



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CAMPUS DE QUIXADÁ**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**FRANCISCO ANDERSON SILVA VIEIRA**

**DOMINAÇÃO ROMANA DUPLA EM GRAFOS CÚBICOS**

**QUIXADÁ**

**2023**

FRANCISCO ANDERSON SILVA VIEIRA

DOMINAÇÃO ROMANA DUPLA EM GRAFOS CÚBICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus de Quixadá da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz.

QUIXADÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

V715d Vieira, Francisco Anderson Silva.  
Dominação romana dupla em grafos cúbicos / Francisco Anderson Silva Vieira. – 2023.  
51 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Quixadá,  
Curso de Ciência da Computação, Quixadá, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz.

1. Teoria dos grafos. 2. Ciência da Computação. 3. Matemática discreta. I. Título.

CDD 004

---

FRANCISCO ANDERSON SILVA VIEIRA

DOMINAÇÃO ROMANA DUPLA EM GRAFOS CÚBICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus de Quixadá da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em: 4 de julho de 2023

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Lucas Ismaily Bezerra Freitas  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Fábio Carlos Sousa Dias  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Paulo Henrique Macedo de Araujo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por todo o apoio e conselhos até o momento. Mãe, que não está mais entre nós fisicamente, mas sempre estará no meu coração. Pai, por ser um exemplo que sigo sempre.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram. À Minha mãe, Dalva, que não está mais entre nós, mas sempre estará no meu coração. E por ela, consegui forças para continuar e agora estou perto de realizar o sonho dela. Ao meu pai, Dé, que sempre me serviu como uma inspiração.

Ao Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz, pela excelente orientação, pelos conselhos e paciência durante a orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Fábio Carlos Sousa Dias, Prof. Dr. Lucas Ismaily Bezerra Freitas e Prof. Dr. Paulo Henrique Macedo de Araujo pelo tempo e pelas sugestões.

Aos professores que tive durante toda minha vida. Em especial ao Prof. Me. Joabe Gileade da Silva Oliveira, que durante o ensino médio me incentivava a estudar assuntos além dos vistos na escola, o que me levou a ver uma introdução à Teoria dos Grafos.

Aos meus amigos que sempre me deram suporte em momentos difíceis.

"Os problemas nunca vão desaparecer, mesmo na mais bela existência. Problemas existem para serem resolvidos, e não para perturbar-nos."

(Augusto Cury)

## RESUMO

Dado um grafo  $G$ , uma função  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  é dita *função de dominação romana dupla* (FDRD) de  $G$  se, para todo vértice  $v \in V(G)$  com  $f(v) = 0$ , existe pelo menos um vértice  $u$  vizinho de  $v$  com  $f(u) = 3$  ou dois vértices  $u_1$  e  $u_2$  vizinhos de  $v$  com  $f(u_1) = f(u_2) = 2$ ; e para todo vértice  $v \in V(G)$  com  $f(v) = 1$ , existe pelo menos um vértice  $u$  vizinho de  $v$  com  $f(u) \in \{2, 3\}$ . O *peso* da função  $f$  é definido por  $\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$ . O *número de dominação romana dupla*  $\gamma_{dR}(G)$  é o menor peso  $\omega(f)$  dentre todas as funções de dominação romana dupla  $f$  de  $G$ . Uma FDRD que tem o peso mínimo no grafo  $G$  é dita *FDRD ótima*. Os grafos cúbicos são bastante estudados em teoria dos grafos pelo fato de que muitos problemas em grafos tornam-se NP-completos quando restritos a grafos cúbicos. Em particular, uma classe de grafos cúbicos que é frequentemente considerada é a classe dos grafos *snarks*. Um *snark* é um grafo cúbico, sem arestas de corte e com índice cromático igual a 4. Neste trabalho de conclusão de curso, determinamos o número de dominação romana dupla para a família dos *snarks-flor* e *snarks* de Blanuša generalizados. Além disso, determinamos limitantes superiores e inferiores para o número de dominação romana dupla para as famílias dos *snarks* de Goldberg e dos *snarks* de Loupekine.

**Palavras-chave:** Teoria dos grafos. Ciência da computação. Matemática discreta.

## ABSTRACT

Given a graph  $G$ , a function  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  is called a *double Roman domination function* (DRDF) of  $G$  if, for every vertex  $v \in V(G)$  with  $f(v) = 0$ , there exists at least one vertex  $u$  adjacent to  $v$  with  $f(u) = 3$  or two vertices  $u_1$  e  $u_2$  adjacent to  $v$  with  $f(u_1) = f(u_2) = 2$ ; and for every vertex  $v \in V(G)$  with  $f(v) = 1$ , there exists at least one vertex  $u$  adjacent to  $v$  with  $f(u) \in \{2, 3\}$ . The *weight* of function  $f$  is defined by  $\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$ . The *double Roman domination number*  $\gamma_{DR}(G)$  is the smallest weight  $\omega(f)$  among all double Roman domination functions  $f$  of  $G$ . A DRDF that has the minimum weight in the graph  $G$  is called  *$\gamma_{DR}$ -function*. Cubic graphs are well studied in graph theory due to the fact that many graph problems become NP-complete when restricted to cubic graphs. In particular, a class of cubic graphs that is often considered is the class of snarks. A snark is a cubic graph, without bridges and with chromatic index equal to 4. In this work, we determine the double Roman domination number for the family of flower-snarks and generalized Blanuša snarks. In addition, we set upper and lower bounds for the double Roman domination number for Goldberg's snarks and Loupekine's snarks.

**Keywords:** Graph theory. Computer science. Discrete mathematics.

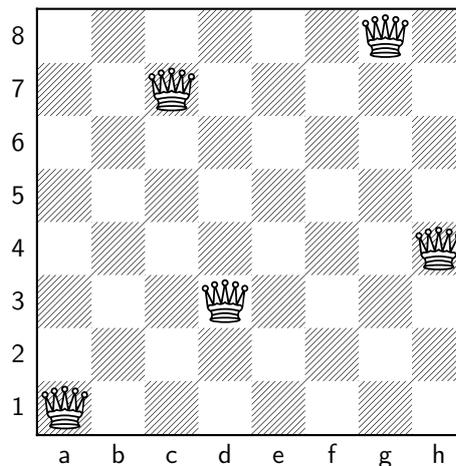
## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	9
2	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	14
2.1	<b>Definições básicas de teoria dos grafos</b> . . . . .	14
2.2	<b>Dominação romana e dominação romana dupla</b> . . . . .	16
2.3	<b>Breve história dos <i>snarks</i></b> . . . . .	20
3	<b>SNARKS-FLOR</b> . . . . .	23
4	<b>SNARKS DE BLANUŠA GENERALIZADOS</b> . . . . .	26
5	<b>SNARKS DE GOLDBERG</b> . . . . .	34
6	<b>SNARKS DE LOUPEKINE</b> . . . . .	39
7	<b>NÚMERO DE DOMINAÇÃO ROMANA DUPLA CONTRA O NÚ- MERO DE DOMINAÇÃO ROMANA DUPLA INDEPENDENTE EM GRAFOS CÚBICOS</b> . . . . .	45
8	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	49
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	51

## 1 INTRODUÇÃO

A origem do problema da dominação em grafos foi motivada pelo problema das rainhas do xadrez. Este problema foi proposto em 1862 por Carl Jaenisch (JAENISCH, 1862). Pelas regras do xadrez, uma rainha pode mover-se horizontalmente, verticalmente e diagonalmente por toda a extensão do tabuleiro, desde que não haja nenhuma peça no caminho. A casa na qual uma rainha se encontra é a casa *ocupada* por ela, as casas para onde a rainha pode movimentar-se são as casas *alcançadas* pela rainha. O problema das rainhas consiste na seguinte questão: dado um tabuleiro de xadrez  $8 \times 8$ , qual o menor número de rainhas que devem ser colocadas no tabuleiro, de forma que todas as suas casas sejam ocupadas ou alcançadas por pelo menos uma rainha? A Figura 1 mostra uma solução para o problema das rainhas em um tabuleiro  $8 \times 8$ .

Figura 1 – Exemplo de solução para o problema das rainhas do xadrez em um tabuleiro  $8 \times 8$ .



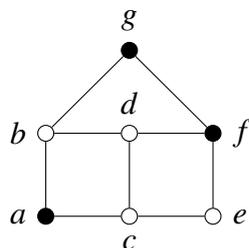
Fonte: Elaborada pelo autor.

Embora o problema das rainhas possa ser modelado como um problema de dominação em grafos, o conceito de conjunto dominante de um grafo só foi formalmente definido em 1962, de forma independente, por Claude Berge no livro *Theory of Graphs and its Applications* (BERGE, 1962) e por Oysten Ore no livro *Theory of Graphs* (ORE, 1962). A dominação em grafos é definida da seguinte forma: dado um grafo  $G = (V(G), E(G))$ , um subconjunto  $S \subseteq V(G)$  é dito *conjunto dominante* de  $G$  se todo vértice  $v \in V(G)$  pertence ao conjunto  $S$  ou é adjacente a pelo menos um elemento de  $S$ . A Figura 2a exibe um conjunto dominante em um grafo  $G$ . Um conjunto dominante  $S$  de  $G$  é dito *mínimo* se tem a menor cardinalidade possível.

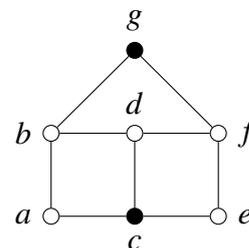
O *número de dominação* de um grafo  $G$  é igual a cardinalidade de algum conjunto dominante mínimo de  $G$  e é denotado por  $\gamma(G)$ . A Figura 2b mostra um exemplo de conjunto dominante mínimo. O problema das rainhas pode ser modelado como um problema de dominação em grafos da seguinte forma: considere um grafo onde o conjunto de vértices é o conjunto de casas do tabuleiro; e para cada vértice  $v$ , existe uma aresta para qualquer outro vértice  $u$  se e somente se, colocada uma rainha na casa que  $v$  representa no tabuleiro, ela alcança a casa que  $u$  representa no tabuleiro. O conjunto dominante mínimo são todos os vértices que representam as casas que devem ser ocupadas por uma rainha na solução para o problema. Na Figura 1 o conjunto dominante mínimo seria justamente os vértices que representam as casas  $a1, c7, d3, g8$  e  $h4$  do tabuleiro. O número de dominação é justamente a quantidade mínima de rainhas necessárias, no exemplo citado é 5.

Figura 2 – Representações de conjunto dominante e de conjunto dominante mínimo em um grafo.

(a) Os vértices com cor preta representam um conjunto dominante  $S$  de vértices do grafo  $G$ .



(b) Os vértices com cor preta representam um conjunto dominante mínimo  $S'$  de vértices do grafo  $G$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

O problema de determinar se um grafo possui um conjunto dominante mínimo de cardinalidade menor ou igual a  $k$  é *NP-completo* (GAREY; JOHNSON, 1979). E permanece *NP-completo* quando restrito a algumas classes de grafos, como por exemplo: grafos planares com grau máximo 3 (GAREY; JOHNSON, 1979), grafos bipartidos (BERTOSSO, 1984) e grafos split (BERTOSSO, 1984). Mesmo assim, o parâmetro  $\gamma(G)$  permanece sendo investigado até os dias atuais. O artigo *On graphs having domination number half their order* (FINK *et al.*, 1985) caracteriza grafos de ordem  $2n$  que têm  $\gamma(G) = n$ . O artigo *Domination numbers of planar graphs* (MACGILLIVRAY; SEYFFARTH, 1996) mostra que grafos planares com diâmetro 2 e 3 possuem limites para o número de dominação. Em sua dissertação de mestrado, *Conjuntos dominantes em grafos cúbicos* (PEREIRA, 2020), Alessandra Pereira apresenta os resultados do seu estudo sobre o número de dominação para algumas famílias de grafos cúbicos: *snarks*-flor,

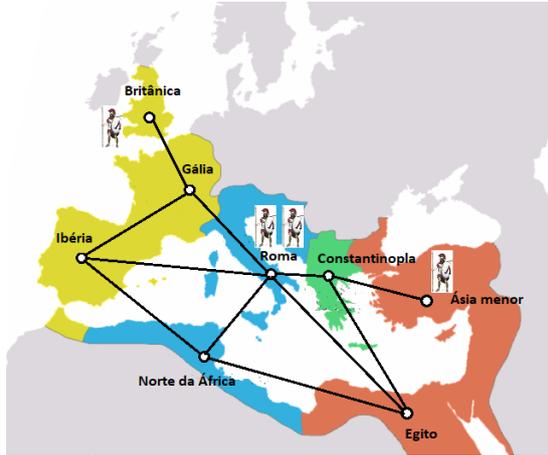
*snarks* de Blanuša generalizados, *snarks* de Loupekine, *snarks* de Goldberg, *snark* de Goldbergs torcidos, grafos de Petersen generalizados e grafos cúbicos planares. Note que os últimos dois artigos citados restringem o problema para classes de grafos bem específicas, visto que o problematema se mostrou difícil para grafos arbitrários.

Desde a formalização matemática do conceito de dominação em grafos, diversas variantes desse conceito foram propostas. Uma delas tem conexão direta com o problema estudado nesse trabalho, que é o problema da dominação romana em grafos, cuja origem é descrita a seguir. No artigo *Defend the Roman empire!* (STEWART, 1999), o autor Ian Stewart conta um desafio enfrentado pelo imperador romano Constantino que, no século IV, tinha a tarefa de criar uma estratégia para defender seu império com um número limitado de tropas. O império romano era constituído por oito regiões, Grã-Bretanha, Gália, Ibéria, Roma, Constantinopla, Norte da África, Ásia menor e Egito. A Figura 3a mostra o mapa do império romano no século IV com suas oito regiões. Existia um total de quatro tropas, que deveriam ser alocadas nas regiões de forma que toda região sem tropas fosse vizinha a pelo menos uma região com duas tropas, de forma que, caso a região sem tropas fosse atacada, a região com duas tropas poderia enviar uma tropa para a região atacada e ainda assim permaneceria com uma tropa. Este desafio pode ser visto como um problema de rotulação de grafos, onde cada região é um vértice, o caminho entre duas regiões é uma aresta do grafo. O problema consiste em rotular os vértices do grafo, com rótulos 0, 1 ou 2, em que o rótulo de cada vértice representa a quantidade de tropas em cada região e o objetivo é que todos os vértices com rótulo 0 possuam pelo menos um vizinho com rótulo 2. A Figura 3 exibe o mapa do império romano no século IV com as tropas e também um grafo com uma rotulação que representa o mapa e as tropas. A parte difícil do problema é usar o mínimo de tropas possíveis, tanto que o problema de decisão da dominação romana em grafos é *NP-Completo* (DREYER, 2000). Inspirados pelo artigo de Stewart, Cockayne et al. introduziram o conceito formal de dominação romana em grafos (COCKAYNE *et al.*, 2004), que é uma variante da dominação em grafos. A definição formal de dominação romana é exibida no Capítulo 2.

Posteriormente, inspirados pela dominação romana, Beeler, Haynes e Hedetniemi definiram uma versão mais forte para o problema, denominada *dominação romana dupla* (BEELER *et al.*, 2016). Em comparação com o exemplo anterior, desta vez, regiões sem tropas devem ser vizinhas a pelo menos uma região com três tropas ou duas regiões com duas tropas cada; enquanto regiões com apenas uma tropa devem ser vizinhas a pelo menos uma região com

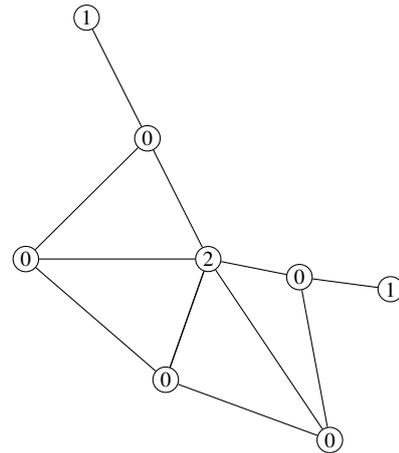
Figura 3 – Mapa do império romano no século IV d.C., e grafo com uma rotulação de vértices representando uma possível distribuição de tropas.

(a) Mapa do Império romano no século IV d.C., com grafo sobreposto representando as regiões e os possíveis deslocamentos entre elas, com uma distribuição de tropas entre as regiões.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(b) Grafo com rotulação de vértices que representa uma possível distribuição de tropas entre as regiões para o problema da dominação romana.

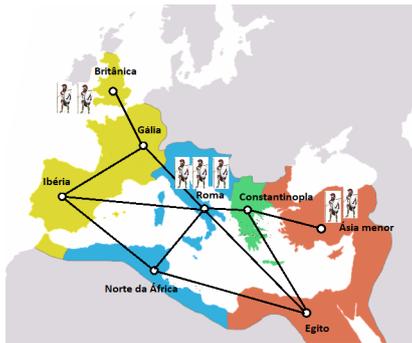


duas ou três tropas. Dessa forma, quando uma região sem tropas ou com no máximo uma tropa fosse atacada, pudesse haver um deslocamento de tropas de regiões vizinhas, de forma que a região atacada fique com duas tropas e as regiões que enviaram tropas, permaneçam com pelo menos uma tropa cada. A fim de definir essa nova variante como um problema de rotulação de vértices, deve-se criar um grafo onde os vértices são as regiões e as arestas são os caminhos que ligam as regiões. O problema consiste em rotular os vértices do grafo, com rótulos 0, 1, 2 ou 3, em que cada rótulo de um vértice representa a quantidade de tropas de cada região e o objetivo é que todos os vértices com rótulo 0 possuam pelo menos um vizinho com rótulo 3 ou pelo menos dois vizinhos com rótulo 2; e todos os vértices com rótulo 1 possuam pelo menos um vizinho com rótulo 2 ou 3. Assim como a dominação romana, a parte difícil da dominação romana dupla é minimizar a quantidade de tropas utilizadas, sendo sua versão de decisão também um problema NP-completo (POUREIDI; RAD, 2020). A fim de ilustrar este conceito, a Figura 4 mostra o mapa do império Romano no século IV e um grafo com a rotulação correspondente para o problema da dominação romana dupla.

Este trabalho de conclusão de curso apresenta uma investigação da dominação romana dupla em classes de grafos cúbicos. A divisão dos capítulos deste texto está organizada como descrito a seguir. O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos de grafos, definições e

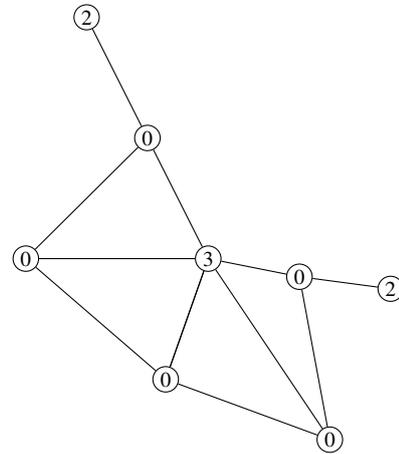
Figura 4 – Mapa do império romano no século IV d.C., e grafo com uma rotulação de vértices representando uma possível distribuição de tropas.

(a) Mapa do Império romano no século IV d.C., com grafo sobreposto representando as regiões e os possíveis deslocamentos entre elas, com uma distribuição de tropas entre as regiões.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(b) Grafo com rotulação de vértices que representa uma possível distribuição de tropas entre as regiões para o problema da dominação romana dupla.



resultados preliminares usados ao longo do texto. No Capítulo 3, determinamos o número de dominação romana dupla para a família dos *snarks*-*flor*. No Capítulo 4, determinamos o número de dominação romana dupla para os *snarks* de Blanuša generalizados. No Capítulo 5, apresentamos limitantes superior e inferior para o número de dominação romana dupla dos *snarks* de Goldberg. No Capítulo 6, apresentamos limitantes superior e inferior para o número de dominação romana dupla dos *snarks* de Loupekine. E, por fim, o Capítulo 8 apresenta as considerações finais deste trabalho.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

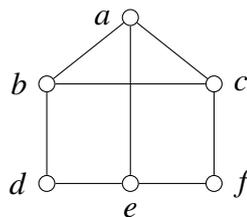
Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos de grafos, definições importantes e resultados auxiliares que são usados ao longo do texto.

### 2.1 Definições básicas de teoria dos grafos

Os conceitos básicos apresentados nesta seção foram baseados no livro *A first course in graph theory* (CHARTRAND; ZHANG, 2013). Desse modo, para os detalhes não cobertos aqui, indicamos a consulta do livro supracitado.

Um *grafo simples*  $G = (V(G), E(G))$  é uma estrutura matemática formada por um conjunto finito e não vazio  $V(G)$ , cujos elementos são chamados *vértices*, e por um conjunto finito  $E(G)$ , disjunto de  $V(G)$ , cujos elementos são pares não ordenados de elementos distintos de  $V(G)$  e são chamados de *arestas*. Como exemplo, podemos definir um grafo simples  $G = (V(G), E(G))$ , onde  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  e  $E(G) = \{ab, ac, ae, bc, bd, cf, de, ef\}$ . Este grafo  $G$  está ilustrado na Figura 5, onde os vértices são representados por círculos e as arestas são representadas por linhas ligando os vértices. Por uma questão de brevidade, sempre que nos referirmos a grafos, estamos falando de grafos simples.

Figura 5 – Exemplo de grafo simples.



Fonte: Elaborada pelo autor.

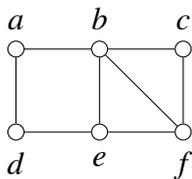
A *ordem* de um grafo  $G$  é igual a  $|V(G)|$  e é denotada por  $n$ . Dizemos que um vértice  $v \in V(G)$  é *vizinho* de  $u \in V(G)$  e também que  $u$  é vizinho de  $v$  se  $uv$  é um par não ordenado do conjunto  $E(G)$ . O termo *adjacente* expressa o mesmo significado de vizinho. Se  $uv \in E(G)$  com  $u, v \in V(G)$ , então dizemos que  $uv$  incide em  $u$  e  $v$  e vice-versa, e que  $u$  e  $v$  são *extremos* da aresta  $uv$ . Por exemplo, na Figura 5, a aresta  $ab$  incide no vértice  $a$  e também no vértice  $b$ . Duas arestas são ditas *arestas adjacentes* se incidem em um mesmo vértice. O *grau* de um vértice  $v$  é a quantidade de arestas que incidem nele, denotado por  $d(v)$ . Um grafo  $G$  tal que  $d(u) = k$  para todo  $u \in V(G)$  é dito *k-regular*. Um *grafo completo* é um grafo no qual quaisquer dois de

seus vértices são adjacentes. O grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ , este grafo é  $(n - 1)$ -regular. Grafos 3-regulares são também chamados *cúbicos*. O *grau máximo* de  $G$  é o grau de um vértice com maior grau no grafo, denotado por  $\Delta(G)$ , e o *grau mínimo* de  $G$  é o grau de um vértice com o menor grau no grafo, denotado por  $\delta(G)$ .

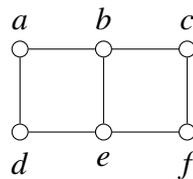
Um grafo  $H$  é dito *subgrafo* de  $G$ , se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Denotamos que  $H$  é subgrafo de  $G$  ou  $H$  está contido em  $G$  por  $H \subseteq G$ . A partir de um grafo  $G$  é possível obter um grafo menor  $H$  em relação ao original, executando pelo menos uma das operações definidas a seguir. A primeira consiste em remover uma aresta  $uv$  do conjunto  $E(G)$  sem modificar o conjunto  $V(G)$ , isso pode ser denotado por  $G - uv$ . A segunda consiste em remover um vértice  $v$  do conjunto  $V(G)$  e também remover de  $E(G)$  as arestas que incidem em  $v$ , denotamos isso por  $G - v$ . A Figura 6 exibe um grafo  $G$  e os subgrafos obtidos através das operações descritas.

Figura 6 – Exemplo de um grafo  $G$  e dois de seus subgrafos.

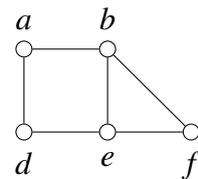
(a) Grafo  $G$ .



(b) Subgrafo  $G - bf$ .



(c) Subgrafo  $G - c$ .



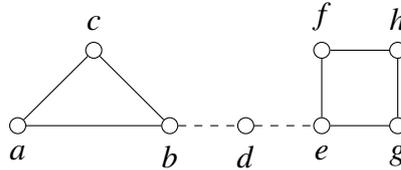
Fonte: Elaborada pelo autor.

As operações acima podem ser estendidas para remoção de um conjunto de vértices ou um conjunto de arestas. Dado um grafo  $G$  e um conjunto de vértices  $X \subset V(G)$ , temos  $G - X$  como o grafo resultante da remoção de todos os vértices de  $X$  no grafo  $G$  assim como todas as arestas que incidem em pelo menos um vértice de  $X$ . Dado um grafo  $G$  e um conjunto de arestas  $S \subseteq E(G)$ , temos  $G - S$  como o grafo resultante da remoção de todas as arestas de  $S$  no grafo  $G$ .

Um *caminho* em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices de  $G$ ,  $W = v_0, v_1, v_2, \dots, v_l$ , de tal forma que  $v_i$  e  $v_{i-1}$  são vizinhos,  $1 \leq i \leq l$ . Um *ciclo* em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices de  $G$ ,  $C = v_0, v_1, \dots, v_l, v_0$ , com  $l \geq 2$ , de tal forma que  $v_i$  e  $v_{i-1}$  são vizinhos,  $1 \leq i \leq l$  e  $v_l$  é vizinho de  $v_0$ . Um *grafo caminho* com  $n$  vértices é um grafo formado por uma sequência de todos os seus vértices,  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , de tal forma que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência. Um grafo  $G$  é dito *conexo* se, para quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  de  $V(G)$ , existe um caminho de  $u$  até  $v$  em  $G$ ; e é dito *desconexo* caso contrário. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo conexo maximal de  $G$ . Em outras palavras, se  $H$  é uma componente conexa de  $G$ , então não existe nenhum subgrafo conexo  $H' \subseteq G$ , tal que  $H \subset H'$ .

Um aresta  $e \in E(G)$  é dita *aresta de corte* se, ao removê-la do grafo, o número de componentes conexas de  $G$  aumenta. A Figura 7 mostra um grafo com duas arestas de corte.

Figura 7 – Grafo com duas arestas de corte tracejadas.

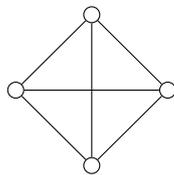


Fonte: Elaborada pelo autor.

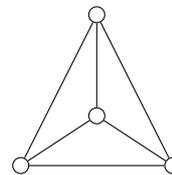
Um *grafo plano* é um grafo que está desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem. Um *grafo planar* ou é um grafo plano, ou é um grafo que pode ser desenhado no plano como um grafo plano. As *faces* de um grafo plano são as regiões delimitadas por três ou mais arestas, além da face exterior ao grafo, chamada *face ilimitada*. A Figura 8 mostra um exemplo de grafo planar.

Figura 8 – O grafo  $K_4$  é um grafo planar, pois pode ser desenhado no plano como um grafo plano.

(a)  $K_4$  desenhado no plano com arestas cruzadas.



(b)  $K_4$  desenhado no plano sem arestas cruzadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma *coloração própria de arestas* é uma atribuição de cores às arestas de um grafo de modo que arestas adjacentes tenham cores diferentes. Dizemos que um grafo admite uma *k-coloração de arestas*, se é possível colorir o grafo, com uma coloração própria de arestas, com  $k$  cores. O *índice cromático* de um grafo  $G$  é o menor  $k$ , tal que  $G$  admite uma  $k$ -coloração de arestas, e é denotado por  $\chi'(G)$ .

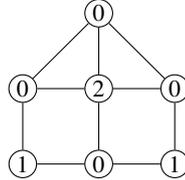
## 2.2 Dominação romana e dominação romana dupla

A seguir, definimos formalmente dominação romana e dominação romana dupla, e apresentamos alguns teoremas e lemas úteis para as provas dos nossos resultados.

Uma *função de dominação romana* (FDR) de um grafo  $G$  é uma função  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que, para todo vértice  $v$  com  $f(v) = 0$ , existe pelo menos um vizinho  $u$  de  $v$  com

$f(u) = 2$ . O peso  $\omega(f)$  de uma FDR é igual a  $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ . O número de dominação romana de  $G$  é dado por  $\min\{\omega(f) : f \text{ é uma FDR de } G\}$ , denotado por  $\gamma_R(G)$ . Uma FDR de um grafo  $G$  com peso igual a  $\gamma_R(G)$  é dita *FDR ótima*. A Figura 9 mostra um grafo com uma FDR ótima.

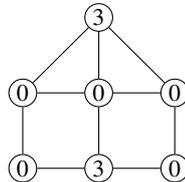
Figura 9 – Grafo  $G$  com uma FDR ótima com peso igual a  $\gamma_R(G) = 4$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dado um grafo  $G$ , uma *função de dominação romana dupla* (FDRD) de  $G$  é uma função  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  tal que, para todo vértice  $v$  com  $f(v) = 0$ , existe pelo menos um vértice  $u$  vizinho de  $v$  com  $f(u) = 3$  ou dois vértices  $u_1$  e  $u_2$  vizinhos de  $v$  com  $f(u_1) = f(u_2) = 2$ ; e para todo vértice  $v$  com  $f(v) = 1$ , existe pelo menos um vértice  $u$  vizinho de  $v$  com  $f(u) \in \{2, 3\}$ . Seja  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , definimos  $V_i \subseteq V(G)$  tal que, para todo vértice  $v \in V_i$ ,  $f(v) = i$ . Note que a função de dominação romana dupla  $f$  determina uma partição dos vértices do grafo nos conjuntos  $V_0, V_1, V_2$  e  $V_3$ . Assim, para facilitar manipulações matemáticas, em alguns trechos abusamos da notação e nos referimos a uma FDRD de um grafo alternativamente como uma partição  $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ . O peso da função de dominação romana dupla é definido por  $\omega(f) = \sum_{v \in V} f(v) = |V_1| + 2|V_2| + 3|V_3|$ . O número de dominação romana dupla  $\gamma_{dR}(G)$  é dado por  $\min\{\omega(f) : f \text{ é uma FDRD de } G\}$ . Uma função que tem o peso mínimo, isto é, peso igual a  $\gamma_{dR}(G)$ , é chamada *FDRD ótima*.

Figura 10 – Grafo  $G$  com uma FDRD ótima de peso igual a  $\gamma_{dR}(G) = 6$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

O teorema a seguir mostra que uma FDRD ótima não atribui rótulo 1 aos vértices.

**Teorema 1.** (BEELER et al., 2016) Se  $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$  é uma FDRD ótima de um grafo  $G$ , então conseguimos construir uma FDRD ótima  $f' = (V'_0, V'_1, V'_2, V'_3)$  a partir de  $f$  com  $V'_1 = \emptyset$ .

*Demonstração.* Seja  $f$  uma FDRD ótima de  $G$ . Suponha que, para algum vértice  $v \in V(G)$ ,  $f(v) = 1$ . Então,  $v$  tem pelo menos um vizinho  $u$  com  $f(u) \in \{2, 3\}$ . Se  $f(u) = 3$ , podemos

redefinir  $f(v) = 0$ , diminuindo assim o peso de  $f$ , contradizendo o fato de  $f$  ser uma FDRD ótima. Se  $f(u) = 2$ , podemos criar uma outra FDRD ótima  $f'$  agora com  $v \in V_0$  e  $u \in V_3$ , com o mesmo peso da função  $f$ , só que agora com  $v \notin V_1$ .  $\square$

Pelo Teorema 1, dado um grafo  $G$  com uma FDRD ótima  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$ , podemos definir  $\gamma_{dR}(G) = \omega(f) = 2|V_2| + 3|V_3|$ .

A seguir, é estabelecida uma propriedade em relação à união dos conjuntos  $V_2$  e  $V_3$  em uma FDRD.

**Lema 2.** (BEELER et al., 2016) Dada uma FDRD ótima  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$  de  $G$ ,  $V_2 \cup V_3$  é um conjunto dominante de  $G$ .

*Demonstração.* Por definição de dominação romana dupla, todo vértice em  $V_0$  tem pelo menos um vizinho em  $V_3$  ou dois vizinhos em  $V_2$ . Assim, todo vértice que não está em  $V_2 \cup V_3$  possui um vizinho nesse conjunto. Logo,  $V_2 \cup V_3$  é um conjunto dominante de  $G$ .  $\square$

A seguir, mostramos um limitante superior e um inferior para o número de dominação romana dupla em função do número de dominação.

**Teorema 3.** (BEELER et al., 2016) Para qualquer grafo  $G$ ,  $2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$ .

*Demonstração.* Seja  $S$  um conjunto dominante mínimo de  $G$ . Note que  $f = (V(G) - S, \emptyset, \emptyset, S)$  é uma função de dominação romana dupla de  $G$ . Então  $\gamma_{dR}(G) \leq 3|S| = 3\gamma(G)$ . Seja  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$  uma FDRD ótima de  $G$ . Como  $V_2 \cup V_3$  é um conjunto dominante de  $G$ . Temos que,  $\gamma(G) \leq |V_2| + |V_3|$ . Multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por 2, obtemos:

$$2\gamma(G) \leq 2|V_2| + 2|V_3| \leq 2|V_2| + 3|V_3| = \gamma_{dR}(G).$$

Portanto,  $2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$ .  $\square$

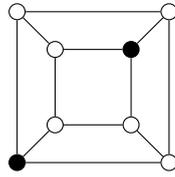
Um grafo  $G$  que possui número de dominação romana dupla igual a  $3\gamma(G)$  é denominado *romano duplo*. A Figura mostra um exemplo de grafo romano duplo.

No artigo *Discharging Approach for Double Roman Domination in Graphs* (SHAO et al., 2018) é mostrado o seguinte resultado referente aos grafos romanos duplos.

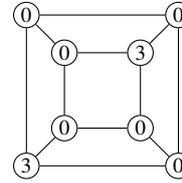
**Lema 4.** (SHAO et al., 2018) Um grafo  $G$  é romano duplo se, e somente se, possui uma FDRD ótima  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$  com  $|V_2| = 0$ .  $\square$

Figura 11 – O grafo mostrado é romano duplo, pois o número de dominação romana dupla é exatamente três vezes o seu próprio número de dominação.

(a) Grafo com um conjunto dominante mínimo de tamanho 2.



(b) Grafo com uma FDRD ótima com peso 6.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, descrevemos brevemente o método da descarga em grafos e mostramos um limitante inferior para o número de dominação romana dupla cuja demonstração utiliza-se deste método.

O método da descarga é um método bastante utilizado em provas relacionadas a coloração de grafos (CRANSTON; WEST, 2017), principalmente em grafos planares. O método da descarga é conhecido principalmente por ter sido usado na prova do Teorema das Quatro Cores (ROBERTSON *et al.*, 1997). A primeira etapa do método da descarga consiste em atribuir cargas (números) iniciais aos vértices de um grafo de acordo com uma regra e, posteriormente, redistribuir estas cargas entre os vértices (descarga) seguindo um conjunto de regras definidas. Ao final do processo de descarga, o somatório das cargas finais é igual ao somatório das cargas iniciais. No artigo *Discharging Approach for Double Roman Domination in Graphs* (SHAO *et al.*, 2018) são mostrados vários resultados para a dominação romana dupla usando essa primeira etapa do método da descarga. Agora, descrevemos o procedimento de descarga utilizado na prova de um limitante inferior para o número de dominação romana dupla que foi apresentado pela primeira vez no artigo supracitado.

**Procedimento de Descarga A:** Seja  $f$  uma FDRD de um grafo  $G$ . A carga inicial de cada vértice  $v \in V(G)$  é definida com  $s(v) = f(v)$ . O procedimento de descarga é aplicado utilizando as seguintes regras:

**R1:** Todo vértice  $v$  com  $s(v) = 3$  envia  $\frac{3}{\Delta(G)+1}$  de carga para cada vértice adjacente com rótulo 0.

**R2:** Todo vértice  $v$  com  $s(v) = 2$  envia  $\frac{3}{2(\Delta(G)+1)}$  de carga para cada vértice adjacente com rótulo 0.

Usando o Procedimento de Descarga A descrito acima, é possível provar o teorema a seguir.

**Teorema 5.** (SHAO *et al.*, 2018) Para qualquer grafo conexo  $G$  com  $n \geq 2$  vértices,

$$\gamma_{dR}(G) \geq \frac{3n}{\Delta(G)+1}.$$

*Demonstração.* Seja  $f = (V_0, \emptyset, V_1, V_2)$  uma FDRD ótima de  $G$ . Logo abaixo, provamos que  $\omega(f) \geq \frac{3n}{\Delta(G)+1}$ . Se  $\Delta(G) = 1$ , então  $n = 2$  e  $\gamma_{dR} = 3 = \frac{3n}{\Delta(G)+1}$ . Portanto, no restante desta prova, consideramos que  $\Delta(G) \geq 2$  e utilizamos o Procedimento de Descarga A para a função  $f$  de  $G$ . Então, temos que:

- (i) O número máximo de vértices para os quais cada vértice  $v \in V_3$  envia carga é igual a  $d(v)$ . Pela regra **R1**, podemos obter a carga final de  $v$ , sendo  $s'(v) \geq s(v) - \frac{3 \cdot d(v)}{\Delta(G)+1} \geq 3 - \frac{3 \cdot \Delta(G)}{\Delta(G)+1} = \frac{3}{\Delta(G)+1}$ ;
  - (ii) O número máximo de vértices para os quais cada vértice  $v \in V_2$  envia carga é igual a  $d(v)$ . Pela regra **R2**, podemos obter a carga final  $s'(v) \geq s(v) - \frac{3 \cdot d(v)}{2(\Delta(G)+1)} \geq 2 - \frac{3 \cdot \Delta(G)}{2(\Delta(G)+1)} \geq \frac{3}{\Delta(G)+1}$ ;
  - (iii) Pela definição de dominação romana dupla, todo vértice  $v \in V_0$  tem um vizinho  $u$  em  $V_3$  ou dois vizinhos  $u_1$  e  $u_2$  em  $V_2$ . Dessa forma, por **R1** ou **R2**,  $v$  recebe  $\frac{3}{\Delta(G)+1}$  de  $u$  ou  $2 \cdot \frac{3}{2(\Delta(G)+1)}$  de  $u_1$  e  $u_2$ . Então,  $s'(v) \geq \frac{3}{\Delta(G)+1}$ .
- Então, pelos itens (i), (ii) e (iii) listados acima, a carga final de cada vértice  $v$ , será  $s'(v) \geq \frac{3}{\Delta(G)+1}$ . Como o procedimento de descarga não muda a carga total do grafo, temos:

$$\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} s(v) = \sum_{v \in V(G)} s'(v) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{3}{\Delta(G)+1} = \frac{3n}{\Delta(G)+1}.$$

Portanto, temos que  $\gamma_{dR}(G) = \omega(f) \geq \frac{3n}{\Delta(G)+1}$ .

□

### 2.3 Breve história dos *snarks*

Muitos problemas em teoria dos grafos são *NP*-completos mesmo quando restritos à classe dos grafos cúbicos. Como por exemplo, o problema de decisão da dominação em grafo é *NP*-completo (BOUQUET *et al.*, 2020). Até o momento, não sabemos a complexidade do problema da dominação romana dupla restrito para grafos cúbicos. Porém, alguns pesquisadores têm determinado o número de dominação romana dupla para algumas classes de grafos cúbicos, como para os grafos prismas e para os grafos de Petersen generalizados (SHAO *et al.*, 2018; POKLUKAR; ŽEROVNIK, 2022b; POKLUKAR; ŽEROVNIK, 2022a; GAO *et al.*, 2021). Pelo

que foi citado acima, decidimos estudar o problema da dominação romana dupla para algumas famílias de uma classe de grafos cúbicos, denominada de *snark*, definida a seguir.

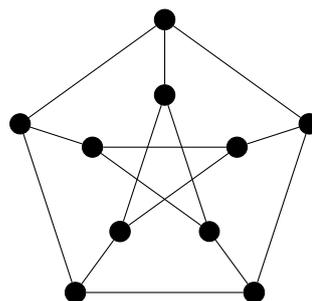
Um *snark* é um grafo cúbico, sem aresta de corte e com índice cromático 4. Os *snarks* surgiram no contexto da Conjetura das Quatro Cores, que diz que todo grafo planar possui um coloração de faces com quatro cores, em que faces adjacentes não possuem cores iguais.

Em 1880, P.G. Tait (TAIT, 1880) provou o seguinte teorema que, na época, trouxe uma nova abordagem para a Conjetura das Quatro Cores.

**Teorema 6.** (TAIT, 1880) *Todo grafo plano, 3-regular e sem arestas de corte possui uma 4-coloração de faces se e somente se ele admite uma 3-coloração de arestas.*

Por causa deste resultado de Tait, durante o período que a Conjetura das Quatro Cores ficou aberta, alguns pesquisadores conduziram uma busca por um contraexemplo para a Conjetura das Quatro Cores, que consiste em encontrar um grafo planar, 3-regular, sem aresta de corte e com índice cromático 4. A partir dessa nova abordagem, começou a busca por *snarks* planares. Hoje, sabemos que não existem *snarks* planares já que a Conjetura das Quatro Cores foi provada por Appel e Haken em 1977 (APPEL; HAKEN, 1977). Até mesmo a busca por *snarks* não planares tornou-se um problema de pesquisa em teoria dos grafos, dada a dificuldade inicial de encontrar esses grafos. O primeiro *snark* foi descoberto em 1898 por J. Petersen (PETERSEN, 1898). A Figura 12 mostra esse grafo.

Figura 12 – Grafo de Petersen.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante muito tempo, o grafo de Petersen foi o único *snark* conhecido, mas depois várias famílias infinitas de *snarks* foram descobertas. Algumas dessas famílias infinitas de *snarks* são investigadas neste trabalho. O *snark* de Blanuša foi descoberto por D. Blanuša em 1946 (BLANUSA, 1946). A partir da descoberta dos *snarks* de Blanuša, J.J. Watkins (WATKINS, 1983), em 1983 construiu duas famílias infinitas de *snarks* que são generalizações dos *snarks* de Blanuša, que ficaram conhecidos como *snarks* de Blanuša generalizados. Outra família de

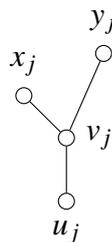
*snarks* que será investigada neste trabalho é a família dos *snarks*-flor, descoberta em 1975 por R. Isaacs (ISAACS, 1975). Mais uma família são os *snarks* de Goldberg que foram descobertos por M.K. Goldberg em 1981 (GOLDBERG, 1981). E também a família dos *snarks* de Lopekine que foi apresentada, em 1976, por Isaacs (ISAACS, 1976), utilizando um método de construção desenvolvido por F. Loupekine.

### 3 SNARKS-FLOR

Neste capítulo, apresentamos a família dos *snarks-flor*. Mostramos como é feita a construção dos membros da família e por fim determinamos o seu número de dominação romana dupla.

Em 1975, Isaacs (ISAACS, 1975) apresentou o primeiro método para construção de *snarks* a partir de outros *snarks* conhecidos. Com este método, ele descobriu as duas primeiras famílias infinitas de *snarks*, são elas: os *snarks*-BDS e uma das famílias de interesse deste trabalho, os *snarks*-flor. A família dos *snarks*-flor é formada pelos grafos  $F_3, F_5, F_7, \dots, F_i, i \geq 3$  e  $i$  ímpar. Todos os grafos desta família podem ser construídos pela união disjunta de subgrafos especiais denominados *blocos básicos*. Um bloco básico  $B_j$  é definido como um grafo simples, tal que  $V(B_j) = \{x_j, y_j, v_j, u_j\}$  é o conjunto de vértices e  $E(B_j) = \{x_j v_j, y_j v_j, u_j v_j\}$  é o conjunto de arestas. O bloco  $B_j$  é mostrado na Figura 13. Um *snark*-flor  $F_i$  é formado por  $i$  blocos básicos e, como cada um destes possui 4 vértices, o número de vértices de um *snark*-flor  $F_i$  é  $4i$ .

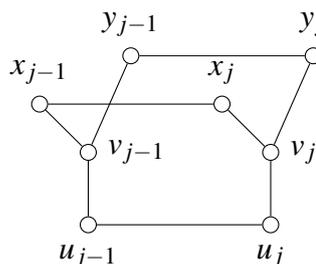
Figura 13 – Bloco  $B_j$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para conectar dois blocos básicos  $B_k$  e  $B_l$  são utilizadas *arestas de ligação*  $E_{k,l} = \{x_k x_l, y_k y_l, u_k u_l\}$ . Definimos *grafo de ligação* como o grafo  $L_j$ , tal que  $V(L_j) = V(B_{j-1}) \cup V(B_j)$  é o conjunto de vértices e  $E(L_j) = E(B_{j-1}) \cup E(B_j) \cup E_{j-1,j}$  é o conjunto de arestas. O grafo de ligação  $L_j$  está exibido na Figura 14.

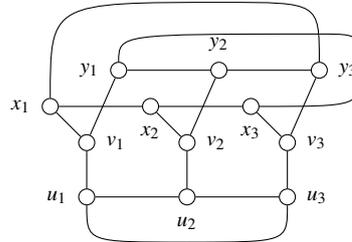
Figura 14 – Grafo de ligação  $L_j$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro *snark* da família dos *snarks*-flor é o grafo  $F_3$  com o conjunto de vértices  $V(F_3) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3)$  e conjunto de arestas  $E(F_3) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup E(B_3) \cup E_{1,2} \cup E_{2,3} \cup \{x_1y_3, y_1x_3, u_1u_3\}$ . O *snark*  $F_3$  está exibido na Figura 15.

Figura 15 – *Snark*-flor  $F_3$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

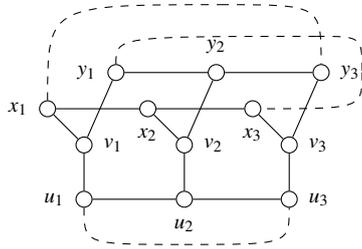
Um *snark*-flor  $F_i$ , com  $i \geq 5$  e  $i$  ímpar, pode ser obtido a partir do *snark*-flor  $F_{i-2}$  e do grafo de ligação  $L_i$ , por meio de uma construção recursiva, da seguinte forma:

- (i)  $V(F_i) = V(F_{i-2}) \cup V(L_i)$ ;
- (ii)  $E(F_i) = (E(F_{i-2}) \setminus E_{i-2}^{out}) \cup E_i^{in} \cup E(L_i)$ , tal que
  - a)  $E_{i-2}^{out} = \{y_1x_{i-2}, x_1y_{i-2}, u_1u_{i-2}\}$  e
  - b)  $E_i^{in} = E_{i-2, i-1} \cup \{y_1x_i, x_1y_i, u_1u_i\}$ .

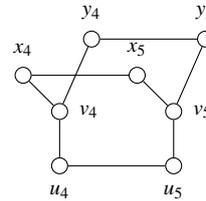
A Figura 16 exibe os grafos  $F_3$ ,  $L_5$  e o grafo  $F_5$  obtido a partir dos dois anteriores ao ser aplicado o processo descrito acima.

Figura 16 – Construção do *snark-flor*  $F_5$  a partir do subgrafo  $F_3 - E_3^{out}$  e do grafo de Ligação  $L_5$ .

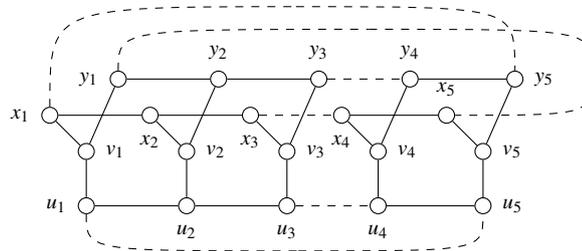
(a) *Snark-flor*  $F_3$ . As arestas tracejadas pertencem ao conjunto  $E_3^{out}$ .



(b) Grafo de ligação  $L_5$ .



(c) *Snark-flor*  $F_5$  obtido a partir do subgrafo  $F_3 - E_3^{out}$  e do grafo de ligação  $L_5$ . As arestas tracejadas representam o conjunto  $E_5^{in}$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, mostramos um teorema que será usado na nossa prova para o valor de  $\gamma_{dR}(G)$  para os *snarks-flor*. Esse teorema é provado na dissertação de mestrado da Alessandra Pereira (PEREIRA, 2020).

**Teorema 7.** (PEREIRA, 2020) *Seja  $F_i$  um snark-flor com  $i \geq 3$  e  $i$  ímpar. Então,  $\gamma(F_i) = i$ .*

A seguir, determinamos o número de dominação romana dupla dos membros da família dos *snarks-flor*.

**Teorema 8.** *Se  $F_i$  é um snark-flor, com  $i \geq 3$  e  $i$  ímpar, então  $\gamma_{dR}(F_i) = 3i$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, mostramos que  $\gamma_{dR}(F_i) \geq 3i$ . Pelo Teorema 5 e, pelo fato de  $|V(F_i)| = 4i$ , temos que  $\gamma_{dR}(F_i) \geq \frac{3 \cdot 4i}{4} = 3i$ . Resta provar que  $\gamma_{dR}(F_i) \leq 3i$ . Pelos Teoremas 3 e 7, temos que  $\gamma_{dR} \leq 3\gamma(F_i) = 3i$ . □

#### 4 SNARKS DE BLANUŠA GENERALIZADOS

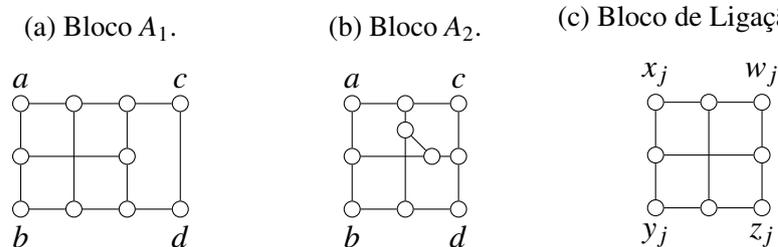
Neste capítulo, apresentamos a família dos *snarks* de Blanuša generalizados. Mostramos como é feita a construção recursiva e por fim determinamos limitantes superior e inferior para a família.

Como dito no Capítulo 2, o grafo de Petersen foi o primeiro *snark* descoberto e por um bom tempo permaneceu como o único. Mas, em 1946, D. Blanuša construiu um *snark* com 18 vértices e 27 arestas, conhecido como primeiro *snark* de Blanuša. Este grafo está exibido na Figura 18a. Anos depois, com a invenção de regras para se obter novos *snarks* a partir de outros *snarks* conhecidos, surgiu um novo *snark*, também com 18 vértices e 27 arestas, conhecido como segundo *snark* de Blanuša. Este grafo está exibido na Figura 18b.

Em 1983, J. Watkins (WATKINS, 1983) construiu duas famílias infinitas de *snarks* cujos membros são denominados *snarks de Blanuša generalizados*. Os menores membros destas famílias são o primeiro e o segundo *snark* de Blanuša. Da mesma forma que a família dos *snarks*-flor, os *snarks* de Blanuša generalizados podem ser construídos a partir de subgrafos fixos denominados *blocos de construção*.

Os blocos de construção dos *snarks* de Blanuša generalizados são os subgrafos  $A_1$ ,  $A_2$  e  $L_j$ ,  $j \geq 1$ , representados na Figura 17. Os vértices  $a, b, c, d$  pertencentes aos blocos  $A_1$  e  $A_2$  e os vértices  $x_j, y_j, w_j, z_j$  pertencentes ao bloco  $L_j$  são denominados *vértices de ligação*. Os *snarks* de Blanuša generalizados podem conter vários blocos  $L_1, L_2, \dots, L_j$ ,  $j \geq 1$ . Porém, podem conter apenas um dentre os blocos  $A_1$  e  $A_2$ , como descrito na definição destas famílias, dada a seguir.

Figura 17 – Blocos de construção dos *snarks* de Blanuša generalizados.

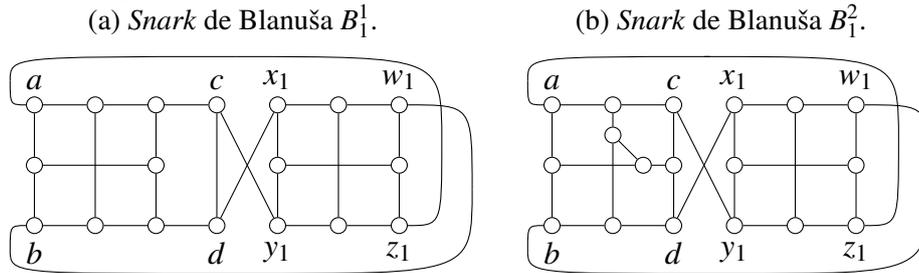


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os *snarks* de Blanuša generalizados, são compostos por duas famílias,  $\mathfrak{B}^1 = \{B_1^1, B_2^1, B_3^1, \dots\}$  e  $\mathfrak{B}^2 = \{B_1^2, B_2^2, B_3^2, \dots\}$ , a primeira e a segunda família de *snarks* de Blanuša generalizados. A construção da família é feita de maneira recursiva e é utilizada na cons-

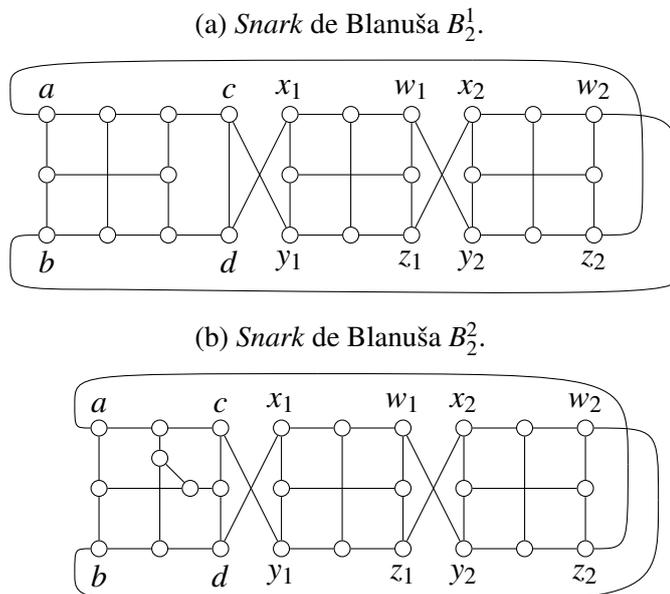
trução de uma FDRD ótima para os *snarks* de Blanuša generalizados. O primeiro *snark* de Blanuša é o primeiro membro da família  $\mathfrak{B}^1$ , o *snark*  $B_1^1$  e possui conjunto de vértices  $V(B_1^1) = V(A_1) \cup V(L_1)$ , conjunto de arestas  $E(B_1^1) = E(A_1) \cup E(L_1) \cup \{az_1, bw_1, cy_1, dx_1\}$  e está exibido na Figura 18a. Já o segundo *snark* de Blanuša é o primeiro membro da família  $\mathfrak{B}^2$ , o *snark*  $B_1^2$  e possui conjunto de vértices  $V(B_1^2) = V(A_2) \cup V(L_1)$ , conjunto de arestas  $E(B_1^2) = E(A_2) \cup E(L_1) \cup \{az_1, bw_1, cy_1, dx_1\}$  e está exibido na Figura 18b. O segundo *snark* da família  $\mathfrak{B}^1$  é o *snark*  $B_2^1$ , que possui conjunto de vértices  $V(B_2^1) = V(A_1) \cup V(L_1) \cup V(L_2)$ , conjunto de arestas  $E(B_2^1) = E(A_1) \cup E(L_1) \cup E(L_2) \cup \{az_2, bw_2, cy_1, dx_1, w_1y_2, z_1x_2\}$  e está exibido na Figura 19a. Por fim, o segundo *snark* da família  $\mathfrak{B}^2$  é o *snark*  $B_2^2$ , que possui conjunto de vértices  $V(B_2^2) = V(A_2) \cup V(L_1) \cup V(L_2)$ , conjunto de arestas  $E(B_2^2) = E(A_2) \cup E(L_1) \cup E(L_2) \cup \{az_2, bw_2, cy_1, dx_1, w_1y_2, z_1x_2\}$  e está exibido na Figura 19b.

Figura 18 – Primeiro e segundo *snark* de Blanuša, os primeiros membros das famílias  $\mathfrak{B}^1$  e  $\mathfrak{B}^2$ , respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

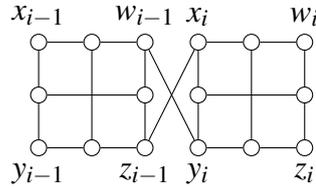
Figura 19 – *Snarks* de Blanuša  $B_2^1$  e  $B_2^2$ , segundos membros das famílias  $\mathfrak{B}^1$  e  $\mathfrak{B}^2$ , respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a construção recursiva dos demais *snarks* das famílias é utilizado um subgrafo  $H_i$ , que possui conjunto de vértices  $V(H_i) = V(L_{i-1}) \cup V(L_i)$ , conjunto de arestas  $E(H_i) = E(L_{i-1}) \cup E(L_i) \cup \{w_{i-1}y_j, z_{i-1}x_i\}$  e está exibido na Figura 20.

Figura 20 – Subgrafo  $H_i$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja  $k \in \{1, 2\}$ . Para cada  $i, i \geq 3$ , o *snark*  $B_i^k$  é construído recursivamente a partir do *snark*  $B_{i-2}^k$  e do subgrafo  $H_i$  da seguinte forma:

- (i)  $V(B_i^k) = V(B_{i-2}^k) \cup V(H_i)$  e
- (ii)  $E(B_i^k) = (E(B_{i-2}^k) \setminus E_{i-2}^{out}) \cup E(H_i) \cup E_i^{in}$ , tal que:
  - a)  $E_{i-2}^{out} = \{az_{i-2}, bw_{i-2}\}$  e
  - b)  $E_i^{in} = \{w_{i-2}y_{i-1}, z_{i-2}x_{i-1}, az_i, bw_i\}$ .

O Teorema 9 determina um limitante superior para o número de dominação romana dupla para as duas famílias de *snarks* de Blanuša generalizados.

**Teorema 9.** *Seja  $B_i^k$  um snark de Blanuša generalizado com  $k \in \{1, 2\}$  e  $i \geq 1$ . Então,*

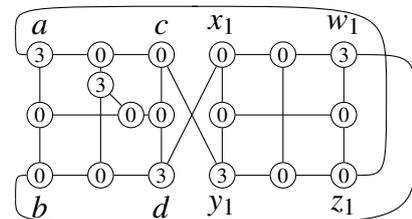
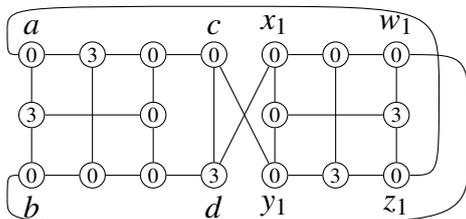
$$\gamma_{dR}(B_i^k) \leq \begin{cases} 6i + 10 & \text{se } k = 1, i \geq 3 \text{ e } i \text{ ímpar;} \\ 6i + 9 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Inicialmente, mostramos separadamente que o *snark*  $B_i^k$ , com  $i = 1$  e  $k \in \{1, 2\}$  possui uma FDRD com peso igual a  $6i + 9 = 15$ . Este caso especial está representado na Figura 21 com os grafo  $B_1^1$  e  $B_1^2$  munidos de suas respectivas FDRDs, ambas com peso 15.

Figura 21 – *Snarks*  $B_1^1$  e  $B_1^2$  cada um com uma FDRD ótima.

(a) *Snark*  $B_1^1$  com uma FDRD com peso 15.

(b) *Snark*  $B_1^2$  com uma FDRD com peso 15.



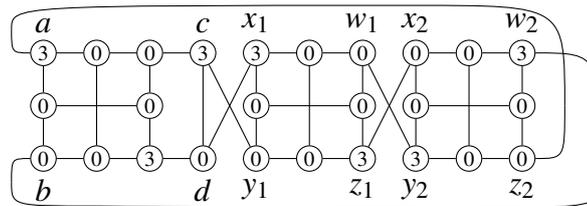
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os demais *snarks* das duas famílias, a prova é por indução forte em  $i$ , baseada na construção recursiva da família. A seguir, provamos, por indução forte em  $i$ , que todo *snark*  $B_i^k$ , com  $k \in \{1, 2\}$  e  $i \geq 2$ , possui uma FDRD  $f_i$ , tal que  $f_i(a) = 3$ ,  $f_i(b) = 0$ ,  $f_i(w_i) = 3$ ,  $f_i(z_i) = 0$  com peso igual a  $6i + 10$  se  $k = 1$  e  $i \geq 3$  for ímpar, ou possui peso igual a  $6i + 9$  caso contrário. Chamamos uma FDRD  $f_i$  de  $B_i^k$ , com  $i \geq 2$ , que respeita essas propriedades de *especial*.

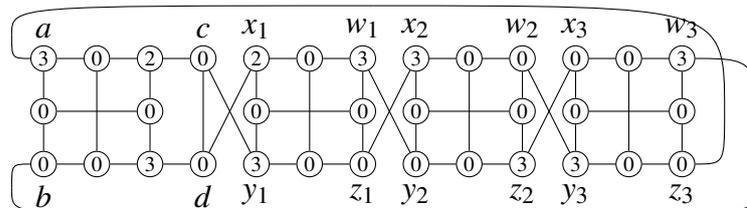
**Caso base:** neste caso, consideramos os *snarks*  $B_i^k$  com  $i = 2$  e  $i = 3$ . Para  $i = 2$ , as Figuras 22a e 23a exibem os *snarks*  $B_2^1$  e  $B_2^2$ , respectivamente, cada um com uma FDRD especial  $F_2$  com peso igual a  $6 \cdot 2 + 9 = 21$ , onde  $f_2(a) = 3$ ,  $f_2(b) = 0$ ,  $f_2(w_2) = 3$ ,  $f_2(z_2) = 0$ . Para  $i = 3$ , temos o grafo  $B_3^1$  munido de uma FDRD  $f_3$  com peso  $6i + 10 = 28$ , tal que:  $f_3(a) = 3$ ,  $f_3(b) = 0$ ,  $f_3(w_2) = 3$ ,  $f_3(z_2) = 0$ , ilustrado na Figura 22b, e o grafo  $B_3^2$  munido de uma FDRD  $f_3$  com peso  $6i + 9 = 27$ , tal que:  $f_3(a) = 3$ ,  $f_3(b) = 0$ ,  $f_3(w_3) = 3$ ,  $f_3(z_3) = 0$ , ilustrado na Figura 23b.

Figura 22 – Exemplos de FDRD especiais para os *snarks*  $B_2^1$  e  $B_3^1$ .

(a) *Snark*  $B_2^1$  munido de uma FDRD com peso 21.

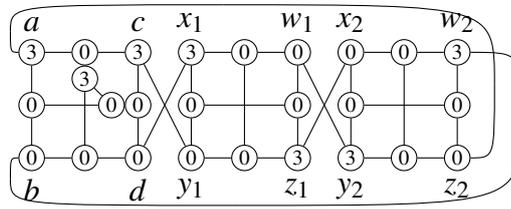


(b) *Snark*  $B_3^1$  munido de uma FDRD com peso 28.

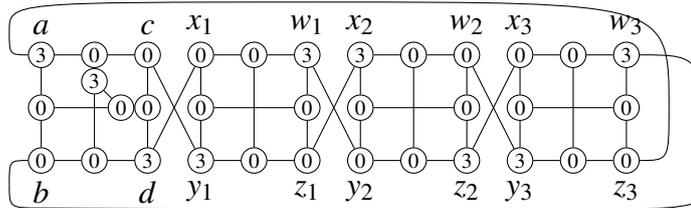


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23 – Exemplos de FDRD especiais para os *snarks*  $B_2^2$  e  $B_3^2$ .  
 (a) *Snark*  $B_2^2$  munido de uma FDRD com peso 21.  
 21.



(b) *Snark*  $B_3^2$  munido de uma FDRD com peso 27.

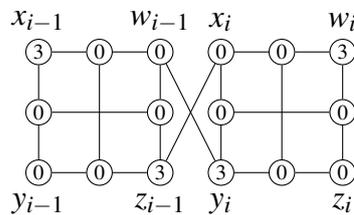


Fonte: Elaborada pelo autor.

**Hipótese de indução forte:** Suponha que todo *snark* de Blanuša generalizado  $B_{i-2}^k$ , possui uma FDRD  $f_{i-2}$  com peso igual a  $6 \cdot (i - 2) + 10$  quando  $k = 1$  e  $i \geq 3$  for ímpar, ou com peso igual a  $6 \cdot (i - 2) + 9$  caso contrário, tal que:  $f_{i-2}(a) = 3$ ,  $f_{i-2}(b) = 0$ ,  $f_{i-2}(w_{i-2}) = 3$ ,  $f_{i-2}(z_{i-2}) = 0$ .

**Passo indutivo:** Seja  $B_i^k$ ,  $i \geq 4$ . Pela construção recursiva dos *snarks* de Blanuša generalizados, sabemos que  $B_i^k$  pode ser obtido através do grafo  $H_i$  e do grafo  $B_{i-2}^k - E_{i-2}^{out}$  por meio da adição das arestas do conjunto  $E_i^{in}$ . A Figura 24 mostra o grafo  $H_i$  com uma rotulação de vértices parcial  $g$ .

Figura 24 – Subgrafo  $H_i$  munido de uma rotulação parcial  $g$ . Note que os vértices  $y_{i-1}$  e  $z_i$  tem rótulo 0 mas não são adjacentes a nenhum vértice com rótulo 3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos definir uma rotulação de vértices  $f_i$  para o *snark*  $B_i^k$  de forma que, para todo vértice  $v \in V(B_i^k)$ :

$$f_i(v) = \begin{cases} f_{i-2}(v) & \text{se } v \in V(B_{i-2}^k); \\ g(v) & \text{se } v \in V(H_i). \end{cases}$$

Pela hipótese de indução, temos que  $f_{i-2}(a) = 3$ ,  $f_{i-2}(b) = 0$ ,  $f_{i-2}(w_{i-2}) = 3$ ,  $f_{i-2}(z_{i-2}) = 0$ . No processo de construção recursiva do *snark*  $B_i^k$  é feita a seguinte operação  $E(B_{i-2}^k) \setminus \{az_{i-2}, bw_{i-2}\}$ . A remoção da aresta  $az_{i-2}$  faz o vértice  $z_{i-2}$ , que tem rótulo 0, ficar sem nenhum vértice vizinho com rótulo 3. Além disso, a remoção da aresta  $bw_{i-2}$  faz o vértice  $b$ , que tem rótulo 0, ficar sem nenhum vértice vizinho com rótulo 3. Na rotulação parcial do subgrafo  $H_i$ ,  $g(y_{i-1}) = 0$  e  $g(z_i) = 0$  e não são adjacentes a nenhum vértice com rótulo 3 em  $H_i$ . Porém, durante o processo de construção recursiva, é feita a adição das arestas  $\{w_{i-2}y_{i-1}, z_{i-2}x_{i-1}, az_i, bw_i\}$ . Note que, pela hipótese de indução  $f_{i-2}(w_{i-2}) = 3$ ,  $f_{i-2}(a) = 3$  e pela rotulação parcial de  $H_i$ , ambos os vértices  $x_{i-1}$  e  $w_i$  possuem rótulo 3. Com a adição das arestas  $\{w_{i-2}y_{i-1}, z_{i-2}x_{i-1}, az_i, bw_i\}$ , os vértices  $y_{i-1}$ ,  $z_{i-2}$ ,  $z_i$ ,  $b$  tornam-se adjacentes a vértices com rótulo 3 no grafo  $B_i^k$ . Ou seja, no final da construção, a rotulação  $f_i$  obtida é de fato uma FDRD. Note que a  $f_i(a) = 3$ ,  $f_i(b) = 0$ ,  $f_i(w_i) = 3$ ,  $f_i(z_i) = 0$ , visto que esses são os rótulos de cada um dos vértices nos subgrafos  $B_{i-2}^k$  e  $H_i$ . O peso de  $f_i$  é dado pela soma dos pesos das rotulações dos subgrafos  $B_{i-2}^k$  e  $H_i$ . Então, se  $k = 1$ ,  $i \geq 5$  ímpar, temos  $\omega(f_i) = \omega(f_{i-2}) + \omega(g) = 6 \cdot (i-2) + 10 + 12 = 6i - 12 + 10 + 12 = 6i + 10$ . Caso contrário, temos  $\omega(f_i) = \omega(f_{i-2}) + \omega(g) = 6 \cdot (i-2) + 9 + 12 = 6i - 12 + 9 + 12 = 6i + 9$ .  $\square$

Mais adiante, no Teorema 12, apresentamos um limitante inferior apertado para o número de dominação romana dupla dos *snarks* de Blanuša generalizados. A fim de apresentar e provar esse resultado, apresentamos a seguir dois resultados que são utilizados na nossa demonstração.

**Lema 10.** *Se  $G$  é um grafo cúbico com  $n$  vértices e  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$  é uma FDRD ótima de  $G$ , então  $n \leq 4|V_3| + |V_2|$  e  $|V_2| \leq (4\gamma_{dR}(G) - 3n)/5$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo cúbico e  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$  uma FDRD ótima de  $G$ . Pela definição de FDRD ótima, temos que  $n = |V_0| + |V_2| + |V_3|$ . Além disso, como  $f$  é ótima, temos que  $\gamma_{dR}(G) = \omega(f) = 2|V_2| + 3|V_3|$ . Este fato implica que

$$|V_2| = \frac{\gamma_{dR}(G) - 2|V_2|}{3}. \quad (4.1)$$

Como  $G$  é cúbico, cada vértice em  $V_3$  é adjacente a no máximo três vértices em  $V_0$ . Assim,  $|V_0| \leq 3|V_3|$ . Logo,  $n = |V_0| + |V_2| + |V_3| \leq 3|V_3| + |V_2| + |V_3| = 4|V_3| + |V_2|$ , ou seja,

$$n \leq 4|V_3| + |V_2|. \quad (4.2)$$

A partir da equação (4.1) e da desigualdade (4.2), temos que  $n \leq 4 \cdot \frac{\gamma_{dR}(G) - 2|V_2|}{3} + |V_2| = \frac{4\gamma_{dR}(G) - 5|V_2|}{3}$ . A partir desta última desigualdade, concluímos que  $|V_2| \leq \frac{4\gamma_{dR}(G) - 3n}{5}$  e o resultado segue.  $\square$

O teorema a seguir determina o número de dominação dos *snarks* de Blanuša generalizados da família  $\mathfrak{B}^1$  e é usado na prova do Teorema 12.

**Teorema 11.** (PEREIRA, 2020) *Seja  $B_i^1$  um grafo da família  $\mathfrak{B}^1$ . Então,*

$$\gamma(B_i^1) = \begin{cases} 2i + 3 & \text{se } i = 1 \text{ ou } i \geq 2 \text{ par;} \\ 2i + 4 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O Teorema 12 determina um limitante inferior para o número de dominação romana dupla dos *snarks* de Blanuša generalizados.

**Teorema 12.** *Seja  $B_i^k$  um snark de Blanuša generalizado com  $k \in \{1, 2\}$  e  $i \geq 1$ . Então,*

$$\gamma_{dR}(B_i^k) \geq \begin{cases} 6i + 10 & \text{se } k = 1, i \geq 3 \text{ e } i \text{ ímpar;} \\ 6i + 9 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 5, sabendo que  $|V(B_i^k)| = 8i + 10$ , temos que  $\gamma_{dR}(B_i^k) \geq \frac{3 \cdot (8i + 10)}{4} = \frac{24i + 30}{4} = 6i + 7.5$ . Como  $\gamma_{dR}(B_i^k)$  é inteiro, então  $\gamma_{dR}(B_i^k) \geq 6i + 8$ .

Seja  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$  uma FDRD ótima de  $B_i^k$ . A prova é dividida em dois casos.

**Caso 1:**  $k = 1$ ,  $i \geq 3$  e  $i$  ímpar. Suponha, por contradição, que  $\gamma_{dR}(B_i^k) \leq 6i + 9$ , então  $\gamma_{dR}(B_i^k) \in \{6i + 8, 6i + 9\}$ . Para  $\gamma_{dR}(B_i^k) = 6i + 8$ , pelo Lema 10,  $|V_2| \leq \frac{4 \cdot (6i + 8) - 3 \cdot (8i + 10)}{5} = \frac{24i + 32 - 24i - 30}{5} = \frac{2}{5}$ , como  $|V_2|$  é inteiro e não negativo, temos  $|V_2| = 0$ . Isso implica que  $\gamma_{dR}(B_i^k)$  é divisível por 3, porém  $6i + 8$  não é divisível por 3, contradição. Para  $\gamma_{dR}(B_i^k) = 6i + 9$ , pelo Lema 10,  $|V_2| \leq \frac{4 \cdot (6i + 9) - 3 \cdot (8i + 10)}{5} = \frac{24i + 36 - 24i - 30}{5} = \frac{6}{5}$ , como  $|V_2|$  é inteiro e não negativo, temos  $|V_2| = 0$  ou  $|V_2| = 1$ . Pelo Teorema 11,  $B_i^k$ , com  $k = 1$  e  $i \geq 3$  e ímpar, possui  $\gamma(B_i^k) = 2i + 4$ . Como supomos que  $\gamma_{dR}(B_i^k) \leq 6i + 9$ , temos que  $\gamma_{dR}(B_i^k) < 3\gamma(B_i^k)$ . Logo  $B_i^k$  não é romano duplo e isso implica que  $|V_2| \neq 0$ . Então  $|V_2| = 1$ . Pelo Lema 10, podemos obter que  $|V_3| \geq \frac{|V(B_i^k) - |V_2||}{4} = \frac{8i + 10 - 1}{4} = 2i + 2.25$ , como  $|V_3|$  é inteiro, temos que  $|V_3| \geq 2i + 3$ . Pela definição

de FDRD,  $\gamma_{dR}(B_i^k) = 2|V_2| + 3|V_3|$ , então  $\gamma_{dR}(B_i^k) \geq 2 \cdot 1 + 3 \cdot (2i + 3) = 2 + 6i + 9 = 6i + 11$ , contradição. Portanto,  $\gamma_{dR}(B_i^k) \geq 6i + 10$ .

**Caso 2:** Caso contrário. Suponha, por contradição que  $\gamma_{dR}(B_i^k) = 6i + 8$ . Pelo Lema 10,  $|V_2| \leq \frac{4 \cdot (6i+8) - 3 \cdot (8i+10)}{5} = \frac{24i+32-24i-30}{5} = \frac{2}{5}$ , como  $|V_2|$  é inteiro e não negativo, temos  $|V_2| = 0$ , isso implica que  $\gamma_{dR}(B_i^k)$  é divisível por 3, porém  $6i + 8$  não é divisível por 3, contradição. Portanto,  $\gamma_{dR}(B_i^k) \geq 6i + 9$ .  $\square$

O próximo resultado determina o número de dominação romana dupla para os *snarks* de Blanuša generalizados.

**Teorema 13.** *Seja  $B_i^k$  um snark de Blanuša generalizado com  $k \in \{1, 2\}$  e  $i \geq 1$ . Então,*

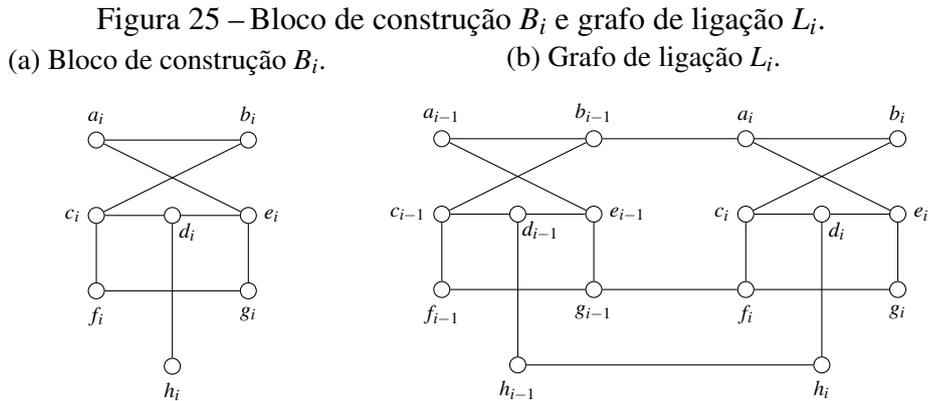
$$\gamma_{dR}(B_i^k) = \begin{cases} 6i + 10 & \text{se } k = 1, i \geq 3 \text{ e } i \text{ ímpar;} \\ 6i + 9 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração.* O resultado segue imediatamente dos Teoremas 9 e 12.  $\square$

## 5 SNARKS DE GOLDBERG

Neste capítulo, apresentamos o nosso estudo da dominação romana dupla para a família dos *snarks* de Goldberg, descoberta em 1981 por M. Goldberg (GOLDBERG, 1981). Da mesma forma que a família dos *snarks*-flor e dos *snarks* de Blanuša generalizados, os membros da família dos *snarks* de Golberg são construídos a partir de subgrafos fixos denominados blocos de construção.

Formalmente, o *bloco de construção*  $B_i$ , ilustrado na Figura 25a, é definido como sendo um grafo que possui o conjunto de vértices  $V(B_i) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i\}$  e o conjunto de arestas  $E(B_i) = \{a_i b_i, a_i e_i, b_i c_i, c_i d_i, c_i f_i, d_i e_i, d_i h_i, e_i g_i, f_i g_i\}$ . O conjunto de *arestas de ligação* que interligam os blocos  $B_j$  e  $B_k$  é dado por  $E_{j,k} = \{b_j a_k, g_j f_k, h_j h_k\}$ . Para a construção recursiva desta família, utilizamos o *grafo de ligação*  $L_i$  com conjunto de vértices  $V(L_i) = V(B_{i-1}) \cup V(B_i)$  e conjunto de arestas  $E(L_i) = E(B_{i-1}) \cup E(B_i) \cup E_{(i-1),i}$ . O grafo de ligação está exibido na Figura 25b.

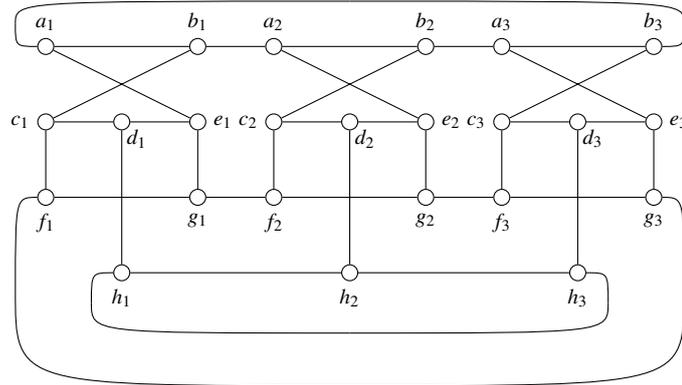


Fonte: Elaborada pelo autor.

A família infinita dos *snarks* de Goldberg é formada pelo conjunto de grafos  $\{G_3, G_5, G_7, \dots\}$ . O menor membro desta família é o *snark*  $G_3$ , que possui conjunto de vértices  $V(G_3) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3)$  e conjunto de arestas  $E(G_3) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup E(B_3) \cup E_{1,2} \cup E_{2,3} \cup E_{3,1}$ . O *snark*  $G_3$  está exibido na Figura 26.

Para cada  $i \geq 5$  e  $i$  ímpar, o grafo  $G_i$  é obtido recursivamente a partir dos grafos  $G_{i-2}$  e  $L_i$  da seguinte forma:

- (i)  $V(G_i) = V(G_{i-2}) \cup V(L_i)$  e
- (ii)  $E(G_i) = E(G_{i-2}) \setminus E_{i-2}^{out} \cup E(L_i) \cup E_i^{in}$ , tal que
  - a)  $E_{i-2}^{out} = E_{(i-2),1}$  e

Figura 26 – *Snark* de Goldberg  $G_3$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$b) E_i^{in} = E_{(i-2),(i-1)} \cup E_{i,1}.$$

Em 2020, Alessandra Pereira (PEREIRA, 2020) determinou o número de dominação para os *snarks* de Goldberg. O resultado obtido pela autora é apresentado abaixo e é usado na demonstração do Teorema 15.

**Teorema 14.** (PEREIRA, 2020) *Seja  $G_i$  um snark de Goldberg com  $i \geq 3$  e  $i$  ímpar. Então,  $\gamma(G_i) = \lceil \frac{11i}{5} \rceil$ .*

A seguir, o Teorema 15 determina um limitante inferior para o número de dominação romana dupla dos *snarks* de Goldberg.

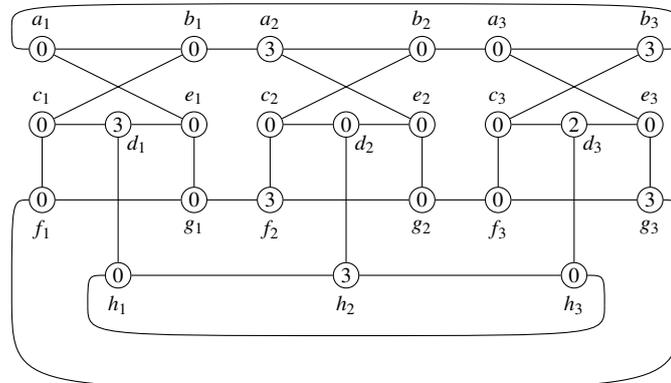
**Teorema 15.** *Seja  $G_i$  um snark de Goldberg com  $i \geq 3$  e  $i$  ímpar. Então,  $\gamma_{dR}(G_i) \geq 6i + 2$ .*

*Demonstração.* O grafo  $G_i$  é formado por  $i$  blocos de construção  $B_i$ , cada bloco possui 8 vértices, portanto  $|V(G_i)| = 8i$ . Pelo Teorema 5, temos que  $\gamma_{dR}(G_i) \geq \frac{3 \cdot 8i}{4} = 6i$ . Suponha, por contradição, que  $\gamma_{dR}(G_i) = 6i$ . Ou seja, existe uma FDRD ótima  $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$  de  $G_i$ , com peso  $6i$ . Pelo Lema 10, temos  $|V_2| \leq \frac{4 \cdot 6i - 3 \cdot 8i}{5} = 0$ , portanto  $|V_2| = 0$ . Além disso, sabemos que, como  $f$  é uma FDRD ótima  $f$  de  $G_i$ , temos que  $V_2 \cup V_3$  é um conjunto dominante em  $G_i$ . Dessa forma,  $V_2 = \emptyset$  e apenas  $V_3$  faz parte do conjunto dominante. Pelo Teorema 14, o menor conjunto dominante no grafo  $G_i$  tem tamanho igual a  $\lceil \frac{11i}{5} \rceil$  e, pelo Lema 4,  $|V_3| = \lceil \frac{11i}{5} \rceil$ . Com isso,  $\gamma_{dR}(G_i) = 3 \cdot \lceil \frac{11i}{5} \rceil > 6i$ , contradição. Agora, vamos supor, por contradição, que  $\gamma_{dR}(G_i) = 6i + 1$ . Pelo Lema 10, temos  $|V_2| \leq \frac{4 \cdot (6i+1) - 3 \cdot 8i}{5} = \frac{4}{5}$ , como  $|V_2|$  é inteiro, temos  $|V_2| = 0$ , o que implica que  $\gamma_{dR}(G_i)$  é divisível por 3, mas  $6i + 1$  não é divisível por 3, contradição. Portanto,  $\gamma_{dR}(G_i) \geq 6i + 2$ .  $\square$

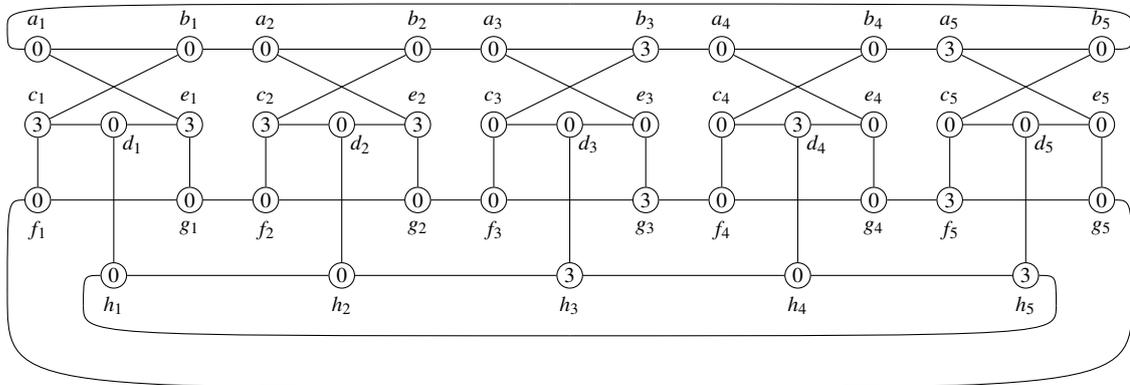
O Teorema 16 determina um limitante superior para o número de dominação romana dupla dos *snarks* de Goldberg.

Figura 27 – *Snarks*  $G_3$  e  $G_5$  cada um com uma FDRD.

(a) *Snark* de Goldberg  $G_3$  com uma FDRD  $\phi_3$  com peso 20.



(b) *Snark* de Goldberg  $G_5$  com uma FDRD  $\phi_5$  com peso 33.



Fonte: Elaborada pelo autor.

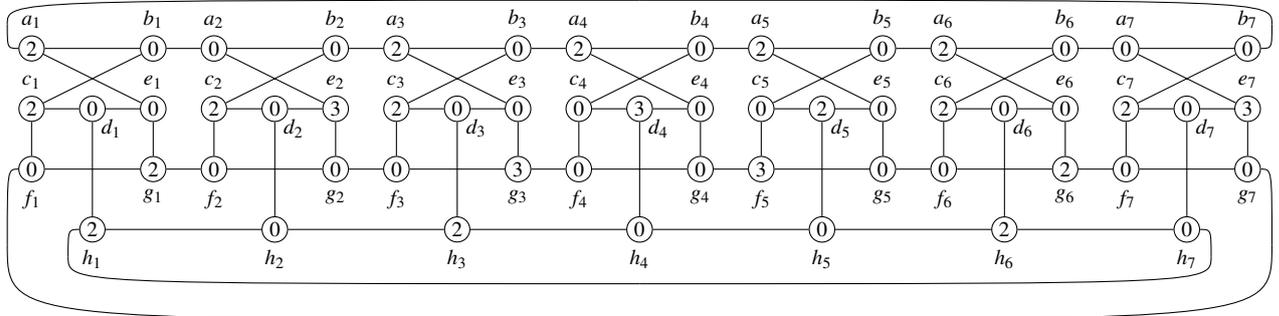
**Teorema 16.** *Seja  $G_i$  um snark de Goldberg. Para  $i = 3$ , temos  $\gamma_{dR}(G_3) = 20$ . Para  $i = 5$ , temos  $\gamma_{dR}(G_5) \leq 33$ . Para  $i \geq 7$  e  $i$  ímpar temos  $\gamma_{dR}(G_i) \leq \frac{13i+3}{2}$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, mostramos os casos  $i = 3$  e  $i = 5$ . O fato que  $\gamma_{dR}(G_3) \geq 20$  segue do Teorema 15 e mostramos que  $G_3$  possui uma FDRD ótima  $\phi_3$  com peso igual a 20 na Figura 27a. Portanto, temos que  $\gamma_{dR}(G_3) = 20$ . Além disso, mostramos que  $G_5$  possui uma FDRD  $\phi_5$  com peso igual a 33 na Figura 27b.

Para os demais *snarks* da família, a prova é por indução em  $i$ , baseada na construção recursiva da família. A seguir, provamos por indução em  $i$ , que todo *snark*  $G_i$  com  $i \geq 7$  e  $i$  ímpar, possui uma FDRD  $\phi_i$  com peso igual a  $\frac{13i+3}{2}$ , tal que  $\phi_i(a_1) = 2$ ,  $\phi_i(f_1) = 0$ ,  $\phi_i(h_1) = 2$ ,  $\phi_i(b_i) = 0$ ,  $\phi_i(g_i) = 0$ ,  $\phi_i(h_i) = 0$ , além disso, o vértice  $f_1$  é adjacente a dois vértices com rótulo 2,  $c_1$  e  $g_1$ ; o vértice  $b_i$  é adjacente a dois vértices com rótulo 2,  $a_1$  e  $c_i$ ; o vértice  $g_i$  é adjacente ao vértice  $e_i$  que possui rótulo 3 e o vértice  $h_i$  é adjacente a dois vértices com rótulo 2,  $h_{i-1}$  e  $h_1$ . Chamamos uma FDRD  $\phi_i$  de  $G_i$  que respeita essas propriedades de *especial*.

**Caso base:** Seja  $i = 7$ . A Figura 28 exibe o *snark*  $G_7$  com uma FDRD especial  $\phi_7$  com peso igual a  $\frac{13 \cdot 7 + 3}{2} = 47$ .

Figura 28 – *Snark*  $G_7$  munido de uma FDRD com peso 47.

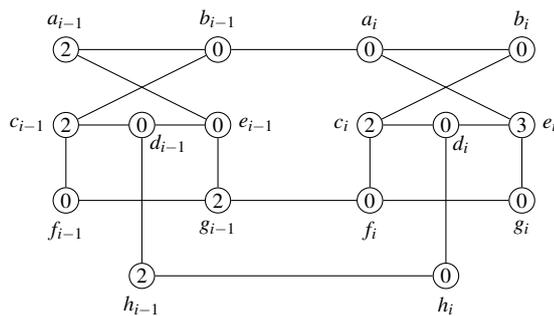


Fonte: Elaborada pelo autor.

**Hipótese de indução:** Para  $i \geq 9$  e  $i$  ímpar, suponha que o *snark* de Goldberg  $G_{i-2}$  possui uma FDRD especial  $\phi_{i-2}$  com peso igual a  $\frac{13 \cdot (i-2) + 3}{2}$ .

**Passo indutivo:** Seja  $G_i$ ,  $i \geq 9$ . Pela construção recursiva da família dos *snarks* de Goldberg, sabemos que  $G_i$  pode ser obtido a partir do grafo de ligação  $L_i$  e do grafo  $G_{i-2} - E_{i-2}^{out}$  e por meio da adição das arestas do conjunto  $E_i^{in}$ . A Figura 29 mostra o grafo  $L_i$  com uma rotulação parcial  $\phi$ .

Figura 29 – Grafo  $L_i$  munido de uma rotulação parcial  $\phi$  com peso 13. Note que os vértices  $h_i$  e  $b_i$  não são adjacentes a vértices com rótulo 3 e são adjacentes a apenas um vértice com rótulo 2. Por outro lado, o vértice  $g_i$  é adjacente a um vértice com rótulo 3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos definir uma rotulação  $\phi_i$  para o *snark* de Goldberg  $G_i$  de forma que, para todo vértice  $v \in V(G_i)$ :

$$\phi_i(v) = \begin{cases} \phi_{i-2}(v) & \text{se } v \in V(G_{i-2}); \\ \phi(v) & \text{se } v \in V(L_i). \end{cases}$$

Pela hipótese de indução, temos que  $\phi_{i-2}(a_1) = 2$ ,  $\phi_{i-2}(f_1) = 0$ ,  $\phi_{i-2}(h_1) = 2$ ,  $\phi_{i-2}(b_{i-2}) = 0$ ,  $\phi_{i-2}(g_{i-2}) = 0$ ,  $\phi_{i-2}(h_{i-2}) = 0$ . Na construção recursiva do *snark*  $G_i$  é feita a seguinte operação  $E(G_{i-2}) \setminus \{b_{i-2}a_1, g_{i-2}f_1, h_{i-2}h_1\}$ . A remoção da aresta  $b_{i-2}a_1$  deixa o vértice  $b_{i-2}$  que tem rótulo 0, ficar com apenas um vértice vizinho de rótulo 2 e os demais vértices vizinhos têm rótulo 0. Ademais, a remoção da aresta  $h_{i-2}h_1$  faz o vértice  $h_{i-2}$  que tem rótulo 0, ficar com apenas um vértice vizinho de rótulo 2 e os demais vértices vizinhos têm rótulo 0. Na rotulação parcial  $\varphi$  do grafo  $L_i$ ,  $\varphi(b_i) = 0$  e  $\varphi(h_i) = 0$  e estes vértices são adjacentes a apenas um vértice com rótulo 2 cada, os demais vizinhos de ambos têm rótulo 0. Porém, durante a construção recursiva, é feita a adição das arestas  $E_i^{in} = \{b_{i-2}a_{i-1}, g_{i-2}g_{i-1}, h_{i-2}h_{i-1}, b_i a_1, g_i f_1, h_i h_1\}$ . Pela hipótese de indução  $\phi(a_1) = 2$ ,  $\phi(h_1) = 2$  e pela rotulação parcial de  $L_i$ , ambos os vértices  $a_{i-1}$  e  $h_{i-1}$  possuem rótulo 2. Note que, com a adição das arestas  $E_i^{in}$  os vértices  $b_{i-2}, h_{i-2}, b_i, h_i$  passam a serem adjacentes a dois vértices com rótulo 2 cada. Ou seja, no final da construção recursiva, a rotulação  $\phi_i$  obtida é uma FDRD e pelo fato de  $\phi_i(a_1) = 2$ ,  $\phi_i(f_1) = 0$ ,  $\phi_i(h_1) = 2$ ,  $\phi_i(b_i) = 0$ ,  $\phi_i(g_i) = 0$ ,  $\phi_i(h_i) = 0$ , além disso, o vértice  $f_1$  é adjacente a dois vértices com rótulo 2,  $c_1$  e  $g_1$ ; o vértice  $b_i$  é adjacente a dois vértices com rótulo 2,  $a_1$  e  $c_i$ ; o vértice  $g_i$  é adjacente ao vértice  $e_i$  que possui rótulo 3 e o vértice  $h_i$  é adjacente de dois vértices com rótulo 2,  $h_{i-1}$  e  $h_1$ , temos que  $\phi_i$  é uma FDRD especial. O peso de  $\phi_i$  é dado pela soma dos pesos de  $\phi_{i-2}$  e  $\varphi$ . Então,  $\omega(\phi_i) = \omega(\phi_{i-2}) + \omega(\varphi) = \frac{13 \cdot (i-2) + 3}{2} + 13 = \frac{13i - 26 + 3 + 26}{2} = \frac{13i + 3}{2}$ .  $\square$

## 6 SNARKS DE LOUPEKINE

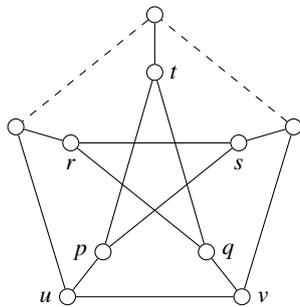
Neste capítulo, apresentamos a construção da família infinita dos *snarks* de Loupekine, em seguida determinamos limitantes superior e inferior para o número de dominação romana dupla para esta família.

A família dos *snarks* de Loupekine foi apresentada, em 1976, por Isaacs (ISAACS, 1976), utilizando um método de construção desenvolvido por F. Loupekine. Existem duas subfamílias de *snarks* de Loupekine que são frequentemente investigadas na literatura (KARAM; CAMPOS, 2014) e (COSTA; LUIZ, 2020), que são as famílias dos *snarks*  $LP_0$  e dos *snarks*  $LP_1$ , ambas obtidas por meio de *blocos de construção*. Nos próximos parágrafos, descrevemos como são construídos os *snarks* de Loupekine, tanto os *snarks*  $LP_0$  quanto os *snarks*  $LP_1$ .

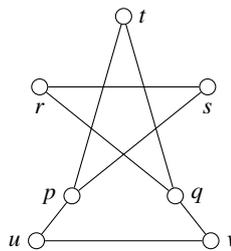
Dado um grafo de Petersen  $G$ , obtemos um novo grafo  $B(G)$  removendo os vértices de um caminho  $P_3$  qualquer de  $G$ , como ilustrado nas Figuras 30a e 30b. A cada vértice do grafo  $B(G)$  assim obtido, anexamos um índice  $i$  e o grafo resultante é denominado *bloco de construção*, denotado por  $B_i$ , como ilustrado na Figura 30c.

Figura 30 – Obtenção do bloco de construção a partir do grafo de Petersen.

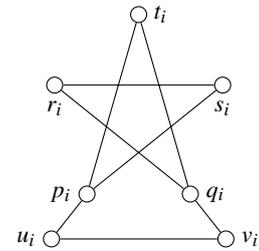
(a) Grafo de Petersen  $G$ .



(b) Bloco  $G(B)$ .



(c) Bloco de construção  $B_i$ .



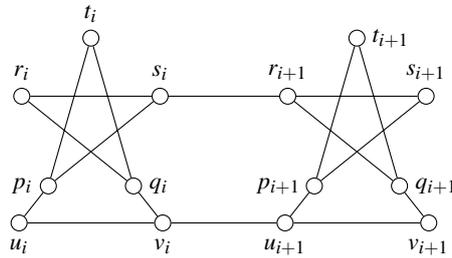
Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja  $k \geq 3$  um inteiro ímpar. Um *snark* de Loupekine é formado por  $k$  blocos de construção  $B_0, B_1, \dots, B_{k-1}$ . Para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , definimos o conjunto de *arestas de ligação*  $E_{i,i+1}$  que pode conter *arestas diretas*, que são as arestas pertencentes ao conjunto  $\{s_i r_{i+1}, v_i u_{i+1}\}$ , ou *arestas cruzadas*, que são as arestas pertencentes ao conjunto  $\{s_i u_{i+1}, v_i r_{i+1}\}$ . Um bloco  $B_i$  liga-se com um bloco  $B_{i+1}$  (índices módulo  $k$ ), por meio das arestas de ligação. A Figura 31 mostra a diferença entre as arestas de ligação diretas e arestas de ligação cruzadas.

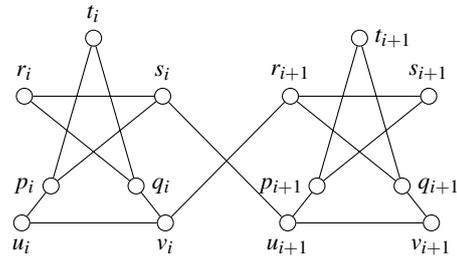
O conjunto dos blocos de construção é particionado em partes de dois ou três blocos. Para as partes de dois blocos  $B_j$  e  $B_l$ , adicionamos a aresta  $t_j t_l$  conectando assim os vértices

Figura 31 – Diferença entre arestas diretas e cruzadas.

(a) Ligação de blocos consecutivos por meio de arestas diretas.



(b) Ligação de blocos consecutivos por meio de arestas cruzadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$t_j \in V(B_j)$  e  $t_l \in V(B_l)$ . Para as partes de três blocos  $B_j, B_l$  e  $B_m$ , criamos um novo vértice  $z_j$ , denominado *vértice de ligação* e adicionamos as arestas  $t_j z_j, t_l z_j, t_m z_j$  conectando  $z_j$  aos vértices  $t_j \in V(B_j), t_l \in V(B_l)$  e  $t_m \in V(B_m)$ . Cada particionamento possível do conjunto de blocos de construção forma um grafo diferente. Todos os grafos obtidos por meio de uma partição do conjunto de blocos em que cada parte é formada apenas por blocos de índices consecutivos formam os *snarks*  $LP_0$ , os grafos restantes formam os *snarks*  $LP_1$ . A Figura 32a exibe um *snark* de Loupekine  $LP_0$  e a Figura 32b exibe um *snark* de Loupekine  $LP_1$ , ambos com cinco blocos de construção.

A seguir, definimos dois subgrafos que aparecem na construção dos *snarks*  $LP_0$ , que serão úteis para demonstrar um limitante superior para o número de dominação romana dos *snarks* da subfamília  $LP_0$ . O primeiro subgrafo é chamado *gadget duplo* de  $G$ , denotado por  $G^2$  e exibido na Figura 33a, que possui conjunto de vértices  $V(G^2) = V(B_j) \cup V(B_{j+1})$  e conjunto de arestas  $E(G^2) = E(B_j) \cup E(B_{j+1}) \cup E_{j,j+1}$  (índices módulo  $k$ ). O segundo subgrafo é chamado *gadget triplo* de  $G$ , denotado por  $G^3$  e exibido na Figura 33b, que possui conjunto de vértices  $V(G^3) = V(B_l) \cup V(B_{l+1}) \cup V(B_{l+2}) \cup \{z_l\}$  e conjunto de arestas  $E(G^3) = E(B_l) \cup E(B_{l+1}) \cup E(B_{l+2}) \cup E_{l,l+1} \cup E_{l+1,l+2} \cup \{t_l z_l, t_{l+1} z_l, t_{l+2} z_l\}$  (índices módulo  $k$ ).

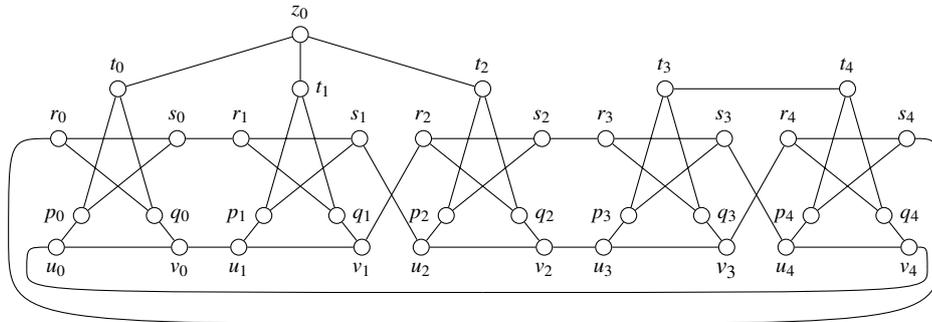
O Teorema 17 determina um limitante superior para o número de dominação romana dupla para a família  $LP_0$  dos *snarks* de Loupekine.

**Teorema 17.** *Seja  $G$  um snark  $LP_0$  dos snarks de Loupekine, com  $k$  blocos de construção, sendo  $k \geq 3$  e ímpar. Então,  $\gamma_{dR}(G) \leq 6k$ .*

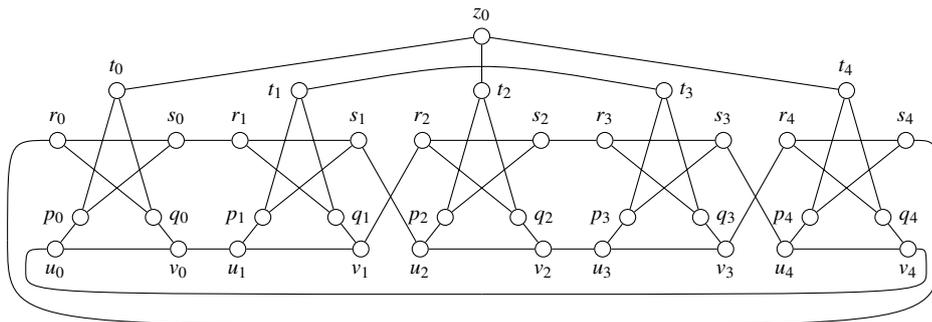
*Demonstração.* Seja  $y \in \{2, 3\}$  e  $x \geq 1$ . Pela própria definição do *snark*  $G$ , segue que  $G$  é formado pela união disjunta de  $x$  gadgets  $G_1^y, \dots, G_x^y$ , tal que  $G_i^y$  é um gadget duplo quando  $y = 2$  ou é um gadget triplo quando  $y = 3$ . As Figuras 34a e 34b exibem rotulações  $g^2$  e  $g^3$  para  $G_i^2$  e

Figura 32 – Exemplos de *snarks* de Loupekine  $LP_0$  e  $LP_1$  com cinco blocos de construção cada.

(a) Exemplo de *snark*  $LP_0$  com cinco blocos de construção. Note que os blocos consecutivos  $B_0, B_1, B_2$  formam uma parte com três blocos, todos conectados ao vértice de ligação  $z_0$ , e os blocos consecutivos  $B_3$  e  $B_4$  formam uma parte com dois blocos.



(b) Exemplo de *snark*  $LP_1$  com cinco blocos de construção. Note que os blocos  $B_0, B_2, B_4$  formam uma parte com três blocos, todos conectados ao vértice de ligação  $z_0$ , e os blocos  $B_1$  e  $B_3$  formam uma parte com dois blocos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

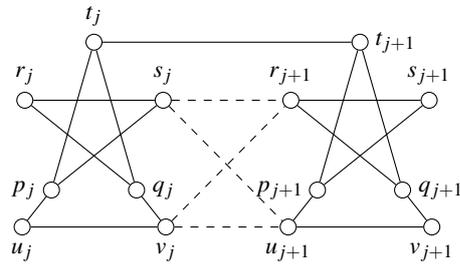
$G_i^3$ , respectivamente. Em ambas as rotulações, todos os vértices com rótulo 0 têm pelo menos um vizinho com rótulo 3 e portanto essas rotulações são FDRDs.

Como  $G$  é formado pela união disjunta de gadgets duplos e triplos unidos por arestas de ligação, e as rotulações  $g^2$  e  $g^3$  são FDRDs, então definimos uma FDRD  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  para  $G$  da seguinte forma: para todos os gadgets  $G_i^y$  de  $G$ , com  $1 \leq i \leq x$  e  $y \in \{2, 3\}$ , e para todo  $v \in V(G_i^y)$ ,  $f(v) = g^y(v)$ . Dessa forma, o peso de  $f$  é dado pela soma dos pesos dos gadgets que compõem  $G$ . Seja  $k = 2p_2 + 3p_3$ , onde  $p_2$  é o número de gadgets duplos e  $p_3$  o número de gadgets triplos. Temos, que  $\omega(f) = \omega(g^2) \cdot p_2 + \omega(g^3) \cdot p_3 = 12p_2 + 18p_3 = 6 \cdot (2p_2 + 3p_3) = 6k$ .  $\square$

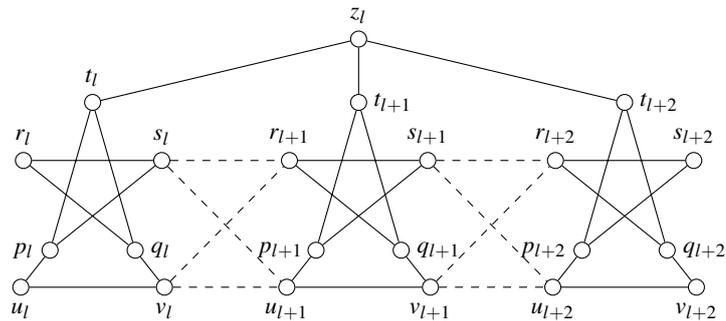
O Teorema 18 determina um limitante superior para o número de dominação romana dupla para a família  $LP_1$  dos *snarks* de Loupekine.

Figura 33 – Gadgets duplo e triplo. As arestas tracejadas representam os possíveis pares de aresta de ligação definidos anteriormente.

(a) Gadget duplo.



(b) Gadget triplo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Teorema 18.** *Seja  $G$  um snark  $LP_1$  dos snarks de Loupekiné, com  $k$  blocos de construção e  $\sigma$  vértices de ligação, sendo  $k \geq 3$ ,  $k$  ímpar e  $\sigma \geq 1$ . Então,  $\gamma_{dR}(G) \leq 6k + 2\sigma$ .*

*Demonstração.* O grafo  $G$  é formado pela união disjunta de  $k$  blocos de construção dispostos em ordem cíclica e conectados consecutivamente por meio de arestas de ligação. Seja  $1 \leq i \leq k$ . Para cada  $i$  construímos uma função de dominação romana dupla  $g_i$  para o bloco de construção  $B_i$ , com peso 6, que está definida na Figura 35. Note que, sob a função  $g_i$ , todos os vértices em  $B_i$  com rótulo 0 são vizinhos de pelo menos um vértice em  $B_i$  com rótulo 3, portanto  $g_i$  é uma FDRD.

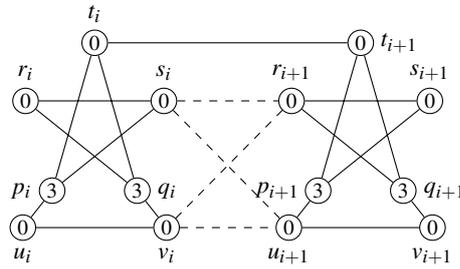
Definimos uma rotulação de vértices  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  para  $G$  da seguinte forma: para todo vértice  $v \in V(G)$ , temos

$$f(v) = \begin{cases} g_i(v) & \text{se } v \in B_i; \\ 2 & \text{se } v \text{ é um vértice de ligação.} \end{cases}$$

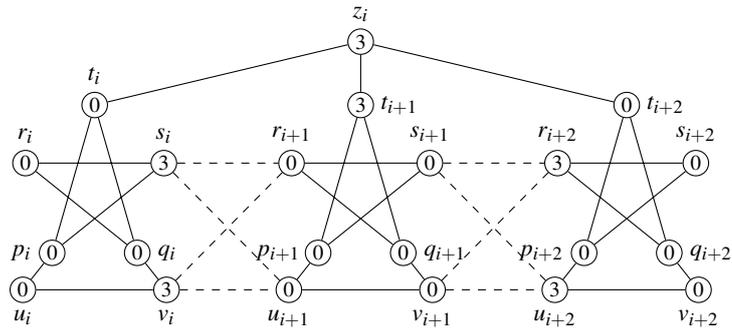
Dessa forma o peso de  $f$  é dado pela soma dos pesos de cada FDRD  $g_i$ , somado com  $2 \cdot \sigma$ . Então,  $\omega(f) = \sum_{i=1}^k (\omega(g_i)) + 2\sigma = \sum_{i=1}^k (6) + 2\sigma = 6k + 2\sigma$ .

Agora que temos o peso da função  $f$ , basta mostrar que ela é uma FDRD de  $G$ . Pela rotulação  $g_i$  apresentada na Figura 35, temos que todos os vértices com rótulo 0 pertencentes ao

Figura 34 – Gadgets duplo e triplo rotulados. Note que as rotulações são FDRDs.  
 (a) Rotulação  $g^2$  para  $G_i^2$  com peso igual a 12.

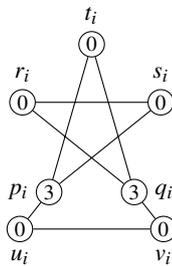


(b) Rotulação  $g^3$  para  $G_i^3$  com peso igual a 18.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Bloco de construção  $B_i$  com uma FDRD ótima  $g_i$  com peso igual 6.



Fonte: Elaborada pelo autor.

bloco  $B_i$  de  $G$ , são adjacentes a pelo menos um vértice com rótulo 3 pertencente ao bloco  $B_i$ . Os vértices restantes em  $G$  são os vértices de ligação, que não são adjacentes a nenhum vértice com rótulo 3, porém todos os vértices de ligação possuem rótulo 2. Portanto a função  $f$  é de fato uma FDRD com peso  $6k + 2\sigma$ . □

O Corolário 19 determina um limitante inferior para os *snarks* de Loupekine das famílias  $LP_0$  e  $LP_1$ .

**Corolário 19.** *Seja  $G$  um snark  $LP_0$  ou  $LP_1$  dos snarks de Loupekine, formado por  $k$  blocos de construção e  $\sigma$  vértices de ligação, sendo  $k \geq 3$  e ímpar. Então,  $\gamma_{DR}(G) \geq \frac{21k+3\sigma}{4}$ .*

*Demonstração.* O grafo  $G$  possui  $7k + \sigma$  vértices. Pelo Teorema 5, então  $\gamma_{dR}(G) \geq \frac{3 \cdot (7k + \sigma)}{4} = \frac{21k + 3\sigma}{4}$ .  $\square$

## 7 NÚMERO DE DOMINAÇÃO ROMANA DUPLA CONTRA O NÚMERO DE DOMINAÇÃO ROMANA DUPLA INDEPENDENTE EM GRAFOS CÚBICOS

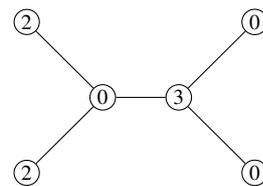
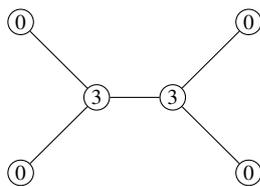
Neste capítulo, será abordada uma variação de dominação romana dupla, denominada dominação romana dupla independente.

Dado um grafo  $G$ , um conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$  é dito *conjunto independente* se nenhum par de vértices em  $X$  é adjacente. Um *conjunto dominante independente* de um grafo  $G$  é o conjunto de vértices independente  $S \subseteq V(G)$  tal que, todo vértice em  $V(G) - S$  é adjacente a pelo menos um vértice em  $S$ . Um *conjunto dominante independente mínimo* de um grafo  $G$  é o menor conjunto dominante independente do grafo  $G$ . O *número de dominação independente* de um grafo  $G$  é igual a cardinalidade de algum conjunto dominante independente mínimo do grafo  $G$  e é denotado por  $i(G)$ .

Uma *função de dominação romana dupla independente* (FDRDI)  $f: V(G) \rightarrow \{0, 2, 3\}$  de um grafo  $G$  é definida, de forma que, todo vértice  $v$  com  $f(v) = 0$  é vizinho de pelo menos um vértice  $u$  com  $f(u) = 3$  ou é vizinho de dois vértices  $u_1$  e  $u_2$  com  $f(u_1) = f(u_2) = 2$ ; e o conjunto dos vértices com rótulo 2 ou 3 formam um conjunto independente em  $G$ . Da mesma forma que uma FDRD, uma FDRDI  $f$  pode ser definida alternativamente, para facilitar manipulações matemáticas, como  $f = (V_0, V_2, V_3)$ , onde  $V_i$  é o conjunto dos vértices de  $V(G)$  no qual todos os vértices de  $V_i$  tem rótulo  $i$ . Como todos os vértices no conjunto  $V(G) \setminus (V_2 \cup V_3)$  têm pelo menos um vizinho em  $V_2 \cup V_3$ , temos que  $V_2 \cup V_3$  é um conjunto dominante no grafo. O *peso*  $\omega(f)$  de uma FDRDI é igual a  $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ . O *número de dominação romana dupla independente* de  $G$  é dado por  $\min\{\omega(f) : f \text{ é uma FDRDI de } G\}$ , denotado por  $i_{dR}(G)$ . Uma FDRDI de um grafo  $G$  com peso igual ao  $i_{dR}(G)$  é dita *FDRDI ótima*. Além disso, o peso de uma FDRDI ótima  $f$  de  $G$  é  $\omega(f) = i_{dR}(G) = 2|V_2| + 3|V_3|$ . As Figuras 36a e 36b, exibem um grafo  $G$  com uma FDRD ótima e uma FDRDI ótima respectivamente.

Figura 36 – Mesmo grafo mostrando uma FDRD ótima diferente de uma FDRDI ótima.

(a) Grafo  $G$  com uma FDRD ótima com peso 6. (b) Grafo  $G$  com uma FDRDI ótima com peso 7.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O lema a seguir é semelhante ao Lema 10, e mostra a relação entre o peso de uma

FDRDI ótima  $f = (V_0, V_2, V_3)$  e o tamanho do conjunto  $V_2$  em um grafo cúbico.

**Lema 20.** *Se  $G$  é um grafo cúbico com  $n$  vértices e  $f = (V_0, V_2, V_3)$  é uma FDRDI ótima de  $G$ , então  $n \leq 4|V_3| + |V_2|$  e  $|V_2| \leq (4i_{dR}(G) - 3n)/5$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo cúbico com  $n$  vértices e  $f = (V_0, V_2, V_3)$  uma FDRDI ótima de  $G$ . Pela definição de FDRDI ótima, temos que  $n = |V_0| + |V_2| + |V_3|$ . Além disso, como  $f$  é ótima, temos que  $i_{dR}(G) = \omega(f) = |V_2| + 3|V_3|$ . Este fato implica que

$$|V_3| = \frac{i_{dR}(G) - 2|V_2|}{3}. \quad (7.1)$$

Como  $G$  é cúbico, cada vértice em  $V_3$  é adjacente a no máximo três vértices em  $V_0$ . Assim,  $|V_0| \leq 3|V_3|$ . Logo,  $n = |V_0| + |V_2| + |V_3| \leq 3|V_3| + |V_2| + |V_3| = 4|V_3| + |V_2|$ , ou seja,

$$n \leq 4|V_3| + |V_2|. \quad (7.2)$$

A partir da equação (7.1) e da desigualdade (7.2), temos que  $n \leq 4 \cdot \frac{i_{dR}(G) - 2|V_2|}{3} + |V_2| = \frac{4i_{dR}(G) - 5|V_2|}{3}$ . A partir desta última desigualdade, concluímos que  $|V_2| \leq \frac{4i_{dR}(G) - 3n}{5}$  e o resultado segue.  $\square$

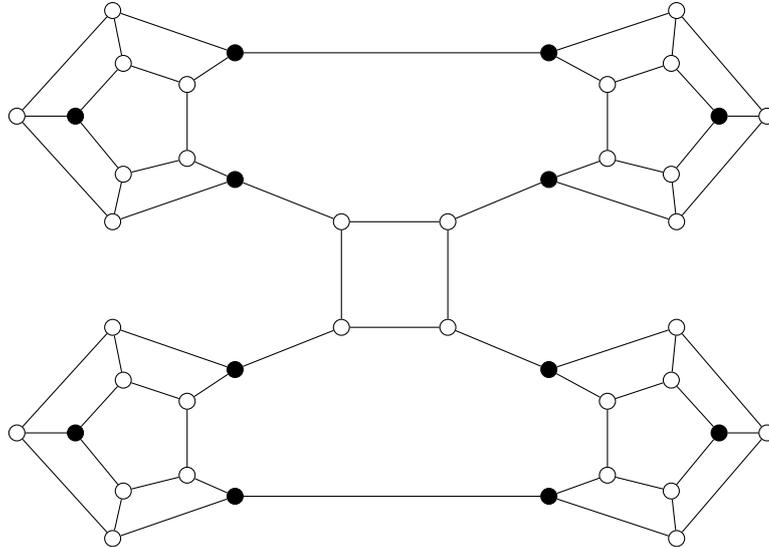
Durante a pesquisa, foi notado um padrão comum às funções de dominação romana dupla ótimas dos *snarks*-flor e dos *snarks* de Blanuša generalizados investigados neste trabalho. O número de dominação romana dupla  $\gamma_{dR}(G)$  era sempre igual ao número de dominação romana dupla independente  $i_{DR}(G)$ . Com isso, suspeitamos que todo grafo cúbico  $G$  pudesse ter  $\gamma_{dR}(G) = i_{dR}(G)$ . Após tentar provar esta nossa conjectura inicial e não alcançar sucesso, encontramos o artigo de Barefoot et al. (BAREFOOT *et al.*, 1991) que mostra um grafo cúbico, cujo número de dominação é diferente do número de dominação independente. A partir dessa descoberta, conseguimos provar que esse grafo cúbico do artigo é um contraexemplo para a nossa suposição inicial de que todo grafo cúbico  $G$  tem  $\gamma_{dR}(G) = i_{dR}(G)$ . O grafo em questão é o grafo  $H$  que está mostrado com um conjunto dominante mínimo e um conjunto dominante independente mínimo, nas Figuras 37a e 37b. Além disso, as Figuras 38a e 38b mostram uma FDRD e uma FDRDI ótima para o grafo  $H$ .

Como mostrado por Barefoot et al. (BAREFOOT *et al.*, 1991), temos que  $\gamma(H) = 12$  e  $i(H) = 13$  e  $n = |V(H)| = 44$ . A partir dessas informações, será mostrado que  $\gamma_{dR}(H) \neq i_{dR}(H)$ .

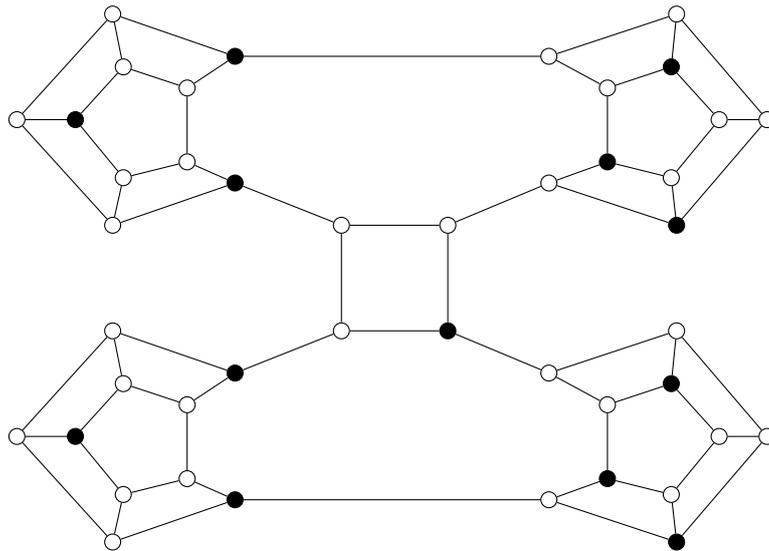
**Teorema 21.** *Seja  $H$  o grafo ilustrado na Figura 37a. Então, temos que  $\gamma_{dR}(H) \neq i_{dR}(H)$ .*

Figura 37 – Grafo  $H$  com um conjunto dominante mínimo e um conjunto dominante independente mínimo.

(a) Grafo  $H$  com conjunto dominante mínimo de tamanho 12.



(b) Grafo  $H$  com conjunto dominante independente mínimo de tamanho 13.

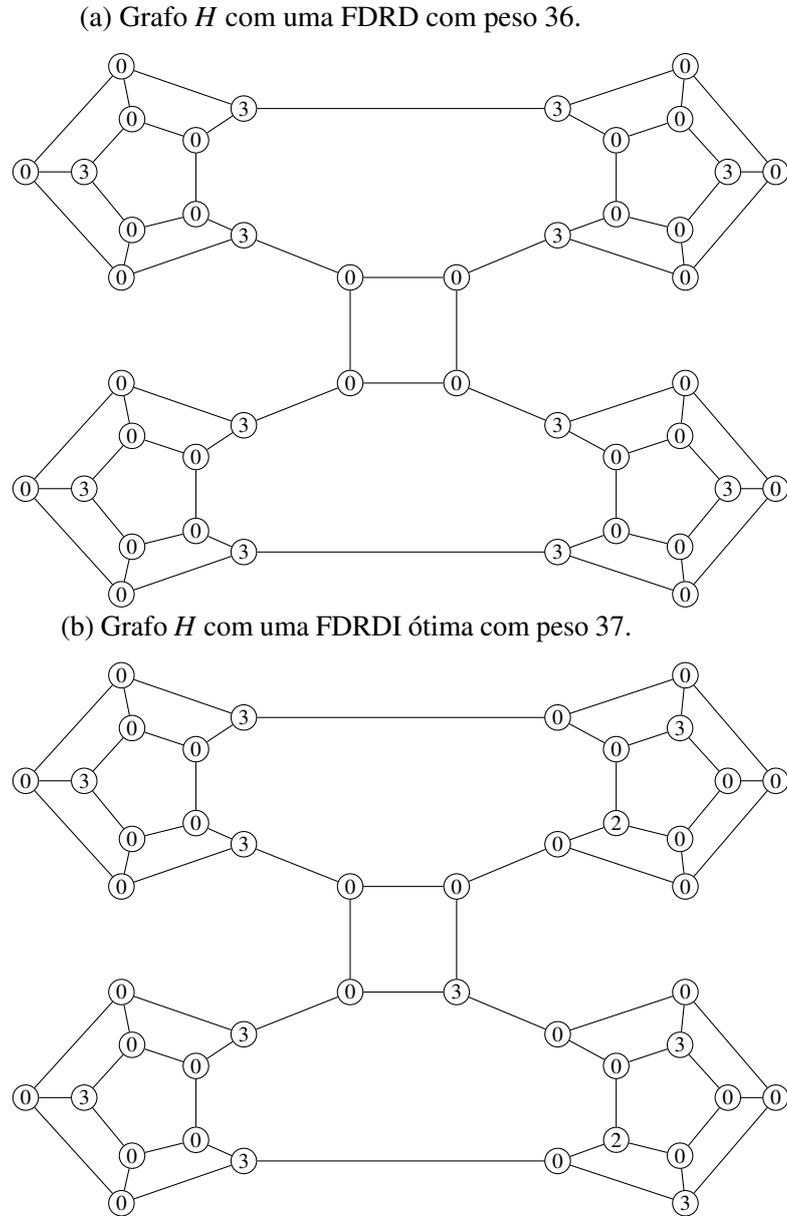


Fonte: Elaborada pelo autor.

*Demonstração.* Como provado no trabalho de Barefoot et al. (BAREFOOT *et al.*, 1991),  $\gamma(H) = 12$ . Pelo Teorema 3, temos que  $\gamma_{dR}(H) \leq 3 \cdot 12 = 36$ . Queremos, então, provar que  $i_{dR}(H) \geq 37$ . Suponha, por contradição, que existe uma FDRDI  $f = (V_0, V_2, V_3)$  de  $H$  com peso 36, ou seja  $i_{dR}(H) \leq 36$ . Pelo Lema 20, temos que  $|V_2| \leq \frac{4 \cdot 36 - 3 \cdot 44}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$ . Como  $|V_2|$  é inteiro, temos que  $|V_2| \leq 2$ . Sabendo disso e que  $i(H) = 13$ , obtemos que  $|V_2 \cup V_3| \geq 13$  para qualquer FDRDI de  $G$ . A seguir, dividimos o restante da prova em três casos, dependendo dos possíveis valores de  $|V_2|$ .

1. **Caso 1:**  $|V_2| = 2$ . Isso implica que  $|V_3| \geq 11$ . Dessa forma,  $i_{dR}(H) = 2 \cdot |V_2| + 3 \cdot |V_3| \geq$

Figura 38 – Grafo  $H$  com uma FDRD com peso 36 e uma FDRDI ótima com peso 37.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 11 = 37$ , contradição.

2. **Caso 2:**  $|V_2| = 1$ . Isso implica que  $|V_3| \geq 12$ . Dessa forma,  $i_{dR}(H) = 2 \cdot |V_2| + 3 \cdot |V_3| \geq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 12 = 38$ , contradição.
3. **Caso 3:**  $|V_2| = 0$ . Isso implica que  $|V_3| \geq 13$ . Dessa forma,  $i_{dR}(H) = 2 \cdot |V_2| + 3 \cdot |V_3| \geq 2 \cdot 0 + 3 \cdot 13 = 39$ , contradição.

Portanto,  $i_{dR}(H) > 36$ , logo  $i_{dR}(H) \neq \gamma_{dR}(H)$ . □

## 8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Como vimos ao longo deste trabalho, os problemas acerca das diversas variantes de dominação em grafos são estudados até o presente momento. A contribuição deste trabalho para a teoria dos grafos foi feita através do estudo do número de dominação romana dupla, para algumas famílias de grafos *snarks*, sendo elas: *snarks*-flor, *snarks* de Blanuša generalizados, *snarks* de Goldberg e *snarks* de Loupekine.

Neste trabalho, determinamos o número de dominação romana dupla para os *snarks*-flor e para os *snark* de Blanuša generalizados. Assim como também determinamos limitantes superiores e inferiores para o número de dominação romana dupla para os *snarks* de Goldberg e Loupekine. A Tabela 1 exibe as classes de *snarks* estudadas e os resultados acerca dos parâmetros  $\gamma(G)$ ,  $\gamma_R(G)$  e  $\gamma_{dR}(G)$ .

Tabela 1 – Resultados para os parâmetros  $\gamma(G)$ ,  $\gamma_R(G)$  e  $\gamma_{dR}(G)$  das classes de *snarks* estudadas neste trabalho.

Classes	$\gamma(G)$	$\gamma_R(G)$	$\gamma_{dR}(G)$ (Nossa contribuição)
Snarks-flor $F_i$	$i$ (PEREIRA, 2020)	$2i$ (MAKSIMOVIC <i>et al.</i> , 2018)	$3i$
Snarks de Blanuša $\mathfrak{B}_i^1$	$2i + 3$ , se $i = 1$ ou $i \equiv 0 \pmod{2}$ $2i + 4$ , caso contrário (PEREIRA, 2020)	$4i + 6$ (HORA; LUIZ, 2021)	$6i + 10$ , se $i = 1$ ou $i \equiv 0 \pmod{2}$ $6i + 9$ , caso contrário
Snarks de Blanuša $\mathfrak{B}_i^2$	$2i + 3$ (PEREIRA, 2020)	$4i + 6$ (HORA; LUIZ, 2021)	$6i + 9$
Snarks de Goldberg $G_i$	$\lceil \frac{11i}{5} \rceil$ (PEREIRA, 2020)	$\gamma_R(G_i) \leq \frac{13i}{3}$ (HORA; LUIZ, 2021)	$\gamma_{dR}(G_i) \leq \frac{13i+3}{2}$ $\gamma_{dR}(G_i) \geq 6i + 2$
Snarks de Loupekine $G$ , $LP_0$ com $k$ blocos de construção e $\sigma$ vértices de ligação	$\gamma(G) \leq 2k$ $\gamma(G) \geq \lfloor \frac{ V(G) }{4} \rfloor + 1$ (PEREIRA, 2020)	$\gamma_R(G) \leq 4k$ $\gamma_R(G) \geq \lfloor \frac{ V(G) }{2} \rfloor + 1$ (HORA; LUIZ, 2021)	$\gamma_{dR}(G) \leq 6k$ $\gamma_{dR}(G) \geq \frac{21k+3\sigma}{4}$
Snarks de Loupekine $G$ , $LP_1$ com $k$ blocos de construção e $\sigma$ vértices de ligação	$\gamma(G) \leq 2k + \sigma$ (PEREIRA, 2020)		$\gamma_{dR}(G) \leq 6k + 2\sigma$ $\gamma_{dR}(G) \geq \frac{21k+3\sigma}{4}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante a pesquisa, utilizamos um programa linear inteiro para calcular o número de dominação romana dupla para os *snarks* de Goldberg  $G_7, G_9, G_{11}, G_{13}, G_{15}, G_{17}$  e  $G_{19}$  e percebemos que para cada um destes, o número de dominação romana dupla era exatamente igual ao seu respectivo limitante superior. Para os *snarks* de Goldberg maiores, não executamos o programa, pois o tempo para obter uma resposta se tornou inviável. De posse desses resultados e baseados no fato da rotulação  $\varphi$  do grafo de ligação  $L_i$  dos *snarks* de Goldberg ter peso 13, que é apenas uma unidade maior que o limitante inferior para o número de dominação romana dupla do grafo  $L_i$ , isto é,  $\frac{3 \cdot |V(L_i)|}{4} = \frac{3 \cdot 16}{4} = 12$ , formulamos a seguinte conjectura.

**Conjetura 22.** *Seja  $G_i$  um snark de Goldberg, com  $i \geq 7$  e  $i$  ímpar. Então,  $\gamma_{dR}(G_i) = \frac{13i+3}{2}$ .*

## REFERÊNCIAS

- APPEL, K.; HAKEN, W. The solution of the four-color-map problem. **Scientific American**, JSTOR, v. 237, n. 4, p. 108–121, 1977.
- BAREFOOT, C.; HARARY, F.; JONES, K. F. What is the difference between the domination and independent domination numbers of a cubic graph? **Graphs and Combinatorics**, Springer, v. 7, n. 2, p. 205–208, 1991.
- BEELER, R. A.; HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T. Double roman domination. **Discrete Applied Mathematics**, v. 211, p. 23–29, 2016. ISSN 0166-218X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X1630155X>. Acesso em: 15 jul. 2023.
- BERGE, C. Book. **The theory of graphs and its applications / by Claude Berge ; translated by Alison Doig**. [S. l.]: Methuen ; Wiley London : New York, 1962. x, 247 p. : p.
- BERTOSSI, A. A. Dominating sets for split and bipartite graphs. **Information processing letters**, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 37–40, 1984.
- BLANUSA, D. Problem cetiriju boja (croatian), hrvatsko priordoslorno drustvo glasnik mat-fiz. **Astr Ser II**, v. 1, p. 31–42, 1946.
- BOUQUET, V.; DELBOT, F.; PICOULEAU, C.; ROVEDAKIS, S. On minimum dominating sets in cubic and (claw, h)-free graphs. **arXiv preprint arXiv:2002.12232**, 2020.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **A first course in graph theory**. [S. l.]: Courier Corporation, 2013.
- COCKAYNE, E. J.; JR, P. A. D.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T. Roman domination in graphs. **Discrete mathematics**, Elsevier, v. 278, n. 1-3, p. 11–22, 2004.
- COSTA, J. R. de F.; LUIZ, A. G. L (2, 1)-labeling of loupekine snarks. 2020.
- CRANSTON, D. W.; WEST, D. B. An introduction to the discharging method via graph coloring. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 340, n. 4, p. 766–793, 2017.
- DREYER, P. A. **Applications and variations of domination in graphs**. [S. l.]: Rutgers The State University of New Jersey-New Brunswick, 2000.
- FINK, J. F.; JACOBSON, M. S.; KINCH, L. F.; ROBERTS, J. On graphs having domination number half their order. **Periodica Mathematica Hungarica**, Springer, v. 16, p. 287–293, 1985.
- GAO, H.; HUANG, J.; YANG, Y. Double roman domination in generalized Petersen graphs. **Bulletin of the Iranian Mathematical Society**, Springer, p. 1–10, 2021.
- GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and intractability**. [S. l.]: Freeman San Francisco, 1979. v. 174.
- GOLDBERG, M. Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 282–291, 1981.
- HORA, G. W. S. da; LUIZ, A. G. **Número de dominação romana e número de dominação romana independente para classes de grafos snarks**. Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Ceará, 2021.

- ISAACS, R. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 82, n. 3, p. 221–239, 1975.
- ISAACS, R. Loupekhine’s snarks: a bifamily of non-tait-colorable graphs. **J. Combin. Theory B**, 1976.
- JAENISCH, C. **Applications de l’analyse mathématique au jeu des échecs**. [S. l.]: Dufour et cie, 1862.
- KARAM, K.; CAMPOS, C. Fulkerson’s conjecture and loupekhine snarks. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 326, p. 20–28, 2014.
- MACGILLIVRAY, G.; SEYFFARTH, K. Domination numbers of planar graphs. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 22, n. 3, p. 213–229, 1996.
- MAKSIMOVIC, Z.; KRATICA, J.; SAVIC, A.; BOGDANOVIC, M. Some static roman domination numbers for flower snarks. In: FON. **XIII Balkan Conference on Operational Research Proceedings**. [S. l.], 2018. p. 9–15.
- ORE, O. **Theory of Graphs**. American Mathematical Society, 1962. (American Mathematical Society colloquium publications, pt. 1). ISBN 9780821810385. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Pf-VAwAAQBAJ>. Acesso em: 15 jul. 2023.
- PEREIRA, A. A. **Conjuntos dominantes em grafos cúbicos**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 2020.
- PETERSEN, J. Sur le théoreme de tait. **L’intermédiaire des Mathématiciens**, v. 5, p. 225–227, 1898.
- POKLUKAR, D. R.; ŽEROVNIK, J. Double roman domination in generalized petersen graphs  $p(ck, k)$ . **Symmetry**, v. 14, n. 6, 2022. ISSN 2073-8994. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2073-8994/14/6/1121>. Acesso em: 15 jul. 2023.
- POKLUKAR, D. R.; ŽEROVNIK, J. On the double roman domination in generalized petersen graphs  $p(5k, k)$ . **Mathematics**, v. 10, n. 1, 2022. ISSN 2227-7390. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/1/119>. Acesso em: 15 jul. 2023.
- POUREIDI, A.; RAD, N. J. On algorithmic complexity of double roman domination. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 285, p. 539–551, 2020.
- ROBERTSON, N.; SANDERS, D.; SEYMOUR, P.; THOMAS, R. The four-colour theorem. **Journal of combinatorial theory, Series B**, Elsevier, v. 70, n. 1, p. 2–44, 1997.
- SHAO, Z.; WU, P.; JIANG, H.; LI, Z.; ŽEROVNIK, J.; ZHANG, X. Discharging approach for double roman domination in graphs. **IEEE Access**, IEEE, v. 6, p. 63345–63351, 2018.
- STEWART, I. Defend the roman empire! **Scientific American**, JSTOR, v. 281, n. 6, p. 136–138, 1999.
- TAIT, P. G. Remarks on the colouring of maps. In: **Proc. Roy. Soc. Edinburgh**. [S. l.: s. n.], 1880. v. 10, n. 729, p. 501–503.
- WATKINS, J. J. On the construction of snarks. **Ars Combin**, v. 16, p. 111–124, 1983.