UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAIMUNDO NETO DE SOUSA

RAZÃO E PROPORÇÃO NO ENSINO BÁSICO

FORTALEZA
2023

RAIMUNDO NETO DE SOUSA

RAZÃO E PROPORÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S698r Sousa, Raimundo Neto de.
Razão e proporção no ensino básico / Raimundo Neto de Sousa. – 2023.
76 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo .

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Razão e proporção. 3. Aprendizagem. 4. Base Nacional Comum Curricular . I. Título.

CDD 510

RAIMUNDO NETO DE SOUSA

RAZÃO E PROPORÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 17/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta da Paraíba (UFDPar)

A Deus.

Aos meus pais, Antônio e Maria.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Antonio Victor de Sousa, que sempre será minha maior referência na luta pela vida.

À minha amada mãe, Maria Carneiro de Sousa, que sempre nos incentivou a estudar.

Aos meus irmãos e irmãs, em especial Maria Vilany de Sousa Santos e Francisco Ivonildo de Sousa que estiveram do meu lado no momentos mais difíceis da minha vida, assim como os demais.

À minha minha filha, Amanda Rosa Queiroz Sousa, minha maior riqueza e fonte de inspiração.

Ao GEPEMAC – Grupo de Estudos e Pesquisa em Matemática do Ceará pelas valorosas contribuições ao longo do programa.

Aos meus colegas de turma do mestrado PROFMAT, que contribuíram para que fosse possível chegarmos até aqui.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pela paciência, dedicação e seus ensinamentos.

Aos professores das disciplinas, que de forma dedicada compartilharam um pouco dos seus conhecimentos para fortalecer nossa caminhada na docência.

“A essência da Matemática reside na sua liberdade.” (Georg Cantor).

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino de razão e proporção no Ensino Médio, com ênfase no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos. A razão e a proporção são conceitos fundamentais da Matemática que têm aplicação em diversas áreas do conhecimento, além de serem essenciais para a compreensão de assuntos mais avançados, como álgebra e geometria. O ensino de razão e proporção muitas vezes é realizado de forma mecânica e descontextualizada, dificultando a assimilação e aplicação dos conceitos pelos alunos. Nessa perspectiva, propomos uma abordagem que busca estimular o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas, visando uma aprendizagem significativa. A proposta consiste em uma sequência didática composta por diferentes etapas, que se inicia com a contextualização dos conceitos de razão e proporção por meio de situações-problema do cotidiano dos alunos. Essas situações proporcionam um ambiente propício para que os estudantes percebam a presença desses conceitos em seu dia a dia, estimulando seu interesse e motivando sua participação ativa no processo de aprendizagem. Na sequência, os alunos são desafiados a realizar investigações, explorando diferentes estratégias para resolver problemas envolvendo razão e proporção. A ênfase é dada à compreensão dos procedimentos adotados, incentivando a busca de justificativas e a troca de ideias entre os estudantes. A resolução colaborativa de problemas também é estimulada, promovendo a interação e a construção coletiva do conhecimento. Além disso, é proposta a utilização de recursos tecnológicos, como softwares de simulação e aplicativos de celular, para ampliar as possibilidades de exploração dos conceitos. Essas ferramentas oferecem um ambiente interativo e visualmente atrativo, que favorece a compreensão e a experimentação dos conceitos de razão e proporção. A avaliação é concebida como um processo contínuo e formativo, voltado para a identificação das dificuldades e avanços dos alunos. São utilizados instrumentos diversificados, como atividades individuais e em grupo, produção de relatórios e apresentações, além de observação sistemática dos alunos durante as aulas. A avaliação também busca valorizar o processo de aprendizagem e o desenvolvimento das habilidades de raciocínio lógico-matemático. Espera-se que a proposta apresentada neste trabalho contribua para uma abordagem mais dinâmica e significativa do ensino de razão e proporção no Ensino Médio. Através dessa abordagem, os alunos terão a oportunidade de desenvolver habilidades essenciais para sua formação integral, como a capacidade de resolver problemas, trabalhar em equipe e relacionar conceitos matemáticos com situações reais. O resultado esperado é uma aprendizagem mais efetiva e duradoura, que prepare os estudantes para os desafios do mundo contemporâneo, tanto no âmbito acadêmico como na vida prática.

Palavras-chave: matemática - estudo e ensino; razão e proporção; aprendizagem significativa; Base Nacional Comum Curricular.

ABSTRACT

This work has the objective of presenting a proposal for the teaching of reason and proportion in Ensino Medio, with an emphasis on the development of logical-mathematical reasoning for two students. Ratio and proportion are fundamental concepts of Mathematics that have applications in various areas of knowledge, as well as being essential for the understanding of more advanced subjects, such as algebra and geometry. The teaching of reason and proportion many times is carried out in a mechanical and decontextualized way, making it difficult to assimilate and apply two concepts by some. From this perspective, we propose an approach that seeks to stimulate critical thinking and problem-solving capacity, aiming at significant learning. The proposal consists of a didactic sequence made up of different stages, which begins with the contextualization of two concepts of reason and proportion by means of situations-problems of the daily life of the students. These situations provide a propitious environment for students to perceive the presence of these concepts in their day to day, stimulating their interest and motivating their active participation in the learning process. In sequence, students are challenged to carry out investigations, exploring different strategies to solve problems involving ratio and proportion. At this stage, two adopted procedures are given an understanding, encouraging the search for justifications and the exchange of ideas among the students. Collaborative problem solving is also encouraged, promoting interaction and the collective construction of knowledge. Furthermore, it proposes the use of technological resources, such as simulation software and mobile applications, to expand the possibilities of exploring two concepts. These tools offer an interactive and visually attractive environment, which favors the understanding and experimentation of two concepts of reason and proportion. The evaluation is conceived as a continuous and formative process, focused on the identification of the difficulties and progress of the students. Diversified instruments are used, such as individual and group activities, production of reports and presentations, as well as systematic observation of two students during the classes. The assessment also seeks to value the learning process and the development of logical-mathematical reasoning skills. It is hoped that the proposal presented in this work contributed to a more dynamic and significant approach to the teaching of reason and proportion in the Teaching Environment. Through this approach, the students will have the opportunity to develop essential skills for their integral formation, such as the ability to solve problems, work in teams and relate mathematical concepts to real situations. The expected result is a more effective e and lasting learning, which prepares students for the challenges of the contemporary world, both in the academic field and in practical life.

Keywords: mathematics - study and teaching; ratio and proportion; meaningful learning; Common National Curriculum Base.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define as aprendizagens necessárias que os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Com o intuito de superar a desarmonia das políticas educacionais que o Brasil vem apresentando ao longo da sua história, poderá proporcionar o fortalecimento do regime de colaboração entre União, estados e municípios, e a qualidade da educação. A BNCC se faz o fragmento principal para o alcance desses objetivos com um olhar diferenciado e atencioso sobre o Ensino Médio devido ao grande índice de reprovação e abandono nas escolas brasileiras (BRASIL, 2018).

A aprovação da BNCC para o Ensino Médio se deu em 4 de dezembro de 2018, com o parecer CNE/CP nº 15/2018 e sua implantação estava programada para o início de 2022. De acordo com o Novo Ensino Médio, que propõe uma organização curricular mais flexível, com a oferta de uma Base Nacional Comum Curricular, organizada em quatro áreas do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A BNCC representa 60% da matriz, enquanto os outros 40% são organizados nos itinerários formativos. Em decorrência desta aplicação o Brasil começará a ter currículos estaduais equivalentes nas escolas que, por sua vez, já vêm se ajustando com as mudanças. A formação de professores é uma delas, assim como a elaboração de conteúdos educativos e infraestrutura adequada para que se possa alcançar os objetivos educacionais propostos pelo documento. O trabalho de implantação da BNCC é um trabalho coletivo que só será possível com a participação do Ministério da Educação (MEC) juntamente com os municípios e estados.

Um documento pertinente, amplo e contemporâneo que passou por muitas discussões para chegar em sua etapa final. Com a participação de secretários da educação, educadores e da sociedade, foi elaborado com o intuito de garantir o desenvolvimento de novas competências. A referência às competências perpassa somente as cognitivas, pois no documento aqui refletido, também é abordado competências não-cognitivas, ou seja, em sua composição há competências/habilidades que não pressupõem a demanda de ter uma "bagagem" de conhecimento acadêmico para que seja plausível seu desenvolvimento e isso de certa forma será refletido no futuro do jovem brasileiro (BRASIL, 2018).

Ao longo dos estudos em Matemática (graduação, especialização e agora mestrado) tive a convicção da atuação/carreira na docência e o desejo em aprofundar cada vez mais os conhecimentos na linha de Ensino de Matemática, com olhares mais voltados ao processo de ensino e aprendizagem no ensino médio no contexto da educação básica a luz da BNCC e do novo Ensino Médio. Na finalização do mestrado, promovido pela SEDUC CE e pela SBM visando o aperfeiçoamento do docente, o interesse e a necessidade pelas novas abordagens e metodologias foi aflorada. Entender a Base Nacional Comum Curricular, especialmente as suas implicações para o ensino de Matemática, nos anos finais da Educação Básica, e que passará a vigorar nos anos posteriores à formação dessa pesquisa, foi o motivador para empreender essa investigação. Contudo, a escolha desse tema perpassa o interesse individual, mas poderá ser referência para futuros docentes que poderão, através dessa produto educacional, conhecer a BNCC do Ensino Médio no âmbito da Matemática e suas tecnologias. Ciente de que o tema abordado afetará as escolas nacionalmente nos próximos anos, compreender essa reorganização curricular torna-se algo indispensável para graduandos e professores da Educação Básica que objetivam atuar na profissão docente e fazer a diferença na vida dos seus alunos.

O objetivo geral dessa dissertação é apresentar as principais mudanças ocorridas na área de Matemática e suas tecnologias impulsionadas pela Base Nacional Comum Curricular e seus impactos nos processos de ensino-aprendizagem além de apontar caminhos para um ensino e aprendizado significativo de razão e proporção na educação básica. Os objetivos específicos que configuram essa pesquisa são: Descrever o processo de construção da BNCC e os condicionantes políticos e históricos; Conceituar e definir a BNCC apresentando sua organização, estrutura e objetivos para o Ensino Médio; Apresentar as habilidades e competências para a área da Matemática e suas tecnologias e os aspectos positivos e negativos para o ensino-aprendizagem na área; propor uma abordagem significativa do conteúdo de razão e proporção para a educação básica a luz das expectativas oriundas da BNCC.

A metodologia dessa pesquisa se caracteriza como qualitativa, de natureza básica equalitativa, do ponto de vista dos objetivos se configura como exploratória, pois esse trabalhoestá interessado em apresentar questões que envolvem o ensino e o currículo da educação brasileira, com o estudo em tela da BNCC e seus impactos na área da Matemática e suas tecnologias, ou seja, está buscando compreender e explicar, numa perspectiva puramente teórica e sem aplicação prática, os fenômenos causados pela nova ordem das políticas educacionais para os processos de formação da educação básica, em especial o Ensino Médio.

Os procedimentos para a obtenção dos dados necessários para a elaboração dessa pesquisa foram: *Documental* - os documentos investigados para a construção deste texto foram a Base Nacional Comum Curricular (2018), cujo objetivo foi extrair dados de sua apresentação e elaboração, assim como suas competências e habilidades direcionadas para o Ensino Médio. E também a Lei 13.415/2017, que se objetivou em compreender as principais mudanças ocorridas no Ensino Médio depois de sancionada. Os estudos e as reflexões acerca desses documentos proporcionaram a melhor compreensão da BNCC e a elaboração deste artigo.

Esse trabalho está dividido em três capítulos, além desta introdução e das considerações. No primeiro capítulo apresentaremos o contexto histórico e político da Base Nacional Comum Curricular, além dos trâmites de sua elaboração e discussão sobre suas versões anteriores. Ainda nesse capítulo acompanharemos a estrutura e organização da Base, a Reforma do Ensino Médio, fundamentada na Lei 13.415/2017, a BNCC aplicada ao ensino de Matemática e suas tecnologias, acompanhando suas competências específicas e os aspectos negativos e positivos que tais exigências implicam no Ensino Médio. No segundo capítulo trataremos do assunto de razão e proporção, bem como traremos a tona algumas reflexões sobre o ensino desses assuntos na educação básica e seu impacto nas demais áreas do conhecimento. Para finalizar, no capítulo três, traremos uma proposta de trabalho para tal assunto, que julgamos pertinente e alinhado as novas expectativas para o ensino de Matemática a luz da BNCC e do Novo Ensino médio.

2 BNCC E NOVO ENSINO MÉDIO: UM NOVO OLHAR PARA A MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E PARA A FORMAÇÃO DOCENTE

2.1 Contexto histórico e político da Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento estudado neste artigo, teve asua primeira menção na promulgação da Constituição da República Federativa do Brasil em 1988, onde é citado pela primeira vez uma Base Nacional Comum assegurada no Artigo 210 que diz o seguinte: "Serão fixados conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais" (BRASIL,1988).

Depois de oito anos da primeira citação da Base, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996 foi aprovada e com ela a designação que os currículos da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio teriam uma base nacional comum de acordo com as especificidades da escola e da realidade em que está posta. Posteriormente, no ano de 1997, a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental do 1º ao 5º ano, seguido dos dez volumes para o 6º ao 9º ano. Estas diretrizes não vinham com obrigatoriedade inclusa, ou seja, a sua finalidade foi nortear o trabalho dos professores, coordenadores e diretores por conter fatores que podiam ser utilizados como objetivos distintos de acordo com o contexto escolar. Os Parâmetros Curriculares Nacionais que abrangem o Ensino Médio surgiram somente no ano 2000, dessa vez não em dez volumes mas em quatro, que buscavam orientar o professor e expandir os princípios da reforma curricular orientando o docente a buscar novas metodologias. Essa trajetória da Base está disponível em seu histórico.

No ano de 2010 foi realizada a Conferência Nacional de Educação (CONAE) que contava com a presença de especialistas e tinha como finalidade criar um documento que suprisse a necessidade da Base Nacional Comum Curricular, como parte do Plano Nacional de Educação (2014-2024). Em 25 de junho de 2014, a Lei 13.005 que regulamenta o Plano Nacional de Educação (PNE) passa a ter vigência de dez anos, composto por vinte metas as quais buscam melhorar a qualidade da Educação, possuindo quatro diretamente ligadas à BNCC, são elas: meta 2, 3, 7 e 10, com suas respectivas estratégias 2.2, 3.3, 7.1 e 10.6. Na estratégia 2.2 é trazido a implantação dos direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que formaria a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental, o mesmo é trazido na estratégia 3.3 só que agora para o Ensino Médio. A estratégia 7.1 prescreve o estabelecimento e implantação de diretrizes pedagógicas para a educação básica respeitando a diversidade regional, estadual e local, enquanto na estratégia 10.6 pretende-se exortar a diversificação curricular da educação de jovens e adultos, exprimindo a formação básica e também a preparação para o mundo do trabalho através de inter-relações entre teoria e prática. Assim podemos dizer que de certa forma a BNCC se fundamentou em estratégias do PNE.

Outro documento primordial para a educação brasileira é as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (DCN's) que visam estabelecer bases comuns nacionais para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, bem como para as modalidades: Educação Especial; Diretrizes Curriculares Nacionais para oferta de Educação para Jovens e Adultos em situação de privação de liberdade nos estabelecimentos penais, Diretrizes Operacionais para a Educação Jovens e Adultos – EJA, Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Escolar Indígena, Diretrizes para atendimento de educação escolar de crianças, adolescentes e jovens em situação de itinerância, Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Escolar Quilombola, Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana, Diretrizes Nacionais para a Educação em Direitos Humanos e Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Ambiental.

As DCN's, ao contrário dos Parâmetros Curriculares, são obrigatórias e é a partir delas que o sistema federal, estaduais, e municipal, formularão as suas orientações assegurando a integração e organicidade curricular da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. As DCN's subsidiam e orientam na elaboração e na revisão curricular, nas discussões pedagógicas internas às escolas, na produção de livros e outros materiais didáticos, na avaliação externa dos sistemas de Educação, e na formação inicial e continuada dos professores, ou seja, em todo o currículo da Educação Básica brasileira (BRASIL, 2013).

Diante do exposto acima é possível perceber que a legislação que regulamenta a política pedagógica de educação no Brasil foi trilhando um caminho para atender a criação de uma Base Comum que assegura as habilidades e competências para a formação básica em todo o território nacional. Assim, em junho de 2015 acontece o I Seminário Interinstitucional para elaboração da BNC. Um marco importante no processo de elaboração da BNCC, pois reunia todos os assessores e especialistas envolvidos. A Portaria Nº 592, de 17 de junho de 2015, institui Comissão de Especialistas para a Elaboração de Proposta da Base Nacional Comum Curricular. No final deste mesmo ano houve uma mobilização das escolas brasileiras com o propósito de discutir a proposta do documento.

A primeira versão da BNCC gerou muita polêmica, pois

> Grupos conservadores e progressistas posicionaram-se contrários ao documento. Para os primeiros, o texto estava muito aquém do que seria desejável em termos de aquisição de conhecimentos. O segundo grupo também criticou o acanhamento da proposta; esperava um documento mais engajado, sem qualquer espécie de aceno ao mercado ou às políticas neoliberais. Engrossaram o coro das críticas às entidades científicas, os movimentos sociais organizados e organizações não governamentais ligadas à educação. (NEIRA, ALVINO JÚNIOR, ALMEIDA, 2016, p. 36)

A Primeira versão contou com mais de 12 milhões de contribuições das escolas e instituições que sugeriram alterações nos textos iniciais, nos componentes curriculares e também nos objetivos de aprendizagem propostos (NEIRA; ALVINO JÚNIOR; ALMEIDA, 2016).

Em 2016 a Segunda versão da BNCC é disponibilizada e o texto passaria mais umavez por discussões envolvendo professores, gestores e especialistas, mesmo com muitas críticas e intervenções. Quando o processo de impeachment contra a presidenta, na época Dilma Rousseff, foi aprovado em abril de 2016 e a decisão do Senado foi afastá-la definitivamente no dia 31 de agosto de 2016, o vice Michel Temer assumiu a presidência e isso, de certa forma, acabou alterando o rumo que a educação estava tomando. Temer aprovou a Medida Provisória 746/2016 que logo depois se converteu na Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, chamada de Reforma do Ensino Médio.

Enquanto isso, a BNCC recebia agora dimensões conservadoras, retirando do seu texto original os termos identidade, gênero e sexualidade, além de mudar completamente o ciclo de debates que a primeira versão foi aberta. Tínhamos agora uma Base voltada não mais para objetivos e sim para competências[3] prescritas pelos empresários da educação.

Então, em abril de 2017, o MEC entregou a versão final da BNCC ao Conselho Nacional de Educação (CNE), que seria responsável por elaborar o projeto de resolução do mesmo. Em 20 de dezembro do mesmo ano, a Base Nacional Comum Curricular da Educação Infantil e Ensino Fundamental foi homologada pelo ministro da Educação Mendonça Filho. A partir da homologação começaria o processo de formação e capacitação dos professores e adaptação aos currículos. No dia 06 de março de 2018, aconteceu o dia D da BNCC da

Educação Infantil e Ensino Fundamental, pois neste dia educadores de todo o Brasil estudaram a Base com o intuito de entender sua homologação e seus impactos na educação. Já a parte que envolve o Ensino Médio foi explorada somente em agosto e isso fez com que só fosse homologada em dezembro de 2018 pela ministra da educação Rossieli Soares.

Em suas considerações, finais Filho, Barroso e Sampaio (2021) trazem que ainda que o processo de implementação da BNCC tenha acontecido de forma contínua, o que se observa éque a cada versão os termos educacionais são trocados ou suprimidos, por exemplo, “direitos de aprendizagem” são substituídos por “competências e habilidades”. Com isso fica fácil perceber o retrocesso, seja entre a primeira ou última versão, ou entre a segunda e a última versão. Assim podemos acompanhar também nas considerações de Neira, Alvino Júnior e Almeida (2016), a seguinte reflexão:

> [...] Se a sociedade brasileira não apostar na democratização das relações dentro da escola, numa maior participação da comunidade, nomeadamente as famílias que enviam seus filhos e as pessoas que lá trabalham; se não ousar relações didáticas mais horizontais e menos assimétricas; se não valorizar os conhecimentos que as crianças, jovens e adultos possuem; se os professores e professoras não se tornarem sujeitos do processo; se eles e elas não forem bem remunerados; se as condições de trabalho e vida na escola não melhorarem; se o olhar que uma parcela da sociedade destina à escola pública não se modificar... todo o esforço de construir uma base nacional irá por água abaixo (NEIRA; JUNIOR; ALMEIDA, 2016, p.44).

Nesta reflexão, podemos notar as tamanhas e inúmeras desigualdades educacionaisque existem na sociedade brasileira, desigualdades essas que não serão resolvidas somente com a implementação de um documento normativo, precisa-se de muito mais que isso para alcançar um currículo nacional comum e uma educação de qualidade para todos.

2.2 Estrutura e organização da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (9.394/1996), a Base deve ser referência norteadora dos currículos dos sistemas e redes de ensino em nível federal, estadual e municipal, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.

A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades para serem desenvolvidas em todos os estudantes ao longo da educação básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da

Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Assim, de acordo com o documento legal, a Base torna-se a:

> Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. (MEC, 2017, p. 8)

Enquanto estrutura, a Base está organizada da seguinte forma:

Educação Infantil - Originando-se das Competências Gerais que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica, a BNCC determina seis direitos de aprendizagem nos anos iniciais. Sendo eles: conviver, brincar, participar, explorar, expressar e conhecer-se. Tais direitos devem ser certificados nas atividades e práticas pedagógicas, lembrando que o campo de aprendizagem neste primeiro momento está dividido em faixa etária.

Ensino Fundamental - Também está organizada a partir das Competências Gerais, agora composta por cinco áreas de conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. Por sua vez, se organizam em componentes curriculares, que dependendo da área também podem ter as competências específicas. Podemos encontrar nos textos de apresentação a indicação que cada área de conhecimento deve cumprir na formação integral dos alunos tanto nos anos iniciais como nos anos finais do Ensino Fundamental.

Ensino Médio - Agora sistematizada em quatro áreas de conhecimento: Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências Humanas e sociais aplicadas. Cada área estabelece uma competência específica em que se espera avançar ao longo desta etapa. Para proporcionar o desenvolvimento das competências específicas de área são relacionadas um conjunto de habilidades como feito antes no Ensino Fundamental.

Enquanto na Educação Infantil o código alfanumérico representa o objetivo de aprendizagem e desenvolvimento, no Ensino Fundamental e Médio o código representa as habilidades definidas para cada ano da Educação Básica. Em cada uma destas, a composição do código aparece de forma diferente. Na Figura 1, veremos um exemplo de código alfanumérico do Ensino Médio.

Figura 1- Código alfanumérico do Ensino Médio

E M 13 LGG 103

Fonte: BNCC (2018)

Este é um dos códigos alfanuméricos do Ensino Médio, na sua composição temos o primeiro par de letras que indica o Ensino Médio (EM), podendo ser EF para o Ensino Fundamental ou (EI) para Educação Infantil. O primeiro par numérico indica que as habilidades podem ser desenvolvidas em qualquer etapa do Ensino Médio, porém no Ensino Fundamental o primeiro par numérico indica o ano (01 ao 09) a que se refere à habilidade, por sua vez na Educação Infantil representa o grupo por faixa etária. A segunda sequência de letras indica o componente curricular, para o Ensino Fundamental temos: (LP) Língua Portuguesa, (AR) Arte, (EF) Educação Física, (LI) Língua Inglesa, (MA) Matemática, (CI) Ciências, (GE) Geografia, (HI) Historia, (ER) Ensino Religioso. Para o Ensino Médio temos: (LGG) Linguagens e suas tecnologias, (MAT) Matemática e suas tecnologias, (CNT) Ciências da Natureza e suas tecnologias e (CHS) Ciências Humanas e sociais aplicadas. Por fim, a última sequência de números indica a competência específica ao qual se associa a habilidade para o Ensino Médio, no Ensino Fundamental aponta a posição da habilidade na numeração sequencial do ano o mesmo vale para a Educação Infantil. Destaca-se na BNCC que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades não representa uma ordem, cabe às escolas definirem o avanço das aprendizagens (BRASIL, 2018).

2.3 O Novo Ensino Médio

A história da educação no Brasil esteve marcada pelo descaso e pela ausência de uma política que objetivava o desenvolvimento do país tendo a educação como a ação primordial nesse processo. Muitas foram as reformas educacionais ao longo dos mais de 5 séculos, com objetivo de atender as classes mais abastadas e o próprio sistema econômico capitalista, e raramente que satisfizesse as necessidades de formação humanísticas e profissionais dosfilhos das classes populares (SHIROMA, 2004).

Durante muito tempo no Brasil, a educação se apresentou como um elemento utilizado pelas classes dominantes para manter seus privilégios, conservar sua condição perante a sociedade. Todavia acrescenta-se ainda que precisamos, enquanto sociedade, de mais mudanças/reformas que estejam alinhadas com os interesses das classes trabalhadoras, que façam o povo do país prosperar, uma educação que seja sinônimo de equidade e justiça social (SANTOS, 2010).

Com o Ensino Médio não foi diferente. Essa etapa da educação básica esteve, na maioria das vezes, *à mercê* dos interesses políticos e econômicos e desarticulado da formação geral dos sujeitos. Muitas foram as reformas que mais deformaram e alinharam o currículo dessa etapa a formação puramente tecnicista, mecanizada objetivamente uma formação mínima para o trabalhador (SHIROMA, 2004).

De acordo com a Constituição Federal de 1988 e a LDB 9.394/1996 o Ensino Médio é a última etapa da Educação Básica, e tem por finalidade:

> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, LEI 9.394/1996)

O Ensino Médio no Brasil foi sempre tão negligenciado que somente a partir da Emenda Constitucional Nº 59, de 11 de novembro de 2009 e a promulgação da Lei 12.796 de 4 de abril de 2013 foi de fato garantido a gratuita e obrigatoriedade da educação básica dos quatro aos dezessete anos, ou seja, somente assim o Ensino Médio passou a ser factualmente obrigatório.

Os aspectos elencados acima legou para o Ensino Médio uma série de problemas históricos, tais como alta taxa de abandono e/ou evasão, reprovação. Foi com essa justificativa que no ano de 2016, o presidente da República, Michel Temer, e o ministro da Educação, Mendonça Filho, publicaram a Medida Provisória nº 746, que tratava da criação do Novo Ensino Médio. A tal Medida, culminou na Lei nº13.415 de 16 de abril de 2017, que apresenta as bases e altera as diretrizes e o financiamento do Ensino Médio no Brasil. Essa reforma só imprime mais mudanças à oferta da última etapa da educação básica, dentre elas a prerrogativa da escola em tempo integral.

Destaca-se algumas mudanças citadas por Gusmão e Amorim (2020), como a carga horária anual que teve um aumento significativo de oitocentos para mil e quatrocentas horas, adeterminação agora de competências e habilidades a serem adquiridas a partir da Base Nacional Comum Curricular, a construção de um currículo, outro grande impacto na educação pois com esta construção fundamentada na BNCC têm-se a eliminação de algumas disciplinas como obrigatórias e o aluno pode formar seu currículo conforme seu desejo de formação assim afirma o documento[4], as parcerias com instituições que oferecem educação a distância e o cargo de docente pode ser ocupado por alguém sem formação em uma instituição de ensino superior (notório saber para as áreas técnicas), esta última por sua vez diverge da Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996, onde no Artigo 61 exige formação em licenciatura para o exercício profissional na docência (BRASIL,1996).

É solicitado que a escola como interlocutora resguarde as diversidades, promovendo o respeito mútuo entre alunos e a equipe escolar. De acordo com a BNCC, a escola deve

> proporcionar uma cultura favorável ao desenvolvimento de atitudes, capacidades e valores que promovam o empreendedorismo (criatividade, inovação, organização, planejamento, responsabilidade, liderança, colaboração, visão de futuro, assunção de riscos, resiliência e curiosidade científica, entre outros), entendido como competência essencial ao desenvolvimento pessoal, à cidadania ativa, à inclusão social e à empregabilidade; prever o suporte aos jovens para que reconheçam suas potencialidades e vocações, identifiquem perspectivas e possibilidades, construam aspirações e metas de formação e inserção profissional presentes e/ou futuras, e desenvolvam uma postura empreendedora, ética e responsável para transitar no mundo do trabalho e na sociedade em geral. (BNCC, 2018, p.466)

Essas são finalidades que a escola necessita dar conta para que durante o Ensino Médio a juventude possa ter uma visão justa, ética, democrática, inclusiva, sustentável e solidária. Em busca desses objetivos há os itinerários formativos, que nesta versão de Ensino Médio devem acompanhar a juventude durante os três anos. O estudante tem cinco áreas para sua escolha: Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciência da Natureza e suas tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Formação Técnica e Profissional. Com efeito, no Artigo 32 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB n°. 9.394 de 1996, dispõe que a “Base Nacional Comum Curricular definirá direitos e objetivos de aprendizagem do Ensino Médio que contemplam o contexto histórico, econômico, social, ambiental e cultural” (BRASIL, 1996).

A BNCC dispõe que a Educação Básica deve privilegiar “a formação e o desenvolvimento humano global, compreender a complexidade e a não linearidade desse processo, rompendo com visões que privilegiam ou a dimensão intelectual ou a dimensão afetiva” (BRASIL, 2018, p. 14). Apresenta assim as bases para a educação integral dos sujeitos[5]. Essa concepção vai ao encontro das novas diretrizes para o Ensino Médio.

2.4 A BNCC aplicada a Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio

A BNCC (2018) apresenta que no Ensino Médio a Matemática e suas tecnologias têm a responsabilidade de ampliar o letramento matemático[6] que os estudantes tiveram na etapa anterior, ou seja, desenvolver as habilidades de ***raciocinar*** - desenvolvido quando o estudante interage com os colegas e professores em busca de solucionar problema; ***representar*** - relativo a elaboração de registro; ***comunicar*** - referente ao estudante conseguir justificar suas conclusões de uma forma oral além do uso de conceitos matemáticos; e ***argumentar*** - testagem de conjecturas.

Perrenoud (2002) define competência como sendo um conjunto de habilidades, saberese conhecimentos; é um saber-fazer relacionado à prática do trabalho, mais do que mera ação motora. Ao educar para competências, através da contextualização e da interdisciplinaridade, os conteúdos se tornam pertinentes à realidade do aluno. Conceitos também trazidos no documento

> competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BNCC, 2018, p.8)

Assim, na análise do documento percebe-se que cada competência citada está ligada a um conjunto de habilidades. Essa definição de competência, acentua no currículo uma finalidade utilitarista do conhecimento, indo na contramão de uma educação que visa igualdade social, pois essa concepção de competência vê o ensino-aprendizagem como um fim para a inserção no mercado de trabalho (MOURA, 2020).

Em continuidade, os jovens ao chegar no Ensino Médio teriam o letramento matemático mais denso e eficiente, pois completariam as habilidades adquiridas no Ensino Fundamental de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018) pois,

> No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BNCC, 2018, p. 528)

As competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio são as seguintes:

Competência Específica 1 - Composta por 6 habilidades, tem o intuito de construir um jovem crítico e reflexivo. Essas habilidades favorecem a interpretação e compreensão de resultados divulgados por meio de comunicação através da sua realidade, baseando-se em conceitos matemáticos. Ou seja, o estudante terá capacidade de analisar algo como generalização confusa de resultados de pesquisa, uso descabido da amostragem, exclusão de informações, entre outras.

Competência Específica 2- Composta por 3 habilidades, essas habilidades aparecem quando os estudantes começam a identificar aspectos consensuais ou não nos problemas propostos. O objetivo desta competência é colocar o estudante em situações que ele precise investigar, mobilizar e participar de questões sociais. Participando da discussão tanto nos problemas como nas propostas de soluções, ampliando a competência anterior pois neste momento os estudantes necessitam investigar questões para chegar a soluções. Logo ela deve ser abordada somente depois da primeira surgindo assim uma ordem preestabelecida que o documento aborda não haver.

Competência Específica 3- Composta por 16 habilidades, o desenvolvimento destas habilidades são pertinentes a interpretação, construção de modelos, formulação de problemas e resolução. Envolvendo conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, entre outros. O estudante precisa aplicar seu conhecimento, efetivar métodos, e ao final conciliar resultados com o problema original, lembrando que a resolução de problemas pode requerer técnicas cognitivas diferentes. Assim o estudante também pode utilizar a tecnologia aseu favor. Esta competência apresenta mais habilidades que as demais contidas no documento, exigindo assim mais dos estudantes e se contradizendo também com o início do documento onde é trazido que os estudantes não necessitam de um conhecimento prévio.

Competência Específica 4- Composta por 7 habilidades, relacionadas a interpretação, construção de modelos, resolução e formulação. Os conceitos e procedimentos matemáticosse tornam essenciais nesta competência, pois o estudante deve ser estimulado a explorar mais de um registro de representação, escolher o mais conveniente para a situação e convertê-lo quando necessário. Assim, eles passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializam de forma significativa sua capacidade, ora mas nem sempre essa conversão será suficiente ou de fácil compreensão mesmo que sejam necessárias requer prudência.

Competência Específica 5- Composta por 11 habilidades, ela somente pode ser adquirida depois de desenvolver todas as habilidades exigidas, visto que desta vez o estudante deve ser capaz de investigar e formar explicações. Com essas habilidades o estudante deve formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e procurar argumentos para validá-las. Podendo assim investigar relações entre números expressos em tabelas, deformações de ângulo, progressões aritméticas e geométricas, entre outras, para caracterizar a atividade matemática como atividade humana, com argumentos necessários.

A Base foca naquilo que o aluno necessita desenvolver para que o conhecimento matemático seja uma ferramenta para ler, compreender e transformar a realidade. Podemos citar alguns aspectos positivos e negativos que julgamos importantes consolidados na BNCC.

Na observação do texto legal, notamos uma mudança nos verbos eleitos para descrever objetivos e habilidades. Verbos antes trazidos nos PCNs para trabalho e procedimentos, como “reconhecer”, “identificar” e “utilizar”, aparecem na Base como ações “interpretar”, “classificar”, “comparar” e “resolver”. Esta mudança tem o propósito de levar o aluno a pensar a partir das informações recebidas, analisar e responder com uma postura ativa, mais reflexiva e menos voltada para a “decoreba”.

Neste sentido, a BNCC apresenta uma perspectiva de processos de ensino fundamentado na educação matemática, pois como afirma Ferro; Gomes (2021) na Educação Matemática estudam-se propostas que sejam capazes de promover uma abordagem significativa dos conteúdos matemáticos e que levem o aluno a refletir, a dialogar e a investigar. E o papel do professor é mediar o conhecimento. Assim, há a possibilidade de formação de jovens com pensamentos ligados a uma nova realidade, que serão capazes de pensar não somente em uma única maneira para resolver problemas matemáticos, uma vez que ao analisar o problema proposto ele poderá encontrar diversas soluções, e não somente reproduzir.

Outro aspecto pertinente no referido documento é a contextualização, a BNCC indica que na aula os procedimentos de aula sejam significativos, amplos e que o ensino e o foco não seja o cálculo em si, mas as relações que ele permite estabelecer entre os diversos conhecimentos que o aluno já tem. Como explicitado no documento:

> Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BNCC, 2018, p. 518)

Um elemento importante em todas as áreas do conhecimento, as tecnologias digitais, são situadas como importantes ferramentas na modelagem e resolução de problemas matemáticos reconhecendo que elas não são um elemento separado da Matemática. Com essa mudança a Base busca associar a programação e a robótica, pois constata que estes campos são cada vez mais atuais no convívio social e na vida profissional. Perius (2012) relata em suas conclusões o quanto a matemática aliada a tecnologia é importante, pois com o uso das ferramentas tecnológicas e pedagógicas atuais o ambiente de aprendizagem se torna cada vez mais agradável, melhorando a capacidade de ler e interpretar itens necessários para a construção do conhecimento matemático do aluno.

Podemos dizer ainda que a BNCC traz algumas implicações, que nesta pesquisa, são considerados negativos para o currículo da Educação Básica, uma vez que tenta regular o conhecimento através de competências, habilidades e desempenho nas avaliações. Devido a pressão de organizações internacionais como a UNESCO para um melhor resultado nas avaliações externas, o Brasil trouxe a BNCC como uma resposta para tal exigência, estabelecendo padrões para as instituições de ensino. Avaliações externas que são bastante exigidas durante o Ensino Médio afetando de certa forma o plano que o professor elaborou para desenvolver com seus alunos, as habilidades e competências exigidas em vez de um único objetivo faz com que o professor agora precisa se desdobrar para cumprir mais de um objetivo (MOURA, 2020).

E quando falamos em Matemática e suas tecnologias podemos notar a grande cobrança exigida tanto para os estudantes como para os professores, transformar essas competências ematividades práticas na sala de aula, não é nada fácil, ainda mais quando não se tem uma estrutura adequada como é a realidade da maioria das escolas brasileiras, para além de umbom prédio, ressalta-se a importância de um laboratório de matemática, formação continuada para os professores, acesso à internet, objetos onde os alunos consigam acompanhar a medição de ângulos, volumes e área não mais de maneira abstrata, por exemplo. Esse tipo de incentivo seria bastante atrativo para professores, e especialmente para os estudantes que possuem poucas afinidades com a área da matemática ou que pensam em abandonar a escola por não acompanhar o conteúdo, porém, as escolas ainda tentam conseguir tais matérias e issonão acontece da noite para o dia.

Uma das grandes contradições nas políticas educacionais no Brasil, por exemplo, é a Emenda Constitucional 95 onde reduz de forma drástica os investimentos em educação por 20 anos, e essa Emenda Constitucional foi aprovada no mesmo contexto da implantação da BNCC e do Novo Ensino Médio, onde as escolas necessitam reestruturar seus currículos, ampliar carga horária e passa-se a exigir mais do trabalho do professor (JUNIOR VAIRÃO; ALVES, 2017).

Observa-se que ao passo que a Base Nacional Comum Curricular apresenta aspectos positivos para os processos de ensino-aprendizagem na área da Matemática e suas tecnologias, tais como um ensino mais reflexivo, contextualizado e o uso das tecnologias digitais, percebe-se que alinhado a isso que não houve de forma paralela formação técnica e pedagógica dos professores, reestruturação dos espaços físicos e equipamentos nas escolas, além de se observar, a partir dos autores trazidos neste texto, o alinhamento da BNCC com os interesses em mercantilização da educação, ou seja, da educação como uma mercadoria, quando o seu texto final foi fortemente influenciado pelos empresários e não pelos intelectuais e profissionais da educação, aqueles que fazem a escola funcionar e acontecer em seu dia-a-dia, que conhecem verdadeiramente os desafios, necessidades e possibilidades da educação nacional.

3 RAZÃO E PROPORÇÃO: UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA

A observação da Natureza na antiguidade nos revelou conhecimentos importantes empregados até os dias atuais. No período da Racionalidade Clássica, temos grandes pensadores gregos, a exemplo de Sócrates, Platão e Aristóteles. Em particular, Aristóteles enfatizou a importância de investigar a natureza por meio da observação científica, permitindo-nos deduzir e tirar conclusões para abstrair ideias. Como exemplo, há conceitos hoje trabalhados em sala de aula no ensino de matemática que herdamos a partir das observações que filósofos apreciavam na natureza, temos, portanto como exemplo, no estudo de razão e proporção o conceito de proporcionalidade.

A teoria das razões e proporções está presente nos “Elementos” de Euclides, onde encontramos diversas definições distribuídas nos livros III, IV, V e VII, com o objetivo de determinar uma razão. No livro VII, deparamo-nos com uma definição semelhante utilizada atualmente, expressa pela notação a:b::c:d, que era utilizada na época. Nessa notação a, b, c e d representam a números e são equivalentes a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Essa definição estabelece que a igualdade é válida se o retângulo formado por AD possuir a mesma área que o retângulo formado por BC. Em termos mais atuais, isso pode ser descrito como o produto dos meios sendo igual ao produto dos extremos. Entretanto, essa teoria enunciada dessa forma só é aplicável a razões entre segmentos comensuráveis e não abrange razões entre segmentos que não são comensuráveis. Esse era um dos problemas conhecidos na matemática grega daquela época.

Conforme Kline (1972), o livro V dos "Elementos", fundamentado no trabalho de Eudoxo, é amplamente reconhecido como a maior conquista da geometria euclidiana. Suas ideias foram objeto de intensos debates e sua importância foi amplamente discutida em comparação a outras partes da obra. Concordando com essa perspectiva, Kistemann (2008) destaca que Eudoxo de Cnido foi o primeiro a resolver de forma abrangente o problema das grandezas incomensuráveis e desenvolver uma teoria das proporções.

De acordo com Eves (2011), Eudoxo apresentou sua teoria das proporções com o objetivo de superar a "crise" que surgiu na matemática grega durante a descoberta das grandezas incomensuráveis, as quais inviabilizaram a teoria das proporções dos pitagóricos. Antes de Eudoxo, os matemáticos que trabalhavam com proporções em geral não dispunham de uma base sólida para lidar com magnitudes incomensuráveis. No Livro V dos "Elementos", encontramos a teoria de razões e proporções que abrange tanto as proporções comensuráveis quanto as incomensuráveis. Os pitagóricos necessitavam de uma teoria da proporção que englobasse a igualdade entre duas razões, mesmo quando as magnitudes não podiam ser diretamente comparadas ou quando sua relação somente poderia ser expressa por meio de uma proporção de números inteiros.

3.1 Tratados sobre Incomensurabilidade e ação didática sobre razão e proporção

O tema da incomensurabilidade é um assunto que tem despertado grande interesse entre os pesquisadores, como revelado pelos escritos que exploram suas diversas implicações e impactos no conhecimento matemático. Segundo Leão (2017), Wilbur Knorr, em sua importante obra intitulada "A Evolução dos Elementos Euclidianos - Um Estudo da Teoria das Magnitudes Incomensuráveis e seu Significado para a Geometria Grega Antiga", argumenta de forma clara que "três autores, setecentos anos depois dos eventos, fornecem alguma informação sobre as origens da teoria da incomensurabilidade, mas é difícil avaliar quanto, se é que há alguma, validade histórica nessas informações".

Conforme Leão (2017), os três autores mencionados, a saber, Páppus, Próclus e Lâmblico, através de suas obras, sustentam a ideia de que as grandezas incomensuráveis surgiram entre os pitagóricos. Esse autor, respaldado por renomados matemáticos e historiadores da matemática, como Nicolas Boubarki, Van der Waerden e Jan Gulberg, apresenta concepções que seguem a mesma linha de raciocínio desses estudiosos, afirmando que foi a escola pitagórica que descobriu a incomensurabilidade entre o lado de um quadrado e sua diagonal, ou seja, a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Essa perspectiva reforça ainda mais a atribuição da descoberta da incomensurabilidade aos pitagóricos.

Pitágoras, um dos pré-socráticos da história da filosofia, que viveu no século V a.C., é amplamente reconhecido como um "sábio" devido à sua vasta sabedoria, conforme apontado por Spinelli (1990). Segundo Bongiovanni (2005), os pitagóricos sustentavam a crença de que todas as dimensões (comprimento, área, volume) poderiam ser relacionadas a números inteiros ou a razões entre dois números inteiros. Eles aceitavam que os números racionais eram suficientes para comparar, por exemplo, quaisquer segmentos de reta. Caso fossem dados dois segmentos, eles supunham que sempre haveria um segmento "u" que poderia ser ajustado um número inteiro de vezes em ambos. Dessa forma, os segmentos seriam considerados comensuráveis. No entanto, em algum momento da história, foi descoberta a existência de dimensões incomensuráveis.

Bongiovanni (2005) também menciona que alguns historiadores associam o surgimento de grandezas incompatíveis à aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, em que a hipotenusa corresponde à diagonal de um quadrado e os catetos representam os lados do quadrado. Nesse contexto, Aristóteles menciona uma prova em que se presume que a diagonal e o lado são mensuráveis, levando a uma contradição com a conclusão de que um mesmo número inteiro é simultaneamente par e ímpar. A argumentação por contradição possivelmente foi desenvolvida pela escola pitagórica.

Suponhamos que o lado AB e a diagonal DB sejam segmentos comensuráveis. Logo existem um segmento "u" e inteiros m, n tais que $AB = u.m$ e $DB = u.n$. Portanto o segmento AB mede m e o segmento DB mede n. Pelo teorema de Pitágoras, $n^2 = m^2 + m^2$, ou seja, $n^2 = 2m^2$. Portanto, $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$. Seja $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível tal que $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$. Como $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$então $a^2 = 2b^2$. Portanto a^2é par e consequentemente a é par. Como $\frac{a}{b}$ é irredutível, b deve ser ímpar. Como a é par, existe um inteiro K tal que $a = 2k$. Como $a^2 = 2b^2$ então $4k^2 = 2b^2$. Consequentemente, b também é par. No entanto, isso leva a uma contradição, uma vez que b é ímpar.

Por conseguinte, a revelação dos incomensuráveis ocasionou o desenvolvimento de uma teoria acerca de razões que contemplasse tanto grandezas comensuráveis quanto incomensuráveis. Uma vez que esse achado invalidava a universalidade da teoria das proporções, na qual as demonstrações eram fundamentadas no número como uma coleção de unidades. O segmento já não podia ser considerado como indivisível, mas sim como infinitamente divisível. Ademais, outra consequência dessa descoberta foi a necessidade de se elaborar uma teoria de divisibilidade mais ampla do que a teoria do par e ímpar.

3.2 Definições, histórica e particularidades do ensino de razão e proporção na educação básica

Conforme os estudos realizados por Silva (2014), é mencionado que Pitágoras exercia uma influência significativa sobre seus seguidores, e aqueles que demonstravam maior dedicação eram admitidos em uma sociedade secreta ou irmandade. Os ensinamentos não eram registrados por escrito, mas sim transmitidos oralmente e mantidos em absoluto sigilo entre os membros. Os indivíduos que faziam parte da escola Pitagórica adotavam uma marca em forma de tatuagem, representando um pentagrama regular obtido a partir de um pentágono regular traçado com suas diagonais. Alguns especialistas sugerem que o pentagrama, além de conter a proporção áurea, também simboliza o infinito.

O pentágono regular está intrinsecamente relacionado à proporção áurea, que é determinada pela razão entre a diagonal e a medida do lado desse pentágono. Essa medida é igual a φ (phi), cujo valor é aproximadamente 1,618. De acordo com Silva (2014), há uma discussão sobre o primeiro registro dessa proporção, também conhecida como Número de Ouro, atribuído a Euclides de Alexandria por volta de 300 a.C. Euclides é reconhecido como o fundador da geometria como um sistema dedutivo e formalizado, e existem registros que afirmam que ele escreveu o texto mais significativo sobre proporção.

De acordo com a pesquisa de Guabiraba & Kuhn (2008) realizada durante o período do Renascimento, foi observado que o corpo humano segue a proporção áurea em várias medidas: a divisão da altura do corpo pelo umbigo, que está na proporção áurea; a relação entre a altura da cabeça e a distância da mandíbula até o topo da cabeça; a medida da cintura até a cabeça em relação ao tamanho do tórax; a distância do ombro até a ponta dos dedos em relação à distância do cotovelo até a ponta dos dedos; o comprimento dos dedos em relação à medida da dobra central até a ponta dos dedos; a relação entre a medida da dobra central até a ponta e a medida da segunda dobra até a ponta; e a medida do quadril até o chão em relação à medida do joelho até o chão.

No estudo conduzido por Silva (2012), são abordadas as razões e proporções com base nos ensinamentos de Nicómaco, Boécio e Euclides, considerados pioneiros na formalização desse conteúdo. Para construir o conceito atual de proporcionalidade, vamos nos ater às definições fornecidas por cada um desses matemáticos. Nicómaco, um importante pensador do final do século I d.C., foi o primeiro a registrar os ensinamentos matemáticos dos pitagóricos. Boécio, nascido em Roma por volta de 480 d.C., foi um prolífico autor de obras sobre matemática, música, teologia e textos inspirados por Nicómaco. Euclides de Alexandria, um renomado matemático dos séculos IV e III a.C., é reconhecido como um dos mais influentes de todos os tempos e escreveu um dos tratados mais significativos sobre proporção. No Livro V de sua obra "Os Elementos", Euclides apresenta a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido, que, de acordo com Eves (2011), contestou a teoria das proporções dos pitagóricos.

De acordo com Silva (2012), há uma falta de informações concretas sobre a vida e personalidade de Euclides. Seu trabalho mais conhecido, Os Elementos, consiste em uma compilação e organização de trabalhos anteriores que claramente refletem o caráter dedutivo e demonstrativo da matemática grega daquela época. Esse livro é um dos mais reproduzidos, influentes e estudados na história do mundo ocidental. Segundo Boyer (1974, p.76), "Os Elementos não eram [...] um resumo de todo o conhecimento geométrico, [...] mas uma exposição lógica dos fundamentos da matemática elementar". A obra é composta por 13 livros, sendo os seis primeiros dedicados à geometria plana, do sétimo ao nono tratando da teoria dos números, o décimo abordando os incomensuráveis, e do décimo primeiro ao décimo terceiro tratando da geometria no espaço.

No livro V da obra de Euclides, conforme definido por Kline (1972), a teoria das proporções é estabelecida na definição 5. De acordo com essa definição, diz-se que duas grandezas estão em mesma razão quando a primeira está para a segunda, assim como a terceira está para a quarta. Isso significa que, para quaisquer múltiplos iguais da primeira e da terceira grandeza, e quaisquer múltiplos iguais da segunda e da quarta grandezas, os primeiros múltiplos excedem simultaneamente, são iguais simultaneamente ou ficam simultaneamente aquém dos últimos múltiplos.

A definição diz que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se quando multiplicamos a e c por qualquer número inteiro m, digamos, e b e d por qualquernúmero inteiro n, então, para todas as escolhas de m e n,

- $ma < nb$ implica $mc < nd$,
- $ma = nb$ implica $mc = nd$,
- $ma > nb$ implica $mc > nd$

A definição de proporção é estabelecida na definição 6 do mesmo livro, onde é afirmado que grandezas com a mesma razão são consideradas proporcionais. De acordo com Silva (2012), no Livro VII, Euclides explora a teoria das proporções utilizando números naturais e apresenta vinte e duas definições. Na definição 20 do Livro VII, é apresentado o conceito euclidiano de proporção, que estabelece que "os números são proporcionais quando o primeiro é um múltiplo, uma parte ou partes do segundo, assim como o terceiro é do quarto". Conforme descrito por Silva (2012, p. 106), podemos ilustrar esse conceito da seguinte forma: "o primeiro é para o segundo assim como o terceiro é para o quarto".

- $12{:}6 = 22{:}11$ (12 é o dobro de 6 e 22 é o dobro de 11), $6{:}12 = 11{:}22$ (6 é a metade de 12 assim como 11 é a metade de 22), $12{:}16 = 21{:}28$ (12 é três quartos de 16 assim como 21 é três quarto de 28).

Essa é uma explicação de proporção que menciona a "razão geométrica" que será explorada por Nicômaco, que classifica as proporções em três tipos: razão aritmética, harmônica e geométrica, que é considerada a razão ideal.

Em Silva (2012) a definição de razão e proporção, segundo Nicómaco, no capítulo XXIdo livro 2, começa por referir que:

> [...] proporção é a combinação de duas ou mais razões. Na sua definição geral, proporção é a combinação de duas ou mais relações, mesmo que não estejam sob a mesma razão, mas sob uma diferença ou outra qualquer. (Silva, 2012, p.44)

Conforme as definições estabelecidas por Nicómaco, proporção é conceituada como um conjunto de razões e relações. Em sua obra, ele identificou três categorias de proporções: aritmética, geométrica e harmônica. Atualmente, a proporção geométrica é amplamente utilizada nas escolas, pois é a única que pode ser considerada uma verdadeira proporção, uma vez que seus termos estão relacionados pela mesma razão.

3.3 Reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de razão e proporção na educação básica

A categoria de estudos conceituais compreende três pesquisas de revisão bibliográfica cujo objetivo é analisar o método de ensino e aprendizagem de razão e proporção. Essas investigações são conduzidas por Soares e Nehring (2013), Nogueira (2010) e Maranhão (2010).

Soares e Nehring (2013) conduziram um estudo de análise dos livros didáticos que abordam a proporcionalidade nos capítulos/unidades de função afim em coleções destinadas ao Ensino Médio. A metodologia adotada envolveu a análise documental e a coleta de dados a partir de livros didáticos do primeiro ano do ensino médio de sete coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/2012).

Os critérios apresentados na introdução ao capítulo/unidade sobre função e função afim abordam a questão da proporcionalidade e de maneira explícita ou implícita. Seu objetivo é distinguir situações que possuem relações de natureza proporcional daquelas que não possuem, destacando a função linear como um modelo de proporcionalidade direta. Além disso, eles exploram as condições em que o crescimento é identificado como proporcionalidade direta e o decrescimento como proporcionalidade inversa. O texto também propõe situações que envolvem análise gráfica para grandezas proporcionais e incentiva a exploração de diferentes representações matemáticas, como numérica, algébrica, tabular e gráfica, entre outras. O objetivo é proporcionar uma compreensão abrangente do conceito de proporcionalidade.

De acordo com o estudo realizado pelos autores, a análise dos livros revelou que as situações envolvendo grandezas proporcionais são exploradas com mais frequência nas atividades do que nos capítulos/unidades. A maioria dos livros aborda as grandezas proporcionais de maneira implícita, enquanto apenas dois deles apresentam um número maior de atividades explícitas, enfocando o conceito de razão e proporção, como o algoritmo da regra de três, em vez de enfatizar a compreensão da proporcionalidade como função. Em resumo, essa conclusão indica que existe uma lacuna na abordagem da proporcionalidade nos livros analisados, com uma maior ênfase na aplicação prática em detrimento da compreensão teórica.

Conforme Nogueira Júnior (2010), uma estrutura curricular em rede para a disciplina de matemática pode ser concebida como uma série de nós interconectados, onde cada nó representa um tópico e depende dos outros para formar uma rede. Essa abordagem oferece uma perspectiva alternativa à estrutura curricular linear convencional, na qual os tópicos são apresentados sequencialmente. A abordagem em rede sugere que todos os tópicos estão interligados e dependem uns dos outros. Em essência, Nogueira Júnior propõe uma abordagem de ensino que reconhece a interconexão dos conceitos matemáticos, apresentando uma estrutura curricular mais orgânica e interdependente.

A pesquisa foi realizada em turmas do 7º ano de uma instituição militar, onde o foco foi dado ao tema de razão e proporção. Durante várias aulas ministradas pelo professor, observou-se como esse tópico estava relacionado a outros temas dentro da disciplina de matemática (nós internos) e também a assuntos de outras disciplinas (nós externos). Diversos exemplos foram utilizados para ilustrar o conceito de razão e proporção, como densidade e velocidade média, que estão conectados a disciplinas como física e química (nós externos). Além disso, a matemática financeira também foi abordada para explicar o tema, estabelecendo uma conexão com um nó interno da rede.

O autor observou que os alunos já haviam sido expostos a conceitos de razão e proporção em outras disciplinas e áreas da matemática, embora não tivessem reconhecido especificamente o tema em si. Isso indica que os diversos tópicos da matemática estão interconectados em uma rede complexa. Com base em sua pesquisa, o autor conclui que o ensino de razão e proporção no 7º ano é um primeiro passo importante em direção à interdisciplinaridade. Quando estruturado adequadamente, esse ensino pode levar a uma aprendizagem mais significativa da matemática, como evidenciado pelos dados da pesquisa.

Em 2010, Maranhão realizou um estudo teórico que se concentrou na compreensão proporcional entre alunos e professores do ensino fundamental. Para isso, examinou duas pesquisas anteriores - Miranda (2009) e Camejo et al. (2009). A primeira pesquisa consistiu em um modelo teórico sobre o assunto, enquanto a segunda foi uma análise de um relato de intervenção durante a aplicação de um questionário a professoras, com o objetivo de identificar o conhecimento matemático dessas professoras nos anos iniciais. A metodologia utilizada foi a meta-análise qualitativa.

Inicialmente, a autora examinou o estudo realizado por Miranda (2009), que apresentou um modelo para o desenvolvimento do pensamento proporcional. Esse modelo destaca a importância de introduzir problemas envolvendo razão e proporção com base no conhecimento prévio dos alunos sobre multiplicação e divisão. Além disso, enfatiza que o pensamento proporcional engloba tanto comparações quantitativas quanto não-quantitativas, bem como a habilidade de distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais. Em suma, a autora utilizou o modelo proposto por Miranda como referência para sua análise do pensamento proporcional.

Além disso, Maranhão (2010) apresenta os treze objetivos destacados por Miranda (2009) para o desenvolvimento do pensamento proporcional. Esses objetivos incluem: (i) Utilizar estratégias pessoais para resolver problemas relacionados ao pensamento proporcional; (ii) Aplicar a multiplicação e a divisão para solucionar problemas que envolvem razão e proporção; (iii) Realizar comparações numéricas e não numéricas; (iv) Trabalhar com igualdade de números racionais na forma fracionária; (v) Distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais; (vi) Utilizar a ideia de covariação; (vii) Representar razões por meio de tabelas ou gráficos; (viii) Relacionar a proporcionalidade com sistemas de medidas, áreas e volumes; (ix) Estabelecer conexões entre a proporcionalidade e a ideia de semelhança; (x) Resolver problemas envolvendo porcentagem, juros, descontos e taxas; (xi) Utilizar razões na análise de dados ou probabilidade; (xii) Aplicar o pensamento proporcional em contextos relacionados a funções; e (xiii) Distinguir entre grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

A segunda pesquisa examinada foi o estudo de Camejo et al. (2009), que se baseou nos trabalhos de Miranda (2009) e Shulman (1986). O objetivo desse estudo foi identificar o conhecimento matemático das professoras por meio da resolução de problemas relacionados ao pensamento proporcional. Quinze professoras que lecionam no 4º e 5º ano do ensino fundamental, todas com formação em Pedagogia, foram selecionadas para participar do estudo. Os resultados revelaram que sete das quinze professoras tiveram dificuldades em compreender uma questão que envolvia uma tabela de multiplicação. Além disso, as autoras incluíram no modelo de Miranda (2009) os aspectos do pensamento proporcional, tais como: (n) Resolver problemas que envolvam razões organizadas em tabelas, gráficos, etc.; (o) Solucionar problemas que envolvam a identificação de frações equivalentes.

As investigações teóricas destacaram a importância de abordar o tema da razão e proporção por meio de diversas representações, como tabelas, gráficos e representações numéricas. Essas abordagens são essenciais para explorar diferentes tipos de proporcionalidade, distinguindo situações proporcionais das não proporcionais. Através dessas diversas situações, os alunos têm a oportunidade de compreender o conceito de proporcionalidade e desenvolver o pensamento e raciocínio proporcional. Essa abordagem ampla e variada contribui para uma aprendizagem mais significativa e profunda dos alunos nesse tema.

Foram identificadas cinco pesquisas na categoria de estudos diagnósticos, que investigaram o ensino e a aprendizagem de razão e proporção em estudantes do ensino fundamental e médio. Essas pesquisas incluem Freitas e Gonçalves (2010), Lara e Oliveira (2013), Oliveira e Garcia (2013), Silva (2005) e Araújo, Oliveira e Gitirana (2004). Os estudos diagnósticos visam avaliar o nível de conhecimento e compreensão dos estudantes em relação a esse tema específico, fornecendo insights valiosos sobre as dificuldades e desafios encontrados no ensino e aprendizagem de razão e proporção.

No estudo intitulado "O pensamento proporcional em alunos do 7º ano do ensino fundamental", realizado por Freitas e Gonçalves (2010), o objetivo foi investigar as estratégias utilizadas pelos alunos dessa série para resolver problemas que envolvem proporção. Para isso, os autores aplicaram a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e seguiram os procedimentos metodológicos da engenharia didática. A pesquisa foi conduzida com dezesseis alunos do 7º ano do ensino fundamental que ainda não haviam estudado os conceitos relacionados à proporção. Através desse estudo, os autores buscaram compreender como os alunos desenvolvem seu pensamento proporcional e quais são as dificuldades e desafios encontrados nesse processo.

Os resultados obtidos na pesquisa revelaram que os participantes possuíam noções intuitivas de proporcionalidade e as expressavam através de estratégias não convencionais. Inicialmente, os estudantes apresentaram dificuldades em distinguir situações proporcionais das não proporcionais, o que pode ser atribuído ao contrato didático que geralmente requer uma resposta única para cada pergunta, enquanto em situações não-proporcionais não existe uma resposta numérica única. Diante disso, os autores recomendam uma abordagem baseada na resolução de problemas para trabalhar os conceitos de proporcionalidade. Essa abordagem permitiria aos estudantes desenvolver uma compreensão mais aprofundada do tema, superar as dificuldades iniciais e ampliar suas habilidades de raciocínio proporcional.

No estudo conduzido por Lara e Oliveira (2013), o objetivo foi investigar como os alunos do ensino médio, em duas instituições de ensino da cidade de Niterói, Rio de Janeiro, abordam e resolvem questões relacionadas à proporção. Os participantes da pesquisa foram estudantes do segundo e terceiro ano do ensino médio. Foi utilizado um questionário contendo desafios de proporção organizados em tarefas investigativas autênticas, que envolviam situações do cotidiano. O intuito era analisar a compreensão dos alunos em relação ao tema da proporção e como eles aplicavam seus conhecimentos para resolver problemas práticos do dia a dia.

De acordo com os autores, foi observado que a maioria dos estudantes do 3º ano foi capaz de resolver os problemas sem grandes dificuldades, enquanto no 2º ano apenas uma minoria teve sucesso. Esses resultados sugerem que os estudantes enfrentam dificuldades ao justificar suas soluções. Para aprimorar a compreensão desse conceito tão importante, é recomendado adotar atividades investigativas autênticas, que enfatizam as justificativas em vez das respostas, diferenciando-se de outros exercícios. Essas abordagens proporcionam uma melhora significativa na aquisição do conhecimento.

Oliveira e Garcia (2013) realizaram uma pesquisa que investiga o uso de elementos do raciocínio proporcional por professores do grupo de estudos "Comunidade de Práticas de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática - Cop Paem" na discussão e resolução de um problema específico. O estudo aborda a negociação de interpretações da razão representada como a/b e destaca as dificuldades enfrentadas pelos próprios professores de matemática ao lidar com esse tipo de questão. Além disso, é observado que muitos estudantes adotam uma abordagem excessivamente mecânica na resolução de problemas matemáticos, negligenciando o contexto da situação. Eles tendem a tentar aplicar uma fórmula imediatamente, sem considerar outras possibilidades de solução, o que resulta frequentemente em erros.

No exemplo apresentado, um problema de proporção foi proposto a um grupo de professores para solução. Uma das participantes resolveu rapidamente o problema, utilizando uma fórmula e chegando a um resultado que ela considerou correto. No entanto, ao examinar mais detalhadamente o contexto do problema, ela percebeu que cometeu um erro e somente então encontrou a resposta correta. Outros participantes do experimento também foram capazes de resolver o problema de maneira adequada, levando em consideração o contexto em que ele estava inserido.

A realização desse tipo de experimento com professores de matemática é de suma importância, como destacado no presente artigo, com o objetivo de modificar a abordagem mecânica na resolução de problemas matemáticos e incentivar uma análise mais racional do contexto. Silva (2005) conduziu um estudo que investigou as concepções de frações e a aprendizagem de seus alunos, mobilizados pelos professores na elaboração de uma sequência didática sobre o tema para a quinta série (6º ano), bem como as dificuldades e a autonomia durante esse processo. O estudo aborda diversas concepções de números fracionários, incluindo a concepção de parte-todo, concepção de medida, quociente, razão e operador, sendo essas as mais frequentemente encontradas nas pesquisas, embora existam outras abordagens.

Conforme Silva (2005), a fração, quando compreendida como razão, envolve a comparação entre as medidas de duas grandezas, ao invés de ser vista apenas como um número. Nesse sentido, a expressão "três quartos" na concepção de razão pode ser interpretada como "três para quatro" e está relacionada ao raciocínio proporcional, com a representação de proporção, por exemplo, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. No entanto, de modo geral, o estudo destaca que os professores tendem a desenvolver nas aulas da quinta série uma abordagem matemática para números fracionários que é principalmente baseada na concepção parte-todo em contextos de superfícies, utilizando a técnica da dupla contagem das partes. Pouca ênfase é dada à concepção de razão, utilizando a mesma técnica.

A pesquisa demonstrou que a falta de um tratamento adequado no estudo de frações, considerando suas diferentes concepções, acarreta prejuízos e limitações na capacidade de resolver diversas situações ou tarefas que demandam o uso de mais de uma concepção. É importante ressaltar que algumas dessas tarefas exigem uma compreensão sólida da razão como concepção fundamental.

O estudo conduzido por Araújo, Oliveira e Gitirana (2004) teve como objetivo principal analisar o desempenho dos alunos matriculados em escolas públicas estaduais localizadas na região do agreste pernambucano. O foco da análise foi a resolução de questões que envolvem proporções, com ênfase na comparação dos resultados obtidos entre as séries do 4º, 6º, 8º ano do Ensino Fundamental e o 2º ano do Ensino Médio.

Os resultados obtidos nesta pesquisa revelaram as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao resolver problemas que não apresentavam um valor unitário explícito. Observou-se que os alunos encontraram maior dificuldade nessas situações. Por outro lado, problemas que forneciam um valor unitário ou que requeriam sua determinação não foram tão desafiadores. Quando o valor unitário estava presente ou era exigido no problema, os estudantes encontraram maior facilidade na resolução.

De acordo com os pesquisadores, o objetivo do estudo foi identificar as habilidades e dificuldades dos estudantes em diferentes níveis educacionais ao resolver problemas envolvendo proporções. Eles enfatizaram a importância de examinar os erros e acertos dos estudantes para compreender como eles estão assimilando esse conhecimento.

No estudo realizado por Floriana (2004), foram apresentadas várias estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental e médio na resolução de problemas de multiplicação, com o intuito de identificar aspectos que evidenciassem a compreensão do conceito de proporcionalidade. A pesquisa foi conduzida em uma escola particular em Itajaí, SC, e contou com a participação de 82 alunos com idades entre 12 e 17 anos, matriculados na 6ª, 8ª séries do ensino fundamental e 2ª série do ensino médio. Os alunos foram solicitados a resolver nove problemas multiplicativos baseados no isomorfismo de medidas adaptado de Vergnaud.

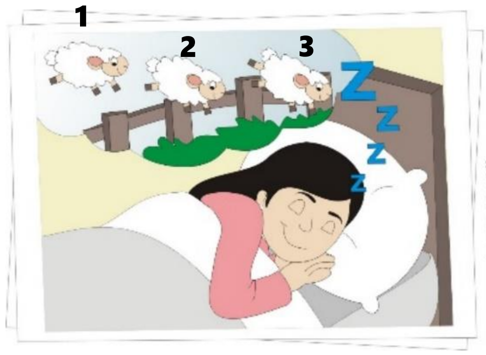
O estudo foi conduzido por meio da apresentação de um instrumento contendo problemas multiplicativos adaptados de Vergnaud (1991) aos 82 estudantes. Os problemas foram organizados em duas categorias principais, considerando a relação de proporção: grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Cada categoria foi subdividida em três subcategorias que levaram em consideração as relações numéricas: unitária, múltipla e não múltipla. Além disso, foram consideradas duas condições: problemas com a mesma unidade de medida e problemas com unidades de medida diferentes.

Ao analisar os dados coletados, o autor constatou que os estudantes utilizaram diferentes estratégias na resolução de problemas de proporção direta unitária. Nas séries do ensino fundamental, as estratégias mais comuns foram as operações aritméticas na 6ª série e a adição consecutiva na 8ª série. Já na 2ª série do ensino médio, a estratégia predominante foi a regra de três.

No caso dos problemas de proporção direta múltipla, verificou-se que a estratégia do fator de proporção foi a mais utilizada tanto na 6ª quanto na 8ª série do ensino fundamental, seguida da adição consecutiva. Na 2ª série do ensino médio, apenas duas táticas foram empregadas: o uso do valor unitário e a aplicação da regra de três. Observou-se também que, na categoria de problemas de proporção direta, os alunos do ensino fundamental empregaram diversas estratégias para resolvê-los. Na análise dos dados dos alunos da 6ª série, constatou-se que eles ainda não haviam recebido instrução formal sobre proporcionalidade e não tinham conhecimento do algoritmo da regra de três. Por outro lado, no ensino médio, a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a regra de três, embora muitos tenham cometido erros ao aplicá-la em problemas de proporção inversa.

A partir dos estudos de diagnóstico analisados, pode-se inferir que os resultados indicam uma falta de compreensão por parte dos estudantes em relação ao conceito de razão e proporção. Essa dificuldade não se restringe apenas aos alunos, pois uma pesquisa com professores também revelou que alguns deles, ao resolverem os problemas de maneira mecânica e sem interpretar corretamente o enunciado, acabam cometendo erros, especialmente nos problemas de proporcionalidade inversa. Portanto, esses estudos evidenciam que os alunos nem sempre compreendem ou conseguem justificar suas respostas ao resolver os problemas, indicando que realizam os cálculos, mas não têm um entendimento profundo do processo.

4 IDENTIFICANDO A IDEIA DE PROPORÇÃO



Caro estudante,

Um dos processos matemáticos mais intuitivos e naturais é a contagem de objetos.

Se nos colocarmos diante um pequeno grupo de coisas, involuntariamente, começaremos a contá-los, de um por um, porque fomos condicionados desde cedo a ir atrás de quantidades desse jeito.

Nesta aula, porém, queremos te convidar a um novo olhar sobre o modo de **contar objetos.**

O que você está acostumado a FAZER?

CONTAGEM DIRETA DOS OBJETOS (de um por um)

Qual é o nosso CONVITE a você?

CONTAGEM INDIRETA DOS OBJETOS (usando comparações)

A nossa proposta é a de deixar um pouco de lado a contagem direta dos objetos, tomados um a um, e estimular a busca pela percepção de um **padrão de comparação entre as quantidades de dois grupos de objetos**, chegando, indiretamente, ao total de componentes de um deles a partir daquilo que consta no outro.

Por exemplo, se queremos saber quantos alunos há em uma escola, não precisamos contá-los um a um. Basta verificar se existe algum **padrão** entre a quantidade de alunos e a quantidade de elementos de algum outro conjunto, como a quantidade de professores, por exemplo.

Aí, se soubermos quantos alunos há **PARA CADA** professor, basta contarmos os professores e multiplicar o resultado por este padrão, né?

Ou seja, se soubermos que, em uma escola, há **1 professor PARA CADA 40 alunos**, basta contar o número de professores (que é bem menor do que o número de alunos) e multiplicar o resultado por quarenta para descobrir o número de alunos. Afinal, por uma **indução simples**, analisando os casos iniciais, é fácil **perceber o seguinte padrão de comparação**.

PADRÃO DE COMPARAÇÃO	
Professores	alunos
1	**40**
2	80
3	120
...	...
N	**40.n**

ALIÁS, AQUI, VALE UM PARADA PARA A REFLEXÃO SOBRE A LINGUAGEM QUE ESTAMOS UTILIZANDO!!! Perceba que a chave de leitura do texto utilizada para dimensionar este padrão de comparação é a compreensão daquilo que pode ser escrito em torno da expressão "***... PARA CADA...***".

No caso acima, tínhamos:

1 professor **PARA CADA** 40 alunos

O foco desta aula estará justamente em **treinar o olhar** para identificar com mais facilidade esse tipo de **padrão de repetição**, ou melhor, esse tipo de **comparação de quantidades** que, nos enunciados dos problemas, costumam aparecer em torno da expressão **"... PARA CADA..."** .

Aliás, nem precisamos ficar limitados a estes casos em que efetuamos simples contagens das quantidades de objetos. Tal estratégia de comparação pode ser utilizada também na busca por uma **relação de comparação entre grandezas de tipos diferentes** que aparecem nas mais variadas situações reais.

Como exemplo desta segunda aplicação, imagine um carro que se locomove em **movimento uniforme a 80km/h** (leia-se, 80 km **POR** hora).

Na própria definição de movimento uniforme, sempre está presente a ideia de que a velocidade é constante, ou seja, está presente o nosso tão desejado **padrão de repetição** do comportamento do veículo.

Afinal dizer que sua velocidade é de 80km/h (80km por hora), equivale a dizer que ele se moverá a:

80 km **PARA CADA** 1h

Observe, assim, que a ideia de velocidade constante carrega consigo um **padrão de comparação** entre os valores numéricos do **espaço percorrido** e do **tempo gasto para percorrê-lo**, que poderia ser representado por uma tabela bem semelhante à anterior:

PADRÃO DE COMPARAÇÃO velocidade constante = 80km/h	
espaço percorrido (km)	tempo (h)
80	**1**
160	2
240	3
...	...
80.t	**t**

Nos dois casos acima, começamos a ser colocados diante de um dos conceitos mais fundamentais da matemática que é o de PROPORÇÃO.

No primeiro exemplo, trabalhamos com QUANTIDADES DE OBJETOS (ou melhor, com NÚMEROS) que eram diretamente proporcionais, enquanto, no segundo exemplo, trabalhamos com GRANDEZAS diferentes cujas medidas eram diretamente proporcionais.

A IDEIA DE PROPORÇÃO corresponde à identificação de um padrão de comparação, que nos leva a:	
NÚMEROS PROPORCIONAIS	**GRANDEZAS PROPORCIONAIS**

Aliás, para bem além da velocidade, há várias outras grandezas chamadas de **grandezas relativas** que são definidas justamente para representar uma ideia de proporção entre duas **grandezas absolutas**.

Um bom exemplo de outra grandeza relativa que carrega consigo uma ideia de proporção é a **densidade de um corpo (ou de um material)**.

Por exemplo, quando dizemos que a densidade do chumbo é de 11,3 g/mL, estamos falando que existe um padrão de repetição segundo o qual:

a massa aumentará de 11,3 g **PARA CADA** 1ml a mais no volume

ou

a massa reduzirá de 11,3 g **PARA CADA** 1ml a menos no volume

Durante toda esta aula, o primeiro foco estará justamente em **treinar o olhar de vocês** para deixá-lo atento a estes **padrões de comparação** que correspondem à ideia de proporção, facilitando a sua identificação nos mais diversos textos e contextos.

No entanto, precisaremos ainda ir além da identificação, apresentando **as ferramentas matemáticas** que podem ser utilizadas no trato com esses números e com essas medidas que estão em proporção.

O desafio será o de efetuar uma nova leitura da situação concreta que nos é apresentada através do uso da expressão “para cada” e, na sequência, aplicar as ferramentas matemáticas disponíveis para lidar com os cálculos necessários.

4.1 Caracterizando a proporção por uma multiplicação

Daquilo que apresentamos até aqui, já deve ter ficado claro que **as proporções surgem quando um padrão de comparação está se repetindo.**

E se ele está aparecendo **mais de uma vez,** nada pode ser mais natural do que se utilizar da OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO para representá-lo.

Por exemplo, se constatarmos que, em uma festa, há uma proporção fixa de **2 homens para cada 3 mulheres**, poderemos dizer que qualquer crescimento no número de homens precisa vir acompanhado por um aumento correspondente no número de mulheres, de sorte que:

Duplicando-se o número de homens, **duplicar-se-á** também o número de mulheres

Triplicando-se o número de homens, **triplicar-se-á** também o número de mulheres

... e, assim por diante.

Organizando estes momentos diferentes em uma tabela, facilmente percebemos que é a operação de MULTIPLICAÇÃO QUE COMANDA AS MUDANÇAS:

	PADRÃO DE COMPARAÇÃO **2 homens para cada 3 mulheres**	
	Nº de homens	Nº de mulheres
Inicial	(**2**).1 = 2	(**3**).1 = 3
Dobrando	(**2**).2 = 4	(**3**).2 = 6
Triplicando	(**2**).3 = 6	(**3**).3 = 9
...	...	...
Generalizando a multiplicação	(**2**).x	(**3**).x

Por sinal, para generalizar esse processo de cálculo e encontrar aquilo que acontece em qualquer outro momento, basta observar que os 2 números definidores da proporção inicial sempre são multiplicados por um mesmo valor. Quando um é dobrado, o outro também é dobrado. Quando um é triplicado, o outro também é. Ou seja, daqui para frente podemos guardar a seguinte regra:

SEMPRE QUE UMA PROPORÇÃO INICIAL NOS FOR APRESENTADA, para encontrar o que acontece com a proporção em um outro momento futuro:

basta multiplicar todos os seus números por um mesmo valor genérico (x)

Por exemplo, se dissermos que, em uma sala, há **9 homens para cada 13 mulheres**, podemos dizer, genericamente, que o total de homens pode ser dado por **9.x**, com o total de mulheres sendo igual a **13.x**.

PADRÃO DE COMPARAÇÃO	**9 homens para cada 13 mulheres**	
	Nº de homens	Nº de mulheres
Proporção apresentada no enunciado	9	13
Quantidade que será considerada como existente em um momento genérico	9.x	13.x

Enfim, os valores reais de cada quantidade passam a ser obtidos facilmente a partir da inclusão de uma incógnita (x) multiplicando simultaneamente TODOS os números indicadores da proporção.

Exercício resolvido 01

Em uma escola, há 30 alunos para cada professor. Se, após o sucesso de um evento escolar, o diretor resolvesse entregar um mesmo prêmio para todos eles, precisaria comprar 930 itens. Como a escola não dispunha de orçamento para isso, ele resolveu mudar a estratégia e entregar prêmios apenas aos professores. Quantos itens ele acabou comprando?

Solução:

De início, basta ler a proporção pela nossa regra da multiplicação. Ou seja, **se há 30 alunos para cada professor**, então:

- Nº de alunos = 30.x
- Nº de professores = 1.x = x

Se o total de itens para atender a todos correspondia a 930, então:

$$30.x + x = 930$$

$$31.x = 930$$

$$x = 30$$

Ou seja, na escola, há:

- Nº de alunos = 30.x = 30. 30 = 900
- Nº de professores = 1.x = x = 30

Como, em sua nova estratégia, ele pretende premiar apenas os professores, basta comprar 30 itens.

Resposta: 30 itens

Exercício resolvido 02

Uma empresa foi aberta há 5 anos por dois sócios e recebeu um aumento de seu capital social após a entrada de um 3º sócio dois anos depois de seu início de atividades. Se, em 2022, ela precisa repartir um lucro de R$ 3900,00 entre os 3 sócios em quantidades proporcionais aos seus tempos de participação no negócio, quanto deve ficar com o sócio mais novo no empreendimento?

Solução:

De início, convém especificar os tempos de negócio de cada sócio:

- sócio A = 5 anos de empresa
- sócio B = 5 anos de empresa
- sócio C = 3 anos de empresa, pois só passou a ser sócio dois anos depois dos demais.

Se os lucros serão repartidos proporcionalmente a estes tempos de participação na empresa, basta ler a proporção pela nossa regra da multiplicação. Ou seja, basta considerar que:

- lucro do sócio A = 5.x
- lucro do sócio B = 5.x
- lucro do sócio C = 3.x

Somando todas as parcelas, temos:

$$5.x + 5.x + 3.x = 3900$$
$$13.x = 3900$$
$$x = 300$$

Substituindo este valor de x, encontramos os seguintes lucros individuais:

- lucro do sócio A = 5.x = 5. 300 = 1500
- lucro do sócio B = 5.x = 5. 300 = 1500
- lucro do sócio C = 3.x = 3. 300 = 900

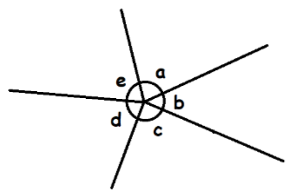
Ou seja, o sócio mais novo no negócio receberá R$ 900,00.

Resposta: R$ 900,00

Tal incógnita (x) que multiplica todos os números indicadores da proporção é chamada de constante de proporcionalidade.

Exercício resolvido 03

Cinco semirretas partem de um mesmo ponto, demarcando 5 ângulos adjacentes no plano, conforme figura abaixo.



Se estes ângulos (a, b, c, d, e) têm medidas proporcionais, respectivamente, a 2, 3, 4, 5, e 6, qual é o valor do maior destes ângulos?

Solução:

Se ângulos *(a, b, c, d, e)* têm medidas proporcionais, respectivamente, a 2, 3, 4, 5 e 6, então, fazendo-se a inclusão da constante de proporcionalidade x, os seus valores reais passam a ser representados por:

a = 2.x b = 3.x c = 4.x d = 5.x e = 6.x

Da própria figura, se percebe que a soma deles valerá 360°:

$$2.x + 3.x + 4.x + 5.x + 6.x = 360$$

$$20.x = 360$$

$$x = 18$$

Substituindo este valor de x, encontramos os seguintes ângulos:

a = 2.x = 36° b = 3.x = 54° c = 4.x = 72° d = 5.x = 90° e = 6.x = 108°

Daí, fica fácil ver que o maior deles vai 108°.

Resposta: O maior ângulo vale 108°.

4.2 Caracterizando a proporção com frações

Uma segunda consequência bastante interessante decorre diretamente da primeira.

Se todos os **valores de base da proporção** precisam ser multiplicados por um mesmo número “x” para chegarem aos seus **valores reais em cada situação**, então as frações estabelecidas sucessivamente entre os correspondentes números destes 2 grupos de valores não se alteram e sempre resultam na constante de proporcionalidade.

Ou seja, se os números *a, b, c, d, e* têm medidas diretamente proporcionais a 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente, então, para além de escrevê-los com o uso da constante de proporcionalidade x como:

a = 2.x   b = 3.x   c = 4.x   d = 5.x   e = 6.x

ainda podemos montar as correspondentes frações entre eles, obtendo como resposta em cada fração justamente a mesma constante de proporcionalidade x, senão vejamos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5} = \frac{e}{6} = x$$

De um modo geral, pode-se dizer que a fração formada entre os **valores reais de cada medida** e os **valores de referência de suas proporções** sempre terá como resultado a constante de proporcionalidade (x).

NÚMEROS REAIS A ENCONTRAR	**a**	**b**	**c**	**d**	**E**
Números referenciais da proporção	2	3	4	5	6
frações montadas	$\boldsymbol{\frac{a}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{b}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{c}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{d}{5}}$	$\boldsymbol{\frac{e}{6}}$

O grande teste de proporcionalidade consiste assim em avaliar se todas estas frações dão como resultado o mesmo valor x, que corresponde à constante de proporcionalidade do problema.

4.3 Definindo um padrão de proporcionalidade – frações de mesmo valor

Se, relacionando um **número real** da 1ª lista com o seu correspondente **número referencial da proporção** que se encontra na 2ª lista, encontrarmos frações de um mesmo valor (dado pela constante de proporcionalidade x), então é justamente essa fração que caracteriza o padrão de repetição.

$$padrãoderepetição = \frac{númerorealda1ªlista}{númeroderefer\hat{e}nciadaproporçãoda2ªlista}$$

Desse modo, enquanto a fração se mantiver com o mesmo resultado, continuaremos com números que seguem o mesmo padrão de proporção.

Exercício resolvido 04
Avalie se os números 2, 3, 4 e 5 são diretamente proporcionais a 16, 24, 28 e 40.
Solução:
Para verificarmos se os números *2, 3, 4 e 5 são diretamente proporcionais a 16, 24, 28 e 40, basta montarmos as frações correspondentes entre os números das duas listas e verificarmos se os resultados geram uma mesma constante de proporcionalidade.* $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ $\frac{5}{40} = \frac{1}{8}$ Como se vê, na terceira posição, surgiu uma fração que não mantém o padrão de proporção das demais frações. Nestes casos, diz-se que apenas os números *2, 3 e 5 são diretamente proporcionais a 16, 24 e 40.*   Para corrigirmos a lista de números deixando todos na mesma proporção, precisaríamos substituir o número 28 por outro que fizesse o padrão de proporção ser o mesmo dos demais. Tal número seria exatamente o número 32, senão vejamos: $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ Colocando o 32 em substituição ao 28, todas as frações correspondentes passariam a ser iguais a 1/8, criando duas listas inteiramente proporcionais. Daí, poderíamos dizer que os números *2, 3, 4 e 5 são diretamente proporcionais a 16, 24, 32 e 40, pois todas as frações correspondentes têm a mesma resposta.*

4.4 Ideia de razão

Como as **frações** são ferramentas de fácil uso para avaliar se existe algum **padrão de proporcionalidade** entre os dados posicionados em duas listas numéricas, convencionou-se que elas poderiam ser adequadas também para definir se existe uma proporcionalidade entre as medidas de 2 grandezas distintas.

A fração montada a partir da comparação entre os resultados de duas grandezas em um mesmo momento é aquilo que, a partir de agora, chamaremos de razão entre essas grandezas:

$$Razão\ entre\ A\ e\ B = \frac{valoresdagrandezaA}{valoresdagrandezaB}$$

E, para verificar se as grandezas A e B são proporcionais, precisaremos calcular a razão entre as medidas das grandezas A e B em vários momentos diferentes, verificando se o comportamento dessa fração se mantém com o mesmo resultado.

Por exemplo, para analisar se o espaço percorrido por um carro é proporcional ao tempo gasto no percurso, precisamos tomar os vários pontos da sua trajetória e consolidar os resultados encontrados até cada um deles.

Distância Percorrida	80 km	120 km	160 km	200 km	240 km	280 km
Tempo gasto	2h	3h	4h	5h	6h	7h

Calculando as possíveis razões entre as distâncias percorridas e os tempos gastos, nas suas sucessivas posições, encontramos que, em todas as frações, o resultado é sempre igual a 40km/h.

$$\frac{80km}{2h} = \frac{120km}{3h} = \frac{160km}{4h} = \frac{200km}{5h} = \frac{240km}{6h} = \frac{280km}{7h} = 40\,km/h$$

Isso garante que, no caso do comportamento deste carro, o espaço percorrido e o tempo gasto são grandezas diretamente proporcionais. Aliás, esta razão constante corresponde àquilo que chamamos de velocidade constante.

4.5 Razões especiais

Dentre os vários exemplos de uso das frações como representativas da relação entre duas grandezas destacamos os seguintes CASOS ESPECIAIS:

a) Escala = $\frac{distância\ no\ desenho}{distância\ real} = \frac{d}{D}$

b) Velocidade Média (V_m) = $\frac{distância\ percorrida}{tempo\ gasto\ no\ percurso} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

c) Densidade = $\frac{massa}{Volume} = \frac{m}{V}$

d) Densidade Demográfica = $\frac{nº\ de\ habitantes}{área\ ocupada} = \frac{população}{Área}$

e) Vazão = $\frac{Volume\ de\ líquido\ passante}{tempo\ gasto\ no\ percurso} = \frac{\Delta Volume}{\Delta t}$

f) Concorrência = $\frac{número\ de\ candidatos\ inscritos}{número\ de\ vagas}$

EM QUALQUER CASO, quando igualamos duas frações, correspondentes a razões do mesmo tipo, acaba surgindo a ideia de números ou de grandezas em proporção.

4.6 Conceito de proporção

Proporção é uma igualdade de duas razões.

Dados números reais a, b, c e d, todos diferentes de zero, dizemos que eles formam, nesta ordem, uma proporção, quando a razão entre o primeiro e o segundo (a : b) é igual à razão entre o terceiro e o quarto (c : d). Representamos isto por:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad a : b = c : d$$

E lemos: “a está para b assim como c está para d”.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, destacamos que os termos a e d são chamados extremos e os termos b e c são chamados meios.

MEIOS

$$a : b = c : d$$

EXTREMOS

→ **Propriedade Fundamental**

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

EXTREMOS MEIOS

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ou seja: a.d = b.c

→ **Soma dos Antecedentes e Consequentes**

Em toda proporção, se somarmos alguns numeradores e, depois, somarmos os seus correspondentes denominadores encontraremos novos dois números que estarão na mesma proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

QUARTA PROPORCIONAL

Dados três números reais, a, b e c, não-nulos, chama-se de quarta proporcional desses números dados, o número x que completa a proporção com eles, conforme abaixo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Note que, a quarta proporcional forma uma proporção com os números **a**, **b** e **c**, nessa ordem.

TERCEIRA PROPORCIONAL

Dados dois números reais a e b, não-nulos, chama-se de terceira proporcional desses números o número x tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

SÉRIE DE RAZÕES IGUAIS

Uma série de razões iguais é uma igualdade de duas ou mais razões. Também, pode ser chamada de proporção múltipla. Em símbolos, temos:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

A principal propriedade a ser utilizada é justamente a da soma dos antecedentes (numeradores) e dos consequentes (denominadores):

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = k$$

4.7 Números diretamente proporcionais

Os números de uma sucessão numérica A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) são ditos diretamente proporcionais aos números da sucessão numérica B = (b_1, b_2, b_3, ..., b_n), quando as razões de cada termo de A pelo seu correspondente em B forem iguais, isto é:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Como já se disse, este valor "k" que surge como resultado de todas as frações é chamado de fator de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

4.8 Números inversamente proporcionais

Os números de uma sucessão numérica A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) são inversamente proporcionais aos números da sucessão numérica B = (b_1, b_2, b_3, ... b_n), quando os números da 1ª lista são proporcionais aos inversos dos números da 2ª lista:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3}} = \ldots \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k$$

Este valor k também é chamado de fator ou coeficiente de proporcionalidade.

Lembrando que, na divisão de frações, repetimos a fração que consta no numerador e a multiplicamos pelo inverso daquela que consta no denominador, a construção dos números inversamente proporcionais equivale a dizer que **são iguais os produtos de cada termo da sucessão A pelo seu correspondente em B**, isto é:

$$a_1 \,.\, b_1 = a_2 \,.\, b_2 = a_3 \,.\, b_3 = \ldots = a_n \,.\, b_n = k$$

Exercício resolvido 05

Verifique se os números da sucessão (3, 6, 8) são ou não inversamente proporcionais aos números da sucessão (24, 12, 9). Em caso afirmativo, determine o coeficiente de proporcionalidade **"k"**.

Solução:

Para verificarmos se os números *3, 6 e 8 são inversamente proporcionais aos números 24, 12 e 9, basta montarmos as multiplicações correspondentes:*

$$3 \,.\, 24 = 72$$

$$6 \,.\, 12 = 72$$

$$8 \,.\, 9 = 72.$$

Como todas as multiplicações geraram o valor 72, temos 2 listas de números que são inversamente proporcionais e que são relacionado por uma constante de proporcionalidade dada justamente pelo 72.

Exercício resolvido 06
Se uma dúzia de ovos custa R$ 1,40, então quanto deve custar uma bandeja com 30 ovos?
Solução:

Faça uma tabela relacionando a quantidade de ovos ao preço, e por meio de setas verifique se estas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

Quantidade de ovos	Preço (R$)
12	1,40
30	x

As setas têm o mesmo sentido porque o preço é uma grandeza diretamente proporcional ao número de ovos, ou seja, quanto mais ovos se quer comprar, mais dinheiro se tem que gastar.

Logo: $\frac{12}{30} = \frac{1,40}{x} \Rightarrow x = \frac{30\ .\ 1,40}{12} \Rightarrow x = 3,50$

Resposta: Uma bandeja com 30 ovos deve custar R$3,50.

Exercício resolvido 07
Dezoito operários, trabalhando 7 horas por dia durante 12 dias, conseguem realizar um determinado serviço. Trabalhando 9 horas por dia, 12 operários farão o mesmo serviço em quantos dias?
1ª Solução:

Montando a tabela e tomando a quantidade de dias como referência, temos:

Operários	Horas por dia	Dias
18	7	12
12	9	x

Logo:

$\frac{12}{x} = \left(\frac{12}{18}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right) \Rightarrow$ 18.7 = 9.x □ x = 14 dias

Resposta: São necessários 14 dias.

2ª Solução:

Montando a tabela e tomando o nº de operários como referência, temos:

Operários	Horas por dia	Dias
18	7	12
12	9	x

Logo:

$$\frac{18}{\cancel{12}} = \left(\frac{9}{7}\right)\cdot\left(\frac{x}{\cancel{12}}\right) \Rightarrow$$ 18.7 = 9.x □ x = 14 dias

Resposta: São necessários 14 dias.

4.9 Regra da sociedade comercial

É justo que, em uma sociedade, os lucros e os prejuízos sejam distribuídos entre os vários sócios, proporcionalmente aos capitais empregados e ao tempo durante o qual estiveram empregados na constituição dessa sociedade.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lucro} \sim \text{Capital}\\ \text{Lucro} \sim \text{Tempo}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{Lucro}}{\text{Capital}\cdot\text{Tempo}} = \text{cte}$$

É uma aplicação prática da divisão em partes **diretamente proporcionais**.

Exercício resolvido 08

João e Maria montaram uma lanchonete. João entrou com R$ 20.000,00 e Maria, com R$ 30.000,00. Se ao fim de um ano eles obtiveram um lucro de R$ 7.500,00, quanto vai caber a cada um?

Solução:

Utilizando a regra da sociedade, vemos que, para cada um dos sócios, os lucros serão repartidos pelas seguintes frações:

$$\frac{\text{lucro}}{\text{capital}\cdot\text{tempo}} = \frac{J}{20000\cdot 1} = \frac{M}{30000\cdot 1}$$

onde **J** é o lucro que cabe ao João e **M** é o lucro que cabe à Maria.

Simplificando a proporção, temos:

$$\frac{J}{2} = \frac{M}{3} = \frac{J+M}{2+3} = \frac{7500}{5} = 1500 \Rightarrow \begin{cases} J = 3000 \\ M = 4500 \end{cases}$$

Resposta: João lucrou R$ 3.000,00 e Maria lucrou R$ 4.500,00.

Exercício resolvido 09

Três sócios lucraram juntamente R$ 21.500,00 após um certo investimento. Para tanto, o primeiro entrou com um capital de R$ 7.000,00, durante 1 ano, o segundo com R$ 8.500,00 durante 8 meses e o terceiro com R$ 9.000,00 durante 7 meses. Quanto lucrou cada um?

Solução:

Utilizando a regra da sociedade, vemos que, para cada um dos sócios, os lucros serão repartidos pelas seguintes frações:

$$\frac{\text{lucro}}{\text{capital} \cdot \text{tempo}} = \frac{x}{7000 \cdot 12} = \frac{y}{8500 \cdot 8} = \frac{z}{9000 \cdot 7}$$

onde x, y e z são as partes de cada um no lucro.

Simplificando a proporção, temos:

$$\frac{x}{70 \cdot 12} = \frac{y}{85 \cdot 8} = \frac{z}{90 \cdot 7} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{840} = \frac{y}{680} = \frac{z}{630} = \frac{x+y+z}{2150} = \frac{21500}{2150} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8400 \\ y = 6800 \\ z = 6300 \end{cases}$$

Resposta: O primeiro lucrou R$ 8.400,00; o segundo, R$ 6.800,00 e o terceiro, R$ 6.300,00.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1) Em um concurso vestibular, a razão entre o número de candidatos inscritos na área de ciências humanas e na de ciências exatas é, nessa ordem, 9/7. Supondo que a universidade divide todas as suas vagas entre estas duas áreas, a porcentagem de candidatos inscritos na área de ciências humanas é:

a) 55,5% b) 56,25% c) 56,5% d) 56,75% e) 57,5%

2) Em um bar, suco de tangerina é uma mistura de xarope com água na razão de 1 parte de xarope para 2 de água e refresco de tangerina é uma mistura de xarope com água na razão de 1 para 5. Juntando dois copos de suco com um de refresco, obtemos uma mistura de xarope com água na razão de:

a) 1 para 3
b) 2 para 5
c)
d) 5 para 13
e) 6 para 17

c) 3 para 5

3) A água do Mediterrâneo contém 35mg de sal por cm^3 e a do Atlântico, 25mg. A quantidade de água doce que deve ser acrescentada a 1 litro de água do Mediterrâneo para se ter a mesma concentração de sal que a do Atlântico é, em litros, igual a:

a) 0,3 b) 0,4 c) 0,5 d) 0,6 e)0,7

4) Uma pera tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 kg de pera para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (Use que 1 litro de água tem massa de 1 kg.)

a) 15 litros b) 30 litros c) 45 litros d) 75 litros e) 80 litros

5) Na última prova do ENEM, o aluno Angelo observou que, no geral, para cada 5 questões certas, acabou deixando uma questão errada no gabarito. Se a prova possuía 180 itens, quantas questões foram respondidas com erro?

a) 16 b) 25 c) 30 d) 36 e) 42

6) Em uma festa, há 14 homens para cada 11 mulheres. O percentual de mulheres na festa é:

a) 78,6% b) 62,3% c) 48,2% d) 44% e) 35,7%

7) A porcentagem de não fumantes em uma cidade é de 67%. Se 3 em cada 11 fumantes deixarem de fumar, qual será o novo percentual de fumantes na cidade?

a) 33% b) 27% c) 21% d) 30% e) 24%

08) Na central de telemarketing de uma fábrica de produtos eletrônicos, há uma média de 30 reclamações para cada atendente. Se, após um aumento no número de atendentes, não houve aumento no número de reclamações, mas a média de reclamações passou para 25 reclamações por atendente, qual é a razão entre o número de novos atendentes e o número anterior de atendentes?

a)6/5 b) 5/6 c) 1/6 d) 1/5 e) 1/25

9) Um mecânico regula um automóvel modelo X em 40 minutos, enquanto seu auxiliar realiza o mesmo trabalho em duas horas. Trabalhando juntos, regularão 3 automóveis do mesmo modelo X em:

a) 70 minutos b) 80 minutos c) 90 minutos d) 100 minutos

10) Trabalhando 10 horas, durante 15 dias, 8 pedreiros fizeram uma parede de concreto de $48m^2$. Se estivessem trabalhando 12 horas diárias e se o número de operários fosse reduzido de 2, quantos dias levariam para fazer outra parede cuja área fosse o dobro daquela?

a) 33 dias. b) 33 dias e 8 horas. c) 33 dias e 4 horas. d) 33 dias e 6 horas. e) 33 dias e 5 horas.

EXERCÍCIOS ENEM

01. Um grupo de pessoas foi dividido em duas metades. Na primeira metade, a razão do número de homens para o de mulheres é de 1 para 2 e, na segunda metade, a razão do número de mulheres para o de homens é de 2 para 3.

No grupo todo, a razão do número de mulheres para o de homens é de:

a) 19:11 b) 15:11 c) 8:7 d) 16:15 e) 15:14

02. (ENEM 2013) Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

a) A, A, A, A. b) A, B, A, B. c) A, B, B ,A. d) B, A, A, B. e) B, B, B, B.

03. (ENEM 2016) Densidade absoluta (d) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos: dA, dB, dC. Os alunos verificaram que o corpo A possuía 1,5 vez a massa do

corpo B e esse, por sua vez, tinha 3/4 da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira

a) dB<dA<dC

b) dB=dA<dC

c) dC<dB=dA

d) dB<dC<dA

e) dC<dB<dA

04. *(ENEM 2011) Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.*

Época. 26 abr. 2010 (adaptado)

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

a) 4 mil. b) 9 mil. c) 21 mil. d) 35 mil. e) 39 mil.

04. (ENEM 2012) *José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.*

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350 b) 300, 300, 150 c) 300, 250, 200 d) 200, 200, 100 e) 100, 100, 50

05. (ENEM 2013) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75 b) 2,00 c) 2,33 d) 4,00 e) 8,00

07. (ENEM 2013) - Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2 b) 4 c) 5 d) 8 e) 9

08. O estoque de determinado produto de um laboratório tem previsão de duração de 18 dias a partir desta data. Porém, o fabricante avisou que vai atrasar em 9 dias a próxima entrega do produto, obrigando assim o laboratório a programar uma redução no consumo diário anterior. Supondo que a redução do consumo seja a mesma todos os dias, a razão entre o novo consumo diário e o previsto inicialmente é:

a) 5/6 b) ¾ c) 2/3 d) ½ e) 1/3.

09. (ENEM 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo 1500 telhas ou 1200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos b) 360 tijolos c) 400 tijolos d) 480 tijolos e) 600 tijolos

10. Uma fábrica produz normalmente 3000 peças em 2,5 dias de trabalho, operando com 6 máquinas de igual capacidade operacional. No momento, porém, com duas das máquinas sem funcionar, a fábrica deve atender a uma encomenda de 4000 peças. Quantos dias de trabalho serão necessários?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

11. (ENEM 2016) Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m², sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

    Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

    a) $(500 \cdot 81)/A \cdot D^2$ b) $(500 \cdot A)/D^2$ c) $(500 \cdot D^2)/A$ d) $(500 \cdot A \cdot D^2)/81$
    e) $(500 \cdot 3 \cdot D^2)/A$

12. (ENEM 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

    Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

    a) 12 kg b) 16 kg c) 24 kg d) 36 kg e) 75 kg

13. (ENEM 2016) Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

    - Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
    - Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
    - Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
    - Marca O: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
    - Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão;

    Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

    Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

    A marca a ser escolhida é

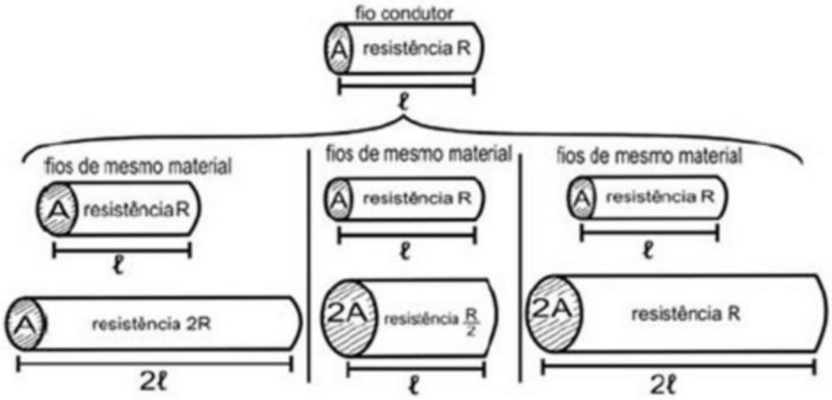
    a) A b) B c) C d) D e) E

14. (ENEM 2011) A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (l), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A). dado o mesmo comprimento (l) e
- comprimento (l) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (l), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (l) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

a) direta, direta e direta.
b) direta, direta e inversa.
c) direta, inversa e direta.
d) inversa, direta e direta.
e) inversa, direta e inversa.

15. Bárbara é dona de uma livraria e deseja repor o estoque de canetas de seu estabelecimento. Para isso, convidou um representante comercial que lhe forneceu uma tabela com os tipos de canetas disponíveis e seus respectivos desempenhos. A tabela apresentava os seguintes resultados:

Tipo de Caneta	Preço	N.º médio de palavras que ela escreve com a carga de tinta
I	R$ 2,50	20 000
II	R$ 3,50	25 000
III	R$ 3,00	30 000
IV	R$ 4,00	35 000
V	R$ 5,00	40 000

Para que Bárbara tenha o melhor custo/benefício na compra das canetas, ela deve comprar as do tipo

(A) I. (B) II. (C) III. (D) IV. (E) V.

16. (ENEM 2018) Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe

Grupo de risco	População (milhão)	População já vacinada	
		(milhão)	(%)
Crianças	4,5	0,9	20
Profissionais de saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Disponível em: http://portalsaude.saude.gov.br. Acesso em: 16 ago. 2012.

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

a) 12 b) 18 c) 30 d) 40 e) 50

17. (ENEM 2022) O etanol é um combustível produzido a partir da fermentação da sacarose presente no caldo de cana- -de-açúcar. Um dos fatores que afeta a produção desse álcool é o grau de deterioração da sacarose, que se inicia após o corte, por causa da ação de microrganismos. Foram analisadas cinco amostras de diferentes tipos de cana-de- -açúcar e cada uma recebeu um código de identificação. No quadro são apresentados os dados de concentração de sacarose e de microrganismos presentes nessas amostras.

	Amostra de cana-de-açúcar				
	RB72	RB84	RB92	SP79	SP80
Concentração inicial de sacarose (g L^{-1})	13,0	18,0	16,0	14,0	17,0
Concentração de microrganismos (mg L^{-1})	0,7	0,8	0,6	0,5	0,9

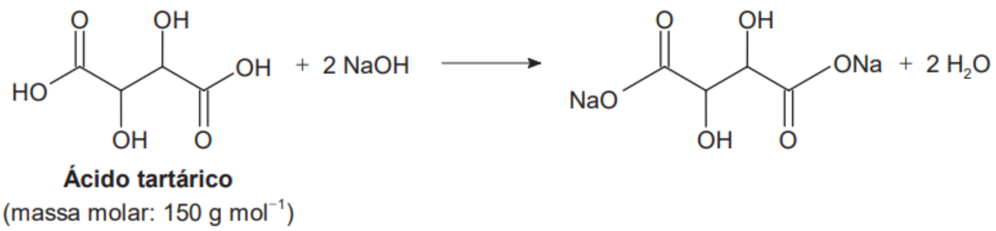
Pretende-se escolher o tipo de cana-de-açúcar que conterá o maior teor de sacarose 10 horas após o corte e que, consequentemente, produzirá a maior quantidade de etanol por fermentação. Considere que existe uma redução de aproximadamente 50% da concentração de sacarose nesse tempo, para cada 1,0 mg L−1 de microrganismos presentes na cana-de-açúcar.

Disponível em: www.inovacao.unicamp.br. Acesso em: 11 ago. 2012 (adaptado).

Qual tipo de cana-de-açúcar deve ser escolhido?

a) RB72 b) RB84 c) RB92 d) SP79 e) SP80

18. (ENEM 2022) O ácido tartárico é o principal ácido do vinho e está diretamente relacionado com sua qualidade. Na avaliação de um vinho branco em produção, uma analista neutralizou uma alíquota de 25,0 mL do vinho com NaOH a 0,10 mol L−1, consumindo um volume igual a 8,0 mL dessa base. A reação para esse processo de titulação é representada pela equação química:



A concentração de ácido tartárico no vinho analisado é mais próxima de:

a) 1,8 g L^{-1} b) 2,4 g.L^{-1} c) 3,6 g.L^{-1} d) 4,8 g.L^{-1} e) 9,6 g.L^{-1}

19. (ENEM 2022) A variação da incidência de radiação solar sobre a superfície da Terra resulta em uma variação de temperatura ao longo de um dia denominada amplitude térmica. Edificações e pavimentações realizadas nas áreas urbanas contribuem para alterar as amplitudes térmicas dessas regiões, em comparação com regiões que mantêm suas características naturais, com presença de vegetação e água, já que o calor específico do concreto é inferior ao da água. Assim, parte da avaliação do impacto ambiental que a presença de concreto proporciona às áreas urbanas consiste em considerar a substituição da área concretada por um mesmo volume de água e comparar as variações de temperatura devido à absorção da radiação solar nas duas situações (concretada e alagada). Desprezando os efeitos da evaporação e considerando que toda a radiação é absorvida, essa avaliação pode ser realizada com os seguintes dados:

	Densidade $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Calor específico $\left(\frac{J}{g\,°C}\right)$
Água	1 000	4,2
Concreto	2 500	0,8

ROMERO, M. A. B. et al. Mudanças climáticas e ilhas de calor urbanas. Brasília: UnB; ETB, 2019 (adaptado).

A razão entre as variações de temperatura nas áreas concretada e alagada é mais próxima de

a) 1,0. b) 2,1. c) 2,5. d) 5,3. e) 13,1

20. (ENEM 2022) Um casal está reformando a cozinha de casa e decidiu comprar um refrigerador novo. Observando a planta da nova cozinha, desenhada na escala de 1 : 50, notaram que o espaço destinado ao refrigerador tinha 3,8 cm de altura e 1,6 cm de largura. Eles sabem que os fabricantes de refrigeradores indicam que, para um bom funcionamento e fácil manejo na limpeza, esses eletrodomésticos devem ser colocados em espaços que permitam uma distância de, pelo menos, 10 cm de outros móveis ou paredes, tanto na parte superior quanto nas laterais. O casal comprou um refrigerador que caberia no local a ele destinado na nova cozinha, seguindo as instruções do fabricante. Esse refrigerador tem altura e largura máximas, em metro, respectivamente, iguais a

a) 1,80 e 0,60. b) 1,80 e 0,70. c) 1,90 e 0,80. d) 2,00 e 0,90. e) 2,00 e 1,00.

21. (ENEM 2022) O pacote básico de um jogo para smartphone, que é vendido a R$ 50,00, contém 2 000 gemas e 100 000 moedas de ouro, que são itens utilizáveis nesse jogo. A empresa que comercializa esse jogo decidiu criar um pacote especial que será vendido a R$ 100,00 e que se diferenciará do pacote básico por apresentar maiores quantidades de gemas e moedas de ouro. Para estimular as vendas desse novo pacote, a empresa decidiu inserir nele 6 000 gemas a mais, em relação ao que o cliente teria caso optasse por comprar, com a mesma quantia, dois pacotes básicos. A quantidade de moedas de ouro que a empresa deverá inserir ao pacote especial, para que seja mantida a mesma proporção existente entre as quantidades de gemas e de moedas de ouro contidas no pacote básico, é

a) 50 000. b) 100 000. c) 200 000. d) 300 000. e) 400 000.

22. (ENEM 2022) Um médico faz o acompanhamento clínico de um grupo de pessoas que realizam atividades físicas diariamente. Ele observou que a perda média de massa dessas pessoas para cada hora de atividade física era de 1,5 kg.

Sabendo que a massa de 1 L de água é de 1 kg, ele recomendou que ingerissem, ao longo das 3 horas seguintes ao final da atividade, uma quantidade total de água correspondente a 40% a mais do que a massa perdida na atividade física, para evitar desidratação.

Seguindo a recomendação médica, uma dessas pessoas ingeriu, certo dia, um total de 1,7 L de água após terminar seus exercícios físicos. Para que a recomendação médica tenha efetivamente sido respeitada, a atividade física dessa pessoa, nesse dia, durou

a) 30 minutos ou menos.

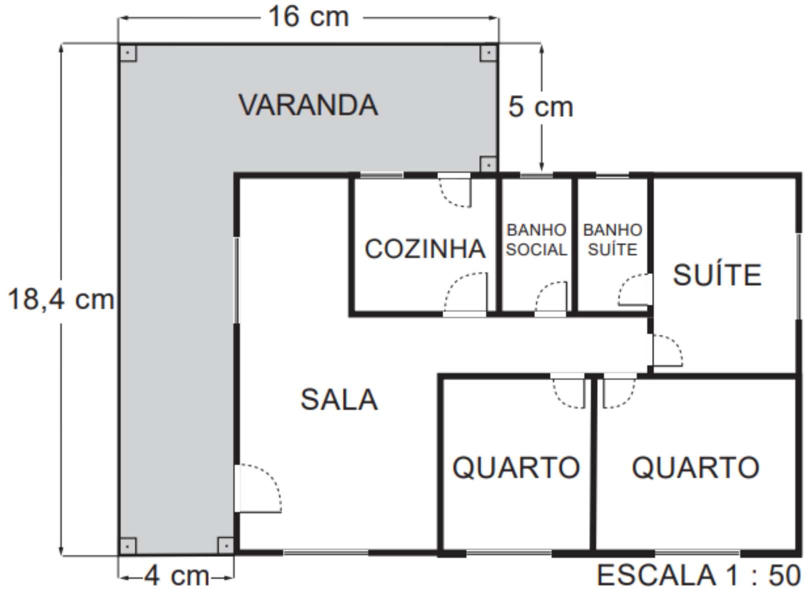
b) mais de 35 e menos de 45 minutos.

c) mais de 45 e menos de 55 minutos.

d) mais de 60 e menos de 70 minutos.

e) 70 minutos ou mais.

23) (ENEM 2022) Uma empresa de engenharia projetou uma casa com a forma de um retângulo para um de seus clientes. Esse cliente solicitou a inclusão de uma varanda em forma de L. A figura apresenta a planta baixa desenhada pela empresa, já com a varanda incluída, cujas medidas, indicadas em centímetro, representam os valores das dimensões da varanda na escala de 1 : 50.



A medida real da área da varanda, em metro quadrado, é

a) 33,40. b) 66,80. c) 89,24. d) 133,60. e) 534,40.

24) (ENEM 2022) Um borrifador de atuação automática libera, a cada acionamento, uma mesma quantidade de inseticida. O recipiente desse produto, quando cheio, contém 360 mL de inseticida, que duram 60 dias se o borrifador permanecer ligado ininterruptamente e for acionado a cada 48 minutos.

A quantidade de inseticida que é liberada a cada acionamento do borrifador, em mililitro, é

a) 0,125. b) 0,200. c) 4,800. d) 6,000. e) 12,000.

25) (ENEM 2022) Definem-se o dia e o ano de um planeta de um sistema solar como sendo, respectivamente, o tempo que o planeta leva para dar 1 volta completa em torno de seu próprio eixo de rotação e o tempo para dar 1 volta completa em torno de seu Sol. Suponha que exista um planeta Z, em algum sistema solar, onde um dia corresponda a 73 dias terrestres e que 2 de seus anos correspondam a 1 ano terrestre. Considere que 1 ano terrestre tem 365 de seus dias.

No planeta Z, seu ano corresponderia a quantos de seus dias?

a) 2,5 b) 10,0 c) 730,0 d) 13 322,5 e) 53 290,0

26) (ENEM 2022) Uma instituição de ensino superior ofereceu vagas em um processo seletivo de acesso a seus cursos. Finalizadas as inscrições, foi divulgada a relação do número de candidatos por vaga em cada um dos cursos oferecidos. Esses dados são apresentados no quadro.

Curso	Número de vagas oferecidas	Número de candidatos por vaga
Administração	30	6
Ciências Contábeis	40	6
Engenharia Elétrica	50	7
História	30	8
Letras	25	4
Pedagogia	25	5

Qual foi o número total de candidatos inscritos nesse processo seletivo?

a) 200 b) 400 c) 1 200 d) 1 235 e) 7 200

GABARITO

1. C	2. D	3. A	4. D	5. B	6. B	7. C	8. C
9. D	10. A	11. B	12. A	13. B	14. C	15. C	16. D
17. C	18. B	19. B	20. A	21. D	22. C	23. A	24. B
25. A	26. D						

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolver este trabalho foi necessário realizar um estudo sobre o contexto histórico da Base Nacional Comum Curricular desde de sua primeira citação na Constituição de 1988, assim como em outros documentos que trazem a Base como necessária, além da elaboração da primeira versão e os trâmites da versão final, para melhor compreensão de seu surgimento. Também foi fundamental entender sua estrutura, buscando assimilar o que a Base estabelece eo que se modifica com sua aplicação. Sua organização durante as três etapas do ensino além da interpretação do código alfanumérico na Matemática. Em seguida foram trazidas as mudanças/reformas que o Ensino Médio atravessou ao longo do tempo para só então entendermos as mudanças que surgiriam com a aplicação da BNCC na Matemática e suas tecnologias através das competências específicas.

Em resposta às desigualdades na qualidade de ensino da Educação Básica, o documento da BNCC foi construído, mas todavia há uma necessidade de discussão ampla pois quando se trata de conceitos matemáticos não podemos limitá-los a habilidades e competências enumeráveis, com este estudo compreendemos que se faz necessário algo mais. Ao trazer reflexões sobre este tema da atualidade buscamos a melhor compreensão do documento ressaltando o que há de positivo mas também negativo em sua implantação.

Como se trata de uma política, de mudanças muito novas na educação brasileira, principalmente se tratando ao que se refere ao Ensino Médio, ressalta-se que muitas compreensões foram feitas a partir de reflexões sobre o documento aqui referido. É importante ressaltar que ainda é cedo fazer inferências mais profundas sobre os desdobramentos desse novo currículo construído a partir da BNCC, pois tudo ainda está em processo de implantação, e na educação as mudanças são, quase sempre, a longo prazo, portanto é necessário o distanciamento maior para compreender os impactos que a Base causará nos processos de ensino-aprendizagem de Matemática e suas tecnologias.

No entanto, esse ensaio aqui apresentado pode ser uma referência e até um diagnóstico inicial dos aspectos positivos e negativos nesta implementação de mudanças que a Base e o Novo Ensino Médio propõem para a Matemática e toda a Educação Básica.

Destaca-se a importância deste estudo para os futuros docentes de nosso país uma vez que estarão sendo inseridos na realidade que o documento exige. Que possam driblar tamanhos desafios e que consigam despertar nos jovens o pensamento crítico e apurado para que não sejam somente mais um dessa imensa massa operária. As verdadeiras habilidades/competências são adquiridas ao longo da vida e nunca se encerram.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando matemática 9° ano**. 3. Ed. renov. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.**. Brasília: MEC, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-dir etrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192 Acesso em: 10 abr. 2023.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília,DF: Senado Federal, 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao Acesso em: 12 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular. Educação é a base.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br Acesso em: 10 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei n. 9394/96. Lei de Diretrizes e Bases da EducaçãoNacional.** Brasília: MEC, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394 Acesso em: 10 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei n. 13.415. Reforma do Ensino Médio.** Brasília: MEC, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415 Acesso em: 12 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF,p. 1, 25 jun. 2014.

CATÁLOGO DE COMPONENTES ELETIVOS. Disponível em: https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2021/03/catalogo_eletivas_2021_final.pdf Acesso em: 10 abr. 2022.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: matemática, 9° ano. 1. ed.- São Paulo: Ática, 2012.

FERRO, Francisca Camila de Soares; GOMES, Antonia Karla Bezerra. Formação inicial de professores: metodologias ativas, ênfase na modelagem matemática. **Revista Ensino em Perspectiva**, Fortaleza. v. 2, n. 3, 2021. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/ensinoemperspectivas/article/view/6371/5627 Acesso em: 15 abr. de 2023.

FILHO, A. DE P. A. dos S.; BARROSO, M. C. da S.; SAMPAIO, C. DE G. História da educação no Brasil: da Constituição Federativa de 1988 a Base Nacional Comum Curricular(BNCC)**. Research, Society and Development,** Ceara,v. 10, n. 3, mar. 2023.

FONSECA, Rubens Vilhena; FRANÇA, Adriano Santos. **Pré-calculo**. Belém: UEPA, Centro de Ciências Sociais da Educação, 2011.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. **A Conquista da matemática, 7° ano**. ed. renov. São Paulo: FTD, 2009.

GUSMÃO, F. A. F.; AMORIM, S. S. **O percurso histórico do Ensino Médio no Brasil:** uma reflexão sobre as políticas públicas de avaliação educacional. USF: São Paulo, 2020.

LIMA, Elon Lages; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MOURA, Ana Clara Rodrigues Prazeres de. **A Base Nacional Comum Curricular (BNCC):**as implicações na formação de professores para educação básica. Goiânia, 14 de dez. de 2020.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática**: ideias e desafios, 6ºano. ed. São Paulo: Saraiva 1998.

NEIRA, M. G.; JÚNIOR, W. A.; ALMEIDA, D. F. A primeira e segunda versões da BNCC: construção, intenções e condicionantes. **Revista Científica EccoS** São Paulo, n. 41, p. 31-44,set./dez., 2016.

NOVOS TEMAS E REORGANIZAÇÃO DAS ÁREAS SÃO AS PRINCIPAIS NOVIDADES EM MATEMÁTICA. Nova Escola. Disponível em: https://novaescola.org.br/bncc/conteudo/32/novos-temas-e-reorganizacao-das-areas-sao-as-principais-novidades-em-matematica Acessado em: 10 abr. de 2023.

PERIUS, Ana Amélia Butzen. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática.** Rio Grande do Sul: UFRGS, 2012.

PERRENOUD, Philippe. A formação dos professores no século XXI. [et al.] **As competências para ensinar no século XXI:** a formação dos professores e o desafio da avaliação. Trad. Cláudia Schilling; Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002, p. 11-30.

PRODANOV, C. C.; DE FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico:** métodos etécnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2.ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

REBOUÇAS, A. P. S.; AMARAL, N. C. L. A BNCC e as implicações para o currículo do ensino de matemática. **Pesquisa em Foco ISSN.** São Luís, v. 25, n. 2, jul./dez. 2020.

SANTOS, Rulian Rocha dos. **Breve histórico do ensino médio no Brasil.** Bahia: UESC, 2010.

SHIROMA, Eneida. Oto. **Política educacional**. Rio de Janeiro: DP & A, 2004.

VAIRÃO JUNIOR, N. S.; ALVES, F. J. dos S. A Emenda Constitucional 95 e seus efeitos. **Revistade Contabilidade do Mestrado de Ciências Contábeis da UERJ.** Rio de Janeiro, 2017.

ANEXO A: PLANO DE AULA

Plano de Aula: Razão e Proporção no Ensino Médio alinhado à BNCC

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada

Objetivos de Aprendizagem:

1. Compreender o conceito de razão e proporção e sua aplicação em situações do cotidiano.
2. Resolver problemas envolvendo razão e proporção.
3. Utilizar a linguagem matemática de forma clara e precisa para expressar relações de razão e proporção.

Habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) envolvidas:

1. EF09MA13: Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvam porcentagem, juros simples e razão, utilizando estratégias diversas, como cálculos e uso de gráficos.
2. EM13MAT105: Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem variações proporcionais, incluindo escalas, dilatações, áreas e volumes.

Recursos Necessários:

- Quadro branco ou lousa.
- Marcadores para quadro branco ou giz.
- Projetor multimídia ou cópias impressas de exercícios.
- Folhas de papel e lápis para os alunos.

Desenvolvimento da Aula:

Aula 1:

Introdução (10 minutos):

1. Apresente o conceito de razão e proporção, explicando que eles são fundamentais para compreender relações matemáticas e resolver problemas do cotidiano.
2. Converse com os alunos sobre exemplos de situações em que a razão e a proporção estão presentes, como a comparação de preços de produtos, receitas culinárias, escala de mapas, entre outros.

Atividade de Exploração (20 minutos):

1. Divida a turma em pequenos grupos e distribua folhas de papel.
2. Forneça uma lista de problemas que envolvem razão e proporção para os alunos resolverem em seus grupos.
3. Os problemas devem ser variados e contextualizados, permitindo que os alunos apliquem o conceito de razão e proporção em diferentes situações.

Discussão em Grupo (15 minutos):

1. Peça que cada grupo compartilhe suas soluções e explique o raciocínio utilizado.
2. Incentive a participação de todos os alunos, promovendo discussões e debates sobre diferentes abordagens para a resolução dos problemas.
3. Utilize o quadro branco ou a lousa para registrar as estratégias e as respostas corretas, garantindo a visualização por todos os alunos.

Conclusão (5 minutos):

1. Recapitule os conceitos abordados durante a aula e responda a possíveis dúvidas dos alunos.
2. Faça uma síntese das estratégias discutidas para a resolução dos problemas de razão e proporção.
3. Avise os alunos sobre a continuação da aula na próxima sessão.

Aula 2:

Revisão (10 minutos):

1. Retome os conceitos de razão e proporção apresentados na aula anterior.
2. Peça aos alunos que resumam, em suas próprias palavras, a definição de razão e proporção.
3. Faça perguntas rápidas para verificar o nível de compreensão dos alunos.

Atividade de Aplicação (25 minutos):

1. Distribua uma folha de exercícios com problemas relacionados a razão e proporção.
2. Os exercícios devem apresentar diferentes níveis de dificuldade para desafiar os alunos e permitir a aplicação dos conceitos aprendidos.
3. Oriente os alunos a resolverem os exercícios individualmente, utilizando o tempo disponível.

Correção e Discussão (15 minutos):

1. Solicite que os alunos troquem suas folhas de exercícios com um colega para correção.
2. Corrija os exercícios em conjunto com a turma, explicando os passos e as estratégias utilizadas na resolução.
3. Destaque possíveis erros frequentes e revise os conceitos necessários para corrigi-los.

Conclusão (5 minutos):

1. Faça uma síntese dos principais pontos abordados durante a aula.
2. Incentive os alunos a continuarem praticando e aplicando os conceitos de razão e proporção em seu dia a dia.
3. Esteja disponível para responder a possíveis dúvidas finais dos alunos.

Observações Finais: Certifique-se de adaptar o plano de aula de acordo com as necessidades e o ritmo da turma. Encoraje a participação ativa dos alunos, promovendo a colaboração entre eles e incentivando a resolução de problemas de maneiras diferentes. Utilize exemplos e situações cotidianas para tornar o conteúdo mais significativo e relevante para os estudantes.