UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

DAVI LOPES ALVES DE MEDEIROS

SEQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIA E CLASSIFICAÇÃO DE 3-MULTICONJUNTOS SOB EQUIVALÊNCIA COMBINATÓRIA

FORTALEZA

2018

DAVI LOPES ALVES DE MEDEIROS

SEQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIA E CLASSIFICAÇÃO DE 3-MULTICONJUNTOS SOB EQUIVALÊNCIA COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Teoria dos Números

Orientador: Prof. Dr. Lev Birbrair

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M438s Medeiros, Davi Lopes Alves de.
Sequências de ressonância e classificação de 3-multiconjuntos sob equivalência combinatória / Davi Lopes Alves de Medeiros. – 2018.
42 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Lev Birbrair.

1. Sequências de ressonância. 2. Equivalência combinatória. 3. Decomposição focal. 4. Equivalência focal. 5. Algoritmo de Alvarez. I. Título.

CDD 510

DAVI LOPES ALVES DE MEDEIROS

SEQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIA E CLASSIFICAÇÃO DE 3-MULTICONJUNTOS SOB EQUIVALÊNCIA COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Teoria dos Números

Aprovada em: 16/02/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lev Birbrair (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Yuri Gomes Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-brasileira (UNILAB)

À Deus, pela dádiva de me fazer conhecer a Matemática, o alfabeto que Ele usou para escrever o Universo.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo milagre da minha existência, e por me amar em todos os momentos, mesmo sendo eu um mero pecador mortal, mas que admira a Sua Divina Perfeição, transcrita em todas as coisas, especialmente nas fórmulas e argumentos matemáticos.

Aos meus pais, Francisca e Tarciso, por todo o amor, educação, paciência e dedicação que devotaram a mim durante toda a minha vida. Agradeço ainda ao meu irmão Daniel, pelos sábios conselhos, à minha irmã Débora, pelo apoio em todos os momentos, e à minha irmã caçula Dâmaris, um presente de Deus, que nesse pouco tempo já conquistou meu coração com sua personalidade doce e forte.

À minha amada noiva, Valeska Kilvia, por ter sido uma pessoa compreensível, serena e determinada a me ajudar sempre no que preciso. Quero cuidar de você com tudo o que eu puder, pois tu és a esposa, o tesouro dado por Deus mesmo, eque o nosso amor deve ser preservado por toda a eternidade.

À todos os professores da Universidade Federal do Ceará, sejam aqueles que lecionaram a mim ou não, e também aos meus amigos e colegas de universidade. Guardo-os com apreço em meu coração.

Ao meu orientador Lev Birbrair, por acreditar sempre em mim, me forçando a ir alem dos meus limites, e admoestando-me quando era necessário.

Aos professores Alexandre Fernandes, Yuri Lima e Rodrigo Mendes, sou grato por conseguirem um espaço em suas agendas tão lotadas, para comporem a banca examinadora.

Às secretárias Andréia e Jessyca, pela agilidade e pela disposição em colocar os trâmites desta dissertação em ordem. À bibliotecária Diana Flor, por todo o auxílio prestado em ajustar esta dissertação para atender às normas técnicas.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"Então disse eu: melhor é a sabedoria do que a força, ainda que a sabedoria do pobre foi desprezada, e as suas palavras não foram ouvidas."(Bíblia King James, 1611, Eclesiastes 9:16)

RESUMO

Nesta dissertação é estudado o problema da classificação dos multiconjuntos sob a equivalência combinatória. Inicialmente é feita uma breve apresentação da decomposição focal de equações diferenciais de segunda ordem, sendo indicada as origens das sequências de ressonância. A seguir, são mostrados alguns resultados preliminares, e depois é apresentado o algoritmo de Alvarez, juntamente com outros resultados devotados às sequências de ressonância. Finalmente, é demonstrado o critério completo de classificação dos multiconjuntos com 3 elementos sob a equivalência combinatória, critério esse que é equivalente a um sistema de equações dependendo diretamente do número de multiconjuntos.

Palavras-chave: sequências de ressonância; equivalência combinatória; decomposição focal; equivalência focal; algoritmo de Alvarez.

ABSTRACT

In this master's dissertation we study the problem of classification of multisets under combinatorial equivalence. We begin with a short presentation of the focal decomposition of second order differential equations, showing the origins of the resonance sequences. Then, we give some preliminary results, and after that we present the Alvarez Algorithm, together with other results regarding resonance sequences. Finally, we prove the complete criterion of classification of multisets with 3 elements up to combinatorial equivalence, by showing this is equivalent to a system of equations depending directly of the numbers in the multisets.

Keywords: resonance sequences; combinatorial equivalence; focal decomposition; focal equivalence; Alvarez algorithm.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considere um número finito de n números positivos $a_1,\ldots,a_n$. Seja R a união de todos os múltiplos positivos de cada a_i. Ao colocar os elementos de R em ordem crescente, cada elemento pode aparecer repetidas vezes, de modo que cada elemento possui uma multiplicidade, i.e. o número de progressões aritméticas contendo esse elemento. A sequência de tais multiplicidades é chamada de sequência de ressonância gerada pelo multiconjunto $\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Dizemos ainda que dois conjuntos de números positivos são combinatorialmente equivalentes se eles geram a mesma sequência de ressonância. O objetivo desta dissertação é estudar o problema da classificação dos multiconjuntos sob a equivalência combinatória. De maneira mais específica, o objetivo principal deste trabalho é a classificação completa dos multiconjuntos de 3 elementos sob a equivalência combinatória.

O conceito de equivalência combinatória surgiu inicialmente no contexto da decomposição focal de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, conceito esse que foi definido pela primeira vez por Peixoto em (PEIXOTO, 1982), e cuja definição é a seguinte:

Definição 1.0.1. *Considere a equação diferencial de segunda ordem $x'' = F(x,x',t)$, onde $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ é uma função contínua. Seja $\Sigma_i(F)$ o conjunto dos pontos $(x_1,x_2,t_1,t_2)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tais que o problema com dois valores de fronteira:*

$$\begin{cases} x'' = F(x,x',t) \\ x(t_1) = x_1 \\ x(t_2) = x_2 \end{cases}$$

possui exatamente i soluções (podemos ter $i=0$ ou $i=\infty$). A partição:

$$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n+2} = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma_i(F)\right)\cup\Sigma_\infty(F)$$

é a decomposição focal de $\mathbb{R}^{2n+2}$ por F.

O conceito de decomposição focal é, a grosso modo, a formalização do conceito geométrico de focalização, tão importante no estudo das oscilações, da acústica e das formas quadráticas binárias. Um entendimento aprofundado de tais aplicações, dentre outras, pode ser encontrado no trabalho de Peixoto, em (PEIXOTO, 1997). Um problema recorrente envolvendo decomposições focais é saber quando duas equações diferenciais de segunda ordem com duas fronteiras possuem soluções que podem ser continuamente deformadas, preservando o total de raízes no processo. Isso motiva a definição de equivalência focal.

Definição 1.0.2. *Dizemos que duas equações diferenciais de segunda ordem $x'' = F(x,x',t)$ e $x'' = G(x,x',t)$ são focalmente equivalentes se existe um homeomorfismo $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que, para todo $i = 0,1,\ldots,\infty$, $H(\Sigma_i(F)) = \Sigma_i(G)$. Se o homeomorfismo H puder ser escrito como:*

$$H(x_1,x_2,t_1,t_2) = (H_{(t_1,t_2)}(x_1,x_2), h(t_1,t_2))$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo, e $H_{(t_1,t_2)} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ é uma família de homeomorfismos que depende continuamente de (t_1,t_2), dizemos que $x'' = F(x,x',t)$ e $x'' = G(x,x',t)$ são fortemente focalmente equivalentes.

Em (BIRBRAIR *et al.*, 2003), Birbrair, Sobolevsky e Sobolevskii devotaram-se a estudar a equivalência focal entre as equações lineares de segunda ordem. O resultado principal de tal artigo é o mostrado abaixo:

Teorema 1.0.3. *Considere uma equação diferencial linear de segunda ordem $x'' = a(t)x' + b(t)x$, onde $a(t), b(t)$ são funções contínuas. Então, uma das duas afirmações é verdadeira:*

(1) Essa equação é fortemente focalmente equivalente à equação $x'' = -x$.
(2) Existe um inteiro não negativo k tal que essa equação é fortemente focalmente equivalente à restrição da equação $x' = -x$ em $(-\frac{\pi}{2} - k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

Ademais, dada uma função contínua $c(t)$, a equação diferencial linear de segunda ordem $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ é focalmente equivalente a $x'' = a(t)x' + b(t)x$.

O Teorema 1.0.3 foi generalizado por Birbrair, Alvarez, Berend e Girão em (ALVAREZ *et al.*, 2009) para operadores lineares autoadjuntos em $\mathbb{R}^n$. A generalização é a seguinte:

Teorema 1.0.4. *Sejam $L, M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operadores lineares autoadjuntos. Suponha que $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ sejam os autovalores negativos de L e $\delta_1,\ldots,\delta_m$ sejam os autovalores negativos de M (tais autovalores não necessariamente são distintos). Defina os multiconjuntos:*

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_l}} \right\}, A' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-\delta_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{-\delta_m}} \right\}$$

Então, as equações diferenciais lineares de segunda ordem $x'' = Lx$ e $x'' = Mx$ são fortemente focalmente equivalentes se, e somente se, $l = m$ e A, A' geram a mesma sequência de ressonância.

Graças ao Teorema 1.0.4, classificar tais equações diferenciais de segunda ordem requer o conhecimento da classificação de multiconjuntos através da equivalência combinatória. Ainda em (BIRBRAIR *et al.*, 2003), diversos resultados sobre sequências de ressonância foram demonstrados, sendo o principal deles o Algoritmo de Alvarez, que demonstra que, sob determinadas condições, a sequência de ressonância determina de maneira única a sequência que a gera.

Entretanto, uma mesma sequência de ressonância pode ser gerada por mais de um multiconjunto. O trabalho em (BIRBRAIR *et al.*, 2015) mostra diversos exemplos disso, além de fornecer um método para gerar dois multiconjuntos que são combinatorialmente equivalentes, e onde um multiconjunto não é equivalente trivial do outro, ou seja, um conjunto não é obtido através do outro por meio de multiplicação de seus elementos por uma constante positiva ou de uma permutação de seus elementos.

Teorema 1.0.5. *Sejam $x, y, c_1, \dots, c_n$ inteiros positivos, primos entre si 2 a 2, tais que $(y+1)$ é relativamente primo com x e c_i ($i = 1, \dots, n$) e $(x+1)$ é relativamente primo com y e c_i ($i = 1, \dots, n$). Então, os conjuntos:*

$$A = \{y+1, x(y+1), c_1(y+1), \dots, c_n(y+1), y\}$$

$$A' = \{x+1, y(x+1), c_1(x+1), \dots, c_n(x+1), x\}$$

são combinatorialmente equivalentes.

Com isso, percebe-se que há sequências de ressonância geradas por um único multiconjunto, e sequências geradas por mais de um multiconjunto, de modo que é natural se perguntar quais são todos os multiconjuntos que geram uma sequência de ressonância dada. Em (MEDEIROS; BIRBRAIR, 2017), Medeiros e Birbrair responderam completamente a essa pergunta para o caso de multiconjuntos de 3 elementos, e este trabalho disserta justamente sobre tal resultado.

2 NOÇÕES PRELIMINARES

2.1 Divisibilidades, algoritmo da divisão e teorema de Bézout

Nesta seção, veremos as noções preliminares de Teoria dos Números necessárias para o entendimento dos resultados posteriores. As demonstrações aqui presentes foram baseadas no trabalho (SANTOS, 1998), onde podem ser encontrados outros resultados fundamentais em Teoria dos Números.

Definição 2.1.1. *Dados dois inteiros a,b, com $a \neq 0$, dizemos que a divide b se a fração $\frac{b}{a}$ é um número inteiro. Denotamos isso por $a|b$.*

Proposição 2.1.2. *As propriedades abaixo são verdadeiras:*

1. *Para todo inteiro não nulo a, $a|a$;*
2. *Se a é um inteiro não-nulo, e b é um inteiro, e se $a|b$, então $b = 0$ ou $|a| \leq |b|$;*
3. *Se a e b são inteiros não-nulos, e c é inteiro, satisfazendo $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;*
4. *Seja a um inteiro não-nulo, e b,c,x,y inteiros. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|bx+cy$;*

Demonstração.

1. De fato, $\frac{a}{a} = 1$, que é inteiro.
2. Se $\frac{b}{a} = 0$, então $b = 0$. Caso contrário, como $\frac{b}{a}$ é inteiro, temos $\frac{b}{a} \leq -1$ ou $\frac{b}{a} \geq 1$. Em ambos os casos, $\frac{|b|}{|a|} \geq 1$, donde $|b| \geq |a|$.
3. Se $a|b$ e $b|c$, então as frações $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{b}$ são inteiras. Como o produto de dois inteiros é inteiro, temos que $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a}$ também é inteiro, donde $a|c$.
4. Se $a|b$ e $a|c$, então as frações $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ são inteiras. Como o produto de dois inteiros é inteiro, e como x,y são inteiros, temos que $x \cdot \frac{b}{a} = \frac{bx}{a}$ e $y \cdot \frac{c}{a} = \frac{cy}{a}$ também são inteiros, donde $\frac{bx}{a} + \frac{cy}{a} = \frac{bx+cy}{a}$ também é inteiro. Concluímos, pois, que $a|bx+cy$.

□

O teorema a seguir é o Algoritmo da Divisão. A principal ideia para demonstrá-lo é o uso da propriedade arquimediana dos números naturais: para todo inteiro não negativo x e para todo inteiro positivo y, existe um número inteiro positivo n tal que $ny > x$ (uma análise mais profunda acerca da propriedade arquimediana pode ser encontrada em (LIMA, 2010)).

Teorema 2.1.3. *Sejam a,b inteiros, com $b > 0$. Existem inteiros q e r tais que $a = qb + r$ e $0 \leq r < b$. Além disso, q e r são únicos.*

Demonstração. Considere, para todo m inteiro, os intervalos $B_m = [mb,(m+1)b)$. Observe que, para todo n inteiro positivo, $\bigcup_{i=-n}^{n-1} B_i = [-nb,nb)$. Ademais, pela Propriedade Arquimediana, existe N inteiro positivo tal que $Nb > |a|$, donde $a \in [-Nb,Nb) = \bigcup_{i=-N}^{N-1} B_i$. Assim, existe um inteiro $q \in [-N,N-1)$ tal que $a \in B_q$.

Se $r = a - qb$, então $a = qb + r$ e, pelo fato de que $a \in B_q = [qb,(q+1)b)$, temos que $qb \leq a < qb + b$, donde $0 \leq r < b$. Isso demonstra a existência de q e r.

A fim de demonstrar a unicidade, suponha que $a = qb + r = q'b + r'$, onde q,q',r,r' são inteiros, e $0 \leq r,r' < b$. Dessa forma, $\frac{r-r'}{b} = q' - q$, donde $b|r-r'$. Como $0 - b < r - r' < b - 0$, temos que $|r - r'| < |b|$, e assim, pela Proposição 2.1.2, item 2, $r - r' = 0$, ou seja, $r = r'$. Daí, $\frac{0}{b} = q' - q$, donde $q = q'$ e a unicidade está provada. □

Definição 2.1.4. *Dados dois inteiros a,b, não todos nulos, definimos o máximo divisor comum de a e b como sendo o menor inteiro positivo d tal que $d|a$ e $d|b$ e denotamos tal divisor comum por $d = mdc(a,b)$.*

Observação 2.1.5. *Observe que a definição é consistente, pois 1 divide tanto a como b, donde $mdc(a,b) \geq 1$. Ademais, o fato de que a,b não sejam todos nulos é necessário, pois se $a = b = 0$. então $mdc(a,b)$ não está definido, um vez que todo inteiro positivo pode dividir 0. É fácil ver, ainda, que $mdc(n,0) = |n|$, para todo inteiro não nulo n.*

O teorema a seguir é o Teorema de Bézout, e é graças a ele que podemos escrever m$dc(a,b)$ como uma combinação linear de a e b.

Teorema 2.1.6. *Sejam a,b inteiros, não todos nulos. Então, existem inteiros x,y tais que $mdc(a,b) = ax + by$.*

Demonstração. Seja S o conjunto de todos os números positivos da forma $ax + by$, com x,y inteiros. S é não vazio, pois $a.a + b.b = a^2 + b^2$ é inteiro positivo, logo está em S, uma vez que a e b não são todos nulos. Dessa forma, S possui um menor elemento d.

Provaremos que $d|a$ por contradição. Supondo o contrário, temos que, pelo Algoritmo da Divisão, existem inteiros q,r, com $0 < r < d$, tais que $a = qd + r$. O fato de $d \in S$ implica a existência de inteiros x_0,y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$. Com isso, podemos escrever $r = a - qd = a(1 - qx_0) + b(-qy_0)$. Como $1 - qx_0, -qy_0$ são inteiros, e como $r > 0$, obtemos

$r \in S$. Isso é um absurdo, pois $r < d$, e d é o menor elemento de S. Analogamente, d divide b. Então, d é um divisor comum de a e b, donde $d \leq \mathrm{m}dc(a,b)$, devido à maximalidade de $\mathrm{m}dc(a,b)$.

Por outro lado, dado que $\mathrm{m}dc(a,b)$ divide a e b, podemos escrever $a = \mathrm{m}dc(a,b) \cdot a_0$ e $b = \mathrm{m}dc(a,b) \cdot b_0$, com a_0, b_0 inteiros. Assim, $d = ax_0 + by_0 = \mathrm{m}dc(a,b) \cdot (a_0x_0 + b_0x_0) \geq \mathrm{m}dc(a,b)$, pois $(a_0x_0 + b_0x_0)$ é inteiro positivo. Portanto, $d = \mathrm{m}dc(a,b)$ e a demonstração está concluída. $\square$

2.2 Números primos e o teorema fundamental da aritmética

Definição 2.2.1. *Dizemos que um inteiro positivo p é um número primo se existem exatamente dois inteiros positivos d tais que $d|p$: 1 e p.*

O lema a seguir é conhecido como o Lema de Euclides, e ele será de suma importância para os resultados posteriores.

Lema 2.2.2. *Sejam a, b inteiros e p um primo tal que $p|ab$. Então, $p|a$ ou $p|b$.*

Demonstração. Se $p|a$, o teorema é trivial. Caso contrário, $\mathrm{m}dc(a,p) = 1$, pois as únicas possibilidades para $\mathrm{m}dc(a,p)$ são 1 e p (os únicos divisores positivos do primo p), e $\mathrm{m}dc(a,p)$ não é p, pois p não divide a. Assim, pelo Teorema 2.1.6, existem inteiros x, y tais que $ax + py = 1$. Assim, o fato de que $p|ab$ implica $p|abx + pby$, ou seja, $p|b(ax + py)$, donde $p|b$, demonstrando o lema. $\square$

Corolário 2.2.3. *Suponha que $a_1, \ldots, a_n$ são inteiros e p seja um primo tal que $p|a_1 \ldots a_n$. Então, $p|a_i$, para algum $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Indução em n. O caso $n = 1$ é trivial e o caso $n = 2$ é o Lema 2.2.2. Supondo que o corolário vale para $n = k$, temos que, se p é um primo em que $p|a_1 \ldots a_k a_{k+1}$, então $p|(a_1 \ldots a_k)a_{k+1}$, donde, pelo Lema 2.2.2, $p|a_{k+1}$ ou $p|a_1 \ldots a_k$. Se o último caso ocorre, então por hipótese de indução $p|a_i$, para algum $i = 1, \ldots k$. Concluímos que $p|a_i$, para algum $i = 1, ..., k+1$, provando o resultado por indução. $\square$

O resultado a seguir é o Teorema Fundamental da Aritmética, e sua importância na Teoria dos Números é crucial, pois ele nos diz que todo inteiro maior que 1 pode ser decomposto de modo único em primos. Para se ter uma vaga ideia da importância desse resultado, todo divisor de um natural pode ser construído através dos primos dele, além de que a soma dos divisores e a função totiente pode ser expressa mediante a fatoração única em primos. Outros resultados de natureza similar podem ser encontrados em (SANTOS, 1998).

Teorema 2.2.4. *Todo inteiro positivo $n > 1$ pode ser escrito como produto de números primos. Ademais, tal fatoração em primos é única, a menos da ordem dos fatores primos.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos a existência da fatoração por indução forte em n. O caso inicial $n = 2$ é evidente, pois 2 é primo. Suponha agora que, para todo $1 < k < n$, k pode ser escrito como o produto de números primos. Se n é primo, então o resultado segue automaticamente por indução. Caso contrário, como 1 e n são divisores de n, e n não é primo, existe um divisor d de n tal que $1 < d < n$. Assim, podemos escrever $n = dn_0$, com $1 < n_0 < n$, e, por hipótese de indução, podemos escrever d e n_0 como produto de primos, donde $dn_0 = n$ é produto de primos. Portanto, a existência do produto em primos está provada por indução.

Para provar que a fatoração de n é única, a menos da ordem dos fatores primos, faremos indução no número s de fatores primos de n. Para $s = 1$, temos que se $n = p_1$ é primo, e se $n = q_1 \dots q_r$ é uma outra forma de se escrever n como produto de primos, então $r = 1$, pois caso contrário, n teria ao menos 3 divisores: 1, n e $1 < q_1 < n$, donde n não é primo, absurdo. Daí $r = 1$ e $n = p_1 = q_1$ tem fatoração única.

Suponha agora que, para todo n com menos de s fatores primos, n é escrito de maneira única como o produto de primos. Agora, dado $n = p_1 \dots p_s$, se existe outra maneira de se escrever n como produto de primos $n = q_1 \dots q_r$, então $p_s | q_1 \dots q_r$. Pelo Corolário 2.2.3, $p_s | q_i$, para algum $i = 1, \dots, r$. Como não se leva em consideração a ordem dos primos no produto, pode-se supor, sem perda de generalidade, que $p_s | q_r$. Como q_r é um primo e $p_s > 1$ é divisor de q_r, então $p_s = q_r$, donde $\frac{n}{p_s} = p_1 \dots p_{s-1} = q_1 \dots q_{r-1}$, e por hipótese de indução, $r - 1 = s - 1$ e $\{p_1, \dots, p_{s-1}\} = \{q_1, \dots, q_{r-1}\}$. Daí, $r = s$ e $\{p_1, \dots, p_s\} = \{q_1, \dots, q_r)\}$. Portanto, o resultado segue por indução. □

Se ordenarmos os primos em ordem crescente, e juntarmos todos os fatores primos iguais numa mesma potência de primo, obtemos a Fatoração Canônica.

Corolário 2.2.5. *Todo inteiro positivo n pode ser escrito de maneira única como:*

$$n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha(j)}$$

onde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ são os fatores primos que dividem n, e $\alpha(j)$ são inteiros positivos, para todo $j = 1,\ldots,k$. Se desejarmos que o produtório contenha algum primo p_j que não divida n, basta tomarmos $\alpha(j) = 0$.

2.3 Máximo divisor comum e mínimo mútiplo comum de vários naturais

Definição 2.3.1. *Dado um conjunto finito $S = \{a_1,\ldots,a_n\}$ de inteiros positivos, definimos o máximo divisor comum de $a_1,\ldots,a_n$ como sendo o maior inteiro positivo d tal que d divide a_i, para todo $i = 1,\ldots,n$. Denotamos o máximo divisor comum por $d = mdc(a_1,\ldots,a_n)$.*

Observação 2.3.2. *$mdc(a_1,\ldots,a_n)$ está bem definido, pois 1 divide a_i, para todo $i = 1,\ldots,n$, donde $mdc(a_1,\ldots,a_n) \geq 1$.*

Definição 2.3.3. *Dado um conjunto finito $S = \{a_1,\ldots,a_n\}$ de inteiros positivos, definimos o mínimo múltiplo comum de $a_1,\ldots,a_n$ como sendo o menor inteiro positivo d tal que d é divisível por a_i, para todo $i = 1,\ldots,n$. Denotamos o mínimo múltiplo comum por $d = mmc(a_1,\ldots,a_n)$.*

Observação 2.3.4. *Observe que $mmc(a_1,\ldots,a_n)$ está bem definido, pois o produto de todos os números a_i, $i = 1,\ldots,n$, é divisível por cada inteiro positivo a_i, para todo $i = 1,\ldots,n$, donde $mmc(a_1,\ldots,a_n) \leq a_1a_2\ldots a_n$.*

A proposição a seguir mostra como se calcula o *mdc* e o *mmc* de vários naturais, em função de seus fatores primos.

Proposição 2.3.5. *Suponha que, para todo $i = 1,\ldots,n$, os números a_i possuem a fatoração canônica:*

$$a_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha(i,j)}$$

Onde $p_1 < \cdots < p_k$ são números primos, p_k é o maior fator primo que aparece na fatoração dos números $a_1,\ldots,a_n$, e os números $\alpha(i,j)$ são inteiros não negativos. Então:

$$mdc(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{m(j)}$$

$$mmc(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)}$$

onde, para todo $j = 1,\ldots,k$:

$$m(j) = min\{\alpha(1,j),\ldots,\alpha(n,j)\}$$

$$M(j) = max\{\alpha(1,j),\ldots,\alpha(n,j)\}$$

Demonstração. Primeiro será demonstrado a identidade relacionada ao mdc. Note que se q é um fator primo de m$dc(a_1,\ldots,a_n)$, então q divide $a_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha(i,j)}$, o que significa que, pelo Corolário 2.2.3, $q = p_j$, para algum $j = 1,\ldots,k$. Portanto, pelo Corolário 2.2.5, podemos escrever m$dc(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\beta(j)}$, com $\beta(j) \geq 0$ inteiro, para todos $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$.

Se, para algum $r \in \{1,\ldots,k\}$, $\beta(r) > m_r$, então escolha $s \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\alpha(s,j) = m_j$. Daí, como $p_r^{\beta(r)}|$m$dc(a_1,\ldots,a_n)$ e m$dc(a_1,\ldots,a_n)|a_s$, concluímos que, da Proposição 2.1.2, item 3, $p_r^{\beta(r)}|a_s$, donde:

$$\frac{a_s}{p_r^{\beta(r)}} = \frac{\prod_{j=1}^{k} p_j^{\beta(j)}}{p_r^{\beta(r)}} = \frac{\prod_{j=1,j\neq r}^{k} p_j^{\beta(j)}}{p_r^{\beta(r)-m_r}}$$

é inteiro. Assim, $p_r^{\beta(r)-m_r}$ divide $\prod_{j=1,j\neq r}^{k} p_j^{\beta(j)}$. Como $p_r|p_r^{\beta(r)-m_r}$ (pois $\beta(r) - m_r \geq 1$), temos, da Proposição 2.1.2, item 3, $p_r|\prod_{j=1,j\neq r}^{k} p_j^{\beta(j)}$, donde, pelo Corolário 2.2.3, $p_r = p_j$, para algum $j \neq r$, um absurdo. Assim, $\beta(j) \leq m_j$, para todo $j = 1,\ldots k$, e com isso m$dc(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\beta(j)} \leq \prod_{j=1}^{k} p_j^{m(j)}$.

Finalmente, $\prod_{j=1}^{k} p_j^{m(j)}$ é um divisor comum de $a_1,\ldots,a_n$, pois, para todo $i = 1,\ldots,n$:

$$\frac{a_i}{\prod_{j=1}^{k} p_j^{m(j)}} = \frac{\prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha(i,j)}}{\prod_{j=1}^{k} p_j^{m(j)}} = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha(i,j)-m(j)}$$

que é inteiro, pois $\alpha(i.j) \geq m_j =$ m$in\{\alpha(1,j),\ldots,\alpha(n,j)\}$. Isso demonstra que m$dc(a_1,\ldots,a_n) \geq \prod_{j=1}^{k} p_j^{m(j)}$, donde m$dc(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{m(j)}$.

A fim de demonstrar a segunda afirmação, note que, para todo $j = 1,\ldots,k$, se $s \in \{1,\ldots,n\}$ é tal que $\alpha(s,j) = M(j)$, então $p_j^{M(j)}|a_s$ e $a_s|$m$mc(a_1,\ldots,a_n)$, donde, da Proposição

2.1.2, item 3, $p_j^{M(j)}|\text{m}mc(a_1,\ldots,a_n)$. Assim, podemos escrever $\text{m}mc(a_1,\ldots,a_n) = A\cdot\prod_{j=1}^{k} p_j^{B(j)}$, onde cada $B(j)$ é um inteiro não-negativo e A é um inteiro que não contém nenhum fator p_j $(j=1,\ldots,k)$. Daí, temos que $B(j)\geq M(j)$, para cada $j=1,\ldots,k$. De fato, se existe $r\in\{1,\ldots k\}$ tal que $B(r)<M(r)$, então, do fato que $p_r^{M(r)}|\text{m}mc(a_1,\ldots,a_n)$, temos que:

$$\frac{\text{m}mc(a_1,\ldots,a_n)}{p_r^{M(r)}} = \frac{A\cdot\prod_{j=1}^{k} p_j^{B(j)}}{p_r^{M(r)}} = \frac{A\cdot\prod_{j=1,j\neq r}^{k} p_j^{B(j)}}{p_r^{M(r)-B(r)}}$$

é inteiro. Assim, como $p_r|p_r^{M(r)-B(r)}$ (pois $M(r)>B(r)$) e $p_r^{M(r)-B(r)}|A\cdot(\prod_{j=1,j\neq r}^{k} p_j^{B(j)})$, temos que, da Proposição 2.1.2, item 3, $p_r|A\cdot(\prod_{j=1,j\neq r}^{k} p_j^{B(j)})$. Notando que p_r não divide A (pois A não possui fatores primos p_j), temos que, do Lema 2.2.2, $p_r|\prod_{j=1,j\neq r}^{k} p_j^{B(j)}$, donde, pelo Corolário 2.2.3, $p_r|p_j$, para algum $j\neq r$, um absurdo. Portanto, $B(j)\geq M(j)$, para todo $j=1,\ldots,k$ e assim $\text{m}mc(a_1,\ldots,a_n) = A\cdot\prod_{j=1}^{k} p_j^{B(j)} \geq \prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)}$.

Por outro lado, $\prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)}$ é um múltiplo comum de $a_1,\ldots a_n$. Com efeito, para cada $i=1,\ldots,n$:

$$\frac{\prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)}}{a_i} = \frac{\prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)}}{\prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha(i,j)}} = \prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)-\alpha(i,j)}$$

que é inteiro, pois $M(j)\geq\alpha(i,j)$. Assim, $\prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)} \geq \text{m}mc(a_1,\ldots,a_n)$ e, do que foi exposto antes, $\text{m}mc(a_1,\ldots,a_n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{M(j)}$, demonstrando a segunda afirmação. $\square$

O lema abaixo servirá para demonstrar a proposição seguinte, que será de grande valia para os resultados principais desta dissertação. Outras generalizações de tal proposição podem ser encontradas em (VALCAN; BAGDASAR, 2009).

Lema 2.3.6. *Dados três números reais a,b,c,s seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $max\{a,b\} = a+b-min\{a,b\}$;

2. $max\{a,b,c\} = a+b+c-min\{a,b\}+min\{b,c\}+min\{c,a\})+min\{a,b,c\}$.

Demonstração. 1. Suponha, sem perda de generalidade, $a \geq b$. Então, $\mathrm{m}ax\{a,b\} = a$ e $\mathrm{m}in\{a,b\} = b$, donde $\mathrm{m}ax\{a,b\} = a = a+b-b = a+b-\mathrm{m}in\{a,b\}$.

2. Suponha, sem perda de generalidade, $a \geq b \geq c$. Então, $\mathrm{m}ax\{a,b,c\} = a$, $\mathrm{m}in\{a,b\} = b$, $\mathrm{m}in\{b,c\} = c$, $\mathrm{m}in\{c,a\} = c$ e $\mathrm{m}in\{a,b,c\} = c$ donde $\mathrm{m}ax\{a,b,c\} = a = a+b+c-b-c-c+c = a+b+c-\mathrm{m}in\{a,b\}-\mathrm{m}in\{b,c\}-\mathrm{m}in\{c,a\}+\mathrm{m}in\{a,b,c\}$.

□

Proposição 2.3.7. *Dados três inteiros positivos x,y,z, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

$$mmc(x,y) = \frac{xy}{mdc(x,y)}$$

$$mmc(x,y,z) = \frac{xyz.mdc(x,y,z)}{mdc(x,y).mdc(y,z).mdc(z,x)}$$

Demonstração. Considere as fatorações canônicas de x,y,z:

$$x = \prod_{j=1}^{k} p_j^{x(j)}, y = \prod_{j=1}^{k} p_j^{y(j)}, z = \prod_{j=1}^{k} p_j^{z(j)}$$

De modo que, pela Proposição 2.3.5 e pelo Lema 2.3.6, temos:

$$\mathrm{m}mc(x,y) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\mathrm{m}ax(x(j),y(j))} = \prod_{j=1}^{k} p_j^{x(j)+y(j)-\mathrm{m}in(x(j),y(j))} = \frac{\prod_{j=1}^{k} p_j^{x(j)} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{y(j)}}{\prod_{j=1}^{k} p_j^{\mathrm{m}in(x(j),y(j))}} = \frac{xy}{\mathrm{m}dc(x,y)}$$

e

$$\mathrm{m}mc(x,y,z) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\mathrm{m}ax(x(j),y(j),z(j))} =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} p_j^{x(j)+y(j)+z(j)-\mathrm{m}in(x(j),y(j))-\mathrm{m}in(y(j),z(j))-\mathrm{m}in(z(j),x(j))+\mathrm{m}in(x(j),y(j)),z(j)} =$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{k} p_j^{x(j)} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{y(j)} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{z(j)} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{\mathrm{m}in(x(j),y(j),z(j)}}{\prod_{j=1}^{k} p_j^{\mathrm{m}in(x(j),y(j))} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{\mathrm{m}in(y(j),z(j))} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{\mathrm{m}in(z(j),x(j))}} = \frac{xyz \cdot \mathrm{m}dc(x,y,z)}{\mathrm{m}dc(x,y) \cdot \mathrm{m}dc(y,z) \cdot \mathrm{m}dc(z,x)}$$

□

2.4 Parte inteira de número real

Definição 2.4.1. *Dado um número real x, definimos a parte inteira de x como sendo o maior número inteiro que é menor ou igual a x, e denotamos tal inteiro por $\lfloor x \rfloor$.*

Proposição 2.4.2. *Dados x, y reais e n inteiro, as afirmações abaixo são verdadeiras:*

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ *e* $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$;
2. $\lfloor x \rfloor = x$ *se, e somente se,* x *é inteiro;*
3. $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$;
4. $\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) = 0$ *ou* 1;
5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

Demonstração.

1. $\lfloor x \rfloor \leq x$ segue imediatamente da definição. Se $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x$, então $\lfloor x \rfloor + 1$ é um inteiro menor ou igual a x, donde, pela maximalidade de $\lfloor x \rfloor$, temos $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + 1$, um absurdo. Portanto, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. As desigualdades $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ seguem diretamente das desigualdades demonstradas anteriormente.
2. Se $\lfloor x \rfloor = x$, então x é inteiro pela definição do inteiro $\lfloor x \rfloor$. Por outro lado, se x é inteiro, então x é o maior inteiro menor ou igual a x, donde $\lfloor x \rfloor = x$.
3. Da afirmação $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, segue que $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$, donde $\lfloor x \rfloor + n$ é o maior inteiro menor ou igual a $x + n$ (pois n é inteiro). Assim, $\lfloor x \rfloor + n = \lfloor x + n \rfloor$.
4. Inicialmente, note que $\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor)$ é um inteiro. Ademais, da primeira afirmação:

$$x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leq x + y$$

$$-x \geq -\lfloor x \rfloor < -x + 1$$

$$-y \geq -\lfloor y \rfloor < -y + 1$$

   Somando as três cadeias de inequações, obtemos $-1 < \lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) < 2$, ou seja, $\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor)$ é um inteiro no intervalo $(-1, 2)$, ou seja, é 0 ou 1.
5. Da primeira afirmação, temos que, para todo n inteiro positivo, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$, ou seja, $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$. Como $\lim_{n\to\infty}(x - \frac{1}{n}) = x$ e $\lim_{n\to\infty} x = x$, temos que, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

□

Proposição 2.4.3. *Sejam x, L números reais positivos. O número de múltiplos positivos de x no intervalo $[0, L]$ é igual a* $\left\lfloor \dfrac{L}{x} \right\rfloor$.

Demonstração. Se $x, \ldots, nx$ são todos os múltiplos positivos de x em $[0, L]$, então $nx \geq L$ e $L < (n+1)x$, donde $n \leq \frac{L}{x} < n+1$ e, pela definição, $n = \left\lfloor \dfrac{L}{x} \right\rfloor$ é a quantidade pedida. $\square$

3 SEQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIA E EQUIVALÊNCIA COMBINATÓRIA

3.1 Definições e propriedades básicas

Definição 3.1.1. *Seja n um inteiro positivo e considere um multiconjunto finito de reais positivos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Para cada $i = 1, \dots, n$, seja A_i o conjunto de todos os múltiplos inteiros e positivos de a_i:*

$$A_i = \{a_i, 2a_i, 3a_i, \dots\}, 1 \leq i \leq n$$

Seja $Q = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Q é um conjunto infinito e enumerável, e seus elementos podem ser escritos em ordem crescente:

$$Q = \{m_j : j \in \mathbb{N}\}, (m_1 < m_2 < \dots < m_r < \dots)$$

Seja $ind(m_j) = \{1 \leq i \leq n : m_j \in A_i\}$ e seja ainda $r_j = |ind(m_j)|$. Os números r_j são inteiros satisfazendo $1 \leq r_j \leq n$. A sequência $Ress(A) = (r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é definida como a sequência de ressonância de $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. O número n é chamado de dimensão do multiconjunto A.

Exemplo 3.1.2. *Considere o conjunto $A = \{3, 5, 6\}$. O conjunto dos múltiplos inteiros positivos de A é:*

$$Q = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30, \dots\}$$

de modo que a sequência de ressonância de A é:

$$Ress(A) = 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3, \dots$$

Exemplo 3.1.3. *Considere o conjunto $A = \{2, \sqrt{5}, 3\}$. O conjunto dos múltiplos inteiros positivos de A é:*

$$Q = \{2, \sqrt{5}, 3, 4, 2\sqrt{5}, 6, 3\sqrt{5}, 8, 4\sqrt{5}, 9, 10, 5\sqrt{5}, 12, 6\sqrt{5} \dots\}$$

de modo que a sequência de ressonância de A é:

$$Ress(A) = 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1 \dots$$

Exemplo 3.1.4. *Considere o conjunto $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$. É fácil ver que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i \neq j$, e com isso a sequência de ressonância de A é:*

$$Ress(A) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

Tais exemplos motivam a seguinte definição:

Definição 3.1.5. *Um multiconjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é definido como totalmente racional se $\alpha_i/\alpha_j \in \mathbb{Q}$, para todos i, j; A é definido como totalmente irracional se $\alpha_i/\alpha_j \notin \mathbb{Q}$, para todos $i \neq j$; A é definido como semirracional ele não é totalmente racional, nem totalmente irracional.*

O principal objeto de estudo desta dissertação é a equivalência combinatória, definida abaixo:

Definição 3.1.6. *Dados dois multiconjuntos A e A' de mesma dimensão, dizemos que eles são combinatorialmente equivalentes se $Ress(A) = Ress(A')$, i.e. eles geram a mesma sequência de ressonância.*

Observe que a equivalência combinatória define uma relação de equivalência no conjunto de todos os multiconjuntos de mesma dimensão. Ademais, é fácil ver que, para $c > 0$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $cA = \{ca_1, \ldots, ca_n\}$ são combinatorialmente equivalentes. Também, é fácil ver que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $A' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$, onde $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$ é uma permutação de $\{a_1, \ldots, a_n\}$, são combinatorialmente equivalentes. Qualquer equivalência combinatória que seja uma dessas duas formas é chamada de equivalência combinatória trivial. Nosso principal interesse é estudar equivalências não triviais entre multiconjuntos.

Outro conceito, que será útil na classificação de multiconjuntos sob a equivalência combinatória, é a definição de ordem de uma sequência de ressonância.

Definição 3.1.7. *Seja A um multiconjunto de reais positivos, e $Ress(A)$ sua sequência de ressonância. Definimos a ordem de $Ress(A)$ como sendo o maior inteiro positivo que aparece em $Ress(A)$.*

Note que tal definição acima é consistente, pois se n é a dimensão de A, então cada elemento de $Ress(A)$ é um inteiro positivo entre 1 e n.

Exemplo 3.1.8. *Considere o conjunto $A = \{3, 5, 6\}$. Vimos anteriormente que:*

$$Ress(A) = 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3, \ldots$$

de modo que a ordem de $Ress(A)$ é igual a 3.

Exemplo 3.1.9. *Considere o conjunto $A = \{2, \sqrt{5}, 3\}$. Vimos anteriormente que:*

$$Ress(A) = 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1 \ldots$$

de modo que a ordem de $Ress(A)$ é igual a 2.

Exemplo 3.1.10. *Considere o conjunto $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$. Vimos anteriormente que:*

$$Ress(A) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

de modo que a ordem de $Ress(A)$ é igual a 1.

Uma consequência simples da definição de ordem é a proposição abaixo.

Proposição 3.1.11. *Um multiconjunto A, de dimensão n, é totalmente racional se, e somente se, a ordem de $Ress(A)$ é igual a n.*

Demonstração. Se $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é totalmente racional, então $a_i/a_j \in \mathbb{Q}$, para todos $1 \leq i < j \leq n$. Assim, para cada $1 \leq i \leq n$, existem inteiros positivos p_i, q_i tais que $a_i/a_1 = p_i/q_i$. Tomando $c = \frac{q_1 \cdots q_n}{a_1}$, temos $k_i = ca_i = c \cdot a_1 \cdot \frac{a_i}{a_1} = \frac{q_1 \cdots q_n}{a_1} \cdot a_1 \cdot \frac{p_i}{q_i} = p_i(q_1 \ldots q_{i-1}q_{i+1} \ldots q_n)$, ou seja, k_i é inteiro, para $i = 1, \ldots, n$. Daí, A é trivialmente combinatorialmente equivalente ao multiconjunto de inteiros positivos $A' = \{k_1, \ldots, k_n\}$.

Seja $m = k_1 \ldots k_n$ e $m_i = m/k_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Então, $m_i \in \mathbb{N}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Note que $m = (m/k_i) \cdot k_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$, donde $\text{ind}(m) = n$, ou seja, a ordem de $Ress(A')$ é pelo menos n. Como tal ordem é no máximo n, então ela é igual a n.

Reciprocamente, dado o multiconjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que a ordem de $Ress(A)$ é igual a n, existe $m > 0$ tal que $|ind(m)| = n$, o que implica na existência de inteiros positivos $t_1, \ldots, t_n$ tais que $m = t_1a_1 = \cdots = t_na_n$, donde $a_i/a_j = t_j/t_i \in \mathbb{Q}$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Portanto, A é totalmente racional. $\square$

O teorema a seguir dá uma caracterização completa da sequência de ressonância de um conjunto totalmente irracional.

Teorema 3.1.12. *Todos os multiconjuntos totalmente irracionais são combinatorialmente equivalentes entre si, e um multiconjunto totalmente irracional é combinatorialmente equivalente a apenas outro multiconjunto irracional. Ademais, a ordem da sequência de ressonância de qualquer multiconjunto totalmente irracional é igual a 1.*

Demonstração. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ um multiconjunto totalmente irracional. Note que se a sequência de ressonância de A possuir um número $k > 1$, então existe $x > 0$ tal que $k = |ind(x)| > 1$, donde existem inteiros $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, e inteiros positivos p, q tais que $pa_i = qa_j = x$. Dessa forma, $a_i/a_j = q/p \in \mathbb{Q}$, uma contradição. Portanto, todos os multiconjuntos totalmente irracionais A satisfazem $Ress(A) = 1,1,1,\ldots$.

Reciprocamente, dado um multiconjunto A tal que $Ress(A) = 1,1,1,\ldots$, teríamos que, para todos $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, com $i \neq j$, $a_i/a_j \notin \mathbb{Q}$, pois do contrário, existiriam $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $pa_i = qa_j = x$, e assim $|\text{ind}(x)| \geq 2$, uma contradição. Isso posto, temos que todos os multiconjuntos totalmente irracionais são equivalentes entre si, e cada multiconjunto totalmente irracional é combinatorialmente equivalente a apenas outro multiconjunto irracional, uma vez que a sequência de ressonância de cada um deles é $1,1,1,\ldots$, e todo multiconjunto A com $Ress(A) = 1,1,1,\ldots$ é, necessariamente, totalmente irracional. □

Corolário 3.1.13. *Seja A um multiconjunto de dimensão n. As afirmações abaixo são verdadeiras:*

- *A é totalmente racional se, e somente se, a ordem de $Ress(A)$ é n;*
- *A é totalmente irracional se, e somente se, a ordem de $Ress(A)$ é 1;*
- *A é semirracional, e somente se, a ordem de $Ress(A)$ é maior que 1 e menor que n;*

Para finalizar, considere um multiconjunto A totalmente racional e de dimensão n. Um escólio da demonstração da Proposição 3.1.11 é que existe um multiconjunto de inteiros positivos $A_0 = \{a_1,\ldots,a_n\}$ que é trivialmente combinatorialmente equivalente ao multiconjunto inicial. Se $d = \text{m}dc(a_1,\ldots,a_n)$ e se $a_i' = a_i/d$, para $i = 1,\ldots,n$, então A_0 é trivialmente combinatorialmente a $A_0' = \{a_1',\ldots,a_n'\}$. Repare que $\text{m}dc(a_1',\ldots,a_n') = 1$ e que A e A_0' são combinatorialmente equivalentes. Essas observações motivam a seguinte definição:

Definição 3.1.14. *Seja A um multiconjunto totalmente racional de dimensão n, trivialmente equivalente a $A_0 = \{a_1,\ldots,a_n\}$, onde $a_1,\ldots,a_n$ são inteiros positivos satisfazendo $mdc(a_1,\ldots,a_n) = 1$. Definimos A_0 como a forma canônica de A.*

Observe ainda que, a menos da ordem dos elementos no multiconjunto, a forma canônica de um multiconjunto totalmente racional é única.

Exemplo 3.1.15. *Seja $A = \{\sqrt{2}/2, 5\sqrt{2}, 3\sqrt{2}/4, 2\sqrt{2}\}$. A forma canônica de A é $A_0 = \{2,20,3,8\}$.*

Analisemos um multiconjunto semirracional com 3 elementos. É evidente que, para todo multiconjunto semirracional $A = \{a_1,a_2,a_3\}$, existe uma permutação $A' = \{a_1',a_2',a_3'\}$ tal que $a_1'/a_2' \in \mathbb{Q}$, e um único número $c > 0$ tal que $n_1 = ca_1'$, $n_2 = ca_2'$ e $\lambda = ca_3'$, onde n_1, n_2

são inteiros positivos primos entre si, e λ é um número irracional. Note que $\{a_1, a_2, a_3\}$ e $\{n_1, n_2, \lambda\}$ são trivialmente combinatorialmente equivalentes. Essas observações motivam a seguinte definição.

Definição 3.1.16. *Seja A um multiconjunto semirracional, trivialmente equivalente a $A_0 = \{n_1, n_2, \lambda\}$, onde n_1, n_2 são inteiros positivos primos entre si e $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Definimos o multiconjunto A_0 como sendo a forma canônica de A.*

Exemplo 3.1.17. *Seja $A = \{7\sqrt{2}/2, 5\sqrt{2}, 3\sqrt{6}\}$. A forma canônica de A é $A_0 = \{7, 10, 6\sqrt{3}\}$.*

Finalmente, considere um multiconjunto totalmente racional $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, onde todos os a_i são inteiros positivos, e seja Q como na Definição 3.1.1. É claro que, para $x \in \mathbb{N}$, $M = \text{m}mc(a_1, \ldots, a_n)$ e $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x + tM \in \mathbb{N}$, temos que $x \in Q$ implica $x + tM \in Q$, e $\text{i}nd(x) = \text{i}nd(x + tM)$. Isso prova que $Ress(A)$ é um sequência periódica. Também, M é o primeiro $y \in Q$ tal que $|\text{i}nd(y)| = n$. Dessa forma, $Ress(A)$ é completamente determinado pelos números até o primeiro n aparecer, pois a partir daí $Ress(A)$ vai começar a se repetir. Isso motiva mais uma nova definição.

Definição 3.1.18. *Seja A um multiconjunto totalmente racional. Definimos a palavra fundamental de A como a subsequência de $Ress(A)$, começando pelo primeiro termo e terminando na primeira ocorrência de n.*

Exemplo 3.1.19. *Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$, a palavra fundamental de A é* $1, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 2, 1, 4$.

Evidentemente, dois multiconjuntos totalmente racionais A e A' de inteiros positivos e de mesma dimensão são combinatorialmente equivalentes se, e somente se, suas palavras fundamentais são iguais.

3.2 Algoritmo de Alvarez e estrutura de blocos

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um multiconjunto com $n > 2$ inteiros positivos e considere sua palavra fundamental. Os passos descritos abaixo constituem o Algoritmo de Alvarez, descrito pela primeira vez em (ALVAREZ *et al.*, 2009):

Passo 1: Se não existe $(n-1)$ na palavra fundamental, marque o número n e seja S_1 a soma dos números da palavra fundamental. Caso exista $(n-1)$, encontre a primeira ocorrência de $(n-1)$ na palavra fundamental e marque-a. Daí, calcule a soma dos números da palavra fundamental, desde o primeiro número até o número marcado, e denote essa soma por S_1. Começando pelo número seguinte ao $(n-1)$ marcado, calcule a soma dos termos da sequência de ressonância até que ela seja S_1 ou (S_1+1), o que ocorrer primeiro, e pare nesse termo da sequência, marcando-o. Recomeçando pelo número seguinte ao último número marcado, calcule a soma dos termos da sequência de ressonância até que ela seja S_1 ou (S_1+1), o que ocorrer primeiro, e pare nesse termo da sequência, marcando-o. Repita isso até o fim da palavra fundamental, marcando o número n no fim.

Esses números marcados dividem a palavra fundamental em blocos. Essa partição é chamada de estrutura de bloco do passo 1.

Para $2 \leq k \leq n$, o passo k é feito da forma a seguir:

Passo k: Se não existe $(n-1)$ que ainda não foi marcado na palavra fundamental nos passos anteriores, marque o número n e seja S_k a soma dos números da palavra fundamental. Caso exista $(n-1)$ que ainda não foi marcado, encontre a primeira ocorrência desse $(n-1)$ na palavra fundamental e marque-a. Daí, calcule a soma dos números da palavra fundamental, desde o primeiro número até esse número marcado, e denote essa soma por S_k. Começando pelo número seguinte ao $(n-1)$ marcado logo antes, calcule a soma dos termos da sequência de ressonância até que ela seja S_k ou (S_k+1), o que ocorrer primeiro, e pare nesse termo da sequência, marcando-o. Recomeçando pelo número seguinte ao último número marcado, calcule a soma dos termos da sequência de ressonância até que ela seja S_k ou (S_k+1), o que ocorrer primeiro, e pare nesse termo da sequência, marcando-o. Repita isso até o fim da palavra fundamental, marcando o número n no fim.

Os números marcados nesse passo dividem a palavra fundamental em blocos. Essa partição é chamada de estrutura de bloco do passo k.

Exemplo 3.2.1. *Seja $A = \{2,3,5\}$. A palavra fundamental de A é:*

$$1,1,1,1,2,1,1,2,2,1,2,1,2,2,1,1,2,1,1,1,1,3$$

Aplicando o algoritmo de Alvarez, temos as três estruturas de blocos:

$$(1,1,1,1,2),(1,1,2,2),(1,2,1,2),(2,1,1,2),(1,1,1,1,3)$$

$$(1,1,1,1,2,1,1,2),(2,1,2,1,2,2),(1,1,2,1,1,1,1,3)$$

$$(1,1,1,1,2,1,1,2,2,1,2),(1,2,2,1,1,2,1,1,1,1,3)$$

Note que $S_1 = 6, S_2 = 10, S_3 = 15$.

Exemplo 3.2.2. *Seja* $A = \{3,3,5\}$. *A palavra fundamental de A é:*

$$2,1,2,2,1,2,3$$

Aplicando o algoritmo de Alvarez, temos as três estruturas de blocos:

$$(2),(1,2),(2),(1,2),(3)$$

$$(2,1,2,2,1,2,3)$$

$$(2,1,2,2,1,2,3)$$

Note que $S_1 = 2, S_2 = S_3 = 13$.

Para $1 \leq i \leq n$, defina $m_i = \mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)$, e seja:

$$K_i = \frac{\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_n)}{\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)} = \frac{\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_n)}{m_i} \tag{3.1}$$

Finalmente, considere os números K_i postos em ordem decrescente, obtendo a sequência $L_1 \geq \cdots \geq L_n$. O teorema a seguir, demonstrado em (BIRBRAIR *et al.*, 2015), relaciona os números L_i e a quantidade de blocos em cada estrutura de blocos obtidas pelo algoritmo de Alvarez.

Teorema 3.2.3. *As seguintes assertivas sobre as estruturas em blocos em uma palavra fundamental de um multiconjunto A com* $n > 2$ *inteiros positivos são verdadeiras:*

- *Todos os blocos terminam em* $(n-1)$ *ou n, e quando um bloco termina em n, é porque ele é o último bloco da estrutura. Também, todo* $(n-1)$ *na palavra fundamental é o fim de exatamente um bloco, dentre todas as estruturas de blocos;*
- *O número de blocos na estrutura de blocos do passo k é igual a* L_k.

Demonstração. Na palavra fundamental de A, cada $(n-1)$ que aparece está associado a um múltiplo de $a_1,\ldots,a_n$ que não é múltiplo de algum a_i, ou seja, cada $(n-1)$ está associado a um múltiplo de $\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n) = m_i$ que não seja $\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_n)$, isto é, cada $(n-1)$ está associado com tm_i, com $1 \leq t < K_i$, para algum $i = 1,\ldots,n$. Repare que o número n da palavra fundamental está associado ao número K_im_i, e repare ainda que não há $(n-1)$

associado simultaneamente a tm_i e a $t'm_j$, para $i \neq j$, pois tm_i não é múltiplo de a_i, mas $t'm_j$ é múltiplo de a_i.

Antes de continuar a demonstração, é necessário usar dois lemas que serão essenciais para a prova desse teorema e dos seguintes.

Lema 3.2.4. *A soma dos elementos da palavra fundamental da sequência de ressonância gerada pelos inteiros positivos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ é igual a:*

$$S = mmc(a_1, \dots, a_n) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) \tag{3.2}$$

Demonstração. A soma dos elementos da sequência de ressonância é igual ao número de múltiplos de a_1 no segmento $(0, mmc(a_1, \dots, a_n)]$, mais o número dos múltiplos de a_2 no mesmo segmento, e assim por diante. O número de múltiplos de a_i nesse intervalo é igual a $mmc(a_1, \dots, a_n)/a_i$, pela Proposição 2.4.3 (uma vez que $mmc(a_1, \dots, a_n)/a_i = \lfloor mmc(a_1, \dots, a_n)/a_i \rfloor$). Isso conclui a demonstração de (3.2). □

Lema 3.2.5. *Seja t um inteiro positivo tal que $t \leq K_i$. A soma dos números da palavra fundamental de A, até o termo que está associado ao número tm_i (termo esse que é $(n-1)$ caso $t < K_i$, ou n, caso $t = K_i$), é igual a:*

$$\left\lfloor \frac{tS}{K_i} \right\rfloor \tag{3.3}$$

Demonstração. A soma dos elementos da palavra fundamental de A, até o termo que está associado ao número tm_i é igual ao número de ocorrências de múltiplos de cada elemento do conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ no intervalo $]0, tm_i]$. Como o número de múltiplos de a_j em $]0, tm_i]$ é $\lfloor tm_i/a_j \rfloor$, pela Proposição 2.4.3, então a soma desejada é:

$$\sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{tm_i}{a_j} \right\rfloor \tag{3.4}$$

Resta-nos provar que as expressões (3.3) e (3.4) são iguais. A equação (3.1) resulta em:

$$\frac{m_i}{a_j} = \frac{mmc(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)}{a_j} \in \mathbb{Z}$$

Para todo $j \neq i$. Utilizando as propriedades da Proposição 2.4.2, podemos deduzir que a soma na equação (3.4) é igual a:

$$\left(\sum_{j\neq i}\frac{tm_i}{a_j}\right)+\left\lfloor\frac{tm_i}{a_i}\right\rfloor=\left\lfloor\left(\sum_{j\neq i}\frac{tm_i}{a_j}\right)+\frac{tm_i}{a_i}\right\rfloor=\left\lfloor\sum_{j=1}^{n}\frac{tm_i}{a_j}\right\rfloor=\left\lfloor tm_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)\right\rfloor=$$

$$=\left\lfloor t\left(\frac{\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_n)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)}{\frac{\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_n)}{\mathrm{m}mc(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)}}\right)\right\rfloor=\left\lfloor\frac{tS}{K_i}\right\rfloor$$

Onde na última igualdade (3.1) e (3.2) foram usadas. $\square$

Voltemos à demonstração do teorema. Provaremos por indução em k que o número de blocos na estrutura do passo k é igual a L_k, e que todo bloco dessa estrutura termina em $(n-1)$ ou n, sendo o bloco que termina em n o último.

Note que o primeiro número selecionado no algoritmo de Alvarez está associado ao número tm_i, para algum $i \in \{1,\ldots,n\}$ e para algum $1 \leq t \leq K_i$. O fato de selecionarmos o primeiro número implica $t = 1$, pois se $t > 1$, então existe um $(n-1)$ associado ao número $(t-1)m_i$, e anterior ao primeiro $(n-1)$, o que seria uma contradição, e que $K_i = L_1$, pois, do Lema 3.2.5, a soma dos elementos da palavra fundamental até o primeiro número marcado (que é $(n-1)$ ou n) é igual a:

$$\left\lfloor\frac{tS}{K_i}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{S}{K_i}\right\rfloor\geq\left\lfloor\frac{S}{L_1}\right\rfloor$$

Onde a igualdade ocorre se, e somente se, $K_i = L_1$, visto que se $K_i < L_1$, a soma $\lfloor S/K_i\rfloor$ tem as mesmas parcelas oriundas da palavra fundamental que a soma $\lfloor S/L_1\rfloor$, mais algumas adicionais (que são aquelas parcelas oriundas da palavra fundamental que estão depois do $(n-1)$ associado ao primeiro bloco de L_1 até o $(n-1)$ associado ao primeiro bloco de K_i). Agora, essa soma é a menor possível, uma vez que selecionamos o primeiro $(n-1)$ (ou n, caso não tenha). Daí, a igualdade de fato ocorre, ou seja, $K_i = L_1$.

No que segue, provaremos por indução em p que a extremidade do p-ésimo bloco da estrutura de bloco do passo 1 está associado ao número pm_i, para $1 \leq t \leq L_1$, e para i tal que $K_i = L_1$. Com isso, provaremos que a extremidade é $(n-1)$, para $t < L_1$, e n, para $t = L_1$, e que a quantidade de blocos na estrutura do passo 1 é igual a L_1.

O caso inicial $p = 1$ já foi feito. Suponha que, para todo $t < p$, a extremidade do t-ésimo bloco da estrutura do passo 1 é o número associado a tm_i. A soma dos termos da palavra fundamental, desde o número seguinte ao $(p-1)$-ésimo $(n-1)$ marcado (que é o número associado a $(p-1)m_i$), até o número associado a pm_i é, pelo Lema 3.2.5:

$$S_1 = \left\lfloor \frac{pS}{L_1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(p-1)S}{L_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{S}{L_1} \right\rfloor + \theta = S_1 + \theta$$

Onde $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, pelo item 4 da Proposição 2.4.2. Logo, tal soma é S_1 ou $S_1 + 1$. Por outro lado, ao calcularmos a soma dos termos da palavra fundamental, a partir do termo seguinte ao $(p-1)$-ésimo $(n-1)$ marcado, temos que, em algum momento, chegaremos a uma soma parcial dos termos da palavra fundamental que é igual a $S_1 + \theta$, que é S_1 ou $S_1 + 1$ (o último termo dessa soma é o número associado a pm_i, que é $(n-1)$ ou n). Além disso, a soma parcial imediatamente anteiror é $S_1 + \theta - (n-1)$ ou $S_1 + \theta - n$. Em ambos os casos, tal valor é menor que S_1, pois $n > 2$.

Isso significa que o número associado a pm_i é o número selecionado no algoritmo de Alvarez, pois ele gera a primeira soma parcial que resulta em S_1 ou $S_1 + 1$. Logo, a extremidade do p-ésimo bloco é $n-1$ ou n, e se for n, é porque é a última extremidade, uma vez que n é o último termo da palavra fundamental. Assim, o caso inicial $k = 1$ está provado por indução em p.

Suponha agora que o resultado do Teorema 3.2.3 vale para todo $t < k$. Note que o primeiro número marcado no passo k está associado ao número tm_i, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ e para algum $1 \leq t \leq K_i$. O fato de selecionarmos tal número implica $t = 1$, pois se $t > 1$, então existe um $(n-1)$ associado ao número $(t-1)m_i$, e anterior ao primeiro $(n-1)$ marcado no passo k, o que seria uma contradição (repare que todos os números que já foram marcados estão associados a todos os números tm_j, para exatamente $(k-1)$ valores de $j \neq i$).

Ademais, $K_i = L_k$, pois do Lema 3.2.5, a soma dos elementos da palavra fundamental até o primeiro número marcado no passo k (que é $(n-1)$ ou n) é igual a:

$$S_k = \left\lfloor \frac{tS}{K_i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{S}{K_i} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{S}{L_k} \right\rfloor$$

Pois todos os termos da palavra fundamental que estão associados a cada tm_i, onde $K_i = L_s$ e $s < k$, já são extremidades de bloco da estrutura de passos anteriores. Veja ainda que a igualdade ocorre se, e somente se, $K_i = S_k$, pois se $K_i < L_k$, então a soma $\lfloor S/K_i \rfloor$ tem as mesmas parcelas oriundas da palavra fundamental que a soma $\lfloor S/L_k \rfloor$, mais algumas adicionais (que são aquelas parcelas oriundas da palavra fundamental que estão depois do $(n-1)$ associado ao primeiro bloco de L_K até o $(n-1)$ associado ao primeiro bloco de K_i). Mas tal soma é a menor possível, uma vez que selecionamos o primeiro $(n-1)$ não marcado (ou n, caso não tenha). Daí, a igualdade ocorre, donde $K_i = L_k$.

Agora, provaremos por indução em p que a extremidade do p-ésimo bloco da estrutura de bloco do passo k está associado ao número pm_i, para $1 \leq t \leq L_k$. Com isso, provaremos que a extremidade é $(n-1)$, para $t < L_k$, e n, para $t = L_k$, e que a quantidade de blocos na estrutura do passo k é igual a L_k.

O caso inicial $p = 1$ já foi feito. Suponha que, para todo $t < p$, a extremidade do t-ésimo bloco da estrutura do passo k é o número associado a tm_i. A soma dos termos da palavra fundamental, desde o número seguinte ao $(p-1)$-ésimo $(n-1)$ marcado (que é o número associado a $(p-1)m_i$), até o número associado a pm_i é, pelo Lema 3.2.5:

$$S_1 = \left\lfloor \frac{pS}{L_k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(p-1)S}{L_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{S}{L_k} \right\rfloor + \theta = S_k + \theta$$

Onde $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, pelo item 4 da Proposição 2.4.2. Logo, tal soma é S_k ou $S_k + 1$. Por outro lado, ao calcularmos a soma dos termos da palavra fundamental, a partir do termo seguinte ao $(p-1)$-ésimo $(n-1)$ marcado, temos que, em algum momento, chegaremos a uma soma parcial dos termos da palavra fundamental que é igual a $S_k + \theta$, que é S_k ou $S_k + 1$ (o último termo dessa soma é o número associado a pm_i, que é $(n-1)$ ou n). Além disso, a soma parcial imediatamente anteiror é $S_k + \theta - (n-1)$ ou $S_k + \theta - n$. Em ambos os casos, tal valor é menor que S_1, pois $n > 2$.

Isso significa que o número associado a pm_i é o número selecionado no algoritmo de Alvarez, pois ele gera a primeira soma parcial que resulta em S_k ou $S_k + 1$. Logo, a extremidade do p-ésimo bloco é $n-1$ ou n, e se for n, é porque é a última extremidade, uma vez que n é o último termo da palavra fundamental. Assim, o resultado segue por indução, demonstrando todas as afirmações do Teorema. □

Exemplo 3.2.6. *Seja $A = \{6, 5, 4\}$. A palavra fundamental de A é:*

$$1,1,1,1,1,2,1,1,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,3$$

Aplicando o algoritmo de Alvarez, temos as três estruturas de blocos:

$$(1,1,1,1,1,2),(1,1,1,2,2),(1,1,2,1,1,2),(2,1,1,1,2),(1,1,1,1,1,3)$$

$$(1,1,1,1,1,2,1,1,1,2),(2,1,1,2,1,1,2,2),(1,1,1,2,1,1,1,1,1,3)$$

$$(1,1,1,1,1,2,1,1,1,2,2,1,1,2),(1,1,2,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,3)$$

Observe que $L_1 = 5, L_2 = 3, L_3 = 2$ *e que* $K_1 = 3 = L_2, K_2 = 5 = L_1, K_3 = 2 = L_3$.

Exemplo 3.2.7. *Seja* $A = \{1,2,6\}$. *A palavra fundamental de A é:*

$$1,2,1,2,1,3$$

Aplicando o algoritmo de Alvarez, temos as três estruturas de blocos:

$$(1,2),(1,2),(1,3)$$

$$(1,2,1,2,1,3)$$

$$(1,2,1,2,1,3)$$

Observe que $L_1 = 3, L_2 = 1, L_3 = 1$ *e que* $K_1 = 1 = L_2, K_2 = 1 = L_3, K_3 = 2 = L_1$.

4 CLASSIFICAÇÃO DOS MULTICONJUNTOS SOB EQUIVALÊNCIA COMBINATÓRIA

4.1 Classificação de multiconjuntos com menos de 3 elementos

A classificação dos multiconjuntos com menos de 3 elementos sob a equivalência combinatória, surpreendentemente, é um problema simples, e pode ser resolvido usando as ideias vistas aqui.

Dado um multiconjunto A de 1 elemento, é fácil ver que A é trivialmente combinatorialmente equivalente a $\{1\}$. Portanto, temos o nosso primeiro resultado de classificação.

Teorema 4.1.1. *Todos os multiconjuntos unitários são combinatorialmente equivalentes.*

Dado um multiconjunto A de 2 elementos, pelo Corolário 3.1.13, temos que A é totalmente irracional ou totalmente racional. No primeiro caso, pelo Teorema 3.1.12, todos os multiconjuntos totalmente irracionais são combinatorialmente equivalentes, restando estudar o segundo caso.

Se $\{n_1, n_2\}$ é a forma canônica de A, então a palavra fundamental de A é $1, \ldots, 1, 2$, onde há exatamente $n_1 + n_2 - 2$ termos iguais a 1, pois, do Lema 3.2.4, a soma dos termos da palavra fundamental é $\mathrm{m}mc(n_1, n_2)(1/n_1 + 1/n_2) = (n_1 n_2)(1/n_1 + 1/n_2) = n_1 + n_2$ (note que, na segunda igualdade, usamos o primeiro item da Proposição 2.3.7, aliado ao fato de que $\mathrm{m}dc(n_1, n_2) = 1$). Como a quantidade de termos 1 define completamente a palavra fundamental, uma vez que nela só há termos 1 e um termo 2, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.2. *Dados dois multiconjuntos de 2 elementos A e A', eles são combinatorialmente equivalentes se, e somente se, uma das duas afirmações é verdadeira:*

1. *A e A' são totalmente irracionais;*
2. *A e A' são totalmente racionais, e se $\{n_1, n_2\}$ e $\{n'_1, n'_2\}$ são as formas canônicas de A e A', respectivamente, então $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$.*

Classificar os multiconjuntos com 3 elementos sob a equivalência combinatória, porém, é uma tarefa muito mais árdua, de modo que o restante da presente dissertação será devotada a esse laborioso papel.

4.2 Classificação de multiconjuntos com 3 elementos

Dado um multiconjunto A de 3 elementos, pelo Corolário 3.1.13, temos que A é totalmente irracional, semirracional ou totalmente racional. No primeiro caso, pelo Teorema 3.1.12, todos os multiconjuntos totalmente irracionais são combitorialmente equivalentes, restando estudar os dois casos seguintes.

O teorema a seguir, demonstrado primeiramente em (ALVAREZ *et al.*, 2009), determina uma classificação dos multiconjuntos semirracionais de 3 elementos sob a equivalência combinatória.

Teorema 4.2.1. *Seja A um multiconjunto semirracional com 3 elementos, com forma canônica $\{n_1, n_2, \lambda\}$. Um multiconjunto de 3 elementos A' é combinatorialmente equivalente a A se, e somente se, A' é semirracional, com forma canônica $\{n'_1, n'_2, \lambda'\}$, e:*

$$n_1 + n_2 + \frac{n_1 n_2}{\lambda} = n'_1 + n'_2 + \frac{n'_1 n'_2}{\lambda'}$$

Demonstração. Suponha inicialmente que A e A' são combinatorialmente equivalentes. Como A é semirracional, então a ordem de $Ress(A)$ é maior que 1 e menor que 3, pelo Corolário 3.1.13. Assim, a ordem de $Ress(A)$ é igual a 2. Do fato de que $Ress(A) = Ress(A')$, temos que a ordem de $Ress(A')$ é 2, que é maior que 1 e menor que 3, donde, pelo Colorário 3.1.13, A' é semirracional. Daí, $A_0 = \{n_1, n_2, \lambda\}$ e $A'_0 = \{n'_1, n'_2, \lambda'\}$ são combinatorialmente equivalentes, onde A'_0 é a forma canônica de A'.

Pela Proposição 2.4.3, a quantidade de múltiplos inteiros positivos de n_1, n_2 e λ no intervalo $(0, L]$, contados com multiplicidade, é igual a:

$$f(L) = \left\lfloor \frac{L}{n_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L}{n_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L}{\lambda} \right\rfloor$$

Repare ainda que, para $k \in \mathbb{N}$, $f(kn_1n_2)$ é igual à soma de todos os termos de $Ress(A)$ até o k-ésimo 2, uma vez que o k-ésimo 2 é gerado necessariamente pelo número kn_1n_2. De modo análogo, a quantidade de múltiplos inteiros positivos de n'_1, n'_2 e λ' no intervalo $(0, L]$, contados com multiplicidade, é igual a:

$$g(L) = \left\lfloor \frac{L}{n'_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L}{n'_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L}{\lambda'} \right\rfloor$$

E que, para $k \in \mathbb{N}$, $g(kn'_1n'_2)$ é igual à soma de todos os termos de $Ress(A')$ até o k-ésimo 2. Como $Ress(A) = Ress(A')$, temos que $f(kn_1n_2) = g(kn'_1n'_2)$. Usando o item 5 da Proposição 2.4.2, temos:

$$\left\lfloor \frac{kn_1n_2}{n_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn_1n_2}{n_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn_1n_2}{\lambda} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{n'_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{n'_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{\lambda'} \right\rfloor \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 + n_2 + \frac{\left\lfloor \frac{kn_1n_2}{\lambda} \right\rfloor}{k} = n'_1 + n'_2 + \frac{\left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{\lambda'} \right\rfloor}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left(n_1 + n_2 + \frac{\left\lfloor \frac{kn_1n_2}{\lambda} \right\rfloor}{k} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(n'_1 + n'_2 + \frac{\left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{\lambda'} \right\rfloor}{k} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 + n_2 + \frac{n_1n_2}{\lambda} = n'_1 + n'_2 + \frac{n'_1n'_2}{\lambda'}$$

Reciprocamente, suponha que A' é semirracional e que $n_1 + n_2 + \frac{n_1n_2}{\lambda} = n'_1 + n'_2 + \frac{n'_1n'_2}{\lambda'}$. Pelo Corolário 3.1.13, temos que $Ress(A')$ tem ordem 2, de modo que $Ress(A')$ só terá 1 e 2, o mesmo acontecendo com $Ress(A)$. Com isso, se demonstrarmos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a quantidade de 1's na sequência $Ress(A)$ entre o $(k-1)$-ésimo 2 e o k-ésimo 2 é igual à quantidade de 1's na sequência $Ress(A')$ entre o $(k-1)$-ésimo 2 e o k-ésimo 2 , então obteremos $Ress(A) = Ress(A')$, demonstrando que A e A' são combinatorialmente equivalentes. Aqui, estamos considerando que, para $k = 1$, a quantidade de 1's entre o $(k-1)$-ésimo 2 e o k-ésimo 2 é igual à quantidade de 1's antes do primeiro 2.

Para todo $k \in \mathbb{Z}$ não-negativo, e pelas propriedades na Proposição 2.4.2:

$$k\left(n_1 + n_2 + \frac{n_1n_2}{\lambda}\right) = k\left(n'_1 + n'_2 + \frac{n'_1n'_2}{\lambda'}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{kn_1n_2}{n_1} + \frac{kn_1n_2}{n_2} + \frac{kn_1n_2}{\lambda} = \frac{kn'_1n'_2}{n'_1} + \frac{kn'_1n'_2}{n'_2} + \frac{kn'_1n'_2}{\lambda'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{kn_1n_2}{n_1} + \frac{kn_1n_2}{n_2} + \frac{kn_1n_2}{\lambda} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{n'_1} + \frac{kn'_1n'_2}{n'_2} + \frac{kn'_1n'_2}{\lambda'} \right\rfloor \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{kn_1n_2}{n_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn_1n_2}{n_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn_1n_2}{\lambda} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{n'_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{n'_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{kn'_1n'_2}{\lambda'} \right\rfloor \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(kn_1n_2) = g(kn'_1n'_2)$$

Pelo mesmo raciocínio da implicação direta, sabemos que a soma de todos os números até o k-ésimo 2 é igual a $f(kn_1n_2)$, donde a quantidade de 1's em $Ress(A)$ entre o $(k-1)$-ésimo 2 e o k-ésimo 2 é igual a $f(kn_1n_2) - f((k-1)n_1n_2) - 2$. Analogamente, a quantidade de 1's em $Ress(A')$ entre o $(k-1)$-ésimo 2 e o k-ésimo 2 é igual a $g(kn'_1n'_2) - g((k-1)n'_1n'_2) - 2$. Como $f(kn_1n_2) - f((k-1)n_1n_2) - 2 = g(kn'_1n'_2) - g((k-1)n'_1n'_2) - 2$, segue o resultado desejado. □

Para completar a classificação dos multiconjuntos com 3 elementos sob a equivalência combinatória, é preciso saber o que acontece com multiconjuntos totalmente racionais. Tendo em mente que a forma canônica de cada um deles são multiconjuntos com todos os termos inteiros positivos, o principal objeto de estudo doravante serão os multiconjuntos formados apenas por inteiros positivos. O principal resultado desta dissertação, demonstrado por Medeiros e Birbrair em (MEDEIROS; BIRBRAIR, 2017), é o seguinte:

Teorema 4.2.2. *Sejam $\{a,b,c\}$ e $\{a',b',c'\}$ dois multiconjuntos de inteiros positivos. Se:*

$$S = mmc(a,b,c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$K_1 = \frac{mmc(a,b,c)}{mmc(b,c)}, K_2 = \frac{mmc(a,b,c)}{mmc(c,a)}, K_3 = \frac{mmc(a,b,c)}{mmc(a,b)}$$

e

$$S' = mmc(a',b',c')\left(\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)$$

$$K'_1 = \frac{mmc(a',b',c')}{mmc(b',c')}, K'_2 = \frac{mmc(a',b',c')}{mmc(c',a')}, K'_3 = \frac{mmc(a',b',c')}{mmc(a',b')}$$

Então os multiconjuntos $\{a,b,c\}$ e $\{a',b',c'\}$ são combinatorialmente equivalentes se, e somente se, $S = S'$ e $\{K_1,K_2,K_3\} = \{K'_1,K'_2,K'_3\}$ como multiconjuntos.

Demonstração. Se os multiconjuntos $\{a,b,c\}$ e $\{a',b',c'\}$ são combinatorialmente equivalentes, então as palavras fundamentais deles são as mesmas. Dessa forma, pelo Lema 3.2.4, $S = S'$, e ao aplicarmos o algoritmo de Alvarez, obtemos que, pelo Teorema 3.2.3, $\{K_1,K_2,K_3\} = \{K'_1,K'_2,K'_3\}$, como multiconjuntos.

Suponha, então, que $S = S'$ e que $\{K_1, K_2, K_3\} = \{K'_1, K'_2, K'_3\}$ como multiconjuntos. A fim de provarmos que $\{a,b,c\}$ e $\{a',b',c'\}$ são combinatorialmente equivalentes, provaremos que, dada uma soma S dos números de uma palavra fundamental e um multiconjunto de 3 elementos $\{K_1, K_2, K_3\}$, que representam a quantidade de estruturas de blocos em uma das 3 estruturas, é possível determinar, de maneira única, a palavra fundamental.

Seja $\{\theta_j\}$ a família de números da forma $\lfloor tS/K_i \rfloor$, para algum t inteiro e para algum $i \in \{1,2,3\}$, pertencentes ao segmento $]0,S]$. Ordene os elementos dessa família em ordem crescente: $\theta_1 < \cdots < \theta_N$. A palavra fundamental $p_1, \ldots, p_m$ será reconstruída da seguinte maneira: Defina $p_0 = 0$ e, para todo $k \geq 0$ inteiro, defina:

$$w(k) = \sum_{i=0}^{k} p_i$$

Para todo $0 < i \leq m$, p_i será construído recursivamente a partir de $p_0, \ldots, p_{i-1}$, ao se definir:

$$p_i = \begin{cases} 3, & \text{se} \quad w(i-1) = \theta_N - 3, \\ 2, & \text{se} \quad w(i-1) = \theta_j - 2, \text{para algum } 1 \leq j < N, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Afirmamos que tal procedimento reconstrói completamente a palavra fundamental. De fato, pelo Lema 3.2.5, todos os números θ_j indicam, por meio da somas parciais w, o fim de cada bloco de qualquer estrutura de bloco, determinando todas as posições possíveis de números 2 e 3 da palavra fundamental. Assim, determinamos os números 2 e 3 da palavra fundamental, que formam uma subsequência $q_1, \ldots, q_N$ na palavra fundamental.

Os elementos iguais a 1 também estão totalmente determinados por meio das somas parciais w, já que a quantidade de elementos iguais a 1 entre dois elementos consecutivos da subsequência $q_1, \ldots, q_s$, $q_s = p_i$ e $q_{s+1} = p_j$, onde $i < j$, é precisamente:

$$\sum_{t=i+1}^{j-1} p_t = \sum_{t=0}^{j-1} p_t - \sum_{t=0}^{i} p_t = w(j-1) - w(i)$$

uma vez que só há números 1 entre os termos da palavra fundamental q_s e q_{s+1}, para todo $1 \leq s < N$ (veja a equação (4.1)). Isso completa a demonstração. $\square$

O Corolário abaixo é uma síntese de todo o trabalho de classificação das sequências de ressonância geradas por multiconjuntos de 3 elementos, e serve como um critério geral de equivalência combinatória.

Corolário 4.2.3. *Seja A um multiconjunto com 3 elementos. Então, um multiconjunto A' com 3 elementos é combinatorialmente equivalente a A se, e somente se, uma das três afirmações é verdadeira:*

1. *A e A' são totalmente irracionais;*
2. *A e A' são semirracionais, com formas canônicas $\{n_1, n_2, \lambda\}$ e $\{n_1', n_2', \lambda'\}$, respectivamente, e:*
$$\frac{n_1 n_2}{\lambda} + n_1 + n_2 = \frac{n_1' n_2'}{\lambda'} + n_1' + n_2'$$
3. *A e A' são totalmente racionais, com formas canônicas $\{a, b, c\}$ and $\{a', b', c'\}$, respectivamente, e:*
$$mmc(a,b,c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = mmc(a',b',c')\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}\right)$$
$$\left\{\frac{mmc(a,b,c)}{mmc(a,b)}, \frac{mmc(a,b,c)}{mmc(b,c)}, \frac{mmc(a,b,c)}{mmc(c,a)}\right\} = \left\{\frac{mmc(a',b',c')}{mmc(a',b')}, \frac{mmc(a',b',c')}{mmc(b',c')}, \frac{mmc(a',b',c')}{mmc(c',a')}\right\}$$

Exemplo 4.2.4. *Seja $A = \{1, 6, 14\}$ e $A' = \{3, 4, 28\}$. Usando as notações do Teorema 4.2.2, temos:*
$$mmc(a,b,c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 42\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}\right) = 52$$
$$mmc(a',b',c')\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}\right) = 84\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) = 52$$
$$\left\{\frac{mmc(a,b,c)}{mmc(a,b)}, \frac{mmc(a,b,c)}{mmc(b,c)}, \frac{mmc(a,b,c)}{mmc(c,a)}\right\} = \left\{\frac{42}{6}, \frac{42}{42}, \frac{42}{14}\right\} = \{1, 3, 7\}$$
$$\left\{\frac{mmc(a',b',c')}{mmc(a',b')}, \frac{mmc(a',b',c')}{mmc(b',c')}, \frac{mmc(a',b',c')}{mmc(c',a')}\right\} = \left\{\frac{84}{3}, \frac{84}{4}, \frac{84}{28}\right\} = \{1, 3, 7\}$$

Logo, A e A' são combinatorialmente equivalentes, mesmo sem precisar calcular as respectivas sequências de ressonância.

O resultado seguinte é extremamente útil para determinar, por meio de cálculos, todos os multiconjuntos de 3 elementos que são combinatorialmente equivalentes a um dado multiconjunto totalmente racional de 3 elementos.

Teorema 4.2.5. *Seja A um multiconjunto totalmente racional de 3 elementos, cuja forma canônica é $\{a,b,c\}$. Defina S,K_1,K_2,K_3 como no Teorema 4.1.1. Então, as seguintes identidades são verdadeiras:*

$$K_1K_2 \cdot mdc(a,b) + K_2K_3 \cdot mdc(b,c) + K_3K_1 \cdot mdc(c,a) = S \tag{4.2}$$

$$a = K_1 \cdot mdc(a,b) \cdot mdc(a,c); \tag{4.3}$$

$$b = K_2 \cdot mdc(b,a) \cdot mdc(b,c); \tag{4.4}$$

$$c = K_3 \cdot mdc(c,a) \cdot mdc(c,b); \tag{4.5}$$

Demonstração. A ideia principal para a demonstração dessas identidades é o uso recorrente das identidades presentes na Proposição 2.3.7. Para demonstrar (4.2), temos que:

$$K_1K_2.\mathrm{m}dc(a,b) + K_2K_3.\mathrm{m}dc(b,c) + K_3K_1.\mathrm{m}dc(c,a) =$$
$$= \sum_{cyc} \left(\frac{\mathrm{m}mc(a,b,c)}{\mathrm{m}mc(b,c)}\right)\left(\frac{\mathrm{m}mc(a,b,c)}{\mathrm{m}mc(c,a)}\right)\mathrm{m}dc(a,b) =$$

$$= \sum_{cyc} \left(\frac{\frac{\mathrm{m}mc(a,b,c)}{bc}}{\mathrm{m}dc(b,c)}\right)\left(\frac{\frac{abc.\mathrm{m}dc(a,b,c)}{\mathrm{m}dc(a,b).\mathrm{m}dc(b,c).\mathrm{m}dc(c,a)}}{\frac{ac}{\mathrm{m}dc(c,a)}}\right)\mathrm{m}dc(a,b) = \sum_{cyc} \frac{\mathrm{m}mc(a,b,c)}{c} = S$$

provando (4.2).

Para demonstrar (4.3), temos que:

$$K_1.\mathrm{m}dc(a,b).\mathrm{m}dc(a,c) = \left(\frac{\mathrm{m}mc(a,b,c)}{\mathrm{m}mc(b,c)}\right).\mathrm{m}dc(a,b).\mathrm{m}dc(a,c) =$$

$$= \left(\frac{\frac{abc.\mathrm{m}dc(a,b,c)}{\mathrm{m}dc(a,b).\mathrm{m}dc(b,c).\mathrm{m}dc(c,a)}}{\frac{bc}{\mathrm{m}dc(b,c)}}\right).\mathrm{m}dc(a,b).\mathrm{m}dc(a,c) = a$$

provando (4.3). As equações (4.4) e (4.5) são demonstradas analogamente. □

Exemplo 4.2.6. *Seja* $A = \{1,6,14\}$*. Uma computação direta resulta em:*

$$S = 52, K_1 = 1, K_2 = 3, K_3 = 7$$

Assim, pelo Teorema 4.2.5, se $A_0 = \{a,b,c\}$*, com* $mdc(a,b,c) = 1$*, é combinatorialmente equivalente a A, então:*

$$3.mdc(a,b) + 21.mdc(b,c) + 7.mdc(c,a) = 52$$

Obtemos $(mdc(a,b), mdc(b,c), mdc(c,a)) = (1,2,1), (8,1,1)$ *ou* $(1,1,4)$*. O primeiro caso implica* $a = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$*,* $b = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$*,* $c = 7 \cdot 1 \cdot 2 = 14$*, donde* $A_0 = \{1,6,14\}$*. O segundo caso implica* $a = 1 \cdot 8 \cdot 1 = 8$*,* $b = 3 \cdot 1 \cdot 8 = 24$*,* $c = 7 \cdot 1 \cdot 1 = 7$*, donde* $A_0 = \{8,24,7\}$*. O terceiro caso implica* $a = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$*,* $b = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$*,* $c = 7 \cdot 4 \cdot 1 = 28$*, donde* $A_0 = \{3,4,28\}$*.*

Não é difícil ver que os valores de S, K_1, K_2, K_3 *são os mesmos para as três possibilidades de* A_0*. Com isso, concluímos que os únicos três multiconjuntos que são combinatorialmente equivalentes a* $\{1,6,14\}$ *são todos os multiconjuntos totalmente racionais com formas canônicas* $\{1,6,14\}$*,* $\{3,4,28\}$ *ou* $\{8,24,7\}$*.*

4.3 Classificação de multiconjuntos com mais de 3 elementos

O Teorema 4.1.1, juntamente com o Teorema **??** e o Teorema 3.1.12, fornecem uma classificação completa para todos os multiconjuntos de 3 elementos sob a equivalência combinatória. Entretanto, é natural perguntar-se qual seria o critério de classificação dos multiconjuntos com $n > 3$ elementos sob a equivalência combinatória. Tal problema ainda permanece em aberto, e o Teorema 4.1.1 não pode ser generalizado de maneira direta para mais do que três elementos, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 4.3.1. *Sejam* $A = \{1,5,5,5\}$ *e* $B = \{1,2,4,4\}$*. Um cálculo direto mostra que* $S = 8, K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1$ *tanto para A como para B. Entretanto, a palavra fundamental de A é* $1,1,1,1,4$ *e a palavra fundamental de B é* $1,2,1,4$*. Assim, A e B não são combinatorialmente equivalentes.*

REFERÊNCIAS

ALVAREZ, S.; BEREND, D.; BIRBRAIR, L.; GIRAO, D. Resonance sequences and focal decomposition. **Israel Journal of Mathematics**, Israel, v. 170, p. 269–284, 2009.

BIRBRAIR, L.; GOMES, M.; PEREIRA, W. Resonance sequences and recoverability. **International Journal of Number Theory**, Singapore, v. 11, n. 02, p. 495–506, 2015.

BIRBRAIR, L.; SOBOLEVSKY, M.; SOBOLEVSKII, P. Focal decompositions for linear differential equations of the second order. **Abstract and Applied Analysis**, United Kingdom, v. 2003, n. 14, p. 813–821, 2003.

LIMA, E. L. **Curso de análise; v.1**. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010. ISBN 978-85-244-0118-3.

MEDEIROS, D. L. A. de; BIRBRAIR, L. Complete classification of 3-multisets up to combinatorial equivalence. **Journal of Number Theory**, United States, v. 174, p. 68–77, 2017.

PEIXOTO, M. On end-point boundary value problems. **Journal of Differential Equations**, United States, v. 44, n. 2, p. 273–280, 1982.

PEIXOTO, M. M. Focal decomposition in geometry, arithmetic, and physics. *In*: APANASOV, B. *et al.* (ed.). **Geometry, Topology and Physics**. proceedings of the first Brazil-USA workshop held in Campinas, Brazil, June 30-July 7, 1996. Berlin: De Gruyter, 1997. p. 213–231.

SANTOS, J. P. de O. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

VALCAN, D.; BAGDASAR, O. D. Generalizations of some divisibility relations in n. **Creative Math. & Inf**, v. 18, p. 1, 2009.