $\cos(\angle ABC) \leq 1 - \frac{2}{T^2}$, então:*

$$d(A,B) + d(B,C) \leq T \cdot d(A,C)$$

Demonstração. Por simplicidade, seja $x = d(A,B)$ e $y = d(B,C)$. Pela lei dos cossenos em ABC, temos que:

$$d(A,C)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot cos(\angle ABC) \geq x^2 + y^2 - 2xy\left(1 - \frac{2}{T^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{T^2}(x+y)^2 + \left(1 - \frac{1}{T^2}\right)(x-y)^2 \geq \frac{1}{T^2}(x+y)^2 = \left(\frac{d(A,B)+d(B,C)}{T}\right)^2$$

E o resultado está demonstrado. □

Voltando à demonstração da proposição, sejam $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B) \in X$. Se $x_A = x_B$, $\|A - B\| = d_X(A,B)$. Caso $x_A \neq x_B$, suponha sem perda de generalidade $x_A < x_B$ e suponha que $\lambda \in [0,1]$ satisfaça $y_A = \lambda g(x_A) + (1-\lambda) f(x_A)$. Defina:

$$\gamma : [x_A, x_B] \to \mathbb{R} \; ; \; \gamma(x) = \lambda g(x) + (1-\lambda) f(x) \; , \; \forall x \in [x_A, x_B]$$

E seja $C = (x_B, f(x_B))$. Observe que, para todo x onde f, g são diferenciáveis:

$$|\gamma'(x)| \leq \lambda |g'(x)| + (1-\lambda)|f'(x)| < \lambda M + (1-\lambda) M = M$$

Daí, o comprimento de γ é:

$$l(\gamma) = \int \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int \sqrt{1 + M^2} dx = \sqrt{1+M^2}(x_C - x_A) \leq \sqrt{1+M^2} \cdot \|A - C\|$$

Onde a integral foi tomada sobre todos os pontos suaves de f e g. Caso $C \neq B$, seja α o ângulo entre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. Note que, de $|\gamma'(x)| \leq M$ e de $x_C = x_B$, vem:

$$|\cot \alpha| = \frac{|y_C - y_A|}{x_C - x_A} \leq M \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\dfrac{1}{\cot^2 \alpha} + 1} \leq \frac{1}{\dfrac{1}{M^2} + 1} = 1 - \frac{2}{T^2}$$

Para algum $T > 1$. Daí, sendo $N = \sqrt{1+M^2} \cdot T$ e usando o Lema 2.2.19, vem:

$$d_X(A,B) \leq d_X(A,C) + d_X(C,B) = d_X(A,C) + \|C - B\| \leq l(\gamma) + \|C - B\| \leq$$

$$\leq \sqrt{1+M^2} \cdot \|A - C\| + \|C - B\| \leq \sqrt{1+M^2} \cdot (\|A - C\| + \|C - B\|)$$

$$\leq \sqrt{1+M^2} \cdot T \cdot \|A - B\| \Rightarrow d_X(A,B) \leq (T\sqrt{1+M^2}) \cdot \|A - B\|$$

Observe que tal conclusão também vale para $B = C$, pois:

$$d_X(A,B) \leq l \leq \sqrt{1+M^2} \cdot \|A - B\| \leq \sqrt{1+M^2}(T \cdot \|A - B\|) = (T\sqrt{1+M^2}) \cdot \|A - B\|$$

Logo como $d_X(A,B) \geq \|A - B\|$, segue que X é LNE, finalizando a prova. □

Para finalizar essa seção, enunciaremos dois resultados relevantes envolvendo conjuntos normalmente mergulhados. O primeiro desses resultados é o seguinte:

Teorema 2.2.20 (Decomposição em Panquecas). *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico fechado. Então existe uma estratificação $(X,0) = \cup(X_k,0)$ tal que:*

- *Cada X_k é normalmente mergulhado em $\mathbb{R}^n$;*
- $\dim(X_i \cap X_j) < \min\{\dim X_i, \dim X_j\}$, *para cada $i \neq j$.*

Uma decomposição satisfazendo tais condições é denominada ***Decomposição em Panquecas*** *de X.*

Observação 2.2.21. *O termo "decomposição em panquecas"foi introduzido em (BIRBRAIR; MOSTOWSKI, 2000), mas o conceito foi introduzido inicialmente em (KURDYKA, 1992), sob outro nome.*

O resultado a seguir, demonstrado por Mendes e Sampaio em (MENDES; SAMPAIO, 2021), será de suma importância para a conclusão de muitas proposições presentes neste trabalho.

Teorema 2.2.22. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico fechado, com $0 \in X$, tal que $(X-0,0)$ é um germe conexo. Então, X é LNE em 0 se, e somente se, existe uma constante $C \geq 1$ tal que $X \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = t\}$ é C-LNE para todo $t > 0$ suficientemente pequeno.*

2.3 Geometria Lipschitz das superfícies

2.3.1 Equivalências bi-Lipschitz

Nesta seção, introduziremos os conceitos de equivalência bi-Lipschitz intrínseca, exterior e ambiente. Observaremos também, mediante exemplos, que tais classifcações em conjuntos semialgébricos não são equivalentes de maneira geral.

Definição 2.3.1. *Dados dois conjuntos $X_1 \subset \mathbb{R}^m$, $X_2 \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que X_1, X_2 são bi-Lipschitz exterior (resp. intrínseca, ambiente) equivalentes se existe uma aplicação bi-Lipschitz exterior (resp. intrínseca, ambiente) entre X_1 e X_2. Dados $p \in X_1$, $q \in X_2$, dizemos que dois germes (X_1,p), (X_2,q) são bi-Lipschitz exterior (resp. intrínseca, ambiente) equivalentes se existem vizinhanças U de p e V de q e uma aplicação bi-Lipschitz exterior (resp. intrínseca, ambiente) entre $X_1 \cap U$ e $X_2 \cap V$.*

Observação 2.3.2. *Não é difícil ver que as equivalencias bi-Lipschitz exterior, intrínseca e ambiente definem uma relação de equivalência tanto nos conjuntos semialgébricos quanto no conjunto dos germes de conjuntos semialgébricos.*

Observação 2.3.3. *Pela Proposição 2.2.4, se X_1, X_2 são bi-Lipschitz exterior equivalentes, então X_1, X_2 são bi-Lipschitz intrínseca equivalentes. A recíproca, entretanto, não é verdadeira. Por exemplo, se:*

$$X_1 = \{(t, |t|) \ : \ -1 \leq t \leq 1\} \quad ; \quad X_2 = \{(t, |t|^{1/2}) \ ; \ -1 \leq t \leq 1\}$$

Então a aplicação $\varphi : X_1 \to X_2$, $(t, |t|) \mapsto (t, |t|^{1/2})$ é $\sqrt{2}$-bi-Lipschitz intrínseca, mostrando que X_1, X_2 são bi-Lipschitz intrínseca equivalentes. Entretanto se existisse uma aplicação $\Phi : X_1 \to X_2$ bi-Lipschitz exterior, então como X_1 é LNE (Exemplo 2.2.15), pela Proposição 2.2.17, $\Phi(X_1) = X_2$ é LNE, o que e uma contradição pelo Exemplo 2.2.16.

Observação 2.3.4. *É evidente que se X_1, X_2 são bi-Lipschitz ambiente equivalentes, então X_1, X_2 são bi-Lipschitz exterior equivalentes. A recíproca, entretanto, não é verdadeira. Por exemplo, considere $k > 4$ inteiro e considere os conjuntos $X_1 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ e $X_2 = U_1 \cup V_2 \cup V_3$, onde:*

$$U_1 = \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0 \ ; \ ((x-t)^2 + y^2 - t^2)((x+t)^2 + y^2 - t^2) = t^k\right\}$$

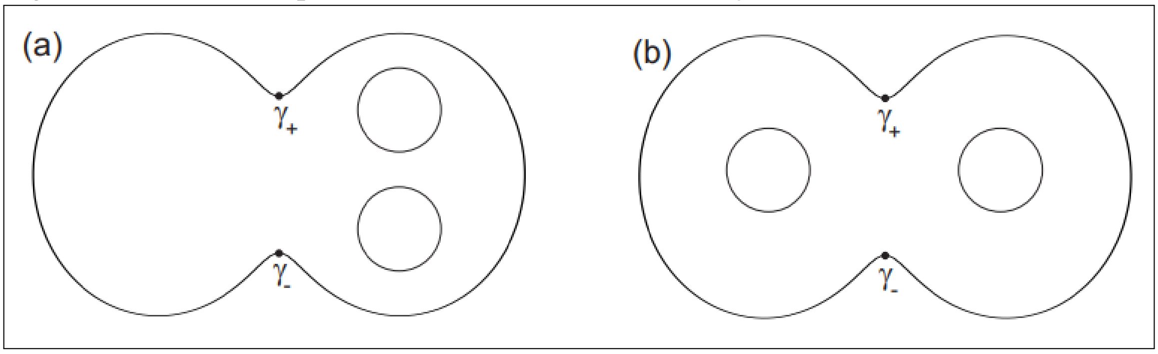
$$U_2 = \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0 \ ; \ (x-t)^2 + (y - \frac{t}{2})^2 = \frac{t^2}{16}\right\}$$

$$U_3 = \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0 \ ; \ (x-t)^2 + (y + \frac{t}{2})^2 = \frac{t^2}{16}\right\}$$

$$V_2 = \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0 \ ; \ (x-t)^2 + y^2 = \frac{t^2}{16}\right\}$$

$$V_3 = \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0 \ ; \ (x+t)^2 + y^2 = \frac{t^2}{16}\right\}$$

Figura 3 – Link das superfícies (a)X_1 e (b)X_2 da Observação 2.3.4



Fonte: (BIRBRAIR; GABRIELOV, 2019)

Os germes, na origem, das surpefícies X_1 e X_2 são bi-Lipschitz exterior equivalentes, ambiente topologicamente equivalentes (isto é, existe um homeomorfismo $\psi : (\mathbb{R}^3,0) \to (\mathbb{R}^3,0)$ tal que $\psi(X_1,0) = \psi(X_2,0)$), mas não são bi-Lipschitz equivalentes. A prova pode ser vista em (BIRBRAIR; GABRIELOV, 2019), Theorem 2.1., e a ideia principal de tal demonstração é a utilização do Teorema 2.3.26.

2.3.2 Arcos, triângulos de Hölder e cornetas

A seguir, definiremos as estruturas básicas necessárias para o estudo da geometria Lipschitz de superfícies semialgébricas. Enunciaremos também algumas proposições elementares acerca dessas estruturas.

Definição 2.3.5. *Um **arco em** $\mathbb{R}^n$ com ponto inicial p é um germe na origem de uma aplicação semialgébrica $\gamma : [0,t_0) \to \mathbb{R}^n$, para algum $t_0 > 0$, tal que $\gamma(0) = p$. Usualmente vamos identificar um arco γ com sua imagem $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ obtida ao intersectar γ com uma esfera de centro p e raio t, para t suficientemente pequeno. Note que tal definição é consistente, pelo Teorema da Estrutura Cônica Local.*

*Todo arco com ponto inicial na origem será denotado simplesmente como arco. Dado um germe na origem de um conjunto X, o conjunto de todos os arcos $\gamma \subset X$ é denominado **link de Valette de** X e é denotado por $V(X)$ (Veja (VALETTE, 2007)).*

Definição 2.3.6. *Dado um conjunto X e dois arcos distintos $\gamma_1, \gamma_2 \subset V(X)$, definimos a **ordem de tangência de** γ_1, γ_2 **na métrica exterior**, denotada por $tord(\gamma_1, \gamma_2)$, como o expoente $\beta \in \mathbb{Q}$ tal que existe uma constante $c > 0$ satisfazendo:*

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = ct^\beta + o(t^\beta)$$

*Observe que, se $\gamma_1 \neq \gamma_2$, pelo teorema de Newton-Puiseux, tais constantes c, β existem. Definimos ainda $tord(\gamma, \gamma) = \infty$ para toda curva $\gamma \in V(X)$. De modo similar, definimos a **ordem de tangência de** γ_1, γ_2 **na métrica intrínseca**, e denotamos tal ordem por $tord_X(\gamma_1, \gamma_2)$.*

Tais ordens de contato são números racionais (ou elementos do corpo de expoentes de uma estrutura o-minimal) satisfazendo $1 \leq tord(\gamma_1, \gamma_2) \leq tord_X(\gamma_1, \gamma_2)$, para todos $\gamma_1, \gamma_2 \in V(X)$. Ademais, X é LNE se, e somente se, $tord(\gamma_1, \gamma_2) \leq tord_X(\gamma_1, \gamma_2)$, para todos $\gamma_1, \gamma_2 \in V(X)$ (veja (BIRBRAIR; MENDES, 2018)).

As definições seguintes foram extraídas de (BIRBRAIR, 1999).

Definição 2.3.7. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um* ***triângulo curvilinear com vértices*** *a_1, a_2, a_3 se:*

- *A é uma subvariedade topológica 2-dimensional com fronteira;*
- *A fronteira ∂A de A é a união dos pontos a_1, a_2, a_3 e as curvas suaves conectando esses pontos, que são chamadas de arestas do triângulo;*
- *$int(A)$ é suave.*

Podemos escolher um de seus vértices e denotá-lo como ***vértice principal do triângulo****. Se a_1 é vértice principal de A, denotamos* ***os arcos de fronteira de*** *A como sendo os germes, em a_1, de cada uma das arestas conectando a_1 com a_2 e a_1 com a_3.*

Observação 2.3.8. *Dada uma superfície n-dimensional X, o conjunto dos pontos suaves de X é formado por todos os pontos $p \in X$ tais que o cone tangente a X em p é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Os demais pontos de X serão chamados de singulares e denotamos o conjunto de tais pontos como $sing(X)$.*

Definição 2.3.9. *Dado um número racional $\alpha \geq 1$, definimos o* ***α-triângulo de Hölder padrão*** *como o conjunto $T_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^\alpha\}$. definimos também as curvas $l_0 := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ e $l_1 := \{(x,x^\alpha) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ como os* ***arcos de fronteira de*** *T_α. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um α-triângulo de Hölder com vértice principal em $a \in X$ se existe uma aplicação bi-Lipschitz intrínseca $\varphi : (T_\alpha, 0) \to (X, a)$. Aqui, T_α, X são vistos como espaços métricos com a métrica induzida de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$, respectivamente, e os conjuntos $\varphi(l_0,0), \varphi(l_1,0)$ são definidos como os arcos de fronteira de X.*

Definição 2.3.10. *Dado um número racional $\beta \geq 1$, definimos a* ***β-corneta padrão*** *como o conjunto $H_\beta = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq t \leq 1 \,;\, x^2 + y^2 = t^{2\beta}\}$. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma β-corneta com vértice principal em $a \in X$ se existe uma aplicação bi-Lipschitz intrínseca $\varphi : (H_\beta, 0) \to (X, a)$. Aqui, H_β e X são vistos como espaços métricos com a métrica induzida de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente.*

Observação 2.3.11. *Para cada $n \geq 2$ inteiro, se considerarmos o mergulho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$; $f(x,y) = (y, 0, \ldots, 0, x)$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, definimos, para cada número racional $\alpha \geq 1$, o α-triângulo de Hölder padrão mergulhado em $\mathbb{R}^n$ como o conjunto $f(T_\alpha)$. É fácil ver que o α-triângulo de Hölder padrão mergulhado em $\mathbb{R}^n$ é um α-triângulo de Hölder com vértice principal na origem.*

Proposição 2.3.12. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2$ e $\beta_1 \neq \beta_2$. Então, os germes $(T_{\alpha_1}, 0)$, $(T_{\alpha_2}, 0)$ não são bi-Lipschitz intrínseca equivalentes, e os germes $(H_{\beta_1}, 0)$, $(H_{\beta_2}, 0)$ não são bi-Lipschitz intrínseca equivalentes.*

Demonstração. Veja (BIRBRAIR, 1999), Proposition 3.1, Lemma 5.1. □

Proposição 2.3.13. *Seja $f : (0,t_0) \to \mathbb{R}$ uma função semialgébrica cuja expansão na série de Newton-Puiseux é dada por $f(t) = at^{\alpha} + o(t^{\alpha})$, com $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$. Seja ainda $X = (0,0) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\ ;\ 0 < x < t_0\}$. Então X é um α-triângulo de Hölder com vértice principal na origem.*

Demonstração. Veja (BIRBRAIR, 1999), Proposition 4.1. □

Proposição 2.3.14. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico fechado e seja $a \in X$.*

- *Se o link de X em a é isomorfo a $[0,1]$, então X é um α-triângulo de Hölder, para algum racional $\alpha \geq 1$. Em particular, todo triângulo curvilinear é um triângulo de Hölder.*
- *Se o link de X em a é isomorfo a $\mathbb{S}^1$, então X é uma β-corneta, para algum racional $\beta \geq 1$.*

Demonstração. Imediato por Lemma 4.2, 4.3 e 5.1 de (BIRBRAIR, 1999). □

2.3.3 Complexos de Hölder e operações

Ainda de acordo com as definições feitas em (BIRBRAIR, 1999), neste seção veremos o conceito de complexo de Hölder, tanto abstrato quanto geométrico, e suas propriedades básicas.

Definição 2.3.15. *Seja G um grafo sem laço nem vértices isolados, $V(G)$ é o conjunto dos vértices de G e $E(G)$ é o conjunto das arestas de G. Definimos um* ***complexo de Hölder (abstrato) associado a*** *G como qualquer par (G, f) onde $f : E(G) \to \mathbb{Q}$ é uma função de valor racional tal que $f(e) \geq 1$, para todo $e \in E(G)$. Dizemos que dois complexos de Hölder (G_1, f_1) e (G_2, f_2) são* ***equivalentes (ou isomorfos)*** *se existir um isomorfismo de grafos $i : G_1 \to G_2$ tal que, para todo $e \in E(G_1)$, temos $f_2(i(e)) = f_1(e)$. Não é difícil ver que o isomorfismo de complexos de Hölder é uma relação de equivalência nos complexos de Hölder.*

Definição 2.3.16. *Seja (G, f) um complexo de Hölder. O conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de* ***complexo de Hölder geométrico correspondente de*** *(G, f) com vértice principal $a \in X$ se:*

1. *existe um homeomorfismo $\Psi : CG \to X$, onde CG é o cone topológico sobre G, tal que $Psi(A) = a$, onde A é o vértice de CG;*
2. *para cada $e \in E(G)$, o conjunto $Psi(Ce)$ é um $f(e)$-triângulo de Hölder (semialgébrico) com vértice principal em a, onde $Ce \subset CG$ é um subcone sobre e.*

A aplicação Psi é denominada aplicação representação de (G, f).

Theorem 2.3.17. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico 2-dimensional puro fechado e seja $a \in X$. Então existe um número $\varepsilon > 0$, um complexo de Hölder (G, f) tal que $\overline{\mathbb{B}^n(a,\varepsilon)} \cap X$ é um complexo de Hölder geométrico semialgébrico correspondente a (G, f), com vertice principal a. Aqui, $\overline{\mathbb{B}^n(a,\varepsilon)} \subset \mathbb{R}^n$ denota a bola fechada centrada em a e de raio ε. Em outras palavras, o germe (X, a) é um complexo de Hölder geométrico semialgébrico correspondente a (G, f)*

Demonstração. Veja (BIRBRAIR, 1999), Theorem 6.1. □

Definição 2.3.18. *Seja G um grafo sem laço nem vértices isolados e seja $v_0 \in V(G)$.*

1. *Dizemos que $v_0 \in V(G)$ é um vértice não crítico de G se for incidente com exatamente duas arestas diferentes $e_1, e_2 \in E(G)$ e essas arestas conectam dois vértices respectivos diferentes $v_1, v_2 \in V(G)$ com v_0.*
2. *Dizemos que $v_0 \in V(G)$ é um vértice de laço de G se v_0 é conectado com exatamente duas arestas diferentes $e_1, e_2 \in E(G)$ e essas arestas conectam um mesmo vértice $\tilde{v_0}$.*
3. *Dizemos que v_0 é vértice crítico de G se v_0 não é vértice não crítico, nem vértice de laço de G.*

Definição 2.3.19. *Seja G um grafo sem laço nem vértices isolados e seja $v_0 \in V(G)$ um vértice não crítico. Uma cirurgia Ω_{v_0} é uma operação que transforma o grafo G no grafo $\Omega_{v_0}(G)$, obtido ao excluir v_0, suas duas arestas incidentes e_1, e_2 conectadas respectivamente a v_1, v_2, e em seguida conectar v_1, v_2 por uma aresta e. Dizemos que G é um grafo simplificado se houver apenas vértices críticos e de laço de G. Finalmente, dizemos que G' é a simplificação de G se G' é grafo simplificado e G' é obtido de G usando um número finito (possivelmente nenhum) de cirurgias Ω_v.*

Proposição 2.3.20. *As seguintes afirmações sobre grafos finitos sem laços, nem vértices isolados G, G_1, G_2 são verdadeiras:*

1. *G possui uma siplificação e tal simplificação é única a menos de isomorfismo.*
2. *Se G_1', G_2' são as respectivas simplificações de G_1 e G_2, e se G_1, G_2 são grafos homeomorfos na topologia natural de grafos, então G_1' e G_2' são isomorfos.*

Demonstração. Veja (BIRBRAIR, 1999), Theorem 7.2. □

Definição 2.3.21. *Seja (G, f) um complexo de Hölder. Dizemos que o complexo de Hölder (G', f') é obtido de (G, f) se realizarmos em (G, f) uma das duas operações seguintes:*

- ***Operação** Ω_{v_0}: Suponha que o grafo G não é simplificado e que $v_0 \in V(G)$ é um vértice não crítico, com arestas incidentes e_1, e_2 conectadas respectivamente a v_1, v_2. Então defina $G' = \Omega_{v_0}(G)$ e se e é a aresta conectando v_1 e v_2, defina $f'(e) = \min\{f(e_1), f(e_2)\}$; para as demais arestas e, defina $f'(e) = f(e)$.*
- ***Operação** Δ_{v_0}: Suponha que v_0 é um vértice de laço de G, conectado a $\tilde{v}_0$ por duas arestas e_1, e_2. Então defina $G' = G$ e $f'(e_1) = f'(e_2) = \min\{f(e_1), f(e_2)\}$; para as demais arestas e, defina $f'(e) = f(e)$.*

Dizemos que o complexo de Hölder (G, f) é simplificado se as operações Ω_{v_0} e Δ_{v_0} não podem ser aplicadas a (G, f). Finalmente, dizemos que o complexo de Hölder (G', f') é a simplificação de (G, f) se:

1. *(G', f') é simplificado.*
2. *(G', f') é obtido de (G, f) usando as operações Ω_{v_0} ou Δ_{v_0} um número finito de vezes.*

Observação 2.3.22. *Cada complexo de Hölder possui uma simplificação. Duas simplificações do mesmo complexo de Hölder são isomorfas (Veja (BIRBRAIR, 1999), Theorem 7.2).*

Lema 2.3.23 (Lema de Simplificação)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico 2-dimensional puro fechado e seja $a \in X$. Seja (G, f) o complexo de Hölder tal que (X, a) é um complexo de Hölder geométrico semialgébrico correspondente a (G, f). Seja (G', f') a simplificação de (G, f). Então, (X, a) é um complexo de Hölder geométrico semialgébrico correspondente a (G', f'). A simplificação (G', f') de (G, f) é chamada de **Complexo de Hölder Canônico de** X **em** a.*

Demonstração. Veja (BIRBRAIR, 1999), Lemma 8.1. □

2.3.4 Teoremas de classificação e realização

Nesta última parte, enunciaremos alguns dos resultados mais relevantes acerca da classificação de germes de superfícies e conjuntos semialgébricos sob equivalência Lipschitz, bem como algumas conjecturas a respeito.

O estudo das cornetas, triângulos e complexos de Hölder realizados em (BIRBRAIR, 1999) resultaram na completa classificação de germes de superfícies 2-dimensionais sob equivalência bi-Lipschitz intrínseca. O critério de classficação é o que segue.

Teorema 2.3.24 (Teorema de Classificação Intrínseca)**.** *Sejam $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos 2-dimensionais puros fechados e sejam $a_1 \in X_1$, $a_2 \in X_2$. Então os germes (X_1, a_1) e (X_2, a_2) são bi-Lipschitz intríseca equivalentes se, e somente se, os complexos de Hölder canônicos de X_1 em a_1 e de X_2 em a_2 são equivalentes.*

Demonstração. Veja (BIRBRAIR, 1999), Theorem 8.2. □

Em 1999, Birbrair e Sobolevsky demonstraram em (BIRBRAIR; SOBOLEVSKY, 1999) que qualquer complexo de Hölder pode ser realizado num complexo de Hölder semialgébrico e geométrico.

Teorema 2.3.25 (Teorema de Realização)**.** *Seja (G, f) um complexo de Hölder. Então existe $n \in \mathbb{N}$ e um conjunto semialgébrico 2-dimensional puro fechado $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(X, 0)$ é um complexo de Hölder geométrico semialgébrico correspondente a (G, f).*

A classificação de superfícies sob equivalência bi-Lipschitz exterior e ambiente ainda é um problema em aberto. Entretanto, alguns avanços notáveis na resolução desta questão foram realizados. Uma estrutura interessante que revela a profundidade deste problema no caso bi-Lipschitz exterior é o conceito de pizza, que é estudado em (BIRBRAIR *et al.*, 2017). Outro resultado, tratando sobre a equivalência bi-Lipschitz ambiente entre conjuntos, foi demonstrado por Sampaio em (SAMPAIO, 2016), e o seguinte:

Theorem 2.3.26. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgébricos e sejam $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Se os germes (X, x_0) e (Y, y_0) são bi-Lipschitz ambiente equivalentes, então os germes de cones tangentes $(C(X, x_0), x_0)$ e $(C(Y, y_0), y_0)$ são bi-Lipschitz ambiente equivalentes.*

O resultado a seguir foi provado por Birbrair e Mostowsky em (BIRBRAIR; MOSTOWSKI, 2000), indicando que a análise dessa classificação nos conjuntos LNE é essencial.

Teorema 2.3.27. *Todo conjunto semialgébrico e compacto X de dimensão k é bi-Lipschitz intrínseca equivalente a um conjunto normalmente mergulhado $Y \subset \mathbb{R}^m$, para algum inteiro positivo m.*

Observação 2.3.28. *Em (BIRBRAIR et al., 2021), Birbrair, Fernandes e Jelonek provaram em (BIRBRAIR et al., 2021) que é possível realizar tal mergulho normal se $m = 2k+1$.*

Em (BIRBRAIR; GABRIELOV, 2020), a seguinte conjectura foi formulada.

Conjectura 2.3.29. *Sejam $(X,0)$ e $(Y,0)$ duas superfícies semialgébricas 2-dimensionais puras em $(\mathbb{R}^n,0)$ que são bi-Lipschitz exterior equivalentes. Suponha também que $(X,0)$ e $(Y,0)$ são ambiente topologicamente equivalentes.*

- *Se $n \geq 5$, então $(X,0)$ e $(Y,0)$ são bi-Lipschitz ambiente equivalentes.*
- *Se $(X,0)$ e $(Y,0)$ são LNE, então $(X,0)$ e $(Y,0)$ são bi-Lipschitz ambiente equivalentes.*

As condições LNE e $n \geq 5$ são motivadas pelo Teorema 2.3.27 e pelo fato de que há contra-exemplos para $n = 3,4$ em (BIRBRAIR; GABRIELOV, 2019). Caso a condição LNE seja ignorada, temos um resultado bastante surpreendente, baseada na "construção de ponte". Para mais detalhes, veja (BIRBRAIR *et al.*, 2023).

Teorema 2.3.30. *Para qualquer germe de superfície semialgébrica $(X,0) \subset (\mathbb{R}^4,0)$, existem infinitos germes de superfícies $(X_i,0) \subset (\mathbb{R}^4,0)$ tais que:*

1. *Para todo i, os germes $(X_i,0)$ são topologicamente ambiente equivalentes a $(X,0)$;*
2. *Todos os germes $(X_i,0)$ são bi-Lipschitz exterior equivalentes a (X,0);*
3. *Os cones tangentes de todos os germes X_i na origem são topologicamente ambiente equivalentes;*
4. *Para $i \neq j$, os germes X_i e X_j **não são** bi-Lipschitz ambiente equivalentes.*

O grau de liberdade em $\mathbb{R}^4$ para fazer a construção de ponte não está presente em $\mathbb{R}^3$, e por conta disso é possível conjecturar o seguinte:

Conjectura 2.3.31. *Para qualquer germe de superfície semialgébrica $(X,0) \subset (\mathbb{R}^3,0)$, existe apenas um número finito de germes de superfícies $(X_i,0) \subset (\mathbb{R}^4,0)$ tais que:*

1. *Para todo i, os germes $(X_i,0)$ são topologicamente ambiente equivalentes a $(X,0)$;*
2. *Todos os germes $(X_i,0)$ são bi-Lipschitz exterior equivalentes;*
3. *Os cones tangentes de todos os germes X_i na origem são topologicamente ambiente equivalentes;*
4. *Para $i \neq j$, os germes X_i e X_j não são bi-Lipschitz ambiente equivalentes.*

O trabalho na presente tese de doutorado visa a resolução parcial da Conjectura 2.3.29 em $\mathbb{R}^3$.

3 LEMAS TÉCNICOS EM GEOMETRIA LIPSCHITZ AMBIENTE

3.1 Redução a links planos

Demonstraremos nessa seção que o problema principal desta tese pode ser reduzido à análise em superfícies dentro de um tipo de cone específico, cujas seções ortogonais a um eixo são bolas fechadas que podem ser interpretadas como o link plano do mesmo. Tal redução será importante para a consecução de cálculos de aplicações bi-Lipschitz ambiente em caítulos posteriores.

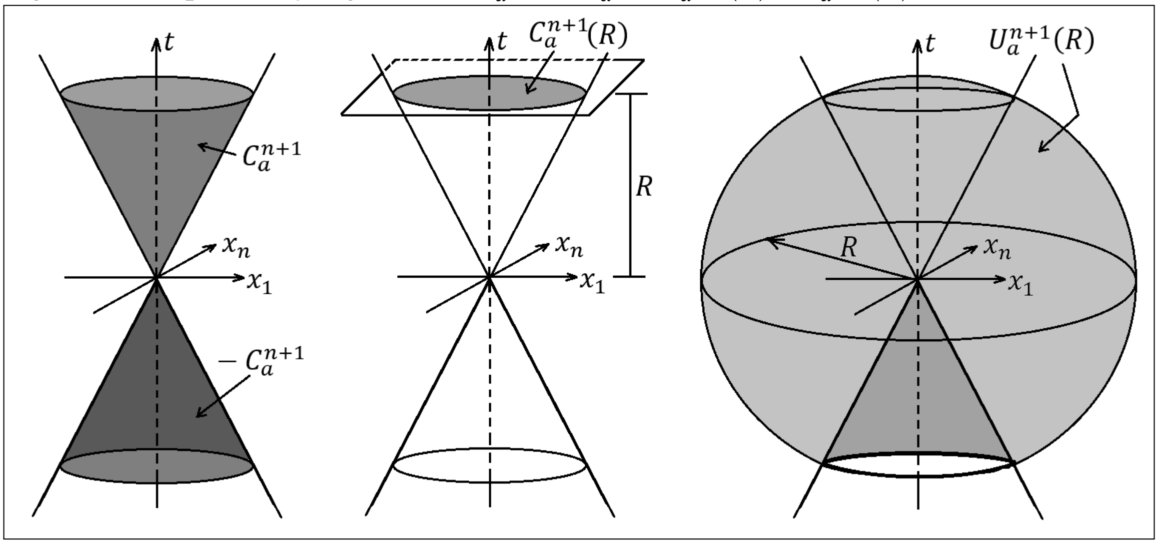
Definição 3.1.1. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $a, R > 0$, defina os conjuntos:*

$$C_a^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq 0;\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq (at)^2\}$$

$$-C_a^{n+1} = \{-p \mid p \in C_a^{n+1}\}\ ;\ C_a^{n+1}(R) = C_a^{n+1} \cap \{t = R\}\ ;\ U_a^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \backslash -C_a^{n+1}$$

$$\mathbb{S}^n(0,R) = \{(x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + t^2 = R^2\}\ ;\ U_a^{n+1}(R) := U_a^{n+1} \cap \mathbb{S}^n(0,R)$$

Figura 4 – Representação gráfica de C_a^{n+1}, $-C_a^{n+1}$, $C_a^{n+1}(R)$ e $U_a^{n+1}(R)$



Fonte: elaborado pelo autor.

Sabemos que, para cada $R > 0$, a projeção estereográfica:

$$\psi_R : \mathbb{S}^n(0,R) - \{(0, \ldots, 0, -R)\} \to \mathbb{R}^n \times \{R\}$$

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, R);\ \lambda = \frac{2R}{x_{n+1} + R}$$

é um difeomorfismo, cuja inversa é:

$$\psi_R^{-1} : \mathbb{R}^n \times \{R\} \to \mathbb{S}^n(0,R) - \{(0,\dots,0,-R)\}$$

$$(x_1,\dots,x_n,R) \mapsto \big(\lambda' x_1,\dots,\lambda' x_n,(2\lambda'-1)R\big) \;;\lambda' = \frac{4R^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2}$$

Ademais, para cada $a>2$ suficientemente grande, existe $a'>0$ suficientemente pequeno tal que $\psi_R|_{\overline{U_{a'}^{n+1}(R)}}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem $C_a^{n+1}(R)$, e que a' depende apenas de a (mais precisamente, $a' = \frac{4a}{a^2+4}$).

Proposição 3.1.2. *A aplicação $\psi : \overline{U_{a'}^{n+1}} \to C_a^{n+1}$ dada por $\psi(x_1,\dots,x_n,R) = \psi_R(x_1,\dots,x_n,R)$, para todo $(x_1,\dots,x_n,R) \in \overline{U_{a'}^{n+1}}$, é uma aplicação bi-Lipschitz exterior.*

Demonstração. Inicialmente, provemos que $\overline{U_{a'}^{n+1}}$ é LNE. De fato, pelo Teorema 2.2.22, basta provar que existe $C\geq 1$ tal que $U_{a'}^{n+1}(R)$ é C-LNE, para cada $R>0$. Dados $p,q \in U_{a'}^{n+1}(R)$ e sendo $o=(0,\dots,0,-R)$, temos que existe $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$ de modo que $\angle poq < \pi - \varepsilon$. Assim, como a interseção de $U_{a'}^{n+1}(R)$ com o plano passando por p,o,q é um arco da circunferência circunscrita ao triângulo poq (que vamos assumir ter raio r), cujo comprimento d é no máximo $2(\pi-\varepsilon)r$, concluímos que:

$$\frac{d_{\overline{U_{a'}^{n+1}}}(p,q)}{d(p,q)} \leq \frac{d}{d(p,q)} \leq \frac{2(\pi-\varepsilon)r}{2r\sin\varepsilon} = \frac{\pi-\varepsilon}{\sin\varepsilon} = C$$

E a afirmação está provada. Como $\overline{U_{a'}^{n+1}}$ é conexo por caminhos, basta verificar se ψ satisfaz as condições da Proposição 2.2.12, uma vez que as métricas exterior e intrínseca são equivalentes. De fato, $\psi|_{U_{a'}^{n+1}}$ é uma aplicação diferenciável cuja inversa é uma aplicação diferenciável dada por:

$$\psi^{-1}|_{int(C_a^{n+1})}(x_1,\dots,x_n,R) = \psi_R^{-1}(x_1,\dots,x_n,R) \;;\; \forall (x_1,\dots,x_n,R) \in int(C_a^{n+1})$$

Provemos que $\psi|_{U_{a'}^{n+1}}$ é positivamente limitada em $U_{a'}^{n+1}$. Dado $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in U_{a'}^{n+1}$, como $R^2 = x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2$, temos que $\frac{\partial R}{\partial x_k} = \frac{x_k}{R}$, para $k=1,\dots,n+1$. Além disso, $(ax_{n+1})^2 < x_1^2+\cdots+x_n^2 = R^2 - x_{n+1}^2 \Rightarrow |x_{n+1}| < \frac{R}{\sqrt{1+(a')^2}}$, o que implica que existe $0<c<1$ de modo que $cR < x_{n+1}+R \leq 2R$. Temos ainda, para $i=1,\dots,n$:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2R}{x_{n+1}+R}\right) = \frac{2x_i}{R(x_{n+1}+R)} - \frac{2x_i}{(x_{n+1}+R)^2} = \frac{2x_i x_{n+1}}{R(x_{n+1}+R)^2}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left(\frac{2R}{x_{n+1}+R}\right) = \frac{2x_{n+1}}{R(x_{n+1}+R)} - \frac{2}{x_{n+1}+R} = \frac{2(x_{n+1}-R)}{R(x_{n+1}+R)}$$

Daí, ao calcularmos as entradas da matriz jacobiana, obtemos, para $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial x_i} = \lambda + x_i\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{2R}{x_{n+1}+R} + \frac{2x_i^2 x_{n+1}}{R(x_{n+1}+R)^2} = \frac{2(R^3+R^2x_{n+1}+x_i^2x_{n+1})}{R(x_{n+1}+R)^2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\right| \leq \frac{2(R^3+R^2.R+R^2.R)}{R(cR)^2} = \frac{6}{c^2}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial x_j} = x_i\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} = \frac{2x_ix_jx_{n+1}}{R(x_{n+1}+R)^2} \Rightarrow \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right| \leq \frac{2(R.R.R)}{R(cR)^2} = \frac{2}{c^2}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial x_{n+1}} = x_i\frac{\partial \lambda}{\partial x_{n+1}} = \frac{2x_i(x_{n+1}-R)}{R(x_{n+1}+R)} \Rightarrow \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right| \leq \frac{2(R.(R+R))}{R(cR)} = \frac{4}{c}$$

Ademais, $\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\psi_{n+1}}{\partial x_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{R}{\partial x_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{x_k^2}{R^2} = 1$, implicando que ao menos uma de tais derivadas tem módulo maior ou igual a $\frac{1}{\sqrt{n}}$ e todas elas têm módulo no máximo 1, completando a demonstração.

Agora, provemos que $\psi^{-1}|_{int(C_a^{n+1})}$ é positivamente limitado em $int(C_a^{n+1})$. Dado $(x_1,\ldots,x_n,R) \in int(C_a^{n+1})$, como $\lambda' = \frac{4R^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2}$, temos que $\frac{\partial \lambda'}{dx_i} = -\frac{8R^2x_i}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2}$ $(i = 1,\ldots,n)$ e $\frac{\partial \lambda'}{dR} = \frac{8R(x_1^2+\cdots+x_n^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2}$. Ademais, $0 < \lambda' \leq 1$ e $|x_i| \leq aR$. Daí, ao calcularmos as entradas da matriz jacobiana, obtemos, para $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$:

$$\frac{\partial(\psi^{-1})_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\lambda' x_i)}{\partial x_i} = \lambda' + x_i\frac{\partial \lambda'}{\partial x_i} = \frac{4R^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2} - \frac{8R^2x_i^2}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2} =$$

$$= \frac{4R^2(x_1^2+\cdots+x_{i-1}^2-x_i^2+x_{i+1}^2+\ldots+x_n^2+4R^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial(\psi^{-1})_i}{\partial x_i}\right| \leq \frac{4R^2((n-1)a^2R^2+4R^2)}{(4R^2)^2} = \frac{(n-1)a^2}{4}+1$$

$$\frac{\partial(\psi^{-1})_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(\lambda' x_i)}{\partial x_j} = x_i\frac{\partial \lambda'}{\partial x_j} = -\frac{8R^2x_ix_j}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2} \Rightarrow \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right| \leq \frac{8R^2.aR.aR}{(4R^2)^2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{\partial(\psi^{-1})_i}{\partial R} = \frac{\partial(\lambda' x_i)}{\partial R} = \frac{8Rx_i(x_1^2+\cdots+x_n^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2} \Rightarrow \left|\frac{\partial(\psi^{-1})_i}{\partial R}\right| \leq \frac{8R.aR(na^2R^2)}{(4R^2)^2} = \frac{na^3}{2}$$

$$\frac{\partial(\psi^{-1})_{n+1}}{\partial x_i}=\frac{\partial(2\lambda'-1)R)}{\partial x_i}=-\frac{16R^3x_i}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2}\Rightarrow\left|\frac{\partial(\psi^{-1})_{n+1}}{\partial x_i}\right|\leq\frac{16R^3.aR}{(4R^2)^2}=a$$

$$\frac{\partial(\psi^{-1})_{n+1}}{\partial R}=\frac{\partial(2\lambda'-1)R)}{\partial R}=2\lambda'-1+2R\frac{\partial\lambda'}{\partial R}=\frac{8R^2(3(x_1^2+\cdots+x_n^2)+4R^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2}-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\partial(\psi^{-1})_{n+1}}{\partial R}\right|\leq\frac{8R^2(3na^2R^2+4R^2)}{(4R^2)^2}+1=\frac{3na^2}{2}+3$$

O que prova que a norma do jacobiano é limitada superiormente. Ademais, se $n\geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{4R^2(x_1^2+\cdots+x_{i-1}^2-x_i^2+x_{i+1}^2+\ldots+x_n^2+4R^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2}=$$

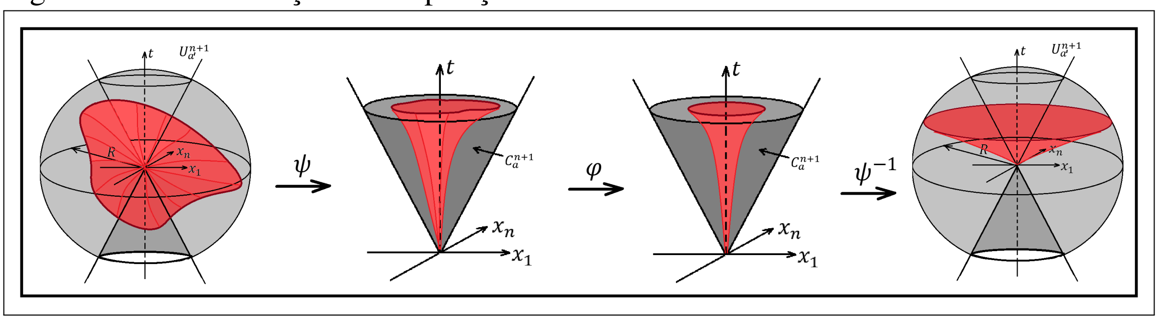
$$\frac{4R^2((n-2)(x_1^2+\cdots+x_n^2)+4nR^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2+4R^2)^2}\geq\frac{4R^2(4nR^2)}{(a^2R^2+4R^2)^2}=\frac{16n}{(a^2+4)^2}$$

E assim existe $1\leq i\leq n$ tal que $\frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}\geq\dfrac{16}{(a^2+4)^2}$, mostrando que $\psi^{-1}|_{int(C_a^{n+1})}$ é positivamente limitado em $int(C_a^{n+1})$ (para o caso $n=1$, também há positividade, uma vez que $|\frac{\partial(\psi^{-1})_1}{\partial R}|=\frac{8R|x_1|^3}{|(x_1^2+4R^2)^2|}\geq\frac{8R.R^3}{(a^2R^2+4R^2)^2}=\frac{8}{(a^2+4)^2}$, se $|x|\geq R$, e $|\frac{\partial(\psi^{-1})_1}{\partial x_1}|=|\frac{4R^2(-x_1^2+4R^2)}{(x_1^2+4R^2)^2}|\geq\frac{4R^2(-R^2+4R^2)}{(R^2+4R^2)^2}=\frac{12}{25}$, se $|x|\leq R$). Isso encerra a demonstração do teorema. □

Proposição 3.1.3. *Suponha que o Teorema 1.0.1 seja válido para todo germe de superfície LNE $(X,0)\in C_a^3$. Então, o Teorema 1.0.1 é válido para todo germe de superfície LNE $(X,0)\subset\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Dado $X\subset\mathbb{R}^3$ normalmente mergulhado, existe um vetor $u\notin S=\{\gamma'(0)\mid\gamma\in V(X)\}$. Tomando uma rotação de eixos, se necessário, podemos supor que $u=(0,0,-p)$, para algum $p>0$. Sendo S fechado, existe $a'>0$ suficientemente pequeno tal que $u\notin S,\forall u\in\overline{U_{a'}^3}$.

Figura 5 – Demonstração da Proposição 3.1.3



Fonte: elaborado pelo autor.

Daí, $\psi : (\overline{U^3_{a'}},0) \to (C^3_a,0)$ é uma aplicação bi-Lipschitz exterior e assim $(\psi(X),0)$ é um germe de uma superfície normalmente mergulhada, pela Proposição 2.2.17. Se $\varphi_1,\dots,\varphi_m : (C^3_a,0) \to (C^3_a,0)$ são sequências de aplicações bi-Lipschitz exteriores tais que $\varphi_i(p) = p$, para todo $p \in \partial C^3_a$ e $i = 1,\dots,m$, e se $\varphi := \varphi_m \circ \cdots \circ \varphi_1$ é tal que $\varphi(\psi(X),0) = \psi(T_\alpha,0)$ ou $\psi(H_\beta)$, então tomando a aplicação Φ da Proposição 2.2.9, temos, pela hipótese da Proposição, que $\Phi(X,0) = (T_\alpha,0)$ ou $(H_\beta,0)$, finalizando a demonstração. $\square$

Motivados pelas Proposições 3.1.2 e 3.1.3, temos as definições a seguir:

Definição 3.1.4. *Para cada $X \subset C^{n+1}_a$ e cada $\varepsilon > 0$, defina os conjuntos:*

$$C^{n+1}_a[\varepsilon] = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C^{n+1}_a \mid 0 < t < \varepsilon\} \cup \{0\}$$

$$C^{n+1}_a(\varepsilon) = \{(x_1,\dots,x_n,\varepsilon) \in C^{n+1}_a\}$$

$$X[\varepsilon] = X \cap C^{n+1}_a[\varepsilon]$$

$$X(\varepsilon) = X \cap C^{n+1}_a(\varepsilon)$$

O conjunto $X(\varepsilon)$ é denominado ε-link plano de X.

Definição 3.1.5. *Dados germes de conjuntos $(X,0),(Y,0) \subset (C^{n+1}_a,0)$, dizemos que $(X,0)$ e $(Y,0)$ são bi-Lipschitz ambiente equivalentes em $(C^{n+1}_a,0)$ se existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e uma aplicação bi-Lipschitz exterior $\varphi : (C^{n+1}_a,0) \to (C^{n+1}_a,0)$ tal que:*

1. *$\varphi(p) = p$, para todo $p \in \partial C^{n+1}_a \cap C^{n+1}_a[\varepsilon]$.*
2. *$\varphi(X[\varepsilon]) = Y[\varepsilon]$*

3.2 Lemas de translação e rotação

Uma vez realizada a redução, demonstremos alguns lemas que permitirão a translação e a dilatacão dos links planos das superfícies estudadas.

Lema 3.2.1 (Lema de Translação). *Seja $a_0 > 0$, $X \subset C^{n+1}_{a_0}$ uma superfície e $(\gamma,0) \subset (C_{a_0},0)$, $\gamma(t) = (y_1(t),\dots,y_n(t),t)$ um arco. Suponha que $X' \subset C^{n+1}_{a_0}$ seja a translação de X por γ, isto é:*

$$(x_1,\dots,x_n,t) \in X' \Leftrightarrow (x_1 - y_1(t),\dots,x_n - y_n(t),t) \in X$$

Então, existe $a \geq a_0$ tal que $(X,0),(X',0)$ são bi-Lipschitz ambiente equivalentes em $(C^{n+1}_a,0)$.

Demonstração. Como $(\gamma,0) \subset (C_{a_0},0)$ é um arco, existe $\gamma'(0) = (y_1'(0),\dots,y_n'(0),1) \in C_a^{n+1}$. Por simplicidade, escreveremos $y_i = y_i(t)$ e $y_i' = y_i'(t)$. Temos que existe $M > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\left|\frac{y_i}{t}\right|, |y_i'| < M$, para $i = 1,\dots,n$ e todo $0 < t < \varepsilon$. Para cada $a > \max\{1,a_0\}$, seja $b = \sqrt{a}$ e sejam os conjuntos:

$$D' = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid (x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2 \leq (bt)^2\}$$

$$D = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq (bt)^2\}$$

$$\Gamma'_\lambda = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid (x_1-\lambda y_1)^2+\cdots+(x_n-\lambda y_n)^2 = (\lambda bt+(1-\lambda)at)^2\}\,(0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\Gamma_\lambda = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 = (\lambda bt+(1-\lambda)at)^2\}\,(0 \leq \lambda \leq 1)$$

Evidentemente $(\gamma,0) \subset (D',0)$, $\Gamma_1' = \partial D'$, $\Gamma_1 = \partial D$ e $\Gamma_0' = \Gamma_0 = \partial C_a^{n+1}$. Temos ainda que $C_a^{n+1}(t) = D(t) \cup \bigcup_{0\leq\lambda\leq 1}\Gamma_\lambda(t) = D'(t) \cup \bigcup_{0\leq\lambda\leq 1}\Gamma'_\lambda(t)$.

Afirmação 3.2.2. *Existe $a > 0$ suficientemente grande de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

1. *$X(t) \subset D(t)$ e $X'(t) \subset D'(t)$, para cada $0 < t < \varepsilon$.*
2. *As n-bolas $D(t), D'(t)$ estão no interior de $C_a^{n+1}(t)$, para cada $0 < t < \varepsilon$.*
3. *Para $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$, temos que $\Gamma_{\lambda_1}(t) \cap \Gamma_{\lambda_2}(t) = \emptyset$ e $\Gamma'_{\lambda_1} \cap \Gamma'_{\lambda_2} = \emptyset$.*

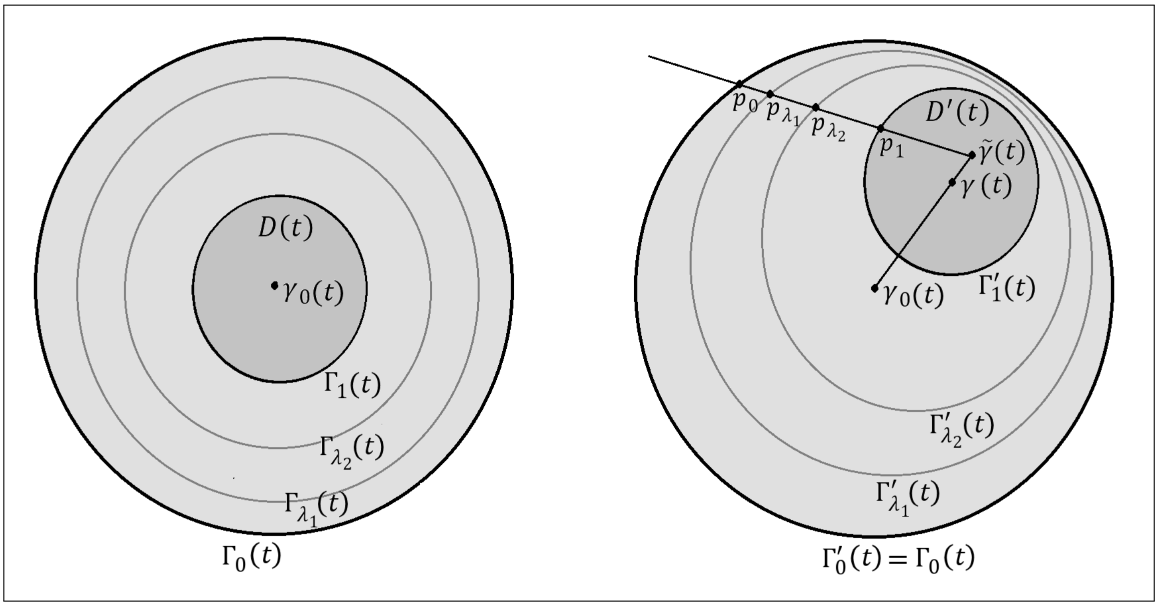
Demonstração. Como $X \subset C_{a_0}$ e podemos tomar ε suficientemente pequeno de modo que $\|\gamma(t)\|$ é limitado, para $0 < t < \varepsilon$, temos que existe a suficientemente grande de modo que as n-bolas $D(t)$ e $D'(t)$, ambas de raio $bt > a_0t$, contenham $X(t)$ e $X'(t)$, respectivamente (o que implica a condição (1)), e $\|(y_1,\dots,y_n)\| < (a-b)t$, uma vez que $b, a-b \to \infty$ quando $a \to \infty$. Como o centro comum de $D(t), C_a^{n+1}(t)$ é $\gamma_0(t) = (0,\dots,0,t)$, temos claramente $D(t) \subset int(C_a^{n+1}(t))$, e como $\|\gamma(t)-\gamma_0(t)\| = \|(y_1,\dots,y_n)\| < at-bt$, temos $D'(t) \subset int(C_a^{n+1}(t))$, provando (2).

Para provar (3), para cada $0 \leq \lambda \leq 1$ e $t > 0$ suficientemente pequeno, seja $\gamma_\lambda(t) = \lambda\gamma(t)+(1-\lambda)\gamma_0(t)$ e $R_\lambda = \lambda b+(1-\lambda)a$. Seja ainda $\tilde{\gamma}(t) = (\frac{a}{a-b}y_1,\dots,\frac{a}{a-b}y_n,t)$. Um cálculo direto mostra que para todo $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$:

$$\gamma_{\lambda_1}(t) - \tilde{\gamma}(t) = \frac{R_{\lambda_1}t}{R_{\lambda_2}t}(\gamma_{\lambda_2}(t) - \tilde{\gamma}(t))$$

Isso implica que a homotetia H com centro $\tilde{\gamma}(t)$ e razão $\frac{R_{\lambda_1}}{R_{\lambda_2}}$ manda $\Gamma'_{\lambda_2}(t)$ para $\Gamma'_{\lambda_1}(t)$. Suponha $p \in \Gamma'_{\lambda_1} \cap \Gamma'_{\lambda_2}$. Então, $p \neq \tilde{\gamma}(t)$, pois $\tilde{\gamma}(t) \in int(D'(t))$ e $int(D'(t))$ está no interior das bolas com fronteiras $\Gamma'_{\lambda_1}(t)$, $\Gamma'_{\lambda_2}(t)$. Como $\tilde{\gamma}(t)$, p e $H(p)$ são colineares, temos $p = H(p)$, o que implica $\frac{R_{\lambda_1}}{R_{\lambda_2}} = 1$, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2$, uma contradição. Portanto, $\Gamma'_{\lambda_1} \cap \Gamma'_{\lambda_2} = \emptyset$. Um argumento análogo tomando $\gamma_0(t) = \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ demonstra que $\Gamma_{\lambda_1}(t) \cap \Gamma_{\lambda_2}(t) = \emptyset$. $\square$

Figura 6 – Demonstração da Afirmação 3.2.2



Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, defina $\varphi : (C_a^{n+1}, 0) \to (C_a^{n+1}, 0)$ como:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, t) = \begin{cases} (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n, t), & (x_1, \ldots, x_n, t) \in D(t) \\ (x_1 - \lambda y_1, \ldots, x_n - \lambda y_n, t), & (x_1, \ldots, x_n, t) \in \Gamma_\lambda(t) \end{cases}$$

Note que para $\lambda = 1$, temos $(x_1 - \lambda y_1, \ldots, x_n - \lambda y_n, t) = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n, t)$, implicando que φ é contínua. Também, $\varphi(D(t)) = D'(t)$, $\varphi(X') = X$, $\varphi(\Gamma_\lambda(t)) = \Gamma'_\lambda(t)$ e φ possui inversa $\varphi^{-1} : (C_a^{n+1}, 0) \to (C_a^{n+1}, 0)$, dada por:

$$\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, t) = \begin{cases} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, t), & (x_1, \ldots, x_n, t) \in D'(t) \\ (x_1 + \lambda y_1, \ldots, x_n + \lambda y_n, t), & (x_1, \ldots, x_n, t) \in \Gamma'_\lambda(t) \end{cases}$$

Isso mostra que φ é um difeomorfismo ao tomar a restrição em cada um dos abertos D e $U = \bigcup_{0<\lambda<1} \Gamma_\lambda$. Como $\overline{D}, \overline{U}$ são conexos por caminhos e possuem interseção igual a Γ_1, pela Proposição 2.2.10, basta provar que φ é bi-Lipschitz intrínseca, uma vez que $(C_a^{n+1}, 0)$ é

LNE (pois é convexo). Para tanto, verifiquemos se $\varphi|_{(D,0)}$, $\varphi|_{(U,0)}$ cumprem as condições do Teorema 2.2.12.

Dado $p = (x_1, \ldots, x_n, t) \in D[\varepsilon]$ calculando o jacobiano $J_\varphi(p)$, temos:

$$J_\varphi(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -y_1' \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -y_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -y_n' \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí, $\det J_\varphi(p) = 1$ e como $|y_i'| < M$, para $i = 1, \ldots, n$, temos que φ é positivamente limitado em $(D, 0)$. Logo, $\varphi|_{(D,0)}$ é aplicação bi-Lipschitz. Agora, dado $p = (x_1, \ldots, x_n, t) \in U[\varepsilon]$, a $(n+1)$-ésima linha de $J_\varphi(p)$ é $(0, \ldots, 0, 1)$, mostrando que $\|J_\varphi(p)\| \geq 1$. Verifiquemos então se as outras entradas do jacobiano são limitadas. Com efeito, para $1 \leq i \leq n$, ao derivar em x_i a equação $(x_1 - \lambda y_1)^2 + \cdots + (x_n - \lambda y_n)^2 = (\lambda bt + (1-\lambda)at)^2$, vem:

$$\sum_{k=1, k\neq i}^{n} 2(x_k - \lambda y_k)\left(-\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} y_k\right) + 2(x_i - \lambda y_i)\left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} y_i\right) = 2(\lambda bt + (1-\lambda)at)(bt - at)\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(t\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)\left((a-b)(\lambda b + (1-\lambda)a) - \sum_{k=1,}^{n}\left(\frac{x_k - \lambda y_k}{t}\right)\left(\frac{y_k}{t}\right)\right) = \frac{\lambda y_i - x_i}{t}$$

Como $\left|(a-b)(\lambda b + (1-\lambda)a) - \sum_{k=1,}^{n}\left(\frac{x_k - \lambda y_k}{t}\right)\left(\frac{y_k}{t}\right)\right| \geq (a-b)b - n(a+1.M)M > 0$ para a suficientemente grande, e $\left|\frac{\lambda y_i - x_i}{t}\right| \leq 1.M + a$, então $\left(t\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)$ é limitado. Analogamente, $\left(t\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)$ é limitado. Portanto, para $1 \leq i, j \leq n$:

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\partial x_i - \lambda y_i}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} y_i\right| \leq \left|\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right| + \left|t\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\right| . \left|\frac{y_i}{t}\right| \leq 1 + \left|t\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\right| M$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right| = \left|\frac{\partial x_i - \lambda y_i}{\partial t}\right| = \left|\frac{\partial \lambda}{\partial t} y_i + \lambda y_i'\right| \leq \left|t\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right| . \left|\frac{y_i}{t}\right| + \lambda . |y_i'| \leq \left|\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right| .M + 1.M$$

O que mostra que φ é positivamente limitado em $(U, 0)$. Analogamente, φ^{-1} é positivamente limitado em $(U', 0)$. Logo, $\varphi|_{(U,0)}$ é aplicação bi-Lipschitz e a demonstração está completa. $\square$

Lema 3.2.3 (Lema de Dilatação)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $a_0 > 0$ e $f : (\mathbb{R},0) \to \mathbb{R}$ um germe de função semialgébrica cuja série de Puiseux é $f(t) = c_0 + o(1)$; $c_0 > 0$. Se $(X,0) \subset (C_a^{n+1},0)$ é germe de uma superfície e se $(X',0) \subset (C_a^{n+1},0)$ é a dilatação de X por f, isto é, $(x_1(t),\dots,x_n(t),t) \in (X,0) \Leftrightarrow (f(t)x_1(t),\dots,f(t)x_n,t) \in (X',0)$, então existe $a \geq a_0$ tal que $(X,0),(X',0) \subset (C_a^{n+1},0)$ são bi-Lipschitz ambiente equivalentes em $(C_a^{n+1},0)$.*

Demonstração. Note inicialmente que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = c_0$ e $\lim\limits_{t\to 0} tf'(t) = \lim\limits_{t\to 0} \sum\limits_{q\geq 0} qc_q t^q = 0$. Daí, suponha que $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno tal que $|tf'(t)| < \frac{c_0}{2} < f(t) < \frac{3c_0}{2}$, para $0 < t < \varepsilon$. Para cada $a > \max\{1,a_0\}$, seja $b = \sqrt{a}$ e sejam os conjuntos:

$$D = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq (bt)^2\}$$

$$D' = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq (f(t)bt)^2\}$$

$$\Gamma_\lambda = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (\lambda bt + (1-\lambda)at)^2\}\,(0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\Gamma'_\lambda = \{(x_1,\dots,x_n,t) \in C_a^{n+1}[\varepsilon] \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (\lambda f(t)bt + (1-\lambda)at)^2\}\,(0 \leq \lambda \leq 1)$$

Similarmente à Afirmação 3.2.2, podemos tomar a suficientemente grande de modo que, para todo $\varepsilon > t > 0$, $X(t) \subset D(t)$. Isso garante que as n-bolas D, D' estejam no interior de $C_a^{n+1}(t)$, bem como cada uma das $(n-1)$-esferas $\Gamma_\lambda(t), \Gamma'_\lambda(t)$. Ademais, para $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$, temos que $\Gamma_{\lambda_1}(t) \cap \Gamma_{\lambda_2}(t) = \emptyset$ e $C_a^{n+1}(t) = D(t) \cup \bigcup_{0\leq\lambda\leq 1} \Gamma_\lambda(t)$. Analogamente, $\Gamma'_{\lambda_1} \cap \Gamma'_{\lambda_2} = \emptyset$ e $C_a^{n+1}(t) = D(t)' \cup \bigcup_{0\leq\lambda\leq 1} \Gamma'_\lambda(t)$.

Agora, defina $\varphi : (C_a^{n+1},0) \to (C_a^{n+1},0)$ como:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n,t) = \begin{cases} (f(t)x_1,\dots,f(t)x_n,t), & (x_1,\dots,x_n,t) \in D(t) \\ \left(\left(\frac{\lambda f(t)b+(1-\lambda)a}{\lambda b+(1-\lambda)a}\right)x_1,\dots,\left(\frac{\lambda f(t)b+(1-\lambda)a}{\lambda b+(1-\lambda)a}\right)x_n,t\right), & (x_1,\dots,x_n,t) \in \Gamma_\lambda(t) \end{cases}$$

Note que para $\lambda = 1$:

$$(f(t)x_1,\dots,f(t)x_n,t) = \left(\left(\frac{\lambda f(t)b+(1-\lambda)a}{\lambda b+(1-\lambda)a}\right)x_1,\dots,\left(\frac{\lambda f(t)b+(1-\lambda)a}{\lambda b+(1-\lambda)a}\right)x_n,t\right)$$

Implicando que φ é contínua. Também, $\varphi(D(t)) = D(t)'$, $\varphi(X') = X$, $\varphi(\Gamma_\lambda(t)) = \Gamma'_\lambda(t)$ e φ possui inversa contínua $\varphi^{-1} : (C_a^{n+1},0) \to (C_a^{n+1},0)$, dada por:

$$\varphi^{-1}(x_1,\dots,x_n,t) = \begin{cases} (\frac{1}{f(t)}x_1,\frac{1}{f(t)}x_n,t), & (x_1,\dots,x_n,t) \in D'(t) \\ \left(\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)a}{\lambda f(t)b+(1-\lambda)a}\right)x_1,\dots,\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)a}{\lambda f(t)b+(1-\lambda)a}\right)x_n,t\right), & (x_1,\dots,x_n,t) \in \Gamma'_\lambda(t) \end{cases}$$

Isso mostra que φ é um difeomorfismo ao tomar a restrição em cada um dos abertos D e $U = \bigcup_{0<\lambda<1} \Gamma_\lambda$. Como $\overline{D}, \overline{U}$ são conexos por caminhos e possuem interseção igual a Γ_1, pela Proposição 2.2.10, basta provar que φ é bi-Lipschitz intrínseca, uma vez que $(C_a^{n+1}, 0)$ é LNE (pois é convexo). Para tanto, verifiquemos se $\varphi|_{(D,0)}$, $\varphi|_{(U,0)}$ cumprem as condições do Teorema 2.2.12.

Dado $p = (x_1, \ldots, x_n, t) \in D[\varepsilon]$ calculando o jacobiano $J_\varphi(p)$, temos:

$$J_\varphi(p) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 & \ldots & 0 & x_1 f'(t) \\ 0 & f(t) & \ldots & 0 & x_2 f'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & f(t) & x_n f'(t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí, $\det J_\varphi(p) = f(t)^n \in \left(\left(\frac{c_0}{2}\right)^n, \left(\frac{3c_0}{2}\right)^n\right)$ e como $|f(t)| < \frac{3c_0}{2}$, $|x_i f'(t)| = \left|\frac{x_i}{t}\right| . |t f'(t)| < a.\frac{c_0}{2}$, para $i = 1, \ldots, n$, temos que φ é positivamente limitado em $(D, 0)$. Logo, $\varphi|_{(D,0)}$ é aplicação bi-Lipschitz. Agora, dado $p = (x_1, \ldots, x_n, t) \in U[\varepsilon]$, a $(n+1)$-ésima linha de $J_\varphi(p)$ é $(0, \ldots, 0, 1)$, mostrando que $\|J_\varphi(p)\| \geq 1$. Verifiquemos então se as outras entradas do jacobiano são limitadas. Com efeito, para $1 \leq i \leq n$, ao derivar em x_i a equação $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (\lambda bt + (1-\lambda)at)^2$, vem:

$$2x_i = 2(\lambda bt + (1-\lambda)at)(bt - at)\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \Rightarrow \left(t\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)((a-b)(\lambda b + (1-\lambda)a)) = \frac{x_i}{t}$$

Como $|(a-b)(\lambda b + (1-\lambda)a)| \geq (a-b)b > 0$ e $\left|\frac{x_i}{t}\right| \leq a$, então $\left(t\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right)$ é limitado. Analogamente, temos que $\left(t\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)$ também é limitado. Com isso, denotando $k = \frac{\lambda b + (1-\lambda)a}{\lambda f(t) b + (1-\lambda)a}$, temos $\frac{f(b)t}{a} \leq k \leq \frac{a}{b}$ e:

$$t\frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{(b-a)\left(t\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right)(\lambda f(t)b + (1-\lambda)a) - (\lambda b + (1-\lambda)a)\left(t\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right)(f(t)b - a)}{(\lambda f(t)b + (1-\lambda)a)^2}$$

$$t\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{(b-a)\left(t\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)(\lambda f(t)b + (1-\lambda)a) - (\lambda b + (1-\lambda)a)\left(\left(t\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)(f(t)b - a) + b\lambda(tf'(t))\right)}{(\lambda f(t)b + (1-\lambda)a)^2}$$

Implicando que tais expressões são limitadas, visto que $\lambda f(t)b + (1-\lambda)a \geq f(t)b$ e todas as parcelas no numerador são limitadas. Portanto, para $1 \leq i, j \leq n$:

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\partial (kx_i)}{\partial x_j}\right| = \left|k\frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial k}{\partial x_j}x_i\right| \leq k + \left|t\frac{\partial k}{\partial x_j}\right| . \left|\frac{x_i}{t}\right| \leq \frac{a}{b} + \left|t\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\right| a$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right| = \left|\frac{\partial (kx_i)}{\partial t}\right| = \left|t\frac{\partial k}{\partial t}\right| . \left|\frac{x_i}{t}\right| \leq \left|t\frac{\partial k}{\partial t}\right| a$$

O que mostra que φ é positivamente limitado em $(U,0)$. Analogamente, φ^{-1} é positivamente limitado em $(U',0)$. Logo, $\varphi|_{(U,0)}$ é aplicação bi-Lipschitz e a demonstração está completa. □

Corolário 3.2.4. *Seja $g:(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}$ um germe de função semialgébrica cuja série de Puiseux é $g(t)=c_\beta t^\beta + o(t^\beta)$; $c_\beta>0$, para algum racional $\beta\geq 1$. Então, o germe conjunto:*

$$X = \{(x_1,x_2,t)\in C_a^3 \mid x_1^2+x_2^2 = g(t)^2\}$$

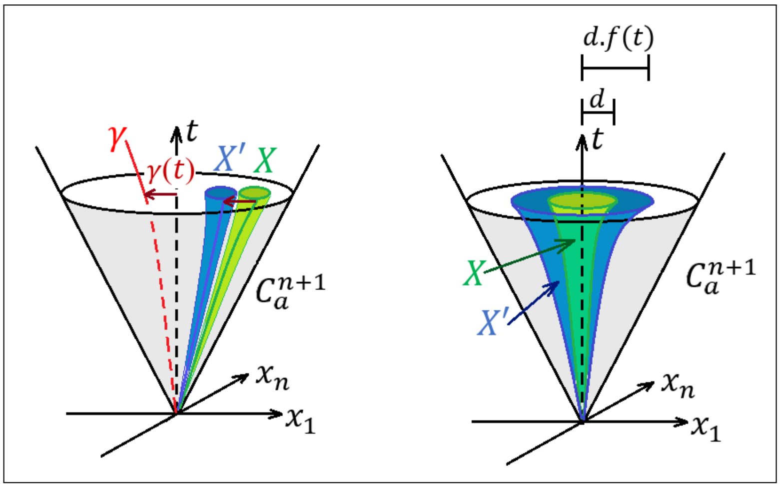
é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da β-corneta padrão.

Demonstração. Seja ψ a aplicação da Proposição 3.1.2. O germe de $\psi(H_\beta)$ é $(X',0)$, onde:

$$X' = \{(x_1,x_2,t)\in C_a^3 \mid x_1^2+x_2^2 = h(t)^2\}$$

Para algum germe de função $h:(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}$ cuja série de Puiseux é $h(t)=d_\beta t^\beta + o(t^\beta)$; $d_\beta>0$. Pelo Lema de Dilatação, aplicado a $f(t)=\frac{h(t)}{g(t)}$, temos que $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(X',0)$ em C_a^3. Da Proposição 3.1.3, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(H_\beta,0)$. □

Figura 7 – Representações gráficas do Lema 3.2.1 (esquerda) e Lema 3.2.3 (direita)



Fonte: elaborado pelo autor.

4 TRIÂNGULOS SINCRONIZADOS E APLICAÇÕES

4.1 Definições e exemplos

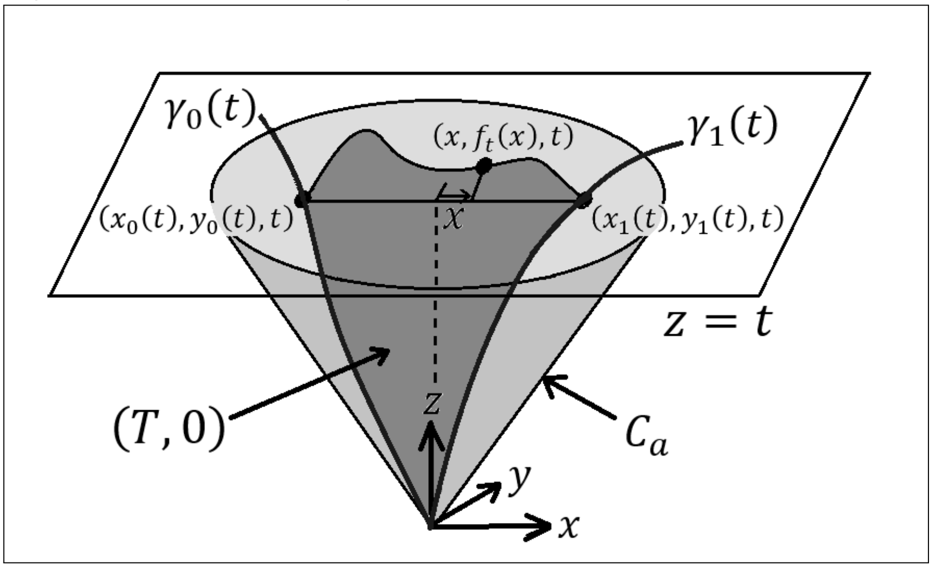
A partir de agora definiremos os conceitos de triângulos sincrozinados, retângulos curvilineares e regiões delimitadas por triângulos e veremos também alguns exemplos de tais objetos, bem como subclassificações importantes.

Definição 4.1.1. *Seja* $a > 0$ *um real dado e sejam* $(\gamma_0, 0), (\gamma_1, 0) \subseteq (C_a^3, 0)$ *dois germes distintos de curvas, e seja ainda* $(T, 0) \subseteq (C_a^3, 0)$ *um germe de triângulo de Hölder cujos arcos de fronteira são* $(\gamma_0, 0), (\gamma_1, 0)$*. Dizemos que* $(T, 0)$ *é um* ***Germe de Triângulo Sincronizado*** *se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que, para todo* $0 < t < \varepsilon$*, se:*

$$\gamma_0 = \gamma_0(t) = (x_0(t), y_0(t), t); \gamma_1 = \gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t), t)$$

são as z-parametrizações de $(\gamma_0, 0)$ *e* $(\gamma_1, 0)$*, respectivamente, então* $x_0(t) < x_1(t)$ *e* $\pi_z(T \cap \{z = t\})$ *é o gráfico de uma função semialgébrica* $f_t : [x_0(t), x_1(t)] \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* $f_t(x_0(t)) = y_0(t)$ *e* $f_t(x_1(t)) = y_1(t)$*. Aqui,* $\pi_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*;* $\pi_z(x, y, z) = (x, y)$ *é a z-projeção. A família de funções* $\{f_t\}_{0<t<\varepsilon}$ *é dita* ***Geradora do Germe Sincronizado*** $(T, 0)$*.*

Figura 8 – Germe de triângulo sincronizado



Fonte: elaborado pelo autor.

Observação 4.1.2. *Se* $(T, 0)$ *é germe de triângulo sincronizado e* $\{f_t\}_{0<t<\varepsilon}$ *é sua família de funções geradoras, temos que* $(sing(T), 0)$ *é uma união de n arcos* $(\delta_i, 0)$ *(*$n \in \mathbb{N}$*), com* $\delta_i(t) = (r_i(t), s_i(t), t)$*, para cada* $i = 1, \ldots, n$*. Podemos ainda supor, reordenando os índices se necessário,* *que* $x_0(t) = r_1(t) < \cdots < r_n(t) = x_1(t)$ *e que cada* f_t *é diferenciável em* $\bigcup_{i=1}^{n}(r_i(t), r_{i+1}(t))$*, isto é,* f_t *é suave por partes, para todo* $0 < t < \varepsilon$.

Observação 4.1.3. *Para cada* $0 < t < \varepsilon$ *e para cada* $u \in [0,1]$*, defina:*

$$\theta_u(t) = u \cdot x_1(t) + (1-u) \cdot x_0(t) \in [x_0(t), x_1(t)]$$

Note que para todo ponto P no triângulo sincronizado $(R,0)$*, existe únicos* $u \in [0,1]$*,* $t > 0$ *tais que* $P = (\theta_u(t), f_t(\theta_u(t)), t)$*. Dessa forma, se definirmos para cada* $u \in [0,1]$ *os arcos semialgébricos* $\gamma_u : (\mathbb{R}_+^*, 0) \to (C_a^3, 0)$ *como:*

$$\gamma_u(t) = (\theta_u(t), f_t(\theta_u(t)), t) \; ; \; t > 0$$

Então os arcos $\gamma_u \subset V(T)$ *formam uma cobertura do germe* $(T,0)$*. Com isso, podemos definir* $\{\gamma_u\}_{u \in [0,1]}$ *como a* ***cobertura por arcos do triângulo sincronizado*** $(T,0)$*. Finalmente, note que, para cada* $u \in [0,1]$*, como cada germe de curva* $(\gamma_u, 0)$ *é semialgébrico, então o limite* $\lim_{t \to 0^+} (\gamma_u'(t))$ *existe e é um vetor, denominado* $\gamma_u'(0)$.

Definição 4.1.4. *Dado* $M > 0$*, dizemos que um germe de triângulo sincronizado* $(T,0)$*, com* $\{f_t\}$ *sendo sua família de funções geradoras, tem* ***Derivada M-limitada*** *se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que, para todo* $0 < t < \varepsilon$ *e para todo* $a \in [x_0(t), x_1(t)]$*, as derivadas laterais de* f_t *em a possuem valor absoluto menor que M, isto é:*

$$M > \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_+}(a) \right| = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_t(a+h) - f_t(a)}{h} \; ; x_0(t) \leq a < x_1(t)$$

$$M > \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_-}(a) \right| = \lim_{h \to 0^-} \frac{f_t(a+h) - f_t(a)}{h} \; ; x_0(t) < a \leq x_1(t)$$

Dizemos também que um germe de triângulo sincronizado $(T,0)$ *é* ***de Classe*** C^1 *(ou que é* C^1*) se* $(T,0)$ *é um triângulo curvilinear. Finalmente, dizemos que um germe de triângulo sincronizado* $(T,0)$*, que é* C^1*, é* ***Convexo*** *se cada função de sua família de funções geradoras é convexa.*

Exemplo 4.1.5. *Considere o conjunto:*

$$T = \{(x, t^2 - x^2, t) \mid 0 < t \leq 1; -t \leq x \leq t\} \subset C_{\sqrt{2}}$$

Note que $(T,0)$ *é um triângulo de Hölder com vértice principal na origem, e cujos arcos de fronteira são os germes* $(\gamma_0, 0), (\gamma_1, 0)$*, em que* $\gamma_0(t) = (-t, 0, t); \gamma_1(t) = (t, 0, t)$*, para* $0 < t \leq 1$.

Veja também que $(T,0)$ *é um germe de triângulo sincronizado, onde, para cada* $t \in (0,1)$*:*

$$f_t : [-t,t] \to \mathbb{R}; f_t(x) = t^2 - x^2$$

é a família de funções geradoras de $(T,0)$*. Por fim, perceba que*

$$\frac{\partial f_t}{\partial x}(a) = -2a \in [-2t,2t] \subseteq [-2,2]; \forall 0 < t \leq 1, -t < a < t$$

o que mostra que $(T,0)$ *tem derivada* 2*-limitada e é* C^1.

Exemplo 4.1.6. *Considere o conjunto em* $C_{\sqrt{2}}$*:*

$$T = \left\{ \left(x, \frac{x}{t} + t, t \right) \mid 0 < t < 1; -t^2 \leq x \leq 0 \right\} \cup \left\{ \left(x, -\frac{x}{t} + t, t \right) \mid 0 < t < 1; 0 \leq x \leq t^2 \right\}$$

Note que $(T,0)$ *é um triângulo de Hölder com vértice principal na origem, e cujos arcos de fronteira são os germes* $(\gamma_0,0),(\gamma_1,0)$*, em que* $\gamma_0(t) = (-t^2,0,t); \gamma_1(t) = (t^2,0,t)$*, para* $0 < t < 1$. *Veja também que* $(T,0)$ *é um germe de triângulo sincronizado, onde, para cada* $t \in (0,1)$*:*

$$f_t : [-t,t] \to \mathbb{R};\ f_t(x) = \begin{cases} \frac{x}{t} + t, & x \in [-t^2,0] \\ -\frac{x}{t} + t, & x \in [0,t^2] \end{cases}$$

É a família de funções geradoras de $(T,0)$*. Observe que* $(T,0)$ *é sincronizado mas não é de classe* C^1*. Por fim, perceba que:*

$$\left| \frac{\partial f_t}{\partial x}(a) \right| = \frac{1}{t}; \forall 0 < t < 1, a \in (-t^2,0) \cup (0,t^2)$$

O que mostra que $(T,0)$ *não tem derivada M-limitada, para todo* $M > 0$*, visto que* $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$.

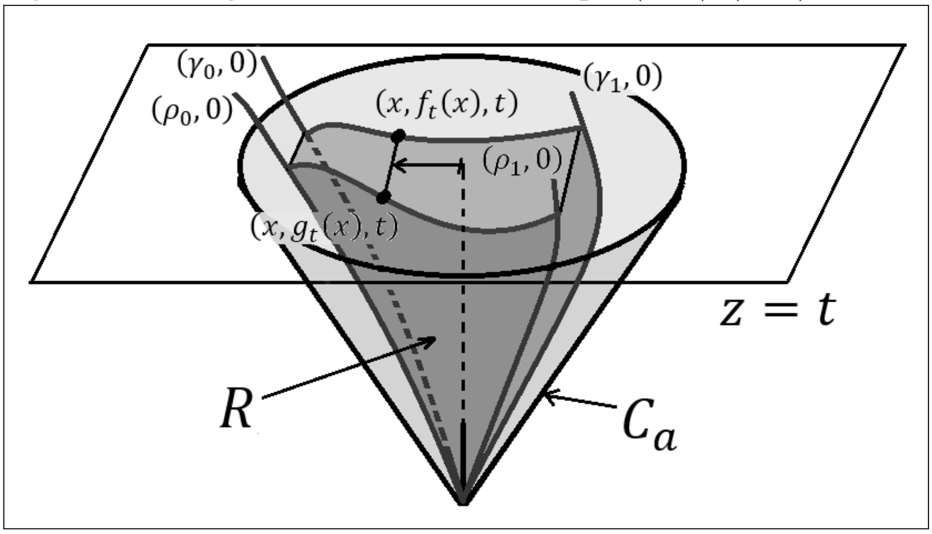
Definição 4.1.7. *Seja* $a > 0$ *e sejam* $(T_1,0),(T_2,0) \subset (C_a^3,0)$ *germes de triângulos sincronizados. Dizemos que* $(T_1,0),(T_2,0)$ ***são alinhados nos arcos de fronteira*** *se existem quatro germes de curvas distintos* $(\gamma_0,0),(\gamma_1,0),(\rho_0,0),(\rho_1,0) \subseteq (C_a^3,0)$*, tais que:*

$$\gamma_0 = \gamma_0(t) = (x_0(t),y_0(t),t), \gamma_1 = \gamma_1(t) = (x_1(t),y_1(t),t)$$

$$\rho_0 = \rho_0(t) = (x_0(t),w_0(t),t), \gamma_1 = \gamma_1(t) = (x_1(t),w_1(t),t)$$

são suas z-parametrizações, para $t > 0$ *suficientemente pequeno, e que* $(\gamma_0,0),(\gamma_1,0)$ *são arcos de fronteira de* $(T_1,0)$ *e* $(\rho_0,0),(\rho_1,0)$ *são arcos de fronteira de* $(T_2,0)$*. Suponha ainda que* $\{f_t\},\{g_t\}$ *sejam as famílias de funções geradoras de* $(T_1,0)$ *e* $(T_2,0)$*, respectivamente, e que para todo* $t > 0$ *suficientemente pequeno:*

Figura 9 – Retângulo curvilinear delimitado por $(T_1,0)$, $(T_2,0)$



Fonte: elaborado pelo autor.

- *$f_t(x_0) = y_0(t)$, $f_t(x_1) = y_1(t)$, $g_t(x_0) = w_0(t)$ e $g_t(x_1) = w_1(t)$;*
- *$f_t(x) \geq g_t(x)$, para todo $x_0(t) \leq x \leq x_1(t)$.*

Definimos o ***retângulo curvilinear delimitado por*** *$(T_1,0),(T_2,0)$ como sendo o germe do seguinte conjunto semialgébrico:*

$$R = \{(x,y,t) \in C_a^3 \mid x_0(t) \leq x \leq x_1(t)\ ;\ g_t(x) \leq y \leq f_t(x)\}$$

Caso $(\gamma_0,0) = (\rho_0,0)$ e $(\gamma_1,0) = (\rho_1,0)$, demoninamos o retângulo curvilinear delimitado por $(T_1,0),(T_2,0)$ também como a ***região delimitada por*** *$(T_1,0),(T_2,0)$.*

Observação 4.1.8. *Para cada $t > 0$ e para cada $(u,v) \in [0,1]^2$, defina:*

$$\theta_u(t) = u \cdot x_1(t) + (1-u) \cdot x_0(t) \in [x_0(t), x_1(t)]$$

$$\sigma_{u,v}(t) = v \cdot f_t(\theta_u(t)) + (1-v) \cdot g_t(\theta_u(t)) \in [g_t(\theta_u(t)), f_t(\theta_u(t))]$$

Note que para todo ponto P no retângulo curvilinear $(R,0)$, existem $(u,v) \in [0,1]$, $t > 0$ tais que $P = (\theta_u(t), \sigma_{u,v}(t), t)$. Além disso, para cada $P \in (R,0)$, u e t são únicos e se $f_t(\theta_u(t)) > g_t(\theta_u(t))$, v também será único (caso $f_t(\theta_u(t)) = g_t(\theta_u(t))$, temos $P = (\theta_u(t), \sigma_{u,v}(t), t)$ para todo $v \in [0,1]$). Dessa forma, se definirmos para cada $(u,v) \in [0,1]^2$ os arcos semialgébricos $\gamma_{u,v} : (\mathbb{R}_+^*, 0) \to (C_a^3, 0)$ como:

$$\gamma_{u,v}(t) = (\theta_u(t), \sigma_{u,v}(t), t)\ ;\ t > 0$$

Então os arcos $\gamma_{u,v} \subset V(R)$ formam uma cobertura do germe $(R,0)$. Com isso, podemos definir $\{\gamma_{u,v}\}_{(u,v)\in[0,1]^2}$ como a ***cobertura por arcos do retângulo curvilinear delimitado***

por $(T_1,0),(T_2,0)$. *Finalmente, note que, para cada* $(u,v) \in [0,1]^2$, *como cada germe de curva* $(\gamma_{u,v},0)$ *é semialgébrico, então o limite* $\lim_{t\to 0^+}(\gamma'_{u,v}(t))$ *existe e é um vetor, denominado* $\gamma'_{u,v}(0)$.

4.2 Propriedades básicas

A seguir, demonstraremos algumas propriedades estruturais básicas dos triângulos sincronizados e das regiões delimitadas por triângulos alinhados nos arcos de fronteira. Nas proposições seguintes desta seção, considere os elementos como nas definições 4.1.1, 4.1.4, 4.1.7 e como nas observações 4.1.3 e 4.1.8.

Proposição 4.2.1. *Sejam* $a, M > 0$ *e seja* $(T,0) \subset (C_a^3,0)$ *um germe de triângulo sincronizado* C^1, *com derivada* M*-limitada. Se* $\{f_t\}$ *é a família de funções associada a* $(T,0)$, *então, existem* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno e* $N > 1$ *suficientemente grande tais que, para todo* $0 < t < \varepsilon$, $x \in (x_0(t),x_1(t))$ *e* $u \in [0,1]$*:*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}(f_t)(x)\right| \ , \ |\gamma'_u(t)| < N$$

Demonstração. O resultado a seguir pode ser visto como uma consequência de estratificação como em (KURDYKA, 1992). Aqui, daremos uma prova diferente, usando o lema de seleção de curva.

Como $(T,0)$ é de classe C^1, podemos tomar $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\frac{\partial}{\partial t}(f_t)(x)$ esteja bem definida, para todo $0 < t < 2\varepsilon_0$ e todo $x_0(t) < x < x_1(t)$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$A_n = \left\{(t,x) \in (0,2\varepsilon_0) \times \mathbb{R} \mid x_0(t) < x < x_1(t); \left|\frac{\partial}{\partial t}(f_t)(x)\right| > n\right\}$$

Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t > 0$ suficientemente pequeno, tenhamos $A_n \cap C_a^3(t) \neq \emptyset$. Como A_n é semialgébrico, pelo lema de seleção de curva existe um germe de arco $(\psi_n,0) \subseteq (A_n,0)$. Escrevendo $\psi_n = \psi_n(t) = (x(t),y(t),t)$ e notando que ψ_n é semialgébrico, existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ suficientemente pequeno de modo que $\psi'_n(t) = (x'(t),y'(t),1)$ está bem definida e é contínua, para todo $t \in [0,\varepsilon]$, onde $\psi'_n(0) = \lim_{t\to 0^+}(\psi'_n(t))$. Como $(\psi_n,0) \subset (C_a^3,0)$, temos $\psi'_n(0) = (x'(0),y'(0),1) \in C_a^3$, donde $(x'(0))^2 + (y'(0))^2 \leq a^2$ e daí $|x'(0)|, |y'(0)| \leq a$. Assim, pela continuidade de ψ'_n ao redor de 0, podemos assumir que $\varepsilon > 0$ é pequeno o bastante de modo que $|x'(\varepsilon)|, |y'(\varepsilon)| \leq a + a = 2a$.

Considere $\psi_n(\varepsilon) = (x,y,\varepsilon)$ e, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ de valor absoluto suficientemente pequeno, considere os pontos:

$$P(t_0) = \psi_n(\varepsilon + t_0) = (x_{P(t_0)}, f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}), \varepsilon + t_0)$$

$$Q(t_0) = (x, f_{\varepsilon+t_0}(x), \varepsilon + t_0)$$

E note que $P(0) = Q(0) = (x, y, \varepsilon)$. Veja que, de:

$$\psi_n'(\varepsilon) = (x'(\varepsilon), y'(\varepsilon), 1) = (r_1, s_1, 1)$$

$$Q'(\varepsilon) = \left(0, \frac{\partial}{\partial t}(f_t)(\varepsilon), 1\right) = (0, s_2, 1)$$

Podemos escrever:

$$x_{P(t_0)} = x + r_1 \cdot t_0 + o(t_0)$$

$$f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}) = y + s_1 \cdot t_0 + o(t_0)$$

$$x_{Q(t_0)} = x, f_{\varepsilon+t_0}(x) = y + s_2 \cdot t_0 + o(t_0)$$

Assim, para $t_0 \neq 0$ suficientemente pequeno, e de $|r_1|, |s_1| \leq 2a, |s_2| > n$, vem:

$$\left|x_{P(t_0)} - x\right| = |r_1 \cdot t_0 + o(t_0)| < (|r_1| + 1) \cdot |t_0| \leq (2a + 1) \cdot |t_0|$$

$$\left|f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}) - f_{\varepsilon+t_0}(x)\right| \geq |f_{\varepsilon+t_0}(x) - y| - \left|f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}) - y\right| =$$

$$= |s_2 \cdot t_0 + o(t_0)| - |s_1 \cdot t_0 + o(t_0)| > (|s_2| - 1) \cdot |t_0| - (|s_1| + 1) \cdot |t_0| =$$

$$= (|s_2| - |s_1| - 2) \cdot |t_0| > (n - 2a - 2) \cdot |t_0|$$

Portanto, como cada f_t possui derivada M-limitada:

$$M \geq \left|\frac{f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}) - f_{\varepsilon+t_0}(x)}{x_{P(t_0)} - x}\right| > \frac{(n - 2a - 2) \cdot |t_0|}{(2a + 1) \cdot |t_0|} = \frac{n - 2a - 2}{2a + 1}$$

Uma contradição, para n suficientemente grande. Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $A_n \cap C_a^3[\varepsilon] = \emptyset$. Como $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, segue que $A_n \cap C_a^3[\varepsilon] = \emptyset$, para todo $n \geq N$. Portanto, $\left|\frac{\partial}{\partial t}(f_t)(x)\right| < N$, para todo $0 < t < \varepsilon$ e $x_0(t) < x < x_1(t)$, provando a primeira desigualdade.

A demonstração da segunda desigualdade é bastante similar, e a escreveremos por completitude. Temos que os germes de curvas $(\gamma_0, 0)$ e $(\gamma_1, 0)$ são semialgébricos e estão em

$(C_a^3, 0)$. Tomando a série de Puiseux em cada coordenada, temos que existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ e $r, s \in \mathbb{R}$ tais que:

$$x_0(t) = r \cdot t^{\alpha} + o(t^{\alpha})$$

$$x_1(t) - x_0(t) = s \cdot t^{\beta} + o(t^{\beta})$$

Note que, como $(x_0(t), f_t(x_0(t)), t), (x_1(t), f_t(x_1(t)), t) \in C_a^3$, isso implica $\alpha, \beta \geq 1$. Também, como $\theta_u(t) = u \cdot x_1(t) + (1-u) \cdot x_0(t) = x_0(t) + u \cdot (x_1(t) - x_0(t))$, ao derivar em t, temos:

$$\theta_u'(t) = r\alpha \cdot t^{\alpha-1} + o(t^{\alpha-1}) + u \cdot (s\beta \cdot t^{\beta-1} + o(t^{\beta-1}))$$

Donde, para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, $|\theta_u'(t)| < N_0$, para todo $u \in [0,1]$ e para alguma constante $N_0 > 0$ que não depende de t e de u. Agora, cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$B_n = \left\{(u,t) \in (0,1) \times (0, 2\varepsilon_0) \mid \left|\gamma_u'(t)\right| > n\right\}$$

Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\varepsilon > 0$, $B_n \cap C_a^3(\varepsilon) \neq \emptyset$. Como B_n é semialgébrico, pelo lema de seleção de curva existe um germe de arco $(\psi_n, 0) \subseteq (B_n, 0)$. Escrevendo $\psi_n = \psi_n(t) = (x(t), y(t), t)$ e notando que ψ_n é semialgébrico, existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ de modo que $\psi_n'(t) = (x'(t), y'(t), 1)$ está bem definida e é contínua, para todo $t \in [0, \varepsilon]$, onde $\psi_n'(0) = \lim_{t \to 0^+} (\psi_n'(t))$. Como $(\psi_n, 0) \subset (C_a^3, 0)$, temos $\psi_n'(0) = (x'(0), y'(0), 1) \in C_a^3$, donde $(x'(0))^2 + (y'(0))^2 \leq a^2$ e daí $|x'(0)|, |y'(0)| \leq a$. Assim, pela continuidade de ψ_n', podemos assumir que ε é pequeno o bastante de modo que $|x'(\varepsilon)|, |y'(\varepsilon)| \leq a + a = 2a$.

Considere $\psi_n(\varepsilon) = \gamma_u(\varepsilon)$, para algum u, e, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ de valor absoluto suficientemente pequeno, considere os pontos:

$$P(t_0) = \psi_n(\varepsilon + t_0) = (x_{P(t_0)}, f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}), \varepsilon + t_0)$$

$$Q(t_0) = \gamma_u(\varepsilon + t_0) = (x_{Q(t_0)}, f_{\varepsilon+t_0}(x_{Q(t_0)}), \varepsilon + t_0)$$

E note que $P(0) = Q(0) = (x, y, \varepsilon)$. Veja que, de:

$$\psi_n'(\varepsilon) = (x'(\varepsilon), y'(\varepsilon), 1) = (r_1, s_1, 1)$$

$$\gamma_u'(\varepsilon) = \left(\theta_u'(\varepsilon), (f_t(\theta_u(t)))'(\varepsilon), 1\right) = (r_2, s_2, 1)$$

Podemos escrever:

$$x_{P(t_0)} = x + r_1 \cdot t_0 + o(t_0)$$

$$f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}) = y + s_1 \cdot t_0 + o(t_0)$$

$$x_{Q(t_0)} = x + r_2 \cdot t_0 + o(t_0)$$

$$f_{\varepsilon+t_0}(x_{Q(t_0)}) = y + s_2 \cdot t_0 + o(t_0)$$

Assim, para $t_0 \neq 0$ suficientemente pequeno, e de $|r_1|, |s_1| \leq 2a, |r_2| < N_0, |s_2| > n$, teremos:

$$\left|x_{P(t_0)} - x_{Q(t_0)}\right| \leq \left|x_{P(t_0)} - x\right| + \left|x - x_{Q(t_0)}\right| = |r_1 \cdot t_0 + o(t_0)| + |r_2 \cdot t_0 + o(t_0)| <$$

$$< (|r_1| + 1) \cdot |t_0| + (|r_2| + 1) \cdot |t_0| = (|r_1| + |r_2| + 2) \cdot |t_0| < (2a + N_0 + 2) \cdot |t_0|$$

$$\left|f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}) - f_{\varepsilon+t_0}(x_{Q(t_0)})\right| \geq \left|f_{\varepsilon+t_0}(x_{Q(t_0)}) - y\right| - \left|f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)} - y)\right|$$

$$= |s_2 \cdot t_0 + o(t_0)| - |s_1 \cdot t_0 + o(t_0)| > (|s_2| - 1) \cdot |t_0| - (|s_1| + 1) \cdot |t_0| =$$

$$= (|s_2| - |s_1| - 2) \cdot |t_0| > (n - 2a - 2) \cdot |t_0|$$

Portanto, como cada f_t possui variação M-limitada:

$$M > \left|\frac{f_{\varepsilon+t_0}(x_{P(t_0)}) - f_{\varepsilon+t_0}(x_{Q(t_0)})}{x_{P(t_0)} - x_{Q(t_0)}}\right| > \frac{(n - 2a - 2) \cdot |t_0|}{(2a + N_0 + 2) \cdot |t_0|} = \frac{n - 2a - 2}{2a + N_0 + 2}$$

Uma contradição, para n suficientemente grande (note que a, N_0 não dependem de n). Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_n \cap C_a^3[\varepsilon] = \emptyset$. Como $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, segue que $B_n \cap C_a^3[\varepsilon] = \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, finalizando a demonstração. $\square$

Corolário 4.2.2. *Sejam $a, M > 0$ real e sejam $(T_1, 0), (T_2, 0) \subset (C_a^3, 0)$ germes de funções semialgébricas de classe C^1, com variação M-limitada e alinhados nos arcos de fronteira. Seja $\{\gamma_{u,v}\}_{(u,v)\in[0,1]^2}$ a cobertura por arcos do retângulo curvilinear delimitado por $(T_1, 0)$ e $(T_2, 0)$. Então, existem $\varepsilon > 0, N > 1$ tais que, para todo $(u, v, t) \in [0,1]^2 \times [0, \varepsilon)$:*

$$\left|\gamma'_{u,v}(t)\right| < N$$

Demonstração. Pela Proposição 4.2.1, existem $\varepsilon > 0$ e $N_0 > 1$ tais que $|\gamma'_{u,v}(t)| < N_0$ para todo $(u,v,t) \in [0,1] \times \{0,1\} \times [0,\varepsilon]$. Daí:

$$|\gamma'_{u,0}(t)| = \left|\left(\theta'_u(t),(g_t(\theta_u(t)))'(t),1\right)\right| < N_0 \Rightarrow \left|\theta'_u(t)\right|, \left|(g_t(\theta_u(t)))'(t)\right| < N_0$$

$$|\gamma'_{u,1}(t)| = \left|\left(\theta'_u(t),(f_t(\theta_u(t)))'(t),1\right)\right| < N_0 \Rightarrow \left|(f_t(\theta_u(t)))'(t)\right| < N_0$$

E assim:

$$(\sigma_{u,v}(t))'(t) = v \cdot (f_t(\theta_u(t)))'(t) + (1-v) \cdot (g_t(\theta_u(t)))'(t) \Rightarrow$$

$$|(\sigma_{u,v}(t))'(t)| \leq v \cdot \left|(f_t(\theta_u(t)))'(t)\right| + (1-v) \cdot \left|(g_t(\theta_u(t)))'(t)\right| < v \cdot N_0 + (1-v) \cdot N_0 = N_0$$

Donde:

$$|\gamma'_{u,v}(t)| = \left|(\theta'_u(t),(\sigma_{u,v}(t))'(t),1)\right| < \sqrt{N_0^2 + N_0^2 + 1} = N$$

Finalizando a demonstração. □

Proposição 4.2.3. *Sejam $(T_1,0),(T_2,0) \subset (C_a^3,0)$ germes de triângulos sincronizados de classe C^1, com derivada M-limitada e alinhados nos arcos de fronteira. Então o retângulo curvilinear delimitado por $(T_1,0)$ e $(T_2,0)$ é um germe de um conjunto semialgébrico normalmente mergulhado.*

Demonstração. Inicialmente, note que por conta do Corolário 4.2.2, podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $N > 1$ suficientemente grande tal que, para todo $0 \leq t < \varepsilon$ e todo $(u,v) \in [0,1]^2$: $\|\gamma'_{u,v}(t)\| < N$. Denotando $\gamma'_{u,v}(t) = (x'(u,v,t), y'(u,v,t), 1)$, temos em particular $|x'(u,v,t)|, |y'(u,v,t)| < N$.

Agora, sejam $(u_1,v_1,t_1),(u_2,v_2,t_2) \in [0,1]^2 \times [0,\varepsilon)$ e sejam:

$$A_1 = (\theta_{u_1}(t_1), \sigma_{u_1,v_1}(t_1), t_1) = (x_{A_1}, y_{A_1}, t_1); A_2 = (\theta_{u_2}(t_2), \sigma_{u_2,v_2}(t_2), t_2) = (x_{A_2}, y_{A_2}, t_2)$$

$$B = (\theta_{u_2}(t_1), \sigma_{u_2,v_1}(t_1), t_1) = (x_B, y_B, t_1); C = (\theta_{u_2}(t_1), \sigma_{u_2,u_2}(t_1), t_1) = (x_C, y_C, t_1)$$

Desejamos mostrar que existe $\tilde{N} \geq 1$ tal que $d_i(A_1,A_2) \leq \tilde{N} \cdot d(A_1,A_2)$. O caso $t_1 = t_2$ $(C = A_2)$ é imediato pela Proposição 2.2.18. Suponha agora que $t_1 \neq t_2$. Note também que, como $C, A_2 \in \gamma_{u_2,v_2}$, e que, para cada real positivo t entre t_1, t_2, $|x'(u_2,v_2,t)|, |y'(u_2,v_2,t)| < N$, temos que $|x_C - x_{A_2}|$, $|y_C - y_{A_2}| \leq N \cdot |t_1 - t_2|$. Assim, se l_2 é o comprimento da porção da curva γ_{u_2,v_2} ligando C a A_2, então:

$$l_2 = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'_{u_2,v_2}(t)\| \, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} N dt = N \cdot |t_1 - t_2| \leq N \cdot d(C, A_2)$$

Ademais, se α é o ângulo entre os segmentos $\overline{CA_1}$ e $\overline{CA_2}$, então $\alpha \in [\alpha_0, \pi - \alpha_0]$, onde α_0 é o ângulo entre $\overline{CA_2}$ e o plano $z = t_1$, uma vez que C, A_1 estão neste plano. Assim:

$$|\cot \alpha| \leq |\cot \alpha_0| \leq \frac{\sqrt{(x_C - x_{A_2})^2 + (y_C - y_{A_2})^2}}{|t_2 - t_1|} \leq N\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\dfrac{1}{\cot^2 \alpha} + 1} \leq \frac{1}{\dfrac{1}{2N^2} + 1} = 1 - \frac{2}{M_0^2}$$

Para algum $M_0 \geq 1$, donde $d(A_1, C) + d(C, A_2) \leq M_0 \cdot d(A_1, A_2)$, pelo Lema 2.2.19. Como $d_i(A_1, C) \leq \sqrt{1 + M^2} \cdot d(A_1, C)$, segue que, se definirmos $\tilde{N} = \sqrt{1 + M^2} N M_0$:

$$d_i(A_1, A_2) \leq d_i(A_1, C) + d_i(C, A_2) \leq \sqrt{1 + M^2} d(A_1, C_1) + l_2 \leq$$

$$\leq \sqrt{1 + M^2} \cdot d(A, C_1) + N \cdot d(C, A_2) \leq \sqrt{1 + M^2} N(d(A_1, C) + d(C, A_2)) \leq$$

$$\leq \sqrt{1 + M^2} N M_0 \cdot d(A_1, A_2) = \tilde{N} \cdot d(A_1, A_2)$$

Logo, $d_i(A_1, A_2) \leq \tilde{N} \cdot d(A_1, A_2)$, e, portanto, o resultado está demonstrado. $\square$

4.3 Decomposição convexa

As proposições desta seção essencialmente usam as técnicas desenvolvidas em (PARUSIŃSKI, 1994) e em (KURDYKA, 1992). Apresentaremos uma prova com algumas adaptações específicas para obtermos triângulos sincronizados, de modo similar ao que é feito em (BIRBRAIR, 1999).

Para cada ângulo $\theta \in \mathbb{R}$, defina a aplicação de rotação de eixos $r_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$r_\theta(x, y, t) = (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta, -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta, t)$$

Note que r_θ é uma aplicação bi-Lipschitz ambiente, pois é uma isometria.

Proposição 4.3.1. *Seja $a > 0$ e seja $X \subset C_a^3$ uma superfície 2-dimensional pura, semialgébrica e fechada. Então, existe $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ e $M > 0$ tais que:*

1. *$(X,0)$ é a união de germes de triângulos de Hölder $(X_1,0),\dots(X_n,0)$, onde, para $i,j \in \{1,\dots,n\}; i \neq j$, temos que $(X_i,0)\cap(X_j,0) = \{0\}$ ou que $(X_i,0)\cap(X_j,0)$ é um arco. Ademais, se definirmos:*

$$\Gamma := \{(X_i,0)\cap(X_j,0) : i,j \in \{1,\dots,n\}; i \neq j\}$$

Então os elementos de $\Gamma-\{0\}$ são arcos de fronteira de $(X_1,0),\dots(X_n,0)$;

2. *$(sing(X),0) \subset \Gamma$;*
3. *Existem ângulos $\theta_1,\dots,\theta_n$ tais que $(T_i,0)$ é um germe de um triângulo sincronizado, de classe C^1 e derivada M-limitada, onde $T_i = r_{\theta_i}(X_i)$, para cada $i = 1,\dots,n$.*

Qualquer decompomposição $(X,0) = \bigcup_{i=1}^{n}(X_i,0)$ do germe $(X,0)$ satisfazendo tais condições é chamada de ***Decomposição Sincronizada de*** $(X,0)$.

Demonstração. Seja $\{e_x,e_y,e_z\}$ a base ortonormal canônica em $\mathbb{R}^3$, $R_{ij} = span\{e_i,e_j\}$ e $\pi_{ij} : \mathbb{R}^3 \to R_{ij}$ a projeção ortogonal. Considere a aplicação de Gauss:

$$G : X - sing(X) \to G(2,3) \ ; \ G(p) = T_p(X) \in G(2,3) \ ; \ \forall p \in X - sing(X)$$

Para cada $\delta > 0$ e $\{i,j\} \in \{x,y,z\}$, defina:

$$U_{ij}(\delta) = \left\{ m \in G(2,3) \mid \angle(m,R_{ij}) < \frac{\pi}{2} - \delta \right\}$$

Afirmação 4.3.2. *Existem $\varepsilon,\delta > 0$ suficientemente pequenos tais que:*

$$p \in (X - sing(X)) \cap C_a^3[\varepsilon] \Rightarrow G(x) \in U_{xz}(\delta) \cup U_{yz}(\delta)$$

Demonstração. Para cada $p \in X - sing(X)$, seja (x_p,y_p,z_p) o vetor unitário ortogonal a $T_p(X)$. Note que $p \notin U_{xz}(\delta)\cup U_{yz}(\delta) \Leftrightarrow |x_p|,|y_p| \leq \sin\delta$. Portanto, se provarmos que existe $\rho = 1-\sqrt{1-2\sin^2(\delta)} > 0$ suficientemente pequeno tal que, para algum $\varepsilon > 0$:

$$p \in (X - sing(X)) \cap C_a^3[\varepsilon] \Rightarrow |z_p| < 1-\rho$$

Então a afirmação estará demonstrada, uma vez que $x_p^2 + y_p^2 = 1 - z_p^2 > 2\sin^2(\delta)$ implicaria $|x_p| > \sin\delta$ ou $|y_p| > \sin\delta$. Tome $\rho = 1-\sqrt{\frac{2a^2}{1+2a^2}}$ e suponha que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in (X-sing(X))\cap C_a^3[\varepsilon]$ tal que $|z_p| \geq 1-\rho$. Pelo lema da seleção de curva, existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma curva $\gamma : [0,\varepsilon_0] \to C_a^3; \gamma(t) = (x(t),y(t),t)$ tal que $|z_{\gamma(t)}| \geq 1-\rho$, para todo $0 < t < \varepsilon_0$. Como $(x'(t),y'(t),1) \in T_{\gamma(t)}(X)$, para cada $0 \leq t < \varepsilon_0$, temos:

$$0 = (x'(t),y'(t),1)\cdot(x_{\gamma(t)},y_{\gamma(t)},z_{\gamma(t)}) \Rightarrow |-z_{\gamma(t)}| = |x'(t)\cdot x_{\gamma(t)} + y'(t)\cdot y_{\gamma(t)}| \leq$$

$$\leq \sqrt{(x'(t))^2+(y_\prime(t))^2}\sqrt{(x_{\gamma(t)})^2+(y_{\gamma(t)})^2} = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\sqrt{1-z_{\gamma(t)}^2}$$

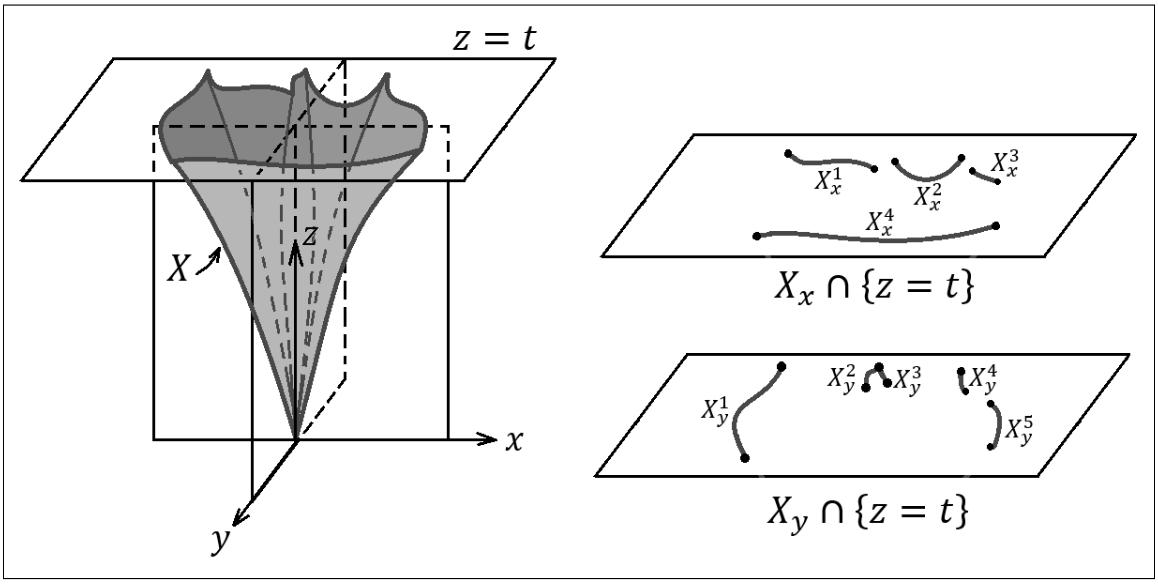
$$\Rightarrow (x'(t))^2+(y'(t))^2 \geq \frac{z_{\gamma(t)}^2}{1-z_{\gamma(t)}^2} \geq 2a^2$$

Por outro lado, como $\gamma \subset C_a^3$ é uma curva semialgébrica, temos também que $(x'(0), y'(0), 1) \in C_a^3$, donde $x'(0)+y'(0) \leq a^2$, uma contradição. Logo, a afirmação está provada. $\square$

Agora, considere $X_x = \overline{G^{-1}(U_{xz}(\delta))}$ e $X_y = \overline{G^{-1}(U_{yz}(\delta)) - X_x}$. Para cada $t = x, y$, existe uma decomposição em panquecas $\{X_t^k\}_{1 \leq k \leq K_t}$ de X_t satisfazendo as seguintes condições:

1. Todos os conjuntos X_t^k são semialgébricos satisfazendo $0 \in X_t^k$.
2. $(X_t^k, 0)$ é um germe de um triângulo curvilinear com vértice na origem (em particular, um triângulo de Hölder).
3. Para $k_1 \neq k_2$, $(X_t^{k_1}, 0) \cap (X_t^{k_2}, 0)$ é $\{0\}$ ou um arco.
4. para cada $1 \leq k \leq K_t$, $\pi_{tz}|_{X_t^k \cap C_a^3(\varepsilon)}$ é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Figura 10 – Demonstração da Proposição 4.3.1



Fonte: elaborado pelo autor.

Finalmente, tomando $T_x^k = r_0(X_x^k)$ e $T_y^k = r_{\frac{\pi}{2}}(X_y^k)$, e considerando $\{T_1, \ldots, T_n\}$ uma reindexação dos conjuntos T_x^k, T_y^k, temos que cada $(T_i, 0)$ é um germe de um triângulo sincronizado de derivada M-limitada (por conta da projeção $\pi_x z$ ou $\pi_y z$) e de classe C^1. Isso encerra a demonstração. $\square$

Observação 4.3.3. *Dada uma decomposição sincronizada P de $(X,0)$, observe que, se escolhermos um germe de triângulo de Hölder $(X_k,0)$ dessa decomposição, e dividirmos $(X_k,0)$ em dois germes de triângulos de Hölder $(X_{k,0},0),(X_{k,1},0)$ por meio de um arco $(\gamma,0) \subset (X_i,0)$, então se P' é a partição $(X,0) = \left(\bigcup_{i=1,i\neq k}^{n}(X_i,0)\right) \cup (X_{k,0},0) \cup (X_{k,1},0)$, P' também cumprirá as condições da Proposição 4.3.1, sendo assim uma decomposição sincronizada de $(X,0)$. A partição P' é denominada* ***refinamento direto de P****.*

Dizemos ainda que uma decomposição sincronizada P' de um germe $(X,0)$ é um refinamento da decomposição sincronizada P de $(X,0)$ se existe uma sequência finita de decomposições $P = P_0, P_1, \dots, P_n = P'$ tais que P_i é refinamento direto de P_{i-1}, para todo $i = 1, \dots, n$.

Proposição 4.3.4 (Decomposição Convexa)**.** *Seja $a > 0$ e seja $X \subset C_a^3$ uma superfície 2-dimensional pura, semialgébrica e fechada. Dada uma decomposição sincronizada de $(X,0)$, temos que, para todo $\delta > 0$, existe uma decomposição sincronizada $(X,0) = \bigcup_{i=1}^{n}(X_i,0)$ que é refinamento da decomposição inicial,tal que:*

1. *Se $\{f_t\}$ é a família de funções geradoras ao germe sincronizado $(T_i,0) = (r_{\theta_i}(X_i),0)$, então cada $f_t : [x_0(t),x_1(t)] \to \mathbb{R}$ é uma função convexa;*
2. *Para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, temos:*

$$\left| \frac{\partial f_t}{\partial x_+}(x_0(t)) - \frac{\partial f_t}{\partial x_-}(x_1(t)) \right| < \delta$$

Qualquer decomposição sincronizada do germe de superfície $(X,0)$ que cumpre tais condições é chamada de ***decomposição δ-convexa de*** $(X,0)$.

Demonstração. Demonstraremos a proposição no caso em que $(X,0)$ é germe de um triângulo sincronizado, de classe C^1 e derivada M-limitada, uma vez que o caso geral segue deste, ao aplicar o resultado em cada germe de triângulo sincronizado da decomposição de $(X,0)$ obtida da Proposição 4.3.1.

Considere $\{f_t\}_{0<t<\varepsilon}$; $f_t : [x_0(t),x_1(t)] \to \mathbb{R}$ a família de funções geradoras de $(X,0)$, e considere o conjunto:

$$A = \left\{(x, f_t(x), t) \in X \cap C_a^3[\varepsilon] \mid f_t''(x) = 0\right\}$$

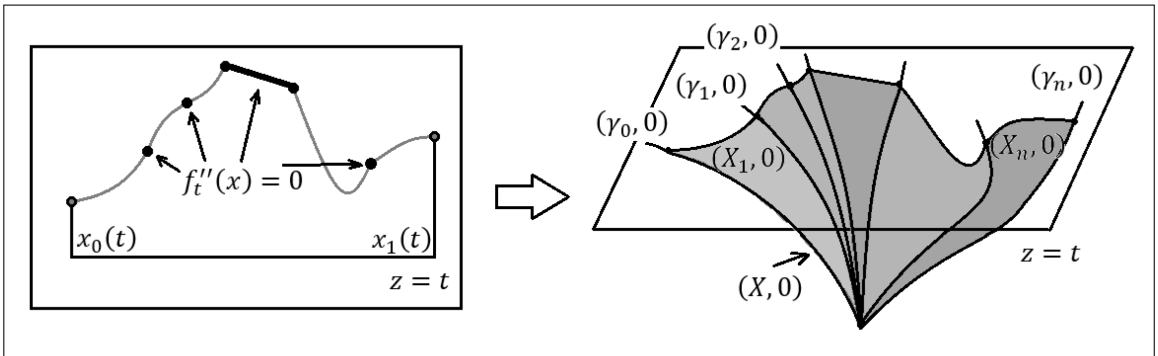
$A \subseteq X$ é um conjunto semialgébrico de dimensão menor ou igual a 2, e assim $(A,0)$ é um conjunto vazio, ou uma união finita de arcos e/ou triângulos de Hölder. No primeiro caso, temos que $f_t''(x)$ é sempre positivo ou negativo, donde f_t é uma função convexa para todo

$0 < t \leq \varepsilon$ ou f_t é uma função côncava para todo $0 < t \leq \varepsilon$ (neste último caso, $-f_t$ é convexa, e assim podemos considerar o germe $(r_\pi(X), 0)$ ao invés de $(X, 0)$). No segundo caso, considere $(\gamma_1, 0), \ldots, (\gamma_n, 0)$ os arcos de dimensão 1 que compõe A, mais os arcos de fronteira dos triângulos de Hölder que compõe A, mais os germes dos arcos de fronteira de X. Podemos supor, por meio de uma reindexação de ínidces, que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e que, para cada $0 \leq i \leq n$, temos:

$$\gamma_i(t) = (x_i(t), f_t(x_i(t)), t); 0 < t < \varepsilon$$

Com isso, temos que $f_t|_{[x_i(t), x_{i+1}(t)]}$ é convexa, para todo $0 < t < \varepsilon$, ou côncava, para todo $0 < t < \varepsilon$. Portanto, se dividirmos $(X, 0)$ em n germes de triângulos de Hölder, com $(X_i, 0)$ sendo o germe delimitado por $(\gamma_{i-1}, 0), (\gamma_i, 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, então podemos escolher ângulos $\theta_1, \ldots, \theta_n$ tais que cada $(T_i, 0)$ tenha funções convexas como família de funções geradoras ($\theta_i = 0$, se $f_t|_{[x_i(t), x_{i+1}(t)]}$ é convexa e $\theta_i = \pi$, se $f_t|_{[x_i(t), x_{i+1}(t)]}$ é côncava).

Figura 11 – Decomposição pelos arcos determinados por A



Fonte: elaborado pelo autor.

Portanto, demonstramos que toda partição sincronizada possui um refinamento que cumpre a primeira condição da proposição, e assim basta demonstrar a proposição assumindo que a família de funções geradoras de $(X, 0)$ é uma família de funções convexas, pois assim podemos considerar um refinamento do refinamento obtido aqui, em que a segunda condição também é cumprida. Assuma que esse é o caso. e defina, para cada $0 < t < \varepsilon$:

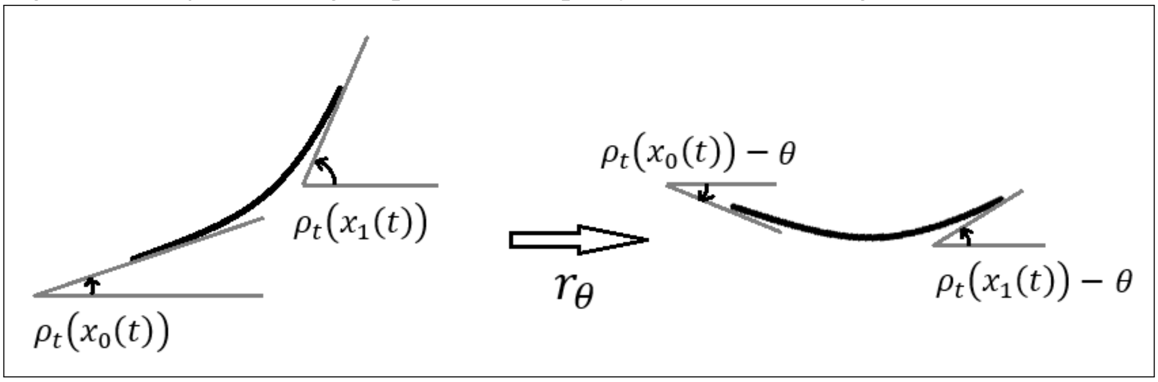
$$\rho_t : [x_0(t), x_1(t)] \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \rho_t(x) = \arctan f_t'(x)$$

Onde, por conveniência, denotamos $f_t'(x_0(t)) = \dfrac{\partial f_t}{\partial x_+}(x_0(t))$ e $f_t'(x_1(t)) = \dfrac{\partial f_t}{\partial x_-}(x_1(t))$. Observe que, pela convexidade das funções de derivada M-limitada f_t, temos que, para todos $0 < t \leq \varepsilon$ e para cada $x, y \in [x_0(t), x_1(t)]$, com $x < y$, é válido que $\rho_t(x) \leq \rho_t(y)$. Daí, se

$a = \lim_{t\to 0^+} \rho_t(x_0(t))$ e $b = \lim_{t\to 0^+} \rho_t(x_1(t))$, então $a \leq b$ e, para cada $\kappa > 0$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $a-\kappa < \rho_t(x_0(t)) \leq \rho_t(x) \leq \rho_t(x_1(t)) < b+\kappa$, para todo $0 < t < \varepsilon$ e todo $x_0(t) \leq x \leq x_1(t)$. Temos 2 casos a considerar:

Caso 1: se $2\tan(b-a) < \delta$, então tome $\theta = a-\kappa$ e seja $(T,0) = (r_\theta(X),0)$. Note que $(T,0)$ é triângulo sincronizado, de classe C^1, convexo e com derivada $\tan(b-a+2\kappa)$-limitada. Tomando κ pequeno tal que $2\tan(b-a+2\kappa) < \delta$, o resultado segue.

Figura 12 – Ajuste do ângulo para a decomposição δ-convexa em germe convexo



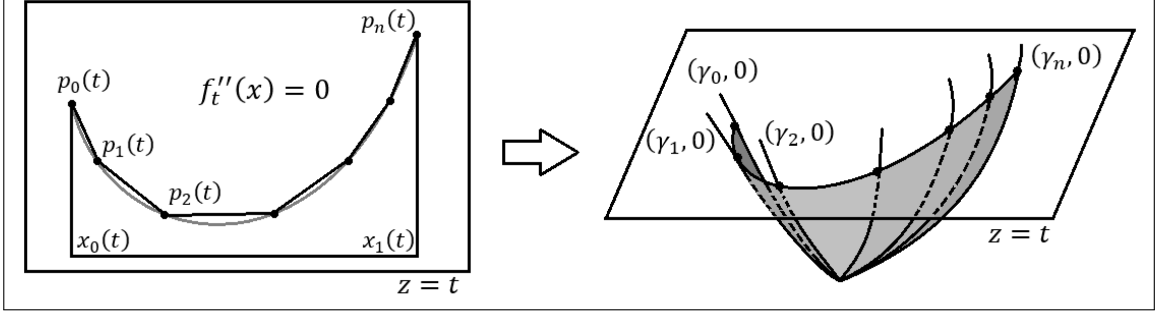
Fonte: elaborado pelo autor.

Caso 2: se $2\tan(b-a) \geq \delta$, então considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $2\tan(\frac{b-a}{n}) < \delta$, e para cada $0 < t < \varepsilon$, $i = 0,1,\dots,n$ seja $p_i(t) \in [x_0(t), x_1(t)]$ o único número real que:

$$\rho_t(p_i(t)) = \frac{1}{n}\left((n-i)\cdot\rho_t(x_0(t)) + i\cdot\rho_t(x_1(t))\right)$$

A unicidade é garantida pela convexidade das funções f_t e por que $\rho_t(x_0(t)) < \rho_t(x_1(t))$, para t suficientemente pequeno. Se $\gamma_i(t) = (p_i(t), f_t(p_i(t)), t)$, então ao dividirmos $(X,0)$ em n germes de triângulos de Hölder $(X_1,0),\dots,(X_n,0)$, com $(X_i,0)$ sendo o germe delimitado por $(\gamma_{i-1},0),(\gamma_i,0)$ $(i = 1,\dots,n)$, podemos aplicar o mesmo argumento do Caso 1 para cada $(X_i,0)$, finalizando a demonstração da proposição. □

Figura 13 – Decomposição δ-convexa num triângulo sincronizado



Fonte: elaborado pelo autor.

5 ISOTOPIA BI-LIPSCHITZ AMBIENTE

5.1 Isotopia ambiente em retângulos curvilineares

A presente seção é devotada à definição do conceito de isotopia bi-Lipschitz ambiente e à demonstração do teorema de isotopia em retângulos curvilineares. Tal resultado é, em certa medida, uma extensão da equivalência $\mathscr{C}$-bi-Lipschitz entre germes de funções estudados em (BIRBRAIR *et al.*, 2007).

Definição 5.1.1. *Sejam $X, X_0, X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos tais que $X_1, X_2 \subseteq X$. Dizemos que X_1, X_2 são* ***Bi-Lipschitz Ambiente Isotópicos em*** *X se existir uma aplicação contínua $\varphi : X \times [0,1] \to X$ tal que, se denotarmos $\varphi_\tau(p) = \varphi(p, \tau)$, então:*

1. *$\varphi_\tau : X \to X$ é uma aplicação bi-Lipschitz (com respeito à métrica induzida de $\mathbb{R}^n$), para todo $0 \leq \tau \leq 1$.*
2. *$\varphi_0 = id_X$.*
3. *$\varphi_1(X_1) = X_2$.*

A aplicação φ é denominada ***Isotopia Bi-Lipschitz ambiente em X, levando*** *X_1* ***em*** *X_2. Dizemos ainda que a isotopia φ é* ***Invariante na Fronteira de*** *X se $\varphi_\tau|_{\partial X} = id_{\partial X}$, para todo $0 \leq \tau \leq 1$.*

De modo análogo, podemos definir isotopia bi-Lipschitz ambiente para germes da maneira seguinte:

Definição 5.1.2. *Sejam $(X,0), (X_0,0), (X_1,0) \subseteq (\mathbb{R}^n,0)$ germes de conjuntos tais que $X_1, X_2 \subseteq X$. Dizemos que $(X_1,0), (X_2,0)$ são* ***Bi-Lipschitz Ambiente Isotópicos em*** *$(X,0)$ se existir uma aplicação contínua $\varphi : (X,0) \times [0,1] \to (X,0)$ tal que, se denotarmos $\varphi_\tau(p) = \varphi(p,\tau)$, então:*

1. *$\varphi_\tau : (X,0) \to (X,0)$ é uma aplicação bi-Lipschitz (com respeito à métrica induzida de $\mathbb{R}^n$), para todo $0 \leq \tau \leq 1$.*
2. *$\varphi_0 = id_{(X,0)}$.*
3. *$\varphi_1((X_1,0)) = (X_2,0)$*

A aplicação φ é denominada ***Isotopia Bi-Lipschitz ambiente em*** *$(X,0)$**, levando*** *$(X_1,0)$* ***em*** *$(X_2,0)$. Dizemos ainda que a isotopia φ é* ***Invariante na Fronteira de*** *$(X,0)$ se $\varphi_\tau|_{(\partial X,0)} = id_{(\partial X,0)}$, para todo $0 \leq \tau \leq 1$.*

Teorema 5.1.3 (Isotopia bi-Lipschitz Ambiente em Retângulos Curvilineares)**.** *Sejam:*

$$(T_1,0),(T_2,0),(W_1,0),(W_2,0) \subset (C_a^3,0)$$

germes de triângulos sincronizados, dois a dois alinhados nos arcos de fronteira. Suponha que para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, existe $M > 1$ tal que:

- $(T_1,0),(T_2,0),(W_1,0),(W_2,0)$ *possuem derivada M-limitada e que $\{f_t\},\{g_t\},\{a_t\},\{b_t\}$ são suas respectivas famílias de funções geradoras;*
- $(T_1,0)$ *possui $(\gamma_0,0),(\gamma_1,0)$ como arcos de fronteira, onde:*

$$\gamma_0 = \gamma_0(t) = (x_0(t),y_0(t),t) \ ; \ \gamma_1 = \gamma_1(t) = (x_1(t),y_1(t),t)$$

  e $x_0(t) < x_1(t)$;
- *para todo $x \in (x_0(t),x_1(t))$, as inequações sejam satisfeitas:*

$$g_t(x) < a_t(x), b_t(x) < f_t(x)$$

$$\frac{1}{M} \leq \frac{a_t(x)-g_t(x)}{f_t(x)-g_t(x)}, \frac{b_t(x)-g_t(x)}{f_t(x)-g_t(x)} \leq 1-\frac{1}{M}$$

Se $(R,0)$ é o retângulo curvilinear delimitado por $(T_1,0),(T_2,0)$, então existe uma aplicação contínua $\varphi : (R,0)\times[0,1] \to (R,0)$ tal que, se denotarmos $\varphi_\tau(p) = \varphi(p,\tau)$, então:

1. $\varphi_\tau : (R,0) \to (R,0)$ *é uma aplicação bi-Lipschitz exterior, para todo $0 \leq \tau \leq 1$.*
2. $\varphi_0 = id_{(R,0)}$ *e* $\varphi_\tau|_{(T_1,0)\cup(T_2,0)} = id_{(T_1\cup T_2,0))}$, *para todo $0 \leq \tau \leq 1$.*
3. *Para todo $t > 0$ pequeno e $x \in [x_0(t),x_1(t)]$:*

$$\varphi_1(x,f_t(x),t) = (x,f_t(x),t)$$

$$\varphi_1(x,g_t(x),t) = (x,g_t(x),t)$$

$$\varphi_1(x,a_t(x),t) = (x,b_t(x),t)$$

Em particular, φ é uma isotopia em $(R,0)$ levando $(W_1,0)$ em $(W_2,0)$. Ademais, se $(T_1,0)$ e $(T_2,0)$ possuem os mesmos arcos de fronteira, φ é invariante na fronteira da região $(R,0)$ delimitada por $(T_1,0)$ e $(T_2,0)$.

Demonstração. Consideremos primeiramente o caso em que $(T_1,0),(T_2,0),(W_1,0),(W_2,0)$ são C^1. Pela Proposição 4.2.1 podemos tomar $N > 1$ suficientemente grande tal que, para todo $t > 0$

suficientemente pequeno e $x_0(t) < x < x_1(t)$:

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial t}(t)\right|, \left|\frac{\partial x_1}{\partial t}(t)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial t}(f_t)(x)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial t}(g_t)(x)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial t}(a_t)(x)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial t}(b_t)(x)\right| < N$$

Considerando $\{\gamma_{u,v}\}_{(u,v)\in[0,1]^2}$ a cobertura por arcos de $(R,0)$, podemos escrever, para todo $t > 0$ pequeno e todo $x \in (x_0(t), x_1(t))$, $x = \theta_u(t)$ $(u \in (0,1))$:

$$(x, g_t(x), t) = (\theta_u(t), \sigma_{u,0}(t), t) = \gamma_{u,0}(t)$$

$$(x, f_t(x), t) = (\theta_u(t), \sigma_{u,1}(t), t) = \gamma_{u,1}(t)$$

$$(x, a_t(x), t) = (\theta_u(t), \sigma_{u,\alpha_t(u)}(t), t) = \gamma_{u,\alpha_t(u)}(t)$$

$$(x, b_t(x), t) = (\theta_u(t), \sigma_{u,\beta_t(u)}(t), t) = \gamma_{u,\beta_t(u)}(t)$$

Onde, para cada $t > 0$, consideramos as funções $\alpha_t, \beta_t : [0,1] \to [0,1]$ como:

$$\alpha_t(u) = \frac{a_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))}{f_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))};\ \beta_t(u) = \frac{b_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))}{f_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))}, \forall u \in [0,1]$$

$$\alpha_t(0) = \lim_{u\to 0^+}(\alpha_t(u)); \alpha_t(1) = \lim_{u\to 1^-}(\alpha_t(u)); \beta_t(0) = \lim_{u\to 0^+}(\beta_t(u)), \beta_t(1) = \lim_{u\to 1^-}(\beta_t(u))$$

Perceba que, pelos dados da proposição, temos $\frac{1}{M} \leq \alpha_t(u), \beta_t(u) \leq 1 - \frac{1}{M}$. Além disso:

$$\sigma_{u,\alpha_t(u)}(t) = g_t(\theta_u(t)) + \alpha_t(u) \cdot (f_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))) =$$

$$= g_t(\theta_u(t)) + (a_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))) = a_t(\theta_u(t))$$

$$\sigma_{u,\beta_t(u)}(t) = g_t(\theta_u(t)) + \beta_t(u) \cdot (f_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))) =$$

$$= g_t(\theta_u(t)) + (b_t(\theta_u(t)) - g_t(\theta_u(t))) = b_t(\theta_u(t))$$

O que mostra que α_t, β_t estão bem definidas para cada $u \in (0,1)$. Ademais, como g_t, f_t, a_t, b_t são de classe C^1, α_t, β_t também o são, e isso também implica que α_t, β_t também estão definidas em $\{0,1\}$. Agora, para cada $t > 0$ pequeno, $(u,\tau) \in [0,1]^2$, defina:

$$\beta_t^\tau(u) = (1-\tau) \cdot \alpha_t(u) + \tau \cdot \beta_t(u)$$

e $\psi^{\tau}_{u,t} : [0,1] \to [0,1]$ como:

$$\psi^{\tau}_{u,t}(v) = \begin{cases} \left(\dfrac{\beta^{\tau}_{t}(u)}{\alpha_t(u)}\right)v, & 0 \leq v \leq \alpha_t(u) \\ 1 - \left(\dfrac{1-\beta^{\tau}_{t}(u)}{1-\alpha_t(u)}\right)(1-v), & \alpha_t(u) \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Note que $\psi^{\tau}_{u,t}(v)$ está bem definida, pois $\psi^{\tau}_{u,t}(\alpha_t(u)) = \beta^{\tau}_{t}(u)$ em ambas as regras, $\psi^{\tau}_{u,t}(0) = 0$, $\psi^{\tau}_{u,t}(1) = 1$ e $\psi^{\tau}_{u,t}$ é linear por partes, logo contínua. Note ainda que, das desigualdades $\frac{1}{M} \leq \alpha_t(u) \leq 1 - \frac{1}{M}$, os denominadores envolvidos nas expressões são todos positivos. Veja também que $\psi^{0}_{u,t} = id_{[0,1]}$ e $(\psi^{\tau}_{u,t})^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ é dada por:

$$(\psi^{\tau}_{u,t})^{-1}(v) = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha_t(u)}{\beta^{\tau}_{t}(u)}\right)v, & 0 \leq v \leq \beta^{\tau}_{t}(u) \\ 1 - \left(\dfrac{1-\alpha_t(u)}{1-\beta^{\tau}_{t}(u)}\right)(1-v), & \beta^{\tau}_{t}(u) \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Note também que $(\psi^{\tau}_{u,t})^{-1}(v)$ está bem definida, pois $(\psi^{\tau}_{u,t})^{-1}(\beta^{\tau}_{t}(u)) = \alpha_t(u)$ em ambas as regras, $(\psi^{\tau}_{u,t})^{-1}(0) = 0$, $(\psi^{\tau}_{u,t})^{-1}(1) = 1$ e $(\psi^{\tau}_{u,t})^{-1}$ é linear por partes, logo contínua. Note ainda que $\frac{1}{M} \leq \alpha_t(u), \beta_t(u) \leq 1 - \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{M} \leq \beta^{\tau}_{t}(u) \leq 1 - \frac{1}{M}$, donde os denominadores envolvidos nas expressões são todos positivos.

Agora, considere os conjuntos em R:

$$R_1 = \{(\theta_u(t), \sigma_{u,v}(t), t) |\, t > 0;\ 0 < u < 1;\ 0 < v < \alpha_t(u)\} \subset R$$

$$R'_1 = \{(\theta_u(t), \sigma_{u,v}(t), t) |\, t > 0;\ 0 < u < 1;\ 0 < v < \beta_t(u)\} \subset R$$

$$R_2 = \{(\theta_u(t), \sigma_{u,v}(t), t) |\, t > 0;\ 0 < u < 1;\ \alpha_t(u) < v < 1\} \subset R$$

$$R'_2 = \{(\theta_u(t), \sigma_{u,v}(t), t) |\, t > 0;\ 0 < u < 1;\ \beta_t(u) < v < 1\} \subset R$$

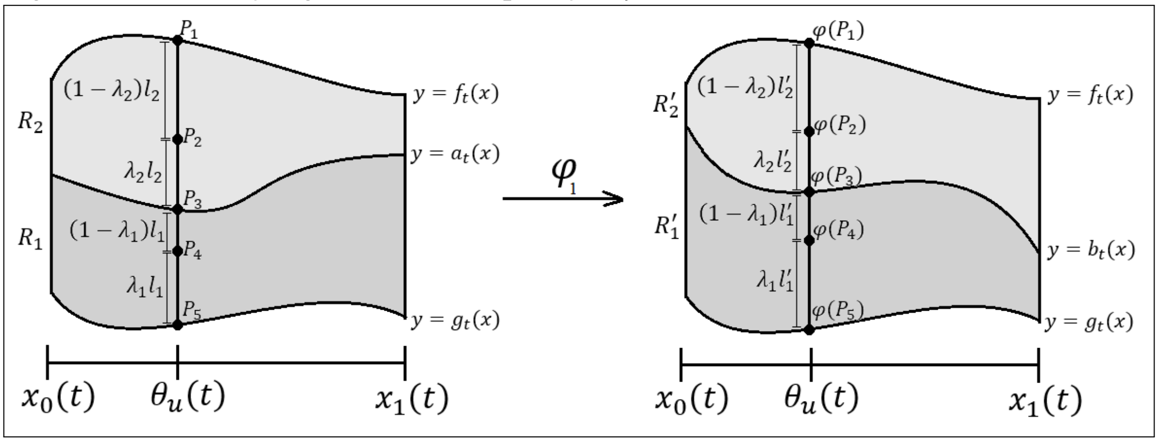
Note que $(R_1, 0), (R_2, 0), (R'_1, 0), (R'_2, 0)$ são subconjuntos abertos de $(R, 0)$ (com a topologia induzida de $\mathbb{R}^3$) e que $(\overline{R_1} \cup \overline{R_2}, 0), (\overline{R'_1} \cup \overline{R'_2}, 0) = (R, 0)$. Finalmente, defina a família de aplicações $\varphi_\tau : (R, 0) \to (R, 0)$, $0 \leq \tau \leq 1$, como:

$$\varphi_\tau(\gamma_{u,v}(t)) = \gamma_{u,\psi^{\tau}_{u,t}(v)}(t)\ ;\ (u,v) \in [0,1]^2$$

Uma verificação direta mostra que:

$$\varphi_0 = id_{(R,0)}\ ,\ \varphi_\tau(\gamma_{u,0}(t)) = \gamma_{u,0}(t)\ ,\ \varphi_\tau(\gamma_{u,1}(t)) = \gamma_{u,1}(t)$$

Figura 14 – Descrição geométrica da aplicação φ_1



Fonte: elaborado pelo autor.

$$\varphi_1((R_1,0)) = (R'_1,0)\ ;\ \varphi_1((R_2,0)) = (R'_2,0)$$

Também, φ_τ possui inversa $(\varphi_\tau)^{-1} : (R,0) \to (R,0)$, dada por:

$$(\varphi_\tau)^{-1}(\gamma_{u,v}(t)) = \gamma_{u,(\psi^\tau_{u,t})^{-1}(v)}(t)$$

Veja que, como $\psi^\tau_{u,t}$, $(\psi^\tau_{u,t})^{-1}$ são contínuas, φ_τ é um homeomorfismo. Se provarmos que $\varphi_\tau|_{(R_1,0)}$, $\varphi_\tau|_{(R_2,0)}$ cumprem as condições da Proposição 2.2.12, então a demonstração estará encerrada, uma vez que, se tais aplicações são bi-Lipschitz intrínsecas, então como $\varphi_\tau|_{\overline{(R_1,0)}}$ e $\varphi_\tau|_{\overline{(R_2,0)}}$ são contínuas, pela Proposição 2.2.3, $\varphi_\tau|_{\overline{(R_1,0)}}$ e $\varphi_\tau|_{\overline{(R_2,0)}}$ são bi-Lipschitz intrínsecas. Também, de:

$$\emptyset \neq (\overline{R_1} \cap \overline{R_2}, 0) = \{(\theta_u(t), \sigma_{u,\alpha_t(u)}(t), t)\ ;\ t > 0\ ;\ 0 \leq u \leq 1\} \subset (R,0)$$

$$(\overline{R_1} \cup \overline{R_2}, 0) = (R,0)$$

E do fato de que $\overline{R_1}, \overline{R_2}$ serem conjuntos semialgébricos conexos, temos que, pela Proposição 2.2.10, φ_τ será aplicação bi-Lipschitz intrínseca, o que implica que ela também é bi-Lipschitz exterior, visto que $(R,0)$ é normalmente mergulhado, pela Proposição 4.2.3.

Estudaremos o jacobiano $J_{\varphi_\tau}(p)$ para todo $p \in (R_1,0)$ (o caso $p \in (R_2,0)$ é análogo). Perceba que se $p = \gamma_{u,v}(t) = (x,y,t)$, então $\varphi_\tau(p) = (x,h,t)$, onde:

$$x = \theta_u(t) = u \cdot x_0(t) + (1-u) \cdot x_1(t)$$

$$y = v \cdot f_t(x) + (1-v) \cdot g_t(x)$$

$$h = f_t(x) + \left(\frac{\beta^\tau_t(u)}{\alpha_t(u)}\right)(y - f_t(x))$$

Pois:

$$h = \sigma_{u,\left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)}\right)v}(t) = \left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)} \cdot v\right) g_t(\theta_u(t)) + \left(1 - \frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)} \cdot v\right) f_t(\theta_u(t)) =$$

$$= f_t(\theta_u(t)) + \left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)}\right)(g_t(\theta_u^\tau(t)) - f_t(\theta_u^\tau(t))) \cdot v =$$

$$= f_t(x) + \left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)}\right)(g_t(x) - f_t(x))\left(\frac{y - f_t(x)}{g_t(x) - f_t(x)}\right) = f_t(x) + \left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)}\right)(y - f_t(x))$$

Calculando a matriz jacobiana, vem:

$$J_{\varphi_\tau}(x,y,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial t} \end{pmatrix}(x,y,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(x,y,t)$$

Provemos que existe $T > 0$ tal que $\|J_{\varphi_\tau}(x,y,t)\| < T$, uma vez que $\|J_{\varphi_\tau}(x,y,t)\| \geq 1$. Façamos o estudo de cada uma das derivadas parciais.

Desenvolvendo $\frac{\partial x}{\partial t}$ e lembrando que $\left|\frac{\partial x_0}{\partial t}(t)\right|, \left|\frac{\partial x_1}{\partial t}(t)\right| < N$, temos:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(u \cdot x_0(t) + (1-u) \cdot x_1(t)) = u \cdot \frac{\partial x_0}{\partial t}(t) + (1-u)\frac{\partial x_1}{\partial t}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial x}{\partial t}\right| \leq u\left|\frac{\partial x_0}{\partial t}(t)\right| + (1-u)\left|\frac{\partial x_1}{\partial t}(t)\right| \leq u \cdot N + (1-u) \cdot N = N$$

Desenvolvendo $\frac{\partial h}{\partial x}$ e denotando $u'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$ a derivada em x, temos:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_t(x) + \left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)}\right)(y - f_t(x))\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left((1-\tau) \cdot y + \tau\left(f_t(x) + \left(\frac{b_t(x) - g_t(x)}{a_t(x) - g_t(x)}\right)(y - f_t(x))\right)\right) =$$

$$= \tau \cdot \left[f_t'(x) - \left(\frac{b_t(x) - g_t(x)}{a_t(x) - g_t(x)}\right) f_t'(x) + \right.$$

$$\left. + \left((b_t'(x) - g_t'(x))\left(\frac{y - f_t(x)}{a_t(x) - g_t(x)}\right) - \left(\frac{b_t(x) - g_t(x)}{a_t(x) - g_t(x)}\right)\left(\frac{y - f_t(x)}{a_t(x) - g_t(x)}\right)(a_t'(x) - g_t'(x))\right)\right]$$

Como $y \geq g_t(x)$, temos:

$$\left|\frac{y - f_t(x)}{a_t(x) - g_t(x)}\right| \leq \left|\frac{f_t(x) - g_t(x)}{a_t(x) - g_t(x)}\right| < M$$

E como $b_t(x) \leq f_t(x)$, $\frac{1}{M}(f_t(x)-g_t(x)) \leq a_t(x)-g_t(x)$, vem:

$$\left|\frac{b_t(x)-g_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right| \leq \left|\frac{f_t(x)-g_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right| \leq \left|\frac{f_t(x)-g_t(x)}{\frac{1}{M}(f_t(x)-g_t(x))}\right| = M$$

Finalmente, de $|f_t'(x)|, |g_t'(x)|, |a_t'(x)|, |b_t'(x)| < M$, segue, pela desigualdade triangular, que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} < 1 \cdot [M + M \cdot M + ((M+M) \cdot M + M \cdot M \cdot (M+M))] = T_2$$

Desenvolvendo $\frac{\partial h}{\partial y}$, temos:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_t(x) + \left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)}\right)(y - f_t(x))\right) =$$

$$= (1-\tau) + \tau \cdot \left(\frac{\beta_t(u)}{\alpha_t(u)}\right) = (1-\tau) + \tau \cdot \left(\frac{b_t(x)-g_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right)$$

E assim $\frac{1}{M} < \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| < M$, pois:

$$\frac{|b_t(x)-g_t(x)|}{|a_t(x)-g_t(x)|} > \frac{|b_t(x)-g_t(x)|}{|f_t(x)-g_t(x)|} \geq \frac{\frac{1}{M}|f_t(x)-g_t(x)|}{|f_t(x)-g_t(x)|} = \frac{1}{M}$$

$$\frac{|b_t(x)-g_t(x)|}{|a_t(x)-g_t(x)|} < \frac{|f_t(x)-g_t(x)|}{|a_t(x)-g_t(x)|} \leq \frac{|f_t(x)-g_t(x)|}{\frac{1}{M}|f_t(x)-g_t(x)|} = M$$

Desenvolvendo $\frac{\partial h}{\partial t}$ e denotando $\dot{u}(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x)$ a derivada em t, temos:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f_t(x) + \left(\frac{\beta_t^\tau(u)}{\alpha_t(u)}\right)(y - f_t(x))\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left((1-\tau) \cdot y + \tau \cdot \left(f_t(x) + \left(\frac{b_t(x)-g_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right)(y - f_t(x))\right)\right) =$$

$$= \tau \cdot \left[\dot{f}_t(x) - \left(\frac{b_t(x)-g_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right)\dot{f}_t(x) + \right.$$

$$\left. + \left((\dot{b}_t(x) - \dot{g}_t(x))\left(\frac{y-f_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right) - \left(\frac{b_t(x)-g_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right)\left(\frac{y-f_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right)(\dot{a}_t(x) - \dot{g}_t(x))\right)\right]$$

Já vimos, no desenvolvimento de $\frac{\partial h}{\partial x}$ que:

$$\left|\frac{y-f_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right|, \left|\frac{b_t(x)-g_t(x)}{a_t(x)-g_t(x)}\right| < M$$

E como $|\dot{f}_t(x)|, |\dot{g}_t(x)|, |\dot{a}_t(x)|, |\dot{b}_t(x)| < N$, segue, pela desigualdade triangular, que:

$$\frac{\partial h}{\partial t} < 1 \cdot [N + M \cdot N + ((N+N) \cdot M + M \cdot M \cdot (N+N))] = T_3$$

Portanto, para todo $p \in R_1$:

$$1 \leq \|J_{\varphi_\tau}(p)\| < 1 + 0 + N + T_2 + M + T_3 + 0 + 0 + 1 = T$$

$$\frac{1}{M} < \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| = |\det(J_{\varphi_\tau}(p))| < M$$

Finalizando a prova deste caso.

Para a demonstração no caso geral em que $(T_1,0),(T_2,0),(W_1,0),(W_2,0)$ não necessariamente são C^1, note que, pela Observação 4.1.2, se denotarmos:

$$sing(T_1 \cup T_2 \cup W_1 \cup W_2, 0) = \bigcup_{i=1}^{n} (\gamma_i, 0)$$

com $\gamma_i(t) = (r_i(t), s_i(t), t)$, para $i = 1, \ldots, n$, e supondo $r_1(t) < \cdots < r_n(t)$, para todo $t > 0$ pequeno, ao considerarmos os seguintes conjuntos e germes, para $i = 1, \ldots, n-1$:

$$D_i = \{(x,y,t) \in C_a^3 \mid t > 0\ ;\ r_i(t) \leq x \leq r_{i+1}(t)\}$$

$$(T_1^{(i)}, 0) = (T_1, 0) \cap (D_i, 0)\,;\, (T_2^{(i)}, 0) = (T_2, 0) \cap (D_i, 0)$$

$$(W_1^{(i)}, 0) = (W_1, 0) \cap (D_i, 0)\,;\, (W_2^{(i)}, 0) = (W_2, 0) \cap (D_i, 0)$$

temos que cada $(T_1^{(i)},0),(T_2^{(i)},0),(W_1^{(i)},0),(W_2^{(i)},0)$ é germe de triângulo sincronizado, de classe C^1 e derivada M-limitada. Portanto, se $(R_i,0) = (R \cap D_i, 0)$ é o retângulo curvilinear delimitado por $(T_1^{(i)},0)$ e $(T_2^{(i)},0)$, pelo que foi demonstrado, para cada $0 \leq \tau \leq 1$ existe uma aplicação bi-Lipschitz intrínseca $(\varphi_i)_\tau : (R_i,0) \to (R_i,0)$ satisfazendo as condições do enunciado. Ademais, note que, pela forma como $(\varphi_i)_\tau$ foi definida para cada i:

$$(\varphi_i)_\tau(r_{i+1}(t), y, t) = (\varphi_{i+1})_\tau(r_{i+1}(t), y, t)\ ;\ \forall\ (r_{i+1}(t), y, t) \in (R_i \cap R_{i+1}, 0)$$

Como R_i é conexo por caminhos, aplicando a Proposição 2.2.10 de modo sucessivo para os conjuntos $R_1 \cup R_2; R_1 \cup R_2 \cup R_3; etc$, podemos definir $\varphi_\tau : R \to R$ cumprindo todas as condições desejadas. $\square$

Observação 5.1.4. *Se $(T_1,0)$ e $(T_2,0)$ possuem os mesmos arcos de fronteira, φ é uma isotopia bi-Lipschitz ambiente levando $(W_1,0)$ e $(W_2,0)$, invariante na fronteira da região $(R,0)$ delimitada por $(T_1,0)$ e $(T_2,0)$. Pela Proposição 2.2.9, φ pode ser estendida a uma isotopia bi-Lipschitz ambiente $\Phi : (C^3_a,0) \times [0,1] \to (C^3_a,0)$ levando $(W_1,0)$ e $(W_2,0)$, invariante na fronteira de $(C^3_a,0)$. Em particular, a aplicação Φ_1 mostra que W_1, W_2 são bi-Lipschitz ambiente equivalentes em $(C^3_a,0)$.*

5.2 Triângulos lineares delimitados por arcos

Nesta seção, introduziremos a ideia de triângulos lineares delimitados por arcos, e outros conceitos derivados deste. Como aplicação do Teorema 5.1.3, demonstraremos também que tais triângulos são bi-Lipschitz ambiente equivalentes ao mergulho normal de algum triângulo de Hölder.

Definição 5.2.1. *Sejam $a > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \subset C^3_a$ dois arcos satisfazendo $tord(\gamma_1, \gamma_2) \neq \infty$, com $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t), t)$ ($i = 1,2$), para cada $t > 0$ suficientemente pequeno. Definimos o **Triângulo Linear Delimitado por** γ_1, γ_2 como sendo o germe na origem do conjunto:*

$$\overline{\gamma_1\gamma_2} = \{(\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t), \lambda y_1(t) + (1-\lambda)y_2(t), t) \mid t > 0\,;\, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Observe que $\overline{\gamma_1\gamma_2} = \overline{\gamma_2\gamma_1}$.

Para cada $t > 0$, defina também o vetor unitário:

$$\overrightarrow{\gamma_1\gamma_2}(t) = \frac{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}{\|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|}$$

Como γ_1, γ_2 são semialgébricos, o limite $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}{\|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|}$ existe e tal limite será denominado $\overrightarrow{\gamma_1\gamma_2}$. Note que $\overrightarrow{\gamma_1\gamma_2} = -\overrightarrow{\gamma_2\gamma_1}$ e $\overrightarrow{\gamma_1\gamma_2}(t) = -\overrightarrow{\gamma_2\gamma_1}(t)$, para todo $t > 0$.

Dados três arcos $\gamma_1, \gamma_2 \subset C^3_a$ satisfazendo $tord(\gamma_i, \gamma_j) \neq \infty$, para $i \neq j$, definimos, para cada $t > 0$, o ângulo $\angle\gamma_1\gamma_2\gamma_3(t)$ como sendo o ângulo formado por $\overrightarrow{\gamma_2\gamma_1}(t)$ e $\overrightarrow{\gamma_2\gamma_3}(t)$. De modo similar, definimos o ângulo $\angle\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ como sendo o ângulo formado por $\overrightarrow{\gamma_2\gamma_1}$ e $\overrightarrow{\gamma_2\gamma_3}$.

Observação 5.2.2. *Se $(\overline{\gamma_1\gamma_2} \cup \overline{\gamma_2\gamma_3}, 0)$ é germe de superfície normalmente mergulhado, então $\angle\gamma_1\gamma_2\gamma_3 > 0$ (tal afirmação segue diretamente do Teorema 2.2.22 e do Lema 2.2.19). Com isso, dado $\varepsilon > 0$, podemos assumir que para todo $t > 0$ suficientemente pequeno:*

$$\angle\gamma_1\gamma_2\gamma_3(t) \in (\angle\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon, \angle\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \varepsilon)$$

Proposição 5.2.3. *Sejam $a > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \subset C_a^3$ dois arcos tais que $tord(\gamma_1, \gamma_2) = \alpha \neq \infty$. Então $(\overline{\gamma_1\gamma_2}, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao α-triângulo de Hölder padrão mergulhado em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Seja ψ a aplicação da Proposição 3.1.2. Se T denota o α-triângulo de Hölder padrão mergulhado em $\mathbb{R}^3$, então o germe de $\psi(T)$ é $(Y,0)$, onde:

$$Y = \{(x,0,t) \in C_a^3 \mid 0 \leq x \leq h(t)\}$$

para alguma função real h cuja série de Puiseux é $h(t) = d_\alpha t^\alpha + o(t^\alpha)$; $d_\alpha > 0$. Nosso objetivo é demonstrar que $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(Y,0)$ em $(C_a^3, 0)$, uma vez que se isso for feito, então pela Proposição 3.1.3 temos que a proposição estará demonstrada.

Inicialmente, note que pelo Lema 3.2.1, aplicado ao arco γ_2, podemos supor sem perda de generalidade que $\gamma_2(t) = (0,0,t)$ e $\gamma_1(t) = \gamma(t) = (x(t), y(t), t)$. Como existe o limite:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{(x(t), y(t))}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

podemos aplicar uma rotação de eixos e supor também que:

$$x(t) > 0 \,;\; \lim_{t \to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

Considere agora os conjuntos:

$$T_1^{(1)} = \{(x, x + x(t), t) \in C_a^3 \mid -x(t) \leq x \leq 0\}$$

$$T_1^{(2)} = \{(x, x(t), t) \in C_a^3 \mid 0 \leq x \leq 2x(t)\}$$

$$T_1^{(3)} = \{(x, -x + 3x(t), t) \in C_a^3 \mid 2x(t) \leq x \leq 3x(t)\}$$

$$T_2^{(1)} = \{(x, -x - x(t), t) \in C_a^3 \mid -x(t) \leq x \leq 0\}$$

$$T_2^{(2)} = \{(x, -x(t), t) \in C_a^3 \mid 0 \leq x \leq 2x(t)\}$$

$$T_2^{(3)} = \{(x, x - 3x(t), t) \in C_a^3 \mid 2x(t) \leq x \leq 3x(t)\}$$

$$W_1^{(1)} = \{(x,0,t) \in C_a^3 \mid -x(t) \leq x \leq 0\}$$

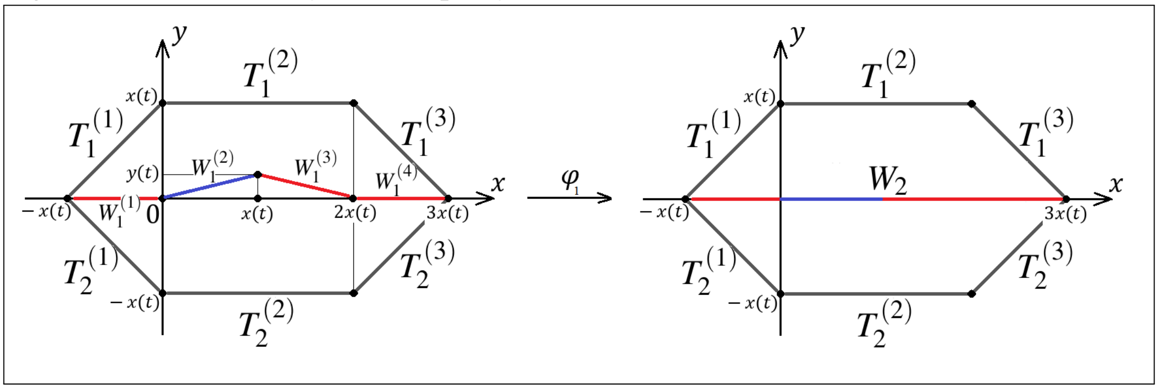
$$W_1^{(2)} = \left\{(x,y,t) \in C_a^3 \mid 0 \leq x \leq x(t) \,;\, y = \left(\frac{x}{x(t)}\right) y(t)\right\}$$

$$W_1^{(3)} = \left\{ (x,y,t) \in C_a^3 \mid x(t) \leq x \leq 2x(t) \; ; \; y = \left(\frac{2x(t)-x}{x(t)} \right) y(t) \right\}$$

$$W_1^4 = \left\{ (x,0,t) \in C_a^3 \mid 2x(t) \leq x \leq 3x(t) \right\}$$

$$W_2 = \left\{ (x,0,t) \in C_a^3 \mid -x(t) \leq x \leq 3x(t) \right\}$$

Figura 15 – Demonstração da Proposição 5.2.3



Fonte: elaborado pelo autor.

E defina:

$$T_1 = T_1^{(1)} \cup T_1^{(2)} \cup T_1^{(3)}$$

$$T_2 = T_2^{(1)} \cup T_2^{(2)} \cup T_2^{(3)}$$

$$W_1 = W_1^{(1)} \cup W_1^{(2)} \cup W_1^{(3)} \cup W_1^{(4)}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, os germes de triângulos sincronizados $(T_1,0),(T_2,0),(W_1,0),(W_2,0)$ satisfazem às condições do Teorema 5.1.3 para $M = 2+\varepsilon$, visto que os limites:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x(t)-0}{x(t)-(-x(t))} \; ; \; \lim_{t\to 0^+} \frac{0-(-x(t))}{x(t)-(-x(t))}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x(t)-\frac{x}{x(t)}.y(t)}{x(t)-(-x(t))} \; ; \; \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{x}{x(t)}.y(t)-(-x(t))}{x(t)-(-x(t))}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x(t)-\left(\frac{2x(t)-x}{x(t)}\right).y(t)}{x(t)-(-x(t))} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(\frac{2x(t)-x}{x(t)}\right).y(t)-(-x(t))}{x(t)-(-x(t))}$$

são iguais a $\frac{1}{2}$, e as respectivas funções associadas (que são funções afim) possuem variação 1-limitada. Daí, pela Observação 5.1.4, existe uma isotopia bi-Lipschitz ambiente

$\varphi : (C_a, 0) \times [0,1] \to (C_a, 0)$ levando $(W_1, 0)$ em $(W_2, 0)$. Em particular, $(W_1^{(2)}, 0) = (\overline{\gamma_1\gamma_2}, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe do conjunto:

$$\left\{(x,0,t) \in C_a^3 \mid 0 \leq x \leq x(t)\right\}$$

Finalmente, como $tord(\gamma_1, \gamma_2) = \alpha \neq \infty$, e tal valor é invariante Lipschitz, segue que a série de Puiseux de $x(t)$ é $x(t) = c_\alpha x^\alpha + o(t^\alpha)$. Pelo Lema 3.2.3 aplicado à função $f(t) = \frac{h(t)}{x(t)}$, temos que $(V_1, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(Y, 0)$, finalizando a demonstração. $\square$

6 TRIÂNGULOS AMASSÁVEIS E APLICAÇÕES

6.1 Definições, exemplos e propriedades básicas

A seguir, veremos os conceitos de triângulos amassáveis, envoltórias de suporte e de amassamento. Veremos também exemplos aplicados de tais estruturas, e uma propriedade relacionando-os com triângulos sincronizados.

Definição 6.1.1. *Seja* $(T,0) \subset (C_a^3,0)$ *um triângulo de Hölder com vértice principal na origem,* γ_1,γ_2 *seus arcos de fronteira e seja* $(U,0)$ *um germe de conjunto fechado contendo* $(T,0)$. *Dizemos que* $(T,0)$ *é* ***amassável em*** $(U,0)$ *se existe uma isotopia bi-Lipschitz ambiente em U que leva* $(T,0)$ *em* $(\overline{\gamma_1\gamma_2},0)$, *invariante na fronteira de* $(U,0)$.

Definição 6.1.2. *Sejam* $a,M,\delta > 0$ *e seja* $(T,0) \subset (C_a^3,0)$ *um germe de triângulo sincronizado com derivada M-limitada. Sejam* $\gamma_i(t) = (x_i(t),y_i(t),t)$, $i = 0,1$ *os arcos de fronteira de* $(T,0)$, *com* $x_0(t) < x_1(t)$, *e seja* $\{a_t\}$ *a família de funções geradoras de* $(T,0)$. *Defina, para cada* $t > 0$ *pequeno e para* $i = 0,1$*:*

$$m_{t,i} = \inf\left\{ \frac{a_t(x) - y_i(t)}{x - x_i(t)} \; ; \; x_0(t) < x < x_1(t) \right\}$$

$$M_{t,i} = \sup\left\{ \frac{a_t(x) - y_i(t)}{x - x_i(t)} \; ; \; x_0(t) < x < x_1(t) \right\}$$

Note que, como $(T,0)$ *tem derivada M-limitada, então* $|m_{i,t}|,|M_{i,t}| \leq M$. *Definimos a* ***$\delta$-envoltória de suporte de*** $(T,0)$ *como sendo o germe, na origem, do seguinte conjunto semialgébrico:*

$$U_\delta(T) = \{(x,y,t) \mid t > 0 \; ; \; x_0(t) \leq x \leq x_1(t); g_t(x) \leq y \leq f_t(x)\}$$

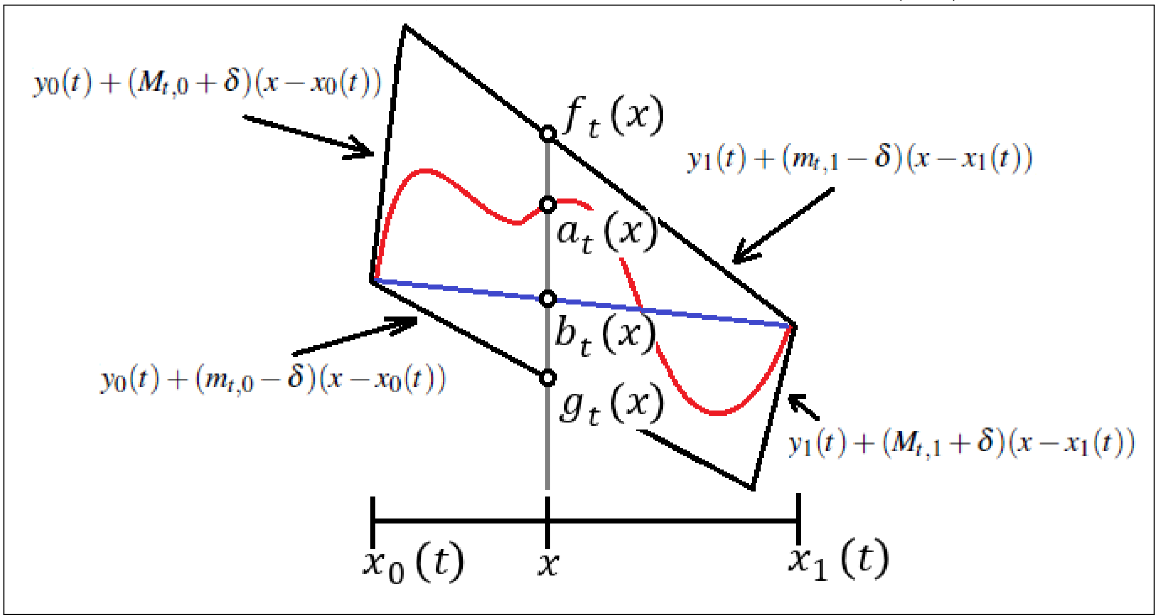
Onde:

$$g_t(x) = max\{y_0(t) + (m_{t,0} - \delta)(x - x_0(t)); y_1(t) + (M_{t,1} + \delta)(x - x_1(t))\}$$

$$f_t(x) = min\{y_0(t) + (M_{t,0} + \delta)(x - x_0(t)); y_1(t) + (m_{t,1} - \delta)(x - x_1(t))\}$$

Observação 6.1.3. $(U_\delta(T),0)$ *é a região delimitada pelos triângulos sincronizados* $(T_1,0)$, $(T_2,0)$, *cujas famílias de funções geradoras são* $\{f_t\}$, $\{g_t\}$, *respectivamente. Na demonstração da Proposição 6.1.6, será demonstrado que* $g_t(x) \leq a_t(x) \leq f_t(x)$, *para todo* $t > 0$ *pequeno e* *todo* $x \in [x_1(t), x_2(t)]$*, o que implica* $(U_\delta(T), 0)$ *ser um germe de conjunto semialgébrico fechado contendo* $(T, 0)$*.*

Figura 16 – Representação geométrica da δ-envoltória de suporte de $(T,0)$



Fonte: elaborado pelo autor.

Exemplo 6.1.4. *Considere o seguinte triângulo sincronizado:*

$$T = \{(x, -t-x, t) \in C_2^3 \mid -t \leq x \leq 0\} \cup \{(x, x-t, t) \in C_2^3 \mid 0 \leq x \leq t\}$$

Para cada $0 < \delta < 1$*, temos que* $U_\delta(T) = U_1 \cup U_2$*, onde:*

$$U_1 = \{(x,y,t) \in C_2^3 \mid -t \leq x \leq 0\,;\ -(1+\delta)(t+x) \leq y \leq \delta(t+x)\}$$

$$U_2 = \{(x,y,t) \in C_2^3 \mid 0 \leq x \leq t\,;\ (1+\delta)(x-t) \leq y \leq \delta(t-x)\}$$

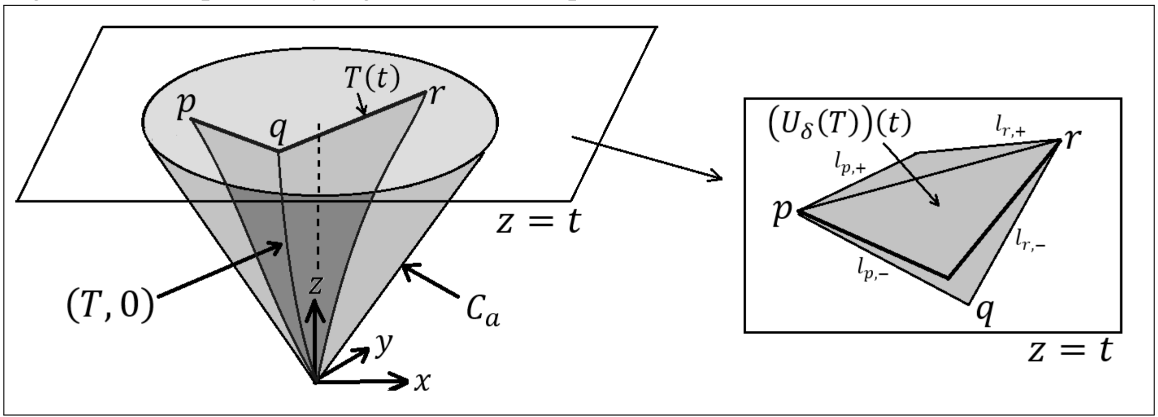
De modo geral, se $(T,0) \subset (C_a^3, 0)$ *é triângulo sincronizado, tal que seu link plano* $T(t)$ *é a união de dois segmentos de reta* $\overline{pq}, \overline{qr}$*, com* $x_p < x_q < x_r$*, e se* $u = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$*,* $v = \frac{y_r - y_p}{x_r - x_p}$*,* $w = \frac{y_r - y_q}{x_r - x_q}$ *são os coeficientes angulares de* $\overline{pq}, \overline{pr}, \overline{qr}$*, com* $u < v < w$*, então* $(U_\delta(T))(t)$ *é a região delimitada pelas retas partindo de* p*:*

$$l_{p,-} = \{(x,y,t) \mid y = y_p + (u-\delta)(x-x_p)\}\ ;\ l_{p,+} = \{(x,y,t) \mid y = y_p + (v+\delta)(x-x_p)\}$$

e pelas retas partindo de r*:*

$$l_{r,-} = \{(x,y,t) \mid y = y_r + (w-\delta)(x-x_r)\}\ ;\ l_{r,+} = \{(x,y,t) \mid y = y_r + (v+\delta)(x-x_r)\}$$

Figura 17 – Representação gráfica do Exemplo 6.1.4



Fonte: elaborado pelo autor.

Exemplo 6.1.5. *Considere o seguinte triângulo sincronizado:*

$$T = \{(x,x^2,t) \in C_2^3 \mid -t \leq x \leq t\}$$

Para cada $0 < \delta < 1$*, temos que* $U_\delta(T) = U_1 \cup U_2$*, onde:*

$$U_1 = \{(x,y,t) \in C_2^3 \mid -t \leq x \leq 0 \; ; \; -(2t+\delta)(t+x)+t^2 \leq y \leq \delta(t+x)+t^2\}$$

$$U_2 = \{(x,y,t) \in C_2^3 \mid 0 \leq x \leq t \; ; \; (2t+\delta)(x-t)+t^2 \leq y \leq \delta(t-x)+t^2\}$$

De modo geral, se $(T,0) \subset (C_a^3,0)$ *é triângulo sincronizado, tal que seu link plano* $T(t)$ *é uma função convexa* $f_t : [x_0,x_1] \to \mathbb{R}$*, e se:*

$$u = \frac{\partial f}{\partial x_+}(x_0) \; ; \; v = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \; ; \; w = \frac{\partial f}{\partial x_-}(x_1)$$

então $u < v < w$*, e assim* $(U_\delta(T))(t)$ *é a região compreendida pelas retas partindo de* $p = (x_0, f(x_0))$*:*

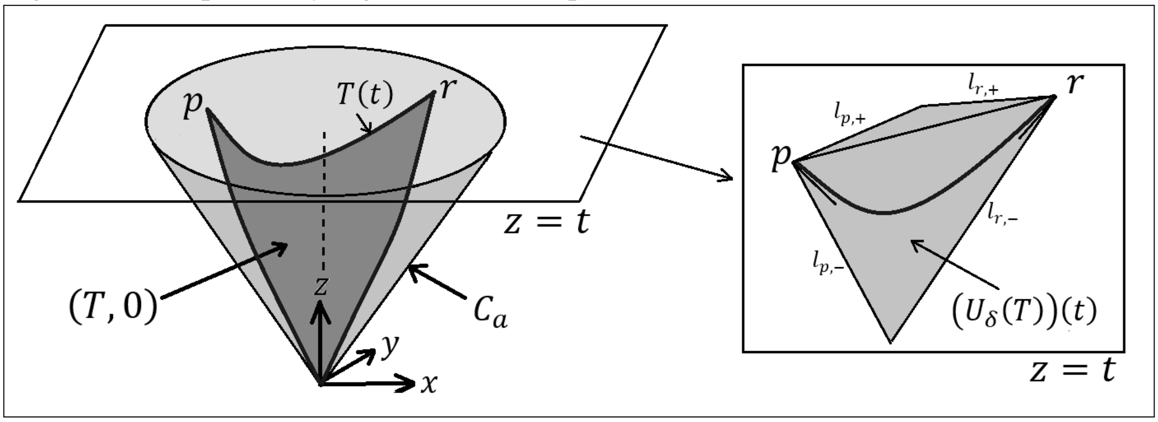
$$l_{p,-} = \{(x,y,t) \mid y = f(x_0)+(u-\delta)(x-x_0)\} \; ; \; l_{p,+} = \{(x,y,t) \mid y = f(x_0)+(v+\delta)(x-x_0)\}$$

e pelas retas partindo de $r = (x_1, f(x_1))$*:*

$$l_{r,-} = \{(x,y,t) \mid y = f(x_1)+(w-\delta)(x-x_1)\} \; ; \; l_{r,+} = \{(x,y,t) \mid y = f(x_1)+(v+\delta)(x-x_1)\}$$

Proposição 6.1.6. *Para todos* $M,\delta > 0$ *e para todo germe de triângulo sincrozinado* $(T,0)$ *com derivada* M*-limitada, temos que* $(T,0)$ *é amassável em sua* δ*-envoltória de suporte* $U_\delta(T)$*.*

Figura 18 – Representação gráfica do Exemplo 6.1.5



Fonte: elaborado pelo autor.

Demonstração. No que segue, consideramos os elementos envolvidos nesta demonstração de acordo com a Definição 6.1.2 e a Observação 6.1.3. Para cada $t > 0$, seja r_t o coeficiente angular da reta que liga $\gamma_0(t)$ e $\gamma_1(t)$ e seja $b_t : [x_0(t), x_1(t)] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$b_t(x) = y_0(t) + (x - x_0(t))r_t; x_0(t) \leq x \leq x_1(t)$$

Sendo $(W_1, 0)$, $(W_2, 0)$ os triângulos sincronizados cujas famílias de funções geradoras são $\{a_t\}$, $\{b_t\}$, respectivamente, verifiquemos se f_t, g_t, a_t, b_t cumprem as condições do Teorema 5.1.3. Pela definição de $M_{t,i}, m_{t,i}$, temos que, para cada $t > 0$ e $x \in (x_0(t), x_1(t))$, $m_{t,0}, m_{t,1} \leq r_t \leq M_{t,0}, M_{t,1}$. Além disso:

- $g_t(x) < a_t(x), b_t(x)$, pois se $g_t(x) = y_0(t) + (m_{t,0} - \delta)(x - x_0(t))$, então:

$$g_t(x) = y_0(t) + (m_{t,0} - \delta)(x - x_0(t)) < y_0(t) + m_{t,0}(x - x_0(t)) \leq$$

$$\leq y_0(t) + \left(\frac{a_t(x) - y_0(x)}{x - x_0(t)}\right)(x - x_0(t)) = a_t(x)$$

$$g_t(x) = y_0(t) + (m_{t,0} - \delta)(x - x_0(t)) < y_0(t) + m_{t,0}(x - x_0(t)) \leq$$

$$\leq y_0(t) + (r_t x - x_0(t))(x - x_0(t)) = b_t(x)$$

E se $g_t(x) = y_1(t) + (M_{t,1} + \delta)(x - x_1(t))$, então:

$$g_t(x) = y_1(t) + (M_{t,1} + \delta)(x - x_1(t)) < y_1(t) + M_{t,1}(x - x_1(t)) \leq$$

$$\leq y_1(t) + \left(\frac{a_t(x) - y_1(x)}{x - x_1(t)}\right)(x - x_1(t)) = a_t(x)$$

$$g_t(x) = y_1(t) + (M_{t,1} + \delta)(x - x_1(t)) < y_1(t) + M_{t,1}(x - x_1(t)) \leq$$

$$\leq y_1(t) + (r_t x - x_1(t))(x - x_1(t)) = b_t(x)$$

- $f_t(x) > a_t(x), b_t(x)$ (a prova é análoga à do item anterior).
- Se $\tilde{M} = \max\left\{M, \dfrac{2(\delta+M)}{\delta}\right\}$, então as funções a_t, b_t, f_t, g_t possuem derivada $\tilde{M}$-limitada e são tais que, para todo $x \in (x_0(t), x_1(t))$:

$$\frac{1}{\tilde{M}} \cdot (f_t(x) - g_t(x)) \leq a_t(x) - g_t(x), b_t(x) - g_t(x) \leq \left(1 - \frac{1}{\tilde{M}}\right) \cdot (f_t(x) - g_t(x))$$

Separemos a análise em dois casos, de acordo com o valor de $g_t(x)$.

Caso $g_t(x) = y_0(t) + (m_{t,0} - \delta)(x - x_0(t))$, então, da definição de $f_t(x)$, temos $f_t(x) \leq y_0(t) + (M_{t,0} + \delta)(x - x_0(t))$ e assim:

$$\frac{a_t(x) - g_t(x)}{f_t(x) - g_t(x)} = \frac{\dfrac{a_t(x) - y_0(t)}{x - x_0(t)} - \dfrac{g_t(x) - y_0(t)}{x - x_0(t)}}{\dfrac{f_t(x) - y_0(t)}{x - x_0(t)} - \dfrac{g_t(x) - y_0(t)}{x - x_0(t)}} \geq \frac{\dfrac{a_t(x) - y_0(t)}{x - x_0(t)} - (m_{t,0} - \delta)}{(M_{t,0} + \delta) - (m_{t,0} - \delta)} \geq$$

$$\geq \frac{m_{t,0} - (m_{t,0} - \delta)}{(M_{t,0} + \delta) - (m_{t,0} - \delta)} = \frac{\delta}{2\delta + (M_{t,0} - m_{t,0})} \geq \frac{\delta}{2(\delta + M)} \geq \frac{1}{\tilde{M}}$$

Caso $g_t(x) = y_1(t) + (M_{t,1} + \delta)(x - x_1(t))$; então, da definição de $f_t(x)$, temos $f_t(x) \leq y_1(t) + (m_{t,1} - \delta)(x - x_1(t))$ e assim:

$$\frac{a_t(x) - g_t(x)}{f_t(x) - g_t(x)} = \frac{\dfrac{a_t(x) - y_1(t)}{x - x_1(t)} - \dfrac{g_t(x) - y_1(t)}{x - x_1(t)}}{\dfrac{f_t(x) - y_1(t)}{x - x_1(t)} - \dfrac{g_t(x) - y_1(t)}{x - x_1(t)}} \geq \frac{\dfrac{a_t(x) - y_1(t)}{x - x_1(t)} - (M_{t,1} + \delta)}{(m_{t,1} - \delta) - (M_{t,1} + \delta)} \geq$$

$$\geq \frac{M_{t,1} - (M_{t,1} + \delta)}{(m_{t,0} - \delta) - (M_{t,0} + \delta)} = \frac{\delta}{2\delta + (M_{t,0} - m_{t,0})} \geq \frac{\delta}{2(\delta + M)} = \frac{1}{\tilde{M}}$$

Logo:

$$\frac{1}{\tilde{M}} \cdot (f_t(x) - g_t(x)) \leq a_t(x) - g_t(x)$$

Analogamente, prova-se que:

$$\frac{1}{\tilde{M}} \cdot (f_t(x) - g_t(x)) \leq f_t(x) - a_t(x)$$

O que implica:

$$a_t(x) - g_t(x) = (f_t(x) - g_t(x)) - (f_t(x) - a_t(x)) \leq \left(1 - \frac{1}{\tilde{M}}\right) \cdot (f_t(x) - g_t(x))$$

De modo similar, temos também que:

$$\frac{1}{\tilde{M}} \cdot (f_t(x) - g_t(x)) \leq b_t(x) - g_t(x) \leq \left(1 - \frac{1}{\tilde{M}}\right) \cdot (f_t(x) - g_t(x))$$

A demonstração está, pois, finalizada. $\square$

6.2 Reduções a triângulos lineares

Nesta seção, usaremos as ideias vistas na seção anterior para demonstrar as proposições basilares para a resolução do problema desta tese, reduzindo a análise a germes de superfícies formadas por um número finito de triângulos lineares.

Proposição 6.2.1. *Sejam* $(\gamma_i, 0) \in (C^3_a, 0)$ *(*$i = 1, 2, 3$*) arcos distintos tais que:*

$$(Y, 0) = (\overline{\gamma_1\gamma_2} \cup \overline{\gamma_2\gamma_3}, 0)$$

seja LNE. Então, $(X, 0)$ *é bi-Lipschitz ambiente equivalente a* $(\overline{\gamma_1\gamma_3}, 0)$.

Demonstração. Para $i = 1, 2, 3$, seja $\theta_i(t) = \angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}(t)$ e $\theta_i = \angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}$ (índices módulo 3). De acordo com a Observação 5.2.2, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$. Como $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\theta_1, \theta_3 < \frac{\pi}{2}$.

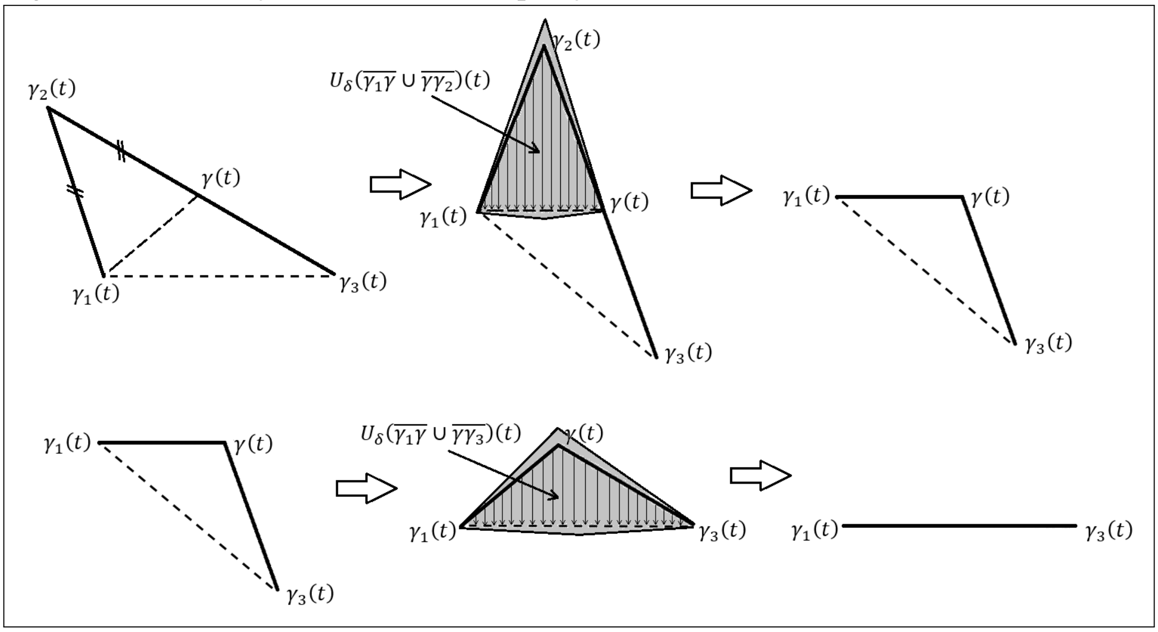
Tomando uma rotação de eixos se necessário, podemos supor que $\overrightarrow{\gamma_1\gamma_3} = (1, 0, 0)$, de modo que $(Y, 0)$ é germe de triângulo sincrozinado com derivada $M = \max\{\tan(\theta_1 + \varepsilon), \tan(\theta_3 + \varepsilon)\}$-limitada, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (como no Exemplo 6.1.4). Pela Proposição 6.1.6, o resultado está demonstrado neste caso.

Caso 2: $\theta_1 \geq \frac{\pi}{2}$ ou $\theta_3 \geq \frac{\pi}{2}$.

Analisemos apenas $\theta_1 \geq \frac{\pi}{2}$, pois o outro caso é análogo. Para cada $t > 0$, seja $\gamma(t) \in \overline{\gamma_2(t)\gamma_3(t)}$ tal que $\|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\| = \|\gamma_2(t) - \gamma(t)\|$. Observe que $\gamma = \gamma(t)$ é um conjunto semialgébrico, logo um arco. Assim, tomando uma rotação de eixos, se necessário, podemos supor que $\overrightarrow{\gamma_2\gamma} = (1, 0, 0)$, de modo que $(\overline{\gamma_1\gamma_2} \cup \overline{\gamma_2\gamma}, 0)$ é germe de triângulo sincrozinado com derivada limitada, uma vez que $\angle\gamma_2\gamma\gamma_1 = \angle\gamma_2\gamma_1\gamma = \frac{\pi-\theta_2}{2} < \frac{\pi}{2}$. Pela Proposição 6.1.6, $(Y, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(\overline{\gamma_1\gamma} \cup \overline{\gamma\gamma_3}, 0)$, e como $\angle\gamma\gamma_1\gamma_3, \angle\gamma\gamma_3\gamma_1 < \frac{\pi}{2}$ (pois $\angle\gamma_1\gamma\gamma_3 = \frac{\pi+\theta_2}{2} > \frac{\pi}{2}$), o resultado se reduz ao Caso 1.

$\square$

Figura 19 – Resolução do caso 2 da Proposição 6.2.1



Fonte: elaborado pelo autor.

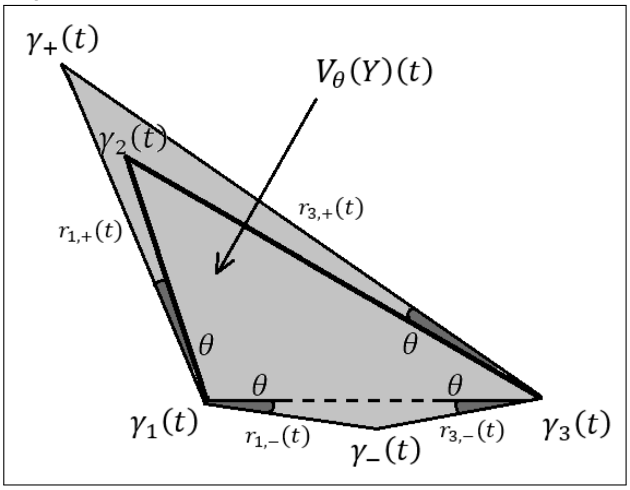
Definição 6.2.2. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ arcos e seja $Y = \overline{\gamma_1\gamma_2} \cup \overline{\gamma_2\gamma_3}$ uma superfície cujo germe é LNE. Dado $\theta > 0$, para cada $t > 0$ e para $i = 1, 3$, sejam $r_{i,+}(t), r_{i,-}(t)$ retas passando por $\gamma_i(t)$ e externas ao triângulo $\gamma_1\gamma_2\gamma_3(t)$ tais que:*

$$\angle(r_{i,-}(t), \overline{\gamma_1\gamma_3}(t)) = \angle(r_{i,+}(t), \overline{\gamma_i\gamma_2}(t)) = \theta$$

*Para θ suficientemente pequeno, as retas $r_{1,+}(t), r_{3,+}(t)$ se intesectam um ponto $\gamma_+(t)$ e as retas $r_{1,-}(t), r_{3,-}(t)$ se intesectam um ponto $\gamma_-(t)$. Sejam os arcos $\gamma_+ = \gamma_+(t)$, $\gamma_- = \gamma_-(t)$, $V_\theta(t)$ o quadrilátero delimitado por $\gamma_1(t)$, $\gamma_+(t)$, $\gamma_3(t)$ e $\gamma_-(t)$ e $V_\theta(Y) = \cup_{t>0} U_\theta(t) \cup \{0\}$. Definimos a **$\theta$-envoltória de amassamento de** Y como sendo o germe do conjunto $V_\theta(Y)$ e denotamos γ_+ como o arco de fronteira dessa θ-envoltória mais próximo de γ_2.*

Observação 6.2.3. *A θ-envoltória de amassamento de Y não necessariamente é uma envoltória de suporte de Y, uma vez que é possível que $\angle\gamma_2\gamma_1\gamma_3 > \frac{\pi}{2}$. Entretanto, para cada $\theta > 0$ suficientemente pequeno, podemos tomar $\delta > 0$ tal que as δ-envoltórias de suporte (ou suas respectivas imagens por rotação de eixos) envolvidas na demonstração da Proposição 6.2.1 estejam todas contidas na θ-envoltória de amassamento de Y, de modo que Y é amassável em $V_\theta(Y)$. Em particular, se $X \subset C_a^3$ é uma superfície semialgébrica fechada tal que $(Y,0) \subseteq (X,0)$, e se existe $\theta > 0$ tal que $(V_\theta(Y),0) \cap (X \backslash Y,0) = \emptyset$, então $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $((X \backslash Y) \cup \overline{\gamma_1\gamma_3},0)$.*

Figura 20 – θ-envoltória de amassamento de $Y = \overline{\gamma_1\gamma_2} \cup \overline{\gamma_2\gamma_3}$



Fonte: elaborado pelo autor.

Proposição 6.2.4. *Sejam* $(\gamma_i, 0) \in (C_a^3, 0)$ *(*$i = 1,2,3$*) arcos distintos tais que:*

$$(X,0) = (\overline{\gamma_1\gamma_2} \cup \overline{\gamma_2\gamma_3} \cup \overline{\gamma_3\gamma_1}, 0)$$

seja LNE. Então, existe $\beta \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ *tal que* $(X,0)$ *é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da* β*-corneta padrão* $(H_\beta, 0)$*.*

Demonstração. Para $i = 1,2,3$, seja $\theta_i(t) = \angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}(t)$ e $\theta_i = \angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}$ (índices módulo 3). De acordo com a Observação 5.2.2, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$, o que implica que existe $\beta \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ tal que:

$$tord(\gamma_1,\gamma_2) = tord(\gamma_2,\gamma_3) = tord(\gamma_3,\gamma_1) = \beta$$

Assim, existem $a_1, a_2, a_3 > 0$ tais que:

$$\|\gamma_2(t) - \gamma_3(t)\| = a_1 t^\beta + o(t^\beta)$$

$$\|\gamma_3(t) - \gamma_1(t)\| = a_2 t^\beta + o(t^\beta)$$

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = a_3 t^\beta + o(t^\beta)$$

Note que a_1, a_2, a_3 são os comprimentos dos lados de um triângulo. Sabemos que o raio da circunferência circunscrita a um triângulo de lados x, y, z e área:

$$S = \frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{4}$$

é $R = \frac{xyz}{4S}$. Sendo:

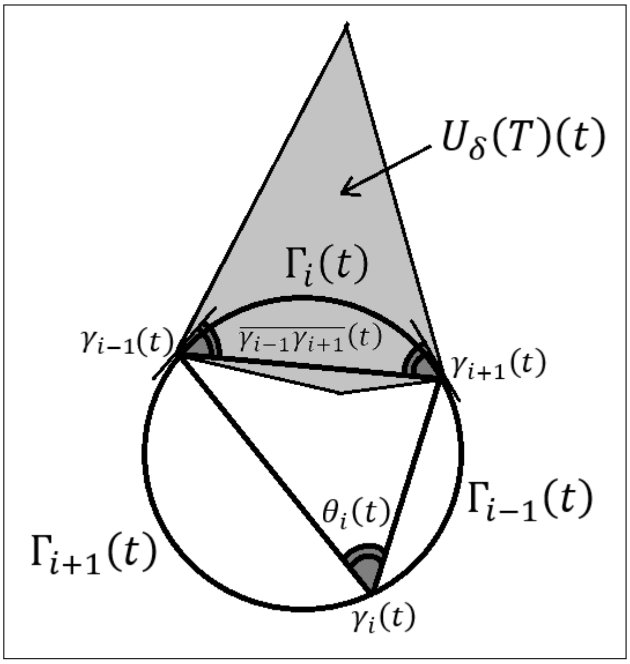
$$c = \frac{a_1a_2a_3}{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a-2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}}$$

Temos que, para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, se $\Gamma(t)$ é a circunferência circunscrita ao triângulo $\gamma_1(t)\gamma_2(t)\gamma_3(t)$ (que é não degenerado, já que $\theta_i > 0$), o raio $R(t)$ de $\Gamma(t)$ tem série de Puiseux dada por $R(t) = ct^\beta + o(t^\beta)$. Pelo Lema 3.2.1, podemos supor ainda que $\Gamma(t)$ tem centro na origem.

Definindo $\Gamma := (\cup_{t>0}\Gamma(t)) \cup \{0\} \subset C_a^3$, provemos que $(\Gamma, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(X, 0)$ em C_a^3. Façamos a demonstração em dois casos.

Caso 1: se $\theta_1, \theta_2, \theta_3 < \frac{\pi}{2}$, podemos assumir que $t > 0$ é suficientemente pequeno de modo $\gamma_1(t)\gamma_2(t)\gamma_3(t)$ é um triângulo acutângulo, cujos ângulos internos satisfazem, para $i = 1,2,3$, $\varepsilon < \theta_i(t) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$ pequeno. Dessa forma, se $\Gamma_i(t)$ é o arco de $\Gamma(t)$ delimitado por $\gamma_{i-1}(t)$ e $\gamma_{i+1}(t)$ e que não contém $\gamma_i(t)$ (índices módulo 3) e se $\Gamma_i = (\cup_{t>0}\Gamma_i(t)) \cup \{0\} \subset C_a^3$, por meio de uma rotação de eixos, se necessário, podemos ver $\Gamma_i(t)$ como um link plano de um triângulo sincronizado T convexo com variação M-limitada, $M = \cot \varepsilon$ (isso se deve ao fato de que as tangentes a Γ por $\gamma_{i-1}(t)$ e $\gamma_{i+1}(t)$ formam com $\overline{\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}(t)}$ ângulos menores que $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$). Daí, existe $\delta > 0$ tal que a δ-envoltória de suporte de $\Gamma_i(t)$ não intersecta $(X(t) \cup \Gamma(t)) \backslash (\overline{\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}(t)} \cup \Gamma_i(t))$, donde $(T, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(\overline{\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}}, 0)$, pela Proposição 6.1.6.

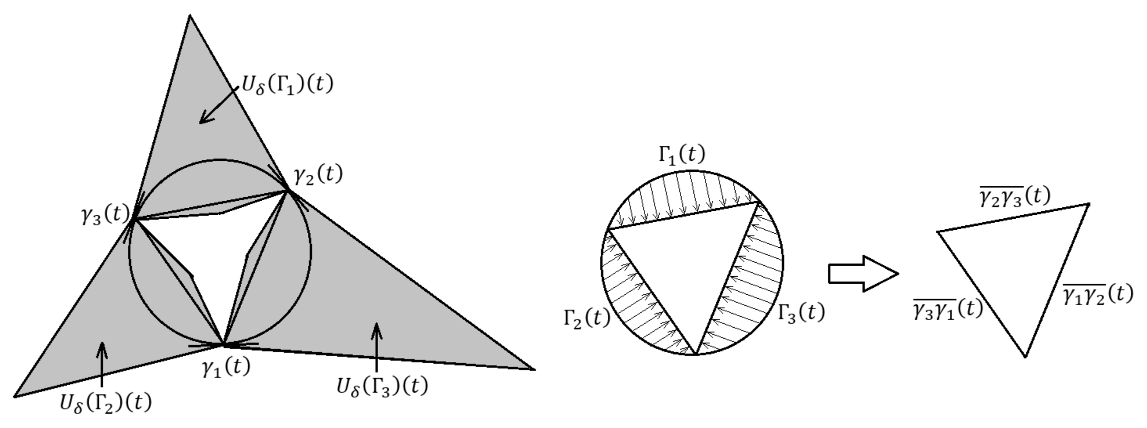
Figura 21 – Construção da δ-envoltória de suporte de $\Gamma_i(t)$



Fonte: elaborado pelo autor.

Logo, cada Γ_i é amassável em sua respectiva envoltória de suporte, e aplicando tais transformações em cada envoltória de suporte, segue que $(\Gamma, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(X,0)$ em $(C_a^3,0)$, como queríamos.

Figura 22 – "Amassamento"dos arcos $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ no caso 1.

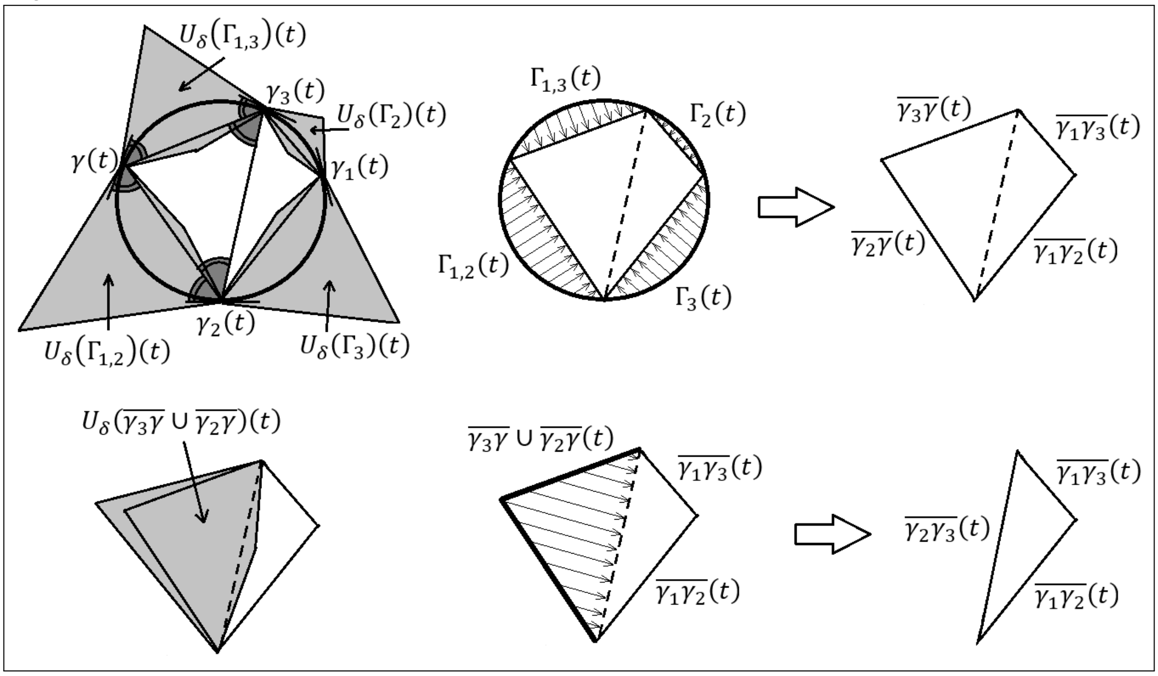


Fonte: elaborado pelo autor.

Caso 2: Existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que $\theta_i \geq \frac{\pi}{2}$ (digamos $i = 1$). Neste caso, Γ_2, Γ_3 são amassáveis em suas respectivas envoltórias de suporte, mas o mesmo não vale para Γ_1. Para contornar essa situação, tomamos, para cada $t > 0$, $\gamma(t)$ o ponto médio do arco $\Gamma_1(t)$ e definimos $\Gamma_{1,2}(t)$ a região em $\Gamma_1(t)$ delimitada por $\gamma_2(t), \gamma(t)$ e $\Gamma_{1,3}(t)$ a região em $\Gamma_1(t)$ delimitada por $\gamma_3(t), \gamma(t)$. Denote também $\Gamma_{1,j} = \left(\cup_{t>0}\Gamma_{1,j}(t)\right) \cup \{0\} \subset C_a^3$ $(j = 2,3)$. Pelos mesmos argumentos do Caso 1, temos que $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_{1,2}, \Gamma_{1,3}$ são amassáveis em suas respectivas envoltórias de suporte, donde $(\Gamma, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(\overline{\gamma_2\gamma_1} \cup \overline{\gamma_1\gamma_3} \cup \overline{\gamma_3\gamma} \cup \overline{\gamma\gamma_2}, 0)$ em $(C_a^3, 0)$.

Como $\angle\gamma\gamma_2\gamma_3(t) = \angle\gamma\gamma_3\gamma_2(t) = \frac{1}{2}\theta_1 < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, temos que $\overline{\gamma_2\gamma} \cup \overline{\gamma\gamma_3}$ é amassável numa δ-envoltória de suporte que não intersecta pontos interiores de $\overline{\gamma_2\gamma_1} \cup \overline{\gamma_3\gamma_1}$, e assim $(\overline{\gamma_2\gamma_1} \cup \overline{\gamma_1\gamma_3} \cup \overline{\gamma_3\gamma} \cup \overline{\gamma_2\gamma}, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(\overline{\gamma_2\gamma_1} \cup \overline{\gamma_1\gamma_3} \cup \overline{\gamma_2\gamma_3}, 0) = (X,0)$ em $(C_a^3, 0)$, como queríamos. Como $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(\Gamma, 0)$ em C_a^3, pelo Corolário 3.2.4, o resultado está demonstrado. $\square$

Figura 23 – δ-envoltórias e "amassamentos"no caso 2



Fonte: elaborado pelo autor.

Proposição 6.2.5. *Seja $a > 0$ e seja $(X,0) \subset (C_a^3, 0)$ um germe de superfície LNE, semialgébrica, 2-dimensional puro e fechada, com link conexo. Então, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a um germe de uma superfície formada por uma união finita de triângulos lineares delimitados por arcos.*

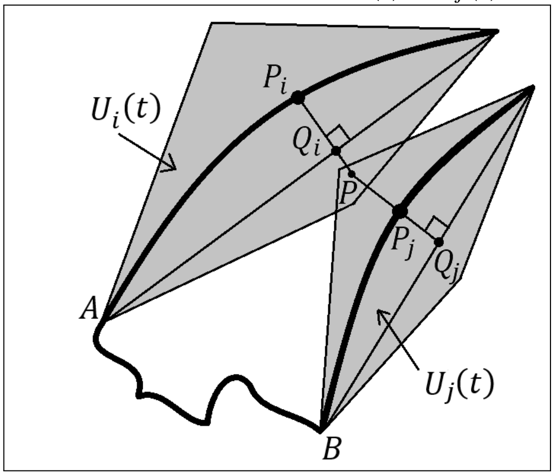
Demonstração. Pela Proposição 4.3.4, para cada $\delta > 0$, existe uma decomposição δ-convexa $(X,0) = \bigcup_{i=1}^{n}(X_i,0)$. Para $i = 1,\ldots,n$, sejam $(\gamma_{i,0},0)$, $(\gamma_{i,1},0)$ os arcos de fronteira do triângulo $(X_i,0)$. Se $T_i = r_{\theta_i}(X_i)$, $U_\delta(T_i)$ é a δ-envoltória de suporte de T_i e $U_i = r_{-\theta_i}(U_\delta(T_i))$, então como T_i é triângulo sincronizado convexo e com derivada δ-limitada, temos que, para todo $C > 1$, podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que, para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e todos os pontos $p, q \in U_i(t)$:

$$\angle p\gamma_{i,0}(t)q, \angle p\gamma_{i,1}(t)q < \arctan\frac{1}{4C}$$

Pelo Teorema 2.2.22, existe $C > 1$ de modo que $X(t)$ seja C-LNE, para todo $t > 0$ pequeno. Ao tomar C cumprindo tal condição e δ como acima, afirmamos que, para $t > 0$ e todos $i \leq i < j \leq n$, $U_i(t) \cap U_j(t)$ é igual a um ponto de algum arco de fronteira ou igual a $\emptyset$. Suponha o contrário, isto é, existe $P \in U_i(t) \cap U_j(t)$, $P \neq \gamma_{k,0}(t), \gamma_{k,1}(t)$. Para $s = i, j$, a perpendicular, por P, a $\overline{\gamma_{k,0}\gamma_{k,1}}(t)$ intersecta $X_k(t)$ em P_k e $\gamma_{k,0}\gamma_{k,1}(t)$ em Q_k. Sejam $A \in \{\gamma_{i,0}(t), \gamma_{i,1}(t)\}$, $B \in \{\gamma_{j,0}(t), \gamma_{j,1}(t)\}$ tais que o caminho em $X(t)$ de comprimento mínimo conectando P_i a P_j passa por A e B. Em particular:

$$d_{X(t)}(P_i,P_j) \geq \|P_i - A\| + \|A - B\| + \|B - P_j\|$$

Figura 24 – Prova de que $U_i(t) \cap U_j(t)$ é um ponto de arco de fronteira, ou vazio



Fonte: elaborado pelo autor.

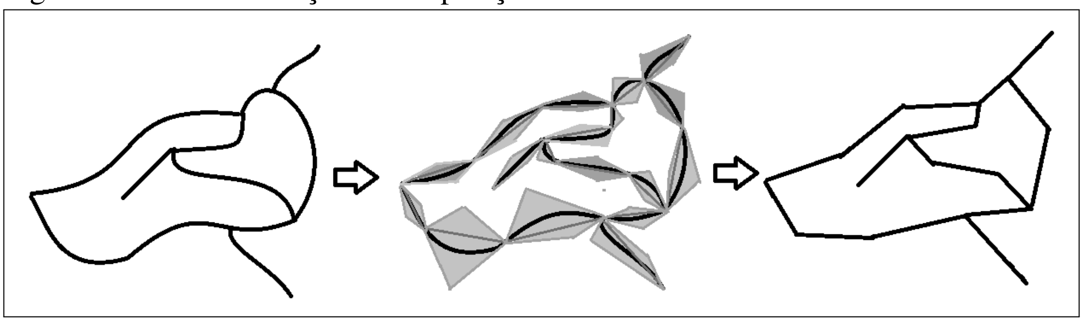
Temos que $\|P_i - P_j\| \leq \|P_i - Q_i\| + \|Q_i - P\| + \|P - P_j\| + \|P_j - Q_j\|$. Como as desigualdades $\angle P_iAQ_i, \angle PAQ_i, \angle PBQ_j, \angle P_jBQ_j < \arctan \frac{1}{4C}$ são válidas, temos:

$$\|P_i - Q_i\|, \|Q_i - P\| \leq \frac{\|A - Q_i\|}{4C} \leq \frac{\|A - P_i\|}{4C}$$

$$\|P - P_j\|, \|P_j - Q_j\| \leq \frac{\|B - Q_j\|}{4C} \leq \frac{\|B - P_j\|}{4C}$$

Logo, $\|P_i - P_j\| \leq \frac{\|P_i - A\| + \|B - P_j\|}{2C} \leq \frac{\|P_i - A\| + \|A - B\| + \|B - P_j\|}{2C} \leq \frac{d_{X(t)}(P_i,P_j)}{2C}$, uma contradição. A afirmação está, pois, provada, e desse modo cada $(X_i, 0)$ é amassável em cada $(U_i, 0)$ correspondente, finalizando a demonstração. $\square$

Figura 25 – Demonstração da Proposição 6.2.5



Fonte: elaborado pelo autor.

7 SUPERFÍCIES POLIGONAIS E MERGULHO NORMAL

7.1 Definições e lemas preliminares

Definição 7.1.1. *Seja $a > 0$ e seja $(X,0) \subset (C_a^3,0)$ um germe de superfície semialgébrica fechada. Dizemos que X é uma* ***Superfície Poligonal*** *se existe $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, arcos distintos $\gamma_1,\dots,\gamma_n \subset X$ e uma das duas situações seguintes ocorrer:*

1. *O link plano de X é homeomorfo a $[0,1]$ e $(X,0) = (\cup_{i=1}^{n-1}\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}},0)$. Neste caso, dizemos que X é* ***Poligonal Aberta (ou $(n-1)$-Gonal Aberta)****, e que n é o número de vértices de X.*
2. *O link plano de X é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, $n \geq 3$ e $(X,0) = (\cup_{i=1}^{n}\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}},0)$, onde $\gamma_{n+1} = \gamma_1$. Neste caso, dizemos que X é* ***Poligonal Fechada (ou n-Gonal Fechada)****, e que n é o número de véritces de X.*

Em todo caso, denotamos X como uma superfície poligonal (aberta ou fechada) delimitada pelos arcos $\gamma_1,\dots,\gamma_n$. As superfícies $\overline{\gamma_1\gamma_2}$, ..., $\overline{\gamma_{n-1}\gamma_n}$ são definidas como ***Superfícies de Arestas de*** *X (caso X seja fechada, $\overline{\gamma_1\gamma_n}$ também é superfície de aresta de X).*

Dizemos ainda que X é uma ***Superfície n-Gonal não Degenerada*** *se $n \geq 3$ e as seguintes condições forem satisfeitas:*

- *X é n-gonal aberta e $\angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1} < \pi$, para $i = 2,\dots,n-1$, ou X é n-gonal fechada e $\angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1} < \pi$, para $i = 1,\dots,n$ ($\gamma_0 = \gamma_n$, $\gamma_1 = \gamma_{n+1}$);*
- *para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e todos $1 \leq i < j < k \leq n$, $\gamma_i(t),\gamma_j(t),\gamma_k(t)$ não são colineares.*

Lema 7.1.2. *Seja $(X,0)$ um germe de superfície poligonal (aberta ou fechada) LNE delimitada por $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ e seja $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que:*

- *$\overline{\gamma_{i-1}\gamma_i}$, $\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}$ são superfícies de arestas de X;*
- *$\alpha = tord(\gamma_{i-1},\gamma_i) = tord(\gamma_i,\gamma_{i+1})$;*
- *$0 < \angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1} < \pi$.*

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, se $(\gamma_\varepsilon,0)$ é o arco definido por:

$$\gamma_\varepsilon(t) \in \overline{\gamma_{i-1}(t)\gamma_i(t)}\ ;\ \|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma_i(t)\| = \varepsilon.t^\alpha\ (t > 0)$$

Então $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal (aberta ou fechada) delimitada por $\gamma_1,\dots,\gamma_{i-1},\gamma_\varepsilon,\gamma_{i+1},\dots,\gamma_n$.

Demonstração. Como $\alpha = tord(\gamma_i,\gamma_{i+1}) = tord(\gamma_{i-1},\gamma_i)$, existem $b_i, b_{i-1} > 0$ tais que $\|\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)\| = b_i.t^\alpha + o(t^\alpha)$ e $\|\gamma_{i-1}(t) - \gamma_i(t)\| = b_{i-1}.t^\alpha + o(t^\alpha)$. Logo, para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, $\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\| > \frac{b_i}{2}.t^\alpha$ e $\|\gamma_{i-1}(t)-\gamma_i(t)\| > \frac{b_{i-1}}{2}.t^\alpha$, e como $(X,0)$ é LNE, pelo Teorema 2.2.22 existe $C>1$ tal que $X(t)$ é C-LNE. Ademais, como $0<\angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}<\pi$, temos que existe $M>1$ tal que $\sin(\theta_i(t)) > \frac{2}{M}$, onde $\theta_i(t)=\angle\gamma_{i-1}(t)\gamma_i(t)\gamma_{i+1}(t)$, e também que $\angle\gamma_\varepsilon\gamma_{i+1}\gamma_i$ é uma função decrescente em ε, com $\angle\gamma_\varepsilon\gamma_{i+1}\gamma_i\to 0$ quando $\varepsilon\to 0$.

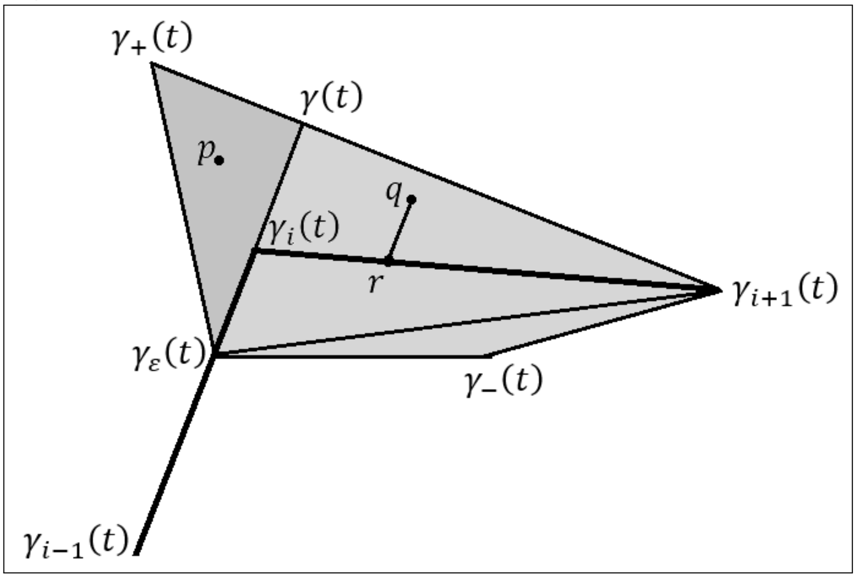
Considere $\varepsilon_0 < \frac{b_i}{4C}, \frac{b_{i-1}}{4C}$ tal que $\angle\gamma_{\varepsilon_0}(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_i(t) < \arcsin\left(\frac{1}{2MC}\right)$ e $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Dado $\theta>0$ suficientemente pequeno, a θ-envoltória de amassamento $V_\theta(Y)$ de $Y=\overline{\gamma_\varepsilon\gamma_i}\cup\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}$ é delimitada pelos arcos $\gamma_\varepsilon,\gamma_+,\gamma_{i+1},\gamma_-$, onde γ_+ é o arco de fronteira de $V_\theta(Y)$ mais próximo de γ_i. Defina $\gamma(t)$ a interseção das retas $\overleftrightarrow{\gamma_\varepsilon(t)\gamma_i(t)}$ e $\overleftrightarrow{\gamma_+(t)\gamma_{i+1}(t)}$. Podemos tomar θ pequeno o bastante de modo que, para cada $t>0$, e para qualquer ponto p no triângulo $\gamma_+(t)\gamma_\varepsilon(t)\gamma(t)$ e qualquer ponto q no quadrilátero $\gamma_\varepsilon(t)\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_-(t)$, temos:

- $\|p-\gamma_i(t)\| \le \|\gamma_\varepsilon(t)-\gamma_i(t)\| = \varepsilon.t^\alpha$
- $\angle q\gamma_{i+1}(t)\gamma_i(t) < \beta$, onde $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ é tal que $\sin(\theta_i(t)\pm\beta) > \frac{1}{M}$ e $\sin(\beta) < \frac{1}{MC}$. Tal ângulo β sempre existe, pois $\sin\theta_i(t) > \frac{2}{M} > \frac{1}{M}$ e:

$$\beta < \angle\gamma_{\varepsilon_0}(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_i(t) + 2\theta < \arcsin\left(\frac{1}{2MC}\right) + 2\theta < \arcsin\left(\frac{1}{MC}\right)$$

- $\|q-r\| \le \|\gamma(t)-\gamma_\varepsilon(t)\| = \|\gamma(t)-\gamma_i(t)\| + \|\gamma_i(t)-\gamma_\varepsilon(t)\| < 2\varepsilon.t^\alpha$, onde r é o ponto sobre o segmento $\overline{\gamma_{i+1}(t)\gamma_i(t)}$ tal que $\overline{qr}$ e $\overline{\gamma_\varepsilon(t)\gamma_i(t)}$ são paralelas.

Figura 26 – Demonstração do Lema 7.1.2



Fonte: elaborado pelo autor.

Provemos que $V_\theta(Y)(t)\cap(X\backslash Y)(t)=\emptyset$. Suponha o contrário, ou seja existe ao menos um ponto em tal interseção. Dividiremos a análise em dois casos:

Caso 1: o ponto na interseção é p no triângulo $\gamma_+(t)\gamma_\varepsilon(t)\gamma(t)$. Neste caso, temos:

$$\|p-\gamma_i(t)\| \leq \varepsilon.t^\alpha < \frac{1}{C}\left(\frac{b_i}{2}.t^\alpha\right) < \frac{1}{C}\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\|$$

$$\|p-\gamma_i(t)\| \leq \varepsilon.t^\alpha < \frac{1}{C}\left(\frac{b_{i-1}}{2}.t^\alpha\right) < \frac{1}{C}\|\gamma_{i-1}(t)-\gamma_i(t)\|$$

Como $d_{X(t)}(p,\gamma_i(t)) \geq \min\{\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\|, \|\gamma_{i-1}(t)-\gamma_i(t)\|\}$, segue que $d_{X(t)}(p,\gamma_i(t)) > C\|p-\gamma_i(t)\|$, uma contradição.

Caso 2:: o ponto na interseção é q no quadrilátero $\gamma_\varepsilon(t)\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_-(t)$. Neste caso, temos:

$$\|q-r\| \leq 2\varepsilon.t^\alpha \leq \frac{1}{C}.\frac{b_{i-1}}{2}.t^\alpha < \frac{1}{C}\|\gamma_{i-1}(t)-\gamma_i(t)\|$$

Para q no triângulo $\gamma_i(t)\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)$, temos:

$$\angle rq\gamma_{i+1}(t) = \pi - \angle qr\gamma_{i+1}(t) - \angle r\gamma_{i+1}(t)q =$$

$$= \theta_i(t) - \angle r\gamma_{i+1}(t)q \in (\theta_i(t)-\beta, \theta_i(t))$$

Para q no quadrilátero $\gamma_i(t)\gamma_\varepsilon(t)\gamma_-(t)\gamma_{i+1}(t)$, temos:

$$\angle rq\gamma_{i+1}(t) = \pi - \angle qr\gamma_{i+1}(t) - \angle r\gamma_{i+1}(t)q =$$

$$= (\pi-\theta_i(t)) - \angle r\gamma_{i+1}(t)q \in (\pi-\theta_i(t)-\beta, \pi-\theta_i(t))$$

Em todo caso, $\sin(\angle rq\gamma_{i+1}(t)) > \frac{1}{M}$. Se h é a distância de r à reta $\overleftrightarrow{\gamma_{i+1}(t)q}$, então:

$$\|q-r\| = \frac{h}{\sin\angle rq\gamma_{i+1}(t)} < M.h =$$

$$= M\|r-\gamma_{i+1}(t)\|\sin(\angle q\gamma_{i+1}(t)\gamma_i(t)) < \frac{1}{C}\|r-\gamma_{i+1}(t)\|$$

Como $d_{X(t)}(q,r) \geq \min\{\|r-\gamma_{i+1}(t)\|, \|\gamma_{i-1}(t)-\gamma_i(t)\|\}$, segue que $d_{X(t)}(q,r) > C\|q-r\|$, uma contradição.

Portanto, da Observação 6.2.3, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal delimitada por $\gamma_1,\ldots,\gamma_{i-1},\gamma_\varepsilon,\gamma_{i+1},\ldots,\gamma_n$, finalizando a prova. $\square$

Lema 7.1.3. *Seja $(X,0)$ um germe de superfície poligonal (aberta ou fechada) LNE delimitada por $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ e seja $i\in\{1,\dots,n\}$ tal que:*

- $\overline{\gamma_{i-1}\gamma_i}$, $\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}$ *são superfícies de arestas de X;*
- $tord(\gamma_{i-1},\gamma_i) > tord(\gamma_i,\gamma_{i+1})$*;*
- $0 < \angle\gamma_{k-1}\gamma_k\gamma_{k+1} < \pi$*, para todo k.*

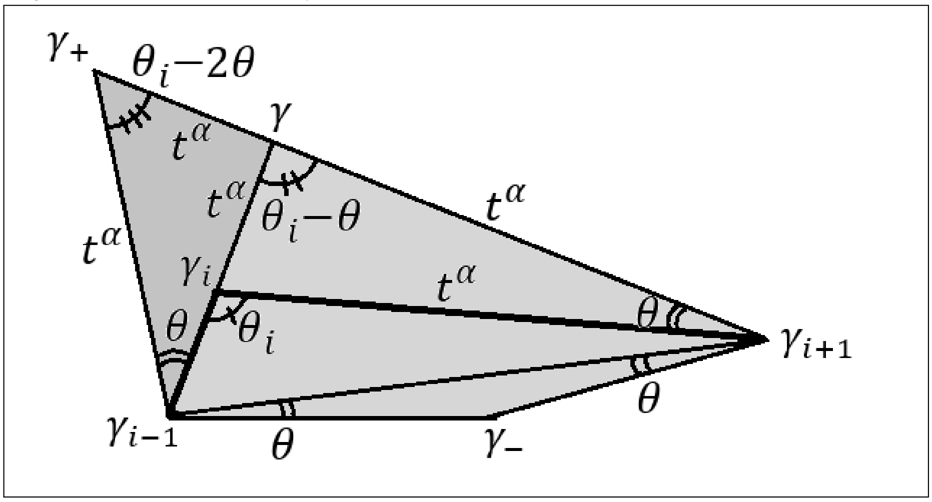
Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. *Se $X(t)\simeq[0,1]$ e $i=2$, então $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal aberta delimitada por γ_1, γ_3, $\dots$, γ_n.*
2. *Se $\overline{\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}}$ é superfície de aresta de X e $tord(\gamma_{i-2},\gamma_{i-1})\le tord(\gamma_i,\gamma_{i+1})$, então $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal (aberta ou fechada) delimitada por γ_1, $\dots$, γ_{i-1}, γ_{i+1}, $\dots$, γ_n.*

Demonstração. Seja $\theta_i=\angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}$ e $C>1$ tal que $X(t)$ é C-LNE, para $t>0$ (Teorema 2.2.22). Como na demonstração do lema anterior, dado $\theta>0$ suficientemente pequeno, a θ-envoltória de amassamento $V_\theta(Y)$ de $Y=\overline{\gamma_\varepsilon\gamma_i}\cup\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}$ é delimitada pelos arcos $\gamma_\varepsilon,\gamma_+,\gamma_{i+1},\gamma_-$, onde γ_+ é o arco de fronteira de $V_\theta(Y)$ mais próximo de γ_i. Defina $\gamma(t)$ a interseção das retas $\overleftrightarrow{\gamma_{i-1}\gamma_i(t)}$ e $\overleftrightarrow{\gamma_+\gamma_{i+1}(t)}$. Como $tord(\gamma_{i-1},\gamma_i) > tord(\gamma_i,\gamma_{i+1})$, temos que $\angle\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}\gamma_i=0$ e $\angle\gamma_{i+1}\gamma_{i-1}\gamma_i=\pi-\theta_i$.

Temos ainda que $\angle\gamma\gamma_i\gamma_{i+1}=\pi-\theta_i$, $\angle\gamma\gamma_{i+1}\gamma_i=\angle\gamma\gamma_{i-1}\gamma_+=\theta$, $\angle\gamma_i\gamma\gamma_{i+1}=\theta_i-\theta$ e $\angle\gamma_{i-1}\gamma_+\gamma=\theta_i-2\theta$, para $\theta<\frac{\theta_i}{2}$. Dessa forma, se $tord(\gamma_i,\gamma_{i+1})=\alpha$, então ao considerarmos os arcos γ_i, γ, γ_{i+1}, temos $tord(\gamma_i,\gamma)=tord(\gamma,\gamma_{i+1})=\alpha\Rightarrow tord(\gamma_{i-1},\gamma)=\alpha$. Considerando os arcos γ_{i-1}, γ, γ_+, temos, de $tord(\gamma_{i-1},\gamma)=\alpha$, que $tord(\gamma_{i-1},\gamma_+)=tord(\gamma_+,\gamma)=\alpha$.

Figura 27 – Determinação das ordens de contato no Lema 7.1.3



Fonte: elaborado pelo autor.

Ademais, existe $b_\theta > 0$ tal que a série de Puiseux de $\|\gamma_{i-1}(t)-\gamma(t)\|$ é $b_\theta.t^\alpha + o(t^\alpha)$, com $b_\theta \to 0$ quando $\theta \to 0$. Assim, para cada $t > 0$, a maior distância conectando dois pontos no triângulo $\gamma_{i-1}(t)\gamma_+(t)\gamma(t)$ tem série de Puiseux igual a $c_\theta.t^\alpha + o(t^\alpha)$, com $c_\theta > 0$ e $c_\theta \to 0$ quando $\theta \to 0$. Em particular, existe $\theta > 0$ tal que, para $t > 0$ e para todo ponto p no triângulo $\gamma_+(t)\gamma_{i-1}(t)\gamma(t)$:

$$\|p-\gamma_i(t)\| < \frac{1}{C\tilde{C}}\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\|$$

Onde $\tilde{C} \geq 1$ é tal que $\|\gamma_{i-2}(t)-\gamma_{i-1}(t)\| \geq \frac{1}{\tilde{C}}\|\gamma_{i-2}(t)-\gamma_{i-1}(t)\|$, para $t > 0$ pequeno ($\tilde{C}$ existe, pois $tord(\gamma_{i-2},\gamma_{i-1}) \leq tord(\gamma_i,\gamma_{i+1})$). Analogamente ao que foi feito no lema anterior, existe $\theta > 0$ suficientemente pequeno tal que todo ponto q no quadrilátero $\gamma_{i-1}(t)\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_-(t)$:

$$\|q-r\| < \frac{1}{C\tilde{C}}\|\gamma_{i+1}(t)-r\| \leq \frac{1}{C\tilde{C}}\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\|$$

onde r é o ponto sobre o segmento $\overline{\gamma_{i+1}\gamma_i}(t)$ tal que $\overline{qr}$ e $\overline{\gamma_{i-1}\gamma_i}(t)$ são paralelas.

Afirmação 7.1.4. *Caso $\overline{\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}}$ seja superfície de aresta de X e $tord(\gamma_{i-2},\gamma_{i-1}) < tord(\gamma_{i-1},\gamma_i)$, existe $\theta > 0$ suficientemene pequeno tal que $\overline{\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}}(t) \cap V_\theta(Y) = \{\gamma_{i-1}(t)\}$, para $t > 0$.*

Demonstração. Suponha o contrário, isto é, par todo $\theta > 0$, existe $t > 0$ suficientemente pequeno de modo que a semirreta $s(t) = \overrightarrow{\gamma_{i-1}(t)\gamma_{i-2}(t)}$ seccione o quadrilátero $\gamma_{i-1}(t)\gamma_+(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_-(t)$. Como $\angle\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}\gamma_i > 0$, podemos tomar θ pequeno o bastante de modo que $s(t)$ não secciona o triângulo $\gamma_{i-1}(t)\gamma_+(t)\gamma(t)$. Logo, $s(t)$ secciona o quadrilátero $\gamma_{i-1}(t)\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_-(t)$, o que implica $\angle\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}\gamma_i \leq \pi-\theta_i$.

Caso 1: Se $\angle\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}\gamma_i < \pi-\theta_i$, então $s(t)$ intersecta $\overline{\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)}$ num ponto $\tilde{\gamma}(t)$. Considere o arco $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$. Como:

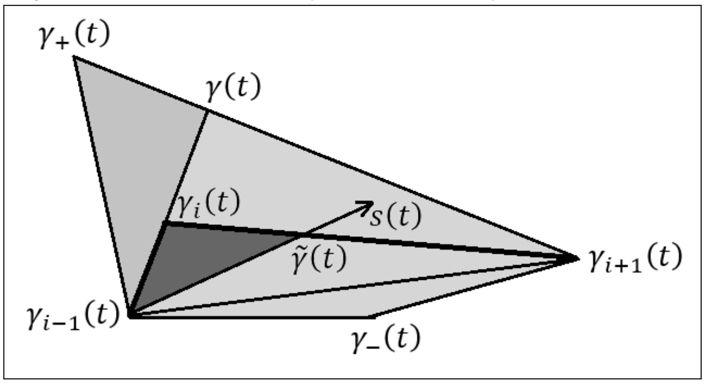
$$\angle\gamma_i(t)\tilde{\gamma}(t)\gamma_{i-1}(t) = \pi - \angle\gamma_{i-2}(t)\gamma_{i-1}(t)\gamma_i(t) - \theta_i > 0$$

temos:

$$\alpha_1 = tord(\gamma_{i-1},\gamma_i) = tord(\gamma_i,\tilde{\gamma}) = tord(\tilde{\gamma},\gamma_{i-1})$$

Assim, $\tilde{\gamma}(t)$ é a interseção dos segmentos $\overline{\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}}(t)$ e $\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}(t)$, contradição com o fato de que $X(t) \simeq [0,1]$ ou $X(t) \simeq \mathbb{S}^1$.

Figura 28 – Demonstração da Afirmação 7.1.4, caso 1



Fonte: elaborado pelo autor.

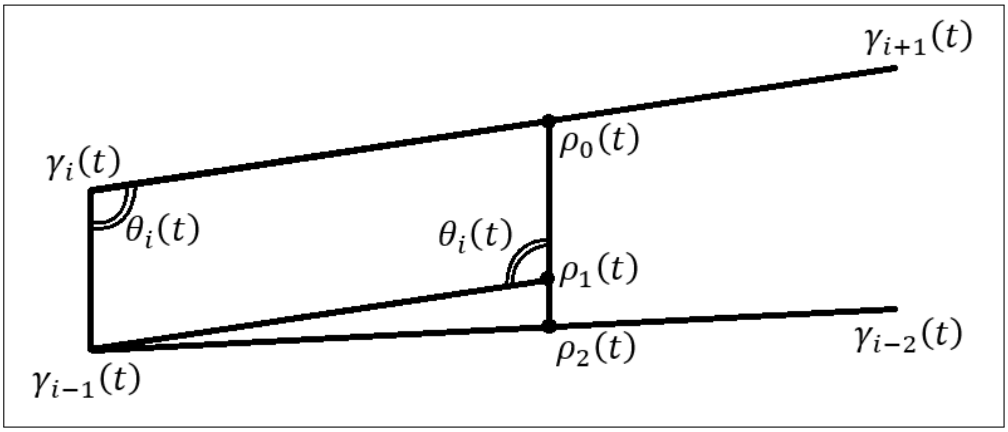
Caso 2: Se $\angle\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}\gamma_i = \pi - \theta_i$, seja $\alpha_0 \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ tal que:

$$tord(\gamma_{i-2}, \gamma_{i-1}), tord(\gamma_i, \gamma_{i+1}) < \alpha_0 < \alpha_1$$

e seja $\rho_0(t) \in \overline{\gamma_i(t)\gamma_{i+1}(t)}$ tal que $\|\gamma_i(t) - \rho_0(t)\| = t^{\alpha_0}$. Sejam ainda $\rho_1(t) \in C_a^3(t)$ tal que $\gamma_{i-1}(t)\gamma_i(t)\rho_0(t)\rho_1(t)$ é um paralelogramo, $\rho_2(t)$ a interseção das retas $\overleftrightarrow{\rho_0(t)\rho_1(t)}$ e $\overleftrightarrow{\gamma_{i-2}(t)\gamma_{i-1}(t)}$ e sejam os arcos $\rho_k = \rho_k(t)$ $(k = 0, 1, 2)$. Como $\angle\gamma_i\gamma_{i-1}\rho_1 = \pi - \theta_i = \angle\gamma_{i-2}\gamma_{i-1}\gamma_i = \angle\rho_2\gamma_{i-1}\gamma_i$, temos que $\angle\rho_2\gamma_{i-1}\rho_1 = 0$ e

$$\{\angle\rho_2\rho_1\gamma_{i-1}, \angle\rho_1\rho_2\gamma_{i-1}\} = \{\theta_i, \pi - \theta_i\} \neq \{0, \pi\}$$

Figura 29 – Demonstração da Afirmação 7.1.4, caso 2



Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, $tord(\gamma_{i-1}, \rho_2) = tord(\gamma_{i-1}, \rho_1) = tord(\gamma_i, \rho_0) = \alpha_0$, donde $d_{X(t)}(\rho_2(t), \rho_0(t))$ é:

$$\|\rho_2(t) - \gamma_{i-1}(t)\| + \|\gamma_{i-1}(t) - \gamma_i(t)\| + \|\gamma_i(t) - \rho_0(t)\| > \|\gamma_i(t) - \rho_0(t)\| = t^{\alpha_0}$$

Ademais, existe $\alpha_1 \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$, $\alpha_1 > \alpha_0$, tal que $tord(\rho_2, \rho_1) = \alpha_1$. Como $\alpha = tord(\rho_0, \rho_1)$ e $\rho_0(t)$, $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ são colineares, segue que existe $b > 0$ tal que $\|\rho_2(t) - \rho_0(t)\| = b.t^{\tilde{\alpha}} + o(t^{\tilde{\alpha}})$, onde $\tilde{\alpha} = \min\{\alpha, \alpha_1\} > \alpha_0$. Portanto, existe $0 < t < \left(\frac{1}{2bC}\right)^{\frac{1}{\tilde{\alpha}-\alpha_0}}$ tal que $\|\rho_2(t) - \rho_0(t)\| < 2b.t^{\tilde{\alpha}}$, e com isso:

$$\frac{\|\rho_2(t) - \rho_0(t)\|}{d_{X(t)}(\rho_2(t), \rho_0(t))} < \frac{2b.t^{\tilde{\alpha}}}{t^{\alpha_0}} = 2b.t^{\tilde{\alpha}-\alpha_0} < \frac{1}{C}$$

Uma contradição, visto que $X(t)$ é C-LNE. Logo a afirmação está provada. $\square$

De volta à demonstração do Lema, tome $\theta > 0$ satisfazendo as condições supracitadas e a Afirmação 7.1.4, caso a hipótese (2) seja assumida. Demonstremos que $V_\theta(Y)(t) \cap (X \backslash Y)(t) = \emptyset$. Suponha o contrário e dividamos a análise em dois casos.

Caso 1: o ponto na interseção é p no triângulo $\gamma_+(t)\gamma_{i-1}(t)\gamma(t)$. Se a hipótese (1) for assumida, então:

$$d_{X(t)}(p, \gamma_i(t)) \geq \|\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)\| \geq \frac{1}{\tilde{C}}\|\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)\|$$

E se a hipótese (2) for assumida, então:

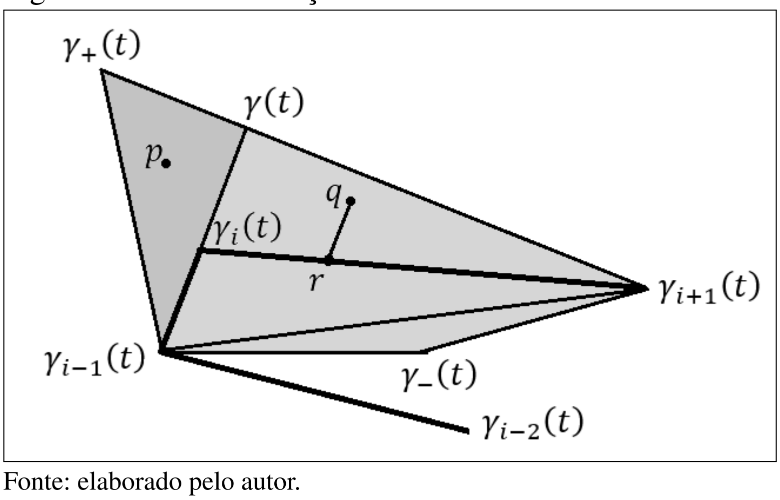
$$d_{X(t)}(p, \gamma_i(t)) \geq \min\{\|\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)\|, \|\gamma_{i-2}(t) - \gamma_{i-1}(t)\|\} \geq \frac{1}{\tilde{C}}\|\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)\|$$

De todo modo, temos:

$$\|p - \gamma_i(t)\| < \frac{1}{C\tilde{C}}\|\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)\| \leq \frac{1}{C}.d_{X(t)}(p, \gamma_i(t))$$

uma contradição.

Figura 30 – Demonstração do Lema 7.1.3



Fonte: elaborado pelo autor.

Caso 2: o ponto na interseção é q no quadrilátero $\gamma_{i-1}(t)\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)\gamma_{-}(t)$. Se a hipótese (1) for assumida, então:

$$d_{X(t)}(q,r) \geq \|\gamma_{i+1}(t) - r\| > C\|q-r\|$$

E se a hipótese (2) for assumida, então, como:

$$\|\gamma_{i-2}(t) - \gamma_{i-1}(t)\| \geq \frac{1}{\tilde{C}}\|\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t)\| \geq \frac{1}{\tilde{C}}\|\gamma_{i+1}(t) - r\|$$

temos:

$$d_{X(t)}(q,r) \geq \min\{\|\gamma_{i+1}(t) - r\|, \|\gamma_{i-2}(t) - \gamma_{i-1}(t)\|\} \geq \frac{1}{\tilde{C}}\|\gamma_{i+1}(t) - r\|$$

Assim:

$$\|q-r\| < \frac{1}{C\tilde{C}}\|\gamma_{i+1}(t) - r\| \leq \frac{1}{C}d_{X(t)}(q,r)$$

uma contradição. O resultado segue pela Observação 6.2.3. □

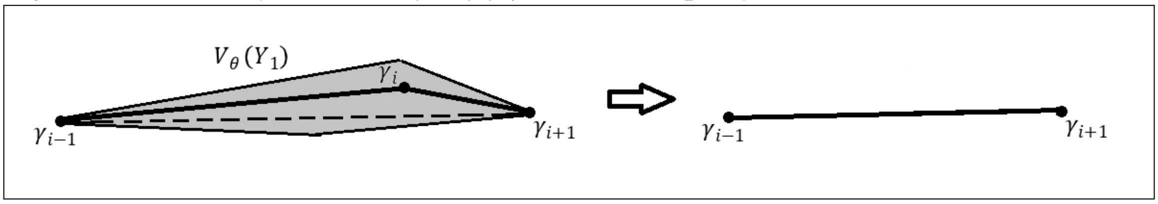
7.2 Reduções de arestas em superfícies poligonais

Proposição 7.2.1. *Sejam $a > 0$, $n \geq 3$ inteiro e seja $(X,0) \subset (C_a^3, 0)$ um germe de superfície LNE poligonal delimitada pelos arcos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.*

1. *Se $(X,0)$ é $(n-1)$-gonal aberta, então $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe de superfície 1-gonal aberta delimitada por γ_1, γ_n.*
2. *Se $(X,0)$ é n-gonal fechada, então $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a um germe de uma superfície LNE 3-gonal fechada.*

Demonstração. A prova será por indução em n (no que segue, considere $\gamma_0 = \gamma_n$ e $\gamma_1 = \gamma_{n+1}$ no caso de X ser poligonal fechada). O caso inicial $n = 3$ já foi analisado na Proposição 6.2.1. Para o passo indutivo, suponha primeiro que $\angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1} = \pi$, para algum i. Temos que $\angle\gamma_i\gamma_{i-1}\gamma_{i+1} = \angle\gamma_i\gamma_{i+1}\gamma_{i-1} = 0$, de modo que existe $\theta > 0$ suficientemente pequeno tal que a θ-envoltória de amassamento $V_\delta(Y_1)$ de $(Y_1,0) = (\overline{\gamma_{i-1}\gamma_i} \cup \overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}, 0)$ não intersecta $(X \backslash Y_1, 0)$, pelos mesmos argumentos da Proposição 6.2.5 (por uma rotação de eixos, se necessário, $(Y_1,0)$ pode ser visto como germe de triângulo sincronizado convexo de derivada δ-limitada, para cada $\delta > 0$). Portanto, $(Y_1,0)$ é amassável em $V_\delta(Y_1)$ e assim $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente à poligonal (aberta ou fechada) delimitada pelos arcos $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$, e o resultado segue por indução neste caso.

Figura 31 – Resolução do caso $\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1} = \pi$ da Proposição 7.2.1



Fonte: elaborado pelo autor.

Suponha agora que $\angle\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1} < \pi$ para todo i e defina $\alpha_i = tord(\gamma_i, \gamma_{i+1})$. Temos dois casos a considerar.

Caso 1: $\alpha_i = \alpha_j$, para todos $i \neq j$. Seja α o valor comum dos α_i e separemos este caso em dois subcasos.

Caso 1.1: X é poligonal não degenerada. Considere $I \subseteq \binom{[n]}{2}$ um conjunto de pares de índices $(i, j); 1 \leq i < j \leq n$ tal que:

1. $(1,2), \ldots, (n-1,n) \in I$, se X é poligonal aberta, e $(1,2), \ldots, (n-1,n), (1,n) \in I$, se X é poligonal fechada.
2. para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, $\cup_{\{i,j\} \in I} \overline{\gamma_i(t)\gamma_j(t)}$ é uma triangulação do fecho convexo determinado por $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)$.

Como X é poligonal não degenerada e como o tipo topológico de $X(t)$ é invariante para t pequeno, pelo Teorema 2.1.20, tal conjunto de pares de índices sempre existe. Agora, suponha que as arestas $\overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}(t)$ no link $X(t)$ são destacadas e que o fecho convexo determinado por $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)$ seja um k-ágono, onde a de suas k arestas são destacadas. Por exemplo, na triangulação do diagrama esquerdo da Figura 28, as arestas destacadas são $\overline{\gamma_1(t)\gamma_2(t)}$, …, $\overline{\gamma_5(t)\gamma_6(t)}$ e:

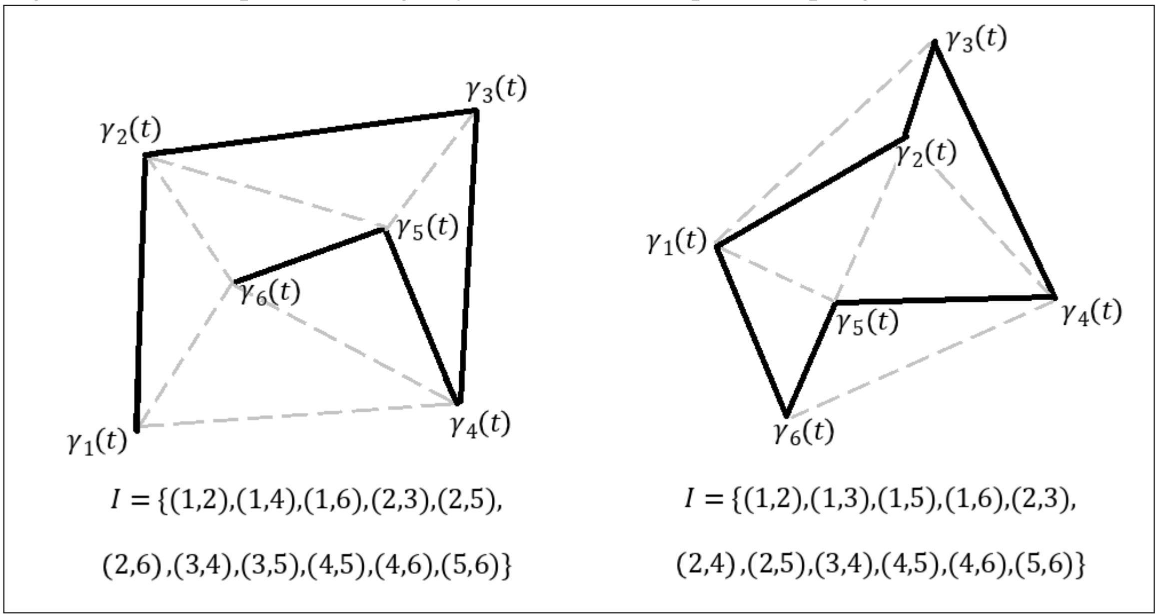
$$I = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (4,5), (4,6), (5,6)\}$$

Já na triangulação do diagrama direito da Figura 28, as arestas destacadas são $\overline{\gamma_1(t)\gamma_2(t)}$, …, $\overline{\gamma_5(t)\gamma_6(t)}$, $\overline{\gamma_6(t)\gamma_1(t)}$ e:

$$I = \{(1,2), (1,3), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (4,5), (4,6), (5,6)\}$$

Seja T o número de triângulos no interior desse fecho determinados pela triangulação. Calculando a soma dos ângulos internos de todos esses triângulos, temos um total de $T.\pi$. Por outro lado, ao contar esse total olhando os ângulos no k-ágono do fecho e os ângulos ao redor de cada ponto interior, temos um total de $(k-2).\pi + (n-k).2\pi = (2n-k-2).\pi$. Igualando tais quantidades, temos que o total de triângulos é $T = 2n - k - 2$.

Figura 32 – Exemplos de triangulações de links de superfícies poligonais



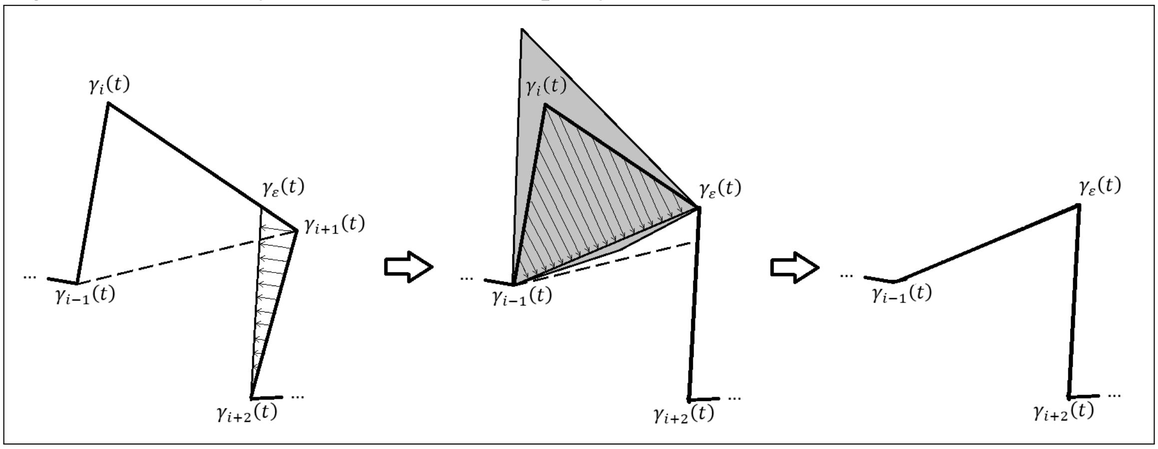
Fonte: elaborado pelo autor.

Afirmamos que existe um dentre esses $2n-k-2$ triângulos que possuem ao menos duas de suas três arestas destacadas. Suponha o contrário, ou seja, cada triângulo possui no máximo uma aresta destacada, e analisemos primeiro o caso $X(t) \simeq [0,1]$. Contando o número de arestas destacadas em cada triângulo, temos no máximo $T = 2n-k-2$ arestas destacadas. Por outro lado, como há a arestas destacadas na borda do fecho convexo, existem $n-1-a$ arestas destacadas no interior do fecho. Logo, como cada aresta do interior foi contada duas vezes e cada aresta na borda foi contada uma vez, o total das arestas de cada triângulo contabilizado é igual a $2(n-1-a)+a = 2n-a-2$. Como $a < k$, temos $2n-a-2 > 2n-k-2$, contradição. No caso $X(t) \simeq \mathbb{S}^1$, o número máximo de arestas destacadas ainda é $2n-k-2$, mas por outro lado esse total é $2(n-a)+a = 2n-a$, pois há $n-a$ arestas destacadas no interior do fecho. Como $a \leq k$, temos $2n-a > 2n-k-2$, de novo uma contradição. Portanto, a afirmação está provada.

Considere tal triângulo e suponha que as suas arestas destacadas sejam $\overline{\gamma_{i-1}\gamma_i}, \overline{\gamma_i\gamma_{i+1}}$. Se $2 \leq i \leq n-2$, para cada $\varepsilon > 0$, seja $\gamma_\varepsilon(t) \in \overline{\gamma_i(t)\gamma_{i+1}(t)}$ tal que $\|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma_{i+1}(t)\| = \varepsilon t^\alpha$ e seja o arco $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(t)$ (note que $(\gamma_\varepsilon, 0)$ está bem definida, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno). Pelo Lema 7.1.2, existe ε de modo que $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente à poligonal delimitada pelos arcos $\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \gamma_\varepsilon, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_n$. Como $\angle\gamma_{i+1}\gamma_{i-1}\gamma_\varepsilon > 0$, existe uma θ-envoltória de amassamento $V_\theta(Y_2)$ de $Y_2 = \overline{\gamma_{i-1}\gamma_i} \cup \overline{\gamma_i\gamma_\varepsilon}$, tal que $V_\theta(Y_3)$ não intersecta nenhum ponto de $(X\backslash Y_2, 0)$, uma vez que o triângulo $\gamma_{i-1}\gamma_\varepsilon\gamma_{i+1}(t)$ não tem pontos de $X(t)$ em seu interior.

Logo, $(Y_2,0)$ é amassável em $V_\theta(Y_2)$ e assim $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da poligonal delimitada pelos arcos $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_\varepsilon, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_n$, e o resultado segue

Figura 33 – Resolução do caso 1.1 da Proposição 7.2.1



Fonte: elaborado pelo autor.

por hipótese de indução. Observe que tal argumento também funciona para $i = n-1$ no caso $X(t) \simeq \mathbb{S}^1$ (basta renomear $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ como $\gamma_n, \ldots, \gamma_1$, respectivamente), e no caso $X(t) \simeq [0,1]$, tal argumento funciona também para $i = n-1, n$ (por uma renomeação similar).

Caso 1.2: X não é poligonal não degenerada. Neste caso, provemos que existe $\tilde{X}$ poligonal não degenerada de mesmo número de vértices de X tal que $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a $(\tilde{X},0)$ em $(C_a^3,0)$. Realize o seguinte algoritmo, de modo sucessivo para $i = 2, \ldots, n-1$:

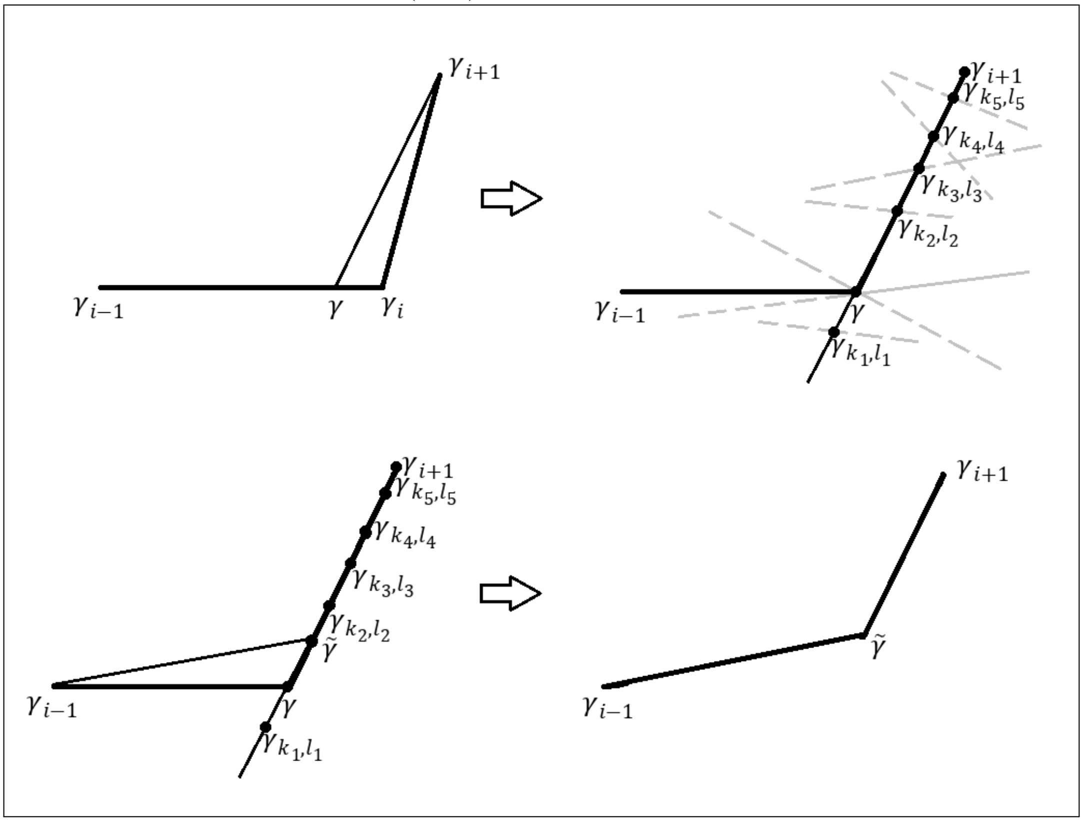
Passo 1: Escolha $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno de modo que, se $\gamma(t) \in \overline{\gamma_{i-1}(t)\gamma_i(t)}$ é tal que $\|\gamma(t) - \gamma_i(t)\| = \varepsilon_1.t^\alpha$ e $\gamma = \gamma(t)$, tenhamos $\overrightarrow{\gamma\gamma_{i+1}} \neq \pm\overrightarrow{\gamma_j\gamma_k}$, para todos j,k índices distintos em $\{1,\ldots,n\}$, e $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal (aberta ou fechada) LNE delimitada por $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$. Tal ε_1 existe, pelo Lema 7.1.2 e pelo fato de que $\angle\gamma\gamma_{i+1}\gamma_i > 0$.

Passo 2: A seguir, para cada $t > 0$ pequeno e para todos os índices distintos j,k em $\{1,\ldots,n\}$, seja $\gamma_{k,l}(t)$ a interseção da reta $\overleftrightarrow{\gamma_k(t)\gamma_l(t)}$ com a reta $\overleftrightarrow{\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)}$. Tal interseção sempre existe, pois $\overrightarrow{\gamma\gamma_{i+1}} \neq \pm\overrightarrow{\gamma_j\gamma_k}$. Além disso, é possível ter ainda $\gamma_{k,l}(t) = \gamma(t)$. Defina os arcos $\gamma_{j,k} = \gamma_{j,k}(t)$. Para índices j,k tais $(\gamma_{j,k},0) \neq (\gamma,0)$, existem $a_{j,k} > 0$ e $\alpha_{j,k} \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$ tais que $\|\gamma(t) - \gamma_{j,k}(t)\| = a_{j,k}.t^{\alpha_{j,k}} + o(t^{\alpha_{j,k}})$.

Escolha $0 < \varepsilon_2 < a_{j,k}$ suficientemente pequeno de modo que, se $\tilde{\gamma}(t) \in \overline{\gamma(t)\gamma_{i+1}(t)}$ é tal que $\|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| = \varepsilon_2.t^\alpha$ e $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$, tenhamos $\overrightarrow{\tilde{\gamma}\gamma_{i-1}} \neq \pm\overrightarrow{\gamma_j\gamma_k}$, para todos j,k índices distintos em $\{1,\ldots,n\}$ e $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal (aberta ou fechada) LNE delimitada por $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \tilde{\gamma}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$. Tal ε_2 existe, pelo Lema 7.1.2 e pelo fato de que $\angle\gamma\gamma_{i-1}\tilde{\gamma} > 0$.

Passo 3: Rotule $\tilde{\gamma}$ como γ_i. Se $i < n-1$, realize o algoritmo para $i+1$; se $i = n-1$, pare o algoritmo.

Figura 34 – Transformação de $(X,0)$ em poligonal não degenerada



Fonte: elaborado pelo autor.

Quando o algoritmo é aplicado em i, γ_i é transformado num arco em que $\gamma_i(t)$ não pertence a nenhuma reta conectando $\gamma_j(t)$ a $\gamma_k(t)$, com $j,k \neq i$ índices distintos em $\{1,\ldots,n\}$. Como os arcos γ_1,γ_n permaneceram fixos, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe de uma superfície poligonal não degenerada $(\tilde{X},0)$, que compartilha os arcos de fronteira $(\gamma_1,0),(\gamma_n,0)$ com $(X,0)$, finalizando a prova nesse caso, reduzindo-o ao caso 1.1.

Caso 2: Existem i,j tais que $\alpha_i \neq \alpha_j$. Dividiremos em mais subcasos.

Caso 2.1: $X(t) \simeq [0,1]$ e $\alpha_1 > \alpha_2$.

Pelo Lema 7.1.3, Afirmação (1), $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da poligonal delimitada pelos arcos $\gamma_1,\gamma_3,\ldots,\gamma_n$, e o resultado segue por indução.

Caso 2.2: $X(t) \simeq [0,1]$ e $\alpha_{n-1} > \alpha_{n-2}$.

Esse caso é análogo ao Caso 2.1, bastando renomar $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ para $\gamma_n,\ldots,\gamma_1$, respectivamente.

Caso 2.3: $X(t) \simeq [0,1]$ e $\alpha_{n-1} \leq \alpha_{n-2}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Seja $\alpha = \max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\}$ e considere índices $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n-1$ tais que $\alpha_{k_1} =$

$\cdots = \alpha_{k_2} = \alpha$, $\alpha_{k_1-1} < \alpha$ (caso $k_1 > 1$) e que $\alpha_{k_2+1} < \alpha$ (caso $k_2 < n-1$). Seja $C > 1$ tal que $X(t)$ é C-LNE, para cada $t > 0$ pequeno (Teorema 2.2.22). Como $\alpha = tord(\gamma_{k_1}, \gamma_{k_1+1}) = \cdots = tord(\gamma_{k_2}, \gamma_{k_2+1})$, existe $a_\alpha > 0$ tal que $d_{X(t)}(\gamma_{k_1}(t), \gamma_{k_2+1}(t)) = a_\alpha.t^\alpha + o(t^\alpha)$. Agora, analisemos mais três subcasos.

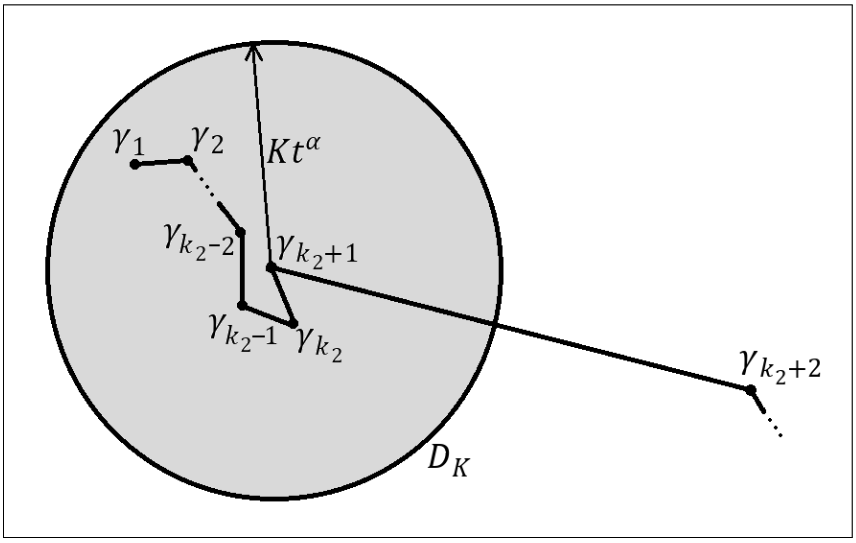
Caso 2.3.1: $k_1 = 1$.

Neste caso, como $\alpha = \alpha_1 \leq \alpha_2$, temos $k_2 \geq 2$, pela maximalidade de α e $k_2 < n-1$, pois existe $\alpha_i \neq \alpha_j$. Para cada $t > 0$ pequeno, seja $\gamma(t) \in \overline{\gamma_{k_2+1}(t)\gamma_{k_2+2}(t)}$ tal que $\|\gamma_{k_2+1}(t) - \gamma(t)\| = a_\alpha.t^\alpha$. Note que $\gamma(t)$ está bem definida para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, uma vez que $\alpha_{k_2+1} < \alpha_{k_2}$. Defina também $\gamma = \gamma(t)$. Seja Y_3 a superfície poligonal aberta delimitada por $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_2+1}, \gamma$. Pelo Caso 1, $(Y_3, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente à poligonal aberta delimitada por γ_1, γ. Ademais, existe $K > a_\alpha$ tal que, se:

$$D_K(t) = \{p \in C_a^3(t) \mid \|p - \gamma_{k_2+1}(t)\| \leq K.t^\alpha\}$$

e $D_k = \bigcup_{t>0} D_K(t) \cup \{0\}$, então $(D_K, 0)$ contém os germes das envoltórias de amassamento utilizadas para transformar $(Y_3, 0)$ em $(\overline{\gamma_1\gamma}, 0)$.

Figura 35 – Resolução do caso 2.3.1 da Proposição 7.2.1



Fonte: elaborado pelo autor.

Suponha que $k_2 < n-2$ e que existe $p \in (\overline{\gamma_{k_2+2}\gamma_{k_2+3}} \cup \cdots \cup \overline{\gamma_{n-1}\gamma_n})(t)$ tal que $p \in D_K(t)$. Assim, $\|p - \gamma_{k_2+1}(t)\| \leq K.t^\alpha$, mas por outro lado:

$$d_{X(t)}(p, \gamma_{k_2+1}(t)) \geq \|\gamma_{k_2+1}(t) - \gamma_{k_2+2}(t)\| > C.K.t^\alpha$$

para t suficientemente pequeno, uma vez que $tord(\gamma_{k_2+1}, \gamma_{k_2+2}) < \alpha$. Isso é uma contradição, e portanto as envoltórias de amassamento utilizadas para transformar $(Y_4, 0)$ em $(\overline{\gamma_1\gamma}, 0)$ não intersectam $((X \backslash Y_4, 0)$, donde $(X, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal aberta delimitada por $\gamma_1, \gamma, \gamma_{k_2+2}, \ldots, \gamma_n$, e o resultado segue por indução.

Caso 2.3.2: $k_2 = n-1$.

Esse caso é análogo ao Caso 2.3.1, bastando renomar $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ para $\gamma_n, \ldots, \gamma_1$, respectivamente.

Caso 2.3.3: $1 < k_1 \leq k_2 < n-1$.

Suponha sem perda de generalidade $\alpha_{k_1-1} \leq \alpha_{k_2+1}$ (caso contrário, renomeie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ para $\gamma_n, \ldots, \gamma_1$, respectivamente). Se $k_1 = k_2$, então pelo Lema 7.1.3, Afirmação (2), $(X, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da poligonal aberta delimitada por $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_1}, \gamma_{k_1+2}, \ldots, \gamma_n$ e o resultado segue por indução. Se $k_1 < k_2$, para cada $t > 0$ pequeno, sejam $\gamma(t) \in \overline{\gamma_{k_2+1}(t)\gamma_{k_2+2}(t)}$ e $\tilde{\gamma}(t) \in \overline{\gamma_{k_1-1}(t)\gamma_{k_1}(t)}$ tais que:

$$\|\gamma_{k_2+1}(t) - \gamma(t)\| = \|\gamma_{k_1}(t) - \tilde{\gamma}(t)\| = a_\alpha.t^\alpha$$

Note que $\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)$ estão bem definidas para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, uma vez que $\alpha_{k_2+1}, \alpha_{k_1-1} < \alpha$. Defina também $\gamma = \gamma(t)$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$. Seja Y_4 a poligonal aberta delimitada por $\tilde{\gamma}, \gamma_{k_1}, \ldots, \gamma_{k_2+1}, \gamma$. Pelo Caso 1, $(Y_4, 0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente à poligonal aberta delimitada por $\tilde{\gamma}$, γ. Ademais, de modo análogo ao Caso 2.3.1, existe $K > a_\alpha$ tal que $(D_K, 0)$ contém os germes das envoltórias de amassamento utilizadas para transformar $(Y_4, 0)$ em $(\overline{\tilde{\gamma}, \gamma}, 0)$.

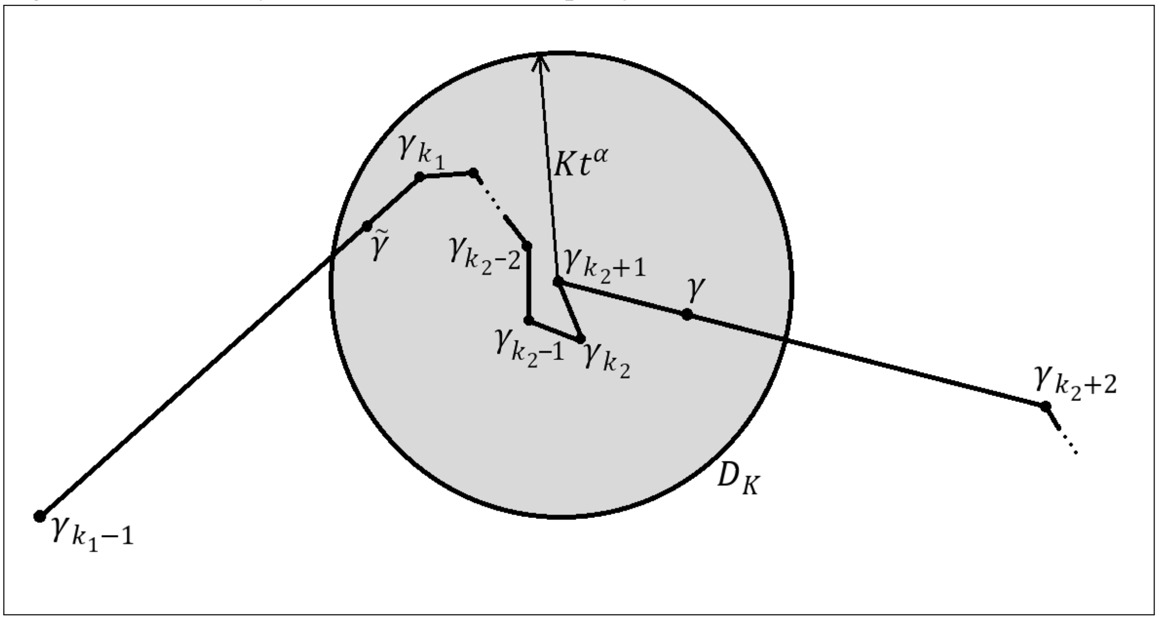
Suponha que existe $p \in (X \backslash (\overline{\gamma_{k_1-1}\gamma_{k_1}} \cup \cdots \cup \overline{\gamma_{k_2+1}\gamma_{k_2+2}}))(t)$ tal que $p \in D_K(t)$. Assim, $\|p - \gamma_{k_2+1}(t)\| \leq K.t^\alpha$. Por outro lado, para t suficientemente pequeno:

$$\|\gamma_{k_2+1}(t) - \gamma_{k_2+2}(t)\|, \|\gamma_{k_1-1}(t) - \gamma_{k_1}(t)\| > C.K.t^\alpha$$

Uma vez que $tord(\gamma_{k_2+1}, \gamma_{k_2+2}), tord(\gamma_{k_1-1}, \gamma_{k_1}) < \alpha$. Como o caminho de comprimento mínimo em $X(t)$ conectando p a $\gamma_{k_2+1}(t)$ contém o segmento $\overline{\gamma_{k_1-1}\gamma_{k_1}}(t)$ ou o segmento $\overline{\gamma_{k_2+1}\gamma_{k_2+2}}(t)$, segue que:

$$d_{X(t)}(p, \gamma_{k_2+1}(t)) > C.K.t^\alpha \geq C.\|p - \gamma_{k_2+1}(t)\|$$

Figura 36 – Resolução do caso 2.3.3 da Proposição 7.2.1



Fonte: elaborado pelo autor.

Isso é uma contradição, e portanto as envoltórias de amassamento utilizadas para transformar $(Y_4,0)$ em $(\overline{\gamma_1\gamma},0)$ não intersectam $(X\backslash Y_4,0)$, donde $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da superfície poligonal aberta delimitada por $\gamma_1,\ldots,\tilde{\gamma},\gamma,\gamma_{k_2+2},\ldots,\gamma_n$, e o resultado segue por indução.

Caso 2.4: $X(t)\simeq\mathbb{S}^1$.

Seja $\alpha=\max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ e $\tilde{\alpha}=\min\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. Temos que, para $i=1,\ldots,n$, existe $a_i>0$ tal que $\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\|=a_i.t^{\alpha_i}+o(t^{\alpha_i})$. Se $j\in\{1,\ldots,n\}$ é tal que $\tilde{\alpha}=\alpha_j$, então como:

$$\|\gamma_j(t)-\gamma_{j+1}(t)\|\geq\sum_{i\neq j}\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\|\Rightarrow a_j.t^{\tilde{\alpha}}+o(t^{\tilde{\alpha}})\geq\sum_{i\neq j}(a_i.t^{\alpha_i}+o(t^{\alpha_i}))$$

Segue que existe $i\neq j$ tal que $\alpha_i=\tilde{\alpha}$. Se $i=j+1$, então como $\angle\gamma_j\gamma_{j+1}\gamma_{j+2}>0$, temos $tord(\gamma_j,\gamma_{j+2})=\tilde{\alpha}$ e portanto existe $b>0$ tal que $\|\gamma_j(t)-\gamma_{j+2}(t)\|=b.t^{\tilde{\alpha}}+o(t^{\tilde{\alpha}})$. Como:

$$\|\gamma_j(t)-\gamma_{j+2}(t)\|\geq\sum_{i\neq j,j+1}\|\gamma_i(t)-\gamma_{i+1}(t)\|\Rightarrow b.t^{\tilde{\alpha}}+o(t^{\tilde{\alpha}})\geq\sum_{i\neq j,j+1}(a_i.t^{\alpha_i}+o(t^{\alpha_i}))$$

Segue que existe $i\neq\{j,j+1\}$ tal que $\alpha_i=\tilde{\alpha}$. Se $i=j-1$, de modo análogo temos que existe $i\neq\{j,j-1\}$ tal que $\alpha_i=\tilde{\alpha}$. Em todo caso, podemos considerar índices $1<k_1\leq k_2<n-1$ tais que $\alpha_{k_1}=\cdots=\alpha_{k_2}=\alpha$, $\alpha_{k_1-1}<\alpha$ e $\alpha_{k_2+1}<\alpha$, rotulando $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ como $\gamma_{1+l},\ldots,\gamma_{n+l}$, se necessário (índices módulo n). O resto da demonstração é totalmente análogo ao que foi feito no Caso 2.3.3.

Como todos os casos foram comtemplados, a prova está finalmente completa. □

7.3 Resultado principal

Teorema 7.3.1. *Seja* $(X,0) \subset (\mathbb{R}^3,0)$ *um germe de superfície semialgébrica normalmente mergulhado.*

1. *Se o link de X é homeomorfo a* $[0,1]$*, então* $(X,0)$ *é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe de um* α*-triângulo de Hölder padrão mergulhado em* $\mathbb{R}^3$*, com vértice principal na origem, para algum racional* $\alpha \geq 1$.
2. *Se o link de X é homeomorfo a* $\mathbb{S}^1$*, então* $(X,0)$ *é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da* β*-corneta padrão* $(H_\beta,0)$*, para algum racional* $\beta \geq 1$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.3, é suficiente demonstrar equivalência bi-Lipschitz ambiente para $X \subset C_a^3$, $a > 0$. Da Proposição 6.2.5, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente a uma superfície poligonal (aberta ou fechada) LNE em $(C_a^3,0)$.

- Se $X(t) \simeq [0,1]$, pela Proposição 7.2.1, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe de uma superfície 1-gonal aberta, e pela Proposição 5.2.3, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe de um α-triângulo de Hölder padrão mergulhado em $\mathbb{R}^3$, com vértice principal na origem, para algum racional $\alpha \geq 1$.
- Se $X(t) \simeq \mathbb{S}^1$, pela Proposição 7.2.1, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe de uma superfície 3-gonal fechada, e pela Proposição 6.2.4, $(X,0)$ é bi-Lipschitz ambiente equivalente ao germe da β-corneta padrão $(H_\beta,0)$, para algum racional $\beta \geq 1$.

□

Corolário 7.3.2. *Seja* $(X,0) \subset (\mathbb{R}^3,0)$ *germe de superfície semialgébrica fechada. Assuma que X é LNE, tem singularidade isolada na origem e link conexo. Se* $(X,0)$ *é bi-Lipschitz exterior equivalente a* $(Y,0)$*, então* $(X,0)$ *e* $(Y,0)$ *são ambiente bi-Lipschitz equivalentes.*

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta tese demonstramos que a classificação de superfícies semialgébricas normalmente mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ com link simples (isto é, homeomorfa a um círculo ou a um segmento) é determinada pelo tipo topológico de seu link. Para provar tal resultado, estabelecemos as definições de triângulos sincronizados no Capítulo 4, de isotopia bi-Lipschitz ambiente no Capítulo 5, reduzimos a análise do problema a superfícies formada por triângulos sincronizados lineares no Capítulo 6, e usamos triangulações de link para reduzir o número desses triângulos e aplicar indução.

Os conceitos e ferramentas desenvolvidos nos Capítulos 4, 5 e 6 podem ser generalizados facilmente para englobar germes de triângulos sincronizados em ${C_a}^{n+1}$, para $n > 2$, ao introduzir n-uplas de famílias de funções geradoras. Entretanto, a redução do número de lados de uma superfície poligonal não pode ser realizada usando a técnica de triangulação do link vista no Capítulo 7. De fato, existem superfícies LNE em ${C_a}^4$ que são bi-Lipschitz exterior equivalentes, mas não são ambiente bi-Lipschitz equivalentes! Um exemplo, baseado nas observações do Prof. Dr. Edson Sampaio, é a seguinte superfície em C_{2023}^4 cujo link é homeomorfo a um nó de trevo, visto que em toda triangulação dele sempre há arestas desse link que intersectam cada uma das faces. Mais precisamente, para cada $t > 0$, considere os pontos:

$$A_1(t) = (5t\sqrt{3}, 3t, 3t, t)\ ;\ A_2(t) = (-4t\sqrt{3}, 6t, 3t, t)\ ;\ A_3(t) = (-t\sqrt{3}, -9t, 3t, t)$$

$$B_1(t) = (-4t\sqrt{3}, -6t, -3t, t)\ ;\ B_2(t) = (5t\sqrt{3}, -3t, -3t, t)\ ;\ B_3(t) = (-t\sqrt{3}, 9t, -3t, t)$$

Considere também:

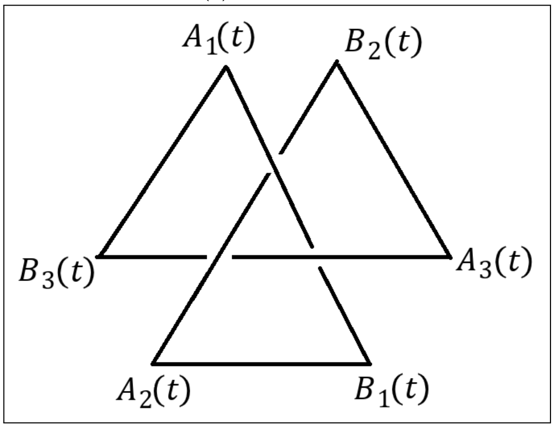
$$X(t) = \overline{A_1(t)B_1(t)} \cup \overline{B_1(t)A_2(t)} \cup \overline{A_2(t)B_2(t)} \cup \overline{B_2(t)A_3(t)} \cup \overline{A_3(t)B_3(t)} \cup \overline{B_3(t)A_1(t)}$$

Finalmente, defina $X = (\cup_{t>0} X(t)) \cup \{0\}$. Não é difícil ver que X possui link plano conexo, homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ e normalmente mergulhado, donde $(X,0)$ é LNE, pelo Teorema 2.2.22. Ademais, pelo Teorema 2.3.24, $(X,0)$ é bi-Lipschitz intrínseca equivalente a $(H_\beta, 0)$, para algum $\beta \geq 1$ racional. Como o cone tangente de X na origem é X, ele não tem densidade 0 na origem, donde $\beta = 1$. Segue, do mergulho normal, que $(X,0)$ é bi-Lipschitz exterior equivalente ao germe na origem de:

$$\{(x, y, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \geq 0\ ;\ x^2 + y^2 = t^2\}$$

Entretanto, tais germes de superfícies não são ambiente bi-Lipschitz equivalentes, pois não são ambiente topologicamente equivalentes, já que o link de X é um nó não trivial.

Figura 37 – Representação Gráfica de $X(t)$



Fonte: elaborado pelo autor.

Tal exemplo mostra que obstruções topológicas são obstáculos ao uso da técnica de triangulação, e que eles são parte importante numa eventual estrutura canônica da classificação Lipschitz ambiente dos germes de superfícies. Por outro lado, a rigidez de curvas complexas subanalíticas em $\mathbb{C}^2$, quando vistas como superfícies planas em $\mathbb{R}^4$ mediante a projeção canônica, ou as variedades determinantais, (veja, por exemplo, (KERNER *et al.*, 2018)) podem ser casos particulares valiosos que revelem alguma técnica inovadora que permita resolver o problema em dimensões maiores.

A extensão da classificação bi-Lipschitz ambiente de superfícies em $\mathbb{R}^3$ com link isomorfo a um grafo em geral não foi discutido nesta tese, mas o autor acredita que uma possível demonstração envolve a aplicação direta do caso particular visto aqui, com alguns possíveis lemas técnicos, nos moldes do Capítulo 3, que visam “colar” aplicações bi-Lipschitz, com a finalidade de estender a aplicação para mais de uma aresta ou face do respectivo complexo de Hölder geométrico.

Outra observação bastante interessante é a seguinte: ao demonstrar o teorema principal, na verdade construímos uma isotopia de aplicações bi-Lipschitz ambiente que levam os germes de superfícies normalmente mergulhadas em cornetas ou triângulos de Hölder, o que é muito mais geral do que o problema proposto originalmente. Isso suscita uma quarta equivalência bi-Lipschitz relacionada a isotopia ambiente. De modo mais preciso, dizemos que dois conjuntos $X,Y \in \mathbb{R}^n$ são bi-Lipschitz ambiente isotópicos se existe uma aplicação contínua $\varphi : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que, denotando $\varphi_\tau(p) = \varphi(p,\tau)$, cada aplicação $\varphi_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é bi-

Lipschitz, $\varphi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$ e $\varphi_1(X) = Y$. Uma questão natural é saber sob que condições equivalência bi-Lipschitz ambiente implica isotopia bi-Lipschitz ambiente, e a análise desse problema pode representar um grande avanço na conexão entre geometria Lipschitz e teoria dos nós, visto que no caso normalmente mergulhado estudado nessa tese, tais equivalências geram a mesma classificação.

Por fim, convém notar que as regiões delimitadas por triângulos sincronizados foram cruciais para a resolução do problema de classificação bi-Lipschitz ambiente de superfícies normalmente mergulhadas, uma vez que é sempre possível decompor convenientemente o ambiente em tais objetos, que são as envoltórias de suporte dos triângulos amassáveis. Para superfícies não normalmente mergulhadas, entretanto, tal decomposição com envoltórias de suporte não existem. Porém, o autor acredita existir um conceito análogo ao dessas envoltórias onde o lema de isotopia bi-Lipschitz ainda pode ser utilizado e onde possamos decompor a superfície num número finito dessas regiões, determinando assim um teorema de finitude para a classificação bi-Lipschitz ambiente em superfícies semialgébricas em $\mathbb{R}^3$. A homologia moderadamente descontínua, descrita em (BOBADILLA *et al.*, 2022), mostra-se uma ferramente extremamente promissora nesse sentido.

REFERÊNCIAS

BIRBRAIR, L. Local bi-lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets. **Houston Journal of Mathematics**, v. 25, p. 20, 1999.

BIRBRAIR, L.; BRANDENBURSKY, M.; GABRIELOV, A. Lipschitz geometry of surface germs in $\mathbb{R}^4$: metric knots. **Selecta Mathematica**, v. 29, n. 3, p. 43, 2023.

BIRBRAIR, L.; COSTA, J.; FERNANDES, A.; RUAS, M. K-bi-lipschitz equivalence of real function-germs. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 135, n. 4, p. 1089–1095, 2007.

BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A.; GABRIELOV, A.; GRANDJEAN, V. Lipschitz contact equivalence of function germs in $\mathbb{R}^2$. **Annali della Scuola normale superiore di Pisa: classe di scienze**, v. 18, p. 81–92, 2017.

BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A.; JELONEK, Z. On the extension of bi-lipschitz mappings. **Selecta Mathematica**, v. 27, n. 2, p. 15, 2021.

BIRBRAIR, L.; GABRIELOV, A. Ambient lipschitz equivalence of real surface singularities. **International Mathematics Research Notices**, v. 2019, n. 20, p. 6347–6361, 2019.

BIRBRAIR, L.; GABRIELOV, A. Surface singularities in $\mathbb{R}^4$: first steps towards lipschitz knot theory. *In*: NEUMANN, W.; PICHON, A. (ed.). **Introduction to Lipschitz geometry of singularities**. lecture notes of the International School on Singularity Theory and Lipschitz Geometry, Cuernavaca, June 2018: Springer, 2020, (Lecture Notes in Mathematics, 2280). p. 157–166.

BIRBRAIR, L.; MENDES, R. Arc criterion of normal embedding. *In*: SANTOS, R. N. A. d. *et al.* (ed.). **Singularities and foliations**. geometry, topology and applications: BMMS 2/NBMS 3, Salvador, Brazil, 2015: Springer, 2018, (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 222). p. 549–553.

BIRBRAIR, L.; MOSTOWSKI, T. Normal embeddings of semialgebraic sets. **Michigan Mathematical Journal**, v. 47, n. 1, p. 125–132, 2000.

BIRBRAIR, L.; SOBOLEVSKY, M. Normal embeddings of semialgebraic sets. **Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques**, v. 8, n. 1, p. 35–44, 1999.

BOBADILLA, J. F. D.; HEINZE, S.; PEREIRA, M. P.; SAMPAIO, J. E. Moderately discontinuous homology. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 75, n. 10, p. 2123–2200, 2022.

COSTE, M. **An introduction to o-minimal geometry**. [*S.l.*]: Istituti editoriali e poligrafici internazionali Pisa, 2000.

COSTE, M. **An introduction to semialgebraic geometry**. [*S.l.*]: Istituti editoriali e poligrafici internazionali Pisa, 2000.

DAHLEH, M.; DAHLEH, M. A.; VERGHESE, G. Lectures on dynamic systems and control. **A+ A**, v. 4, n. 100, p. 1–100, 2004.

DRIES, l. van den. **Tame topology and o-minimal structures**. [*S.l.*]: Cambridge university press, 1998. v. 248.

FERNANDES, A. Topological equivalence of complex curves and bi-lipschitz maps. **Michigan Mathematical Journal**, v. 51, n. 3, p. 593–606, 2003.

FERNANDES, A.; SAMPAIO, J. E.; SILVA, J. P. Hölder equivalence of complex analytic curve singularities. **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 50, n. 5, p. 874–886, 2018.

KERNER, D.; PEDERSEN, H. M.; RUAS, M. A. Lipschitz normal embeddings in the space of matrices. **Mathematische Zeitschrift**, v. 290, n. 1-2, p. 485–507, 2018.

KURDYKA, K. On a subanalytic stratification satisfying a whitney property with exponent 1. *In*: COSTE, M.; MAHÉ, L.; ROY, M.-F. (ed.). **Real algebraic geometry**. proceedings of the conference held in Rennes, France, June 24-28, 1991: Berling: Springer-Verlag, 1992. (Lecture Notes in Mathematics, 1524), p. 316–322.

KURDYKA, K.; ORRO, P. Distance géodésique sur un sous-analytique. **Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid**, v. 10, n. Special Issue, suppl., p. 173–182, 1997.

LEE, J. **Introduction to topological manifolds**. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 202.

LOJASIEWICZ, S. Triangulation of semi-analytic sets. **Annali della Scuola normale superiore di Pisa: classe di scienze**, v. 18, n. 4, p. 449–474, 1964.

MENDES, R.; SAMPAIO, J. E. On link of lipschitz normally embedded sets. **arXiv preprint arXiv:2101.05572**, 2021. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2101.05572. Acesso em: 03/12/2022.

MOSTOWSKI, T. Lipschitz equisingularity. **Warszawa: instytut matematyczny polskiej akademi**, 1985.

NEUMANN, W.; PICHON, A. Lipschitz geometry of complex curves. **Journal of Singularities**, v. 10, p. 225–234, 2014.

NEYMAN, A. Real algebraic tools in stochastic games. **Stochastic Games and Applications**, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, v. 570, p. 57–75, 2003.

PARUSIŃSKI, A. Lipschitz stratification of subanalytic sets. **Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure**, v. 27, n. 6, p. 661–696, 1994.

PHAM, F.; TEISSIER, B. Fractions lipschitziennes d'une algèbre analytique complexe et saturation de zariski, par frédéric pham et bernard teissier. **HAL**, v. 1969, 1969.

SAMPAIO, J. E. Bi-lipschitz homeomorphic subanalytic sets have bi-lipschitz homeomorphic tangent cones. **Selecta Mathematica**, v. 22, p. 553–559, 2016.

SHIOTA, M. Geometry of subanalytic and semialgebraic sets. **Real Analytic and Algebraic Geometry**, p. 251, 1997.

VALETTE, G. The link of the germ of a semi-algebraic metric space. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 135, n. 10, p. 3083–3090, 2007.