



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL LINO GARCIA DE LIMA

**CONTROLE DE UM SISTEMA NÃO LINEAR UTILIZANDO TEORIA DA
DISSIPATIVIDADE E UMA ESTRATÉGIA ITERATIVA SUM-OF-SQUARES (SOS)**

FORTALEZA

2023

GABRIEL LINO GARCIA DE LIMA

CONTROLE DE UM SISTEMA NÃO LINEAR UTILIZANDO TEORIA DA
DISSIPATIVIDADE E UMA ESTRATÉGIA ITERATIVA SUM-OF-SQUARES (SOS)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia elétrica do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Sousa
Madeira.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- L698c Lima, Gabriel Lino Garcia de.
Controle de um Sistema Não Linear Utilizando Teoria da Dissipatividade e uma Estratégia Iterativa Sum-of-Squares (SOS) / Gabriel Lino Garcia de Lima. – 2023.
53 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira.
1. Sistemas dinâmicos polinomiais. 2. Atuador pneumático não linear. 3. Controle. 4. Teoria da dissipatividade. I. Título.

CDD 621.3

GABRIEL LINO GARCIA DE LIMA

CONTROLE DE UM SISTEMA NÃO LINEAR UTILIZANDO TEORIA DA
DISSIPATIVIDADE E UMA ESTRATÉGIA ITERATIVA SUM-OF-SQUARES (SOS)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia elétrica do
Centro de Tecnologia da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia elétrica.

Aprovada em: xx/xx/xxxx.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Clauson Sales do Nascimento Rios
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
de Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais, que acreditaram neste sonho,
antes mesmo de mim, e a todos aqueles que ao
longo desses anos me motivaram e inspiraram.
Essa conquista é de todos nós.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, agradeço por todo o amor que recebi, além do esforço material que exigiu muito sacrifício e determinação de ambos. Obrigado por todo carinho e cuidado ao longo de todos esses anos.

Aos professores do Instituto São José, sou grato por terem estabelecido as bases do meu conhecimento em ciências exatas. Em particular, sou grato ao Adalto, que me incentivou tanto a seguir a carreira de engenharia.

À minha tia Cícera, que me acolheu em sua casa para que eu pudesse cursar a graduação.

À minha irmã Thaís, que esteve ao meu lado durante todos esses anos, compartilhando a saudade de casa.

Ao Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira, pela excelente orientação. Agradeço pela paciência e atenção durante todo o processo.

Ao Dr. Wilkley Bezerra Correia, agradeço por disponibilizar o laboratório.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Clauson Sales do Nascimento Rios e Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia, agradeço pela atenção, colaborações e sugestões.

"O homem não pode entrar no mesmo rio duas vezes, porque nem o homem nem o rio são os mesmos." (Heráclito de Éfeso, Grécia.)

RESUMO

Os sistemas dinâmicos polinomiais desempenham um papel fundamental no estudo e controle de muitos processos reais. Diversas abordagens têm sido propostas para projetar controladores para esses sistemas, e com o avanço do poder computacional, surgem novas estratégias para a otimização desses controles. Neste trabalho são utilizados os modelos matemáticos de uma esteira transportadora e de um atuador pneumático não linear para desenvolver um controlador utilizando a teoria da dissipatividade, a fim de avaliar seu desempenho no controle da velocidade. Para emular o comportamento de um atuador pneumático não linear, foi utilizado um sistema de esteira composto por uma esteira industrial acionada por inversor de frequência, com o auxílio de um circuito eletrônico. O projeto do controlador faz uso da teoria da dissipatividade e da ferramenta SOSTools do MATLAB para encontrar um controle estabilizante em qualquer ponto de equilíbrio dentro de um domínio de atração.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos polinomiais; Atuador pneumático não linear; Controle; Teoria da dissipatividade.

ABSTRACT

Nonlinear dynamic systems play a fundamental role in the study and control of many real-world processes. Various approaches have been proposed to design controllers for these systems, followed by advances in computational power, new strategies for optimizing these controls emerge. In this work the mathematical models of a conveyor belt and a nonlinear pneumatic actuator are utilized to develop a controller using the dissipativity theory, aiming to evaluate its performance in velocity control. To emulate the behavior of a nonlinear pneumatic actuator, a conveyor belt system consisting of an industrial conveyor belt driven by a frequency inverter, aided by an electronic circuit, was employed. The controller design utilizes the dissipativity theory and MATLAB's SOSTools to find stabilizing control at any equilibrium point within an attraction domain.

Keywords: Polynomial dynamic systems; Nonlinear pneumatic actuator; Control; Dissipativity theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estabilidade de um ponto de equilíbrio	18
Figura 2 – Estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio	19
Figura 3 – Sistema de esteiras	28
Figura 4 – Esquemático da bancada	29
Figura 5 – Motor e caixa redutora	29
Figura 6 – Inversor de frequência	30
Figura 7 – ESP32-WROOM-32	31
Figura 8 – Sensor indutivo com hastes metálicas	32
Figura 9 – Leitura do sensor	33
Figura 10 – Modelo do sistema no Simulink	34
Figura 11 – Curva definida para o atuador não linear emulado	35
Figura 12 – Blocos do modelo da esteira com o atuador não linear	36
Figura 13 – Blocos de condicionamento de leitura do sensor indutivo	36
Figura 14 – Detecção de bordas de subida	37
Figura 15 – Bloco de leituras da planta	38
Figura 16 – Dinâmica linear da esteira	39
Figura 17 – Referência e velocidade da esteira	41
Figura 18 – Sinal de controle	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Identificação da esteira	39
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequalities</i> / Desigualdade Matricial Linear
<i>LTI</i>	<i>Linear time-invariant</i> / Linear invariante no tempo
<i>PWM</i>	<i>Pulse Width Modulation</i> / Modulação por largura de Pulso
<i>SDP</i>	<i>Semi Defined Programing</i> / Programação Semi Definido
<i>SOF</i>	<i>Static Output Feedback</i> / Realimentação estática de Saída
<i>SOSP</i>	<i>Sum of Squares Program</i> / Programa de Soma de Quadrados
<i>SOS</i>	<i>Sum of Squares</i> / Soma de Quadrados
<i>USB</i>	<i>Universal Serial Bus</i> / Barramento Serial Universal
PD	Positiva Definida
PSD	Positiva Semi-Definida

LISTA DE SÍMBOLOS

A^T	Matriz A transposta.
I_m	Matriz identidade $m \times m$.
∇	Operador gradiente.
\mathbb{S}_n	O conjunto de matrizes simétricas $n \times n$.
$\ x\ $	A Norma Euclidiana do vetor x , dada por $\sqrt{x^T \cdot x}$.
CV	Cavalo-Vapor
W	Watts
rpm	Rotações por minuto
ϕ	Fator de potência
Hz	Frequência
V	Tensão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Motivação	14
1.2	Objetivo	14
1.3	Organização do trabalho	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Sistemas dinâmicos	16
2.2	Estabilidade de Lyapunov	17
2.2.1	<i>Região de atração estimada</i>	21
2.3	Teoria da dissipatividade	21
2.3.1	<i>Aplicando a dissipatividade para a estabilização via SOF</i>	22
3	MÉTODO APLICADO	23
3.1	Sum of Squares <i>Sum of Squares</i> / Soma de Quadrados (SOS)	23
3.2	Métodos de soma de quadrados	24
3.3	SOSTools	24
3.4	Método iterativo	25
4	EXPERIMENTO	28
4.1	Sistema de esteira industrial	28
4.1.1	<i>Motor e caixa redutora</i>	29
4.1.2	<i>Inversor de frequência</i>	30
4.1.3	<i>Circuito de acionamento</i>	30
4.1.3.1	<i>Microcontrolador</i>	31
4.1.3.2	<i>Placa de condicionamento de sinal</i>	31
4.1.4	Sensoriamento	32
4.1.4.1	<i>Sensor indutivo</i>	32
4.1.4.2	<i>Hastes metálicas</i>	33
4.1.4.3	<i>Optoacoplador</i>	33
4.2	Modelagem do sistema	33
4.2.1	<i>Esteira</i>	34
4.2.2	<i>Condicionamento de leituras</i>	36
4.2.3	<i>Leituras</i>	38

4.3	Projeto do controlador	39
4.4	Resultados	40
4.5	Sinal de controle	41
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	43
	REFERÊNCIAS	44
	APÊNDICE A –CÓDIGOS	45

1 INTRODUÇÃO

Controles por realimentação que utilizam informações do estado da planta, que são comumente aplicados para estabilizar sistemas dinâmicos, pressupõem que todos os estados da planta estejam disponíveis para medição. No entanto, em alguns casos é inviável acessar todos os estados, devido viabilidade financeira ou restrições físicas. Logo, é necessário projetar um observador de estado para estimar os estados do sistema que não estão disponíveis para medição. Isso permite a implementação de um controle de realimentação de estado baseado em observador. Além disso, controladores que utilizam apenas uma parte dos estados do processo para realimentação, também surgem como uma alternativa nesses casos. Esses controladores são conhecidos como controladores de realimentação de saída (SYRMOS *et al.*, 1997).

Um controlador *Static Output Feedback* / Realimentação estática de Saída (*SOF*), é um ganho estático que multiplica o vetor de saída do sistema. Os desafios que envolvem o projeto de um *SOF* envolvem condições não-convexas que não podem ser resolvidas por *Semi Defined Programing* / Programação Semi Definido (*SDP*) (GEROMEL *et al.*, 1996).

1.1 Motivação

A teoria da dissipatividade analisa a dinâmica dos sistemas com base nas relações de energia. Recentemente, o conceito de dissipatividade tem se mostrado importante no contexto do problema de controle via *SOF*, visando a estabilização de sistemas lineares e não lineares. Diversos trabalhos na literatura têm proposto estratégias de estabilização baseadas em dissipatividade, como em (LIMA *et al.*, 2022) por exemplo. Além disso, (MADEIRA, 2022a) demonstrou, sob suposições moderadas, que a dissipatividade QSR estrita é uma condição necessária e suficiente para a estabilização via *SOF* em uma classe de sistemas não lineares. Esse resultado mostra que o conceito de dissipatividade pode ser aplicado em problemas de design de controle.

1.2 Objetivo

A dissipatividade QSR estrita tem potencial para estabilização de sistemas não lineares, logo surge a oportunidade do projeto de um controlador não linear baseado nessas condições. Além disso, o sistema de esteiras transportadoras do Laboratório de Sistemas Motrizes (LAMOTRIZ) permite a reprodução de dinâmicas de sistemas não lineares. Por isso, surge a possibilidade de projetar um controlador através do método iterativo, utilizando a teoria da

dissipatividade, para a esteira emulando não linearidades de um atuador.

1.3 Organização do trabalho

O primeiro capítulo apresenta uma contextualização dos controles por realimentação e suas técnicas de estabilização. Além disso, introduz o conceito de dissipatividade que é utilizado no projeto do controlador. Por fim, apresenta a motivação, justificativa e organização do trabalho.

O segundo capítulo trata da fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do método aplicado. Partindo de uma explicação de sistemas dinâmicos e estabilidade de Lyapunov até a definição da Teoria da Dissipatividade e sua aplicação na estabilização de *SOF*.

O terceiro capítulo descreve o método empregado, abordando a soma de quadrados e o *SOSTtools* do *Matlab*. Além disso, o próprio algoritmo iterativo é apresentado junto com as desigualdades que estabelecem os seus objetivos.

O quarto capítulo descreve a estrutura física do sistema de esteira transportadora utilizado, e a modelagem desse sistema no *Simulink* do *Matlab*, junto com o modelo do atuador não linear. Além disso, são apresentados o projeto do controlador e os resultados experimentais.

O quinto e último capítulo é a conclusão deste trabalho, apresentando uma análise dos resultados, além de uma avaliação da bancada como um sistema linear capaz de emular dinâmicas não lineares. Por fim, são apresentadas indicações de possíveis trabalhos futuros que podem ser realizados a partir deste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Sistemas dinâmicos

Sistemas dinâmicos são sistemas que desenvolvem mudanças em seus processos ao longo do tempo. Eles podem ser representados matematicamente por equações diferenciais ou por sistemas de equações. O estudo de sistemas dinâmicos permite entender o seu comportamento ao longo do tempo. As dinâmicas dos sistemas podem ser modeladas por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}$$

As variáveis x_1, \dots, x_n são denominadas variáveis de estado, elas representam a memória do sistema dinâmico, t é a variável de tempo e u_1, \dots, u_n são os sinais de controle na entrada do sistema. É possível compactar esse sistema de equações através do uso de vetores

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{u}) = \begin{bmatrix} f_1(t, \vec{x}, \vec{u}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{x}, \vec{u}) \end{bmatrix}$$

A equação de estado desses sistemas pode ser obtida reescrevendo as n equações diferenciais de primeira ordem como uma equação diferencial vetorial de primeira ordem n -dimensional.

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{2.1}$$

O vetor q -dimensional de saída que compreende as variáveis analisadas na dinâmica do sistema pode ser definido pela equação de saída

$$y = h(t, x, u) \tag{2.2}$$

Juntas, 2.1 e 2.2 compõem o modelo do espaço de estados (KHALIL, 2002). Os sistemas lineares são um tipo de sistema dinâmico, eles podem ser representados matematicamente por equações lineares. A representação da dinâmica dos sistemas lineares invariantes no tempo é descrita pelo seguinte modelo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde A, B, C e D são constantes. No entanto, a maioria dos sistemas reais apresentam dinâmicas mais complexas e não lineares. Isso significa que as variáveis são multiplicadas por coeficientes que não são constantes (VIANA, 2022). Logo, um modelo matemático mais geral para os sistemas dinâmicos é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y &= h(x(t)) + d(x(t))u(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

que representa o modelo dos sistemas não lineares, onde $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t)$ é o sinal de controle na entrada tal que $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$. $f(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções continuamente diferenciáveis, i.e $(f, g) \in \mathcal{C}^1$, $f(0) = 0$ e a origem $(x(t), u(t)) = (0, 0)$ é o ponto de equilíbrio de 2.4. Um ponto $x = x^*$ no espaço de estados é dito ser um ponto de equilíbrio se tiver a propriedade de quando o estado do sistema começar em x^* , ele permanecerá em x^* durante todo o tempo futuro (KHALIL, 2002).

2.2 Estabilidade de Lyapunov

Um sistema é dito autônomo, ou invariante no tempo, quando possui um comportamento independente da origem do tempo (KHALIL, 2002). Ou seja, independente de quando o sistema começar ele vai possuir o mesmo comportamento. Considerando o sistema dinâmico não linear autônomo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{2.5}$$

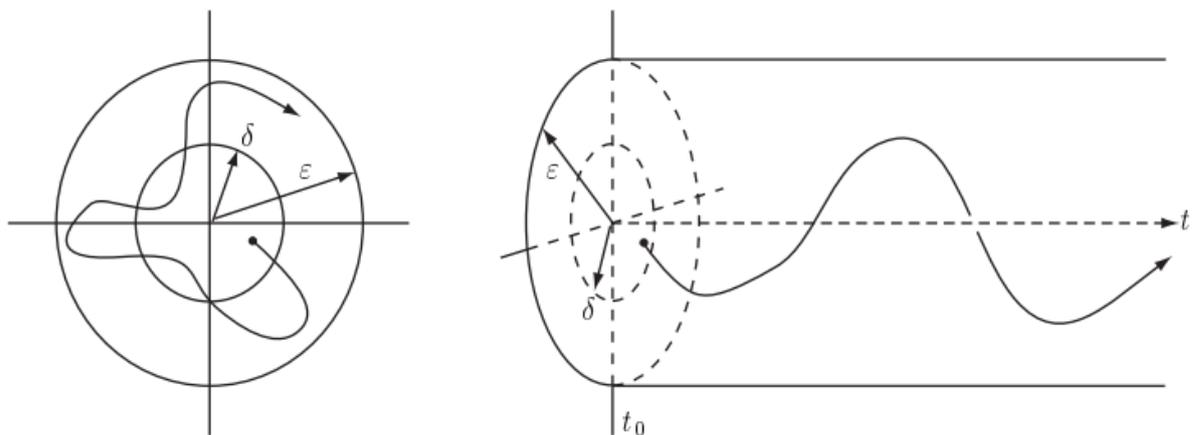
onde $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, \mathcal{X} é um subconjunto aberto com $0 \in \mathcal{X}$ e $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em \mathcal{X} . Qualquer ponto $\bar{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ é um ponto de equilíbrio

do sistema (VIANA, 2022). Os pontos de equilíbrio são raízes reais da equação de sistemas autônomos (KHALIL, 2002).

- Definição 2.2.1**
1. A solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é estável de acordo com o critério de Lyapunov se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $\|x(0)\| < \delta$, então $\|x(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$.
 2. A solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é (localmente) assintoticamente estável se for Lyapunov estável e existir $\delta > 0$ tal que se $\|x(0)\| < \delta$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
 3. A solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é (localmente) exponencialmente estável se existirem as constantes positivas α , β e δ tal que se $\|x(0)\| < \delta$, então $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}$, $t \geq 0$.
 4. A solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é globalmente assintoticamente estável se for Lyapunov estável e para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
 5. A solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é globalmente exponencialmente estável se existirem as constantes positivas α e β tal que $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$.
 6. Por fim, a solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é instável se não for Lyapunov estável.

A estabilidade exponencial implica estabilidade assintótica, que, por sua vez, implica estabilidade de acordo com o critério de Lyapunov (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008). De acordo com a definição 2.2.1, o ponto de equilíbrio é estável se todas as condições iniciais suficientemente próximas possuírem trajetórias próximas do ponto de equilíbrio, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Estabilidade de um ponto de equilíbrio

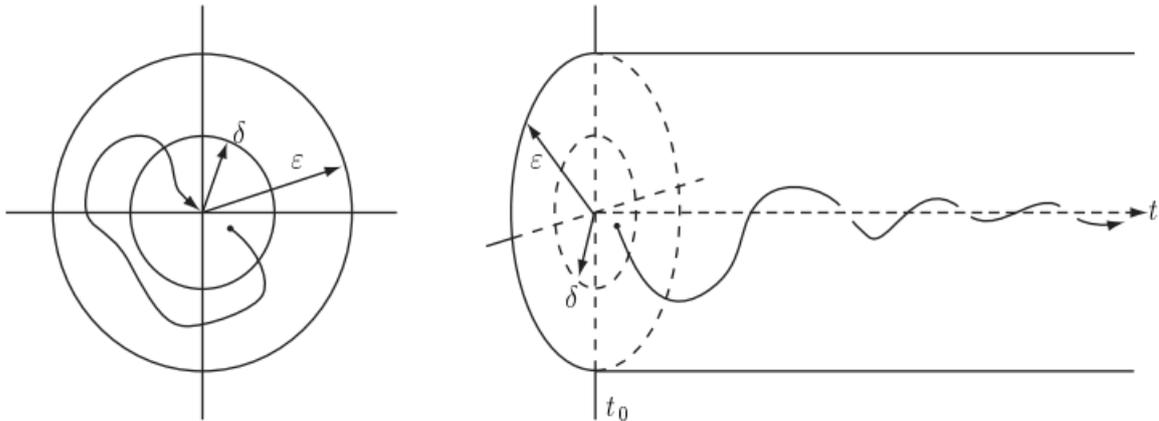


Fonte: (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008)

Além disso, como pode ser observado na Figura 2, se as trajetórias das condições iniciais próximas se deslocarem para o ponto de equilíbrio com o passar do tempo, a estabilidade

é assintótica (KHALIL, 2002).

Figura 2 – Estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio



Fonte: (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008)

A estabilidade da dinâmica de um sistema pode ser analisada por meio de uma função de Lyapunov (VIANA, 2022).

Teorema 2.2.1 (Lyapunov) *Considerando o sistema dinâmico não linear 2.5 e assumindo uma função $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, a solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é estável de acordo com o critério de Lyapunov se*

$$V(0) = 0, \quad (2.6)$$

$$V(x) > 0, x \in \mathcal{D}, x \neq 0, \quad (2.7)$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V^T(x)f(x) \leq 0, x \in \mathcal{D}. \quad (2.8)$$

A solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é assintoticamente estável se

$$\nabla V^T(x)f(x) \leq 0, x \in \mathcal{D}, x \neq 0, \quad (2.9)$$

Por fim, se existirem escalares $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$, e $p \geq 1$ tal que $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$\alpha \|x\|^p \leq V(x) \leq \beta \|x\|^p, x \in \mathcal{D}, \quad (2.10)$$

$$\nabla V^T(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), x \in \mathcal{D}, \quad (2.11)$$

então a solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é exponencialmente estável.

Prova 1 (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008).

Teorema 2.2.2 Considerando o sistema dinâmico não linear 2.5 e assumindo uma função $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V(0) = 0, \quad (2.12)$$

$$V(x) > 0, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla V^T(x)f(x) < 0, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \quad (2.14)$$

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ as } \|x\| \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

então a solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é globalmente assintoticamente estável. Se existirem escalares $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ e $p \geq 1$, tal que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$\alpha \|x\|^p \leq V(x) \leq \beta \|x\|^p, x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.16)$$

$$\nabla V^T(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.17)$$

então a solução $x(t) \equiv 0$ de 2.5 é globalmente exponencialmente estável.

Prova 2 (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008).

Lema 2.2.1 Assumindo $F(x(t)) = \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\Phi(x(t))$, o ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ de $F(x(t))$ é assintoticamente estável, $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável, e $\delta > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\} \subset \mathcal{X}$ está contido em um conjunto tal que as trajetórias de estado de $F(x)$ permanecem neste conjunto e convergem para o ponto de equilíbrio. Então existe uma função continuamente diferenciável $V : \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(0) = 0, V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) = \nabla V^T(x)F(x) < 0$ para $x \neq 0$ no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$ (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008).

2.2.1 Região de atração estimada

A região de atração de um sistema é um conjunto de condições iniciais tal que a trajetória dos estados converge para o ponto de equilíbrio sem sair da região (VIANA, 2022). Considerando a seguinte região

$$\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq 1\} \subset \mathcal{X} \quad (2.18)$$

onde $V(x)$ e \mathcal{X} são a função de Lyapunov e o domínio, respectivamente. Se $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{X} - \{0\}$, a região ε é uma estimativa do domínio de atração do sistema.

2.3 Teoria da dissipatividade

A teoria da dissipatividade fornece princípios fundamentais para a análise de sistemas dinâmicos com base nas relações de energia do sistema. A dissipatividade pode ser empregada no projeto de controladores que asseguram robustez e estabilidade, permitindo uma compreensão física do processo de estabilização (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008). Considerando a função potência $r(u(t), y(t))$ como a quantidade de energia que entra no sistema, e a função de energia $V(x)$ a quantidade de energia armazenada no sistema. A função potência é tal que para todo $u(t)$ admissível, $x(0)$ e $t \geq 0$

$$\int_0^t |r(u(\tau), y(\tau))| d\tau < \infty \quad (2.19)$$

Supondo que $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V \in \mathcal{C}^1$ (MADEIRA, 2022a).

Definição 2.3.1 *Um sistema é dissipativo se existir uma função de armazenamento $V(x) \geq 0$ de forma que a seguinte desigualdade de dissipação seja satisfeita*

$$\dot{V}(x) \leq r(u, y) \quad (2.20)$$

no decorrer de todas as trajetórias iniciando em todos os $x(0)$, $t \geq 0$.

Um sistema dinâmico dissipativo é capaz de armazenar apenas uma fração da energia fornecida a ele através de $r(u, y)$, e só consegue converter uma porção dessa energia armazenada $V(x)$ em outras formas de energia para o ambiente (MADEIRA, 2022a).

Definição 2.3.2 Um sistema dinâmico é QSR-dissipativo se for dissipativo com a seguinte função potência:

$$r(u, y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \quad (2.21)$$

onde $Q \in \mathbb{S}_p$ e $R \in \mathbb{S}_m$ são simétricas, e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Se $Q \leq 0$ e $V(x) > 0$, então a solução $x(t) \equiv 0$ do sistema em malha aberta é estável de acordo com o critério de Lyapunov.

Definição 2.3.3 Um sistema é considerado estritamente QSR-dissipativo se ele for QSR-dissipativo e existir uma função $T(x) > 0$ tal que

$$\dot{V} + T \leq y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \quad (2.22)$$

onde $Q \in \mathbb{S}_p$ e $R \in \mathbb{S}_m$ são simétricas, e $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

2.3.1 Aplicando a dissipatividade para a estabilização via SOF

A dissipatividade tem possibilitado o desenvolvimento de resultados cruciais para o conhecido problema de controle com SOF e tem sido amplamente empregada no projeto de controladores (VIANA, 2022). Considerando hipóteses moderadas, a dissipatividade estrita QSR é uma condição necessária e suficiente para a estabilizabilidade por realimentação estática de saída de sistemas *Linear time-invariant* / Linear invariante no tempo (LTI) e não lineares (MADEIRA, 2022a).

Teorema 2.3.1 Um sistema dinâmico é assintoticamente estabilizável por uma realimentação de estados, se e somente se, existir uma saída $y = h(x)$ (fictícia) e o sistema for estritamente QSR-dissipativo com $R > 0$ e $\Delta = 0$, onde

$$\Delta = S R^{-1} S^T - Q \quad (2.23)$$

Um controle de realimentação estática de saída estabilizante é definido por

$$u(x) = -R^{-1} S^T h(x) \quad (2.24)$$

Técnicas baseadas na dissipatividade permitem a manipulação das matrizes (Q, S, R) para estabilizar sistemas. A estratégia proposta por (MADEIRA, 2022a) não exige uma dinâmica de malha fechada fixa, como uma estrutura Hamiltoniana controlada por portas, e tem motivado o uso das propriedades da dissipatividade para estabilizar sistemas através do controle de realimentação estática de saída (VIANA, 2022).

3 MÉTODO APLICADO

A dissipatividade não permite imediatamente a formulação de um algoritmo computacional para encontrar uma função de energia. Sempre que a função potência r for uma função polinomial dos argumentos u e y , um problema de otimização semi definida pode ser formulado para buscar uma função de energia. Neste ponto, o problema pode ser executado para encontrar uma função de armazenamento de energia $V \geq 0$ tal que,

$$r(u, y) - \dot{V} \geq 0 \quad (3.1)$$

O algoritmo relaxa as condições de positividade para, em vez disso, encontrar parâmetros que garantam que V e $r(u, y) - \dot{V}$ sejam soma de quadrados *SOS*.

Métodos de otimização *SOS* têm sido empregados para encontrar funções de energia para sistemas polinomiais dissipativos com suprimento de energia específico. Desigualdades de dissipação envolvendo uma função potência desconhecida podem ser formuladas como um problema *SOS* (MCCOURT, 2013).

3.1 Sum of Squares *SOS*

Um polinômio multivariável $p(x_1, \dots, x_n) \triangleq p(x)$ (onde $x \in \mathbb{R}^n$) é *SOS* se existirem os polinômios $f_1(x), \dots, f_m(x)$ tal que

$$p(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (3.2)$$

É evidente que $p(x)$ ser um *SOS* implica que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. No entanto, $p(x) \geq 0$ no sentido usual não necessariamente implica que $p(x)$ seja uma soma de quadrados *SOS*.

A condição 3.2 é equivalente a existência da matriz Q positiva semi definida, tal que

$$p(x) = Z^T(x) \cdot QZ \cdot (x) \quad (3.3)$$

onde $Z(x)$ é um vetor de monômios propriamente escolhido (PARRILO, 2021).

É possível calcular uma decomposição em soma de quadrados para $p(x)$ utilizando programação semi definida. Quando o polinômio $p(x)$ não é exatamente determinado, mas seus coeficientes são parametrizados de forma afim em termos de algumas incógnitas desconhecidas, a busca por valores dos coeficientes que tornam $p(x)$ uma soma de quadrados ainda pode ser realizada usando programação semi definida (WU, 2004).

3.2 Métodos de soma de quadrados

Diversos problemas em sistemas de controle podem ser formulados como a busca por uma função Positiva Definida (PD) ou Positiva Semi-Definida (PSD). Isso se aplica a problemas como estabilidade de Lyapunov, região de atração e vários outros no campo dos sistemas de controle. Tradicionalmente, esses problemas são resolvidos de forma computacionalmente eficiente para sistemas lineares usando *Linear Matrix Inequalities* / Desigualdade Matricial Linear (*LMI*), enquanto que no caso não linear, eles não são viáveis computacionalmente. Recentemente, esses problemas têm sido abordados para sistemas não lineares polinomiais utilizando programação semi definida. O passo-chave na formulação do problema de otimização é substituir a condição de semi definição positiva por uma condição alternativa suficiente. Essa condição mostra que a função de grau m é, na verdade, uma soma de quadrados *SOS* de polinômios de ordem inferior $m/2$. Esse resultado permite o uso de programação semi-definida para sistemas não lineares polinomiais (MCCOURT, 2013).

3.3 SOSTools

SOSTools é uma ferramenta gratuita do *Matlab* para formular e resolver programas de otimização de somas de quadrados. *Sum of Squares Program* / Programa de Soma de Quadrados (*SOSP*) são resolvidos reformulando-os como *SDP*, que por sua vez são resolvidos de forma eficiente. O SOSTOOLS automatiza a conversão de *SOSP* para *SDP*, chama o solucionador de *SDP* e converte a solução de *SDP* de volta para a solução do *SOSP* original (PARRILO, 2021).

Na versão original do *SOSTools*, polinômios são implementados exclusivamente como objetos simbólicos, aproveitando ao máximo as capacidades da *Matlab Symbolic Math Toolbox*. A partir do *SOSTools* v4.00, o uso dos objetos *multiply* permite ao usuário aproveitar os consideráveis ganhos de velocidade associados à estrutura interna de variáveis de decisão *dpvar*.

Um *SOSP* é criado declarando variáveis *SOSP*, adicionando restrições *SOSP*, definindo a função objetivo, entre outras etapas. Após a criação do programa, uma função é chamada para executar o solucionador e, finalmente, as soluções da *SOSP* são obtidas usando outra função (PARRILO, 2021).

3.4 Método iterativo

Como apresentado anteriormente, quando o sistema é estritamente QSR-dissipativo com $R > 0$ e $\Delta = 0$, um controle de realimentação estática de saída estabilizante é definido por $u = -R^{-1}S^T y$ (MADEIRA, 2022a). Além disso, a sua função potência pode ser definida por

$$r(u, y) = \begin{bmatrix} y^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u, \quad (3.4)$$

o vetor $[S^T R]$ é um aniquilador do vetor estendido $[y^T u^T]^T$, isso significa que o produto interno entre $[S^T R]$ e $[y^T u^T]^T$ é zero. Logo, de acordo com (LIMA *et al.*, 2022)

$$r(u, y) = \begin{bmatrix} y^T & u^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} + L_s \begin{bmatrix} S^T & R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^T \\ R \end{bmatrix} L_s^T \right\} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

se a função potência for menor ou igual a zero $r(u, y) \leq 0$, então da Definição 2.3.3 tem-se que

$$\dot{V}(x) \leq -T(x) < 0 \quad (3.6)$$

para que isso aconteça, utiliza-se um escalar auxiliar λ de tal forma que

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} + L_s \begin{bmatrix} S^T & R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^T \\ R \end{bmatrix} L_s^T \leq \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

quando $\lambda \leq 0$ tem-se que $r(u, y) \leq 0$ o que garante a estabilidade assintótica. Além disso, o multiplicador L_s é restrito a forma $L_s = [-R^{-1}S^T - I_m]^T$.

Utilizando a desigualdade 3.7, é possível estabelecer uma função objetivo para o algoritmo iterativo, que determina a variação dos valores de λ . Isso permite que o algoritmo, fundamentado na teoria da dissipatividade, otimize os parâmetros respeitando as condições de parada e o limite máximo de iterações.

A fim de assegurar a estabilização do sistema de controle, é essencial adquirir conhecimento acerca do conjunto de pontos de equilíbrio válidos. Essa compreensão proporciona a base necessária para a implementação de estratégias adequadas de controle, visando a manutenção do sistema em estados estáveis.

Considerando $g^\perp(x)$ um aniquilador esquerdo do vetor $g(x)$ de ordem igual a $m - n$ onde m é a ordem de $g(x)$ e n a ordem de $f(x)$ de um sistema polinomial como 2.4.

$$g^\perp(x)\dot{x} = g^\perp(x)[f(x) + g(x)u] = g^\perp(x)f(x)$$

Quando $m = n$, o sistema é totalmente acionável e para qualquer ponto de equilíbrio \bar{x} , $\bar{u} = -g(\bar{x})^{-1}f(\bar{x})$ é associado uma entrada estabilizante. Ao invés disso, quando $m < n$ o conjunto de pontos de equilíbrio pode ser descrito por

$$\varepsilon \triangleq \begin{cases} \mathcal{X}, & \text{se } m = n \\ \bar{x} \in \mathcal{X} \mid g^\perp(\bar{x})f(\bar{x}) = 0, & \text{se } m < n. \end{cases} \quad (3.8)$$

Definição 3.4.1 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se $\mu x + (1 - \mu)y \in A$ para todo $0 \leq \mu \leq 1$ e $x, y \in A$. O envoltório convexo de A é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém A , ou seja, o menor conjunto convexo que contém A (HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, 2008).

Considerando um ponto de equilíbrio não nulo $\bar{x} \in \varepsilon$, se $V(x)$ é fortemente convexa, então $V_{\bar{x}}(x) := V(x) - V(\bar{x}) - \nabla V(\bar{x})^T(x - \bar{x}) > 0$, $x \neq \bar{x}$, $V_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$, também é fortemente convexa e radialmente ilimitada, com $\nabla V_{\bar{x}}(x) = \nabla V(x) - \nabla V(\bar{x})$ (MADEIRA, 2022b). A função polinomial $V(x)$ é garantidamente SOS fortemente convexa se para uma matriz real $Q_V \geq 0$,

$$x^T(\nabla^2 V(x))x - \mu x^T x = Z_V^T(x)(Q_V)Z_V(x), \quad (3.9)$$

para um vetor de monômios $Z_V^T(x)$ e $\mu \in \mathbb{R}_+$. Isso significa que $\nabla^2 V(x) \geq \mu I > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o que é suficiente para ter $V(x)$ e $V_{\bar{x}}(x)$ positivos definidos e radialmente ilimitados.

Se para cada equilíbrio não nulo $\bar{x} \in \varepsilon$ existe uma função de energia $V_{\bar{x}}(x)$ tal que $V_{\bar{x}}(x) > 0$ quando $x \neq \bar{x}$ e $V_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$, o sistema não linear 2.4 é estritamente QSR-dissipativo independente do ponto de equilíbrio com função potência $r(u - \bar{u}, y - \bar{y})$.

$$\nabla V_{\bar{x}}(x)^T [f(x) + g(x)u] + T_{\bar{x}}(x) \leq r(u - \bar{u}, y - \bar{y}) \quad (3.10)$$

Substituindo $[u - \bar{u}] = -R^{-1}S^T[h(x) - h(\bar{x})]$ em 3.10, onde $r(u - \bar{u}, y - \bar{y}) = (y - \bar{y})^T Q(y - \bar{y}) + 2(y - \bar{y})^T S(u - \bar{u}) + (u - \bar{u})^T R(u - \bar{u})$ considerando $y(x) = h(x)$, e $h(x)$ um vetor de monômios de $x(t)$

$$\nabla V_{\bar{x}}(x)^T [f(x) + g(x)u] + T_{\bar{x}}(x) \leq -[h(x) - h(\bar{x})]^T \Delta [h(x) - h(\bar{x})] \quad (3.11)$$

Para $\Delta \geq 0$ tem-se que a desigualdade 3.11 garante que $\nabla V_{\bar{x}}(x)^T \cdot \dot{x} \leq 0$. Logo, de acordo com (MADEIRA, 2022b) o sistema não linear 2.4 é estritamente dissipativo independente do ponto de equilíbrio em $(x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ com uma função de armazenamento $V_{\bar{x}}(x) \geq 0$ e radialmente limitada, $R > 0$ e $\Delta \geq 0$. Então, qualquer ponto de equilíbrio $\bar{x} \in \varepsilon$ é globalmente assintoticamente estabilizável pela lei de controle

$$u(x) = k[h(x) - h(\bar{x})] + \bar{u}, k = -R^{-1}S^T \quad (3.12)$$

Algoritmo 1: Algoritmo de projeto do controle (LIMA *et al.*, 2022)

Entrada : k_{max}

Saída : K e V

$k \leftarrow 0, S_0 \leftarrow 0$ e $R_0 \leftarrow I$;

while $k < k_{max}$ **do**

$L_s \leftarrow [-R_0^{-1}S_0^T - I_m]^T$;

minimize λ *tal que* (3.7);

if $\lambda \leq 0$ *ou* $\Delta \geq 0$ **then**

 | **return** $K = -R^{-1}S^T$ e V ;

end

$k \leftarrow k + 1, S_0 \leftarrow S$ e $R_0 \leftarrow R$;

end

4 EXPERIMENTO

Com o objetivo de observar a dinâmica de um modelo não linear, e avaliar o desempenho do controle, empregou-se um sistema de esteira transportadora. Para fins experimentais, incorporou-se ao sistema um modelo de atuador não linear de segunda ordem. Essa escolha permitiu a inclusão das características não lineares na esteira, possibilitando uma análise mais abrangente e precisa do comportamento do controle.

Figura 3 – Sistema de esteiras



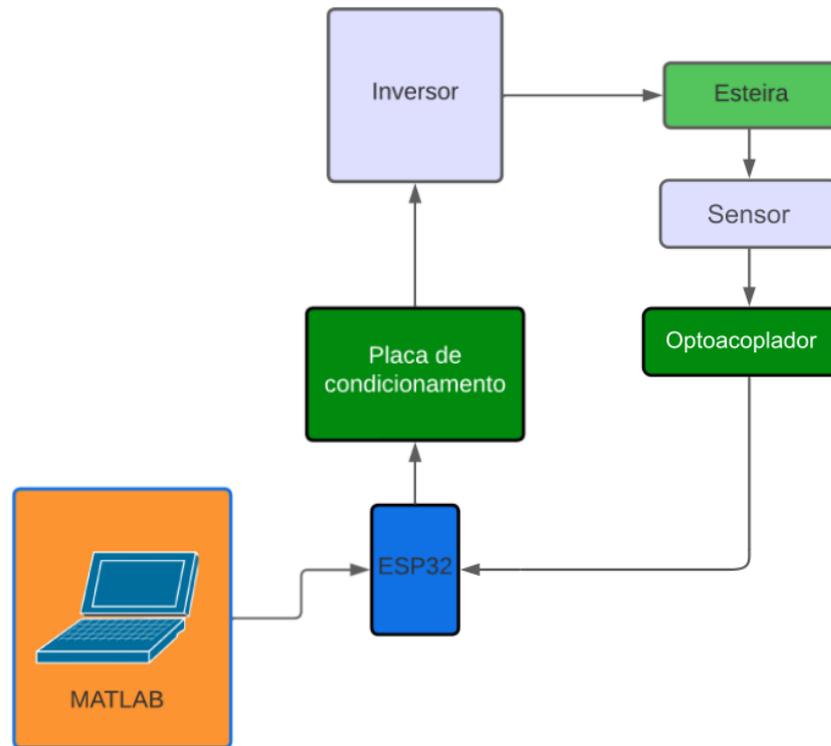
Fonte: Autor

As esteiras industriais possuem diversas aplicações, podendo ser utilizadas para transportar minérios, grãos e produtos com alto valor agregado em indústrias. As pesquisas relacionadas a esse equipamento têm como objetivo otimizar sua operação, reduzindo custos e perdas durante o transporte. Neste experimento, a esteira foi empregada como um emulador do comportamento de um atuador pneumático, aproveitando a versatilidade de sua operação. Isso permitiu simular a dinâmica de um atuador pneumático, tornando possível a análise do desempenho do controle em um ambiente controlado e seguro.

4.1 Sistema de esteira industrial

O sistema de esteiras do Lamotriz, ilustrado na Figura 3, é composto por quatro esteiras transportadoras, que são reguladas por inversores de frequência. O controle do acionamento é realizado por meio de um circuito eletrônico que utiliza um sinal de *Pulse Width Modulation*/Modulação por largura de Pulso (*PWM*) ajustado pelo controlador, de acordo com a velocidade medida por um sensor acoplado à lona, o esquemático está representado na Figura 4.

Figura 4 – Esquemático da bancada



Fonte: (PEREIRA, 2022)

O desenvolvimento da infraestrutura eletromecânica empregada no acionamento e no sensoriamento, bem como a modelagem computacional e tratamento dos dados do sistema, fundamenta-se nas contribuições de (PEREIRA, 2022).

4.1.1 Motor e caixa redutora

Figura 5 – Motor e caixa redutora



Fonte: Autor

O motor utilizado é um motor de indução de 1,5CV (1,1kW), com uma velocidade de 1700rpm, fator de potência de $\phi = 0,82$ e rendimento nominal de 81,5%, conforme informado pelo fabricante. A planta conta com uma caixa de redução da marca Cestari, com relação de redução de 80 e capacidade de suportar até 1750rpm. O conjunto do motor com a caixa redutora está ilustrado na Figura 5.

4.1.2 Inversor de frequência

O inversor de frequência ilustrado na Figura 6 foi utilizado para o controle de velocidade da esteira é o modelo Altivar 31 da Telemecanique, que opera em frequências entre 0 e 60Hz. O ajuste de frequência pode ser feito no painel do dispositivo, ou através de um sinal constante com amplitude de 0 a 10V na entrada analógica (PEREIRA, 2022).

Figura 6 – Inversor de frequência



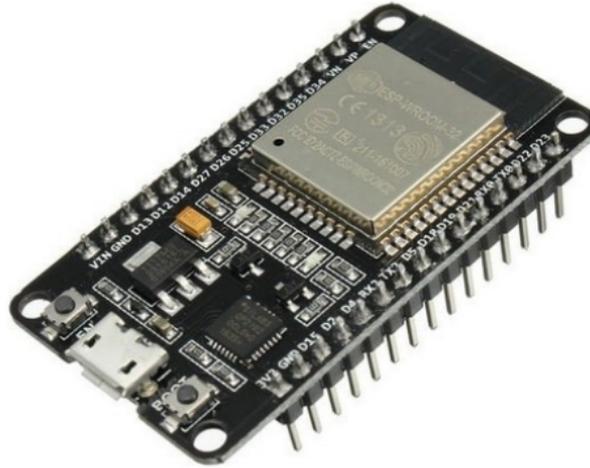
Fonte: Autor

4.1.3 Circuito de acionamento

O inversor de frequência recebe o sinal de controle enviado pelo computador por meio de um microcontrolador ESP32 e uma placa de condicionamento de sinal. Esses componentes transformam o sinal *PWM* em um valor de tensão entre 0 e 10V na entrada do inversor.

4.1.3.1 Microcontrolador

Figura 7 – ESP32-WROOM-32



Fonte: (PEREIRA, 2022)

O ESP32 é um microcontrolador que possui conexão *Universal Serial Bus / Barramento Serial Universal (USB)*, Bluetooth e Wi-Fi, além de ter saída de *PWM*, como pode ser observado na Figura 7. Esse dispositivo atua como interface entre o computador, que gera o sinal de controle no *Simulink*, a placa de condicionamento de sinal e o circuito de sensoriamento. O *Simulink Support Package for Arduino Hardware* permite o uso de blocos na simulação que interagem diretamente com a placa, convertendo o modelo implementado no *Simulink* em código C, que é incorporado na ESP32. Isso possibilita a comunicação por meio da porta *USB* entre os dispositivos (PEREIRA, 2022).

Ao configurar o pino de saída *PWM* do ESP32, é possível enviar um sinal controlado com amplitude de 3,3V para a placa de condicionamento de sinal. A variação do *Duty Cycle* do sinal *PWM* gerado pelo ESP32 é o que possibilita o controle de velocidade da esteira industrial.

4.1.3.2 Placa de condicionamento de sinal

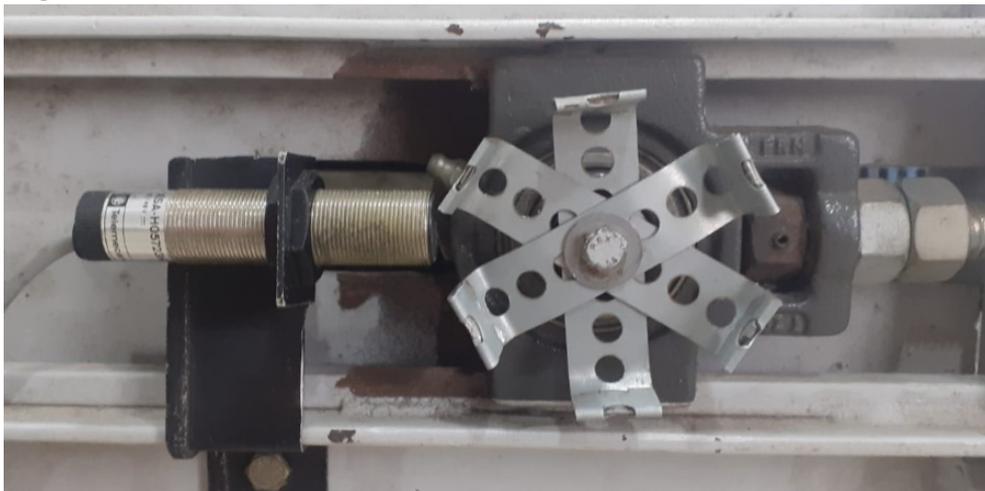
O circuito de condicionamento de sinal que transforma o sinal *PWM* de 3,3V enviado pelo microcontrolador ESP32 em um sinal de até 10V de amplitude. Uma fonte de tensão contínua é responsável por energizar a placa de condicionamento. O sinal na saída possui um valor complementar ao enviado pela ESP32, pois o sinal condicionado possui lógica invertida (PEREIRA, 2022).

4.1.4 Sensoriamento

Para aferir a velocidade da esteira foi projetado um sistema de sensoriamento que utiliza um sensor indutivo, hastes metálicas, optoacopladores e um algoritmo para tratar a informação contida no sinal enviado pelo conjunto.

Foram fixadas hastes metálicas a um dos eixos da esteira transportadora. O sensor indutivo comuta o sinal em sua saída de acordo com a passagem das extremidades da hastes. O conjunto do sensor com as hastes metálicas está ilustrado na Figura 8. Analisando o sinal na saída do sensor, representado na Figura 9, é possível observar que tomando-se o tempo entre dois pulsos de subida consecutivos, é possível calcular a velocidade angular do cilindro que movimenta a lona da esteira (PEREIRA, 2022). O cálculo da velocidade linear é feito por um algoritmo no *Matlab* desenvolvido por (PEREIRA, 2022).

Figura 8 – Sensor indutivo com hastes metálicas

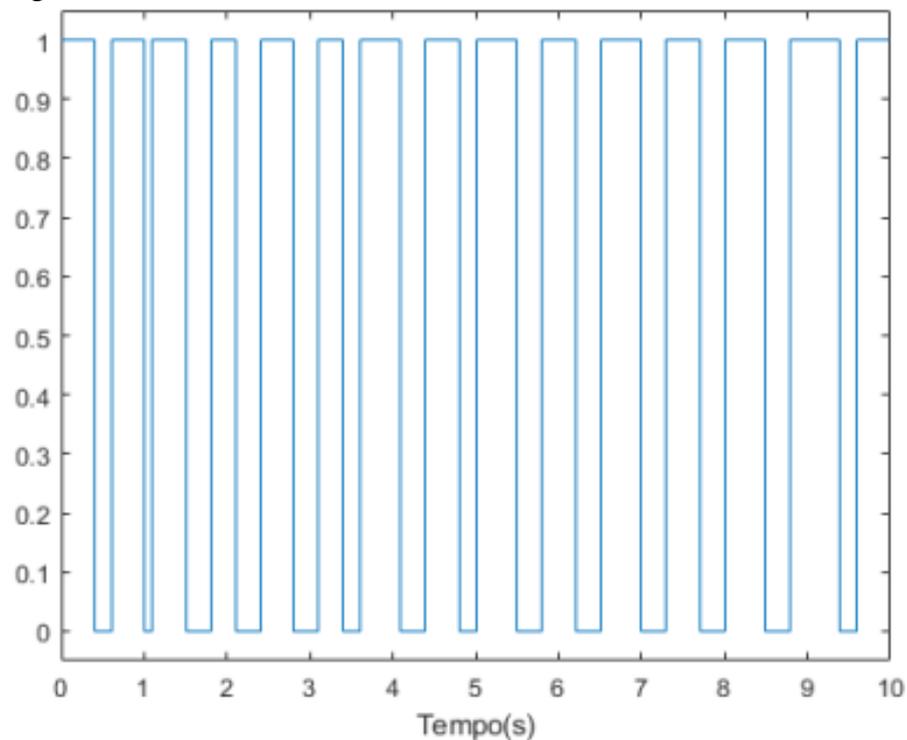


Fonte: Autor

4.1.4.1 Sensor indutivo

O sensor presente na bancada é o Telemecanique XSA-HO5723H23. O sensor indutivo é um dispositivo de proximidade capaz de detectar a presença de objetos metálicos. A bobina do circuito oscilador gera um campo eletromagnético à face do sensor, caso um objeto metálico se aproxime, correntes de Foucault são induzidas. As perdas tiram energia do oscilador. Assim, o comparador de sinal é capaz de gerar um sinal a ser emitido (THOMAZINI; ALBUQUERQUE, 2020).

Figura 9 – Leitura do sensor



Fonte: (PEREIRA, 2022)

4.1.4.2 Hastes metálicas

Três hastes metálicas foram adaptadas para este experimento, cada uma delas com lâminas de alumínio nas extremidades. As hastes foram fixadas a um dos eixos da esteira transportadora, espaçadas entre si por 60 graus.

4.1.4.3 Optoacoplador

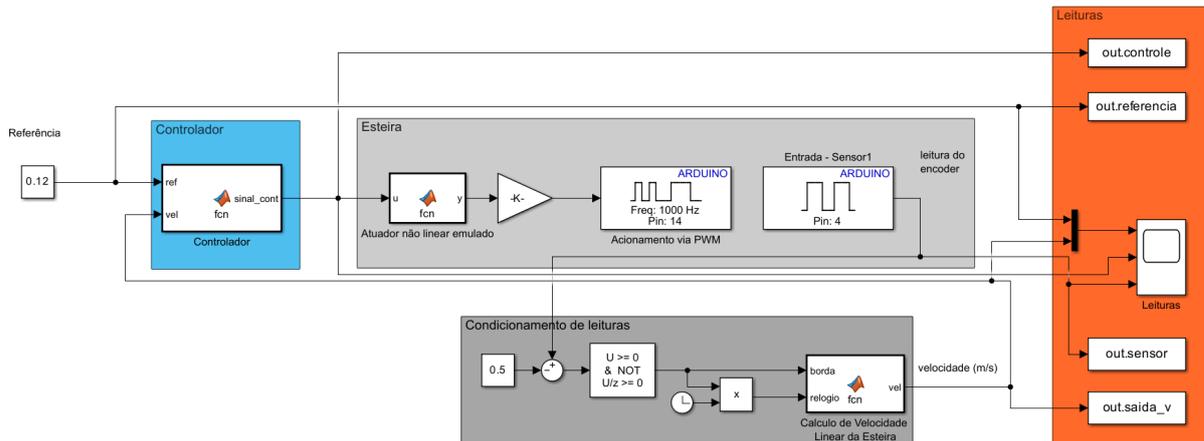
O sensor indutivo envia um sinal de tensão de 24V, esse sinal precisa ter a sua amplitude reduzida para que possa ser recebido pelo ESP32, que só suporta 3,3V. Para realizar a adequação do sinal do sensor indutivo, isolando os sinais de amplitudes distintas, foi desenvolvido um circuito com um optoacoplador e dois resistores.

4.2 Modelagem do sistema

Graças a conexão entre o sistema real e o modelo no *Simulink*, é possível realizar operações em tempo real. Esse recurso possibilita a obtenção de dados operacionais mais

próximos da realidade. Além de uma sólida infraestrutura física, é fundamental um esforço matemático e computacional na modelagem do sistema, no projeto do controle e no tratamento das informações para garantir a validade dos dados obtidos. A Figura 10 representa o modelo do sistema no *Simulink*.

Figura 10 – Modelo do sistema no Simulink



Fonte: Autor

4.2.1 Esteira

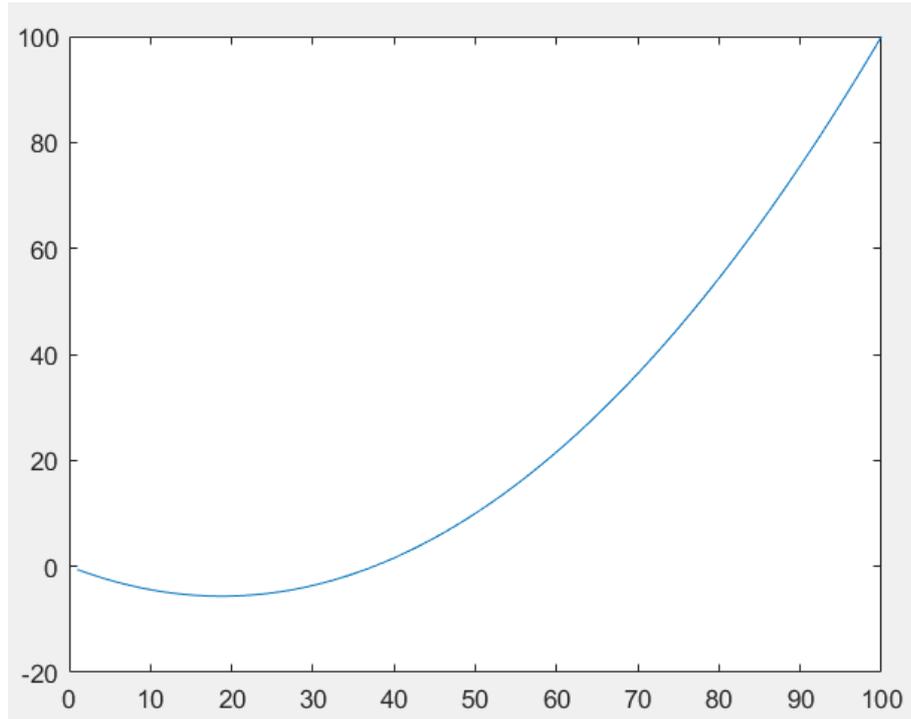
Para uma avaliação precisa do desempenho do controlador, é necessário que a esteira emule uma dinâmica não linear. Nesse contexto, a fim de incorporar essa não linearidade ao sistema, foi adotado o modelo de um atuador pneumático utilizado como válvula, descrito por (BONE, 2008).

$$\dot{m} = \lambda(u, P_a) = a + b \cdot P_a + c \cdot P_a^2 + d \cdot u + e \cdot u \cdot P_a + f \cdot u \cdot P_a^2 + g \cdot u^2 + h \cdot u^2 \cdot P_a + i \cdot u^2 \cdot P_a^2 \quad (4.1)$$

onde a, b, c, d, e, f, g, h e i são os coeficiente, que são considerados constantes, \dot{m} é o fluxo de massa estimado para a válvula em função da tensão de entrada u e da pressão da câmara P_a .

O atuador pneumático selecionado é de segunda ordem e seus coeficientes foram determinados através de uma parábola estabelecida de forma arbitrária, considerando a pressão constante. Por meio dessas simplificações e considerações, é viável obter um modelo matemático que satisfaz plenamente os objetivos do estudo proposto.

Figura 11 – Curva definida para o atuador não linear emulado



Fonte: Autor

A parábola da Figura 11 relaciona o sinal de *PWM* enviado pelo controlador no eixo das abscissas e o sinal de *PWM* enviado para a esteira no eixo das ordenadas, que representa o fluxo de massa para a válvula. Ao analisar os pontos da curva, é possível estabelecer o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 50^2 + \beta \cdot 50 = 10 \\ \alpha \cdot 100^2 + \beta \cdot 100 = 100 \end{cases}$$

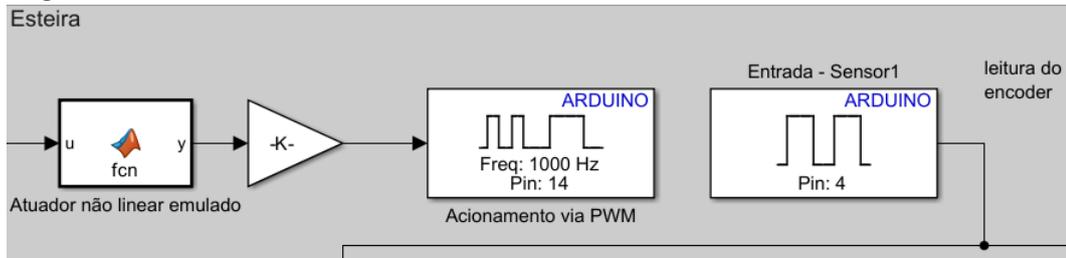
as constantes α e β , que representam as somas dos coeficientes de u^2 e u respectivamente, são encontradas ao resolver o sistema. Assim, a dinâmica não linear simplificada do atuador pode ser representada pela equação 4.2

$$\dot{m} = \lambda(u) = 0,016 \cdot u^2 - 0,6 \cdot u = g(u) \quad (4.2)$$

Para simular esse comportamento do atuador pneumático não linear, foi adicionada uma função de segundo grau contendo os seus coeficientes ao bloco do modelo da esteira no *Simulink* do *Matlab*.

O bloco "PWM" do pacote de suporte recebe um valor de entrada entre 0 e 255. Para simplificar a correspondência com a porcentagem do *duty cycle* do sinal PWM enviado na saída, o controle é normalizado com valores entre 0 e 100, adicionando um ganho de $\frac{255}{100}$.

Figura 12 – Blocos do modelo da esteira com o atuador não linear



Fonte: Autor

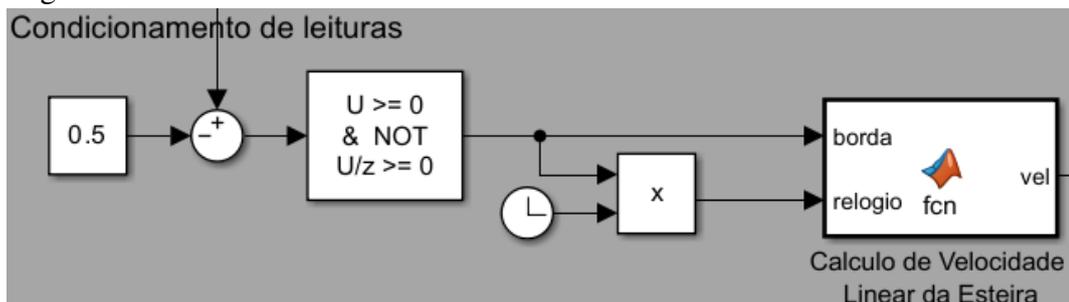
O bloco "Digital Input", denominado "Entrada - Sensor 1", é utilizado para ler as informações enviadas pelo sensor indutivo. Esse sensor fornece um trem de pulsos que é tratado por um bloco implementado no *Simulink*.

É importante destacar que, embora os blocos na Figura 12 sejam nomeados como "Arduino", eles são compatíveis com o microcontrolador ESP32 (PEREIRA, 2022).

4.2.2 Condicionamento de leituras

O sinal proveniente do sensor indutivo é condicionado utilizando o bloco "Detect Rise Nonnegative". A cada duas bordas de subida do sinal, um pulso com a largura de uma amostra é enviado para a função *Matlab* "Cálculo de velocidade". Essa função processa os dados e serve como referência para o cálculo da velocidade da esteira. Os blocos de condicionamento de leitura estão ilustrados na Figura 13.

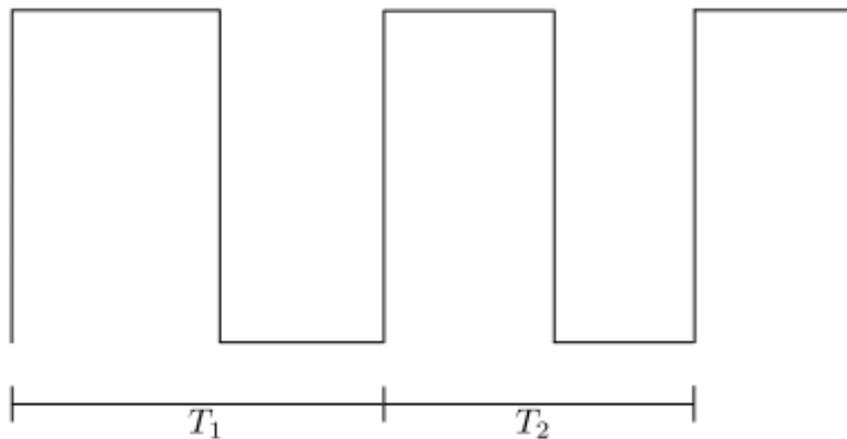
Figura 13 – Blocos de condicionamento de leitura do sensor indutivo



Fonte: Autor

A função desenvolvida no *Matlab* por (PEREIRA, 2022) calcula a velocidade da esteira utilizando o tempo entre a detecção das bordas de subida de dois pulsos enviados pelo sensor indutivo como ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Detecção de bordas de subida



Fonte: (PEREIRA, 2022)

$$V(t) = \omega \cdot R \quad (4.3)$$

$$\omega = \frac{\pi}{T} \quad (4.4)$$

$$V(t) = \frac{\pi \cdot R}{3 \cdot T} \quad (4.5)$$

Sendo:

- ω : velocidade angular;
- R : raio do acoplamento de hastes;
- T : período entre dois pulsos.

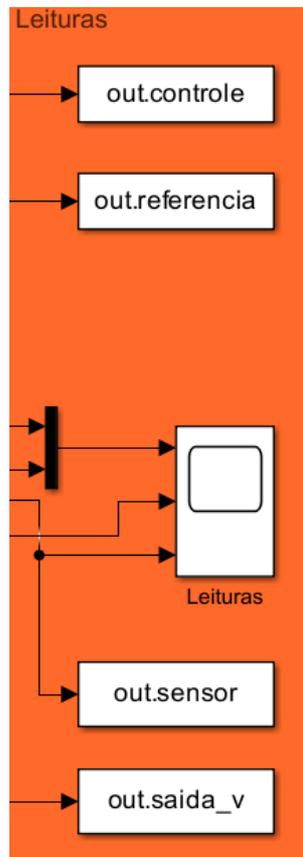
Também foi implementado um filtro de média móvel, representado pela equação 4.6, para atenuar os ruídos de medição. Esse filtro calcula a média dos últimos 15 valores de velocidade registrados (PEREIRA, 2022).

$$y[n] = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=0}^N x[n-k] \quad (4.6)$$

4.2.3 Leituras

Os blocos "*To Workspace*", ilustrados na Figura 15, também foram utilizados para a aquisição de dados, sendo responsáveis pelo registro das grandezas observadas durante a execução do processo de acionamento e controle da planta. Esses blocos enviam os dados adquiridos para a *workspace* do *Matlab* e criam novas variáveis. Os dados observados são: sinal de controle, sinal do sensor, velocidade da esteira e o sinal de referência.

Figura 15 – Bloco de leituras da planta



Fonte: Autor

4.3 Projeto do controlador

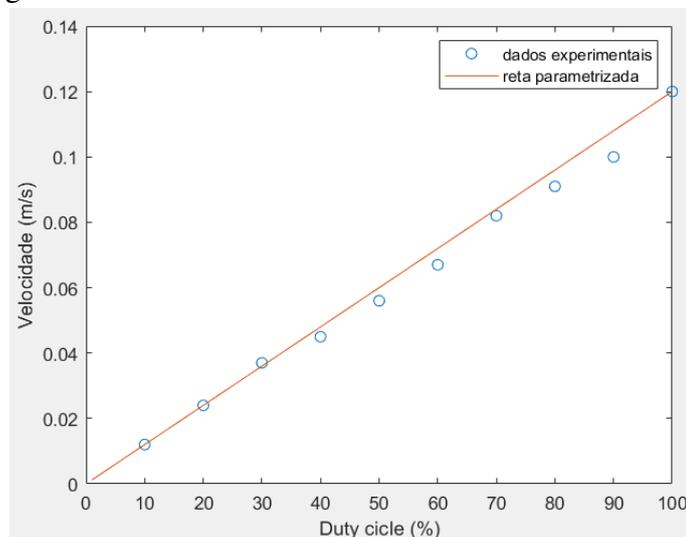
Para o projeto o controlador com base no algoritmo do método descrito na seção 3.4, foi necessário obter informações sobre a dinâmica linear da esteira. Para realizar essa análise, a esteira foi acionada sem o bloco que emula a não linearidade, aplicando uma sequência crescente de pulsos de *PWM*. Os valores de velocidade resultantes foram registrados e analisados. Essa abordagem permitiu obter o comportamento linear da esteira para o projeto do controlador.

Tabela 1 – Identificação da esteira

Duty Cycle (%)	Velocidade (m/s)
10	0,012
20	0,024
30	0,037
40	0,045
50	0,056
60	0,067
70	0,082
80	0,091
90	0,1
100	0,12

Com base nos valores experimentais de velocidade e *PWM*, é possível estabelecer uma relação linear entre a entrada e a saída do sistema. Essa abordagem é fundamental para compreender e descrever matematicamente a relação entre as variáveis de entrada e saída do sistema.

Figura 16 – Dinâmica linear da esteira



Fonte: Autor

Ao analisar a reta parametrizada no gráfico apresentado na Figura 16, é possível estabelecer o seguinte modelo linear do sistema.

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0,012 + 10 = 0 \\ \alpha \cdot 0,12 + 100 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-110}{0,132} = -833,3333\dots \quad (4.7)$$

Utilizando o valor de α junto com o modelo do atuador pneumático não linear 4.2 é possível definir o modelo matemático do sistema dinâmico proposto

$$\dot{x} = -833,3333 \cdot x(t) + 0,016 \cdot u(t)^2 - 0,6 \cdot u(t) \quad (4.8)$$

utilizando esse modelo de sistema não linear no algoritmo baseado no método descrito em 3.4, dentro das limitações de operação real do sistema, é possível encontrar a lei de controle estabilizante global

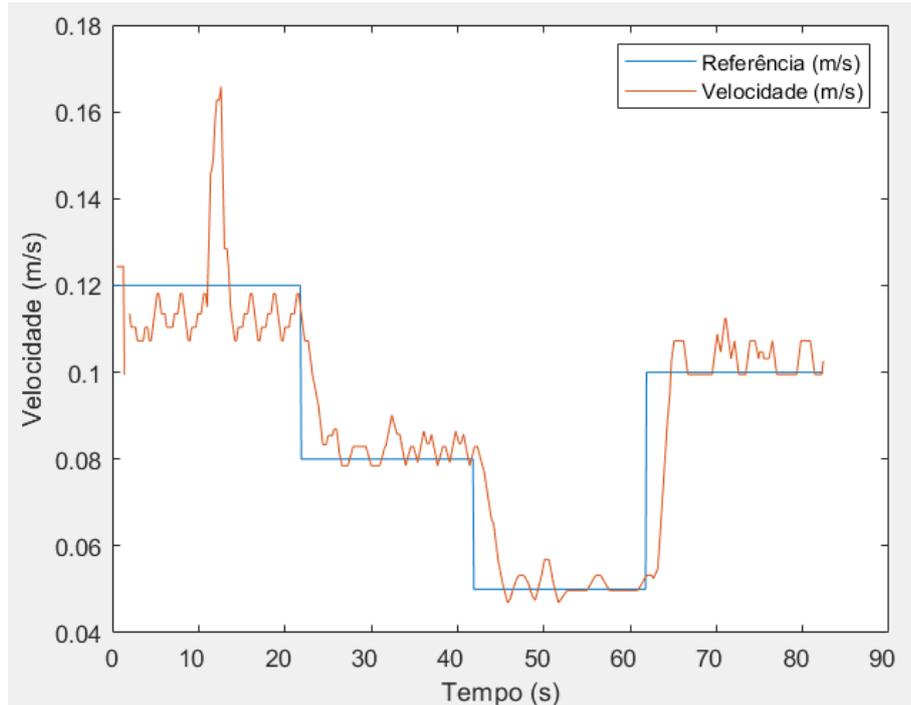
$$u = -31,8661 \cdot x^2 - 36,4209 \cdot x \quad (4.9)$$

O código em *Matlab* utilizado para o projeto do controlador estabilizante está disponível como anexo neste trabalho, além do código utilizado nas *Matlab Functions* do controlador e do atuador não linear emulado no *Simulink*.

4.4 Resultados

Foi realizado um ensaio em bancada, no qual o sinal de referência aplicado à entrada do sistema consistia em um conjunto de valores constantes que variavam a cada 20 segundos aproximadamente, conforme apresentado na Figura 17. Os valores de velocidade da saída do sistema foram armazenados com o auxílio de blocos do *Simulink* como apresentado na seção 4.2.3. A partir dos resultados obtidos, é possível concluir que a resposta do sistema atendeu à dinâmica desejada, seguindo a referência determinada na entrada do sistema, com um Overshoot desprezível.

Figura 17 – Referência e velocidade da esteira



Fonte: Autor

Devido as imprecisões do sensoriamento, os valores medidos de velocidade da planta apresentam oscilação com alguns erros de medição instantâneos que não representam o comportamento real do sistema. Apesar disso, os valores aferidos durante o experimento demonstram que a planta seguiu valores muito próximos da referência indicada.

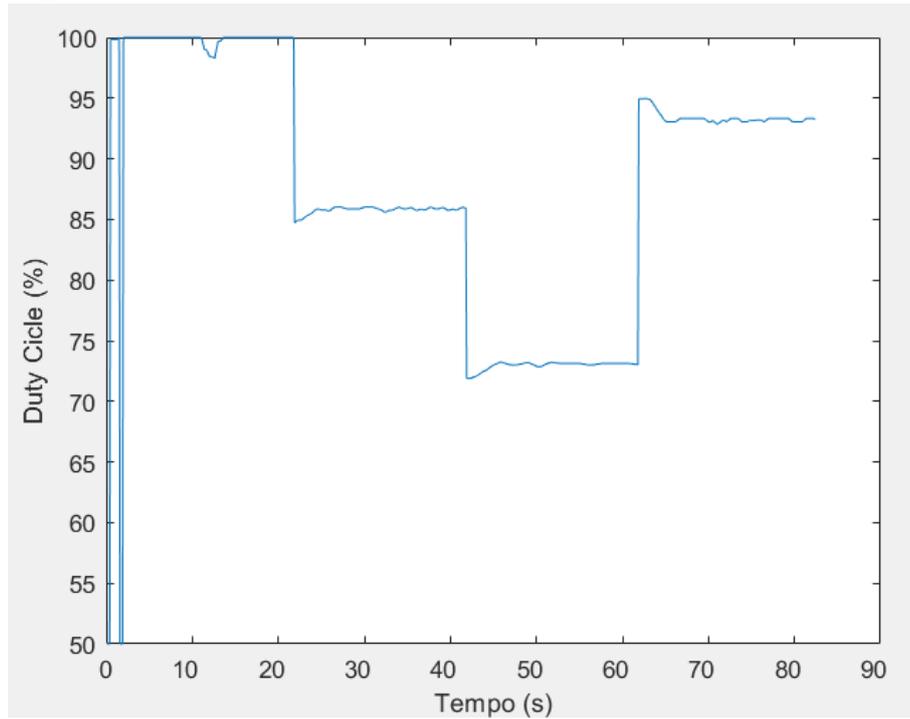
O controlador implementado obteve sucesso ao operar no sistema, permitindo um funcionamento adequado e eficiente por meio de um controle preciso e rápido da planta. Seu desempenho efetivo garantiu uma resposta robusta e estável, contribuindo para a otimização do sistema como um todo.

4.5 Sinal de controle

O sinal de controle da esteira, obtido durante o ensaio, está representado na Figura 18. Esse sinal corresponde ao *PWM* enviado pelo controlador ao sistema da esteira, levando em consideração sua dinâmica não linear. Através dessa representação gráfica, é possível visualizar a variação do sinal de controle ao longo do tempo e compreender sua dinâmica. É perceptível que os ruídos presentes no sinal de saída do sistema interferem no sinal de controle. No entanto, é importante destacar que os resultados apresentados na Figura 18 demonstram uma influência

mínima desses ruídos nos resultados. Apesar das interferências, é possível observar a robustez do controlador projetado, uma vez que apresenta uma ultrapassagem reduzida e mantém um desempenho consistente e confiável mesmo diante das variações e perturbações presentes no sistema da esteira transportadora.

Figura 18 – Sinal de controle



Fonte: Autor

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Dentro da faixa de operação da esteira, restrita pelas condições operacionais, foi viável reproduzir a dinâmica do atuador pneumático simplificado e adaptado. Apesar dos ruídos na medição do sensor devido à estrutura física das hastes metálicas, que explicam a presença de picos fora da condição de operação da esteira, é perceptível que o sistema acompanhou as referências durante o experimento, como pode ser observado.

Além disso, o *Simulink* do *Matlab* demonstrou-se uma excelente ferramenta para a análise de dados em tempo real de experimentos práticos. Com o *Simulink Support Package for Arduino Hardware* é possível criar interfaces para uma variedade de processos.

Assim, foi possível obter uma lei de controle por meio de um algoritmo iterativo que utiliza a soma de quadrados e se baseia na teoria da dissipatividade. Essa lei de controle é capaz de estabilizar o sistema da esteira transportadora que incorpora a dinâmica não linear do atuador pneumático não linear.

Trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir deste incluem o estudo de sistemas não lineares com múltiplas entradas e múltiplas saídas, aproveitando as outras esteiras disponíveis no Lamotriz. Além disso, é possível a análise das não linearidades provocadas pela variação da carga nas esteiras. Por fim, a análise do método de projeto de uma lei de controle baseado na teoria da dissipatividade em outros modelos não lineares, com foco na estabilização global ou local desses sistemas.

Considerando todos esses aspectos, pode-se afirmar que os objetivos do trabalho foram alcançados de forma satisfatória.

REFERÊNCIAS

- BONE, Z. R. G. M. Nonlinear modeling and control of servo pneumatic actuators. *IEEE*, 2008.
- GEROMEL, J.; PERES, P.; SOUZA, S. Convex analysis of output feedback control problems: Robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 41, n. 7, p. 997–1003, 1996.
- HADDAD W. M. ; CHELLABOINA, V. **Nonlinear Dynamical Systems and Control**. [S. l.]: Princeton University Press, 2008.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear System**. [S. l.]: Prentice Hall, 2002.
- LIMA, T. A.; MADEIRA, D. d. S.; VIANA, V. V.; OLIVEIRA, R. C. L. F. Static output feedback stabilization of uncertain rational nonlinear systems with input saturation. *Systems & Control Letters*, v. 168, p. 105359, 2022. ISSN 0167-6911.
- MADEIRA, D. d. S. Necessary and sufficient dissipativity-based conditions for feedback stabilization. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, IEEE CSS, v. 67, n. 4, 2022.
- MADEIRA, D. d. S. T. A. L. Global stabilization of polynomial systems using equilibrium-independent dissipativity. 2022.
- MCCOURT, P. J. A. M. J. **Demonstrating Passivity and Dissipativity using Computational Methods**. 2013.
- PARRILO, A. P. S. P. P. A. **SOSTOOLS: Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB**. 2021. Disponível em: <http://www.cds.caltech.edu/sostools>.
- PEREIRA, J. L. Trabalho de Conclusão de Curso, **CONTROLE DE VELOCIDADE DE UMA ESTEIRA INDUSTRIAL**. Fortaleza: [S. n.], 2022.
- SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback – a survey. *Automatica*, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997.
- THOMAZINI, D.; ALBUQUERQUE, P. U. B. d. **Sensores Industriais: Fundamentos e Aplicações**. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2020.
- VIANA, V. **DISSIPATIVITY-BASED STATIC OUTPUT FEEDBACK STABILIZATION OF DYNAMICAL SYSTEMS**. 2018. 144 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2022.
- WU, A. P. F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A lyapunov-based approach. *IEEE*, 2004.

APÊNDICE A – CÓDIGOS

Código-fonte 1 – Projeto do controle estabilizante

```
1 clear
2 close all
3 clc
4 warning off
5
6 pvar x u;
7 vars = [x; u];
8
9 xb= 0.06;
10 ub = (0.6+sqrt(0.6^2-4*0.016*(-833.3333*xb)))/(2*0.016);
11
12 fg = -833.3333*(x+xb)+0.016*(u+ub)^2-0.6*(u+ub);
13 monh = monomials(x, 1:2);
14 h = monh;
15 y = h;
16
17 imax = 100;
18 S0 = zeros(length(h), length(u));
19 R0 = 1;
20 lamb0 = 1e6;
21
22 i = 1;
23
24
25 while i < imax
26 dpvar lamb
27
28 prog = sosprogram(vars);
29 prog = sosdecvar(prog, lamb);
```

```

30
31 Zv = monomials(x, 1:4);
32 [prog, V] = sossosvar(prog, Zv);
33 Zt = monomials(x, 1:2);
34 [prog, T] = sossosvar(prog, Zt);
35
36 gradV = [diff(V, x)];
37
38 Zq = monomials(x, 0);
39 [prog, Q] = sospolymatrixvar(prog, Zq, [length(h), length(h
    )], 'symmetric');
40 Zs = monomials(x, 0);
41 [prog, S] = sospolymatrixvar(prog, Zs, [length(h), length(u
    )]);
42 Zr = monomials(x, 0);
43 [prog, R] = sospolymatrixvar(prog, Zr, [length(u), length(u
    )], 'symmetric');
44
45 prog = sosineq(prog, -(gradV'*(fg) + T) + h'*Q*h + 2*h'*S*u
    + u'*R*u);
46
47 M = [Q, S; S', R] + [(-S0/RO')]; -1]*[S', R] + ([(-S0/RO')];
    -1]*[S', R])' + lamb*[-eye(length(h)), zeros(length(h)
    ,1); zeros(1,length(h)), 0];
48 prog = sosmatrixineq(prog, -M);
49 prog = sosineq(prog, -R+0.00005);
50 prog = sosineq(prog, lamb0-lamb);
51 prog = sosineq(prog, lamb+1);
52 prog = sosineq(prog, V-1e-8*(x^2));
53 prog = sosineq(prog, S(1)-0.001);
54 prog = sosineq(prog, S(2)-0.001);
55

```

```

56 options.simplify = 'off';
57 [sol, info] = sossolve(prog, options);
58
59 Q = sosgetsol(sol, Q);
60 S = sosgetsol(sol, S);
61 R = sosgetsol(sol, R);
62 V = sosgetsol(sol, V);
63 T = sosgetsol(sol, T);
64 lamb = sosgetsol(sol, lamb);
65
66 if (double(S/R*S' - Q) >= 0 | double(lamb) < 0)
67     break
68 end
69
70 i = i + 1;
71 S0 = S;
72 R0 = R;
73 lamb0 = lamb;
74
75 end
76
77 i
78 lamb
79 k=-S'/R
80 u = k*h
81
82 return

```

Código-fonte 2 – Matlab Function do controlador

```

1 function sinal_cont = fcn(ref, vel)
2

```

```

3 ub = (0.6+sqrt(0.6^2-4*0.016*(-833.3333*ref)))/(2*0.016);
4
5 ctl = -31.8661*(vel-ref)^2 - 36.4209*(vel-ref) + ub;
6
7 sinal_cont = max(min(ctl,100),50);

```

Código-fonte 3 – Matlab Function do atuador não linear emulado

```

1 function y = fcn(u)
2 y1 =0.016*u^2-0.6*u;
3 y = 100 - y1;

```

Código-fonte 4 – Matlab function para cálculo de velocidade

```

1 function vel = fcn(borda, relógio)
2
3 %persistent variables:
4 persistent v_linear_f
5 if isempty(v_linear_f)
6     v_linear_f=0;
7 end
8
9 persistent vaux
10 if isempty(vaux)
11     vaux=0;
12 end
13
14 persistent aux
15 if isempty(aux)
16     aux=0;
17 end
18

```

```
19 persistent va
20 if isempty(va)
21     va=0;
22 end
23
24 persistent vb
25 if isempty(vb)
26     vb=0;
27 end
28
29 persistent vc
30 if isempty(vc)
31     vc=0;
32 end
33
34 persistent vd
35 if isempty(vd)
36     vd=0;
37 end
38
39 persistent ve
40 if isempty(ve)
41     ve=0;
42 end
43
44 persistent vf
45 if isempty(vf)
46     vf=0;
47 end
48
49 persistent vg
50 if isempty(vg)
```

```
51     vg=0;
52 end
53
54 persistent vh
55 if isempty(vh)
56     vh=0;
57 end
58
59 persistent vi
60 if isempty(vi)
61     vi=0;
62 end
63
64 persistent vj
65 if isempty(vj)
66     vj=0;
67 end
68
69 persistent vk
70 if isempty(vk)
71     vk=0;
72 end
73
74 persistent vl
75 if isempty(vl)
76     vl=0;
77 end
78
79 persistent vm
80 if isempty(vm)
81     vm=0;
82 end
```

```
83
84 persistent vn
85 if isempty(vn)
86     vn=0;
87 end
88
89 persistent vo
90 if isempty(vo)
91     vo=0;
92 end
93
94 persistent vp
95 if isempty(vp)
96     vp=0;
97 end
98
99 persistent t_ant v_linear
100 if isempty(t_ant)
101     t_ant = 0;
102     v_linear = 0;
103 end
104
105 persistent vaf_ant
106 if isempty(vaf_ant)
107     vaf_ant=0;
108 end
109
110 %calculo da velocidade
111 if borda > 0
112     delta_t = relógio-t_ant;
113
114     v_linear = (pi*0.0475)/(3*delta_t)
```

```
115
116     v_ant = v_linear
117
118     t_ant=relogio;
119 else
120     v_linear = v_linear
121 end
122
123
124 vp=vo;
125 vo=vn;
126 vn=vm;
127 vm=vl;
128 vl=vk;
129 vk=vj;
130 vj=vi;
131 vi=vh;
132 vh=vg;
133 vg=vf;
134 vf=ve;
135 ve=vd;
136 vd=vc;
137 vc=vb;
138 vb=vaux;
139 vaux=v_linear
140 va=v_linear;
141
142 if vp~=0
143     v_linear_f = (va+vb+vc+vd+ve+vf+vg+vh+vi+vj+vk+vl+vm+vn
144                 +vo+vp)/16
145     va=v_linear_f
146 end
```

146

147

148

149

150 `vel = va`