**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**TIAGO DE ALMEIDA GOMES**

# SOBRE O TEOREMA DO CILINDRO EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

**FORTALEZA**

**2023**

TIAGO DE ALMEIDA GOMES

SOBRE O TEOREMA DO CILINDRO EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G618s Gomes, Tiago de Almeida.
Sobre o teorema do cilindro em H²xR / Tiago de Almeida Gomes. – 2023.
33 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Curvatura. 2. Cilindros. 3. Geodésica. I. Título.

CDD 510

TIAGO DE ALMEIDA GOMES

SOBRE O TEOREMA DO CILINDRO EM $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 25/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Emanuel Mendonça Viana
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho à minha família e esposa por me ajudarem em tudo o que busco e acredito.

**AGRADECIMENTOS**

Primeiramente à Deus e aos meus pais que sempre acreditaram nos meus sonhos e que sempre me deram força para não desistir nos momentos mais difíceis da escrita dessa dissertação. Ao Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros, pelas disciplinas ministradas durante minha graduação, pela paciência e ótima orientação dessa dissertação. Lembro aqui também os meus colegas e amigos que fiz durante o curso de mestrado em Matemática em especial Diego Silva, Rosa Tayane, Emanuel Sousa, Felipe Fernandes, Josafá e outros.

Aos professores Antônio Caminha, Fernanda Camargo, Alexandre Fernandes, Diego Moreira, Lev Birbrair, Ernani Ribeiro e outros mais que me proporcionaram grandes aprendizados ao ministrarem ótimos cursos durante minha vida acadêmica.

Aos meus amigos de graduação Antônio Hilário, Cristiano Café e Otoniel Olinda pelas conversas descontraídas durante os intervalos das aulas. Aproveito a oportunidade de agradecer a secretária da Pós-graduação Andrea Dantas por sempre ser solícita com todos os estudantes do departamento de matemática. Fica tambem o meu agradecimento à bibliotecária Diana Rifane pela sugestões de normalização.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e tecnológico) pelo período de Bolsa de Iniciação científica e pela Bolsa de estudos de Mestrado que possibilitou a dedicação integral ao programa de Pós-graduação em Matemática da UFC.

Aos meus colegas e amigos que fiz na residência universitária UFC durante o período de graduação.

Aos participantes da banca examinadora Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior e Prof. Dr. Emanuel Mendonça Viana pela disposição ao aceitarem participar da banca. Além disso, pelas valiosas sugestões de aprimoramento desta dissertação.

"Nunca será um verdadeiro matemático aquele que não for um pouco de poeta."
(KARL WEIERSTRASS)

**RESUMO**

Considerando cilindro no espaço produto hiperbólico de dimensão 2 com a reta. Nesta dissertação provamos que uma superfície do tipo produto de uma curva regular com a reta, na qual é conexa e completa, deve satisfazer a definição de cilindro se, e somente se, as curvaturas extrínseca e intrínseca são nulas. O texto e as demonstrações apresentadas aqui serão baseadas no artigo [1] "***The Cylinder Theorem in*** $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ".

**Palavras-chave**: curvatura; cilindros; geodésica.

## ABSTRACT

Considering cylinder in space hyperbolic product of dimension 2 with the straight line. In this dissertation we prove that a surface of the type product of a regular curve with the straight line, which is connected and complete, must satisfy the definition of cylinder if, and only if, the extrinsic and intrinsic curvatures are null. The text and demonstrations presented here is based on the article [1] "***The Cylinder Theorem in*** $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ".



**Keywords**: curvature; cylinders; geodesic.

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Seja $M$ uma superfície completa e conexa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Neste trabalho estudaremos superfícies cilíndricas do tipo $\gamma \times \mathbb{R}$ contidas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Mais precisamente, provaremos que superfícies desse tipo com a hipótese de que as curvaturas intrínseca e extrínseca se anulam em cada ponto é condição necessária e suficiente para que $M$ seja um cilindro. O teorema em questão tem uma forma mais geral em $\mathbb{R}^n$ tratada no paper de P. Hartman e L. Niremberg, além disso, o caso da superfície é mencionado no mesmo. Primeiramente vamos falar de alguns resultados que serão utilizados no decorrer desta dissertação.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos, onde no segundo capítulo apresentaremos as preliminares, isto é, as definições, proposições e teoremas necessários para o entendimento do texto. No terceiro capítulo falaremos dos resultados que serão importantes para provarmos o (Teorema principal 4.1) enunciado abaixo:

*Seja $M$ uma superfície completa e conexa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com ambas curvaturas intrínseca e extrínseca identicamente nulas. Então, $M$ é um cilindro.*

Em nossa apresentação sempre trabalharemos com o espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e, assim, definiremos um cilindro $\gamma \times \mathbb{R}$ nesse espaço, onde $\gamma$ é uma curva regular qualquer em $\mathbb{H}^2$. Em geral, as curvaturas intrínseca e extrínseca são distintas no espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, provaremos no terceiro capítulo a condição necessária do teorema em questão: se $M$ é um cilindro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, então $M$ possui as curvaturas intrínseca e extrínseca identicamente nulas.

No quarto capítulo provaremos a condição suficiente que será a parte principal do teorema do cilindro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, para isto utilizaremos alguns dos resultados provados no capítulo anterior. O texto e as demonstrações apresentadas aqui serão baseadas no artigo em [1] "***The Cylinder Theorem in*** $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ "(do Carmo e Barbosa). O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$ possui curvatura de Gauss $-1$. Além disso, definiremos também a curvatura extrínseca como o produto das curvaturas principais.

# 2 PRELIMINARES

Apresentaremos as definições e resultados importantes para o entendimento do texto. Em todo texto denotaremos por $M$ uma superfície do espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Começaremos com algumas definições básicas e depois iremos acrescentando alguns resultados de caráter topológico que serão utilizados no decorrer dessa apresentação. Além disso, apresentaremos todas as ferramentas, como, por exemplo os teoremas de equações das estruturas de Cartan que serão importantes na demonstração da primeira parte do teorema.

**Definição 2.1.** *Uma superfície $M \subseteq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é dita conexa se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua inteiramente contida em $M$.*

O conceito a seguir nos dá informação sobre a construção de um espaço tangente à superfície para cada ponto em $M$.

**Definição 2.2.** *Definimos que o conjunto, denotado por $T_pM$, é o conjunto dos vetores tangentes a superfície M, isto é,*

$$T_pM = \{v; \langle v, N(p)\rangle = 0\}.$$

**Definição 2.3.** *Dizemos que uma aplicação $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ é uma isometria se $\phi$ é um difeomorfismo e para cada ponto $p \in M$ e todos os pares $u, v \in T_pM$, tem-se*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v)\rangle_{\phi(p)}.$$

*Diz-se então que as superfícies $M$ e $\bar{M}$ são isométricas.*

**Definição 2.4.** *Uma aplicação $\phi : V \longrightarrow \bar{M}$ de uma vizinhança $V$ de $p \in M$ é uma isometria local em $p$ se existe uma vizinhança $\bar{V}$ de $\phi(p) \in \bar{M}$ tal que $\phi : V \longrightarrow \bar{V}$ é uma isometria. Se existir uma isometria local em $\bar{M}$ para cada ponto $p \in M$ diz-se que a superfície $M$ é localmente isométrica a $\bar{M}$. $M$ e $\bar{M}$ são localmente isométricas se $M$ é localmente isométrica a $\bar{M}$ e $\bar{M}$ é localmente isométrica a $M$.*

**Definição 2.5.** *Uma superfície $M \subseteq \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ regular é um cilindro quando qualquer ponto $p$ em $M$ passa uma única curva $\gamma(p) \subseteq M$ que satisfaz a condição de que se $p \neq q$ então $\gamma(p) \cap \gamma(q) = \phi$ ou $\gamma(p) \equiv \gamma(q)$.*

Outro conceito importante é a distância entre dois pontos na superfície descrita abaixo, que será muito útil na parte final desta dissertação.

**Definição 2.6.** *Dados dois pontos $p, q$ em $M$ a distância entre $p, q$ dada por*

$$d(p, q) = \inf l(\gamma_{p,q}),$$

*onde $l(\gamma_{p,q})$ é o conjunto dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando os pontos $p, q$.*

**Definição 2.7.** *Uma curva $\gamma$ é dita uma geodésica de $M$ quando o campo de vetores $\gamma^{'}(t)$ é paralelo ao longo de $\gamma$ em $t$, isto é, $\frac{D\gamma^{'}(t)}{dt} = 0$.*

**Definição 2.8.** *Seja $M$ uma superfície regular e conexa. Dizemos que $M$ é completa quando para todo ponto em $M$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma\colon [0,\varepsilon) \longrightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ pode ser estendida em uma geodésica $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$.*

Os teoremas enunciados abaixo são de grandes aplicações na matemática encontrados nas seguintes referências [4] e [3].

**Teorema 2.1** (Alfândega). *Sejam $C$, $X$ subconjuntos de um espaço topológico $M$. Se $C$ é conexo e tem pontos em comum com $X$ e com $M \setminus X$, então algum ponto de $C$ pertence à fronteira de $X$.*

*Demonstração.* Ver [4]. □

**Teorema 2.2** (Gauss-Bonnet). *Seja $R \subset M$ uma região regular de uma superfície orientada e sejam $C_1, ...., C_n$ as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira $\partial R$ de $R$. Suponha que cada $C_i$ é orientada positivamente e sejam $\theta_1, ..., \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas $C_1, ...., C_n$. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^{p} \theta_l = 2\pi\chi(R),$$

*onde $s$ denota o comprimento de arco de $C_i$, e a integral sobre $C_i$ significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de $C_i$.*

*Demonstração.* Ver [3]. □

Agora apresentaremos algumas definições e resultados de formas de conexão que serão de muita utilidade em nosso trabalho. Primeiro conceito importante é o da derivada covariante que generaliza o conceito de derivada usual. Vejamos:

**Definição 2.9.** *Seja $W$ um campo vetorial em $M$ e seja um vetor $v$ tangente a $M$ passando pelo ponto $p$. Dizemos que a derivada covariante do campo $W$ na direção do vetor $v \in T_pM$ é o campo tangente dado por*

$$D_v W = W(\gamma(t))'(0),$$

*onde $\gamma$ é uma curva em $M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma^{'}(0) = v$*

A partir dessa definição veja que podemos escrever o campo vetorial

$D_vW$ como combinação linear dos campos $U_i$.

**Lema 2.1.** *Seja* $W = \sum_i w_iU_i$ *é um campo vetorial em* $M$ *e seja* $v$ *um vetor tangente no ponto* $p$ *então vale*

$$D_vW = \sum_i v[w_i]U_i.$$

*Demonstração.* Pela hipótese podemos escrever

$$W(\gamma(t)) = \sum_i w_i(\gamma(t))U_i(\gamma(t)),$$

onde restringimos o campo $W$ à curva $\gamma(t)$. Pela definição de derivada direcional que está definida em [5],temos que

$$W(\gamma(t)) = \sum_i \omega_i(\gamma(t))U_i(\gamma(t)).$$

A restrição de $W$ a uma curva $t \longmapsto \gamma(t)$, onde $\gamma(0) = p$ e $\gamma^{'}(0) = v_p$. Mas, de acordo com a definição da derivada direcional, isto é, se uma função $f$ é diferenciável em $M$ de valores reais e seja $v_p$ um vetor tangente a $M$. Então,

$$\tfrac{d}{dt}\, w_i(\gamma(t)) = v[w_i] \text{ em } t = 0 \text{ e}$$

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))|_{t=0}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(w_i(\gamma(t)))|_{t=0} = v[w_i],$$

consequentemente $D_vW$ =W($\gamma(t)$)'(0) $= \Sigma v[w_i]U_i$. Isto finaliza a prova.

□

Agora estamos aptos a apresentar os resultados de formas de conexão que serão importantes para demonstrar a condição necessária do teorema do cilindro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ esses resultados são encontrados em [2].

**Definição 2.10.** *Os campos de vetores* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *formam um campo de referenciais se* $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ *é uma base ortonormal de* $T_pM$ *para todo* $p \in M$*. E denotamos por* $\mathscr{X}(M)$ *o conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis em* $M$*.*

**Lema 2.2.** *Seja* $V \in \mathscr{X}(M)$ *e* $\{e_i\}$ *campos de referenciais, então vale*

$$V = \sum_i \langle \delta_i V, e_i\rangle\ e_i,$$

*onde definimos* $\delta_i = \langle e_i, e_i\rangle$*.*

*Demonstração.* Ver [5].

□

A conexão de Levi-Civita de $M$, a saber, a derivada direcional, goza das propriedades usuais a seguir:

1- $D_{fV}W = fD_VW$

2- $D_V\lambda W = \lambda D_VW$

3- $D_V(fW) = V[f]W + fD_VW$

4- $[X, Y] = D_XY - D_YX$

5- $Z\langle V, W\rangle = \langle D_ZV, W\rangle + \langle V, D_ZW\rangle$.

Para todo $V, W, Z$ em $\mathscr{X}(M)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ e $\lambda$ em $\mathbb{R}$. Vamos escrever as derivadas covariantes de um campo de referenciais $\{e_i\}$ em função dos próprios. Seja $v \in T_pM$, temos

$$D_ve_1 = \omega_{11}e_1 + \omega_{12}e_2 + \omega_{13}e_3$$
$$D_ve_2 = \omega_{21}e_1 + \omega_{22}e_2 + \omega_{23}e_3$$
$$D_ve_3 = \omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2 + \omega_{13}e_3.$$

Mais geral, temos que: $D_ve_i = \sum\limits_j \delta_j\omega_{ij}e_j(p)$. Pelo Lema 2.2 temos que $\omega_{ij}(v) = \langle D_ve_i, e_j\rangle$. Da mesma forma temos essas igualdades para campos vetoriais $V \in \mathscr{X}(M)$.

**Lema 2.3.** *Sejam $\{e_i\}$, onde $i = 1, 2, 3$, um referencial de campos em $M$. Seja $v \in T_pM$ tem-se*

$$\omega_{ij}(v) = \langle D_ve_i, e_j\rangle. \tag{1}$$

*Então cada $\omega_{ij}$ é 1-forma e $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, e $\omega_{ij}$ são chamadas as formas de conexão do campo de referenciais $e_i$ com $i = 1, 2, 3$.*

*Demonstração.* Sejam $u, v \in T_pM$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, pela equação (1)

$$\begin{aligned} w_{ij}(u+\lambda v) &= \langle D_u e_i + \lambda D_v e_i, e_j(p)\rangle = \\ &= \langle D_u e_i, e_j(p)\rangle + \langle \lambda D_v e_i, e_j(p)\rangle = \\ &= \omega_{ij}(u) + \lambda\omega_{ij}(v). \end{aligned}$$

Fixando $v \in T_pM$. Como $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, aplicando $v$ em ambos os lados temos

$$\langle D_v e_i, e_j\rangle + \langle D_v e_j, e_i\rangle = 0$$
$$\omega_{ij}(v) + \omega_{ji}(v) = 0$$

Portanto, $\omega_{ij}(v) = -\omega_{ji}(v)$. Como $v$ foi tomado arbitrariamente concluímos o desejado.

$\square$

# 3 RESULTADOS DE EQUAÇÕES DE CONEXÃO E EQUAÇÕES DE ESTRUTURAS DE CARTAN E CONDIÇÃO NECESSÁRIA DO TEOREMA.

Os resultados abaixo são de grande importância para o seguimento da nossa dissertação, como já tínhamos exposto anteriormente.

**Teorema 3.1.** *(Equações de Conexão) Sejam $\omega_{ij}$ $(0 \leq i, j \leq 3)$ as formas de conexão dos campos $e_1, e_2, e_3$ em $M$. Então, para qualquer campo vetorial $V$ em $M$ tem-se*

$$D_V e_i = \sum_j \omega_{ij}(V) \wedge e_j.$$

*Demonstração.* Ver [2].

□

O teorema a seguir será utilizado mais adiante no nosso texto e pode ser encontrado em [2] e [5].

**Teorema 3.2.** *(Equações de estrutura de Cartan). Sejam $\{e_i\}$ um referencial de campos em $M$ e suas formas duais $\{\theta_i\}$. Sejam as suas formas de conexão $\{\omega_{ij}\}$, $(1 \leq i, j \leq 3)$. Então valem:*

- *(1ª equação de estrutura)* $d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$.
- *(2ª equação de estrutura)* $d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$.

*Demonstração.* Ver [2].

□

O conceito que definiremos de derivada covariante para $M$ poderemos tomar dois campos vetoriais $V$ e $W$ em $M$, assim definiremos um novo campo vetorial $D_V W$ para isto vamos requerer todas as propriedades de leariadade e da derivada do produto (Regra Leibniz). Do ponto de vista intuitivo o valor de $D_V W$ em um ponto $p$ será a taxa de variação de $W$ na direção de $V$ aplicado a $p$. Portanto, se a forma de conexão $\omega_{12}$ de um campo de um sistema referencial $e_1$ e $e_2$ descrevendo assim seu sentido geométrico usual (o de medir taxas nas quais $e_1$ se transforma em $e_2$), também temos que pedir que

$$\omega_{12}(V) = \langle D_V e_1, e_2 \rangle. \tag{2}$$

Estas condições determinam completamente o campo $D_V W$ para quaisquer campos $V$ e $W$. Para isto temos o seguinte lema:

**Lema 3.1.** *Suponhamos que $D$ é uma derivada covariante em $M$ com as propriedades de linearidade e de Leibniz e também tal que (2) se cumpre em um sistema referencial de campos $e_1$ e $e_2$, então $D$ é dada pelas equações* ***de conexão***

$$D_V e_1 = \langle \omega_{12}(V), e_2 \rangle.$$

$$D_V e_2 = \langle \omega_{21}(V), e_1 \rangle.$$

*Ademais, se $W = f_1 e_1 + f_2 e_2$ é um campo arbitrário, então*

$$D_V W = V[f_1] + f_2 \omega_{21}(V) e_1 + V[f_2] + f_1 \omega_{12}(V) e_2.$$

*Esta se chama equação da derivada covariante. Observemos que $V[f_1]$ e $V[f_2]$ somente nos diz a maneira que $W$ muda em relação a $e_1$ e $e_2$: o efeito dos termos em que intervém as formas de conexão consiste em compensar a maneira com que o mesmo $e_1$ e $e_2$, se move em rotação, pelo qual teremos que $D_V W$ é uma taxa de variação.*

*Demonstração.* Na referência [5].

□

O lema acima nos mostra a definição da derivada covariante em $M$ e podemos também construir para um sistema referencial de campos com $e_1$, $e_2$ e $e_3$ na qual vamos utilizar no seguir do nosso texto. Tudo que fizemos até aqui foi só reproduzir alguns resultados encontrados na referência [5].

Agora vamos introduzir algumas definições e notações que vamos utilizar baseadas em [1]. Primeira definição é a da métrica do cilindro $M = \gamma \times \mathbb{R}$.

**Definição 3.1.** *Uma métrica em $M$ é uma associação que para cada ponto $p$ de $M$ tem-se um produto interno $<,>_p$ definida em $T_pM$.*

**Exemplo 3.1.** *Seja $\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2), x_2 > 0\}$ cuja métrica é dada por*

$$g = \tfrac{1}{x_2^2}(dx_1^2 + dx_2^2).$$

**Definição 3.2.** *A métrica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é dada por $d\sigma^2 = d\xi^2 + dt^2$, onde $d\xi$ é a métrica associada de $\mathbb{H}^2$ e $dt$ é a métrica usual da reta. A derivada covariante $\bar{D}$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ decompõe-se naturalmente em $\bar{D} = D + d$, onde $D$ é a derivada covariante em $\mathbb{H}^2$ e $d$ é a derivada usual de $\mathbb{R}$.*

Podemos chamar $\frac{\partial}{\partial t}$ de campo vetorial tangente unitário às linhas do tipo $p \times \mathbb{R}$, onde para todo $p \in \mathbb{H}^2$ teremos

$$\bar{D}\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right) = 0.$$

O que mais precisamente foi dito é que as curvas parametrizadas $\gamma$ de $\mathbb{H}^2$ ao longo dos quais os campos de vetores tangentes $\frac{\partial}{\partial t}$ é paralelo são as curvas de $\mathbb{H}^2$. Como definido em 2.10 podemos tomar um referencial de campos para o cilindro $M = \gamma \times \mathbb{R}$ da seguinte maneira $\{e_1, e_2, e_3\}$ tais que $e_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ , $e_2 = \gamma'(t)$ e $e_3$ é o vetor normal a $\gamma$ e tangente a $\mathbb{H}^2$.

**Definição 3.3.** *Sejam* $\{e_i\}_{i=1}$ *(i=1,2,3) campos de referenciais em* $M$*. Então as suas formas duais* $\{\theta_i\}_{i=1}$ *são as 1-formas tais que* $\theta_i(e_i) = \epsilon_i \delta_{ij}$ *para todo* $i, j = 1, 2, 3$.

**Proposição 3.1.** *(Caracterização das formas duais). Sejam* $\{e_i\}_{i=1}$ *(i=1,2,3) campos de referenciais em* $M$*, e* $\{\theta_i\}_{i=1}$ *as suas formas duais. Então vale*

$$\theta_i(U) = \langle U, e_i \rangle,$$

*qualquer que seja* $U \in \chi(M)$.

*Demonstração.* Seja $U = \sum_j U_j e_j$. Vamos calcular agora

$$\theta_i(U) = \theta_i(\sum_j U_j e_j) = \sum_j U_j \theta(e_j) = \sum_j U_j \epsilon_i \delta_{ij} = \epsilon_i U_i.$$

Calculando agora $\langle U, e_i \rangle$ temos que

$$\langle U, e_i \rangle = \sum_j \langle U_j e_j, e_i \rangle = \sum_j \langle U_j \ e_i, e_j \rangle = \sum_j U_j \epsilon_i \delta_{ij} = \epsilon_i U_i.$$

□

De posse da caracterização podemos tomar as formas duais do referencial acima da seguinte maneira

$$\omega_1 = dt, \omega_2 = ds \text{ e } \omega_3 = 0.$$

Assim, $M$ é isométrica ao plano euclidiano e por isso a curvatura intrínseca é nula. De posse dos resultados já apresentados, estamos aptos a provarmos agora a condição necessária do teorema do cilindro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

**Proposição 3.2.** *Seja* $M$ *um cilindro em* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$*. Então,* $M$ *possui curvaturas extrínseca e intrínseca identicamente nulas.*

*Demonstração.* Pelo teorema das equações de conexões 3.1 temos que

$$\bar{D} e_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge e_j,$$

onde $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$.

Agora podemos escrever

$$0 = \bar{D}e_1 = \bar{D}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \omega_{12} \wedge e_2 + \omega_{13} \wedge e_3, \tag{3}$$

segue que $\omega_{11} \wedge e_1 = 0$. Portanto, da equação (3) deduzimos também as seguintes igualdades

$$\omega_{12} = 0 \text{ e } \omega_{13} = 0.$$

Para as que faltam,

$$\bar{D}e_2 = \omega_{21} \wedge e_1 + \omega_{22} \wedge e_2 + \omega_{23} \wedge e_3.$$

Assim,

$$\bar{D}e_2 = \omega_{21} \wedge e_1 + \omega_{23} \wedge e_3.$$

Sabendo que $\omega_{12} = 0$ então pela antissimetria vale $\omega_{21} = 0$. Ficamos então com a seguinte igualdade

$$\bar{D}e_2 = \omega_{23} \wedge e_3.$$

Utilizando que $\omega_{13} = 0$ e $\omega_{33} = 0$ teremos a última igualdade

$$\bar{D}e_3 = \omega_{32} \wedge e_2.$$

E portanto, as formas $\omega_{23}$ e $\omega_{32}$ nos darão informações sobre as curvaturas principais $k_1$ e $k_2$. Sabe-se que $e_2 = \gamma'$ então $\bar{D}e_2$ é tangente a $\mathbb{H}^2$, isto é, o vetor $\omega_{23}$ é paralelo à $\omega_2$ com sentido contrário. Isto quer dizer que existe um $\lambda$ real tal que $\omega_{23} = -\lambda\omega_2$. Como $\omega_{31} = 0$ e $\omega_{32} = \lambda\omega_2$ pela antissimetria nos fornece a curvatura extrínseca $\bar{K} = k_1k_2$ em todo ponto de $M$ é nula. Onde usamos que

$$\omega_{23} + \omega_{32} = 0.$$

Logo, concluímos que a curvatura extrínseca também é nula.

□

Agora apresentaremos algumas definições e proposições imprescindíveis para a continuação do trabalho. Definiremos o conjunto dos pontos planares e o conjunto dos pontos parabólicos como seu complementar.

**Definição 3.4.** *Uma direção assintótica de $M$ no ponto $p$ é uma direção $v \in T_pM$ tal que a curvatura normal $k_n$ na direção de $v$ é nula. Dizemos que uma linha ou curva é* *assintótica de $M$ se for conexa regular tal que para cada ponto $p$ os vetores tangentes em $p$ são direções assintóticas.*

Seja $M$ uma superfície completa cujas curvaturas extrínseca e intrínseca são identicamente nulas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Podemos definir os seguintes conjuntos abaixo:

**Definição 3.5.** *O conjunto $P$ é constituído dos pontos de $M$ tais que as curvaturas principais são identicamente nulas. E seja $U = M \setminus P$ o conjunto dos pontos parabólicos, isto é, os pontos onde uma dessas curvaturas principais se anula. Note que $P$ é fechado, pois a curvatura é nula e pela continuidade o conjunto $K^{-1}(\{0\}) = P$ é fechado em $M$, pois $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$ . Como $U$ é complementar de $P$ em $M$, então $U$ é aberto em $M$.*

**Proposição 3.3.** *Seja $p \in M$ parabólico. Então por esse ponto passa uma única linha assintótica.*

*Demonstração.* Ver [3]. □

**Proposição 3.4.** *A única linha assintótica passando por um ponto parabólico de $M$ é um segmento aberto de geodésica do espaço ambiente.*

*Demonstração.* Tome $p \in U$ e seja $\gamma$ uma linha assintótica passando por $p$ parametrizada pelo comprimento de arco. Em uma vizinhança aberta de $p$ podemos tomar o campo referencial ortonormal $e_1, e_2, e_3$, onde $e_3$ é normal a $M$ e $e_1 = \gamma'$. Sejam $\theta_1, \theta_2$ as suas formas duais correspondentes a $e_1$ e $e_2$. Novamente pelo Teorema 3.1 temos que

$$\bar{D}e_i = \sum_j \theta_{ij} \wedge e_j,$$

onde $\theta_{ij} + \theta_{ji} = 0$.

Relembrando que

$$\bar{D}e_1 = \theta_{11} \wedge e_1 + \theta_{12} \wedge e_2 + \theta_{13} \wedge e_3$$

$$\bar{D}e_2 = \theta_{21} \wedge e_1 + \theta_{22} \wedge e_2 + \theta_{23} \wedge e_3$$

$$\bar{D}e_3 = \theta_{31} \wedge e_1 + \theta_{32} \wedge e_2 + \theta_{33} \wedge e_3.$$

Como os vetores $\theta_{ii} \wedge e_i = 0$. Sabendo que o referencial foi tomado de tal forma que $e_1$ e $e_2$ são direções principais nos quais $k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$, pois os pontos são parabólicos. Sabendo também que as derivadas covariantes $\bar{D}_{e_1} e_3 = 0$ e $\bar{D}_{e_2} e_3 = k_2 e_2$. Assim, pela Caracterização das formas duais 3.1 temos que

$$\theta_{31}(e_1) = 0 \ , \ \theta_{32}(e_1) = 0 \text{ e } \theta_{31}(e_2) = 0,$$

pois $\theta_{31}(e_1)e_1 + \theta_{32}(e_1)e_2 = 0$ e sabendo que os campos $e_1$ e $e_2$ são linearmente independentes então as funções $\theta_{31}(e_1) = 0$ , $\theta_{32}(e_1) = 0$. Além disso, $\theta_{32} = k_2\theta_2$, pois $\bar{D}_{e_2}e_3 = \theta_{31}(e_2)e_1 + \theta_{32}(e_2)e_2 = \theta_{32}(e_2)e_2$, já que na direção da cuvatura principal $k_1 = 0$ o que implica $\theta_{31}(e_2) = 0$. Como aplicamos a derivada covariante na direção de $k_2$ então a função $\theta_{32}(e_2) = k_2$. Logo, $\theta_{32} = k_2\theta_2$. Segue também que $\theta_{13} = 0$ pela antissimetria. Portanto, voltando para as equações ficamos com

$$\bar{D}e_1 = \theta_{12} \wedge e_2$$

$$\bar{D}e_2 = \theta_{21} \wedge e_1 - k_2\theta_2 \wedge e_3$$

$$\bar{D}e_3 = k_2\theta_2 \wedge e_2.$$

Vamos obter informação sobre o vetor $\theta_{12}$ e sabendo que $\theta_{31} = 0$ pela 2ª equação de estrutura 3.2 temos que

$$0 = d\theta_{31} = \theta_{32} \wedge \theta_{21} = k_2\theta_2 \wedge \theta_{21}$$

implicando que $\theta_{21} = \lambda\theta_2$. Agora podemos colocar as equações acima em função de $\gamma$ e assim:

$$\begin{cases} \gamma'' = 0 \\ \bar{D}_{\gamma'}e_2 = 0 \\ \bar{D}_{\gamma'}e_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $\gamma$ é um segmento de geodésica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ contido em $M$, o que nos dá o resultado desejado.

$\square$

Para apresentarmos o próximo lema precisaremos da seguinte definição.

**Definição 3.6.** *Dizemos que uma linha assintótica passando pelo ponto $p$ é máxima quando não for subconjunto próprio de alguma linha assintótica passando por $p$.*

Para provar o resultado da próxima proposição, utilizaremos o seguinte lema, que terá a prova apresentada abaixo.

**Lema 3.2.** *Seja $M$ uma superfície em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Suponhamos que $M$ tenha as curvaturas extrínseca e intrínseca ambas identicamente nulas. Seja ainda $H$ a curvatura média de $M$. Ao longo de uma linha assintótica $\gamma$ mencionada acima parametrizada pelo comprimento de arco $s$, então*

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right) = 0.$$

*Demonstração.* Tomemos o referencial de campos $e_1$, $e_2$ e $e_3$ em $p$. Como $\theta_{21} = \lambda\theta_2$ e $\theta_{32} = k_2\theta_2$. Queremos provar que $\lambda^{'} - \lambda^2 = 0$ e $k^{'} - k_2 = 0$.

Para provar a primeira afirmação, como $\theta_{21} = \lambda\theta_2$ e escrevendo $d\lambda$ como combinação linear das formas duais dos campos acima, isto é,

$$d\lambda = \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2. \tag{4}$$

Por um lado, a 2ª equação de estrutura 3.2 nos dá $d\theta_{21} = K\theta_1 \wedge \theta_2 = 0$, pois por hipótese $K = 0$. Por outro lado, podemos diferenciar $\theta_{21}$ utilizando a regra do produto, isto é,

$$d\theta_{21} = d\lambda \wedge \theta_2 + \lambda \wedge d\theta_2. \tag{5}$$

Pela 1ª equação de estrutura 3.2 temos que

$$d\theta_2 = \theta_{21} \wedge \theta_1. \tag{6}$$

Substituindo as equações (4) e (6) na equação (5), ficamos com a equação abaixo

$$\mathrm{d}\theta_{21} = (\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2)\wedge\theta_2 + \lambda\theta_{21} \wedge \theta_1.$$

Na primeira parcela basta usar a propriedade distributiva do produto exterior e que $\theta_2 \wedge \theta_2 = 0$. Assim,

$$d\theta_{21} = \lambda_1\theta_1 \wedge \theta_2 + (\lambda\theta_{21}) \wedge \theta_1.$$

Agora, lembrando que $\theta_{21} = \lambda\theta_2$, podemos substituir na segunda parcela da última igualdade e obtemos

$$d\theta_{21} = \lambda_1\theta_1 \wedge \theta_2 + (\lambda.\lambda\theta_2) \wedge \theta_1$$

$$d\theta_{21} = \lambda_1\theta_1 \wedge \theta_2 + \lambda^2(\theta_2 \wedge \theta_1).$$

Como $\theta_2 \wedge \theta_1 = -\theta_1 \wedge \theta_2$ ficaremos com a seguinte igualdade

$$d\theta_{21} = (\lambda_1 - \lambda^2)\theta_1 \wedge \theta_2$$

$$\lambda^{'} - \lambda^2 = 0.$$

Concluímos a primeira igualdade. Para o que falta, sabendo que $\theta_{32} = k_2\theta_2$ e vamos escrever a diferencial $dk_2$ como

$$dk_2 = (k_2)_1\theta_1 + (k_2)_2\theta_2.$$

No primeiro membro da igualdade aplicamos a 2ª equação de estrutura 3.2 ficamos com

$$d\theta_{32} = \theta_{31} \wedge \theta_{12} = 0,$$

pois $\theta_{31} = 0$. Por outro lado,

$$\mathrm{d}\theta_{32} = d(k_2\theta_2) = dk_2 \wedge \theta_2 + k_2 d\theta_2.$$

Novamente pela 1ª equação de estrutura temos que $d\theta_2 = \theta_{21} \wedge \theta_1$. Substituindo os valores de $dk_2$ e $d\theta_2$ na equação acima, obteremos

$$\mathrm{d}\theta_{32} = ((k_2)_1\theta_1 + (k_2)_2\theta_2) \wedge \theta_2 + k_2(\theta_{21} \wedge \theta_1).$$

Assim, utilizando a distributividade do produto exterior e que vale $\theta_2 \wedge \theta_2 = 0$, temos que

$$0 = d\theta_{32} = (k_2)_1(\theta_1 \wedge \theta_2) + k_2(\theta_{21} \wedge \theta_1).$$

Substituindo $d\theta_{21} = \lambda\theta_2$ e $\theta_2 \wedge \theta_1 = -\theta_1 \wedge \theta_2$ na segunda parcela da igualdade acima, obtemos

$$0 = (k_2)_1(\theta_1 \wedge \theta_2) - \lambda k_2(\theta_1 \wedge \theta_2).$$

Portanto,

$$0 = [(k_2)_1 - \lambda k_2].\theta_1 \wedge \theta_2,$$

implica que ao longo de $\gamma$ vale

$$0 = [(k_2)_1 - \lambda k_2].$$

O que nos dá as duas afirmações

$$\lambda' - \lambda^2 = 0 \text{ e } 0 = k_2' - \lambda k_2.$$

Sabemos que ao longo de $\gamma$ temos que $k_1 = 0$ e vale que a curvatura média $H = \frac{k_2}{2}$. Basta provarmos para $k_2$. Assim, derivando o inverso de $H$, isto é

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_2}\right) = \frac{(1)'k_2 - 1.k_2'}{k_2^2} = -\frac{k_2'}{k_2^2}.$$

Como $k_2' = \lambda k_2$ temos que

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{H}\right) = -\frac{\lambda}{k_2}.$$

Derivando novamente, ficamos

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda}{k_2}\right) = \frac{-\lambda' k_2 - \lambda(k_2)'}{k_2^2} = \frac{-\lambda' k_2 - \lambda^2 k_2}{k_2^2}.$$

Daí, obtemos a seguinte igualdade

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \text{-}\ \frac{k_2(\lambda^{'} - \lambda^2)}{k_2^2}.$$

Logo, pela primeira afirmação provada obtemos

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right) = 0, \tag{7}$$

o que finaliza a prova.

□

A próxima proposição que enunciaremos nos diz que se uma linha assintótica for estendida, jamais intersectará o conjunto $P$, isto é, continua infinitamente em $U$.

**Proposição 3.5.** *Seja $M$ uma superfície completa de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com ambas curvaturas extrínseca e intrínseca nulas. Seja ainda uma linha assintótica máxima passando por um ponto parabólico $p \in U$ contido em $M$. Então, o conjunto dos pontos planares nunca intersecta $\gamma$, isto é, $\gamma \cap P = \varnothing$.*

*Demonstração.* Suponha o contrário, isto é, existe uma linha assintótica máxima $\gamma$ passando por $p \in U$ contendo um ponto $q \in P$. Sabendo que $\gamma$ é conexa e $U$ é aberto em $M$. Pelo Teorema da Alfândega 2.1 existe $p_0 = \gamma(s_0)$ em $\gamma$ pertencente a $U$. Vimos também que ao longo de $\gamma$ tal que $p_0 \in P$ e que pontos $\gamma(s)$ com $s < s_0$ pertencem a $U$. Por outro lado, sabemos que ao longo de $\gamma$ para $s < s_0$ temos (7)

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right) = 0.$$

Integrando a igualdade acima, temos $\frac{d}{ds}(\frac{1}{H}) = a$ integrando em $s$ essa igualdade, concluímos que $\frac{1}{H} = as + b$, ou seja,

$$H(s) = \frac{1}{as+b},$$

onde $a, b$ são constantes. Como os pontos de $P$ tem curvatura média nula, então pela continuidade de $H$ temos que

$$H(p_0) = \lim_{s \to\ s_0} H(s) = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{as+b}.$$

O que é absurdo. Logo, $\gamma \cap P = \varnothing$ e isto conclui a prova da proposição.

□

Vamos apresentar agora superfícies umbílicas com curvaturas extrínseca e intrínseca nulas.

Seja $M$ uma superfície conexa de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cujas curvaturas extrínseca e intrínseca são identicamente nulas. Sabemos que os conjuntos dos pontos planares e parabólicos são dados respectivamente por

$$P = \{p \in M; k_1 = k_2 = 0\} \text{ e } U \setminus P = \{p \in M; k_1 = 0 \text{ e } k_2 \neq 0\},$$

conforme Definição 3.5. Antes de enunciarmos a próxima proposição vamos analisar como são as geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Seja $\gamma$ uma geodésica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e seja $\bar{\gamma}$ sua projeção em $\mathbb{H}^2$. Seja ainda $f$ a projeção de $\gamma$ em $\mathbb{R}$. Vejamos um resultado das geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que nos auxiliará na prova da proposição.

**Lema 3.3.** *Seja $\gamma$ uma curva de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então, $\gamma$ é uma geodésica se, e somente se, a projeção $\bar{\gamma}$ em $\mathbb{H}^2$ é uma geodésica e $f(s) = as + b$ sendo $a, b \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Seja $\bar{\alpha} : (0,1) \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\alpha}(s) = (\alpha(s), f(s))$$

uma curva em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\bar{\alpha} = \alpha + f$ e $\alpha : (0,1) \longrightarrow \mathbb{H}^2$ e $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{\bar{D}\bar{\alpha}}{ds} = \frac{D\alpha}{ds} + \frac{df}{ds}\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{\bar{D}^2\bar{\alpha}}{ds^2} = \frac{\bar{D}}{ds}\left[\frac{\bar{D}\bar{\alpha}}{ds}\right] = \frac{\bar{D}}{ds}\left[\frac{D\alpha}{ds} + \frac{df}{ds}\frac{\partial}{\partial t}\right],$$

$$\frac{\bar{D}^2\bar{\alpha}}{ds^2} = \frac{D^2\alpha}{ds^2} + \frac{d^2 f}{ds^2}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Portanto, $\frac{\bar{D}^2\bar{\alpha}}{ds^2} = 0$ se, e só se, $\frac{D^2\alpha}{ds^2} = 0$ e $\frac{d^2 f}{ds^2} = 0$.

□

Vamos enunciar agora a seguinte proposição.

**Proposição 3.6.** *Seja $M$ uma superfície completa e conexa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cujas curvaturas extrínseca e intrínseca são identicamente nulas. Então, a vizinhança de qualquer ponto de $M$ contém um produto de arco de geodésica de $\mathbb{H}^2$ por um segmento de reta.*

*Demonstração.* De hipótese sabemos que $k_1 = k_2 = 0$ e portanto, a curvatura Gaussiana é nula em todo ponto de $M$. Podemos tomar o referencial ortonormal $e_1$, $e_2$ e $e_3$ tal que $e_3$ é normal em $M$. Assim, os campos $e_1$, $e_2$ são tangentes a $M$ e principais. Sejam $\omega_1$ e $\omega_2$ as formas duais correspondentes para $e_1$, $e_2$ e $\omega_{ij}$ as formas de conexão. Portanto, podemos escrever

$$\omega_{31} = k_1\omega_1 = 0 \text{ e } \omega_{32} = k_2\omega_2 = 0.$$

Segue que o campo $e_3$ é paralelo ao longo de $\gamma$. Ora, da seguinte igualdade

$$\bar{D}e_3 = \omega_{31} \wedge e_1 + \omega_{32} \wedge e_2 = 0,$$

concluímos que $\bar{D}e_3 = 0$. Definamos a seguinte função por $f = \langle e_3, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$, daí obtemos

$$df = \langle \bar{D}e_3, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 0$$

Portanto, $df = 0$. Concluímos que $f$ é constante em toda componente conexa de $M$. Pois $M$ é conexa. Suponhamos que $f = 0$ em $M$, isto é, $\langle e_3, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 0$. Portanto, o vetor $\frac{\partial}{\partial t}$ é tangente a $M$ para cada ponto. Logo, a curva integral de $\frac{\partial}{\partial t}$ está contida em $M$ ou tem um segmento contido em $M$. Concluímos então que $M$ contém um produto de um arco de curva de $\mathbb{H}^2$ por um segmento de reta. Tomando os campos $e_1 = \gamma^{'}(s)$ e $e_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ e suas formas duais $\omega_1$ e $\omega_2$ dadas por $\omega_1 = ds$ e $\omega_2 = dt$. Desse modo, temos que $\omega_{12} = 0$. Portanto, pelo Teorema 3.1. Obtemos,

$$\gamma^{''}(s) = \bar{D}_{e_1}\mathrm{e}_1 = \omega_{12}(e_2) \wedge e_2 + \omega_{13}(e_3) \wedge e_3 = 0.$$

Logo, $\gamma$ é geodésica em $\mathbb{H}^2$.

Agora consideremos o caso em que $f = c$ diferente de zero. Considere um ponto $p = (\bar{p}, t)$, onde $\bar{p} \in \mathbb{H}^2$ e $t \in \mathbb{R}$. Seja $\mathbb{H}^2 \times t$ uma superfície. Então, $p \in \mathbb{H}^2 \times t$. Seja também uma curva que corta a superfície $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Assim, teremos

$$\gamma(s) = (\bar{\gamma}(s), t).$$

Assim, tomando valores diferentes para o parâmetro $t$, teremos uma família de curvas

$$\gamma_t(s) = (\bar{\gamma}_t(s), t).$$

Tomando o referencial ortonormal tal que $e_1 = \gamma_t^{'}$. Então, temos que $\langle e_1, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 0$. Derivando obteremos

$$0 = d\left\langle e_1, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \langle \bar{D}e_1, \frac{\partial}{\partial t}\rangle + \langle e_1, \bar{D}(\frac{\partial}{\partial t})\rangle.$$

Como $\bar{D}(\frac{\partial}{\partial t}) = 0$, $\bar{D}e_1 = \omega_{12} \wedge e_2 + \omega_{13} \wedge e_3$ e $\omega_{13} = 0$. Concluímos que

$$\langle \mathrm{e}_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\omega_{12} = 0.$$

O campo $e_1$ é uma direção principal. Se $\langle e_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 0$, então $e_3$ será paralelo a $\frac{\partial}{\partial t}$. Concluímos que $e_1$ e $e_2$ são tangentes a $\mathbb{H}^2$ e, portanto, $P$ ou um aberto de $M$ coincide com a superfície $\mathbb{H}^2 \times\ t$ para todo $t$. O que não pode, pois num aberto o valor da curvatura é $-1$ e não zero. Logo, $\omega_{12} = 0$. Tomando a função definida por

$$dg = \langle \bar{D}e_2, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \langle \omega_{21} \wedge \; e_1 + \omega_{23} \wedge \; e_3, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 0,$$

implica que $g$ é constante diferente de zero. Seja $\alpha$ uma curva integral do campo $e_2$. Vamos mostrar que $\alpha$ é uma geodésica em $\mathbb{H}^2$. Ora, se $e_1 = \alpha^{'}(s)$ e $e_2 = \frac{\partial}{\partial t}$, temos

$$\alpha^{''}(s) = \bar{D}_{e_1}\mathrm{e}_1 = \omega_{12}(e_1)e_2 + \omega_{13}(e_1)e_3 = 0.$$

Sabendo que os campos $e_1$ e $e_2$ são ortonormais, então as curvas $\gamma$ e $\alpha$ são perpendiculares nas interseções $\gamma \cap P$ e $\alpha \cap P$.

Agora, como $\gamma = (\bar{\gamma}, t)$ e $\alpha = (\bar{\alpha}, as + b)$ temos que $\gamma^{'} = (\bar{\gamma}^{'}, 0)$ e $\alpha^{'} = (\bar{\alpha}^{'}, a)$, ou seja, as geodésicas $\bar{\gamma}$ e $\bar{\alpha}$ são perpendiculares, isto é, possuem um ponto em comum. Então, para todo ponto de $P$ podemos construir essas duas geodésicas perpendiculares em $\mathbb{H}^2$. Mas, então teríamos em $\mathbb{H}^2$ uma família de retângulos, ou seja, formadas por quatro arcos de geodésicas que possuem pontos de interseção nas quais são perpendiculares o que não pode ocorrer, pois não existem retângulos em $\mathbb{H}^2$ . Essa última parte pode ser também obtida por uma aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet 2.2. Isso prova que, em uma vizinhança de qualquer um de seus pontos, $P$ contém um produto de um arco de geodésica de $\mathbb{H}^2$ por um segmento de reta.

$\square$

No próximo capítulo provamos o resultado principal dessa dissertação, que é a condição suficiente do teorema do cilindro no espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

# 4 RESULTADOS PRINCIPAIS

Primeiramente vamos demonstrar o seguinte resultado.

**Proposição 4.1.** *Seja $M$ uma superfície completa e conexa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com ambas curvaturas intrínseca e extrínseca identicamente nulas. Considere $P$ o conjunto dos pontos planares de $M$ e $M \setminus P$ o conjuntos dos pontos parabólicos. Então, o interior de cada componente conexa de $P$, digamos que a componente seja $P_0$ será o produto $\gamma \times \mathbb{R}$, onde $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é um arco geodésico aberto de $\mathbb{H}^2$. Além disso, a fronteira $\partial P_0$ são as duas linhas $\gamma(a) \times \mathbb{R}$ e $\gamma(b) \times \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Considere uma componente conexa $P_0$ do conjunto $P$ dos pontos planares e seja um ponto $p \in int(P_0)$. Pela Proposição 3.6 existe um arco geodésico aberto $\alpha$ e um segmento de reta aberto $I$ tal que $p \in \gamma \times I \subseteq int(P_0)$. Agora estendemos a curva completamente que chamaremos de $L$. Note que $L$ é uma geodésica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e, portanto é também geodésica de $M$ já que $I \subseteq L \cap M$. Vamos provar que essa geodésica não pode sair da componente conexa $P_0$. Para isto, suponha que $L$ sai da componente conexa $P_0$, então existirá um ponto parabólico $q \in U$ na qual a curva geodésica passa nesse ponto. Podemos tomar uma vizinhança $V$ de $q$ e um referencial de campos $e_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $e_2$ e $e_3$ ortonormal a $M$. Mas, sabemos que só é possível caso possuísse um arco geodésico contido em $U$ passando em $q$. Para esta escolha temos que

$$\bar{D}e_1 = \bar{D}(\tfrac{\partial}{\partial t}) = 0,$$

ou seja, o campo $e_1$ é paralelo ao longo de $L$ e, portanto $\theta_{13}(e_1) = 0$, pois

$$0 = \bar{D}_{e_1} e_1 = \theta_{12}(e_1)e_2 + \theta_{13}(e_1)e_3,$$

logo $\gamma$ o arco da geodésica $L$ é uma curva assintótica. Sabemos da Proposição 3.3 que para cada ponto parabólico passa uma única curva assintótica e como já visto da Proposição 3.5 essa curva não intersecta $P$. O que garante que $L$ não sai da componente conexa $P_0$.

Agora vamos provar a seguinte afirmação: a curva $L$ não pode passar em nenhum ponto da fronteira $\partial P_0$. Para isto, como $p \in L \cap (int(P_0)$ implica que $p$ pertence a $L$ e também está no interior da componente conexa $P_0$ então a partir desse ponto existirá um ponto $q$ na fronteira da componente conexa $P_0$, onde $L \cap \partial P_0$. Tomando agora uma vizinhança do ponto $p$ dividiremos as duas curvas, isto é, em duas classes: à direita e à esquerda de $L$. Como usamos a vizinhança $V$ podemos estender a todos os pontos de $L$ e as curvas não mudarão de classificação ao longo desse procedimento. Particularmente, no ponto $q$ teremos linhas do lado esquerdo e no lado direito da curva $L$, no entanto como $p \in \partial P_0$ teremos só linhas do lado direito de $L$. Os outros conterão somente pontos parabólicos, ou seja, pontos de $U$. O que é contradição pela suposição inicial. Logo, $P_0$

é composto de linhas completas e além disso, $int(P_0) = \gamma \times \mathbb{R}$, onde $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é um arco geodésico aberto de $\mathbb{H}^2$. Note que $\partial P_0$ é uma linha, pois é limite de linhas tal que $P_0 = \gamma \times \mathbb{R}$ e $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é uma geodésica com extremidades, e $\partial P_0$ consiste nas duas linhas $\gamma(a) \times \mathbb{R}$ e $\gamma(b) \times \mathbb{R}$.

□

Antes de enunciarmos o teorema principal que é objeto do nosso trabalho apresentaremos alguns resultados de geometria diferencial clássica encontrados em [3].

**Lema 4.1.** *Seja $M$ uma superfície completa com curvatura intrínseca $K \leq 0$. Então $exp_p : T_pM \longrightarrow M$, $p \in M$ aumenta comprimentos, no seguinte sentido: se $u, v \in T_pM$ tem-se*

$$\langle d(exp_p)_u(v), d(exp_p)_u(v)\rangle \geq \langle v, v\rangle,$$

*onde como de costume, $v$ denota um vetor em $(T_pM)_u$ que é obtido de $v$ por uma translação dada por $u$.*

*Demonstração.* Ver [3].

□

**Corolário 4.1.** *Seja $M$ uma superfície completa com curvatura intrínseca $K = 0$, então $exp_p : T_pM \longrightarrow M$ é uma isometria local.*

*Demonstração.* Como $K = 0$ então utiliza-se alguns passos da demonstração do Lema 4.1 encontrados na referência [3].

□

De posse desses resultados podemos enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 4.1.** *Seja $M$ uma superfície completa e conexa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com ambas curvaturas intrínseca e extrínseca identicamente nulas. Então, $M$ é um cilindro.*

*Demonstração.* Seja $M$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ completa e conexa com as curvaturas intrínseca e extrínseca ambas identicamente nulas. Sejam os conjuntos dos pontos planares $P = \{p \in M, k_1 = k_2 = 0\}$ e os dos pontos parabólicos $U \setminus P = \{p \in M, k_1 = 0 \text{ e } k_2 \neq 0\}$ de $M$. Suponhamos primeiramente que $P \neq \emptyset$. Pela Proposição 4.1 temos que cada componente conexa $P_i$ do conjunto dos pontos planares é igual a $\gamma_i \times \mathbb{R}$, onde $\gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é um arco geodésico de $\mathbb{H}^2$ com extremidades e a fronteira $\partial P_i$ é formada por duas linhas $\gamma_i(a) \times \mathbb{R}$ e $\gamma_i(b) \times \mathbb{R}$. Agora seja $P_i \cap (\mathbb{H}^2 \times \{t_0\})$. A curva $\alpha$ tem um ponto $\alpha(s_0)$ em $\partial P_i$. Para cada ponto da curva $\alpha$ em $U$ passa uma única curva assintótica que é também geodésica do espaço ambiente. Essas geodésicas ou são linhas ou da forma $\gamma(s) = (\bar{\gamma}(s), as + b)$, onde $\bar{\gamma}$ é uma geodésica não-trivial de $\mathbb{H}^2$. Suponha que seja da forma $\gamma(s) = (\bar{\gamma}(s), as + b)$. A família de tais geodésicas fixadas pelos pontos de $U$ possuem limite que deve ser ou uma linha do tipo $\bar{p_i} \times \mathbb{R}$ contida em $\partial P_i$ ou uma linha do tipo $p \times \mathbb{R}$ não necessariamente pertencendo a fronteira de $P$. Mas, teríamos que o limite da família das geodésicas deve ser o ponto $\bar{p_i}$ o que não é possível. Logo, as curvas mencionadas são linhas e cada componente conexa de $U$ deve ser um arco geodésico do espaço ambiente. Provaremos agora o caso em que $P = \emptyset$. Então, $M = U$. Tomando um ponto $p = (\bar{p}, a) \in M$. Seja $S = \mathbb{H}^2 \times \{a\}$ uma superfície. Afirmamos que o conjunto $M \cap S$ não contém qualquer aberto. Se $M \cap S$ contivesse um aberto o mesmo teria a curvatura intrínseca de $M$ igual a -1. O que não é o caso. Tome a curva $\alpha = M \cap S$. Passando por cada ponto $\alpha(r)$ existe uma única geodésica $\gamma_r$ do espaço ambiente. Tal geodésica é uma linha ou é da forma $\gamma_r(s) = (\bar{\gamma}_r(s), a_r s + b_r)$, onde $\gamma_r$ é uma geodésica de $\mathbb{H}^2$. Provemos agora a seguinte afirmação.

Seja $p$ um ponto passando uma linha contida em $M$, então cada geodésica $\gamma_r$ será uma linha e $M = \bar{\alpha} \times \mathbb{R}$. Para isto, suponha que não seja verdade, isto é, existem pontos $\alpha(r)$ para os quais as linhas de curvatura são da forma

$$\gamma_r(s) = (\bar{\gamma}_r(s), a(s)).$$

A família de tais geodésicas teria que convergir para uma linha. Mas então a geodésica $\gamma_r$ teria que convergir para um ponto, que é absurdo. Assim, concluímos que $M$ é igual ao produto $\alpha \times \mathbb{R}$ ou as linhas de curvatura passando por pontos de $\alpha$ são da forma $\gamma_r(s) = (\bar{\gamma}_r(s), a(s))$.

Vamos agora provar que não pode ocorrer a segunda possibilidade. Se $\alpha(r_1) \neq \alpha(r_2)$, então as geodésicas correspondentes não se intersectam, isto é, as geodésicas são paralelas. Note que se $\alpha(r_i) = (\bar{\alpha}(r_i), a)$ com $i = 1, 2$. Se as geodésicas são retas, então as retas passam por dois pontos distintos de $\mathbb{H}^2$ e assim, não se intersectam.

Suponha que elas se intersectam. Assim, a interseção é um ponto de $U = M$ e assim, por esse ponto passa uma única linha assintótica que é uma geodésica do espaço ambiente. Como as duas geodésicas são linhas assintóticas elas teriam que ser iguais. O que é um absurdo. Agora sabendo que $M$ é completa e conexa com curvatura intrínseca nula o Corolário 4.1 garante que $exp_p : T_pM \longrightarrow M$ é uma isometria local do plano tangente $T_pM$ sobre $M$. Então, a imagem inversa da geodésica $\gamma$ que passa por pontos da curva $\alpha$ são retas que passam pela origem de $T_pM$. Além disso, podemos dizer que se as retas paralelas são equidistantes, então as geodésicas definidas anteriormente são equidistantes por conta da isometria local. Observe que a métrica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ já definida no nosso texto é dada por

$$d\sigma^2 = d\zeta^2 + dt^2,$$

onde $d\zeta$ é a métrica em $\mathbb{H}^2$ e $dt$ é a métrica usual de $\mathbb{R}$. Além disso, vamos definir a distância restrita a métrica $d\sigma$ como a métrica de $M$.

Tome quaisquer duas curvas geodésicas $\gamma_1$ e $\gamma_2$. Supondo que tais geodésicas são equidistantes. Seja $p_1$ um ponto de $\gamma_1$. Então existe um ponto $p_2 \in \gamma_2$ tal que

$$d_M(\gamma_1, \gamma_2) = d_M(p_1, p_2).$$

Sendo $p_1 = (\bar{p_1}, a_1)$ e $p_2 = (\bar{p_2}, a_2)$ onde $\bar{p_1}$ e $\bar{p_2}$ pertencem a $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ respectivamente e essas curvas são geodésicas de $\mathbb{H}^2$. Então,

$$d_M(\gamma_1, \gamma_2) \geq d_\sigma(p_1, p_2) \geq d_\zeta(\bar{p}_1, \bar{p}_2).$$

Mas, o espaço $\mathbb{H}^2$ é um espaço completo, consequentemente toda geodésica possui comprimento infinito e assim a distância $d_\zeta(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ é ilimitada, ou seja, para qualquer número real $\lambda$ existem pontos $\bar{p_1} \in \bar{\gamma}_1$ e $\bar{p_2} \in \bar{\gamma}_2$ tal que

$$d_\zeta(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \lambda$$

o que não pode, pois sabemos que as geodésicas são equidistantes. Logo, provamos que $M$ é um cilindro no espaço ambiente. Isto finaliza a prova.

$\square$

# 5 CONCLUSÃO

Nesta dissertação apresentamos resultados de muita importância que ligam os campos de estudos: Geometria e Topologia. Diante do exposto, provamos o resultado principal desse trabalho que é o Teorema do cilindro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ no qual garante que superfícies conexas e completas cujas curvaturas são identicamente nulas são os cilindros no espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, podemos estudar outros tipos de imersões de superfícies com curvaturas constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, ou seja, um tipo de Teorema de classificação de superfícies de revolução com curvaturas constante no espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

## REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, J.L.M.; CARMO, M. P. The cylinder theorem in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Journal of Geometry**, v.111, n. 3, art.44, 2020.

[2] CARMO, M. P. **O método do referencial móvel**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

[3] CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[4] LIMA, E. L. **Curso de análise**. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Projeto Euclides).

[5] O'NEILL, B. **Elementary differential geometry**. Amsterdam: Elsevier, 2006.