



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**NILBIO NASCIMENTO DO CARMO**

**SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS: APLICAÇÕES COM DOBRADURAS**

**FORTALEZA**

**2023**

NILBIO NASCIMENTO DO CARMO

SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS: APLICAÇÕES COM DOBRADURAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C285s Carmo, Nilbio Nascimento do.  
Sólidos arquimedianos : aplicações com dobraduras / Nilbio Nascimento do Carmo. –  
2023.  
57 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede  
Nacional, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Sólidos arquimedianos. 2. Dobraduras. 3. Isocaedro truncado. I. Título.

CDD 510

---

NILBIO NASCIMENTO DO CARMO

SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS: APLICAÇÕES COM DOBRADURAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 01/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus.

A todos que tocam minha história.

## **AGRADECIMENTOS**

A minha família e amigos que permitiram a dedicação necessária para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Melo, pela compreensão, tempo dedicado e apoio, tanto nas disciplinas por ele ministradas como no desenvolvimento da dissertação.

Aos colegas do mestrado que desempenharam papel fundamental para a conclusão do mesmo, colocando-se sempre, sem exceção, à disposição para contribuir e apoiar.

## RESUMO

Este trabalho busca apresentar de forma geral os sólidos de Arquimedes. Para tanto, serão abordados temas como os poliedros de Platão e suas relações com os arquimedianos. Apresentaremos os 13 sólidos de Arquimedes e observaremos a não existência de outros. Percebemos que no Ensino Médio os sólidos platônicos são abordados, mas pouco se fala da existência dos de Arquimedes. A forma utilizada para tal apresentação, além da parte teórica e em consonância com as habilidades e competências sugeridas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), será a realização da construção do icosaedro truncado através de dobraduras. Abordaremos, pois, o conceito de dobraduras e os axiomas necessários para a sua execução. Falaremos também de algumas construções necessárias da geometria plana, como o triângulo equilátero, o baricentro e o hexágono regular. O objetivo da pesquisa é fazer com que os alunos reconheçam tais sólidos e, de forma lúdica, consigam confeccionar os mesmos usando a dobradura, sobretudo percebendo o desenvolvimento matemático que está por trás da atividade.

**Palavras-chave:** sólidos arquimedianos; dobraduras; icosaedro truncado.

## **ABSTRACT**

This work seeks to present in a general way the Archimedean solids. To do so, topics such as Plato's polyhedra and their relationships with the Archimedes' ones will be addressed. We will present the 13 solids of Archimedes and observe the non-existence of others. We noticed that in high school the Platonic solids are addressed but little is said about the existence of Archimedes. The form used for such a presentation, in addition to the theoretical part and in line with the skills and competences suggested by the BNCC, will be the construction of the truncated icosahedron through folding. We will therefore address the concept of folding and the axioms necessary for its implementation. We will also address about some necessary constructions of plane geometry, such as the equilateral triangle, the barycenter and the regular hexagon. The objective of this research is to make students recognize such solids and in a playful way manage to make them using folding and above all realizing the mathematical development that is behind this activity.

**Keywords:** Archimedean solids; folds; truncated icosahedron.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Tetraedro planificado .....	12
Figura 2 –	Tetraedro inscrito .....	13
Figura 3 –	Tetraedro regular .....	13
Figura 4 –	Octaedro regular .....	13
Figura 5 –	Octaedro planificado .....	14
Figura 6 –	Icosaedro regular .....	14
Figura 7 –	Icosaedro planificado .....	14
Figura 8 –	Hexaedro regular .....	15
Figura 9 –	Hexaedro planificado.....	15
Figura 10 –	Dodecaedro regular .....	16
Figura 11 –	Dodecaedro planificado .....	16
Figura 12 –	Tetraedro truncado regular e planificado .....	17
Figura 13 –	Cubo truncado regular e planificado .....	17
Figura 14 –	Cuboctaedro regular e planificado .....	18
Figura 15 –	Rombicuboctaedro regular e planificado .....	18
Figura 16 –	Cuboctaedro truncado regular e planificado .....	19
Figura 17 –	Octaedro truncado regular e planificado .....	19
Figura 18 –	Icosaedro truncado regular e planificado .....	20
Figura 19 –	Dodecaedro truncado regular e planificado .....	20
Figura 20 –	Icosidodecaedro regular e planificado .....	21
Figura 21 –	Rombicosidodecaedro regular e planificado .....	21
Figura 22 –	Icosidodecaedro truncado regular e planificado .....	21
Figura 23 –	Cubo snub regular e planificado .....	22
Figura 24 –	Dodecaedro snub regular e planificado .....	22
Figura 25 –	Axioma 1 de Huzita-Hatori .....	24
Figura 26 –	Axioma 2 de Huzita-Hatori .....	24
Figura 27 –	Axioma 3 de Huzita-Hatori .....	25
Figura 28 –	Axioma 4 de Huzita-Hatori .....	25
Figura 29 –	Axioma 5 de Huzita-Hatori .....	26
Figura 30 –	Axioma 6 de Huzita-Hatori .....	26
Figura 31 –	Axioma 7 de Huzita-Hatori .....	27

Figura 32 –	Caso 2: $r$ e $s$ não são paralelas .....	29
Figura 33 –	Explicação do Axioma 4 .....	30
Figura 34 –	Explicação do Axioma 5 .....	31
Figura 35 –	Explicação do Axioma 6 .....	32
Figura 36 –	Construção do baricentro (a) .....	34
Figura 37 –	Construção do baricentro (b) .....	34
Figura 38 –	Construção do baricentro (c) .....	35
Figura 39 –	Construção do baricentro (d) .....	35
Figura 40 –	Construção do quadrado .....	36
Figura 41 –	Construção do triângulo equilátero .....	37
Figura 42 –	Construção do hexágono regular (a) .....	38
Figura 43 –	Construção do hexágono regular (b) .....	38
Figura 44 –	Construção do hexágono regular (c) .....	39
Figura 45 –	Construção do hexágono regular (d) .....	39
Figura 46 –	Construção do hexágono regular (e) .....	40
Figura 47 –	Construção do hexágono regular (f) .....	40
Figura 48 –	Moldes dos triângulos equiláteros .....	43
Figura 49 –	“Estrelinhas” .....	44
Figura 50 –	Base do icosaedro truncado .....	45
Figura 51 –	Conjunto de “estrelinhas” .....	45
Figura 52 –	Partes do icosaedro truncado .....	46
Figura 53 –	Icosaedro truncado .....	46

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>12</b>
2.1	Sólidos de Platão	12
2.2	Sólidos de Arquimedes	16
<b>3</b>	<b>DOBRADURAS</b>	<b>23</b>
3.1	Breve histórico	23
3.2	Mas por que trabalhar com dobraduras?	23
3.3	Axiomas de Huzita-Hatori	24
3.4	Explicação dos axiomas	27
<b>4</b>	<b>CONSTRUÇÕES IMPORTANTES</b>	<b>34</b>
4.1	Baricentro	34
4.2	Quadrado	35
4.3	Triângulo equilátero	36
4.4	Hexágono regular	37
<b>5</b>	<b>ATIVIDADE SUGERIDA</b>	<b>41</b>
5.1	Construindo o Icosaedro Truncado	42
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>47</b>
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A – POLIEDROS DE PLATÃO	50
	APÊNDICE B – SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS	51

## 1 INTRODUÇÃO

Há um mundo secreto lá fora. Um universo paralelo oculto de beleza e elegância, entrelaçado intrincadamente com o nosso. É o mundo da matemática. E ele é invisível para a maioria de nós. (FRENKEL, 2014).

É coerente dizer que, com as mudanças sociais ocorridas ao longo do tempo, muda-se também a perspectiva a respeito do uso de metodologias aplicáveis na educação básica. Sabe-se, desse modo, que o educando, enquanto principal sujeito envolvido no processo de aprendizagem, está inserido de maneira passiva neste regime, uma vez que este encara com naturalidade a incorporação de diversos recursos tecnológicos e midiáticos na vida em sociedade, tendo em vista que seu nascimento e crescimento se deu em meio a um constante contato com esses recursos.

Diante dessas mudanças, tem-se percebido recentemente uma busca crescente por melhorias na formação pedagógica e técnica do professor de Matemática. Neste contexto, vêm sendo desenvolvido ao longo dos últimos anos diversos programas de qualificação dos profissionais da educação, em especial da Matemática. A parceria entre a Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC), a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a Universidade Federal do Ceará (UFC) desenvolveu o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), que conforme seu artigo 2º:

[...] tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática. (PROFMAT..., 2020).

Fiorentini e Nacarato (2005) aduzem que:

O processo de educação contínua de professores pode também ajudá-los a se tornar os principais protagonistas de seu desenvolvimento profissional e do processo educacional à medida que participam da construção dos conhecimentos do trabalho docente e da construção do patrimônio cultural do grupo profissional ao qual pertencem. (FIORENTINI; NACARATO, 2005, p. 9).

Com o despontar da pandemia em 2020, pudemos perceber que ficou clara a necessidade básica de os professores estarem vinculados à tecnologia de uma forma que esta necessariamente fizesse parte de sua vida profissional cotidiana, ou seja, o professor precisa ter um embasamento tecnológico que o

permita não ser refém de recursos que ele não domine.

Nesse contexto, para além da tecnologia e, considerando o ensino da matemática, torna-se pertinente atentar para os recentes estudos de Jo Boaler, professora de educação matemática na Stanford University e analista para a testagem do PISA, ao expor que:

À medida que o mundo muda e que a tecnologia se torna cada vez mais presente em nossos empregos e em nossa vida, é impossível saber exatamente quais métodos matemáticos serão mais úteis no futuro. É por isso que é tão importante que as escolas desenvolvam pensadores flexíveis que possam se basear em diversos princípios matemáticos para resolver problemas. (BOALER, 2019, p. 41).

Dito isso, o PROFMAT foi essencial para assumirmos essa postura de aprofundamento teórico e diversificação de nossas metodologias. Baseando-nos, portanto, nessa experiência vivida no mestrado, resolvemos abordar o tema aqui proposto.

Trataremos neste trabalho sobre os sólidos de Platão e Arquimedes, com ênfase no desenvolvimento e construção desses sólidos através de dobraduras. Para isso, é relevante citarmos os axiomas relacionados e o embasamento teórico necessário para tal.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Sólidos de Platão

Um poliedro convexo é chamado de regular quando satisfaz as condições:

- Todas suas faces são polígonos regulares com um mesmo número de arestas;
- Em cada vértice incide o mesmo número de arestas.

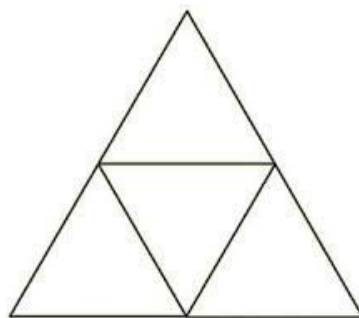
Esses poliedros são chamados de poliedros de Platão e todo poliedro convexo regular é um tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro ou icosaedro (cf. Apêndice A). Seus vértices formam as distribuições mais simétricas possíveis de quatro, seis, oito, doze e vinte pontos em uma esfera.

Platão, um dos grandes filósofos da antiguidade clássica, associou os sólidos geométricos a elementos da natureza e ao Cosmos, conforme apresentado na obra *Timeu* (MOHR; BRITTO, 2016). Para ele, o tetraedro estava relacionado com o fogo, o hexaedro com a terra, o octaedro com o ar, o icosaedro com a água e o dodecaedro com o Universo (CAVACAMI, 2007).

Isso é importante, pois, durante os séculos, vários matemáticos, filósofos e astrônomos elaboraram teorias de formação do universo com base na existência desses sólidos. Euclides, em *Os Elementos*, dedicou o livro XIII inteiramente aos sólidos regulares, mostrando também que os poliedros convexos regulares são apenas os cinco citados anteriormente.

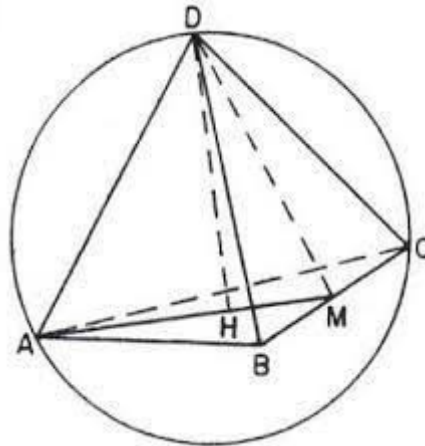
O *tetraedro* é formado por quatro triângulos equiláteros, possui seis arestas e quatro vértices e está inscrito em uma esfera (Obs.: todo sólido de Platão está inscrito em uma esfera).

Figura 1 – Tetraedro planificado



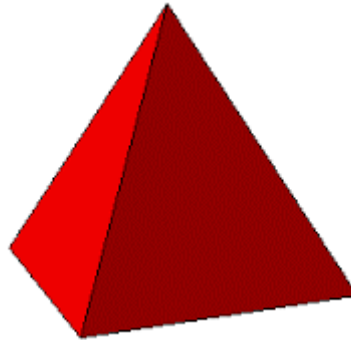
Fonte: Alves (2011, adaptado).

Figura 2 – Tetraedro inscrito



Fonte: Tutor Brasil (2012).

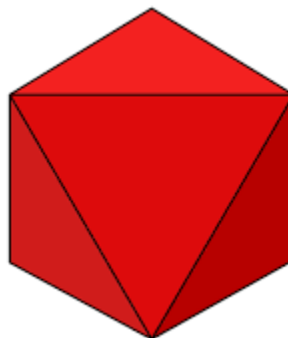
Figura 3 – Tetraedro regular



Fonte: Mathematikos (2003, adaptado).

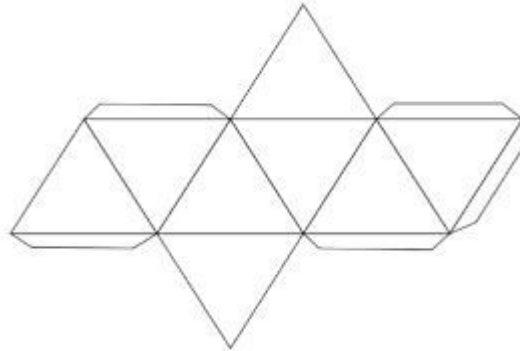
O octaedro é formado por oito triângulos equiláteros, possui ainda 12 arestas e seis vértices. A descoberta, tanto do octaedro como do icosaedro, é atribuída a Teeteto de Atenas (417-369 a.C.), inclusive supõe-se que o livro XIII citado acima é baseado nos trabalhos de Teeteto.

Figura 4 – Octaedro regular



Fonte: Oliveira (2023, adaptado).

Figura 5 – Octaedro planificado



Fonte: Barroso (2019, adaptado).

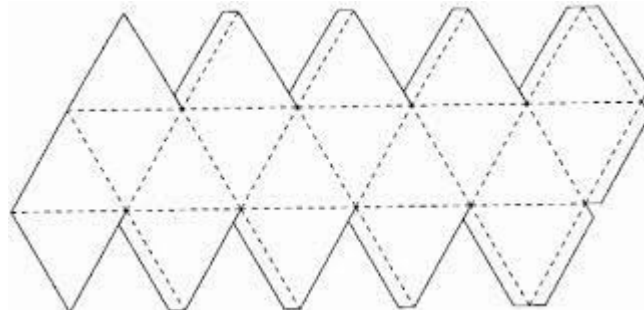
O *icosaedro* possui vinte faces, todas triângulos equiláteros, trinta arestas e doze vértices. O icosaedro é o sólido com maiores ângulos diedros, que são os ângulos em que duas faces de um poliedro se encontram em uma aresta.

Figura 6 – Icosaedro regular



Fonte: Oliveira (2023, adaptado).

Figura 7 – Icosaedro planificado



Fonte: Buligon (2016, p. 13, adaptado).

O *hexaedro* é formado por seis faces, todas quadradas, doze arestas e oito vértices. Uma curiosidade é que o lugar mais sagrado para o Islã é a “Kaaba” que quer dizer “Cubo”; o santuário do Templo de Salomão também era um cubo



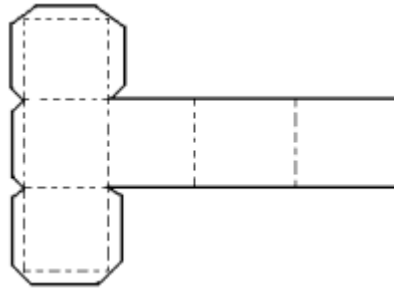
e a Nova Jerusalém descrita no Apocalipse tem o formato de um cubo. Talvez Platão tenha associado o hexaedro ao elemento terra, além da estabilidade de suas bases quadradas, a algo mais transcendente.

Figura 8 – Hexaedro regular



Fonte: Oliveira (2023, adaptado).

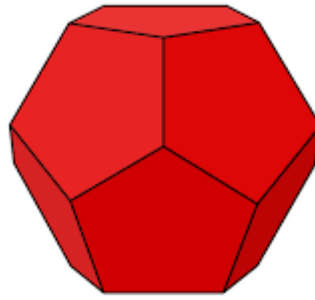
Figura 9 – Hexaedro planificado



Fonte: Buligon (2016, p. 13, adaptado).

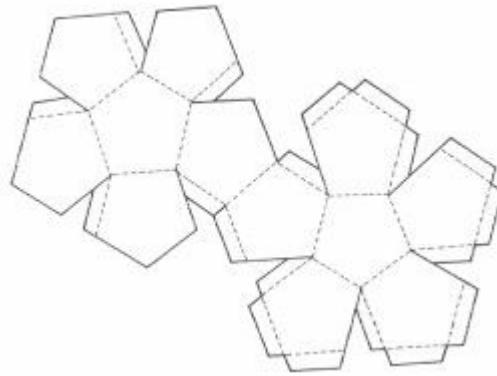
Por fim, o *dodecaedro* possui doze faces pentagonais regulares, trinta arestas e vinte vértices. Conhecido pelos primeiros pitagóricos eram chamados ‘a esfera de doze pentágonos’ e será muito utilizada quando estivermos construindo o sólido proposto neste trabalho. No *Timeu*, Platão diz sobre o dodecaedro: “visto que havia uma quinta combinação, o deus utilizou-a para pintar animais no universo”.

Figura 10 – Dodecaedro regular



Fonte: Oliveira (2023, adaptado).

Figura 11 – Dodecaedro planificado



Fonte: Buligon (2016, p. 13, adaptado).

## 2.2 Sólidos de Arquimedes

Arquimedes viveu entre 287 a 212 a.C. na Grécia, e dentre outras funções foi matemático, físico e inventor. A ele são atribuídos os sólidos semirregulares ou arquimedianos, pois o mesmo os estudou no século III a.C. Mais tarde, Kepler descreveu todo o conjunto de sólidos semirregulares.

Os sólidos semirregulares ou arquimedianos são poliedros convexos tendo apenas polígonos regulares como faces e vértices idênticos, ou seja, eles são poliedros convexos, mas as suas faces não precisam ser os mesmos polígonos, esses polígonos só precisam ser regulares.

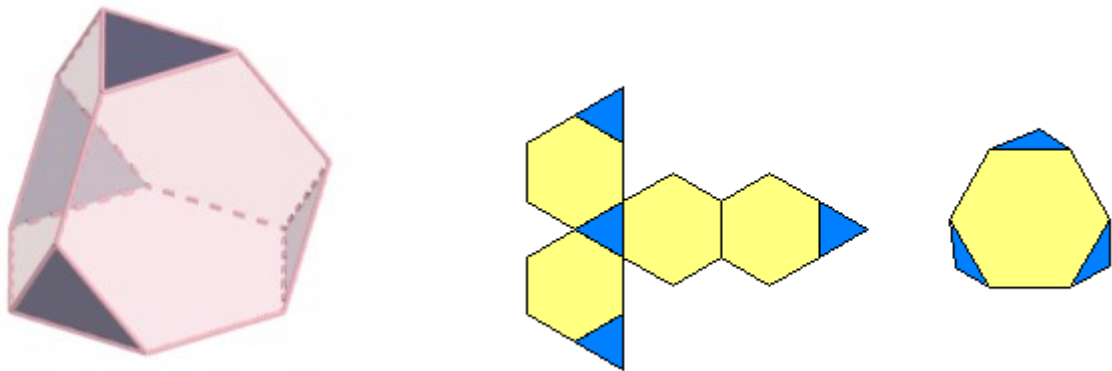
Outro fato importante nesses poliedros é que em cada vértice deve haver o mesmo arranjo de polígonos, por exemplo, em um tetraedro regular temos o arranjo (3, 3, 3), pois em cada um deles temos 3 triângulos equiláteros. O cuboctaedro possui o arranjo (3,4,3,4), cada vértice tem dois triângulos equiláteros e

dois quadrados, fazendo com que o sólido possua seis quadrados e oito triângulos equiláteros, e essa é uma das exigências para o sólido ser arquimediano.

Desta forma, existem 13 sólidos arquimedianos nos quais cada uma de suas faces são polígonos regulares e em cada vértice temos as mesmas configurações de faces (*cf.* Apêndice 2). São eles:

Tetraedro truncado: 12 vértices, 18 arestas e 8 faces (4 triângulos e 4 hexágonos).

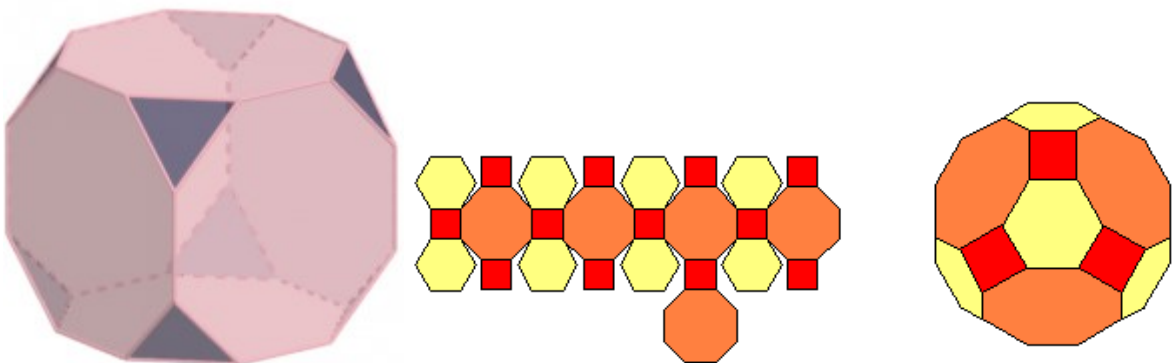
Figura 12 – Tetraedro truncado regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Cubo truncado: 24 vértices, 36 arestas e 14 faces (8 triângulos e 6 octógonos).

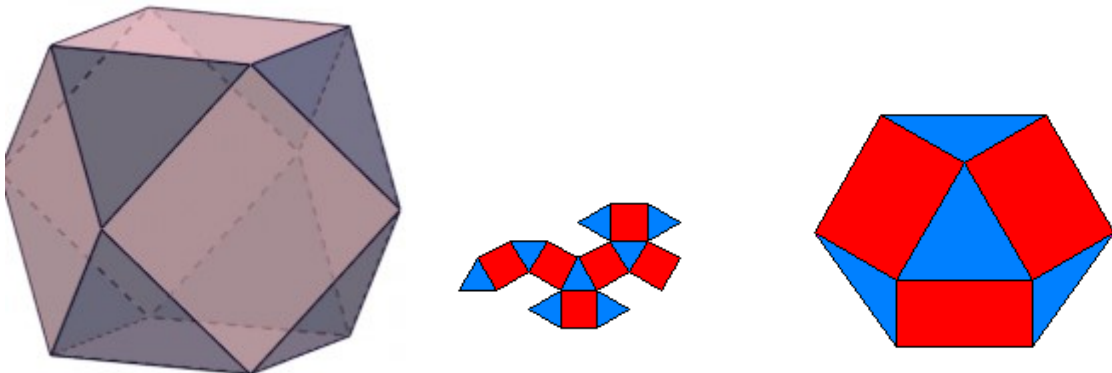
Figura 13 – Cubo truncado regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Cuboctaedro: 12 vértices, 24 arestas e 14 faces (8 triângulos e 6 quadrados).

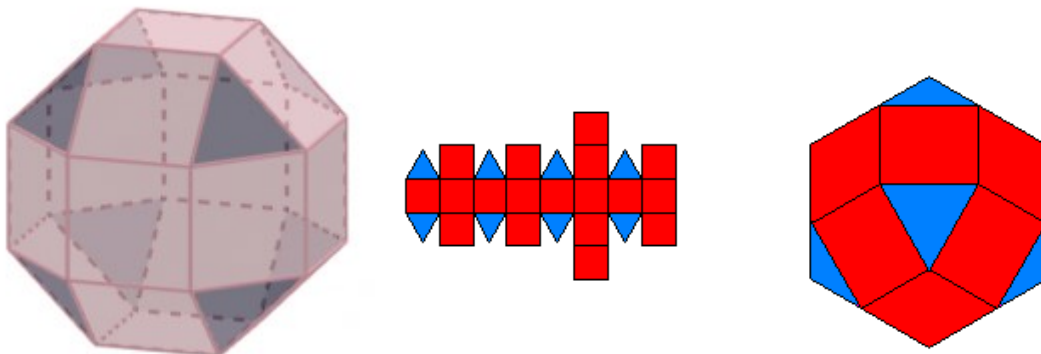
Figura 14 – Cuboctaedro regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Rombicuboctaedro: 24 vértices, 48 arestas e 26 faces (8 triângulos e 18 quadrados).

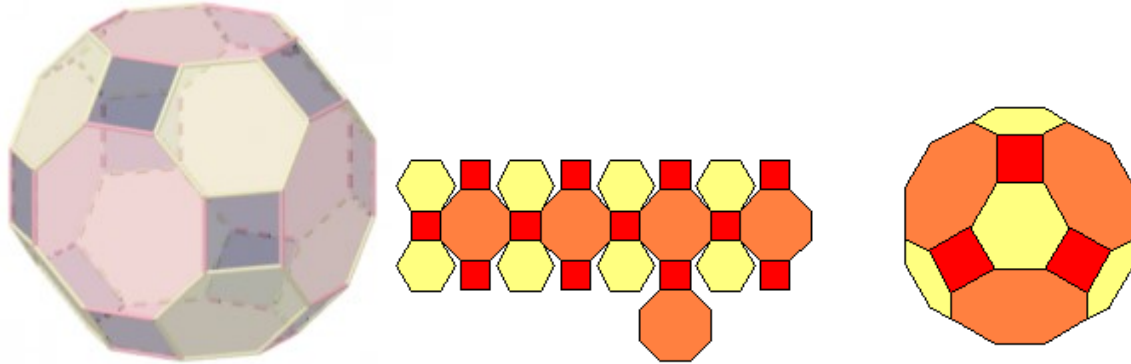
Figura 15 – Rombicuboctaedro regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Cuboctaedro truncado (grande rombicuboctaedro): 48 vértices, 72 arestas e 26 faces (12 quadrados, 8 hexágonos e 6 octógonos).

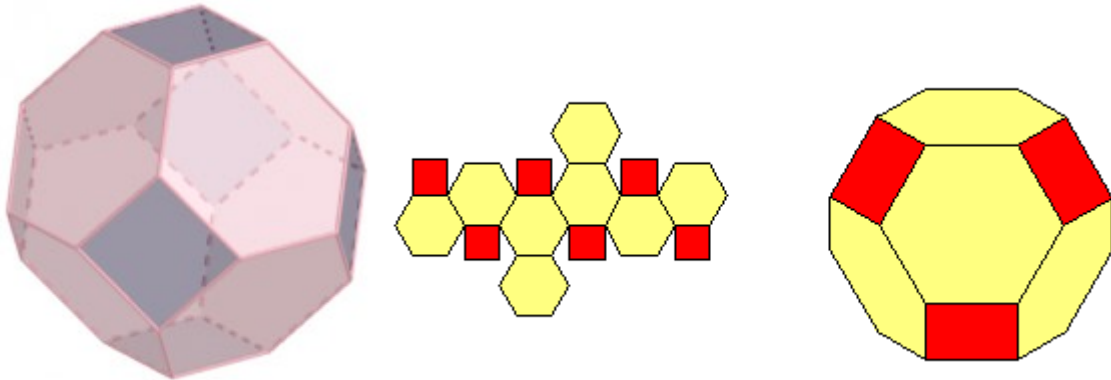
Figura 16 – Cuboctaedro truncado regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Octaedro truncado: 24 vértices, 36 arestas e 14 faces (6 quadrados e 8 hexágonos).

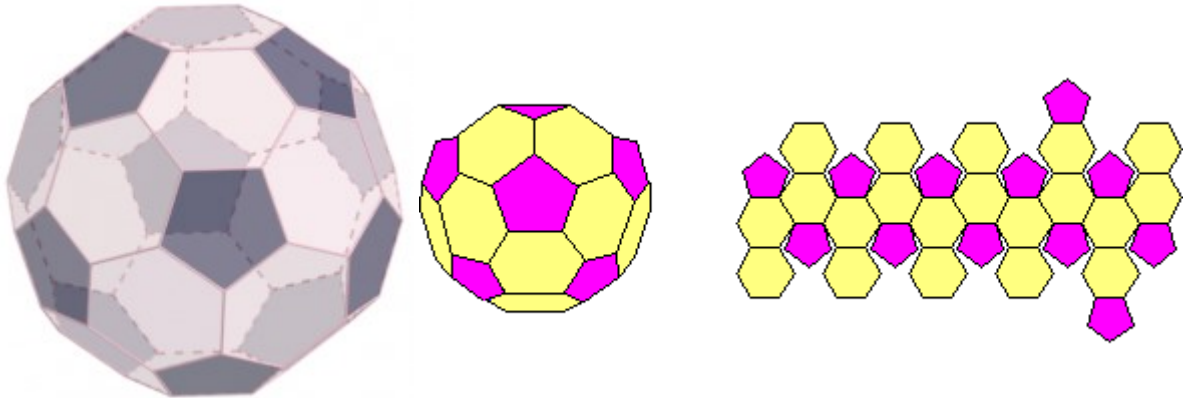
Figura 17 – Octaedro truncado regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Icosaedro truncado: 60 vértices, 90 arestas e 32 faces (12 pentágonos e 20 hexágonos).

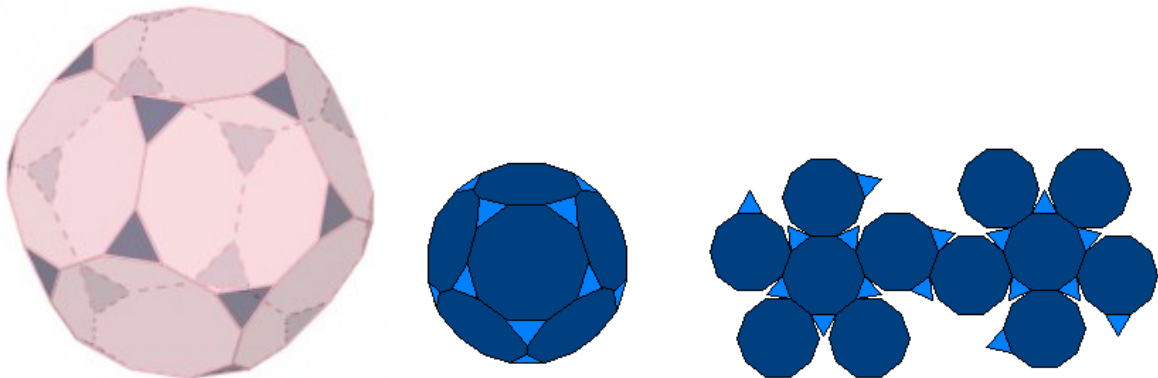
Figura 18 – Icosaedro truncado regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Dodecaedro truncado: 60 vértices, 90 arestas e 32 faces (20 triângulos e 12 decágonos).

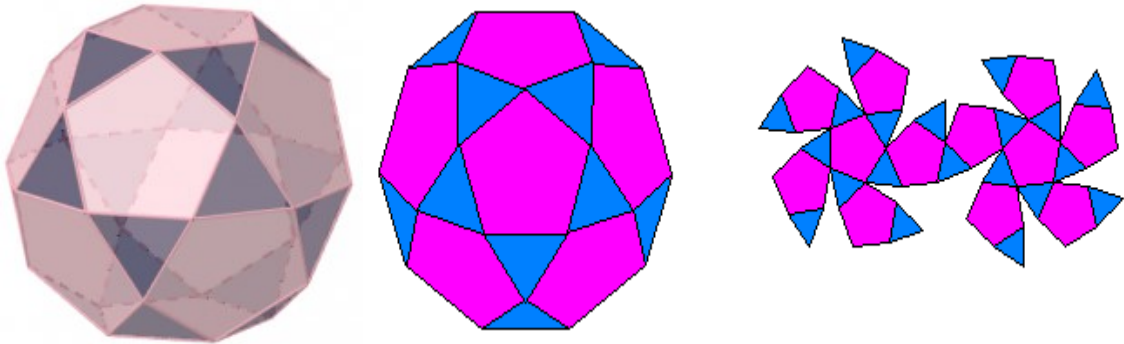
Figura 19 – Dodecaedro truncado regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Icosidodecaedro: 30 vértices, 60 arestas e 32 faces (20 triângulos e 12 pentágonos).

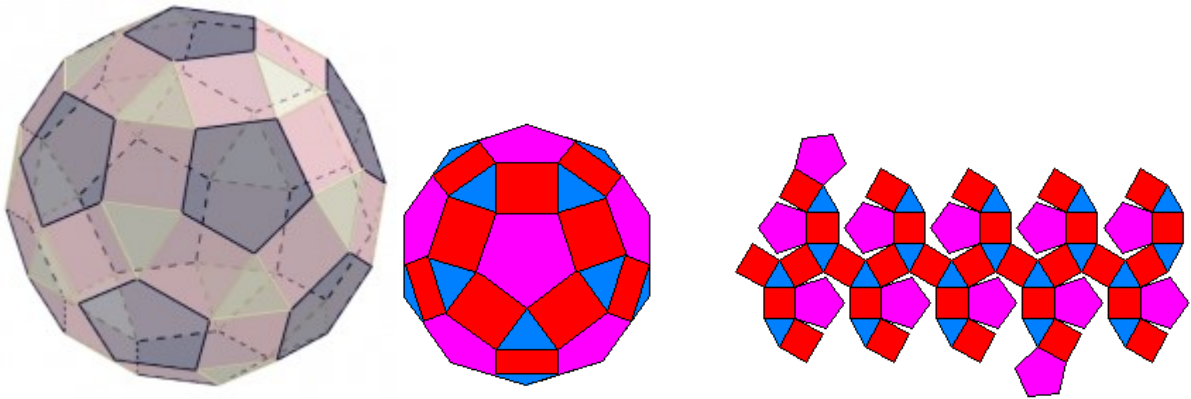
Figura 20 – Icosidodecaedro regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Rombicosidodecaedro: 60 vértices, 120 arestas e 62 faces (20 triângulos, 30 quadrados e 12 pentágonos).

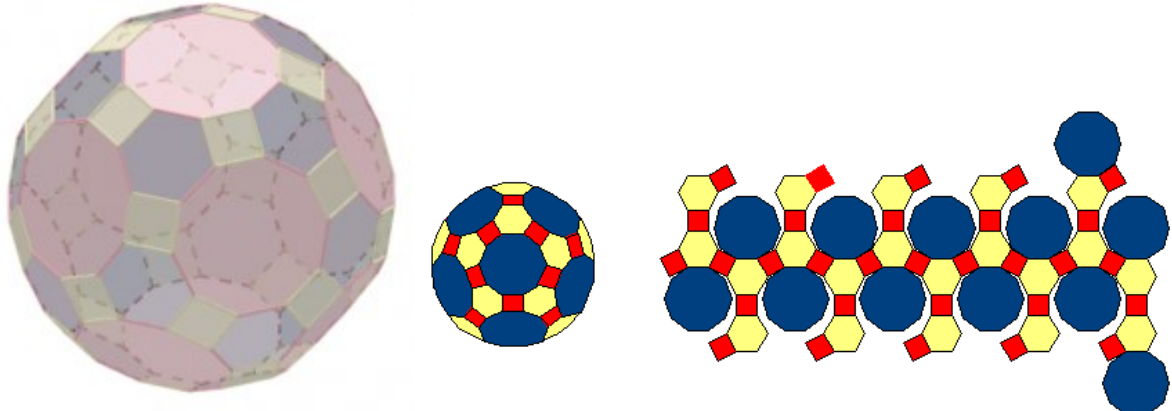
Figura 21 – Rombicosidodecaedro regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Icosidodecaedro truncado (grande rombicosidodecaedro): 120 vértices, 180 arestas e 62 faces (30 quadrados, 20 hexágonos e 12 decágonos).

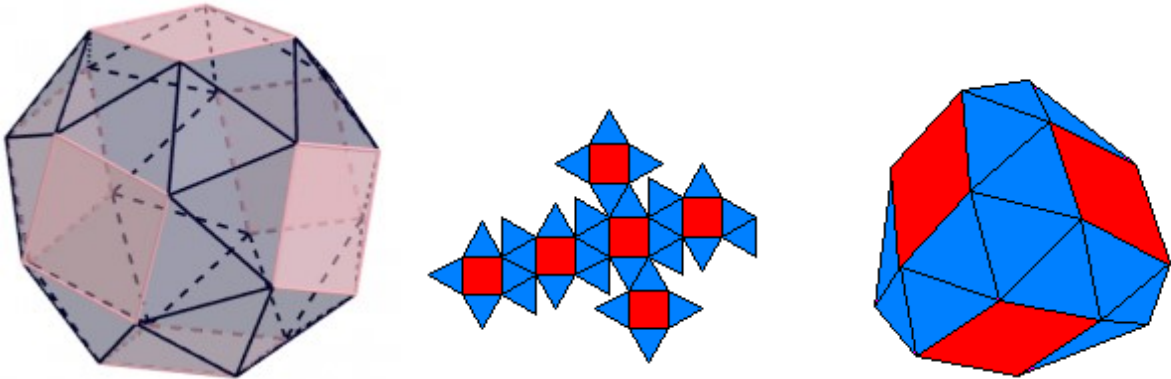
Figura 22 – Icosidodecaedro truncado regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Cubo snub: 24 vértices, 60 arestas e 38 faces (32 triângulos e 6 quadrados).

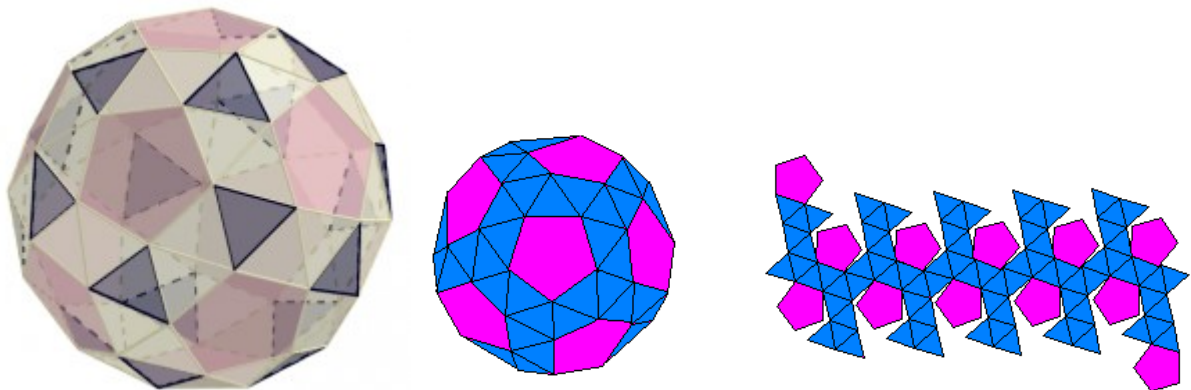
Figura 23 – Cubo snub regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Dodecaedro snub - 60 vértices, 150 arestas e 92 faces (80 triângulos e 12 pentágonos).

Figura 24 – Dodecaedro snub regular e planificado



Fonte: Derivado a Matemática (2019) e Teixeira (s.d.).

Os sólidos arquimedianos são obtidos através de transformações nos sólidos de Platão. Os 11 primeiros são obtidos através do truncamento (onde divide-se as arestas do poliedro em partes iguais e formam-se vértices nesses pontos novos) e o cubo snub e dodecaedro snub através da snubificação, onde são colocados outros polígonos entre as faces, e em alguns casos, é necessário também rotacionar estas faces.



## 3 DOBRADURAS

### 3.1 Breve histórico

A invenção do papel na China trouxe uma revolução para a escrita e para posteriores criações como a imprensa. O origami (do japonês *oru* – dobrar e *kami* – papel) está intimamente ligado à história do papel (MONTEIRO, 2008; CAVACAMI, 2007).

No início, o custo com o papel era muito alto e ele era usado apenas pela elite e em algumas cerimônias religiosas. Somente com o passar do tempo ocorreu a consolidação do origami e a sua popularização. No Brasil comumente o origami é conhecido como “dobradura”.

Existem várias técnicas de dobraduras que se desenvolveram através dos tempos, desde a *tradicional* (que carrega em si os simbolismos especiais para os japoneses como, por exemplo, o Sapo, que simboliza o amor e felicidade, e o mais famoso deles, o Tsuru, que representa paz, boa sorte e longevidade) até a *orinuno*, o origami dobrado em tecido. Um dos nomes mais importantes foi Akira Yoshizawa, um artista japonês, considerado o “pai do Origami moderno”.

### 3.2 Mas por que trabalhar com dobraduras?

Além de toda parte lúdica as dobraduras têm uma influência muito grande no desenvolvimento da criatividade, imaginação, coordenação motora, disciplina, concentração, percepção visual e espacial, memória, dentre outras.

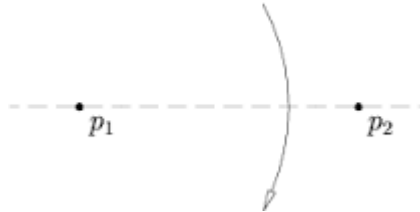
Esse desenvolvimento é essencial para a matemática, principalmente quando lidamos com a geometria e queremos apresentá-la aos alunos de uma forma prática e ao mesmo tempo trabalhar a sua formalidade.

Assim como a geometria da régua e compasso, existem figuras geométricas que podem ou não ser construídas a partir de dobraduras, e considerando dobraduras planas cujos vincos correspondem a retas ou segmentos de retas, essas construções seguem os axiomas de Huzita-Hatori (MONTEIRO, 2008). Humiaki Huzita escreveu seis axiomas para a construção de figuras por meio de dobradura e um outro axioma foi descrito por Hoshiro Hatori, os quais apresentaremos a seguir.

### 3.3 Axiomas de Huzita-Hatori

Axioma 1: Dados dois pontos, A e B, há uma dobra que passa pelos dois pontos.

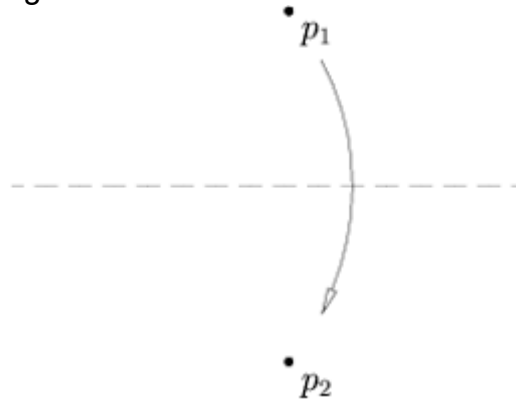
Figura 25 – Axioma 1 de Huzita-Hatori



Fonte: Pin e Uribe (2016, p. 41).

Axioma 2: Dados dois pontos, A e B, há uma dobra que os torna coincidentes.

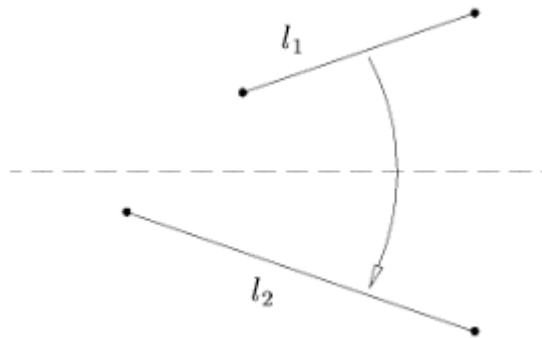
Figura 26 – Axioma 2 de Huzita-Hatori



Fonte: Pin e Uribe (2016, p. 41).

Axioma 3: Dadas duas retas,  $r$  e  $s$ , há uma dobra que as torna coincidentes.

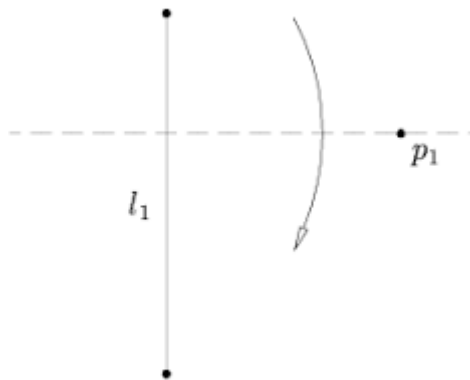
Figura 27 – Axioma 3 de Huzita-Hatori



Fonte: Pin e Uribe (2016, p. 41).

Axioma 4: Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , há uma dobra perpendicular a  $r$  que passa por  $P$ .

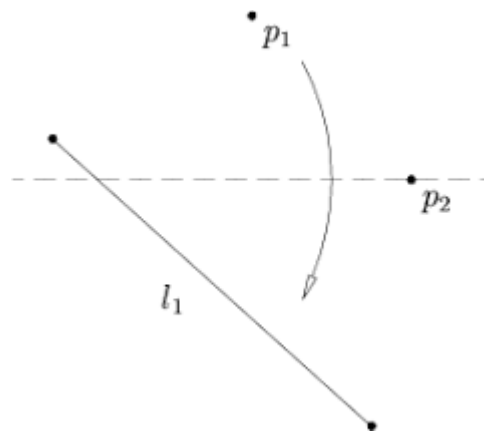
Figura 28 – Axioma 4 de Huzita-Hatori



Fonte: Pin e Uribe (2016, p. 42).

Axioma 5: Dados dois pontos,  $A$  e  $B$ , e uma reta  $r$ , se a distância de  $A$  a  $B$  for igual ou superior à distância de  $A$  a  $r$ , há uma dobra que faz incidir  $A$  em  $r$  e que passa por  $B$ .

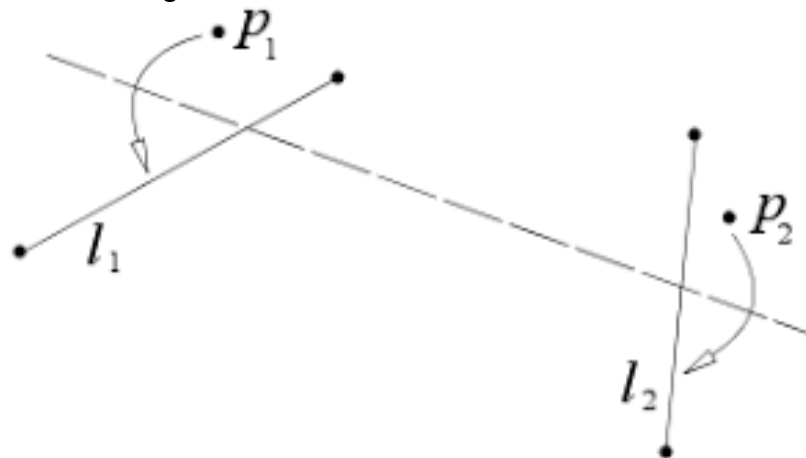
Figura 29 – Axioma 5 de Huzita-Hatori



Fonte: Pin e Uribe (2016, p. 42).

Axioma 6: Dados dois pontos, A e B, e duas retas,  $r$  e  $s$ , se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma dobra que faz incidir A em  $r$  e B em  $s$ .

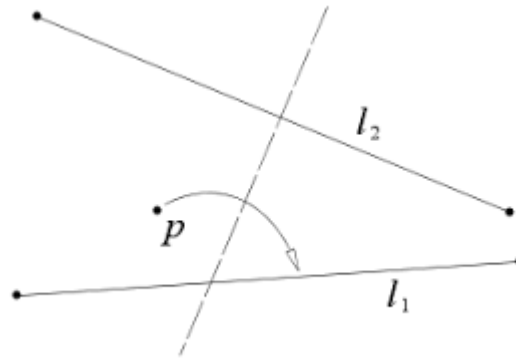
Figura 30 – Axioma 6 de Huzita-Hatori



Fonte: Pin e Uribe (2016, p. 4).2

Axioma 7: Dado um ponto, P, e duas retas,  $r$  e  $s$ , se as retas não forem paralelas, há uma dobra que faz incidir P em  $r$  e é perpendicular a  $s$ .

Figura 31 – Axioma 7 de Huzita-Hatori



Fonte: Pin e Uribe (2016, p. 43).

### 3.4 Explicação dos axiomas

Axioma 1: Dados dois pontos, A e B, há uma dobra que passa pelos dois pontos:

Dados dois pontos, A  $(x_1, y_1)$  e B  $(x_2, y_2)$ , esse axioma representa uma reta que passa por dois pontos dados inicialmente, o que equivale a resolver equações do 1º grau,  $y = ax + b$ .

Sendo:  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  e  $b = y_1 - ax_1$  ou  $b = y_2 - ax_2$

Axioma 2: Dados dois pontos, A e B, há uma dobra que os torna coincidentes:

Sendo A  $(x_1, y_1)$  e B  $(x_2, y_2)$  dois pontos, esse axioma diz respeito à mediatriz que passa pela reta que une A e B. Como o ponto médio tem coordenadas  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ , realizamos uma dobra pela reta  $y = ax + b$ , onde:

$$a = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \text{ e } b = \frac{y_1 + y_2}{2} - a \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Axioma 3: Dadas duas retas,  $r$  e  $s$ , há uma dobra que as torna coincidentes:

Dadas as retas  $r: y = ax + b$  e  $s: y = cx + d$ , temos que observar dois casos: 1) quando  $r$  e  $s$  forem paralelas e 2) quando  $r$  e  $s$  forem concorrentes.

Caso 1:  $r \parallel s$

Deverá ser feita uma dobra paralela à  $r$  e à  $s$  e que esteja à mesma

distância das duas, para tanto, começamos escolhendo um ponto  $P = (x_1, y_1)$  pertencente a  $r$ , por exemplo. Vamos analisar dois casos:  $a = 0$  ou  $a \neq 0$ .

$$1) a = 0$$

Temos as retas  $r: y = b$ ;  $s: y = d$  e o ponto  $P = (x_1, b)$ . A reta perpendicular a  $r$  que passa por  $P$  é dada pela equação  $y = x_1$ . Sendo  $Q = (x_1, d)$  o ponto de intersecção desta reta com a reta  $s$ , realizamos a dobra que torna os pontos  $P$  e  $Q$  coincidentes, conforme o axioma 2.

$$2) a \neq 0$$

A reta perpendicular ( $t$ ) à  $r$  é dada por  $y = -\frac{1}{a}x + \left[\frac{1}{a}x_1 + y_1\right]$ , e o ponto comum entre  $t$  e  $s$  é solução do sistema:

$$t: y = -\frac{1}{a}x + \left[\frac{1}{a}x_1 + y_1\right]$$

$$s: y = cx + d$$

Vamos chamar esse ponto de  $P_2$ , então, igualando as equações, temos:

$$-\frac{1}{a}x + \left[\frac{1}{a}x_1 + y_1\right] = cx + d, \text{ logo}$$

$$x = \frac{x_1 + ay_1 - ad}{ac + 1}$$

Substituindo  $x$  em  $s$ , temos:

$$y = \frac{cx_1 + acy_1 + d}{ac + 1}$$

$$\text{Então } P_2 = \left( \frac{x_1 + ay_1 - ad}{ac + 1}, \frac{cx_1 + acy_1 + d}{ac + 1} \right)$$

Realizamos, agora, a dobra que torna os pontos coincidentes conforme o axioma 2.

Caso 2:  $r$  e  $s$  não são paralelas

Vamos fazer a bissecção de um dos ângulos entre as retas. Para tanto, vamos iniciar encontrando a intersecção entre as  $r$  e  $s$ , e chamaremos de ponto  $M$ :

$$r: y = ax + b$$

$$s: y = cx + d$$

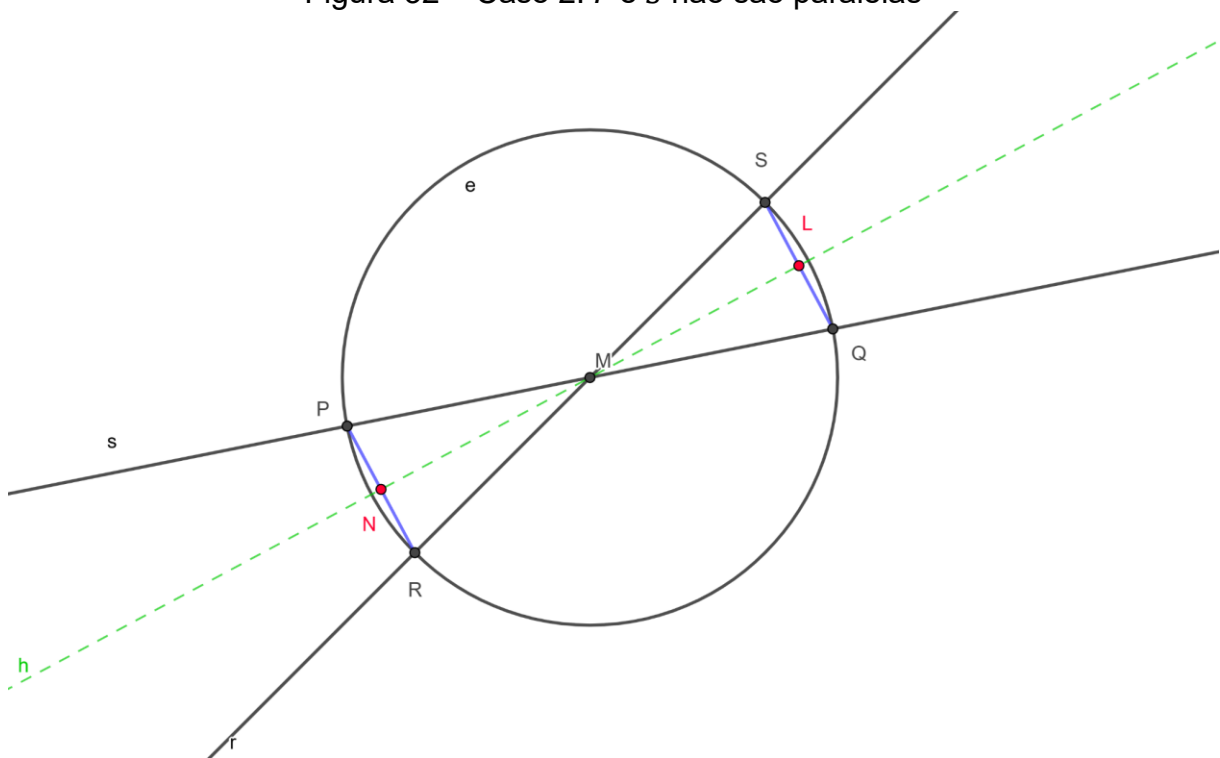
$$ax + b = cx + d, \text{ logo:}$$

$$x = \frac{d-b}{a-c} \text{ e } y = \frac{ad-bc}{a-c}$$

Então,  $M = (x_0, y_0) = \left(\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right)$ , pois  $a \neq c$  já que as retas não são paralelas.

Agora, tomaremos uma circunferência de centro  $M$  e raio arbitrário  $\rho$  com a seguinte equação:  $\lambda: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ , que intercepta as retas  $r$  e  $s$  em quatro pontos distintos, conforme demonstrado na Figura 32.

Figura 32 – Caso 2:  $r$  e  $s$  não são paralelas

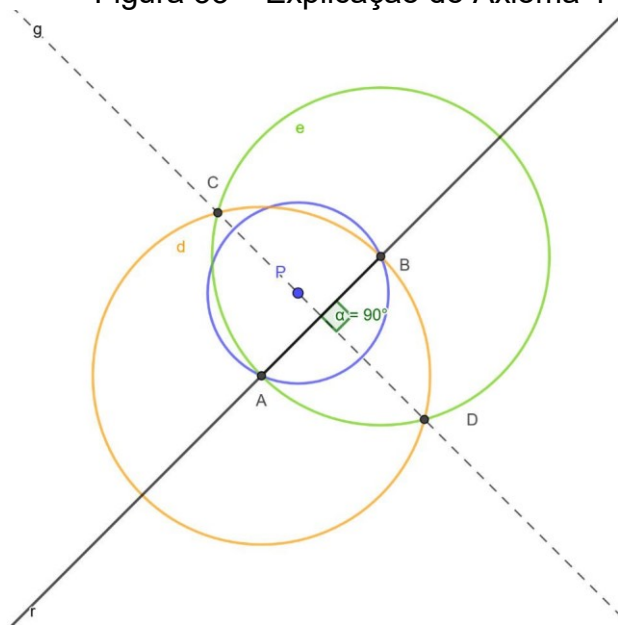


Fonte: elaborada pelo autor.

Sejam  $P$  e  $Q$  pontos resultantes da intersecção da reta  $s$  com a circunferência  $\lambda$  e  $R$  e  $S$  pontos resultantes da intersecção da reta  $r$  com  $\lambda$ ,  $N$  o ponto médio do segmento  $\overline{PR}$  e  $L$  o ponto médio do segmento  $\overline{QS}$ , realizaremos a dobra que passa pelos pontos  $N$  e  $L$ , conforme axioma 1.

Axioma 4: Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , há uma dobra perpendicular a  $r$  que passa por  $P$ .

Figura 33 – Explicação do Axioma 4



Fonte: elaborada pelo autor.

Dado o ponto  $P(x, y)$  e a reta  $r: y = ax + b$ , desenhamos uma circunferência de centro  $P$  e raio maior que a distância entre  $P$  e  $r$ , obtendo como intersecção os pontos  $A$  e  $B$ . Tomando agora como centro, respectivamente, de outras duas circunferências os pontos  $A$  e  $B$ , obtemos como intersecção dessas duas novas circunferências os pontos  $C$  e  $D$ . Ao ligarmos esses pontos, teremos uma reta perpendicular a  $r$  que passa por  $P$ .

A dobra será feita de acordo com o axioma 2, fazendo coincidir  $A$  e  $B$ .

**Axioma 5:** Dados dois pontos,  $A$  e  $B$ , e uma reta  $r$ , se a distância de  $A$  a  $B$  for igual ou superior à distância de  $A$  a  $r$ , há uma dobra que faz incidir  $B$  em  $r$  e que passa por  $A$ .

Dados dois pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  e a reta  $r: y = ax + b$ , pretendemos encontrar a intersecção da reta  $r$  com a circunferência ( $\lambda$ ) de centro em  $B$  e raio  $\overline{AB} = r$ .

$$\lambda: (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 \text{ e } y = ax + b$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - x_2)^2 + (ax + b - y_2)^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - x_2)^2 + (a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2(ax + b)y_2 + y_2^2) = r^2 \Leftrightarrow$$



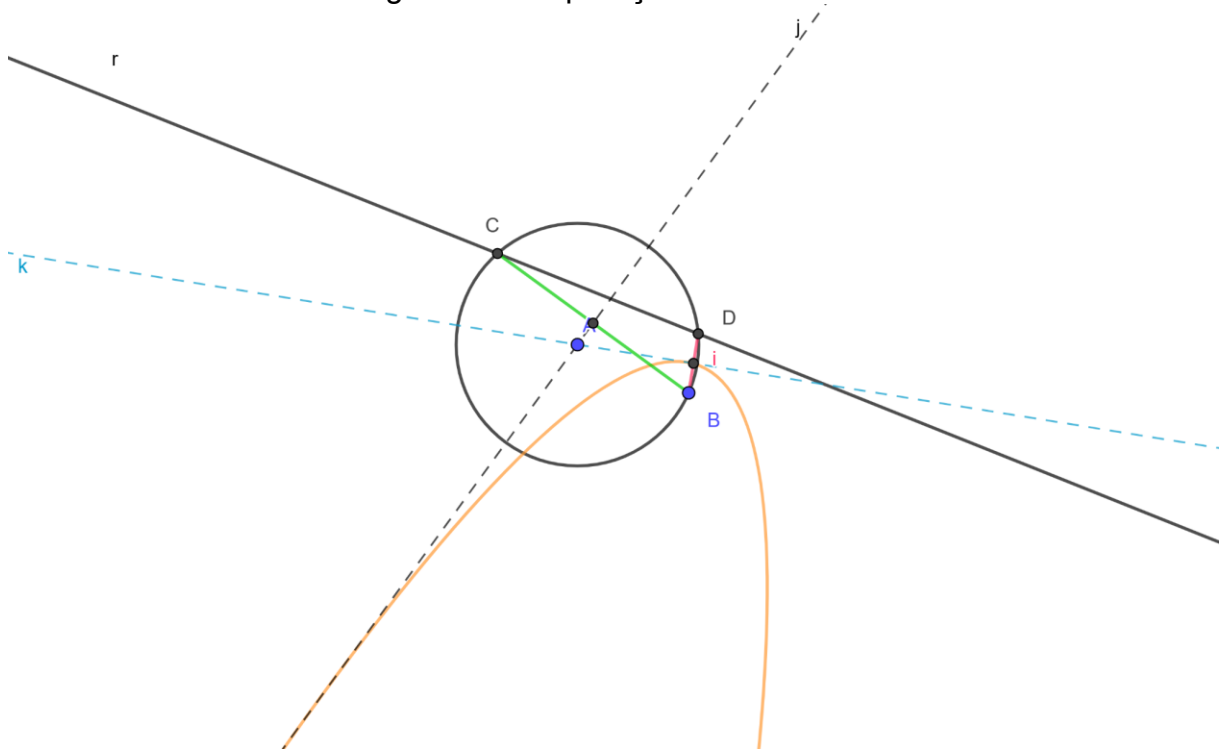
$$(x^2 - 2x_2x + x_2^2) + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ay_2x - 2by_2 + y_2^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$(1 + a^2)x^2 + (-2x_2 + 2ab - 2ay_2)x + (x_2^2 + b^2 - 2by_2 + y_2^2 - r^2) = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau em  $x$ , podemos obter  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$  ou  $\Delta > 0$ .

Se a distância de A a B for menor que a distância de B a  $r$ , teremos  $\Delta < 0$  e não será possível realizar a dobra. Se  $\Delta = 0$ , teremos uma solução e poderemos realizar uma dobra. Se  $\Delta > 0$ , teremos duas soluções e poderemos realizar duas dobras: uma perpendicular ao segmento  $\overline{BC}$  e outra perpendicular ao segmento, ambos passando pelos pontos médios dos segmentos, realizadas conforme o axioma 1, usando os pontos médios e o ponto B.

Figura 34 – Explicação do Axioma 5



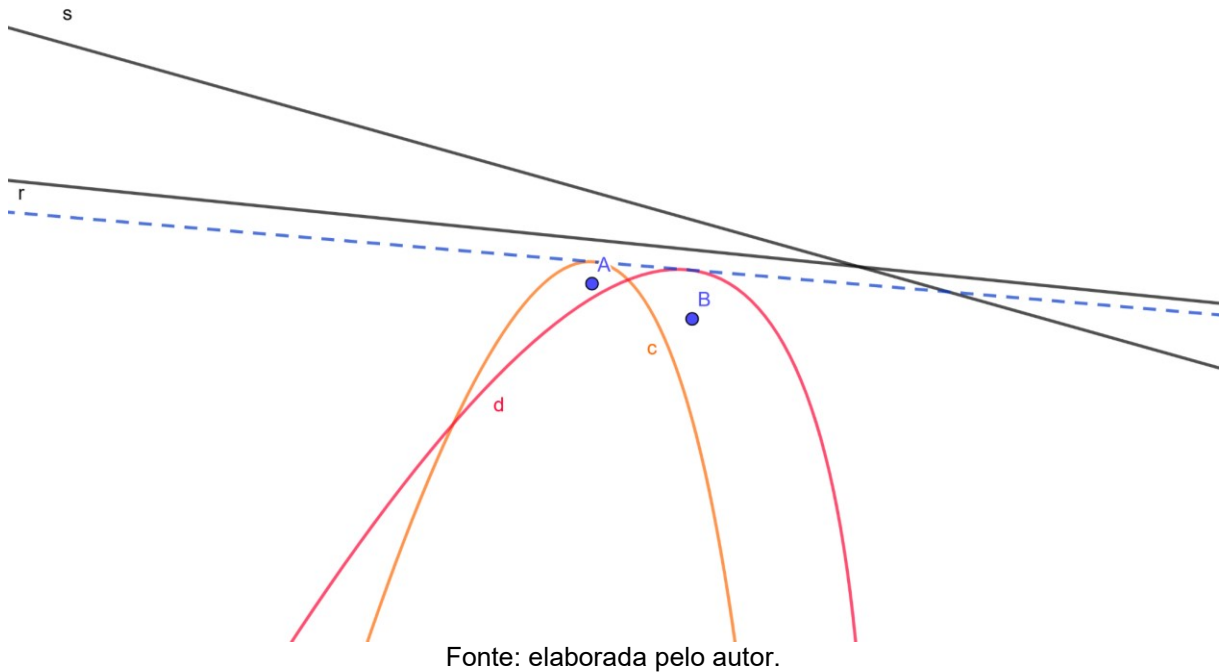
Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que, de acordo com a Figura 34, o que determinamos são retas tangentes à parábola de foco B e reta diretriz  $r$ .

Axioma 6: Dados dois pontos, A e B, e duas retas,  $r$  e  $s$ , se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os

pontos, há uma dobra que faz incidir A em  $r$  e B em  $s$ .

Figura 35 – Explicação do Axioma 6



Se queremos incidir o ponto A sobre a reta  $r$ , aplicamos o axioma 5, o mesmo incidindo o ponto B sobre a reta  $s$ . No axioma 6 em questão deveremos encontrar uma reta que ao mesmo tempo seja tangente a duas parábolas distintas, a primeira com foco em A e diretriz  $r$  e a segunda com foco em B e diretriz  $s$ , conforme demonstrado na Figura 35. O que na realidade equivale a resolver uma equação do terceiro grau, como veremos a seguir.

Vamos considerar, sem perda de generalização, a reta  $r: y = -1$  e  $A = (0,1)$ . Denotemos  $A' = (t, -1)$  o ponto em que A incide sobre a reta  $r$  através da dobragem pretendida.

O vinco formado é formado pela mediatriz do segmento reta  $\overline{AA'}$ , pois, por construção todos os pontos estão à mesma distância de A e B, o vinco e a mediatriz são perpendiculares.

Vamos chamar de M o ponto médio de  $\overline{AA'}$  cujas coordenadas são  $(\frac{t}{2}, 0)$  e a equação da reta ( $n$ ) gerada pelo vinco é dada por  $y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$ . Da mesma forma, o ponto médio de  $\overline{BB'}$  pertence à reta  $n$  onde  $B = (a, b)$  e  $B' = (x, y)$  é o ponto em que B incide na reta  $s$  através da dobragem pretendida. Chamemos esse ponto de

$N = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ . Substituindo em  $(n)$ , temos:

$$\frac{y+b}{2} = \frac{t}{2} \left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{t^2}{4}, \text{ como } n \text{ é tangente às duas parábolas, como visto}$$

acima, os coeficientes angulares de  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  são iguais, então:

$$-\frac{2}{t} = \left(\frac{y-b}{x-a}\right), \text{ substituindo novamente, temos:}$$

$$\frac{y+b}{2} = -\frac{x-a}{y-b} \left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2} \Rightarrow$$

$(y+b)(y-b)^2 = -(x^2 - a^2)(y-b) - 2(x-a)^2$ , o que nos dá uma equação do 3º grau em  $y$  ( $y^3$  e  $x^2y$  termos do terceiro grau).

Observemos ainda que o problema pode ter solução única ou ser impossível (se as duas retas iniciais forem paralelas e a distância entre elas for superior à distância entre os dois pontos).

Axioma 7: dado um ponto  $P$  e duas retas,  $r$  e  $s$ , se as retas não forem paralelas, há uma dobra que faz incidir  $P$  em  $r$  e é perpendicular a  $s$ .

Dados  $P = (x_0, y_0)$ ,  $r: y = ax + b$ ,  $s: y = cx + d$ , tomemos a reta  $t$  paralela a  $s$  passando por  $P$ , temos  $t: y = cx + (y_0 - cx_0)$  e a intersecção de  $r$  e  $t$  é:

$$ax + b = cx + (y_0 - cx_0) \Rightarrow ax - cx = y_0 - cx_0 - b \Rightarrow$$

$$x = \frac{y_0 - cx_0 - b}{a - c}, \text{ substituindo em } t, \text{ temos:}$$

$$y = \frac{c(y_0 - cx_0 - b)}{a - c} + y_0 - cx_0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{cy_0 - c^2x_0 - bc + ay_0 - cy_0 - acx_0 + c^2x_0}{a - c} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-bc + ay_0 - acx_0}{a - c} \Rightarrow y = \frac{ay_0 - acx_0 - bc}{a - c}, \text{ logo a intersecção será:}$$

$$I = \left(\frac{y_0 - cx_0 - b}{a - c}, \frac{y_0 - cx_0 - b}{a - c}\right). \text{ Realiza-se, então, a dobra que faz coincidir os}$$

pontos  $P$  e  $I$ , conforme o axioma 2.

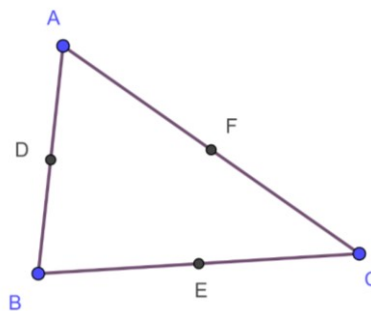
## 4 CONSTRUÇÕES IMPORTANTES

Apresentaremos agora algumas construções que serão úteis em nossa atividade sugerida.

### 4.1 Baricentro

A partir de um triângulo dado ABC encontraremos os pontos médios dos lados AB (fazendo coincidir os vértices A com B), AC (fazendo coincidir os vértices A com C) e BC (fazendo coincidir os vértices B com C).

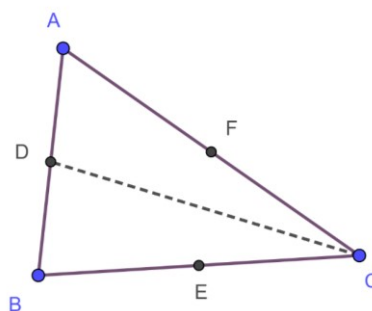
Figura 36 – Construção do baricentro (a)



Fonte: elaborada pelo autor.

Obtemos a dobra CD.

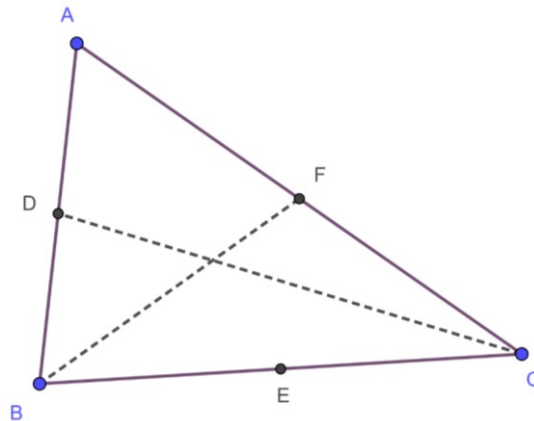
Figura 37 – Construção do baricentro (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Obtemos a dobra BF.

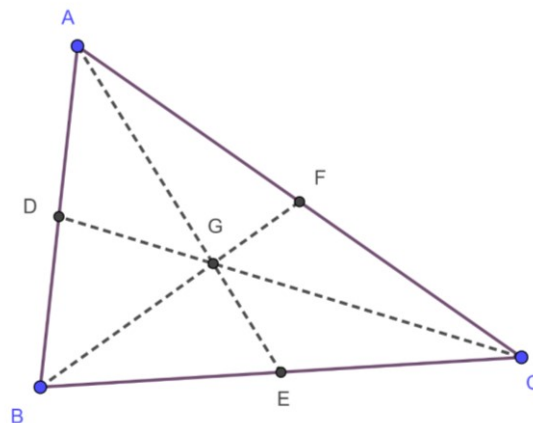
Figura 38 – Construção do baricentro (c)



Fonte: elaborada pelo autor.

Obtemos a dobra AE.

Figura 39 – Construção do baricentro (d)



Fonte: elaborada pelo autor.

O encontro das três dobraduras originais origina o baricentro.

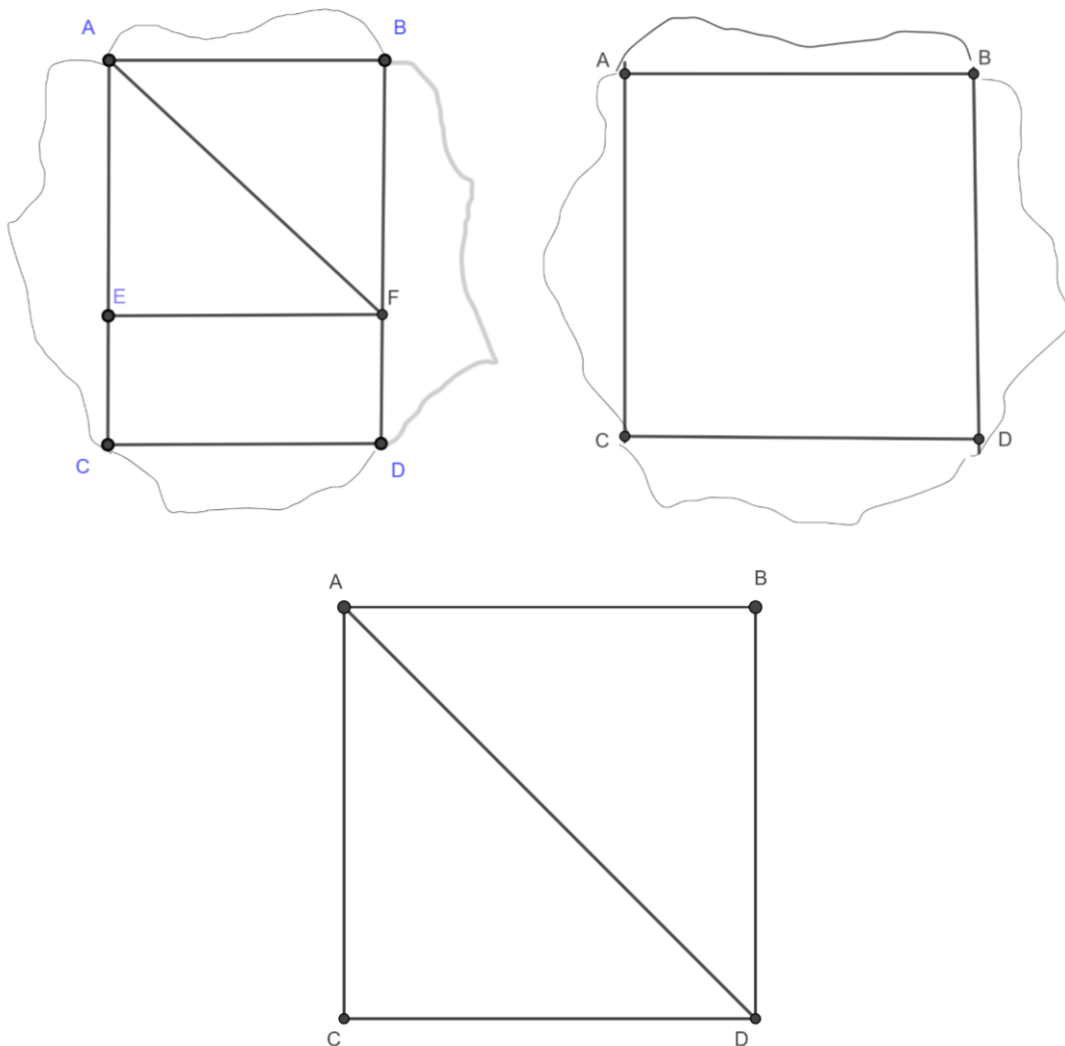
## 4.2 Quadrado

Ao montarmos dobraduras, a maioria dos modelos parte do quadrado, por isso, é importante aprendermos sua dobra. A partir de qualquer pedaço de papel, seguimos os seguintes passos:

- i) dobrar o pedaço de papel sobre ele próprio, perto de uma das bordas;
- ii) dobrar novamente o papel, sobrepondo o vinco anterior a ele próprio;

- iii) repetir o processo (ii) para obter um retângulo de vértices A, B, C e D;
- iv) dobrar o canto superior direito a partir de B sobre o lado esquerdo, até o ponto E, formando o segmento  $\overline{EF}$ ;
- v) dobrar o lado  $\overline{CD}$  sobre o lado  $\overline{EF}$ ;
- vi) o polígono  $[AEBF]$  é um quadrado.

Figura 40 – Construção do quadrado



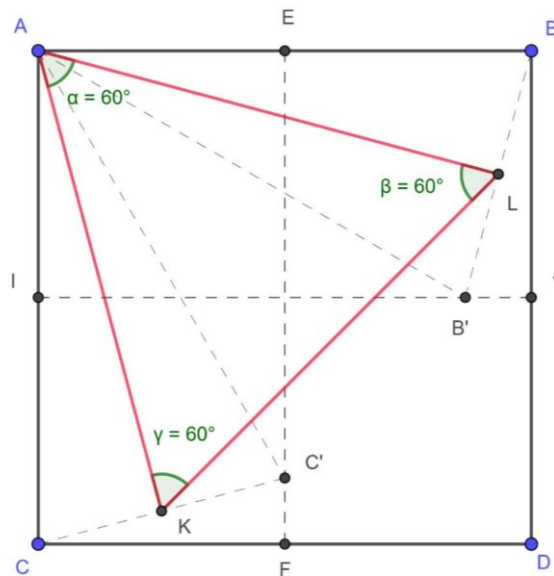
Fonte: elaborada pelo autor.

### 4.3 Triângulo equilátero

Procedimento: a partir de uma folha quadrada, faça incidir C passando por A sobre o segmento  $\overline{EF}$ , obtendo  $C'$ ; faça o mesmo com o ponto B passando por A, sobre o segmento  $\overline{IJ}$ , obtendo  $B'$ .

Chame o ponto médio de  $\overline{CC'}$  de K e nomeie o ponto médio de  $\overline{BB'}$  com L, ligue os pontos K e L obtendo, assim, o triângulo equilátero  $\Delta AKL$ . Esse triângulo, além de ser equilátero, é também o de maior área.

Figura 41 – Construção do triângulo equilátero



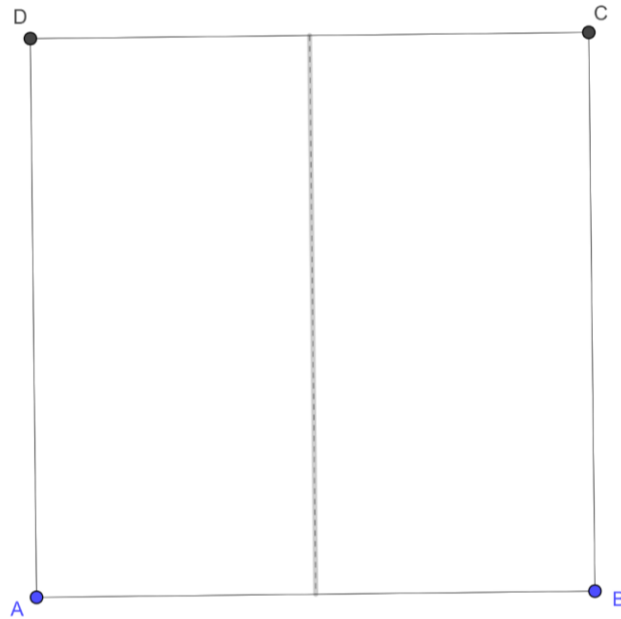
Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que, ao fazermos as dobraduras, obtemos três triângulos isósceles:  $\Delta ACC'$ ,  $\Delta ABB'$  e  $\Delta AB'C'$ , todos semelhantes (LAL), então os ângulos  $\widehat{CAK}$ ,  $\widehat{LAB'}$  são iguais e, portanto, o ângulo  $\hat{A} = 60^\circ$ . Como  $\Delta KAL$  é também isósceles, pois  $\overline{AK} = \overline{AL}$ , então  $\Delta KAL$  é *equilátero*.

#### 4.4 Hexágono regular

Passos: a partir de uma folha quadrada faça uma dobra através do ponto médio de  $\overline{DC}$ .

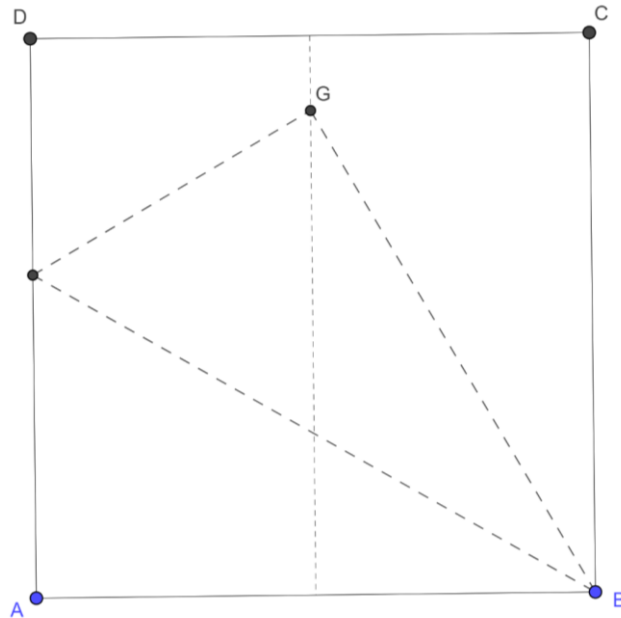
Figura 42 – Construção do hexágono regular (a)



Fonte: elaborada pelo autor.

Dobre o vértice A passando por B até atingir o ponto G.

Figura 43 – Construção do hexágono regular (b)

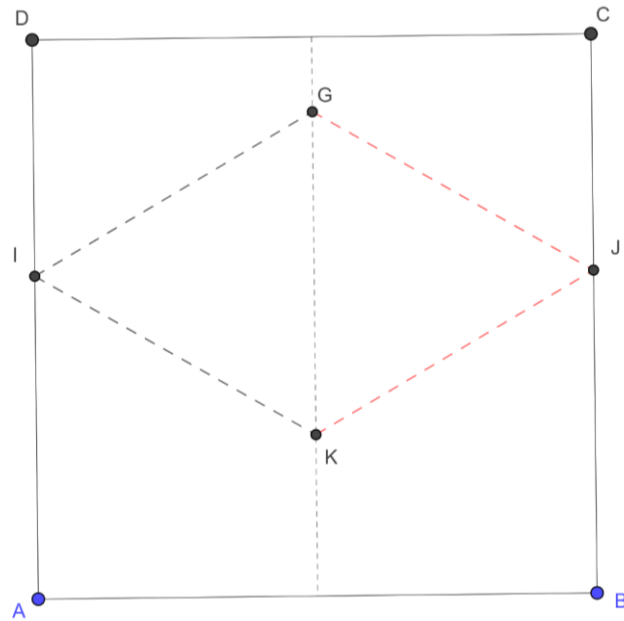


Fonte: elaborada pelo autor.

Dobre o vértice B passando por A até atingir G.



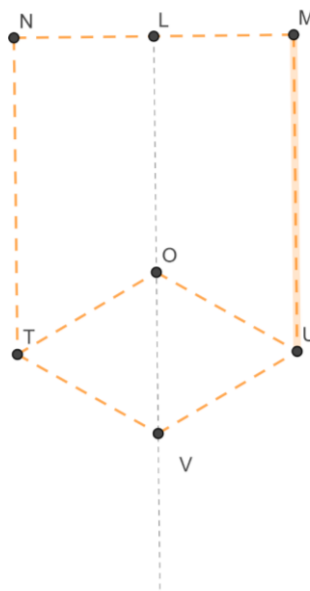
Figura 44 – Construção do hexágono regular (c)



Fonte: elaborada pelo autor.

Dobre o lado  $\overline{DA}$  sobre o segmento que contém  $\overline{GK}$  e faça o meio com o lado  $\overline{CB}$ .

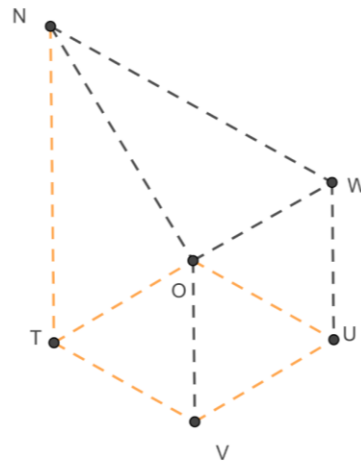
Figura 45 – Construção do hexágono regular (d)



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça coincidir o ponto M com o ponto O passando pelo segmento  $\overline{OL}$ , originando o ponto W.

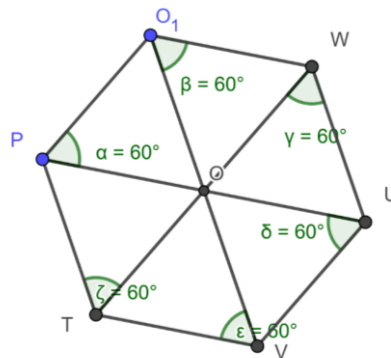
Figura 46 – Construção do hexágono regular (e)



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça coincidir o ponto N com o ponto O, originando o ponto  $O_1$ .

Figura 47 – Construção do hexágono regular (f)



Fonte: elaborada pelo autor.

## 5 ATIVIDADE SUGERIDA

Esta atividade tem como objetivo desenvolver a aquisição de conteúdos por meios e métodos diferentes, dando ênfase nas habilidades e competências, como indica a BNCC (Base Nacional Comum Curricular):

[...] que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho). (BRASIL, 2018, p. 13).

Assim como tentar desenvolver nos estudantes, dentre os diversos tipos de inteligências, aquelas que são mais potencialmente características de cada um, correlacionando-a com as demais. Segundo Gardner (1995):

[...] acreditamos que a competência cognitiva humana é melhor descrita em termos de um conjunto de capacidades, talentos ou habilidades mentais que chamamos de “inteligências”. Todos os indivíduos normais possui cada uma dessas capacidades em certa medida; os indivíduos diferem no grau de capacidade e na natureza de sua combinação. (GARDNER, 1995).

Para tanto, estamos sugerindo uma atividade de construção dos sólidos de Arquimedes, através do icosaedro truncado. Apesar de no presente trabalho estar sendo desenvolvido um sólido específico, nada impede que, durante a atividade, sejam abordadas a construção de outros sólidos, tanto Platônicos como Arquimedianos.

As dobraduras nos auxiliam bastante no desenvolvimento e entendimento da geometria plana, pois, como vimos anteriormente através dos axiomas, podemos construir os elementos necessários para obtermos: ponto médio, retas e posições, triângulos, seus pontos notáveis, polígonos etc. E a partir daí desenvolver construções espaciais.

Objetivo geral: construção do icosaedro truncado (uma opção, também interessante, seria a construção do icosaedro regular e a sua comparação com o truncado).

Objetivos específicos: conhecer através da construção do icosaedro truncado as etapas matemáticas que são necessárias para o seu desenvolvimento; conhecer e desenvolver os conceitos de geometria plana necessários para a

construção; conhecer a relação entre o sólido de Arquimedes e o sólido de Platão.

Metodologia: a atividade será realizada em três etapas.

- Primeira etapa: apresentação do sólido a ser construído, apresentação e detalhamento dos materiais a serem utilizados na confecção dos sólidos;
- Segunda etapa: separar a turma em equipes e cada equipe desenvolverá o sólido específico através da aplicação de dobraduras;
- Terceira etapa: apresentação dos sólidos e suas características para a turma.

Avaliação do aprendizado: evidenciar o que de fato foi aprendido em termos de conhecimentos matemáticos através da confecção do sólido (se houve melhor assimilação dos conteúdos, como, por exemplo, o reconhecimento e identificação do baricentro, dos polígonos regulares, das relações entre as retas...), reconhecer a otimização desse aprendizado através de dobraduras.

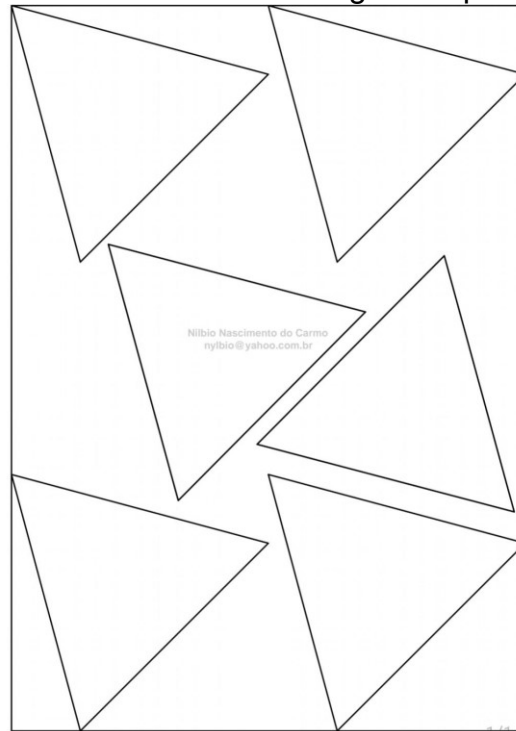
### **5.1 Construindo o icosaedro truncado**

Passo a passo da construção: Sólido de Arquimedes – Icosaedro truncado.

Vamos desenvolver a construção do icosaedro truncado em etapas para que o processo fique mais compreensível.

Primeira etapa: vamos precisar de 120 triângulos equiláteros para construirmos o icosaedro truncado. Para tanto, faremos a impressão de 20 folhas com gramatura entre 120 e 130 g/m<sup>2</sup>, cada uma com seis triângulos equiláteros. Após a impressão, passaremos para o corte dos triângulos. Sugerimos usar um estilete para tornar o corte mais perfeito.

Figura 48 – Moldes dos triângulos equiláteros

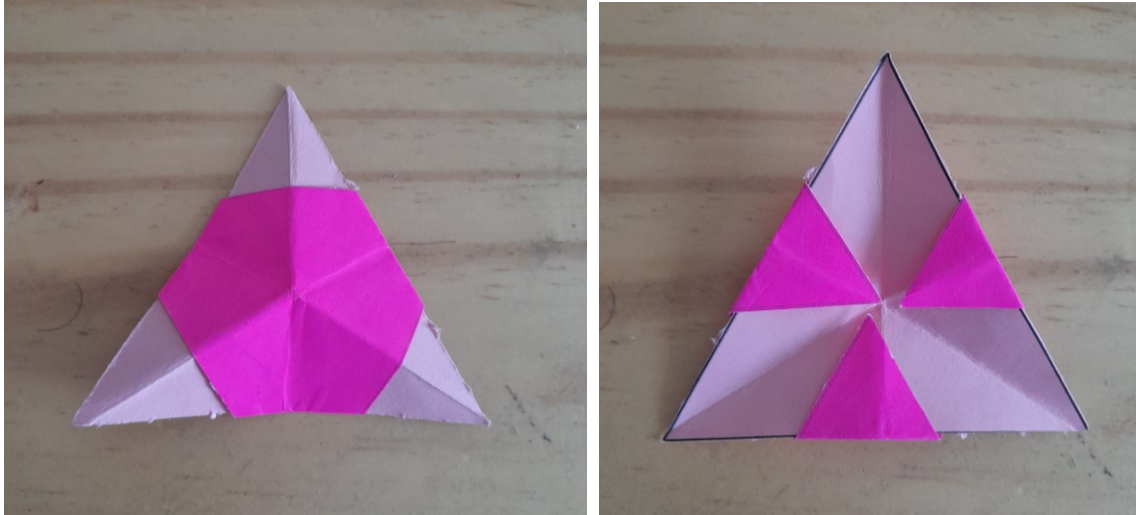


Fonte: elaborada pelo autor.

Segunda etapa: iniciaremos selecionando 2 triângulos e encontrando o baricentro deles. Para tanto, basta dobrar os vértices sobre os outros vértices, pelos três lados. Neste ponto, é importante falarmos sobre o significado do baricentro e sua importância e, se necessário para ampliar o conteúdo, abordar, também, o incentro, o circuncentro e o ortocentro.

Quando acharmos o baricentro sobrepomos um triângulo sobre o outro e faremos uma rotação de  $45^\circ$  no sentido anti-horário, para que fique no formato de uma estrela de 6 pontas. As pontas do triângulo de fora serão dobradas sobre o triângulo de dentro a fim de fixá-lo. A partir da parte de fora constrói-se dobras saindo de cada vértice até o centro, formando uma espécie de estrelinha. Dependendo da agilidade de confecção, esse processo levará de 2 a 5 minutos. Como teremos que confeccionar 60 dessas estrelinhas, teremos, aproximadamente, de 2 a 5 horas, o que pode ser bem menos tempo e também já poderemos trazer a maioria das peças prontas, ou ainda, como o trabalho será feito em equipe com 5 ou 6 componentes, este tempo cai para 20 a 50 minutos.

Figura 49 – “Estrelinhas”



Fonte: elaborada pelo autor.

Terceira etapa: depois de obtermos as estrelinhas formadas pelos triângulos, passamos então para a confecção do icosaedro truncado propriamente dito, alternando na formação de pentágonos e hexágonos.

Tomemos 6 peças (estrelinhas) de forma a encaixá-las para formar um módulo que será usado no final. Repetimos o processo com mais seis peças para formar uma base. A partir de uma das pontas dessa base vamos encaixando as peças para formarmos um hexágono, então ficamos com uma base e um hexágono. Do lado direito e do lado esquerdo desse hexágono vamos fazer dois pentágonos. Do lado dos dois pentágonos faremos hexágonos e fechamos com o pentágono. Observe que temos um hexágono como base e a partir dele alternamos pentágonos e hexágonos.

A partir de então sobraram nove pontas que serão utilizadas na próxima sequência. Colocando uma peça em cada ponta, localizamos um pentágono e em cima dele colocamos uma outra peça originando dois hexágonos e repetimos o processo com o outro pentágono. Em cima dos dois hexágonos colocamos duas peças e repetimos o processo para os outros dois hexágonos. As combinações que tiverem quatro peças serão completadas com mais uma e depois fechamos os hexágonos possíveis. Colocamos três peças nas pontas soltas em cima do pentágono, sobram seis peças que serão colocadas ao lado do pentágono que já está fechado, e com isso temos seis pontas sobrando que serão completadas com a primeira peça que fizemos no começo.

Figura 50 – Base do icosaedro truncado



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 51 – Conjunto de “estrelinhas”



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 52 – Partes do icosaedro truncado



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 53 – Icosaedro truncado



Fonte: elaborada pelo autor.

Quarta etapa: avaliação, conclusão e observações.

Pediremos aos alunos que seja feito um relatório referente ao desenvolvimento da construção do icosaedro truncado, observando quais figuras foram necessárias para essa construção, as relações entre elas e quais impressões foram obtidas através de toda a dinâmica de construção.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscou-se apresentar neste trabalho o desenvolvimento dos conteúdos de geometria espacial sólidos de Platão e Arquimedes, no sentido de reforçar o que normalmente os alunos veem de Platão e apresentar os de Arquimedes. Para tanto, procurou-se utilizar como ferramenta dessa construção as dobraduras.

Na fundamentação teórica foram abordados de cada sólido em questão a sua planificação, seu formato espacial, seus elementos e algumas curiosidades.

Para tratarmos sobre dobraduras esboçou-se um breve histórico sobre esta técnica e em seguida foram apresentados os axiomas que são a base para o trabalho. Através desses axiomas, foram construídas figuras que formarão a estrutura para o desenvolvimento da atividade sugerida, no caso: o baricentro, o quadrado, o triângulo equilátero e o hexágono regular.

A atividade sugerida gira em torno da construção de um dos sólidos de Arquimedes, porém nada impede que sejam confeccionados outros sólidos. Escolheu-se esse para trabalhar os elementos que os constituem.

Percebe-se que a cada ano que passa com o dinamismo do crescimento digital, as novas metodologias ativas, o protagonismo do estudante, surge uma demanda de dar uma contribuição de acordo com essas novas expectativas. O presente trabalho buscou desenvolver no estudante do ensino médio uma ação que o conduza a trabalhar a coletividade, desenvolver de forma lúdica a atividade matemática e gerar conhecimento e aprendizado.

Para uma melhor visualização dos sólidos sugerimos o livro *Sólidos Platônicos e Arquimedianos* onde o autor desenvolve os sólidos através do GeoGebra (PIRES, 2019), o que também pode ser realizado como complemento ao trabalho feito com origami.

As dobraduras favorecem sobremaneira o estudo e a visualização tanto da geometria plana como da espacial, e é um campo vasto e fértil para ser trabalhado.

## REFERÊNCIAS

ALVES, Célia Jordão. **Poliedros regulares**. Imagens para a Matemática. 2 ago. 2011. Disponível em: <http://matimage.blogspot.com/2011/08/poliedros-regulares.html#axzz82AXjrQst>. Acesso em: 19 maio 2023.

BARROSO, Carlos. Ensino de Matemática. **Planificação de Poliedros**. 4 dez. 2019. Disponível em: <https://ensinodematemtica.blogspot.com/2012/10/planificacao-de-poliedros.html?m=1>. Acesso em: 19 maio 2023.

BOALER, Jo. **O que a matemática tem a ver com isso?** Porto Alegre: Penso, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 19 maio 2023.

BULIGON, Beatriz Alberton. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. Produções Didático-Pedagógicas. Salto da Lontra, PR: Secretaria de Educação do Paraná, 2016.

CAVACAMI, Eduardo. **Aplicações de origami com recortes como formas de ensino**. 2007. 82 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.

DERIVANDO A MATEMÁTICA. **Os 13 sólidos Arquimedianos e suas particularidades no GeoGebra**. Campinas, SP: IME, 2019. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~apmat/solidos-arquimedianos-2/>. Acesso em: 19 maio 2023.

FIORENTINI, Dário; NACARATO, Aldair Mendes (org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**. São Paulo: Musa, 2005.

FRENKEL, Edward. **Amor e matemática: o coração da realidade escondida**. Rio de Janeiro: Casa da Palavra, 2014.

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas: a teoria na prática**. Porto Alegre: Artmed, 1995.

MATHEMATIKOS. **Por que só existem cinco Poliedros Platônicos?** Porto Alegre: UFRGS, 2003. Disponível em: <http://mathematikos.mat.ufrgs.br/disciplinas/ufrgs/mat01039032/webfolios/grupo1/poliedros/platonicos.html>. Acesso em: 19 maio 2023.

MOHR, Ana Regina da Rocha; BRITTO, Silvio Luiz Martins. Sólidos arquimedianos: um estudo sobre troncaduras e suas construções no Ensino Médio. **Universo Acadêmico**, Taquara, v. 9, n. 1, p. 231-254, jan./dez. 2016.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. **Origami**: história de uma geometria axiomática. 2008. 119 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Matemática. Geometria espacial. **Sólidos de Platão**. PrePara ENEM: Goiânia, 2023. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/solidos-de-platao.htm>. Acesso em: 19 maio 2023.

PIN, Odair José; URIBE, Eugenia Brunilda Opazo. Os axiomas de Huzita-Hatori e o ensino da geometria euclidiana plana através da construção de polígonos. **Colloquium Exactarum**, Presidente Prudente, v. 8, n. esp., p. 39-44, jul./dez. 2016.

PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática. **Regimento**. PROFMAT: Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/regimento/#:~:text=t%C3%ADtulo%20de%20Mestre.-,Art.,profiss%C3%A3o%20de%20professor%20de%20Matem%C3%A1tica>. Acesso em: 19 maio 2023.

TUTOR BRASIL. Fórum de Matemática. IME/ITA. **(ITA-1979) Geometria Espacial**. 8 jul. 2012. Disponível em: <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=23815>. Acesso em: 19 maio 2023.

PIRES, Erick Gomes. **Sólidos Platônicos e Arquimedianos**. GeoGebra, 2019. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ywgy5ppy>. Acesso em: 19 maio 2023.

## APÊNDICE A – POLIEDROS DE PLATÃO

Diz-se que um poliedro é platônico se, e somente se:

- I. For convexo;
- II. Em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas ( $m$ );
- III. Toda face tiver o mesmo número de arestas ( $n$ );
- IV. For válida a relação de Euler  $V + F = A + 2$ .

Só existem cinco poliedros de Platão.

Demonstração (algébrica):

Seja  $n$  o número de lados de cada face de um poliedro e  $m$  o número de arestas que concorrem no mesmo vértice. Temos que  $2A = nF = mV$ , donde  $V = \frac{nF}{m}$ .

Usando a relação de Euler ( $V + F = A + 2$ ), temos:

$$F + V = A + 2 \Rightarrow \frac{nF}{2} + 2 = F + \frac{nF}{m} \Rightarrow mnF + 4m = 2mF + 2nF \Rightarrow$$

$$F = \frac{4m}{2m+2n-mn}.$$

É preciso que se tenha

$$2m + 2n - mn > 0 \Rightarrow 2n > m(n - 2) \geq 3(n - 2), \text{ pois } m \geq 3.$$

$$\text{Ou seja, } 2n > 3(n - 2) \Rightarrow n < 6, \text{ logo } 2 < n < 6.$$

Portanto,  $n = 3, n = 4, n = 5$ .

a) Para  $n = 3 \Rightarrow F = \frac{4m}{6-m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < 6$  e  $m = 3 \Rightarrow F = 4$  (tetraedro),

$$m = 4 \Rightarrow F = 8 \text{ (octaedro), } m = 5 \Rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro).}$$

b) Para  $n = 4 \Rightarrow F = \frac{4m}{8-2m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < 4$  e  $m = 3 \Rightarrow F = 6$  (hexaedro).

c) Para  $n = 5 \Rightarrow F = \frac{4m}{10-3m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < 10$  e  $m = 3 \Rightarrow F = 12$  (dodecaedro).

Tabela 1 – Características dos cinco poliedros regulares

Nome	Faces (F)	Vértices (V)	Arestas (A)	n	m
Tetraedro	4	4	6	3	3
Hexaedro	6	8	12	4	3
Octaedro	8	6	12	3	4
Dodecaedro	12	20	30	5	3
Icosaedro	20	12	30	3	5

Fonte: elaborada pelo autor.

## APÊNDICE B – SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS

Existem 13 sólidos arquimedianos nos quais cada uma de suas faces são polígonos regulares e em cada vértice temos as mesmas configurações de faces.

A demonstração aqui apresentada foi retirada do artigo Sólidos Arquimedianos (DERIVANDO..., 2019) com algumas adaptações pontuais.

Todos esses 13 sólidos arquimedianos são obtidos através de transformações nos sólidos de Platão como o truncamento, que consiste em dividir as arestas do poliedro em partes iguais e construir nesses pontos novos vértices. Na realidade, 11 desses sólidos são obtidos através de cortes (**truncamentos**) nos sólidos platônicos, e são eles: **tetraedro truncado**, **cubo truncado**, **cuboctaedro**, **rombicuboctaedro**, **cuboctaedro truncado**, **octaedro truncado**, **icosaedro truncado**, **dodecaedro truncado**, **icosidodecaedro**, **rombicoidodecaedro** e o **icosidodecaedro truncado**.

Enquanto que os 2 restantes (cubo snub e dodecaedro snub) são obtidos através do processo de **snubificação**. Em poucas palavras, a snubificação é o processo de afastar as faces de um poliedro e preencher os espaços vazios com outros polígonos, e em alguns casos, é necessário também rotacionar estas faces. (DERIVANDO..., 2019).

Os poliedros semirregulares, por sua vez, são aqueles que contêm apenas polígonos regulares como faces e de cada vértice incide a mesma sequência de faces: “por exemplo, o tetraedro é um poliedro semi regular com apenas polígonos regulares nas faces e de cada vértice incide a sequência (3,3,3)” (DERIVANDO..., 2019).

Lema: Em poliedros convexos, a soma dos ângulos em um vértice deve ser menor que  $2\pi$ .

Lema: A soma dos ângulos de um polígono de  $n$  lados é  $(n - 2)\pi$ .

Demonstração:

Usaremos um critério numérico para limitar os possíveis comportamentos em um vértice e mostraremos a existência e unicidade dos sólidos.

Como os sólidos são convexos, a soma dos ângulos em um vértice deve ser menor que  $2\pi$ . Além disso, a soma dos ângulos internos de um polígono regular é  $(n - 2)\pi$ . Então, em um vértice  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  temos:

$$\sum_{i=1}^k \frac{a_i - 2}{a_i} \pi < 2\pi \Rightarrow \sum_{i=1}^k -\frac{a_i}{a_i} + \frac{2}{a_i} > -2 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{2}{a_i} > k - 2 \quad (1)$$

( $k$  é o número de faces do sólido em torno de um vértice).

Essa é a nossa restrição numérica para as possíveis configurações de

vértices. Veja que  $3 \leq k \leq 5$ , pois como cada polígono regular é pelo menos um triângulo, se tivéssemos  $k \geq 6$ , a soma dos ângulos em torno de um vértice seria maior ou igual a  $2\pi$ .

Caso 1:  $k = 3$

Cada vértice tem três faces, sejam elas  $(a, b, c)$ . Então, substituindo em (1), obtemos:

$$\sum_{i=1}^3 > k - 2 \Rightarrow \frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{2}{a_3} > 3 - 2 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \quad (2)$$

Se  $a = b = c$  então temos que  $\frac{3}{a} > \frac{1}{2} \Rightarrow a < 6$ , ou seja,  $a = 3, 4, 5$  e isso corresponde a três dos 5 sólidos platônicos:

(3,3,3) – Tetraedro regular;

(4,4,4) – Cubo;

(5,5,5) – Dodecaedro.

Se pelo menos duas das três  $a, b, c$  são diferentes, digamos  $a \neq b$ , então ao percorrermos as arestas de uma face  $c$ , as faces adjacentes devem alternar entre  $a$  e  $b$ . Portanto,  $c$  deve ser par. Essa restrição, junto da desigualdade (2), limita as possibilidades para  $(a, b, c)$ .

Se  $c = 4$ , temos  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{4}$ ,  $a \neq b$  e novamente vamos ver as possibilidades:

- se  $a = 3$ , então devemos ter  $b = 4$  pelo critério de Walsh, que diz que para todo  $p$  ímpar que temos na sequência de uniformidade, ele deve estar entre dois pares iguais  $(b, p, b)$ . Neste caso, obtemos (3,4,4), 3-prisma (está na classe dos n-prismas).

Podemos usar este caso para generalizar:

- se  $a$  é um ímpar qualquer, devemos ter  $b = 4$  pelo critério de Walsh, o que nos dá:

(4,4, $n$ ) – N-prisma.

- se  $a = 4$ ,  $b$  pode ser qualquer pois a desigualdade sempre vale para  $b \geq 3$ .
- se  $a = 6$ , temos que  $b$  não pode ser ímpar, pelo critério de Walsh, e  $b \neq 6$ . Então, pela desigualdade, obtemos que  $8 \leq b < 12$  e assim:

- se  $b = 8$ , temos:  
(4,6,8) – Cuboctaedro truncado.
- se  $b = 10$ , temos:  
(4,6,10) – Icosidodecaedro truncado.
- se  $a = 8$ , temos que  $b$  não pode ser ímpar pelo critério de Walsh e  $b \neq 8$ :
  - se  $b = 4$  temos N-prisma como anteriormente.
  - se  $b \geq 10$  não satisfaz a desigualdade.
- se  $a = 10$ ,  $b$  não pode ser ímpar e:
  - se  $b = 4$  temos N-prisma.
  - e daqui em diante todos os casos não valem ou são antiprismas.

Se  $c = 6$ , temos  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{3}$ ,  $a \neq b$  e novamente vamos ver as possibilidades:

- se  $a$  é um ímpar qualquer, devemos ter  $b = 6$  pelo critério de Walsh, e neste caso:  $3 \leq a < 6$ .
  - se  $a = 3$ , temos:  
(3,6,6) – Tetraedro truncado.
  - se  $a = 5$ , temos:  
(5,6,6) – Icosaedro truncado.

Se  $a = 4$ , obtemos que  $b > 4$  (pois  $a \neq b$ ) e  $b < 12$  para satisfazer a desigualdade. Mas  $b$  não pode ser ímpar pelo critério de Walsh. Resta que  $b = 6$ ,  $b = 8$  ou  $b = 10$ . Mas os casos  $b = 8$  e  $b = 10$  nós já classificamos e resta o caso:

- $b = 6$  e temos:  
(4,6,6) – Octaedro truncado.
- se  $a = 6$  temos  $3 \leq b < 6$ , ou seja,  $b = 3,4,5$ . Mas já listamos todos estes casos.
- se  $a = 8$ ,  $b$  não pode ser par e  $b \neq 8$ :
  - se  $b = 4$ , a desigualdade não é satisfeita, o que descarta o caso  $a = 8$ .

Logo, a partir de  $a = 8$  (com  $a$  par) a desigualdade deixa de ser satisfeita.

Se  $c = 8$ , temos  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{8}$  com  $a \neq b$ :

- se  $a$  é um ímpar qualquer, devemos ter  $b = 8$  pelo critério de Walsh, e neste caso, pela desigualdade  $3 < a < 4$ , ou seja,  $a$  só pode ser 3 e temos o caso:

(3,8,8) – Cubo truncado.

- se  $a$  é par, ele deve ser ao menos 4 e, neste caso,  $b$  não pode ser ímpar pelo critério de Walsh.
- se  $a = 4$ ,  $b = 6$  (pois  $a \neq b$ ) e neste caso a desigualdade não é satisfeita.
- se  $a = 6$ ,  $b = 4$  (pois  $a \neq b$ ) e novamente ela não é satisfeita.
- para  $a > 6$  podemos concluir que a desigualdade não vale e encerramos este caso.

Se  $c = 10$  temos  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{5}$  com  $a \neq b$ :

- se  $a$  é um ímpar qualquer, devemos ter  $b = 10$  pelo critério de Walsh, e neste caso, pela desigualdade  $3 \leq a \leq \frac{10}{3}$ , ou seja,  $a$  só pode ser 3 e temos o caso:

(3,10,10) – Dodecaedro truncado.

- se  $a$  é par, ele deve ser ao menos 4 e, neste caso,  $b$  não pode ser ímpar pelo critério de Walsh.
  - se  $a = 4$ ,  $b = 6$  (pois  $a \neq b$ ) e neste caso a desigualdade não é satisfeita.
  - para qualquer  $a \geq 4$  a desigualdade não vale e encerramos este caso.

Se  $c = 12$  temos  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{5}{12}$  com  $a \neq b$ :

- se  $a$  é um ímpar qualquer, devemos ter  $b = 12$  e neste caso, temos  $a < 3$ , o que é impossível.
- se  $a$  é um par,  $b$  não pode ser ímpar, temos:
  - se  $a = 4$ ,  $b = 6$  (pois  $a \neq b$ ) e neste caso a desigualdade não é satisfeita e o mesmo ocorre daqui pra frente.

Logo, a partir de  $c = 10$  não temos uma solução para a desigualdade, o que encerra o caso  $k = 3$ .



Caso 2:  $k = 4$

Cada vértice tem 4 faces, sejam elas  $(a, b, c, d)$ . Então substituindo em (1), obtemos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > 1$$

Se  $a = 3$  temos agora outra limitação. Olhando para o que ocorre na borda de um triângulo, vemos que em cada vértice do triângulo  $b$  e  $d$  são faces opostas pelo vértice, compartilhando uma aresta com o triângulo, enquanto  $c$  é oposto do triângulo em cada vértice. Disto segue que  $b = d$ .

- O caso mais simples é quando temos que  $a = b = c = d$  e neste caso obtemos um poliedro de Platão que já conhecemos:

$(3,3,3,3)$  – Octaedro regular

- Como  $a = 3$  (fixado) e  $b = d$ , se tivermos:

- se  $b = d = 3 \Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{3}{3} > 1$  e  $c$  é qualquer. Temos:

$(3,3,3,n)$  – N-antiprisma, com  $c > 3$ .

- Se  $b = d = 4$  e podemos ter:

- $c = 3$  temos:

$(3,4,3,4)$  – Cuboctaedro.

- $c = 4$  temos:

$(3,4,4,4)$  – Rombicuboctaedro – pseudorombicuboctaedro.

- $c = 5$  temos:

$(3,4,5,4)$  – Rombicosidodecaedro

- $c = 6$  temos que a desigualdade não é satisfeita.

- Se  $b = d = 5$  podemos ter:

- $c = 3$  temos:

$(3,5,3,5)$  – Icosidodecaedro

- $c = 4$  temos que a desigualdade não é satisfeita.

- Se  $b = d = 6$  não existe  $c \geq 3$  que satisfaça a desigualdade.

Se nenhuma das faces é igual a 3, o caso inicial é termos  $a = b = c = d = 4$ , mas veja que estes valores não satisfazem a desigualdade  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \not> 1$ . O que encerra o caso  $k = 4$ .

Caso 3:  $k = 5$ :

Cada vértice tem 5 faces e a desigualdade fica:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{2}{a_i} > 3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} > \frac{3}{2}$$

O caso mínimo é termos  $a = b = c = d = e = 3$  e neste caso temos:

(3,3,3,3,3) – Icosaedro regular.

Se ao menos um número da sequência é diferente de 3, seja ele o número  $e$ , temos:

- se  $e = 4$  temos:
  - (3,3,3,3,4) – Cubo snub.
- se  $e = 5$  temos:
  - (3,3,3,3,5) – Dodecaedro snub
- se  $e = 6$  temos que a desigualdade não é satisfeita.

Se mais de um deles é diferente de 3, o caso mínimo é serem  $d = e = 4$ , mas isto não satisfaz a desigualdade, o que encerra este caso.

Logo, existem apenas 13 sólidos de Arquimedes.