



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**DOUTORADO EM FÍSICA**

**DÉBORA AGUIAR GOMES**

**ENTROPIA DE BURACOS NEGROS EM GRAVIDADE MODIFICADA**

**FORTALEZA**

**2023**

DÉBORA AGUIAR GOMES

ENTROPIA DE BURACOS NEGROS EM GRAVIDADE MODIFICADA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

G613e Gomes, Débora Aguiar.

Entropia de Buracos Negros em Gravidade Modificada / Débora Aguiar Gomes. – 2023.  
83 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Entropia de Buracos Negros. 2. Gravidade Modificada. 3. Violação da Simetria de Lorentz. 4. Teorias Teleparalelas.. I. Título.

CDD 530

---

DÉBORA AGUIAR GOMES

ENTROPIA DE BURACOS NEGROS EM GRAVIDADE MODIFICADA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 03/02/2023.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos Alex Souza da Silva  
Instituto Federal de Tianguá (IFCE - Tianguá)

---

Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Davi Monteiro Dantas  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

## **AGRADECIMENTOS**

Esta tese é o resultado de anos de trabalho, que culminaram nos resultados apresentados aqui. Entretanto, ela não seria possível sem ajuda e apoio de diversas pessoas.

Ao Ewerton, Beatriz, Sarah e Anderson pela amizade e apoio incondicional.

Aos colegas do LASSCO, em especial ao Prof. Dr. Euclides da Silva e ao Dr. Victor dos Santos, que me ajudaram em parte desta jornada.

Aos colegas da Universidade de Tartu, pela hospitalidade e, principalmente ao Prof. Dr. Tomi Koivisto e Dra. Aneta Wojnar pela colaboração, ensinamentos e orientação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto, que tem supervisionado toda a minha jornada, não somente durante o doutorado, mas desde a graduação e contribuído com sua experiência, orientação e encorajamento.

Ao Departamento de Física pela infraestrutura e apoio técnico oferecidos. Ao CNPq pelo apoio financeiro. Ao Programa Dora+ pelo apoio financeiro durante minha visita à Universidade de Tartu.

## RESUMO

Apesar do sucesso da Relatividade Geral, existem razões teóricas e experimentais que motivam a investigação de modificações dessa teoria. Por outro lado, sabe-se que buracos negros possuem propriedades termodinâmicas que estão relacionadas a geometria do espaço-tempo e que, portanto, são sensíveis a correções à Relatividade Geral. Neste trabalho, estudamos a entropia de buracos negros em gravidade modificada. Para tanto, na primeira parte, consideramos teorias onde a simetria de Lorentz é quebrada. Utilizando o método do tunelamento quântico, investigamos as propriedades termodinâmicas de buracos negros e como estas são influenciadas pela violação da simetria de Lorentz. Na segunda parte, consideramos o formalismo de Wald que relaciona correntes de Noether de difeomorfismos a entropia de buracos negros. Por fim, aplicamos esse formalismo a teorias teleparalelas.

**Palavras-chave:** entropia de buracos negros; gravidade modificada; violação da simetria de Lorentz; teorias teleparalelas.

## ABSTRACT

Despite the success of General Relativity, there are theoretical and experimental reasons which motivate the investigation of modifications of this theory. On the other hand, it is known that black holes have thermodynamic properties that are related to space-time geometry and, thus, are sensitive to corrections to General Relativity. In this work, we study the entropy of black holes in modified gravity. With that in mind, in the first part, we consider theories where the Lorentz symmetry is broken. Using the quantum tunneling method, we investigate the thermodynamic properties of black holes and how these are influenced by the violation of Lorentz symmetry. In the second part, we consider the Wald formalism that relates Noether currents due to diffeomorphisms to the entropy of black holes. Finally, we apply this formalism to teleparallel theories.

**Keywords:** black hole entropy; modified gravity; Lorentz symmetry violation; teleparallel theories.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Subclasses de geometrias métrico-afim. Fonte: [45]. . . . .	31
Figura 2 – Descrições equivalentes da Gravidade. Adaptado de : [46] . . . . .	33
Figura 3 – Comportamento da temperatura e da razão da temperatura para diversos valores do parâmetro <i>rainbow</i> . Fonte: [32]. . . . .	63
Figura 4 – Comportamento da entropia e da razão da entropia para diversos valores do parâmetro <i>rainbow</i> . Fonte: [32]. . . . .	63
Figura 5 – Variação da entropia em função da massa para diversos valores de parâmetro <i>rainbow</i> e partículas com uma mesma energia. Fonte: [32]. . . . .	65
Figura 6 – Variação da entropia em função da massa para um parâmetro <i>rainbow</i> fixo e diversos valores de energia. Fonte: [32]. . . . .	66
Figura 7 – Correlações para emissões de partículas. Fonte: [32]. . . . .	67

## LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
RG	Relatividade Geral
LSB	Lorentz Symmetry Breaking (na sigla em inglês)
MDR	Modified Dispersion Relations (na sigla em inglês)
TEGR	Teleparallel Equivalent of General Relativity (na sigla em inglês)
STGR	Symmetric Teleparallel Equivalente of General Relativity (na sigla em inglês)
GHY	Gibbons–Hawking–York (termo de fronteira)

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Minkowski Spacetime metric
$g_{\mu\nu}$	Curved spacetime metric
$\ell, L$	Parâmetros de <i>bumblebee</i>
$\gamma$	Parâmetro de <i>rainbow</i>
$Q$	Non-metricity scalar
$P^\alpha{}_{\mu\nu}$	Superpotencial

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ . . . . .	14
2.1	Motivação . . . . .	14
2.1.1	<i>Violação da Simetria de Lorentz</i> . . . . .	15
2.2	Modelo de <i>Bumblebee</i> . . . . .	16
2.2.1	<i>Métrica B</i> . . . . .	18
2.2.2	<i>Métrica C</i> . . . . .	21
2.3	Gravidade <i>Rainbow</i> . . . . .	24
3	TEORIAS TELEPARALELAS . . . . .	27
3.1	Princípio da Equivalência . . . . .	27
3.2	Geometria Métrico-Afim . . . . .	28
3.3	Trindade Geométrica da Gravidade . . . . .	31
3.4	Teoria Teleparalela Equivalente da Relatividade Geral . . . . .	33
3.5	Teoria Teleparalela Simétrica Equivalente da Relatividade Geral . . . . .	36
4	ENTROPIA DE BURACOS NEGROS . . . . .	42
4.1	Termodinâmica de Buracos Negros . . . . .	42
4.2	Método de Tunelamento . . . . .	43
4.3	Método da Ação Euclidiana . . . . .	46
4.4	Método de Wald . . . . .	50
4.4.1	<i>Aplicação a Relatividade Geral</i> . . . . .	55
5	TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ . . . . .	57
5.1	Termodinâmica de Buracos Negros de <i>Bumblebee</i> . . . . .	57
5.1.1	<i>Métrica B</i> . . . . .	57
5.1.2	<i>Métrica C</i> . . . . .	61
5.2	Termodinâmica e Correlação para Buracos Negros em Gravidade <i>Rainbow</i> . . . . .	61
6	CORRENTES DE NOETHER E ENTROPIA EM GRAVIDADE TELE- PARALELA . . . . .	68
6.1	Lagrangiano e Equações de Movimento . . . . .	68

6.2	Correntes . . . . .	70
6.3	Exemplos . . . . .	72
6.3.1	<i>Relatividade Geral</i> . . . . .	72
6.3.2	<i>Teleparalelismo</i> . . . . .	73
6.4	Entropia . . . . .	75
7	CONCLUSÃO . . . . .	77
	REFERÊNCIAS . . . . .	78

## 1 INTRODUÇÃO

Mesmo após mais de um século, a Relatividade Geral (RG) é a melhor descrição da Gravidade que temos atualmente. As razões para isso são, entre outras, sua consistência e elegância matemática e sua concordância com as observações na escala do sistema solar. Isso não significa, no entanto, que a teoria seja perfeita. É bem sabido, por exemplo, que RG não explica a expansão acelerada do universo bem como a discrepância entre as curvas de rotação de galáxias preditas e observadas.

Historicamente, quando as observações desafiam uma teoria bem estabelecida, geralmente há dois caminhos a serem seguidos: considerar que temos uma fonte de matéria estranha ou propor uma nova teoria. Por exemplo, as anomalias na órbita de Urano foram explicadas pela existência de outro planeta – Netuno – que só foi descoberto mais tarde. Por outro lado, a precessão observada no periélio de Mercúrio só pôde ser explicada com o advento do RG.

Seguindo o primeiro caminho, argumenta-se que a aceleração tardia do universo ocorre devido a algum tipo de Energia Escura, enquanto a discrepância das curvas de rotação das galáxias são o resultado de uma Matéria Escura. No entanto, após décadas de pesquisa, a origem e a natureza da Matéria Escura e da Energia Escura ainda não foram desvendadas. Isso nos leva ao segundo caminho: considerar que RG é uma teoria incompleta e que o Setor Escuro do Universo é apenas uma forma de lidar com nossa falta de compreensão da interação gravitacional em grandes escalas.

Outro desafio para RG é a tensão  $H_0$  que se refere à discrepância dos valores da constante de Hubble medidos por diferentes experimentos. A razão por trás disso pode ser nosso uso impreciso da RG como a teoria padrão para a gravidade em grandes escalas. De fato, a aceleração tardia do universo indica que devemos reexaminar se o modelo padrão da cosmologia deve ser baseado em RG ou outra teoria da gravidade.

Por outro lado, a almejada unificação da RG e da Mecânica Quântica parece ser uma realização distante. Espera-se que a conciliação entre as duas teorias surtisse em pequenas escalas ou no limite de altas energias, onde a RG não está bem definida.

Consequentemente, precisamos melhorar e expandir nosso conhecimento atual da gravidade, especialmente fora das escalas do sistema solar. Para conseguir isso, precisamos generalizar a RG, o que pode ser feito de várias maneiras, mas geralmente envolve adicionar

campos extras à teoria ou modificar sua geometria subjacente. Recentemente, muita atenção e esforço têm sido dados nessa direção, dando origem às chamadas Teorias Modificadas da Gravidade.

O estudo da termodinâmica de buracos negros parece ser um contexto promissor para a investigação de modificações da RG, uma vez que essas propriedades só são realizadas quando consideramos conceitos quânticos. Ademais, a temperatura e a entropia de um buraco negro tem relação direta com a gravidade de superfície e a área de superfície de um buraco negro. Como consequência, essas quantidades termodinâmicas estão intrinsecamente relacionadas a geometria do espaço-tempo.

Neste trabalho, consideraremos duas maneiras de modificar a RG. Na primeira, vamos considerar que a simetria de Lorentz é violada. O intuito por trás da consideração da violação dessa simetria está no fato de que tal violação poderia ajudar na detecção de efeitos de uma teoria quântica da gravidade, suprimidos nas escalas de baixas energias. Com isso em mente, investigamos como essa violação influencia a física de buracos negros, em particular, a sua termodinâmica.

Na segunda maneira, vamos considerar que a modificação da geometria espacial vem do fato de considerarmos outros aspectos geométricos do espaço-tempo, como torção e não-metricidade. Como consequência, temos as denominadas teorias teleparalelas. Nesse contexto, seguimos o formalismo de Wald para obter a entropia de buracos negros a partir de correntes de Noether associadas a difeomorfismos.

Esta tese está dividida da seguinte forma. No capítulo 2, discutimos a violação da simetria de Lorentz e dois modelos que a introduzem: modelo de *bumblebee* e gravidade *rainbow*. No capítulo 3, apresentamos as teorias teleparalelas. No capítulo 4, discutimos diferentes métodos para obtenção de propriedades termodinâmicas de buracos negros, com foco em entropia. No capítulo 5, temos a primeira parte dos resultados, onde obtemos a termodinâmica de buracos negros em cenários onde a simetria de Lorentz é violada. O capítulo 6 contém a segunda parte dos resultados. O capítulo 7 dedica-se às conclusões.

## 2 QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ

Nesse capítulo, vamos explorar teorias que violam a simetria de Lorentz. Vamos começar justificando a quebra da simetria de Lorentz, depois apresentamos os modelos de interesse, que são modelo de *bumblebee* e gravidade *rainbow*, e as métricas obtidas a partir deles. Essas métricas são do tipo Schwarzschild, ou seja, representam um buraco negro estático, esfericamente simétrico, não-girante e eletricamente neutro. Entretanto, elas apresentam modificações à métrica de Schwarzschild que são incorporadas por meio de parâmetros responsáveis pela violação da simetria de Lorentz.

### 2.1 Motivação

Em física, um dos aspectos mais importantes de uma teoria são suas as simetrias. De fato, os grupos de simetria são atualmente a base das teorias físicas modernas. Formalmente, simetrias num sistema físico dizem respeito a características físicas ou matemáticas que são preservadas após uma determinada transformação. Essas simetrias podem ser classificadas como contínuas ou discretas, locais ou globais, a depender das transformações associadas a elas.

Como exemplo, as simetrias de rotação e de translação temporal ou espacial são típicas da Relatividade Geral; a simetria CPT (simetria com relação a inversões de carga, paridade e direção temporal) é comum no Modelo Padrão. O primeiro grupo de simetrias é contínuo enquanto o segundo é discreto. O princípio da equivalência na RG constitui um exemplo de simetria local: as leis da física são invariantes sob mudanças locais de coordenadas do espaço-tempo.

Uma das principais razões para o uso de simetrias na Física, especificamente as simetrias contínuas e globais, vem do fato de que estas estão intrinsecamente relacionadas a leis de conservação, como demonstrado por Noether [1]. Como exemplos clássicos disso, podemos citar as simetrias de rotação, de translação espacial e de translação temporal que estão relacionadas com a conservação momento angular, momento linear e de energia, respectivamente. Na Relatividade Especial, observadores inerciais observam as mesmas leis físicas. Essa equivalência ocorre devido a simetria de Lorentz. Em física de buracos negros, a chamada carga conservada de Noether devido a difeomorfismos tem uma interessante interpretação, uma vez

que representa a entropia de buracos negros estacionários [2].

Como já discutido, as simetrias tem um papel central na formulação das teorias físicas. Nesse sentido, é necessário que a ação da teoria seja invariante em relação às simetrias desta. Entretanto, muitas vezes é interessante explorar os efeitos da violação dessas simetrias, especialmente quando essa violação ocorre de maneira espontânea.

Materiais ferromagnéticos, abaixo da temperatura de Curie, são organizados em pequenos domínios microscópicos nos quais os spins estão alinhados. Isso ocorre sem a necessidade de que um campo magnético externo seja aplicado. Ao serem aquecidos acima da sua temperatura de Curie, os spins de um material ferromagnético adquirem uma disposição aleatória, ou seja, apresentam isotropia espacial. Nesse caso, o material perde, instantaneamente, suas propriedades magnéticas. Para que estas sejam restauradas, é preciso que o material seja resfriado a temperaturas abaixo da temperatura de Curie do material. Entretanto, o realinhamento dos spins causa uma quebra espontânea da isotropia espacial [3].

Como já citado, a simetria CPT tem um papel relevante no Modelo Padrão. Entretanto, ela só é válida quando temos a combinação das três simetrias C, P e T, enquanto, isoladamente, elas são violadas. A simetria CP, por exemplo, que corresponde a trocar uma partícula por sua antipartícula e, ao mesmo tempo, inverter suas coordenadas espaciais é espontaneamente violada em interações fracas.

A simetria de Lorentz, presente na Relatividade e no Modelo Padrão, é uma das simetrias mais bem testadas experimentalmente [5]. Entretanto, essa simetria é espontaneamente quebrada no contexto da teoria de cordas, como demonstrado por Kostelecký e Samuel, em 1989 [6]. Além disso, no Modelo Padrão Estendido, que combina o Modelo Padrão e a Relatividade Geral, essa simetria também é violada [7].

### ***2.1.1 Violação da Simetria de Lorentz***

Como já vimos, a violação de uma simetria pode ter efeitos físicos interessantes. Aqui estamos interessados, em particular, na quebra da simetria de Lorentz (LSB, na sigla em inglês). Essa violação pode, entre outras coisas, ajudar a entender a física na escala de Planck [7]. Além da teoria de cordas e do Modelo Padrão Estendido, a violação da simetria de Lorentz também foi prevista em teorias como Gravidade Quântica à laço [8], Relatividade Muito Especial [9] e Relatividade Duplamente Especial [10], por exemplo. Por esses motivos, a violação de Lorentz tem sido extensivamente investigada.

Em geral, considera-se que a LSB ocorre de maneira espontânea, mas também é possível que a violação seja explícita. No primeiro caso, embora o lagrangeano da teoria seja invariante em relação a transformações de Lorentz, as soluções no estado de vácuo adquirem uma direção preferencial. Já no segundo, as próprias equações de movimento não obedecem a simetria. Entretanto, os termos de violação são, usualmente, muito pequenos. A violação espontânea é geralmente preferida porque esta evita problemas de inconsistências entre a dinâmica da teoria e restrições geométricas na formulação do Modelo Padrão Estendido. Na violação explícita essas inconsistências também podem ser evitadas, mas somente em casos específicos [11, 12].

A Relatividade Restrita é invariante sob transformações de Lorentz. Estas podem ser classificadas em transformações de observador, que relacionam dois referenciais inerciais, ou de partícula, onde o sistema de referência é mantido enquanto a partícula é transformada. Estamos interessados em transformações de partícula pois estas mantêm o campo de fundo inalterado.

## 2.2 Modelo de *Bumblebee*

Nesta seção, vamos explorar o modelo de *bumblebee*, que é o exemplo mais simples de teoria na qual a simetria de Lorentz é espontaneamente quebrada. Apesar da sua relativa simplicidade, ele inclui características interessantes de serem investigadas, como violações de *boost*, rotações e da simetria CPT. O modelo foi inspirado no trabalho de Kostelecký e Samuel, no qual a simetria de Lorentz é espontaneamente quebrada na Teoria de Cordas [6].

Nessa teoria, permite-se que um campo vetorial, denominado campo de *bumblebee*, assumam valores esperados de vácuo (VEV) não nulos, isto é, adquira uma direção preferencial. Como consequência disso, a simetria de Lorentz é espontaneamente violada. No entanto, devemos enfatizar que essa violação ocorre somente no estado de vácuo, enquanto a ação da teoria é invariante de Lorentz [6]. Outra forma de violar a simetria de Lorentz consiste em introduzir um campo tensorial antissimétrico, chamado campo de Kalb-Ramon [13]. No entanto, nós vamos nos limitar ao modelo de *bumblebee*.

Estamos particularmente interessados em aplicações do modelo de *bumblebee* a gravitação. Neste caso, o vetor de *bumblebee* deve ser acoplado a curvatura, o que gera novas soluções de buracos negros, como as encontradas em [14, 15]. Com isso em mente, uma questão que surge é se a termodinâmica de buracos negros é sensível às contribuições da LSB. Esse

assunto foi investigado em [16]. Entretanto, as aplicações do modelo de *bumblebee* não se limitam a gravitação. Por exemplo, anisotropias cosmológicas podem ser originadas pelo vetor de *bumblebee* [17]. A propagação do campo de *bumblebee* em mundos *brana* foi investigada em [18].

Na ação de *bumblebee*, nós geralmente temos: uma densidade lagrangeana  $\mathcal{L}_g$ , que é normalmente a mesma que em RG; uma densidade lagrangeana de acoplamento entre os setores gravitacional e de *bumblebee*  $\mathcal{L}_{gb}$ , que é usualmente quadrática no vetor de *bumblebee*; uma lagrangeana cinética para o vetor de *bumblebee*  $\mathcal{L}_K$ ; uma lagrangeana  $\mathcal{L}_V$  contendo um potencial  $V$ ; uma lagrangeana  $\mathcal{L}_J$  responsável por introduzir a interação do vetor de *bumblebee* com a matéria. Assim, nós temos uma ação da forma [19]

$$S = \int d^4x (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{gb} + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_J). \quad (2.1)$$

O termo cinético é dado em termos do *field strenght* do campo de *bumblebee*  $B_\mu$ ,  $B_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu$ <sup>1</sup>, onde  $D_\mu$  é a derivada covariante do espaço-tempo escolhido. Embora  $\mathcal{L}_J$  possa ser negligenciado, o termo  $\mathcal{L}_V$  tem um papel de crucial importância para o modelo, uma vez que é responsável por introduzir a LSB. Isso é obtido ao exigirmos que o potencial seja mínimo quando o vetor de *bumblebee* atinge seu VEV, ou seja,  $B^\mu B_\mu \pm b^2 = 0$ , onde  $b^2$  é uma constante positiva e o sinal  $\pm$  indica se o vetor é do tipo tempo ou espaço.

Em geral, assumimos que o campo de *bumblebee* está fixo no seu VEV. Por esse motivo, a definição exata do potencial  $V$  é irrelevante, contanto que este seja definido de tal forma que o vetor de *bumblebee* tenha um VEV não-nulo ( $\langle B^\mu \rangle = b^\mu$ ). O termo  $b^\mu$  é o coeficiente da LSB. Outras suposições típicas incluem trabalhar em espaços sem torção e exigir que o campo de *bumblebee* seja puramente radial.

No setor gravitacional do Modelo Padrão Estendido, temos [20]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}), \quad (2.2)$$

onde  $u, s^{\mu\nu}$  e  $t^{\mu\nu\alpha\beta}$  são adimensionais e carregam a informação sobre a violação de Lorentz. Em particular,  $s^{\mu\nu}$  tem traço nulo.  $s^{\mu\nu}$  e  $t^{\mu\nu\alpha\beta}$  possuem as mesmas simetrias do tensor de Ricci e do tensor de Riemann, respectivamente.

Estamos interessados em duas soluções de buracos negros em espaços-tempo onde

---

<sup>1</sup>Também podemos usar a definição  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ . As duas definições coincidem em espaços-tempo de Riemann ou de Minkowski, mas em geral elas envolvem interpretações físicas diferentes. A segunda é invariante de *gauge*  $U(1)$  mesmo na presença de torção, enquanto a primeira não [19].

a violação de Lorentz é introduzida. A primeira é devido a Bertolami e Páramos [14] e a segunda é devido a Casana *et. al.* [15]. Em ambos trabalhos, o espaço-tempo não tem torção e o campo de *bumblebee* tem somente componentes radiais. Entretanto, definições diferentes de  $\mathcal{L}_J$  e  $B_{\mu\nu}$  são utilizadas. Esses resultados são de suma importância pois indicam que a LSB deforma o espaço-tempo. Como consequência, devemos esperar que propriedades de buracos negros sejam modificadas. Ademais, tais modificações podem ser interpretadas como correções à RG.

### 2.2.1 Métrica B

No trabalho de Bertolami e Páramos [14], a ação de *bumblebee* é da seguinte forma

$$S = \int d^4x \left[ \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) \right], \quad (2.3)$$

onde  $\kappa = 8\pi G$  e  $\xi$  é uma constante de acoplamento. Comparando com a ação 2.2 vemos que

$$u = \frac{1}{4} \xi B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

$$s^{\mu\nu} = \xi \left( B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha \right),$$

$$t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (2.5)$$

Partindo do pressuposto que o espaço-tempo é estático e esfericamente simétrico, podemos assumir que a métrica assume a forma de Birkhoff  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{2\phi}, e^{2\rho}, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ , onde  $\rho$  e  $\phi$  são funções de  $r$ . Além disso, o campo de *bumblebee* está fixo no seu VEV  $b_\mu$  e assumimos que esse VEV satisfaz  $\nabla_\mu b_\nu = 0$ , ao invés da prescrição usual  $\partial_\mu b_\nu = 0$ .

O vetor de Killing desse espaço-tempo é obtido de

$$\mathcal{L}_{\vec{K}} B^\mu = K^\alpha \nabla_\alpha B^\mu - B^\alpha \nabla_\alpha K^\mu. \quad (2.6)$$

A equação  $\nabla_\mu B_\nu = 0$  implica que  $\nabla_\alpha K^\mu = 0$ . Assim, podemos construir uma corrente escalar conservada  $J = B_\mu K^\mu$ , isto é,  $\nabla_\nu J = 0$ . Como consequência disso, a equação  $\nabla_\mu B_\nu = 0$  terá apenas contribuições da conexão afim, que no presente caso é a conexão de Levi-Civita para a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Assim, a única derivada covariante não trivial é com respeito a  $r$ , de modo que podemos assumir que o campo de *bumblebee* tem a forma  $b_\mu = (0, b(r), 0, 0)$ . Ademais,  $\nabla_\mu B_\nu = 0$  implica que

$$b(r) = \xi^{-1/2} b_0 e^\rho, \quad (2.7)$$

onde  $b_0$  e  $\xi$  são constantes e usamos  $\xi^{-1/2}$  por conveniência. Segue, diretamente da equação acima, que  $b^2 = b_\mu b^\mu = b_0^2 \xi^{-1}$ .

Devido a essas condições, a ação pode ser reescrita de modo a explicitar a sua dependência radial:

$$S_s = \frac{2}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} + \xi (g^{rr})^2 b^2(r) R_{rr} \right]_s, \quad (2.8)$$

onde o índice  $s$  denota que somente quantidades espaciais são consideradas. Levando isso em consideração, temos  $\sqrt{-g} = r^2 e^{\rho+\phi}$  e o escalar de curvatura e o tensor de Ricci se tornam, respectivamente,

$$R = \frac{2 [1 + (2r\rho' - 1)e^{-2\rho}]}{r^2}, \quad (2.9)$$

e

$$R_{rr} = \frac{2\rho'}{r}, \quad (2.10)$$

onde  $'$  denota derivações em relação a coordenada radial  $r$  e a dependência angular foi integrada.

Além disso, a condição  $\phi(r) = \text{const.}$  foi imposta e temos

$$\xi (b^r)^2 R_{rr} = b_0^2 \frac{2\rho' e^{-2\rho}}{r}. \quad (2.11)$$

Nesse momento, é conveniente introduzir uma redefinição de campo  $\Psi = (1 - e^{-2\rho}) r^{-2}$  de modo que

$$\Psi' = \frac{2\rho' e^{-2\rho}}{r^2} - \frac{2\Psi}{r}. \quad (2.12)$$

Agora, podemos reescrever os termos da ação como

$$\begin{aligned} R &= 2(3\Psi + r\Psi'), \\ \xi (b^r)^2 R_{rr} &= b_0^2 (2\Psi + r\Psi'). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Desse modo, a ação se torna

$$S_s = \frac{2}{\kappa} \int dr e^{\rho+\phi} r^4 \left[ (3 + b_0^2)\Psi + \left(1 + \frac{b_0^2}{2}\right)r\Psi' \right]. \quad (2.14)$$

Tomando a variação dessa ação em relação a  $\phi$ , nós obtemos a equação

$$(3 + b_0^2)\Psi + \left(1 + \frac{b_0^2}{2}\right)r\Psi' = 0, \quad (2.15)$$

que tem como solução  $\Psi(r) = \Psi_0 r^{-3+L}$ , com

$$3 - L \equiv \frac{3 + b_0^2}{1 + \frac{b_0^2}{2}} \simeq 3 - \frac{b_0^2}{2}. \quad (2.16)$$

Então,  $L \simeq b_0^2/2$ . Assim, podemos ver que  $L$  é um parâmetro responsável pela quebra da simetria de Lorentz. A partir da definição de  $\Psi$ , obtemos

$$g_{rr} = e^{2\rho} = (1 - \Psi_0 r^{-1+L})^{-1}. \quad (2.17)$$

Por comparação com a métrica de Schwarzschild, podemos reescrever a métrica como

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \left(1 - \frac{2G_L m}{r} r^L\right)^{-1}, \\ g_{00} &= -1 + \frac{2G_L m}{r} r^L, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $G_L$  tem dimensão  $[G_L] = L^{2-L}$ , em unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ). Podemos redefinir  $G_L = G r_0^{-L}$ , onde  $r_0$  é uma distância arbitrária e  $M \equiv Gm$  quando  $L \rightarrow 0$ , que é o limite em que não temos LSB. Assim, a métrica se torna

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \left(1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0}\right)^{-1}, \\ g_{00} &= -1 + \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nesse caso, temos uma métrica do tipo Schwarzschild que viola a simetria de Lorentz. A métrica de Schwarzschild é recuperada quando  $L \rightarrow 0$ .

A condição  $g_{00} = 0$  nos dá o raio do horizonte de eventos

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0} \Rightarrow r_s = (2M r_0^{-L})^{1/1-L}. \quad (2.20)$$

Para verificar que essa solução realmente se trata de uma solução de buracos negros, temos que calcular o escalar de Kretschmann, definido como

$$K = R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda}. \quad (2.21)$$

Levando em consideração a métrica 2.19, obtemos

$$\begin{aligned} K &= 48 \left[ 1 - \frac{5}{3}L + \frac{17}{12}L^2 - \frac{1}{2}L^3 + \frac{1}{12}L^4 \right] M^2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2L} r^{-6} \\ &\simeq \left( 1 - \frac{5}{3}L \right) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2L} K_0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $K_0 = 48M^2r^{-6}$  é o escalar de Kretschmann do buraco negro de Schwarzschild. Para o horizonte de eventos dado em 2.20, vemos que  $K$  assume valores finitos, o que indica que essa singularidade não é física. O mesmo não pode ser dito de  $r = 0$ . Portanto, temos um buraco negro do tipo Schwarzschild produzido por uma LSB puramente radial.

Os *bounds* para o parâmetro de LSB foram calculados em [14] utilizando dados de testes planetários para a Lei de Kepler. Para Vênus, por exemplo, temos  $\lambda = r_0 = 0.723 \text{ AU}$  e  $L = |\alpha| \leq 2 \times 10^{-9}$ . De acordo com a equação acima, quando  $L = 5/3$ , o escalar de Kretschmann seria nulo. Entretanto, levando em consideração o *bound* citado e o fato de que assumimos que  $L$  é muito pequeno, não precisamos nos preocupar com essa situação.

### 2.2.2 Métrica C

No trabalho [15], temos a seguinte ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) + \mathcal{L}_M \right], \quad (2.23)$$

onde  $\mathcal{L}_M$  inclui não somente as contribuições da matéria como o acoplamento entre o setor de matéria e o setor de *bumblebee*. Assim, a variação dessa ação com relação à métrica gera as equações de campo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia total dado por contribuições do setor de matéria e de *bumblebee*  $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^B$ .

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^B &= -B_{\mu\alpha} B_\nu^\alpha - \frac{1}{4} B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - V g_{\mu\nu} + 2V' B_\mu B_\nu \\ &+ \frac{\xi}{\kappa} \left[ \frac{1}{2} B^\alpha B^\beta R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - B_\mu B^\alpha R_{\alpha\nu} - B_\nu B^\alpha R_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B_\nu) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (B^\alpha B_\mu) - \frac{1}{2} \nabla^2 (B_\mu B_\nu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Também temos as equações de campo para o campo de *bumblebee*:

$$\nabla^\mu B_{\mu\nu} = J_\nu, \quad (2.26)$$

onde  $J_\nu = J_\nu^M + J_\nu^B$ , com  $J_\nu^M$  sendo gerado pela contribuição de matéria e  $J_\nu^B$  dado por

$$J_\nu^B = 2V'B_\nu - \frac{\xi}{4}B^\mu R_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Usando a identidade de Bianchi ( $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ ), podemos mostrar que o tensor momento-energia total é conservada

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.28)$$

Tomando o traço de 2.24, obtemos

$$R = -\kappa T^M + 4\kappa V - 2\kappa V'B_\mu B^\mu + \xi \left[ \frac{1}{2}\nabla^2(B_\mu B^\mu) + \nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \right], \quad (2.29)$$

onde  $T^M = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^M$  é o traço do tensor momento-energia. Substituindo a expressão acima em 2.24, obtemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \kappa \left( T_{\mu\nu}^M - \frac{1}{2}T^M \right) + \kappa T_{\mu\nu}^B + 2\kappa g_{\mu\nu}V - \kappa B_\alpha B^\alpha g_{\mu\nu}V' \\ &+ \frac{\xi}{4}g_{\mu\nu}\nabla^2(B_\alpha B^\alpha) + \frac{\xi}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha \nabla_\beta (B^\alpha B^\beta) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se  $V \rightarrow 0$ ,  $B_\mu \rightarrow 0$ , ou seja, na ausência de LSB, recuperamos as equações da RG.

Para obter soluções de vácuo, precisamos impor  $T_{\mu\nu}^M = 0$ . Essa é uma das primeiras diferenças entre a métrica B e a métrica C, uma vez que na primeira  $T_{\mu\nu}^B$  não é levado em consideração. Novamente, temos o campo de *bumblebee* mantido fixo em seu VEV  $B_\mu = b_\mu$ . Assim,  $V = 0$  e  $V' = 0$  e a equação de campo de *bumblebee* se torna

$$\nabla^\mu b_{\mu\nu} = -\frac{\xi}{\kappa}b^\mu R_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

onde  $b_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$  é o *field strenght* do vetor de *bumblebee*. Além disso, vamos usar a métrica de Birkhoff  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{2\gamma}, e^{2\rho}, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ , onde  $\gamma$  e  $\phi$  são funções de  $r$ , e assumir que o campo de *bumblebee* é da forma  $b_\mu = (0, b(r), 0, 0)$ . Devemos notar que, para esse *ansatz*, o *field strenght* é automaticamente nulo.

Usando a condição  $b_\mu b^\mu = b^2 = \text{const}$ , obtemos  $b(r) = |b|e^\rho$ . Nesse caso, não

estamos usando a prescrição  $\nabla_\mu b_\nu = 0$ , como na métrica B. As equações de campo geram

$$(1 + \ell)\partial_r(re^{-2\rho}) = 1, \quad (2.32)$$

e

$$0 = (2 + 3\ell)(1 + \ell)r\partial_r\gamma + (1 + \ell)(2 + \ell) + (\ell + 1)(\ell - 2)r\partial_r\rho - (2 + \ell)e^{2\rho}. \quad (2.33)$$

A primeira equação tem como solução

$$e^{2\rho} = (1 + \ell)\left(1 - \frac{\rho_0}{r}\right)^{-1}, \quad (2.34)$$

onde  $\rho_0$  é uma constante arbitrária. Substituindo essa solução na segunda equação, obtemos

$$(\rho_0 - r)\partial_r\gamma + \frac{\rho_0}{2r} = 0, \quad (2.35)$$

cuja solução é dada por

$$e^{2\gamma} = e^{-2\gamma_0}\left(1 - \frac{\rho_0}{r}\right), \quad (2.36)$$

com  $e^{-2\gamma_0}$  sendo uma constante. Fazendo o reescalonamento  $t \rightarrow te^{\gamma_0}$ , a componente temporal da métrica não dependerá dessa constante.

Usando  $\rho_0 = 2M$ , obtemos a métrica C:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + (1 + \ell)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.37)$$

onde o parâmetro de violação de Lorentz foi redefinido como  $\ell = \xi b^2$ . Podemos ver que, no limite  $\ell \rightarrow 0$ , recuperamos a métrica de Schwarzschild. O horizonte de eventos, no entanto, é o mesmo que no caso de Schwarzschild,  $r_s = 2M$ . Além disso, também temos divergência quando  $r = 0$ . O escalar de Kretschmann é dado por

$$K = R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{4(12M^2 + 4\ell Mr + \ell^2 r^2)}{r^6(\ell + 1)^2}, \quad (2.38)$$

que garante que temos uma nova solução de buracos negros. Além disso, em  $r = 2M$ , o escalar de Kretschmann é finito enquanto em  $r = 0$ , ele é infinito. Assim, somente  $r = 0$  representa a singularidade física. Além disso, o comportamento assintótico dessa solução é preservado. Os *bounds* para o parâmetro de LSB dependem do teste empregado, mas variam entre  $10^{-8} - 10^{-19}$  [15].

### 2.3 Gravidade *Rainbow*

A incompatibilidade entre RG e Mecânica Quântica ainda é uma questão em aberto em física moderna. Algumas teorias foram propostas afim de solucionar esse problema, muitas delas se apoiando na ideia de que uma eventual teoria unificada deve emergir na escala de Planck. Esse é o caso da Gravidade *Rainbow* (GR), que foi proposta por Magueijo e Smolin [21] como uma generalização da chamada Relatividade Duplamente Especial [10] para espaços-tempo curvos.

Um dos efeitos da LSB é a modificação da relação de dispersão padrão. Espera-se que o efeito dessa modificação seja perceptível na escala de energia de Planck. Isso é precisamente o que vamos explorar nessa seção.

A gravidade *Rainbow* é baseada em Relações de Dispersão Modificadas (MDRs, na sigla em inglês). Nesse caso, o espaço-tempo é modificado pela energia da partícula teste. Tais modificações são codificadas em funções da razão entre a energia da partícula  $E$  e a energia de Planck  $E_p$ . Essas funções, são denominadas funções de *rainbow*. Assim, temos um “arco-íris” de diferentes métricas do espaço-tempo.

Recentemente, a gravidade *rainbow* tem recebido bastante atenção, especialmente no estudo de buracos negros [22, 23] e sua termodinâmica [24–32]. Uma das motivações para isso vem do fato de que a teoria poderia ser empregada para esclarecer o paradoxo da informação de buracos negros, uma vez que se sabe que a teoria produz remanescentes de buracos negros [33–35]. Outra motivações incluem a generalização do princípio da incerteza [36, 37], correções quânticas em sistemas gravitacionais observadas em gravidade *rainbow* [38, 39] e o fato da teoria ser UV completa [40]. No entanto, o sucesso da gravidade *rainbow* não está limitado à física de buracos negros mas inclui também a investigação de *wormholes* [41], mundos brana [42] e inflação [43].

Na gravidade *rainbow*, as MDRs assumem a forma

$$E^2 F^2(E/E_p) - p^2 G^2(E/E_p) = m^2, \quad (2.39)$$

onde  $F(E/E_p)$  e  $G(E/E_p)$  são as funções de *rainbow*. Apesar da definição dessas funções não são ser única, elas devem ser escolhidas de maneira que a relação de dispersão padrão seja recuperada quando  $E/E_p \rightarrow 0$ . Uma outra forma de reescrever essa exigência é

$$\lim_{E/E_p \rightarrow 0} F(E/E_p) = \lim_{E/E_p \rightarrow 0} G(E/E_p) = 1. \quad (2.40)$$

A MDR deforma o espaço-tempo e, como consequência disso, a métrica precisa ser redefinida como

$$dt \rightarrow \frac{dt}{F(E/E_p)}; \quad dx^i \rightarrow \frac{dx^i}{G(E/E_p)}. \quad (2.41)$$

Em outras palavras, a geometria do espaço-tempo é dependente da energia. Assim, uma métrica do tipo

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + [g(r)]^{-1}dr^2 + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.42)$$

se torna

$$ds^2 = -\frac{f(r)}{F^2(E/E_p)}dt^2 + \frac{1}{g(r)G^2(E/E_p)}dr^2 + \frac{h(r)}{G^2(E/E_p)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.43)$$

Essa deformação pode ser obtida por meio de uma transformação não linear  $U : P \rightarrow P$ , onde  $P$  é o espaço dos momentos, da seguinte forma

$$U \cdot (E, p_i) = [f(E/E_p)E, g(E/E_p)p_i]. \quad (2.44)$$

A repercussão dessa transformação no espaço-tempo é traduzida por meio da transformação das bases do espaço:

$$\tilde{e}_0 = F \left( \frac{E}{E_p} \right) e_0, \quad \tilde{e}_i = G \left( \frac{E}{E_p} \right) e_i, \quad (2.45)$$

onde o til representa o referencial da partícula teste. Uma consequência disso é que a velocidade da luz deixa de ser uma constante e passa a ser dependente da energia

$$c = \left( \frac{dE}{dp} \right) = \frac{H}{1 - EH'/H}, \quad (2.46)$$

onde  $H = G/F$  e utilizamos  $EF \left( \frac{E}{E_p} \right) = pG \left( \frac{E}{E_p} \right)$ .

Neste trabalho, vamos utilizar as funções de *rainbow* propostas em [44], dadas por

$$\frac{E^2}{(1 - \gamma E/E_p)^2} - p^2 = m^2, \quad (2.47)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro positivo denominado parâmetro de *rainbow*. Claramente, a relação de dispersão usual,  $E^2 - p^2 = m^2$  é recuperada quando  $\gamma \rightarrow 0$ . A MDR acima pode ser obtida através de uma transformação do tipo

$$U = e^{-\lambda E^2 \partial / \partial E}. \quad (2.48)$$

Para essa escolha específica de funções *rainbow*, a velocidade da luz assume a forma  $c = 1 - \gamma E/E_p$  (em unidades naturais), o que implica que a velocidade da luz sofre um diminuição na

gravidade *rainbow*, que se torna mais acentuada para partículas mais energéticas.

Considerando a MDR dada acima, podemos obter a modificação da métrica de Schwarzschild na gravidade *rainbow*:

$$ds^2 = \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.49)$$

Exploraremos mais os efeitos da gravidade *rainbow* à termodinâmica de buracos negros, especificamente para a solução dada por 2.49, na seção 5.2.

### 3 TEORIAS TELEPARALELAS

Este capítulo dedica-se a introduzir teorias métrico-afim, em particular, o setor teleparalelo dessas teorias. Começaremos discutindo o Princípio da Equivalência e definiremos as principais propriedades das Teorias Métrico-Afim. Depois, apresentaremos a Trindade Geométrica da Gravidade e discutiremos com maiores detalhes as teorias teleparalela da trindade geométrica da gravidade. A extensão não-linear dessas teorias também será apresentada.

#### 3.1 Princípio da Equivalência

Uma das possíveis generalizações da RG consiste em trabalhar com uma conexão mais geral  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ , que não é necessariamente uma métrico-compatível ou sem torção, isto é, podemos ter  $\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} \neq 0$  e  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \neq \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$ . Nesta seção, exploraremos o que acontece com a trajetória de uma partícula quando consideramos uma conexão geral. Uma das consequências disso, como veremos, é que o menor caminho não será necessariamente coincidente com o caminho mais retilíneo (auto-paralelo).

Para vermos isso, vamos considerar a ação

$$S = - \int \sqrt{g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}}, \quad (3.1)$$

onde  $V^{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{d\lambda}$  é o vetor tangente a curva  $\gamma$ . As equações de movimento associadas com essa ação serão

$$\frac{dV^{\mu}}{d\lambda} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta} V^{\alpha}V^{\beta} = 0. \quad (3.2)$$

Essencialmente, o que fizemos foi obter as equações geodésicas, ou seja, as equações do menor caminho.

Agora, consideramos o que acontecerá com as curvas auto-paralelas. Um vetor  $S^{\alpha}$  será paralelamente transportado ao longo da curva  $\gamma$  se  $V^{\beta}\nabla_{\beta}S^{\alpha} = 0$  é satisfeita. Uma curva é dita como sendo auto-paralela se seu vetor tangente é paralelamente transportado ao longo de uma curva. Ou seja,  $V^{\beta}\nabla_{\beta}V^{\alpha} = 0$ , o que leva a

$$\frac{dV^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V^{\alpha}V^{\beta} = 0. \quad (3.3)$$

Embora as equações (3.2) e (3.3) pareçam iguais, na realidade elas são diferentes uma vez que as conexões presentes em cada equação são distintas. Normalmente, não encontramos essa distinção porque, na RG, a conexão será sempre a de Levi-Civita. Isso significa que as geodésicas em RG não são apenas caminhos mais curtos, mas também os mais retilíneos.

Como veremos, a conexão em (3.3) pode ser decomposta como a conexão de Levi-Civita mais contribuições provenientes da torção e/ou da não-metricidade. Vamos denotar essas contribuições extras como  $N^\mu{}_{\alpha\beta}$ . Logo, podemos reescrever (3.2) como

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = N^\mu{}_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta. \quad (3.4)$$

O lado esquerdo da equação acima pode ser interpretado como um “movimento inercial” da partícula, enquanto o lado direito pode ser interpretado como uma “força gravitacional” atuando sobre ela.

### 3.2 Geometria Métrico-Afim

A conexão geral é definida como sendo

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\alpha{}_{\mu\nu} + L^\alpha{}_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

onde  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$  é a conexão de Levi-Civita, dada por

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (3.6)$$

$K^\alpha{}_{\mu\nu}$  e  $L^\alpha{}_{\mu\nu}$  são, respectivamente, a contorção e a deformação:

$$K^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^\alpha{}_{\mu\nu} + T^\alpha{}_{\nu\mu} + T^\alpha{}_{\mu\mu}). \quad (3.7)$$

$$L^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (Q^\alpha{}_{\mu\nu} - Q^\alpha{}_{\nu\mu} - Q^\alpha{}_{\mu\mu}). \quad (3.8)$$

que são definidas em termos da torção e da não-metricidade

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}, \quad (3.9)$$

$$Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_\alpha g_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

com  $\nabla_\alpha$  sendo a derivada covariante para a conexão (3.5). A torção é interpretada como o não fechamento de paralelogramos formados por dois vetores que são transportados paralela-

mente um ao outro. A não-metricidade mede o quanto o espaço tempo falha em ser métrico-compatível. Isso pode ser entendido como a variação do comprimento de um vetor quando transportado ao longo de uma curva, ou a variação do ângulo entre dois vetores, quando transportados ao longo de uma curva.

Da conexão geral (3.5), podemos obter o tensor de curvatura, definido por

$$R^{\alpha}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} - \Gamma^{\beta}_{\mu\rho}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}. \quad (3.11)$$

A curvatura, como sabemos, pode ser interpretada como a curvatura do espaço-tempo ou, em outras palavras, como a rotação sofrida por um vetor quando este é paralelamente transportado ao longo de uma curva fechada.

Como estamos usando a conexão geral, temos agora as seguintes relações para o comutador entre derivadas covariantes

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}V^{\beta} - T^{\beta}_{\mu\nu}\nabla_{\beta}V^{\alpha}, \quad (3.12)$$

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V_{\alpha} = -R^{\beta}_{\alpha\mu\nu}V_{\beta} - T^{\beta}_{\mu\nu}\nabla_{\beta}V_{\alpha}. \quad (3.13)$$

Ademais, as identidades de Bianchi são modificadas

$$R^{\alpha}_{\beta(\mu\nu)} = 0, \quad (3.14)$$

$$R^{\mu}_{[\alpha\beta\gamma]} - \nabla_{[\alpha}T^{\mu}_{\beta\gamma]} + T^{\nu}_{[\alpha\beta}T^{\mu}_{\gamma]\nu} = 0, \quad (3.15)$$

$$\nabla_{[\alpha}R^{\mu}_{|\nu|\beta\gamma]} - T^{\lambda}_{[\alpha\beta}R^{\mu}_{|\nu|\gamma]\lambda} = 0, \quad (3.16)$$

que seguem de (3.12) e (3.13).

As identidades de Bianchi são suplementadas pela seguinte relação

$$\nabla_{[\mu}Q_{\nu]}^{\alpha\beta} = R^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\lambda}_{\mu\nu}Q_{\lambda}^{\alpha\beta}, \quad (3.17)$$

a partir da qual segue que

$$\nabla_{[\mu}Q_{\nu]} = F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\lambda}_{\mu\nu}Q_{\lambda}, \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{[\mu}\tilde{Q}_{\nu]} &= Q_{[\mu\nu]\alpha}\tilde{Q}^{\alpha} + \frac{1}{2}R_{[\mu\nu]} - \tilde{R}_{[\mu\nu]} \\ &\quad - \frac{1}{2}T_{\alpha\beta[\mu}Q^{\alpha\beta}_{\nu]}, \end{aligned} \quad (3.18b)$$

onde  $Q_{\alpha} = Q_{\alpha\mu}{}^{\mu}$  e  $\tilde{Q}^{\mu} = Q_{\alpha}{}^{\mu\alpha}$  são os traços da não-metricidade,  $\tilde{R}^{\mu}_{\nu} = g^{\alpha\beta}R^{\mu}_{\alpha\nu\beta}$ ,  $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = -R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$  é o traço do tensor de curvatura e  $F_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\alpha\mu\nu}$  é a curvatura homotética.

As três quantidades tensoriais apresentadas até aqui, nomeadas como torção (3.9), não-metricidade (3.10) e curvatura (3.11) caracterizam a geometria métrico-afim. Em geral, todas essas quantidades são não-nulas, mas podemos restringi-las em subclasses onde algum dos tensores são nulos. Por exemplo, se apenas uma das quantidades for nula, teremos

- Espaço-tempo plano: dizemos que o espaço-tempo é plano quando a curvatura geral se anula  $R^\alpha_{\mu\rho\nu} = 0$ . Como os vetores transportados paralelamente não giram quando não há curvatura, eles serão paralelos ao vetor original. Por esse motivo, as teorias desta subclasse são referidas como teorias teleparalelas.
- Espaço-tempo métrico: o espaço-tempo é métrico-compatível ou, simplesmente, métrico, quando a derivada covariante da métrica é nula. Isso significa que a não-metricidade é nula  $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$  e o comprimento de vetores é preservado quando eles são paralelamente transportados. As geometrias que pertencem a essa classe são denominadas de geometrias de Riemann-Cartan.
- Espaço-tempo sem torção: se o espaço-tempo não tem torção, então temos  $T^\alpha_{\mu\nu} = 0$ . Neste caso, a conexão é simétrica nos seus segundo e terceiro índices  $\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]} = 0$ .

Agora, se dois desses tensores se anulam, temos algo mais interessante:

- Torção e não-metricidade nulas,  $T^\alpha_{\mu\nu} = 0$ ,  $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$ : o espaço é métrico-compatível e sem torção mas curvo. Essa subclasse inclui a RG, bem como suas extensões do tipo  $f(R)$ , e a conexão utilizada é a de Levi-Civita.
- Curvatura e não-metricidade nulas  $R^\alpha_{\mu\rho\nu} = 0$ ,  $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$ : o espaço-tempo é plano e métrico-compatível. Isso quer significa que a única quantidade não-nula é a torção. As teorias que pertencem a essa subclasse são denominadas teorias teleparalelas métricas.
- Curvatura e torção nulas  $R^\alpha_{\mu\rho\nu} = 0$ ,  $T^\alpha_{\mu\nu} = 0$ : aqui, o espaço-tempo é tanto plano quanto sem torção, mas não é métrico-compatível. Esse conjunto de teorias é chamado teorias teleparalelas simétricas.

Por último, mas não menos importante, se todos os tensores se anulam, ficamos com o espaço-tempo de Minkowski. Essas subclasses estão bem demonstradas na figura abaixo.



Assim, temos dois possíveis sub-casos:

- Para um espaço-tempo plano e métrico, temos  $R^\alpha_{\mu\rho\nu} = 0$  e  $N^\alpha_{\mu\nu} = K^\alpha_{\mu\nu}$ . Consequentemente,

$$\mathring{R}_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\alpha K^\alpha_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\nu T_\mu + K^\beta_{\mu\alpha} K^\alpha_{\beta\nu} - K^\beta_{\mu\nu} T_\beta = 0, \quad (3.22)$$

Então, o escalar de Ricci em relação a conexão de Levi-Civita está relacionado com o escalar e o divergente da torção como

$$\mathring{R} = -T - 2\mathring{\nabla}_\alpha T^\alpha. \quad (3.23)$$

- Para um espaço-tempo plano e sem torção, temos  $R^\alpha_{\mu\rho\nu} = 0$  e  $N^\alpha_{\mu\nu} = L^\alpha_{\mu\nu}$ . Então,

$$\mathring{R}_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\alpha L^\alpha_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\nu L^\alpha_{\mu\alpha} + L^\beta_{\mu\alpha} L^\alpha_{\beta\nu} - L^\beta_{\mu\nu} L^\alpha_{\beta\alpha} = 0. \quad (3.24)$$

Logo, o escalar de Ricci em relação a conexão de Levi-Civita relaciona-se com o escalar da não-metricidade e os traços da não-metricidade como

$$\mathring{R} = -Q - \mathring{\nabla}_\alpha (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha). \quad (3.25)$$

As equações (3.23) e (3.25) tem uma consequência muito significativa: as ações obtidas a partir do escalar de torção ou do escalar de não-metricidade são dinamicamente equivalentes a ação de Einstein-Hilbert. Em outras palavras, as duas teorias definidas a partir dessas quantidades – a Equivalente Teleparalela da Relatividade Geral (TEGR, na sigla em inglês) e a Equivalente Teleparalela Simétrica da Relatividade Geral (STEGR, na sigla em inglês), respectivamente – e a Relatividade Geral tem equações de movimento equivalentes.

Devido a isso, as teorias teleparalelas equivalentes e a RG constituem a chamada Trindade Geométrica da Gravidade [46]. Todas elas, essencialmente, geram os mesmos resultados e relacionam a interação gravitacional a um aspecto geométrico do espaço-tempo, apesar de fornecerem diferentes interpretações para essa interação. Na RG, a gravidade é o efeito da curvatura do espaço-tempo. Na TEGR e na STEGR, no entanto, a gravidade surge devido a torção ou a incompatibilidade métrica do espaço-tempo, respectivamente. Nesse sentido, as teorias que formam a trindade geométrica da gravidade podem ser compreendidas como diferentes representações da gravidade. A imagem seguinte ilustra bem a equivalência entre essas três teorias.

A seguir, discutiremos as teorias teleparalelas da gravidade que são equivalentes a

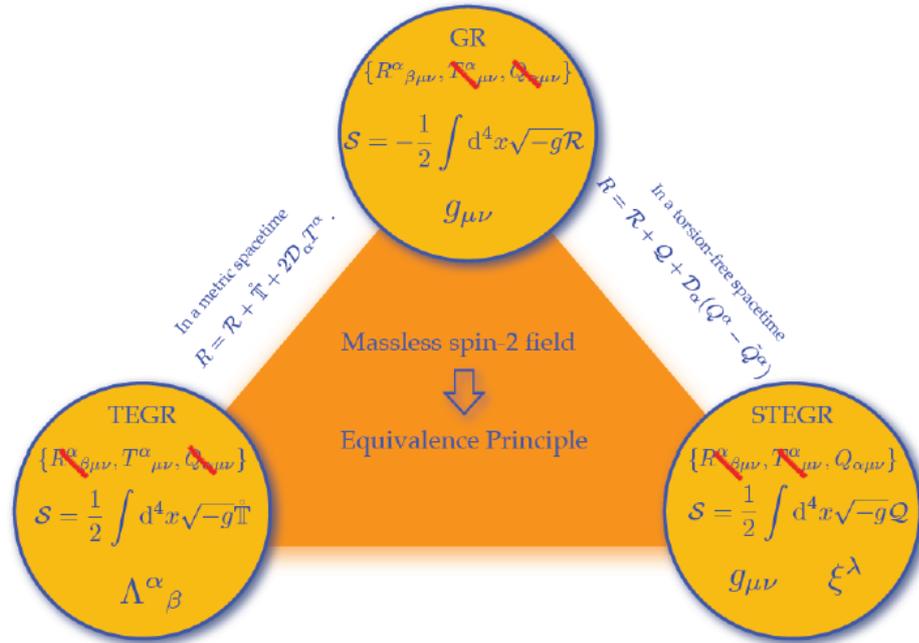


Figura 2: Descrições equivalentes da Gravidade. Adaptado de : [46]

RG.

### 3.4 Teoria Teleparalela Equivalente da Relatividade Geral

Agora, iremos apresentar a Teoria Teleparalela Equivalente da Relatividade Geral (*Teleparallel Equivalent of General Relativity* – (TEGR), na qual o espaço-tempo é plano e a métrico-compatível. Logo, a gravidade só pode ser descrita pela torção e  $L^\alpha_{\mu\nu} = 0$ . Essa teoria é usualmente formulada no formalismo de vielbein. Nesse caso, a métrica é obtida da métrica de Minkowski  $\eta_{ab}$  e da tétrade  $e^a_\mu$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu. \quad (3.26)$$

Aqui, as letras gregas denotam os índices para espaço-tempo enquanto as letras latinas denotam os índices lorentzianos. A tétrade tem uma inversa, ou co-tétrade  $e_a^\mu$  definido pela propriedade  $e^a_\mu e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$ . Portanto, podemos expressar a métrica inversa como

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu. \quad (3.27)$$

A métrica, como definida em (3.26), é invariante sob transformação de Lorentz da tétrede

$$e'^a{}_\nu = \Lambda^a{}_b e^b{}_\nu, \quad (3.28)$$

uma vez que a transformação local de Lorentz  $\Lambda^a{}_b$  obedece a relação

$$\eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d = \eta_{cd}. \quad (3.29)$$

A conexão é dada por

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\alpha{}_{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

onde  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$  é a conexão de Levi-Civita e  $K^\alpha{}_{\mu\nu}$  é a distorção, a qual é definida em termos da torção  $T^\alpha{}_{\mu\nu}$ , como em (3.7). Pela definição (3.9), a torção é antissimétrica nos seus índices inferiores. Logo, ela só pode ter um traço não-nulo

$$T_\alpha \equiv T^\beta{}_{\alpha\beta}. \quad (3.31)$$

Na TEGR, a conexão afim é obtida a partir da tétrede  $e_a{}^\mu$  e da conexão *spin*  $\omega^a{}_{b\mu}$  do seguinte modo

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = e_a{}^\rho (\partial_\nu e^a{}_\mu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu) \quad (3.32)$$

O tensor torção se torna

$$T^a{}_{\alpha\beta} = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \omega^a{}_{b\nu} e^b{}_\mu. \quad (3.33)$$

Se consideramos a transformação de Lorentz da tétrede (3.28), precisamos impor que a conexão de *spin* se transforme como

$$\omega'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c (\Lambda^{-1})^d{}_b \omega^c{}_{d\mu} + \Lambda^a{}_c \partial_\mu (\Lambda^{-1})^c{}_b \quad (3.34)$$

para se ter uma conexão afim invariante. Como consequência disso, uma dada teoria teleparalela métrica não pode ser determinada por uma única escolha de tétrede e conexão de *spin*, mas sim por uma família de pares de tétrades e conexões de *spin* que estão relacionados entre si através das transformações (3.28) e (3.34)

Essa liberdade de *gauge* de Lorentz nos permite definir um *gauge* com conexão de *spin* nulo  $\omega^a{}_{b\mu} = 0$ , chamado *gauge* de Weitzenböck. Segue, diretamente desta escolha de

*gauge*, que a conexão de *spin* transformada (3.34) se torna, simplesmente,

$$\omega'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c \partial_\mu (\Lambda^{-1})^c{}_b \quad (3.35)$$

Além disso, podemos definir a ação da TEGR

$$S_{\text{TEGR}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x e T + \int d^4x e L_M, \quad (3.36)$$

onde substituímos o determinante da métrica pelo determinante da tetrade  $e = \sqrt{-g}$ . A variação dessa ação com relação à tetrade nos dá

$$\frac{1}{e} \partial_\mu (e S_a{}^{\alpha\mu}) - T^\sigma{}_{\mu a} S_\sigma{}^{\mu\alpha} - \omega^b{}_{av} S_b{}^{\alpha v} + \frac{1}{2} T e_a{}^\alpha = 8\pi G \mathcal{J}_a{}^\alpha, \quad (3.37)$$

onde  $\mathcal{J}_a{}^\alpha := \frac{1}{e} \frac{\delta(e L_M)}{\delta e^a{}_\alpha}$  é o tensor energia-momento e

$$S_a{}^{\alpha\mu} = K^{\alpha\mu}{}_a - e_a{}^\alpha T^\mu + e_a{}^\mu T^\alpha \quad (3.38)$$

é o superpotencial. Uma forma de visualizar a equivalência entre as equações de campo acima e a RG consiste em reescrever os índices de espaço-tempo:

$$G_\beta{}^\alpha = \frac{1}{e} e^a{}_\beta \partial_\mu (e S_a{}^{\alpha\mu}) - T^\sigma{}_{\mu\beta} S_\sigma{}^{\mu\alpha} - \omega^b{}_{av} e^a{}_\beta S_b{}^{\alpha v} + \frac{1}{2} T \delta_\beta^\alpha = \kappa \mathcal{J}_\beta{}^\alpha, \quad (3.39)$$

onde  $G_\beta{}^\alpha = \mathring{R}_\beta{}^\alpha - \frac{1}{2} \mathring{R} \delta_\beta^\alpha$  é o tensor de Einstein.

Por outro lado, a variação com respeito a conexão gera

$$\mathring{\nabla}_\mu (e S_{[ab]}{}^\mu) = 0, \quad (3.40)$$

onde assumimos que a conexão teleparalela não entra na matéria lagrangeana. A equação acima é identicamente satisfeita, o que pode ser visto a partir da identidade

$$e S_{[ab]}{}^\mu = \mathring{\nabla}_\nu (e e_{[a}{}^\nu e_{b]}{}^\mu). \quad (3.41)$$

Uma vez que a curvatura se anula, as derivadas covariantes comutam e, portanto, as equações do campo de conexão são trivialmente satisfeitas.

Agora, exploraremos brevemente as extensões não-lineares da gravidade teleparalela, a gravidade  $f(T)$ , que foi introduzida por Ferraro e Fiorini [47]. A ação para esta teoria é dada por

$$S_{\text{TEGR}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x e f(T). \quad (3.42)$$

As equações de campo para esta teoria são

$$-\frac{1}{e}f_T\partial_\mu(eS_a^{\alpha\mu}) - S_a^{\alpha\mu}\partial_\mu f_T + f_T T^\sigma{}_{\mu\alpha} S_\sigma{}^{\mu\alpha} - f_T \omega^b{}_{\alpha\nu} S_b{}^{\alpha\nu} + \frac{1}{2}T e_a{}^\alpha = \kappa \mathcal{T}_a{}^\alpha, \quad (3.43)$$

e

$$S_{[ab]}{}^\mu \partial_\mu f_T = 0 \quad (3.44)$$

onde  $f_T = \frac{\partial f}{\partial T}$ . Nesse caso, a equação de conexão não se anula identicamente.

### 3.5 Teoria Teleparalela Simétrica Equivalente da Relatividade Geral

Nesta seção, focaremos na Teoria Teleparalela Simétrica Equivalente da Relatividade Geral ( *Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity* – STEGR), na qual a quantidade geométrica responsável pela gravidade é a não-metricidade. Nesta teoria, o espaço-tempo é plano e sem torção, o que significa que  $K^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$  e a conexão é dada por

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + L^\alpha{}_{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

onde  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$  é a conexão de Levi-Civita,  $L^\alpha{}_{\mu\nu}$ , como definido em (3.8), é a disformação e a derivada covariante é definida pela conexão (3.45).

Nesse momento, é útil apresentarmos algumas relações importantes

- **Traços da não-metricidade:** Uma vez que o tensor de não metricidade é simétrico, ele possui traços não-nulos

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\mu}{}^\mu, \quad \tilde{Q}^\mu = Q_\alpha{}^{\mu\alpha}. \quad (3.46)$$

- **Traço da disformação:** Os traços da disformação podem ser escritas em termos dos traços da não-metricidade da seguinte forma

$$L^\alpha{}_{\mu\alpha} = L^\alpha{}_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2}Q_\mu, \quad (3.47)$$

$$L_\mu{}^\alpha{}_\alpha = \frac{1}{2}Q_\mu - \tilde{Q}_\mu. \quad (3.48)$$

- **Derivada covariante de  $\sqrt{-g}$ :** A derivada covariante da métrica deixa de ser trivial. Como consequência disso, temos

$$\nabla_\alpha(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}Q_\alpha, \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow \nabla_\alpha(\sqrt{-g}A^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \left( \nabla_\alpha + \frac{1}{2}Q_\alpha \right) A^{\mu\nu}. \quad (3.50)$$

A equação (3.49) é particularmente útil quando precisamos fazer integrações por partes. A equação (3.50) implica que a derivada covariante de uma densidade tensorial terá um termo extra  $\frac{1}{2}Q_\alpha$ .

- **Tensores de não-metricidade:** Uma vez que a derivada covariante da métrica é não-nula, quando levantamos e baixamos índices do tensor de não-metricidade, podemos ter alguns sinais contrários. Por exemplo,

$$Q_\alpha^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \nabla_\alpha g_{\rho\sigma} = -g^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} \nabla_\alpha g^{\nu\sigma} = -\nabla_\alpha g^{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

$$Q^{\alpha\mu\nu} = -\nabla^\alpha g^{\mu\nu}. \quad (3.52)$$

Outro ponto importante a ser notado é que, uma vez que não temos curvatura, podemos comutar derivadas covariantes  $\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha = \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha$ . Essa facilidade, entretanto, tem seu preço, uma vez que não podemos levantar índices dentro de derivadas covariantes, isto é

$$\nabla_\alpha A^\mu{}_\nu \neq g^{\lambda\mu} \nabla_\alpha A_{\lambda\nu}, \quad (3.53)$$

pois

$$\nabla_\alpha A^\mu{}_\nu = g^{\lambda\mu} \nabla_\alpha A_{\lambda\nu} - A_{\lambda\nu} Q_\alpha^{\lambda\mu}. \quad (3.54)$$

Também precisamos ter cuidado com contrações do tipo:

$$Q^{\alpha\nu\rho} \nabla_\alpha \delta g_{\nu\rho} \neq -Q_{\alpha\nu\rho} \nabla^\alpha \delta g^{\nu\rho} \quad (3.55)$$

$$Q^{\alpha\nu\rho} \nabla_\alpha \delta g_{\nu\rho} = -2Q^{\alpha\sigma}{}_\nu Q_{\alpha\sigma\mu} \delta g^{\mu\nu} - Q_{\alpha\nu\rho} \nabla^\alpha \delta g^{\nu\rho} \quad (3.56)$$

As últimas expressões são particularmente úteis quando tomamos variações da ação.

Antes de apresentar a ação para essa teoria, precisamos das definições do escalar de não-metricidade e do superpotencial. O escalar de não-metricidade é dado por contrações quadráticas da não-metricidade e seus traços, como em (3.10). O potencial é definido, em relação a não-metricidade e seus traços como

$$\begin{aligned} P^\alpha{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}L^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha)g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta_{(\mu}^\alpha Q_{\nu)} \\ &= \frac{1}{4} \left[ -Q^\alpha{}_{\mu\nu} + 2Q_{(\mu}{}^\alpha{}_{\nu)} + Q^\alpha g_{\mu\nu} - \tilde{Q}^\alpha g_{\mu\nu} - \delta_{(\mu}^\alpha Q_{\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Também podemos escrever o escalar de não-metricidade em termos da não-metricidade e do superpotencial, ou em termos da disformação como

$$Q = -Q^\alpha_{\mu\nu} P^\alpha{}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left( L^\alpha_{\beta\mu} L^\beta{}_{\nu\alpha} - L^\alpha_{\beta\alpha} L^\beta{}_{\mu\nu} \right) \quad (3.58)$$

Agora temos todo o necessário para definir a ação da STEGR

$$S_{STEGR} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} Q + \int \sqrt{-g} d^4x \mathcal{L}_m. \quad (3.59)$$

Uma vez que  $\dot{R} = -Q - \dot{\nabla}_\alpha(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha)$ , a equação acima é equivalente a equação de Einstein-Hilbert, a menos de um termo de fronteira. Da equação acima, obtemos as seguintes equações de campo em relação a métrica e a conexão, respectivamente

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha \left( \sqrt{-g} P^\alpha{}_{\mu\nu} \right) + \left( P_{\mu\alpha\beta} Q^\alpha{}_{\nu} - 2Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}{}_{\nu} \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} Q = \kappa T_{\mu\nu},$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu (\sqrt{-g} P^{\mu\nu}{}_\alpha) = 0, \quad (3.60)$$

onde  $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}$  é o tensor momento-energia.

A equação da conexão (3.60) é trivialmente satisfeita, ou seja, é satisfeita independentemente da conexão utilizada. Isso significa que temos liberdade para escolher a conexão, contanto que esta seja plana e sem torção. A conexão geral de Palatini, para a qual  $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0$ , é

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\nu \partial_\mu \Lambda^\nu{}_\beta. \quad (3.61)$$

Se, além disso, nós impormos que a torção seja nula, obteremos a condição  $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\nu \partial_{[\mu} \Lambda^\nu{}_{\beta]} = 0$ . Consequentemente,  $\Lambda^\nu{}_\beta$  pode ser parametrizada como

$$\Lambda^\nu{}_\beta = \partial_\beta \xi^\nu \quad (3.62)$$

para algum campo  $\xi^\nu$ . Portanto,

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} \partial_\mu \partial_\beta \xi^\lambda. \quad (3.63)$$

A partir disso, podemos ver que a conexão pode ser trivializada, isto é, escolhida para ser identicamente nula, por meio da escolha  $\xi^\lambda = x^\lambda$ . Essa escolha *gauge* é denominada *gauge* coincidente e, neste caso, a não-metricidade se torna  $Q_{\alpha\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu}$ . Uma consequência de ter uma conexão nula é que a métrica se torna a única quantidade responsável pela gravidade.

A ação da STEGR pode ser convenientemente reescrita como

$$S_{STEGR} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left( L_{\beta\mu}^\alpha L_{\nu\alpha}^\beta - L_{\beta\alpha}^\alpha L_{\mu\nu}^\beta \right), \quad (3.64)$$

No *gauge* coincidente, temos a relação

$$\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = -L_{\mu\nu}^\alpha, \quad (3.65)$$

o que nos fornece a ação da chamada Relatividade Geral Coincidente (*Coincident General Relativity* – CGR) dada por

$$\begin{aligned} S_{CGR} &= S_{STEGR}(\Gamma = 0) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left( \mathring{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha \mathring{\Gamma}_{\nu\alpha}^\beta - \mathring{\Gamma}_{\beta\alpha}^\alpha \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\beta \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Podemos observar que essa ação é exatamente a ação de Einstein-Hilbert sem os termos de fronteira. Uma vez que as derivadas segundas da métrica não estão presentes nessa ação, nós temos um princípio variacional bem definido. Por outro lado, a ação não é invariante sob transformações de coordenadas. Ademais, pode-se argumentar que essa ação não precisa ser suplementada por contra-termos, como acontece na ação de Einstein-Hilbert. Nós discutimos mais esse assunto no capítulo 4.

Como a STEGR reproduz as mesmas equações de campo que a RG, é interessante explorarmos as generalizações dessa teoria. Seguindo a mesma ideia por trás das teorias  $f(R)$  e  $f(T)$ , podemos considerar generalizações não-lineares da ação da STEGR, chamadas teorias  $f(Q)$ . A ação de tais teorias é dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int f(Q) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.67)$$

É importante notarmos que a presença do termo de fronteira  $\mathring{\nabla}_\alpha(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha)$  garante que  $f(R)$  e  $f(Q)$  são teorias totalmente diferentes.

Podemos agora prosseguir para as equações de campo da teoria. A variação em relação a métrica nos dá

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha \left( \sqrt{-g} f_Q P_{\mu\nu}^\alpha \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + f_Q \left( P_{\mu\alpha\beta} Q_\nu^{\alpha\beta} - 2Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}_\nu \right) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.68)$$

onde  $f_Q = \frac{\partial f}{\partial Q}$ . A equação acima pode ser convenientemente reescrita como

$$2f_{QQ} P_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha Q + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f - f_Q Q) + f_Q G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.69)$$

onde  $G_{\mu\nu} = \dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{R}$  é o tensor de Einstein. A partir de (3.69), podemos facilmente notar que a RG é recuperada se escolhermos  $f(Q) = Q$ . Outra vantagem de escrever a equação métrica dessa forma é que as modificações à RG podem ser facilmente identificadas.

Se nós supormos que a conexão não contribui para o setor de matéria, podemos mostrar que a equação de campo em relação a conexão é dada por

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\sqrt{-g}f_Q P^{\mu\nu}_{\alpha}) = 0. \quad (3.70)$$

Ao contrário do que ocorre com STEGR, aqui a equação da conexão não é trivialmente satisfeita. Portanto, a conexão carrega graus de liberdade extras [48].

Como essa teoria é relativamente recente, temos muitas linhas não exploradas ou pouco exploradas. Por exemplo, soluções de buracos negros foram investigadas recentemente em [49–51]. Um dos maiores desafios dessa teoria vem do pouco entendimento sobre como o *gauge* coincidente funciona para generalizações da STEGR. Felizmente, com trabalhos como [49, 52], esse assunto ficou um pouco mais claro. Atualmente, sabemos que aplicar o *gauge* coincidente para teorias  $f(Q)$  inevitavelmente nos leva a recuperar a RG [49]. Em outras palavras, não é possível obter generalizações da RG usando uma conexão trivial. Ademais, também foi mostrado recentemente que a escolha de uma conexão simplificada leva a sistemas de coordenadas complicados [52]. Tudo isso e o fato de que as equações de campo para teorias  $f(Q)$  são altamente não-lineares, levam a dificuldade computacionais quando trabalhamos com essa teoria. Apesar disso, D’Ambrósio *et al.* conseguiram obter uma conexão simétrica não trivial, estática e esfericamente simétrica, que permite resultados além da RG [49].

Agora focamos nossa atenção a representação escalar-tensorial das teorias  $f(Q)$ . Para um campo escalar acoplado não-minimamente ao escalar de não-metricidade, temos a seguinte ação [45]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{A}(\Phi)Q - \mathcal{B}(\Phi)g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}\Phi \partial_{\beta}\Phi - 2\mathcal{V}(\Phi) \right) + S_m. \quad (3.71)$$

A equação acima fornece as seguintes equações de campo

$$\begin{aligned} \kappa^2 \mathcal{T}_{\mu\nu} &= \mathcal{A}(\Phi)G_{\mu\nu} + 2\frac{\mathcal{A}}{\Phi}P^{\lambda}_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\Phi \\ &+ \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left( \mathcal{B}(\Phi)g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}\Phi \partial_{\beta}\Phi + 2\mathcal{V}(\Phi) \right) - \mathcal{B}(\Phi)\partial_{\mu}\Phi \partial_{\nu}\Phi, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}(\sqrt{-g}\mathcal{A}P^{\alpha\beta}_{\mu}) = 0, \quad (3.73)$$

$$2\mathcal{B}\square\Phi + \frac{\mathcal{B}}{\Phi}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi + \frac{\mathcal{A}}{\Phi}Q - 2\frac{\mathcal{V}}{\Phi} = 0. \quad (3.74)$$

Podemos recuperar a gravidade  $f(Q)$  fazendo

$$\mathcal{A} = f_Q, \quad \mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2}(Qf_Q - f), \quad \Phi = Q, \quad (3.75)$$

o que nos dá as equações de campo para a teoria  $f(Q)$

$$\kappa^2 \mathcal{T}_{\mu\nu} = f_Q G_{\mu\nu} + 2f_{QQ} P^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\lambda Q + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (Qf_Q - f), \quad (3.76)$$

$$0 = \nabla_\mu \nabla_\nu (\sqrt{-g} f_Q P^{\mu\nu}{}_\alpha), \quad (3.77)$$

onde  $f_Q = df/dQ$  e o equação de campo escalar é identicamente satisfeita.

## 4 ENTROPIA DE BURACOS NEGROS

Neste capítulo examinaremos alguns dos métodos empregados para se obter as propriedades de termodinâmica de buracos negros e, em particular, a entropia: pelo método de tunelamento quântico, pelo método da ação euclideana e fórmula de Wald. Esses dois últimos métodos se apoiam na ação dos termos de fronteira. Com isso em mente, discutiremos o atual *status* do método de ação euclidiana para teorias teleparalelas da gravidade. A aplicação do formalismo de Wald para essas teorias será dada no capítulo 6. O método do tunelamento quântico será aplicado no capítulo 5.

### 4.1 Termodinâmica de Buracos Negros

Em 1973, Bardeen, Carter and Hawking propuseram um conjunto de propriedades mecânicas de buracos negros que são análogas às leis da termodinâmica [53]. De acordo com essas propriedades, a gravidade de superfície de um buraco negro faria o papel da temperatura, enquanto sua área de superfície atuaria como a entropia. Vale citar que Bekenstein foi precursor nessa linha de pensamento, tendo não só teorizado a entropia de buracos negros como relacionado essa entropia com a área de superfície [54]. Mais tarde, foi provado que esse conjunto de propriedades realmente se tratava das leis de termodinâmica de buracos negros devido à radiação de Hawking [55] – processo no qual um buraco negro pode emitir partículas devido à efeitos quânticos.

Agora, vamos apresentar as leis de termodinâmica de buracos negros:

- **Lei Zero:** Um buraco negro estacionário possui uma gravidade de superfície constante em seu horizonte de eventos;
- **Primeira Lei:** Para um buraco negro estacionário, a variação da energia  $E$  se relaciona com a variação da área do horizonte de eventos  $A$ , o momento angular  $J$  e a carga elétrica  $Q$  da seguinte forma:

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (4.1)$$

onde,  $\kappa$  é a gravidade de superfície,  $\Omega$  é a velocidade angular e  $\Phi$  é o potencial eletrostático.

- **Segunda Lei (generalizada):** A entropia total, ou seja, a entropia do buraco negro mais a entropia externa, não decresce com o tempo:

$$\frac{dS_t}{dt} \geq 0. \quad (4.2)$$

- **Terceira Lei:** Não é possível atingir  $\kappa = 0$ .

Na sequência, discutiremos alguns métodos para calcular a entropia de buracos negros.

## 4.2 Método de Tunelamento

Nessa seção, falaremos do método de tunelamento quântico, o qual é um método semi-clássico que relaciona a radiação de buracos negros com a o processo de tunelamento quântico através do horizonte de eventos. Entre as vantagens desse método, podemos citar a simplicidade dos cálculos envolvidos, a possibilidade de incluir as contribuições de *back-reaction* e o fato de que apenas a geometria de espaço-tempo é levada em consideração. Sendo esse último ponto particularmente interessante, pois, significa que o método pode ser empregado em uma variedade de espaços-tempo. Além disso, o método de tunelamento possui a vantagem de ser o mais apropriado a situações onde a geometria é dinâmica. Também é interessante citar que esse método nos dá uma interessante interpretação para a radiação de Hawking: classicamente, o horizonte de eventos de um buraco negro atua como uma barreira, prevenindo as partículas de atravessá-la. Assim, apenas quando efeitos quânticos são considerados, a emissão dos buracos negros é observada. Ou seja, esse fenômeno pode ser entendido como um processo de tunelamento da partícula através da barreira, ou seja, através do horizonte de eventos.

O método de tunelamento quântico pode ser entendido a partir de duas abordagens: pela aproximação da geodésica nula, feito por Parikh e Wilczek [56] e pelo *ansatz* de Hamilton-Jacobi, proposto por Padmanabhan *et al* [57, 58] e Angheben *et al* [59]. Devemos focar o último, por ser mais direto e nos dar mais liberdade para decidir se queremos incluir os efeitos de *back-reaction* e para escolher o sistema de coordenadas.

Esse método consiste, basicamente, em estabelecer uma relação entre o fator de Boltzmann com a probabilidade de tunelamento da partícula através do horizonte de eventos. Como resultante dessa comparação, temos uma temperatura, que corresponde a temperatura de Hawking. A partir disso, podemos empregar a Primeira Lei da termodinâmica de buracos

negros para se obter a entropia do buraco negro. A seguir, fazemos a demonstração desses resultados, seguindo a abordagem utilizada em [60].

Vamos começar considerar a seguinte métrica de buracos negros

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)^{-1}dr^2 + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\phi^2). \quad (4.3)$$

Essa forma específica da métrica compreende uma variedades de buracos negros não-girantes, incluindo as métricas apresentadas no capítulo 2. Nas proximidades do horizonte de eventos, a parte angular da métrica é deslocada no vermelho. Consequentemente, somente a parte temporal e radial terão contribuição significativa, de modo que podemos tratar a métrica como sendo bidimensional

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)^{-1}dr^2. \quad (4.4)$$

Por simplicidade, vamos considerar um campo escalar real  $\phi$  obedecendo a equação de Klein-Gordon

$$\hbar^2 g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (4.5)$$

No entanto, os resultados serão os mesmos para campos mais gerais. Considerando a métrica (4.4), obtemos

$$-\partial_t^2 \phi + \Lambda(r) \partial_r^2 \phi + \frac{1}{2} \partial_r \Lambda(r) \partial_r \phi - \frac{m^2}{\hbar^2} f(r) \phi = 0, \quad (4.6)$$

onde  $\Lambda(r) \equiv f(r)g(r)$ .

A equação acima pode ser resolvida por meio da aproximação WKB

$$\phi(t, r) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}(t, r) \right], \quad (4.7)$$

uma vez que, próximo ao horizonte de eventos, o número de ondas radiais se torna infinito [61].

Assim, a equação (4.6) se torna a equação relativística de Hamilton-Jacobi

$$(\partial_t \mathcal{S})^2 - \Lambda(r) (\partial_r \mathcal{S})^2 - m^2 f(r) = 0, \quad (4.8)$$

onde utilizamos o limite  $\hbar \rightarrow 0$ .

Agora, podemos fazer uma separação de variáveis considerando que a dependência temporal é linear

$$\mathcal{S}(t, r) = -\omega t + W(r). \quad (4.9)$$

Ao substituir a equação acima na equação relativística de Hamilton-Jacobi, obtemos

$$W(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{f(r)g(r)}} \sqrt{\omega^2 - m^2 f(r)}. \quad (4.10)$$

Expandindo  $f(r)$  e  $g(r)$  em torno do raio do horizonte de eventos  $r_H$

$$\begin{aligned} f(r) &= f(r_H) + f'(r_H)(r - r_H) + \dots, \\ g(r) &= g(r_H) + g'(r_H)(r - r_H) + \dots, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde a linha indica derivação em relação a  $r$ , obtemos

$$W(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}} \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2 f'(r_H)(r - r_H)}}{(r - r_H)}. \quad (4.12)$$

A integral acima tem como solução

$$W(r) = \frac{2\pi i \omega}{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}, \quad (4.13)$$

onde desconsideramos a contribuição real.

Agora, voltamos para  $\mathcal{I}(t, r)$ , cuja parte imaginária pode ser relacionada à probabilidade de tunelamento de uma partícula com energia  $\omega$ . Assim, ficamos com

$$\Gamma \simeq \exp[-2\text{Im}\mathcal{I}] = \exp\left[-\frac{4\pi\omega}{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}\right]. \quad (4.14)$$

Por fim, podemos identificar essa probabilidade com o fator de Boltzmann  $\Gamma \sim e^{-\beta\omega}$ , onde  $\beta = 1/T_{BH}$  (fizemos  $k_B = 1$ ) para obter a temperatura do buraco negro

$$T_{BH} = \frac{\omega}{2\text{Im}\mathcal{I}} = \frac{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}{4\pi}. \quad (4.15)$$

A entropia do buraco negro  $S_{BH}$  pode ser obtida por meio relação  $TdS = dM$ , o que nos dá

$$S_{BH} = \int \frac{dM}{T_{BH}(M)}. \quad (4.16)$$

No capítulo 5, utilizaremos esse método para obter as propriedades termodinâmicas de buracos negros com quebra de simetria de Lorentz.

### 4.3 Método da Ação Euclidiana

A ação de Einstein-Hilbert tem sido a ação padrão usada na derivação das equações de Einstein. Apesar dessa ação ter a vantagem de ser invariante sob transformações de coordenadas – ao contrário do que acontece para a ação (3.66), que foi originalmente proposta por Einstein [62], – ela não é bem definida do ponto de vista variacional. As duas ações são equivalentes, uma vez que produzem as mesmas equações de campo, mas diferem entre si pelo fato de que a densidade lagrangiana da ação de Einstein-Hilbert possui um termo de fronteira. Nesse caso, o termo de fronteira aparece devido a derivadas segundas da métrica, presentes na ação de Einstein-Hilbert. Mesmo que os termos de fronteiras não afetem as equações de campo, a sua presença faz com que seja necessário assumir que o espaço-tempo não tem fronteira, isto é, que a métrica é fixada no infinito.

Para espaços-tempo com fronteiras, contudo, essa suposição não é válida e a ação de Einstein-Hilbert precisa ser complementada por um contra-termo. O efeito desse termo é fixar a métrica (induzida) na fronteira. Mesmo que essa escolha de contra-termo não seja única, vamos apresentar o termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York (GHY), uma vez que é o mais conhecido e utilizado. Nosso interesse nesse termo de fronteira é justificado pelo fato dele ser responsável por nos dar a entropia correta para um buraco negro, quando utilizamos o método da integral de caminho.

Quando tomamos a variação com relação a métrica, a ação de Einstein-Hilbert fornece

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( \dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \dot{\nabla}_{\mu} A^{\mu} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( \dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{|h|} n_{\mu} A^{\mu},\end{aligned}\quad (4.17)$$

onde  $h$  é o determinante da métrica induzida na fronteira  $\partial V$ ,  $n_{\mu}$  é um vetor unitário e normal a essa superfície e  $A^{\mu} = g^{\alpha\beta} \delta \dot{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \delta \dot{\Gamma}^{\beta}_{\beta\alpha}$ .

A ideia por trás do termo de GHY é que o termo de fronteira  $n_{\mu} A^{\mu}$  pode ser escrito como  $\delta B + X_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu}$ , onde  $h^{\mu\nu}$  é a métrica induzida na fronteira. Portanto, a adição do termo adicional de fronteira contendo  $-B$  na ação não afetará as equações de campo e o único termo de fronteira restante será  $X_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu}$ . Esse termo desaparece se assumirmos que  $\delta h^{\mu\nu} = 0$  em  $\partial V$ , isto é, a métrica induzida é fixada na fronteira. Os detalhes desses cálculos, os quais não mostraremos aqui, podem ser encontrados em [63].

O termo GHY é dado por

$$S_{GHY} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} K, \quad (4.18)$$

onde  $h$  é a métrica induzida de fronteira com coordenadas  $y$ ,  $\varepsilon = n_\alpha n^\alpha = \pm 1$  muda de sinal dependendo se a fronteira é do tipo espaço ou tipo tempo e  $K$  é o traço da curvatura intrínseca. Além do termo GHY, nós também precisamos de um termo de normalização para garantir que a ação tenha um valor finito num espaço de Minkowski de fundo:

$$S_C = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} K_0, \quad (4.19)$$

onde  $K_0$  é a curvatura intrínseca da geometria fixa de fundo. Esse termo não depende da métrica do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$ , mas sim da métrica induzida  $h_{ab}$ . Portanto, variações da ação acima com respeito a  $g_{\mu\nu}$  automaticamente resultam em zero e não contribuem para as equações de campo. Entretanto, esse termo tem um papel importante quando necessitamos calcular a ação, uma vez que evita que a ação tenha fatores divergentes. Por essa razão, esse termo é frequentemente referido como termo não-dinâmico.

Logo, com a adição do termo GHY e o termo de normalização, a ação torna-se bem definida para espaços-tempo com fronteira e bem definida quando a fronteira é levada ao infinito:

$$S = S_{EH} + S_{GHY} + S_C = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} (K - K_0). \quad (4.20)$$

Agora, nós podemos continuar com a ação euclideana para obtermos a entropia de buraco negro. Começamos pela função de partição para o sistema com hamiltoniano  $H$  e temperatura  $T = \beta^{-1}$ , a qual é dada por

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_n \langle g_n, \phi_n | e^{-\beta H} | g_n, \phi_n \rangle \quad (4.21)$$

onde  $g_n, \phi_n$  denota os campos gravitacionais e de matéria. Aqui,  $\beta = 1/T$  denota a periodicidade no tempo euclidiano  $\tau$ . Se fizemos uma rotação de Wick  $t = i\tau$ , podemos representar a função de partição como uma integral de caminho [64]

$$Z = \int D[g] D[\phi] e^{-S_E(g, \phi)}, \quad (4.22)$$

onde  $S_E(g, \phi) = iS(g, \phi)$  é a ação euclidiana enquanto  $S(g, \phi)$  é a ação gravitacional.

As contribuições para a integral de caminho vem, predominantemente, de caminhos

próximos a configuração clássica de campo. Expressando  $g = \bar{g} + \delta g$ , nós temos  $S_E[g] = S_E[\bar{g}] + S^{(1)}(\delta g) + \dots$ . Consequentemente, temos

$$\ln Z = -S_E[\bar{g}] + \ln \left( \int d[g] e^{-S^{(1)}(\delta g)} \right). \quad (4.23)$$

Considerando que as contribuições mais significantes vem do espaço-tempo de fundo e que  $\ln Z = -T^{-1}(M - TS)$ , podemos demonstrar que a entropia para um buraco negro com massa  $M$  é dada por

$$S = \beta M + \ln Z = S_E. \quad (4.24)$$

Portanto, para se obter a entropia de buraco negro, precisamos apenas calcular a ação euclideana. Como já discutimos, a ação Einstein-Hilbert deve se suplementada pelo termo de fronteira de GHY e um termo de normalização (4.20). Por outro lado, a métrica de Schwarzschild, após uma rotação de Wick  $t = i\tau$ , torna-se

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.25)$$

Note que a métrica torna-se positiva definida para  $r > 2M$ . A ação de Einstein-Hilbert é nula para esse espaço-tempo, deixando a ação total apenas com as contribuições do termo de fronteira e do termo de normalização

$$S_E = \frac{1}{8\pi} \int_0^\beta d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sqrt{|h|} (K - K_0) = \frac{\beta M}{2} = 4\pi M^2, \quad (4.26)$$

onde  $\beta = T^{-1} = 8\pi M$  é o período no tempo euclideano,  $\sqrt{|h|} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} r_0^2 \sin \theta$  com  $r_0$  sendo a coordenada radial na fronteira.

Levando em consideração o fato de que termo de fronteira é o único responsável pela entropia de buracos negros no método da ação euclidiana e TEGR e STGR são equivalentes a RG a menos de um termo de fronteira, podemos questionar se as ações dessas teorias precisam ser suplementadas. Em TEGR, temos evidências de que o termo de fronteira vindo da divergência do traço da torção cancela o termo de fronteira na ação de Einstein-Hilbert [65]. Logo, a ação é suplementada somente por um termo  $S_C$  e temos [66]

$$S_E = S_{STGR} + S_C = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{M}} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} n_\mu (T^\mu - T_0^\mu), \quad (4.27)$$

onde  $T^\mu$  é o traço da torção, definido por  $T_\mu = T_{\mu\nu}^\nu$  e  $n_\mu$  é um vetor normal. Uma vez que

temos  $T_{rv}^v = \frac{2}{r} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$  e  $T_{r_0v}^v = \frac{2}{r_0}$ , a ação euclidiana se torna

$$S_E = \frac{1}{8\pi} \int_0^\beta d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sqrt{|h|} n_r (T^r - T_0^r) = \frac{\beta M}{2} = 4\pi M^2. \quad (4.28)$$

De fato, na TEGR a entropia de buracos negros pode ser obtida sem necessidade de contra-termos.

Para a STEGR, como discutido em 3.5, a ação no *gauge* coincidente se torna a ação de Einstein-Hilbert sem termo de fronteira. Isso indica que o termo GHY não é necessário em STEGR. Vamos tentar visualizar isso explicitamente. Do fato de que  $Q = \frac{2}{r^2}$ , nós obtemos [66]

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} Q = \frac{1}{16\pi} \int_0^\beta d\tau \int d\Omega \int_{r_0}^{2M} r^2 dr \frac{2}{r^2} \\ &= \beta \left( M - \frac{1}{2} r_0 \right) = 8\pi M \left( M - \frac{1}{2} r_0 \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Não só nós temos um termo divergente quando  $r_0 \rightarrow \infty$  — o que poderia ser resolvido pela adição de um termo de normalização — como também o primeiro termo parece ser o dobro do valor da entropia.

Por outro lado,  $\mathring{R} = 0$  para o espaço-tempo de Schwarzschild, de modo que  $Q = -\mathring{\nabla}_\mu (Q^\mu - \tilde{Q}^\mu)$ . Além disso,  $Q^r - \tilde{Q}^r = 2 \left[ \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \frac{2}{r} \right]$  no *gauge* coincidente. Levando tudo isso em consideração, obtemos

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} Q = -\frac{1}{16\pi} \int d^3y \epsilon \sqrt{|h|} n_\mu (Q^\mu - \tilde{Q}^\mu) \\ &= \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2} \left[ \frac{2M}{r_0^2} - \frac{2}{r_0} \right] \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde usamos  $n_\mu = -\sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}} \delta_\mu^r$ .

Nós vemos que em ambas as tentativas, não conseguimos o valor correto de entropia, mesmo usando uma ação que é equivalente a RG. Apesar da ação coincidente evitar os termos de fronteira que necessitam ser suplementados na ação de Einstein-Hilbert, ela não reproduz o resultado correto para a entropia de buraco negro. Esse problema já foi reportado em [66], onde os autores mostram que para uma escolha específica de coordenadas, é possível se obter a resultado finito para a entropia, mas sendo o dobro do valor correto.

Recentemente, esse problema foi esclarecido. Como demonstrado [52], as coordenadas esféricas não podem ser utilizadas simultaneamente com o *gauge* coincidente. Logo, quando estamos trabalhando com STEGR, devemos escolher um sistema de coordenadas sim-

plificado e uma conexão complicada ou o oposto. Portanto, nossos resultados imprecisos são uma consequência de assumirmos que o espaço-tempo de Schwarzschild, em coordenadas esféricas, e o *gauge* coincidente podem ser utilizados ao mesmo tempo. Além disso, o fato de as coordenadas esféricas não serem as que realmente correspondem ao *gauge* coincidente implica que, quando resolvemos a ação de CGR com respeito a estas coordenadas, nós estamos ignorando alguns termos de fronteira que devem aparecer na ação correta de CRG. Enquanto as equações de campo permanecem inalteradas com respeito a esses termos de fronteira, a entropia é sensível a eles. Isso poderia explicar porque os resultados obtidos em [66] são dependentes de coordenadas.

Outro ponto interessante que foi mostrado em [52] é que no *gauge* coincidente correto, temos ou  $Q = -\mathring{\nabla}_\mu(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu)$  ou  $Q = 0$  and  $\mathring{\nabla}_\mu(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu) = 0$  para o espaço-tempo de Schwarzschild. Isso implica que a relação  $\mathring{R} = -Q - \mathring{\nabla}_\mu(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu)$  é válida, como deveria ser. Portanto, se a ação de Einstein-Hilbert necessita ser suplementada pelo termo GHY, também podemos argumentar que isso deve ser o caso para a ação CGR. Esse assunto, no entanto, precisa de mais investigação.

#### 4.4 Método de Wald

Nessa seção vamos explorar a derivação da fórmula de Wald, a qual relaciona a entropia do buraco negro com a carga de Noether  $\mathbf{q}$  para difeomorfismos da seguinte forma[2]

$$\frac{\kappa}{2\pi}S = \int_{\Sigma} \mathbf{q}, \quad (4.31)$$

onde  $\kappa$  é a gravidade de superfície do buraco negro. Além disso, esse método é equivalente ao procedimento euclidiano [67]. A partir da equação (4.61) também é possível se obter a Primeira Lei da termodinâmica de buracos negros. [68]. A seguir, vamos derivar e discutir esse resultado.

Quando consideramos qualquer transformação infinitesimal  $\hat{\delta}\phi$  da ação funcional, pode-se mostrar que a ação é invariante a menos de um termo de fronteira

$$S(\phi + \hat{\delta}\phi) = S(\phi) + \int d^4x \partial_\mu K^\mu. \quad (4.32)$$

Para obter a corrente de Noether, começaremos tomando a transformação geral da ação

$$\delta S = \int d^4x [E(\phi)\delta\phi + \partial_\mu \theta^\mu(\phi, \delta\phi)], \quad (4.33)$$

onde  $E(\phi)$  são as equações de movimento de Euler-Lagrange e  $\theta$  é a densidade de corrente simplética. A simetria da transformação nos dá uma quantidade conservada  $J^\mu = \theta^\mu(\phi + \hat{\delta}\phi) - K^\mu$ , obedecendo a lei de conservação  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , que equivale à validade das equações de movimento. Esse é a ideia básica por trás do método de Wald.

Agora, vamos introduzir brevemente o conceito das formas diferenciais, as quais serão utilizada para descrever o método de Wald. Uma forma diferencial é uma aplicação linear sobre o vetor de campo tal que  $\vec{v}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$dx^i(\vec{v})(\vec{x}) = v_i(\vec{x}), x \in U. \quad (4.34)$$

Definimos o produto exterior como sendo a seguinte operação antissimétrica

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad (4.35)$$

Note que  $dx^i \wedge dx^i = 0$ . Logo, podemos definir uma  $p$ -forma como

$$\mathbf{a} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (4.36)$$

onde  $\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_n}$  é antissimétrico nos seus índices. Aqui, as letras em negrito denotam formas diferenciais.

Agora, vamos citar as operações para  $p$ -formas. Para facilitar a notação, vamos escrever  $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$  e  $dx^J = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$ . Com isso em mente, podemos ter as seguintes operações:

- Podemos somar  $p$ -formas  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = \sum_{1 \leq I \leq n} (f_I + g_I) dx^I. \quad (4.37)$$

- Um produto exterior de uma  $p$ -forma e uma  $q$ -forma é uma  $(p + q)$ -forma:

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} = \sum_{1 \leq I, J \leq n} h_{IJ} dx^I \wedge dx^J \quad (4.38)$$

- A derivada exterior de uma  $p$ -forma é uma  $(p + 1)$ -forma, definida como

$$d\mathbf{a} = \sum_{1 \leq i, I \leq n} \frac{\partial a_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I. \quad (4.39)$$

Note que  $d^2\mathbf{a} = 0$ . Se  $\mathbf{a} = d\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  é exata. Por outro lado,  $d\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{a}$  é fechada.

Agora temos todas as ferramentas necessárias em termos das formas diferenciais.

No que se segue, iremos denotar todos os campos dinâmicos tal como a métrica  $g_{ab}$  e outros campos por  $\psi$  e  $\phi$  e nos restringiremos a teorias invariantes de difeomorfismo, isto é, teorias que obedecem a lagrangiana

$$\mathbf{L}(f^*(\phi)) = f^*\mathbf{L}(\phi), \quad (4.40)$$

onde  $f^*$  é a ação induzida nos campos por um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  e  $(M, g_{ab})$  é um espaço-tempo  $n$ -dimensional. Além disso, as letras em negrito denotam formas diferenciais no espaço-tempo. Devemos enfatizar que, a partir de agora, trataremos o lagrangeano como uma  $n$ -forma, em vez de uma densidade escalar, como fazemos em geral. No entanto, essas duas abordagens são equivalentes [69].

Uma lagrangeana que é invariante sob difeomorfismos do tipo (4.40), pode ser escrita como[68]

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(g_{ab}; R_{bcde}, \overset{\circ}{\nabla}_{a_1} R_{bcde}, \dots, \psi, \overset{\circ}{\nabla}_{a_1} \psi, \dots), \quad (4.41)$$

onde  $R_{abcd}$  é a curvatura métrico-compatível e  $\overset{\circ}{\nabla}$  é operador derivada covariante associado à métrica, isto é, a derivada covariante da conexão de Levi-Civita. Vale ressaltar que em (4.41), não temos nenhuma dependência de possíveis campos de fundo.

A variação da lagrangeana, até a primeira ordem, nos dá a seguinte relação

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{E}\delta\phi + d\Theta, \quad (4.42)$$

onde  $\mathbf{E}$  denota as equações de movimento relativas a cada campo dinâmico e a soma sobre os possíveis campos  $\phi$  está implícita.  $\Theta(\phi, \delta\phi)$  é uma  $(n-1)$ -forma que depende dos campos dinâmicos e suas variações e é denominada potencial simplético. A partir do potencial simplético  $\Theta$ , podemos obter a corrente simplética, que é uma  $(n-1)$ -forma, tomando a variação antissimétrica de  $\Theta$

$$\Omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \delta_1\Theta(\phi, \delta_2\phi) - \delta_2\Theta(\phi, \delta_1\phi). \quad (4.43)$$

O papel da corrente simplética ficará claro mais tarde.

Devemos notar que, apesar de  $\mathbf{E}$  ser completamente determinado por (4.42),  $\Theta$  é determinada a menos da adição de uma  $(n-1)$ -forma fechada

$$\Theta \rightarrow \Theta + dY. \quad (4.44)$$

Por outro lado, sabemos que uma mudança na lagrangeana do tipo

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} + d\mathbf{u} \quad (4.45)$$

não modifica as equações de movimento, ou seja, não afeta a dinâmica da teoria. Entretanto, nesse caso,  $\Theta$  deve ser deslocado  $\Theta + \delta\mathbf{u}$ . Logo,  $\Theta$  não pode ser construída univocamente uma vez que sempre podemos adicionar termos do tipo  $d\mathbf{Y}$  e  $\delta\mathbf{u}$  sem modificar a dinâmica da teoria.

Dado um vetor  $\xi^\alpha \in M$  e uma forma diferencial  $\Lambda$ , temos a identidade de Cartan

$$\mathcal{L}_\xi \Lambda = \xi \cdot (d\Lambda) + d(\xi \cdot \Lambda), \quad (4.46)$$

onde “ $\cdot$ ” denota a contração do campo vetorial com o primeiro índice da forma diferencial, isto é,  $(v \cdot \sigma)_{a\dots b} = v^c \sigma_{ca\dots b}$ . Agora, como estamos interessados em difeomorfismos, vamos considerar uma variação de campo  $\delta\phi = \mathcal{L}_\xi \phi$  e aplicá-la ao lagrangeano invariante por difeomorfismos  $\mathbf{L}$ . Com isso em mente e usando (4.46), obtemos

$$\delta\mathbf{L} = \mathcal{L}_\xi \mathbf{L} = d(\xi \cdot \mathbf{L}), \quad (4.47)$$

onde  $d\mathbf{L}$  se anula uma vez que se trata de uma  $(n+1)$ -forma em um espaço  $n$ -dimensional.

Podemos identificar o termo  $d(\xi \cdot \mathbf{L})$  com  $\partial_\mu K^\mu$  em (4.42). Portanto, para cada campo vetorial  $\xi^\alpha$  gerando um difeomorfismo em  $M$ , podemos associar uma corrente de Noether conservada

$$\mathbf{j} = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \xi \cdot \mathbf{L}. \quad (4.48)$$

Uma vez que

$$d\mathbf{J} = d\Theta - d(\xi \cdot \mathbf{L}) = \delta\mathbf{L} - \mathbf{E}\delta\phi - \delta\mathbf{L} = -\mathbf{E}\delta\phi, \quad (4.49)$$

a corrente é conservada (fechada) *on-shell*. Se aplicarmos (4.46) a  $\mathbf{u}$ , podemos ver que teremos a seguintes ambiguidades para  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + d(\xi \cdot \mathbf{u}) + d\mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) \quad (4.50)$$

Uma vez que  $d\mathbf{j} = -\mathbf{E}\mathcal{L}_\xi \phi$ , podemos concluir que, sempre que as equações de movimento  $\mathbf{E} = 0$  forem satisfeitas, a  $(n-1)$ -forma  $\mathbf{j}$  é fechada e pode ser obtida a partir de uma  $(n-2)$ -forma  $\mathbf{q}$ , que é construída localmente a partir de  $\phi$  e  $\xi^\alpha$ :

$$\mathbf{j} = d\mathbf{q}. \quad (4.51)$$

Tal forma é chamada de carga de Noether e é determinada por (4.51) a menos da adição de uma  $(n-3)$ -forma fechada. Assim, ela possui as seguintes ambiguidades

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \xi \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) + d\mathbf{Z} \quad (4.52)$$

Agora, vamos voltar a relação (4.48). Podemos ver que qualquer variação arbitrária  $\delta\phi$  da corrente de Noether, até primeira ordem, nos fornece

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{j} &= \delta\Theta - \xi \cdot \delta\mathbf{L} \\ &= \delta\Theta - \xi \cdot [\mathbf{E}\delta\phi + d\Theta] \\ &= \delta\Theta - \mathcal{L}_\xi[\Theta(\phi, \delta\phi)] + d(\xi \cdot \Theta), \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde usamos a identidade de Cartan (4.46) para  $\Theta$  e  $\mathbf{E} = 0$  na última linha. Usando a definição da corrente simplética, (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{j} &= \mathbf{\Omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) + d(\xi \cdot \Theta) \\ \Rightarrow \mathbf{\Omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) &= \delta\mathbf{j} - d(\xi \cdot \Theta). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Se integrarmos a última equação sobre uma superfície de Cauchy  $\Sigma$ , obteremos [70]

$$\delta H = \int_\Sigma \mathbf{\Omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) = \delta \int_\Sigma \mathbf{j} - \int_\Sigma d(\xi \cdot \Theta), \quad (4.55)$$

onde  $H$  é um hamiltoniano conjugado de  $\xi^\alpha$ . Usando  $\mathbf{j} = d\mathbf{q}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_\Sigma \mathbf{\Omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) = \delta \int_\Sigma d\mathbf{q} - \int_\Sigma d(\xi \cdot \Theta) \\ &= \int_{\partial\Sigma} (\delta\mathbf{q} - \xi \cdot \Theta). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Pode-se mostrar que não somente existe um  $H$  tal que a equação acima é satisfeita, mas também que ele é independente da superfície escolhida [70], o que pode ser entendido como a conservação de  $H$ .

Se o vetor de Killing corresponde a translações temporais, então o hamiltoniano pode ser identificado como a massa ADM

$$\delta M = \int_{\partial\Sigma} (\delta\mathbf{q} - t \cdot \Theta) \quad (4.57)$$

Se o vetor de Killing é a rotação assintótica, podemos identificar  $H = -J$  e

$$\delta J = - \int_{\partial\Sigma} (\delta \mathbf{q} - \phi \cdot \Theta), \quad (4.58)$$

onde  $\phi$  é a variação assintótica do momento angular. Então, podemos mostrar que [2]

$$\delta M - \Omega_H \delta J = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S. \quad (4.59)$$

A identificação da área do buraco negro como sua entropia é válida para o lagrangeano de Einstein-Hilbert, mas não necessariamente para outras teorias. Entretanto, a identificação de  $\delta M - \Omega_H \delta J$  como sendo igual a  $\frac{\kappa}{2\pi} \delta S$  é válida em qualquer teoria invariante de difeomorfismo, contanto que esta possua soluções de buracos negros.

Para buracos negros estacionários com um horizonte de Killing bifurcado, é possível mostrar que [68]

$$\delta M - \Omega_H \delta J = \delta \int_{\partial\Sigma} \mathbf{q}. \quad (4.60)$$

Portanto, temos

$$\frac{\kappa}{2\pi} S = \int_{\Sigma} \mathbf{q}. \quad (4.61)$$

#### 4.4.1 Aplicação a Relatividade Geral

Como exemplo do método que acabamos de explorar, vamos considerar que a densidade da lagrangeana da RG é dada por  $L = \frac{1}{16\pi} R$  e, por simplicidade, vamos denotar o elemento de volume como  $\varepsilon = \sqrt{-g} d^n x = \sqrt{-g} \varepsilon_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Portanto, a forma lagrangeana é dada por [2]

$$\mathbf{L} = \frac{1}{16\pi} \varepsilon R. \quad (4.62)$$

A variação dessa lagrangeana nos dá

$$\delta \mathbf{L} = \frac{1}{16\pi} \varepsilon (-G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}), \quad (4.63)$$

onde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$  é o tensor de Einstein.

Após alguns cálculos, podemos mostrar que o segundo termo é dado por

$$\begin{aligned} d\Theta &= \frac{1}{16\pi} \varepsilon g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \dot{\nabla}_\alpha [\dot{\nabla}_\mu (\delta g_{\beta\nu}) - \dot{\nabla}_\beta (\delta g_{\mu\nu})] \\ &= \dot{\nabla}_\alpha \left\{ \frac{1}{16\pi} \varepsilon g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} [\dot{\nabla}_\mu (\delta g_{\beta\nu}) - \dot{\nabla}_\beta (\delta g_{\mu\nu})] \right\} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Então,

$$\Theta_{\gamma\delta\rho} = \frac{1}{16\pi} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta\rho} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} [\nabla_\mu (\delta g_{\beta\nu}) - \nabla_\beta (\delta g_{\mu\nu})]. \quad (4.65)$$

Para uma variação  $\delta\phi = \mathcal{L}_\xi\phi$  onde  $\xi$  é um vetor de Killing, temos

$$\Theta_{\gamma\delta\rho} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta\rho} \left[ R^{\alpha\beta} \xi_\beta + \nabla_\beta (\nabla^{[\beta} \xi^{\alpha]}) \right] \quad (4.66)$$

A partir de (4.48), vemos que a corrente de Noether associada com o lagrangeano (4.62) é

$$\mathbf{j}_{\gamma\delta\rho} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta\rho} \nabla_\beta (\nabla^{[\beta} \xi^{\alpha]}), \quad (4.67)$$

onde usamos as equações de Einstein no vacuum  $G^{\mu\nu} = 0$ . Seguindo o mesmo argumento usado para determinar  $\Theta$ , podemos obter o carga de Noether

$$\mathbf{q}_{\delta\rho} = -\frac{1}{16\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\delta\rho} \nabla^{[\alpha} \xi^{\beta]}. \quad (4.68)$$

Esse mesmo formalismo é aplicado a Teorias Teleparalelas da Gravidade no capítulo 6. A extensão desse formalismo para espaços-tempo com não-metricidade, em particular, no *gauge* coincidente, pode ser encontrado em [71].

## 5 TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Neste capítulo, temos a primeira parte dos resultados desta tese que consistem em investigar a termodinâmicas de buracos negros em cenários onde a simetria de Lorentz é violada. A primeira seção é dedicada a discutir a termodinâmica de buracos negros obtidos a partir do modelo de *bumblebee*. Para tanto, utilizamos as métricas B e C, que foram apresentadas no capítulo 2. Os resultados encontrados estão presentes em [16]. Na segunda seção, discutimos a termodinâmica bem como a correlação entre eventos de emissão de partículas de buracos negros no contexto da gravidade *rainbow*. Baseamos nossa análise na métrica tipo Schwarzschild apresentada em (2.49).

### 5.1 Termodinâmica de Buracos Negros de *Bumblebee*

Nesta seção, vamos aplicar o método de tunelamento para obter propriedades termodinâmicas da métricas B

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0^L} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0^L} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.1)$$

onde  $L = \xi \bar{b}^2/2$  é o parâmetro de LSB,  $M = G_L m$  é a massa geométrica,  $r_0$  é uma distância arbitrária e  $d\Omega^2$  é o ângulo sólido, e da métrica C

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + (1 + \ell) \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.2)$$

onde  $\ell = \xi b^2$  é o parâmetro de LSB e  $M = G_N m$  é a massa geométrica.

Agora, vamos usar a expressão para a temperatura determinada pelo método de tunelamento (Seção 4.2)

$$T = \frac{\sqrt{f'(r_S)g'(r_S)}}{4\pi}. \quad (5.3)$$

#### 5.1.1 Métrica B

Aplicando essa fórmula para a métrica B, obtemos

$$T_B = \frac{f'(r_B)}{4\pi} = (1 - L)(2Mr_0^{-1})^{-L/(1-L)} T_0, \quad (5.4)$$

onde  $T_0 = 1/8\pi M$  é a temperatura de Hawking para o buraco negro de Schwarzschild e usamos  $r_B = (2Mr_0^{-L})^{1/1-L}$  como horizonte de eventos.

Agora, podemos calcular a entropia desse buraco negro

$$S_B = \int \frac{dM}{T(M)} = \frac{2(2Mr_0^{-1})^{L/1-L}}{2-L} S_0, \quad (5.5)$$

onde  $S_0 = 4\pi M^2$  é a entropia do buraco negro de Schwarzschild sem violação da simetria de Lorentz. Por outro lado, usando a lei da área, obtemos uma expressão diferente daquela para o método de tunelamento

$$S'_B = (2Mr_0^{-1})^{\frac{2L}{1-L}} S_0. \quad (5.6)$$

Essa discrepância pode ser resolvida se modificarmos a primeira lei da seguinte forma [72, 73]

$$T_B dS_B = F(M, r_0, L) dM, \quad (5.7)$$

onde  $F$  é uma função a ser determinada. A dependência funcional dessa função em  $M, r_0, L$  foi escolhida por conveniência. Para determiná-la, devemos notar que

$$F(M, r_0, L) = T_B \frac{dS'_B}{dM}. \quad (5.8)$$

Podemos então substituir as equações (5.4) e (5.6) na última equação para encontrar

$$F(M, r_0, L) = (2Mr_0^{-1})^{\frac{L}{1-L}}. \quad (5.9)$$

Assim, a entropia obtida pelo método de tunelamento será igual a obtida pelo método da área se considerarmos a modificação da primeira lei dada por (5.7).

Nesse momento, vamos investigar a estabilidade térmica, que pode ser analisada por meio da capacidade térmica. Sabemos que o buraco negro de Schwarzschild possui capacidade térmica negativa e são sempre instáveis num banho de calor infinito [74]. Isso ocorre devido ao fato da temperatura ser inversamente proporcional a massa do buraco negro. Assim, ela decresce a medida que o buraco negro absorve massa [75].

Alguns modelos com LSB, no entanto, possuem configurações estáveis e até mesmo remanescentes de buracos negros [76–79]. Por esta razão, é interessante investigarmos se a estabilidade térmica do buraco negro é alterada pela LSB. Para tanto, vamos considerar a capacidade térmica a volume constante [80]

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial r_S} \left( \frac{\partial T}{\partial r_S} \right)^{-1}. \quad (5.10)$$

Agora, prosseguimos para o cálculo da capacidade térmica para a métrica B. Para tanto, reescrevemos a temperatura e a entropia em termos do raio  $r_B = (2Mr_0^{-L})^{1/1-L}$  da seguinte forma

$$T_B = \frac{1-L}{4\pi} r_B^{-1}, \quad (5.11)$$

e

$$S_B = \pi r_B^2. \quad (5.12)$$

Portanto, a capacidade térmica para a métrica B é dada por

$$C_B = T \frac{\partial S}{\partial r_B} \left( \frac{\partial T}{\partial r_B} \right)^{-1} = (2Mr_0^{-1})^{\frac{2L}{1-L}} C_0, \quad (5.13)$$

onde  $C_0 = -8\pi M^2$  é a capacidade térmica de Schwarzschild à volume constante. Com isso, vemos que a o buraco negro representado pela métrica B apresenta as mesmas condições de instabilidade térmica que o buraco negro de Schwarzschild.

Como  $L \ll 1$ , podemos expandir a temperatura, entropia e capacidade térmica, respectivamente, como

$$T_B \approx \{1 - L[\ln(2Mr_0^{-1}) + 1]\} T_0, \quad (5.14)$$

$$S'_B \approx [1 + 2L\ln(2Mr_0^{-1})] S_0, \quad (5.15)$$

e

$$C_B \approx [1 + 2L\ln(2Mr_0^{-1})] C_0. \quad (5.16)$$

Podemos notar que a dependência dessas quantidades no parâmetro de LSB é linear, enquanto a dependência na distância arbitrária  $r_0$  é logarítmica. Vamos analisar alguns casos nos quais essa dependência é simplificada lembrando que essa distância arbitrária pode ser interpretada como a distância a partir da fonte para a qual os efeitos da violação de Lorentz são detectados como devidos a um potencial de Yukawa [14].

Assim, temos

$r_0 < 2M$ : Nesse caso, temos

$$r_B = (2Mr_0^{-L})^{1/(1-L)} > 2M > r_0. \quad (5.17)$$

O raio arbitrário  $r_0$  deve ser maior que o raio do horizonte de eventos para que os efeitos da LSB sejam detectados por um observador no infinito, o que não ocorre nesse caso.

$r_0 = 2M$ : Nesse caso, o raio arbitrário é igual ao raio do horizonte de eventos,  $r_B = r_0 = 2M$ . Assim, temos  $\ln(2Mr_0^{-1}) = 0$  e

$$T_B = (1 - L)T_0, \quad (5.18)$$

$$S'_B \approx S_0, \quad (5.19)$$

$$C_B \approx C_0. \quad (5.20)$$

Podemos notar que a temperatura é menor que a temperatura de Schwarzschild enquanto a entropia e a capacidade térmica não são alteradas pela LSB. Portanto, a simetria de Lorentz é parcialmente recuperada no limite  $r_0 \rightarrow 2M$  mas ainda temos remanescentes da violação dessa simetria.

$r_0 > 2M$ : Agora, temos que a distância arbitrária é maior que o raio do horizonte de eventos

$$r_B = (2Mr_0^{-L})^{1/(1-L)} < 2M < r_0. \quad (5.21)$$

Neste caso,  $\ln(2Mr_0^{-1}) < 0$  e, se supormos que  $2Mr_0^{-1} < e^{-1}$ , ou  $r_0 > e(2M)$ , onde  $e = 2,718$  é o número de Euler, teremos  $\ln(2Mr_0^{-1}) + 1 < 0$ . Assim,

$$T_B > T_0. \quad (5.22)$$

Neste caso, a LSB tem o efeito de aumentar a temperatura do buraco negro. Por outro lado, quando  $r_0 = e(2M)$ , a temperatura  $T_B$  se aproxima da temperatura de Schwarzschild, enquanto a entropia e a capacidade térmica se tornam, a medida que  $r_0 \rightarrow e(2M)$ ,

$$S'_B \approx (1 - 2L)S_0, \quad (5.23)$$

e

$$C_B \approx (1 - 2L)C_0. \quad (5.24)$$

Para essas condições, temos que a entropia e a capacidade térmica do buraco negro sofrem uma diminuição devido a LSB, embora a temperatura não seja modificada. Assim, temos novamente uma situação na qual os resultados usuais são recuperados parcialmente, enquanto observamos alguns resquícios de LSB.

### 5.1.2 Métrica C

Agora, vamos analisar a termodinâmica considerando a métrica C, começando pela temperatura:

$$T_C = \frac{\sqrt{f'(r_S)g'(r_S)}}{4\pi} = \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} \frac{1}{8\pi M} = \frac{T_0}{\sqrt{1+\ell}}, \quad (5.25)$$

onde usamos  $r_S = 2M$  como horizonte de eventos. Como esperamos que a contribuição da LSB seja pequena, podemos expandir esse resultado para  $\ell \ll 1$

$$T_C \approx \frac{1}{8\pi M} - \frac{\ell}{16\pi M} = \left(1 - \frac{\ell}{2}\right) T_0. \quad (5.26)$$

Assim, vemos que o efeito da LSB para a temperatura do buraco negro consiste em diminuí-la.

A entropia é dada por

$$S_C = \int \frac{dM}{T(M)} = 4\pi M^2 \sqrt{1+\ell} = \sqrt{1+\ell} S_0, \quad (5.27)$$

onde usamos a temperatura  $T$  dada por (3). Podemos checar que essa entropia é a mesma que a obtida pelo método da área do horizonte de eventos. Além disso, como resultado da diminuição da temperatura devido a efeitos da LSB, a entropia é aumentada. A capacidade térmica é dada por

$$C_C = \sqrt{1+\ell} C_0. \quad (5.28)$$

Apesar da modificação  $\sqrt{1+\ell}$ , vemos que as condições de estabilidade desse buraco negro não foram alteradas. Aplicando a mesma aproximação utilizada em (5.26), encontramos

$$\begin{aligned} S_C &= \left(1 + \frac{\ell}{2}\right) S_0, \\ C_C &= \left(1 + \frac{\ell}{2}\right) C_0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

o que demonstra que a modificação da LSB à termodinâmica desse buraco negro é linear.

## 5.2 Termodinâmica e Correlação para Buracos Negros em Gravidade *Rainbow*

Na presente seção, discutiremos as propriedades termodinâmicas e a correlação entre eventos de emissão para a métrica de buraco negro dada por

$$ds^2 = \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.30)$$

Os resultados aqui apresentados estão contidos no trabalho [32]. Para a obtenção das propriedades termodinâmicas, utilizaremos o método do tunelamento quântico, descrito em 4.2.

Começamos pela temperatura, que é dada por

$$T = \frac{\sqrt{f'(r_+)g'(r_+)}}{4\pi}, \quad (5.31)$$

onde  $r_+$  é o raio do horizonte de eventos e  $f(r), g(r)$  são as componentes temporal e radial da métrica, respectivamente. Considerando a métrica (5.30) e o raio do horizonte de eventos como  $r_+ = 2M$ , obtemos

$$T = \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right) T_0, \quad (5.32)$$

onde  $T_0 = (8\pi M)^{-1}$  é a temperatura de Schwarzschild. Devemos notar que, como o parâmetro de *rainbow* é positivo, então a temperatura obtida é menor que a temperatura de Schwarzschild. Além disso, no limite  $\gamma \rightarrow 0$ , o resultado clássico é recuperado.

Como já discutido, a radiação de Hawking é um processo quântico e, portanto, os *quanta* das partículas emitidas devem obedecer o princípio da incerteza  $\Delta x \Delta p \geq 1$  (em unidades naturais). Com isso, podemos obter a energia mínima como sendo  $E \geq 1/\Delta x$ , onde  $E$  é a energia de uma partícula emitida nesse processo. Nas proximidades do horizonte de eventos temos  $\Delta x \approx r_H = 2M$  [81], de modo que

$$E \geq 1/2M. \quad (5.33)$$

Com isso, podemos reescrever a temperatura encontrada como

$$T = \left(1 - \frac{\gamma}{2M}\right) T_0, \quad (5.34)$$

onde levamos em consideração o fato de que  $E_p = 1$  em unidades naturais. O comportamento da temperatura pode ser observado na figura a seguir

A partir da Figura 3, podemos notar que tanto a temperatura temperatura quanto a razão entre a temperatura de *rainbow* a temperatura de Schwarzschild tendem a zero no limite  $M \rightarrow \gamma/2$ . Esse resultado está de acordo com o fato de que, para valores a partir de  $M = \gamma/2$ , temos remanescentes de buracos negros, ou seja, não temos mais emissão de partículas [79]. A temperatura é máxima para  $M = \gamma$  e tende a zero a medida que  $M \rightarrow \infty$ , independentemente do valor do parâmetro  $\gamma$ . Assim, vemos que os efeitos do parâmetro *rainbow* são mais significativos quando  $M \sim \gamma$ . Além disso, podemos observar que a temperatura do buraco negro vai a zero para valores não nulos da massa.

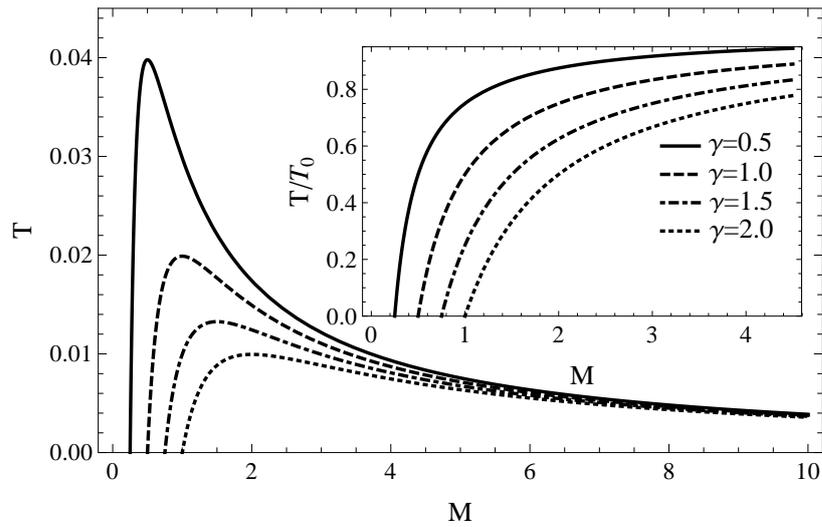


Figura 3: Comportamento da temperatura e da razão da temperatura para diversos valores do parâmetro *rainbow*. Fonte: [32].

Agora, podemos obter a entropia, que é dada por [79]

$$\begin{aligned} S &= 16\pi \int \frac{M^2}{2M - \gamma} dM \\ &= S_0 + 2\pi\gamma[2M + \gamma \ln(2M - \gamma)], \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde  $S_0 = 4\pi M^2$  é a entropia de Schwarzschild. Nesse caso, observamos que  $S > S_0$ , em concordância com o resultado para a temperatura. O comportamento da entropia e da razão das entropias pode ser observado na Figura 4.

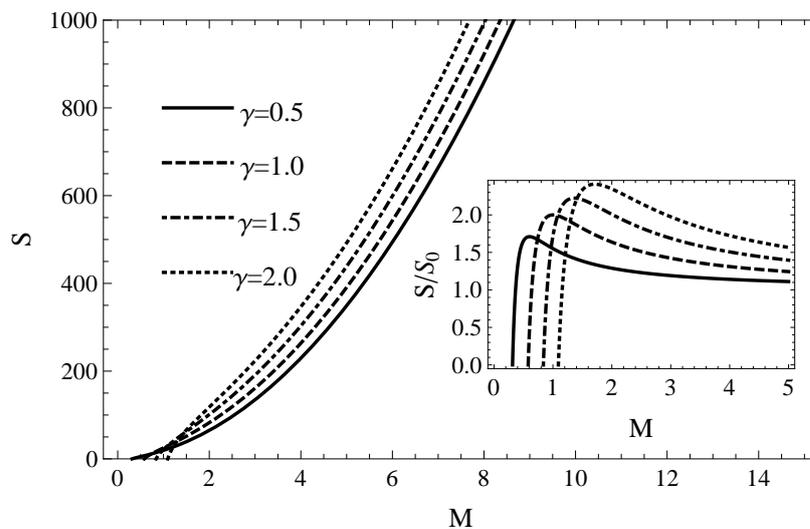


Figura 4: Comportamento da entropia e da razão da entropia para diversos valores do parâmetro *rainbow*. Fonte: [32].

Podemos observar que  $S \rightarrow 0$  a medida que  $M \rightarrow \gamma/2$ . O mesmo acontece com a capacidade térmica, como demonstrado em [79], indicando que a emissão de partículas é cessada quando  $M = \gamma/2$ . Além disso, a medida que a massa do buraco negro aumenta, a entropia cresce, opostamente ao que ocorre com a temperatura, como esperado.

A partir de agora, levaremos em consideração as correções de *back-reaction*. Nesse caso, ao ser emitida, a partícula carrega consigo uma energia  $\omega$ , diminuindo a massa do buraco negro por esse fator ( $M \rightarrow M - \omega$ ), devido a conservação de energia. Conseqüentemente, a temperatura, sendo dependente da massa, muda constantemente a medida que o buraco negro irradia. Assim, considerar os efeitos de *back-reaction* no cálculo da temperatura nos dará um resultado mais realista. Embora esses efeitos possam ser desconsiderados no início do processo de emissão de partículas pelo buraco, eles se tornam mais significativos a medida que a massa do buraco negro diminui.

Após a emissão de uma partícula de energia  $\tilde{\omega}$ , o espaço-tempo adquire a forma

$$ds^2 = -f[r(M - \tilde{\omega})]dt^2 + g[r(M - \tilde{\omega})]dr^2 + h[r(M - \tilde{\omega})](d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.36)$$

onde  $r$  é agora função de  $(M - \tilde{\omega})$ , com  $M$  sendo a massa do buraco negro antes da emissão. Para todos os efeitos, vamos assumir que  $r(M) \rightarrow r(M - \tilde{\omega})$  é uma transição suave, a medida que  $\tilde{\omega}$  vai de 0 a  $\omega$ .

Assim, o termo  $\beta\omega$  em  $\Gamma = e^{-\beta\omega}$  sofre a seguinte modificação

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \beta(M - \tilde{\omega})d\tilde{\omega} &\approx \int_0^\omega [\beta(M) - \tilde{\omega}\partial_M\beta(M) + \mathcal{O}(\tilde{\omega}^2)]d\tilde{\omega} \\ &= \beta(M) \left[ \omega - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial_M\beta(M)}{\beta(M)} + \mathcal{O}(\tilde{\omega}^3) \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde  $\partial_M$  indica derivação em relação a  $M$ . A partir da primeira lei da termodinâmica de buracos negros,  $TdS = dM$ , podemos obter  $\beta = \partial_M S$ . Assim, ficamos com

$$\int_0^\omega \beta(M - \tilde{\omega})d\tilde{\omega} = \omega\partial_M S - \frac{\omega^2}{2}\partial_M^2 S + \mathcal{O}(\tilde{\omega}^3) \approx -[S(M - \omega) - S(M)]. \quad (5.38)$$

Assim, a probabilidade de tunelamento se torna  $\Gamma = \exp[S(M - \omega) - S(M)] = e^{\Delta S}$  enquanto a temperatura se torna  $T = \omega/\Delta S$ . Portanto, a temperatura precisa ser corrigida para incluir efeitos de *back-reaction*.

Levando isso em consideração e reescrevendo 5.35 em termos da massa  $M$ , obtemos

$$S(M) = 4\pi M^2 + 2\pi\gamma[2M + \gamma\ln(2M - \gamma)]. \quad (5.39)$$

Por outro lado, a entropia após a emissão de uma partícula com energia  $\omega$  será

$$S(M - \omega) = 4\pi(M - \omega)^2 + 2\pi\gamma[2(M - \omega) + \gamma \ln(2(M - \omega) - \gamma)]. \quad (5.40)$$

Assim, podemos calcular a variação da entropia

$$\Delta S = 4\pi\omega(\omega - 2M) + 2\pi\gamma \left[ -2\omega + \gamma \ln \left( \frac{2(M - \omega) - \gamma}{2M - \gamma} \right) \right], \quad (5.41)$$

e a temperatura corrigida

$$T = \left[ 4\pi(2M - \omega + \gamma) - 2\pi\gamma^2 \omega^{-1} \ln \left( \frac{2(M - \omega) - \gamma}{2M - \gamma} \right) \right]^{-1}, \quad (5.42)$$

onde tomamos  $k_B = 1$ . No limite ( $\gamma \rightarrow 0$ ), recuperamos a temperatura corrigida de Schwarzschild que é dada por  $T = [8\pi(M - \omega/2)]^{-1}$ . O comportamento da variação da entropia, para diferentes valores do parâmetro  $\gamma$ , é mostrado na figura seguinte, onde podemos perceber que os efeitos de *back-reaction* são significativos apenas na região  $\gamma/2 < M < \gamma$ . Além disso, podemos notar a seguinte lei de potência

$$\Delta S(M) \propto \tan \left( \frac{M\pi}{\gamma} \right), \quad \text{para } 0 < M < \gamma, \quad (5.43)$$

para todo  $\gamma$ .

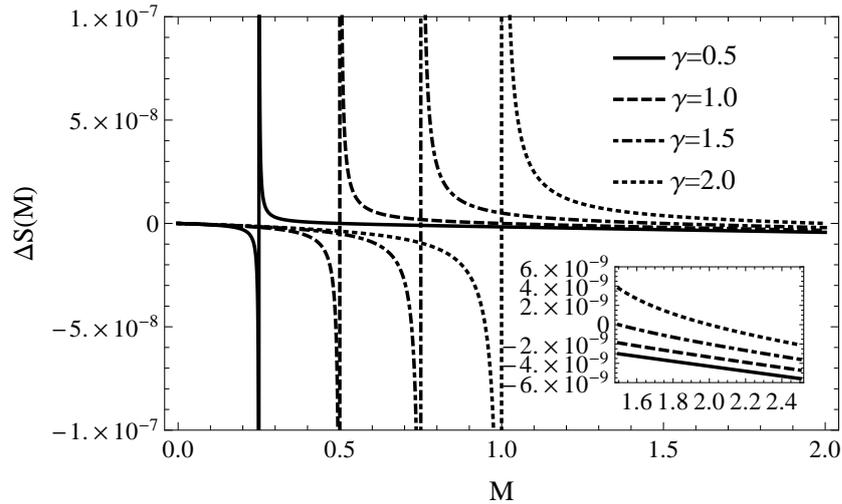


Figura 5: Variação da entropia em função da massa para diversos valores de parâmetro *rainbow* e partículas com uma mesma energia. Fonte: [32].

Também podemos analisar o comportamento da variação da entropia em relação a energia da partícula, como mostrado na figura abaixo: Podemos notar que, a medida que nos

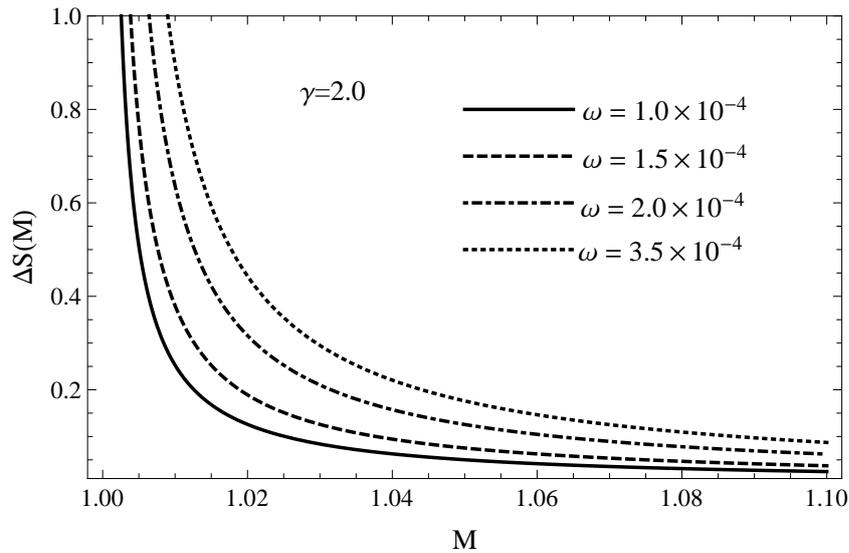


Figura 6: Variação da entropia em função da massa para um parâmetro *rainbow* fixo e diversos valores de energia. Fonte: [32].

aproximamos do limite do remanescente ( $M = \gamma/2$ ), a correlação entre partículas se torna maior, e esse efeito é mais expressivo para partículas mais energéticas.

Agora que temos os efeitos de *back-reaction* incorporados aos nossos resultados, podemos obter a correlação entre eventos de emissão de partículas, dada por

$$C(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \ln \Gamma(M, \omega_1 + \omega_2) - \ln[\Gamma(M, \omega_1)\Gamma(M, \omega_2)], \quad (5.44)$$

onde  $\omega_i$  são as energias das partículas. Utilizando  $\Gamma = \exp[S(M - \omega) - S(M)] = e^{\Delta S}$ , obtemos

$$C = 8\pi\omega_1\omega_2 + 2\pi\gamma^2 \ln \left\{ \frac{[2(M - \omega_1 - \omega_2) - \gamma][2M - \gamma]}{[2(M - \omega_1) - \gamma][2(M - \omega_2) - \gamma]} \right\}, \quad (5.45)$$

onde o primeiro termo,  $C_0 = 8\pi\omega_1\omega_2$  corresponde a correlação para o buraco negro de Schwarzschild, que pode ser obtida no limite  $\gamma \rightarrow 0$ .

Na figura a seguir, verificamos que a correlação é máxima em  $M \rightarrow \gamma/2$ , para partículas com a mesma energia. Também observamos que essa correlação é mais expressiva a medida que aumentamos o valor do parâmetro *rainbow*.

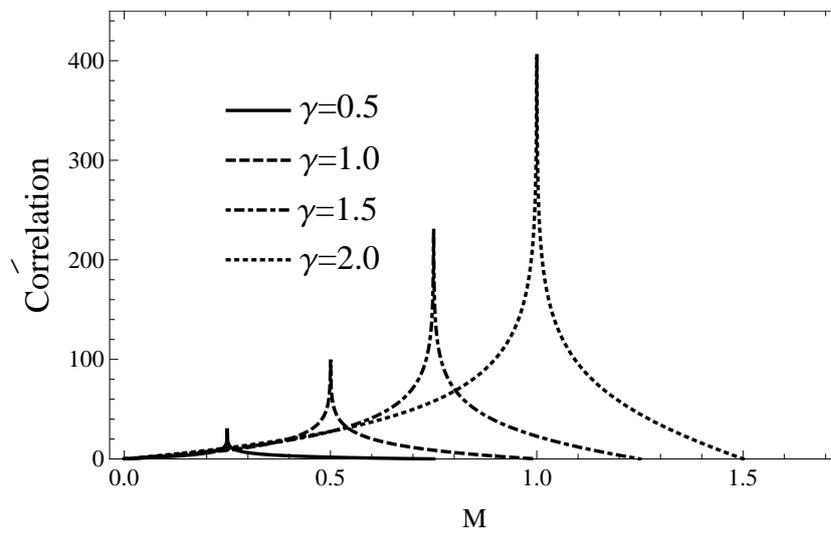


Figura 7: Correlações para emissões de partículas. Fonte: [32].

## 6 CORRENTES DE NOETHER E ENTROPIA EM GRAVIDADE TELEPARALELA

Neste capítulo, calcularemos as correntes de Noether para difeomorfismo em Teorias Teleparalelas em Geral e, a partir disso, obteremos as correntes de Noether para diversas teorias teleparalelas. Por fim, discutimos como definir a entropia nesse caso e mostramos que a lei da área de buracos negros é obedecida. Os resultados utilizados aqui compõem, parcialmente, o artigo [82].

### 6.1 Lagrangiano e Equações de Movimento

Vamos começar definindo um lagrangiano que dependa dos campos e suas primeiras derivadas

$$L_G = L_G(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu},_{,\lambda}, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\lambda}). \quad (6.1a)$$

A dependência funcional do lagrangiano acima sempre pode ser reescrita como

$$L_G = L_G(g^{\mu\nu}, Q_{\lambda}{}^{\mu\nu}, T^{\alpha}_{\mu\nu}, R^{\alpha}_{\mu\lambda\nu}). \quad (6.1b)$$

Por conveniência, vamos introduzir os seguintes tensores conjugados

$$q^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial L_G}{\partial Q_{\alpha}{}^{\mu\nu}}, \quad (6.2a)$$

$$t_{\alpha}{}^{\mu\nu} = \frac{\partial L_G}{\partial T^{\alpha}_{\mu\nu}}, \quad (6.2b)$$

$$r_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} = \frac{\partial L_G}{\partial R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}}. \quad (6.2c)$$

Além disso, desejamos incluir campos de matéria  $\psi$  por meio do lagrangiano  $L_M$

$$L_M = L_M(g_{\mu\nu}, \psi, \nabla_{\alpha}\psi). \quad (6.3)$$

Assim, podemos obter os tensores momento-energia e o tensor de hiper-momento seguindo as definições

$$T_{\mu\nu} = L_M g_{\mu\nu} - \frac{2\partial L_M}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (6.4a)$$

$$Z_{\alpha}{}^{\mu\nu} = -\frac{\partial L_M}{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}. \quad (6.4b)$$

O lagrangiano total é  $L = L_G + L_M$  e a ação definida a partir dele é dada por

$$I = \int d^n x \sqrt{-g} L = \int d^n x \mathfrak{L}, \quad (6.5)$$

onde  $\mathfrak{L} = \sqrt{-g} L$  denota a densidade lagrangiana. Na nossa notação, as letras cursivas denotarão densidades tensoriais.

Tomando as variações com respeito a métrica e a conexão, obtemos as equações de campo

$$\mathfrak{E}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathfrak{T}_{\mu\nu} + (\nabla_\alpha + T_\alpha)q^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathfrak{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (6.6a)$$

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}_\alpha{}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\alpha^{\mu\nu} + (\nabla_\beta + T_\beta)r_\alpha{}^{\nu\beta} + \frac{1}{2}T^\mu{}_{\beta\gamma}r_\alpha{}^{\nu\beta\gamma} + t_\alpha{}^{\mu\nu} - q^{\mu\nu}{}_\alpha, \quad (6.6b)$$

onde temos  $\mathfrak{E}_{\mu\nu} = 0$  and  $\mathfrak{E}_\alpha{}^{\mu\nu} = 0$  *on-shell*. Também podemos escrever as equações acima como

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\alpha q^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{\partial L_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}L_G g_{\mu\nu}, \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{2}E_\alpha{}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\alpha^{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\beta r_\alpha{}^{\nu\beta} + \frac{1}{2}T^\mu{}_{\beta\gamma}r_\alpha{}^{\nu\beta\gamma} + t_\alpha{}^{\mu\nu} - q^{\mu\nu}{}_\alpha, \quad (6.8)$$

onde definimos

$$\hat{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + T_\mu + \frac{1}{2}Q_\alpha. \quad (6.7)$$

Para um vetor arbitrário  $X^\mu$ , temos

$$\partial_\mu \mathfrak{X}^\mu = \sqrt{-g} \hat{\nabla}_\mu X^\mu = \sqrt{-g} \hat{\nabla}_\mu X^\mu. \quad (6.8a)$$

Já para um vetor antissimétrico  $X^{[\mu\nu]}$ , temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathfrak{X}^{[\mu\nu]} &= \sqrt{-g} \hat{\nabla}_\mu X^{[\mu\nu]} = \sqrt{-g} \hat{\nabla}_\mu X^{[\mu\nu]} - \frac{1}{2}T^\nu{}_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} \\ &= \nabla_\mu \mathfrak{X}^{[\mu\nu]} - \frac{1}{2}T^\nu{}_{\alpha\beta} \mathfrak{X}^{[\alpha\beta]} + T_\mu \mathfrak{X}^{[\mu\nu]}. \end{aligned} \quad (6.8b)$$

Para as equações de movimento dos campos de matéria  $\psi$ , a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$E_M = \frac{\partial L_M}{\partial \psi} - \hat{\nabla}_\mu \frac{\partial L_M}{\partial \nabla_\mu \psi}, \quad (6.9)$$

onde  $E_M = 0$  *on-shell*.

## 6.2 Correntes

Para obter a variação total da ação, vamos considerar cada tipo de variação, separadamente. A variação da ação em relação a métrica inversa fornece

$$\delta_g I = \int d^n x \left[ -\nabla_\alpha q^\alpha_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \mathfrak{E}_{\mu\nu} - T_\alpha q^\alpha_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] \quad (6.10a)$$

$$= \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ -\overset{\circ}{\nabla}_\alpha q^\alpha_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + E_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right]. \quad (6.10b)$$

Já a variação em relação a conexão fornece

$$\delta_\Gamma I = \int d^n x \sqrt{-g} \left[ \overset{\circ}{\nabla}_\beta (2r_\alpha{}^{\nu\beta\mu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) + E_\alpha{}^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \right]. \quad (6.10c)$$

Quando consideramos difeomorfismos infinitesimais

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha + v^\alpha, \quad (6.11a)$$

a variação da métrica e da conexão (definidas como menos a derivada de Lie na direção de  $v^\alpha$ ) são dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\nu g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu,\alpha} v^\alpha - 2g_{\alpha(\mu} v^\alpha_{,\nu)} = -2\overset{\circ}{\nabla}_{(\mu} v_{\nu)} \\ &= -2g_{\alpha(\mu} \overset{\circ}{\nabla}_{\nu)} v^\alpha + 2T_{(\mu\nu)\alpha} - Q_{\alpha\mu\nu} v^\alpha \\ &= -2\overset{\circ}{\nabla}_{(\mu} v_{\nu)} + 2T_{(\mu\nu)\alpha} - L_{\alpha\mu\nu} v^\alpha. \end{aligned} \quad (6.11b)$$

e

$$\begin{aligned} \delta_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= -v^\alpha_{,\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\lambda_{,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} v^\lambda_{,\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} v^\lambda_{,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\lambda} v^\lambda \\ &= -\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}_\nu v^\alpha - T^\alpha_{\lambda\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu v^\lambda - N^\alpha_{\mu\lambda} \overset{\circ}{\nabla}_\nu v^\lambda + N^\lambda_{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\lambda v^\alpha \\ &\quad - \overset{\circ}{\nabla}_\mu \bar{N}^\alpha_{\nu\lambda} + N^\alpha_{\mu\beta} \bar{N}^\beta_{\nu\lambda} - N^\beta_{\mu\nu} \bar{N}^\alpha_{\beta\lambda} v^\lambda \\ &= -\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{\nabla}_\nu v^\alpha - \overset{\circ}{\nabla}_\mu T^\alpha_{\beta\nu} v^\beta - R^\alpha_{\nu\beta\mu} v^\beta. \end{aligned} \quad (6.11c)$$

Na equação acima, utilizamos

$$N^\alpha_{\mu\nu} = K^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu}, \quad (6.12a)$$

$$\bar{N}^\alpha_{\mu\nu} = N^\alpha_{\mu\nu} - T^\alpha_{\mu\nu}. \quad (6.12b)$$

Só nos falta obter a variação dos campos  $\psi$ , que pode ser negligenciada caso eles sejam cons-

tantes

$$\delta_v \psi = -v^\alpha \partial_\alpha \psi + \dots \quad (6.13)$$

Agora, levando em consideração as transformações de difeomorfismo acima, podemos obter

$$\delta_g I = 2 \int d^n x \sqrt{-g} \left[ \hat{\nabla}_\alpha (-q^\alpha_{\mu\nu} \hat{\nabla}^\mu v^\nu) + E^\alpha_{\nu\nu} + \hat{\nabla}_\mu E^\mu_{\nu\nu} \right]. \quad (6.14a)$$

para variações em relação a métrica e

$$\begin{aligned} \delta_\Gamma I = & \int d^n x \sqrt{-g} \left[ \hat{\nabla}_\beta \left( 2r_\alpha^{\nu\beta\mu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - E_\alpha^{\beta\nu} T^\alpha_{\mu\nu} v^\mu - E_\alpha^{\beta\nu} \nabla_\nu v^\alpha + \hat{\nabla}_\mu E_\alpha^{\mu\beta} v^\alpha \right) \right. \\ & \left. - \hat{\nabla}_\nu \hat{\nabla}_\mu E_\alpha^{\mu\nu} v^\alpha + T^\beta_{\alpha\nu} \hat{\nabla}_\mu E_\beta^{\mu\nu} v^\alpha + R^\beta_{\nu\mu\alpha} E_\beta^{\mu\nu} v^\alpha \right], \end{aligned} \quad (6.14b)$$

para variações em relação a conexão. Além disso, a variação da ação em relação a variações dos campos  $\phi$  por difeomorfismos será dada por

$$\delta_\psi I = \int d^n x \left[ \mathfrak{E}_M \delta_v \psi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial \nabla_\mu \psi} \delta_v \psi \right) \right]. \quad (6.14c)$$

Por outro lado, como estamos interessados em lagrangianos invariantes por difeomorfismos,  $L$  é um escalar e temos

$$\delta_v I = - \int d^n x \mathcal{L}_v(\sqrt{-g} L) = - \int d^n x \sqrt{-g} \hat{\nabla}_\mu (L v^\mu). \quad (6.14d)$$

Levando tudo isso em consideração e somando todas as contribuições (6.14), obtemos a variação total da ação

$$\delta_v I = \int d^n x \left[ \mathfrak{E}_\mu v^\mu + \mathfrak{E}_M \delta_v \psi + \partial_\mu \mathfrak{J}^\mu - \mathfrak{L} v^\mu \right], \quad (6.15)$$

onde

$$E_\mu = -2 \hat{\nabla}_\nu E^\nu_\mu - \hat{\nabla}_\beta \hat{\nabla}_\alpha E_\mu^{\alpha\beta} + T^\beta_{\mu\gamma} \hat{\nabla}_\alpha E_\beta^{\alpha\gamma} + R^\alpha_{\nu\beta\mu} E_\alpha^{\beta\nu}, \quad (6.16a)$$

e

$$\begin{aligned} J^\mu = & -2q^\mu_{\alpha\beta} \hat{\nabla}^\alpha v^\beta + 2E^\mu_{\nu\nu} - 2r_\alpha^{\nu\mu\beta} \left[ \nabla_\beta \nabla_\nu v^\alpha + \nabla_\beta T^\alpha_{\gamma\nu} v^\gamma + R^\alpha_{\nu\gamma\beta} v^\gamma \right] \\ & - E_\alpha^{\mu\nu} \nabla_\nu v^\alpha + \hat{\nabla}_\nu E_\alpha^{\nu\mu} v^\alpha + T^\alpha_{\nu\beta} E_\alpha^{\mu\nu} v^\beta + L v^\mu + \frac{\partial L_M}{\partial \nabla_\mu \psi} \delta_v \psi. \end{aligned} \quad (6.16b)$$

Agora, assumindo  $(J^\mu - L v^\mu)|_{\partial} = 0$ , numa superfície  $\partial$ , obtemos a identidade de

Noether

$$E_\mu = E_M \delta_\mu \psi. \quad (6.17)$$

No vácuo ou quando os campos de matéria estão *on-shell*, ficamos com a identidade de Bianchi generalizada  $E_\mu = 0$ . Com isso, a conservação da densidade de corrente  $\tilde{\mathcal{J}}^\mu$  é garantida,

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu J^\mu = 0 \quad \text{i.e.} \quad \partial_\mu \tilde{\mathcal{J}}^\mu = 0. \quad (6.18)$$

Portanto,  $\tilde{\mathcal{J}}^\mu$  é a corrente de Noether em relação difeomorfismos.

Para transformações arbitrárias, a variação total da ação gera

$$\begin{aligned} 0 &= E_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + E_\alpha^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + E_M \delta \psi \\ &+ \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \left( -q^\alpha_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2r_\beta^{\nu\alpha\mu} \delta \Gamma^\beta_{\mu\nu} + L \delta x^\alpha + \frac{\partial L_M}{\partial \nabla_\alpha \psi} \delta \psi \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Na primeira linha, todos os termos se anulam *on-shell* e na segunda, entre parênteses, temos a corrente canônica conservada de Noether. Para difeomorfismos  $\delta = \delta_\nu$ , obtemos a corrente *on-shell*, dada por (6.16b), ao impormos  $E^\mu{}_\nu = E_\alpha^{\mu\nu} = 0$ .

Temos, ao menos localmente, um tensor antissimétrico  $J^{\mu\nu} = J^{[\mu\nu]}$  tal que  $J^\mu = \overset{\circ}{\nabla}_\nu J^{\mu\nu}$ . Com isso, podemos definir a carga de Noether  $C$  num volume  $\mathcal{V}$  da seguinte forma

$$C = \int_{\mathcal{V}} d^{n-1} \sigma_\mu \tilde{\mathcal{J}}^\mu = \frac{1}{2} \oint_{\partial\mathcal{V}} d^{n-2} \sigma_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{J}}^{\mu\nu}. \quad (6.20a)$$

As cargas em relação a ao tensor momento-energia devem ser da forma

$$C_\alpha = \frac{1}{2} \oint_{\partial\mathcal{V}} d^2 \sigma_{\mu\nu} \mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_\alpha. \quad (6.20b)$$

Entretanto, o teorema de Noether não nos fornece uma corrente dessa forma para a ação de Einstein-Hilbert. Na literatura, temos diferentes propostas para a definição de  $\mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_\alpha$  mas, aparentemente, elas não concordam entre si.

## 6.3 Exemplos

### 6.3.1 Relatividade Geral

Vamos começar considerando a ação de Einstein-Palatini

$$L_G = \frac{m_P^2}{2} R. \quad (6.21)$$

Assim,

$$r_{\alpha}^{\beta\mu\nu} = \frac{m_P^2}{2} g^{\beta[\nu} \delta_{\alpha}^{\mu]}, \quad (6.22)$$

e a equação de campo para a métrica nos dá

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathring{R} g_{\mu\nu} = m_P^{-2} T_{\mu\nu}, \quad (6.23)$$

Com isso, obtemos a seguinte corrente de Noether

$$\begin{aligned} J^{\mu} &= \frac{m_P^2}{2} \left[ g^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} v^{\alpha} - \delta_{\alpha}^{\mu} \square v^{\alpha} + g^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} T^{\alpha}{}_{\gamma\nu} v^{\gamma} - \nabla^{\nu} T^{\mu}{}_{\gamma\nu} v^{\gamma} - R^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} - \tilde{R}^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} - R v^{\mu} \right] \\ &+ \frac{\partial L_M}{\partial \nabla_{\mu} \psi} \delta_{\nu} \psi + L_M v^{\mu}. \end{aligned} \quad (6.24a)$$

Podemos rearranjar a expressão acima como

$$J^{\mu} = \frac{m_P^2}{2} \left[ 2 \nabla_{\alpha} \nabla^{[\mu} v^{\alpha]} + T^{[\mu\alpha]}{}_{\nu} v^{\nu} + Q_{\alpha}{}^{\mu\nu} \nabla_{\nu} v^{\alpha} + T^{\alpha}{}_{\gamma\nu} v^{\gamma} + \Delta R^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} \right] + \Delta T^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}, \quad (6.24b)$$

onde usamos 6.23,  $\Delta R_{\mu\nu} = 2\mathring{R}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\mu\nu}$  e

$$\Delta T^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu} = \frac{\partial L_M}{\partial \nabla_{\mu} \psi} \delta_{\nu} \psi - 2 \frac{\partial L_M}{\partial g^{\mu\nu}} v^{\nu}, \quad (6.25)$$

onde  $\Delta T^{\mu}{}_{\nu}$  é a diferença entre o tensor-energia da matéria e o pseudo-tensor pseudo-canônico (resultado de uma translação canônica) para a matéria escalar.

Na ausência de hiper-momento, temos  $R_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} + 2\mathring{\nabla}_{[\mu} A_{\nu]}$ . Logo,  $\Delta R_{\mu\nu} = 0$  e a corrente (6.24b) se torna

$$J^{\mu} = m_P^2 \mathring{\nabla}_{\alpha} \mathring{\nabla}^{[\mu} v^{\alpha]} + \Delta T^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}. \quad (6.26a)$$

Com isso, podemos identificar o potencial de Noether

$$J_G^{\mu\nu} = m_P^2 \mathring{\nabla}^{[\mu} v^{\nu]}. \quad (6.26b)$$

que é precisamente o superpotencial de Komar da RG [83]. Como se sabe, esse superpotencial não gera a expressão correta para a energia. A solução para isso é trabalhar no chamado referencial inercial discutido em mais detalhes em [82].

### 6.3.2 Teleparalelismo

Como já discutido no capítulo anterior, a conexão teleparalela (quando  $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = 0$ ) assume a forma

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} \partial_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}, \quad (6.27)$$

Nesse caso, as variações da conexão estão restritas a

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \nabla_\mu(\Lambda^{-1})^\alpha_\beta \delta\Lambda^\beta_\nu. \quad (6.28)$$

o que indica que agora temos

$$\hat{\nabla}_\mu E_\alpha^{\mu\nu} = 0. \quad (6.29)$$

Embora a condição  $E_\alpha^{\mu\nu}$  como dada em (6.8) não seja mais garantida *on-shell*, ainda temos  $E_\mu = 0$  para  $E_\mu$  dado em (6.16a) e  $\partial_\mu J^\mu = 0$  para  $J^\mu$  dada em (6.16b), pois a conexão continua se transformando, sob difeomorfismos, como em (6.11c).

Notando que

$$\begin{aligned} \delta_\nu \Lambda^\mu_\nu &= -(\mathcal{L}_\nu \Lambda)^\mu_\nu = -v^\lambda \partial_\lambda \Lambda^\mu_\nu - \partial_\nu v^\lambda \Lambda^\mu_\lambda \\ &= -\Lambda^\mu_\alpha \left( \nabla_\nu v^\alpha + T^\alpha_{\beta\nu} v^\beta \right), \end{aligned} \quad (6.30)$$

podemos reescrever a identidade *off-shell* (6.19) como

$$\begin{aligned} 0 &= E_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta \hat{\nabla}_\mu E_\alpha^{\mu\nu} \delta \Lambda^\beta_\nu + E_M \delta \psi \\ &+ \hat{\nabla}_\mu \left[ \hat{\nabla}_\nu E_\alpha^{\nu\mu} v^\alpha - 2q^\mu_{\alpha\beta} \hat{\nabla}^\alpha v^\beta - E_\alpha^{\mu\nu} \nabla_\nu v^\alpha + T^\alpha_{\nu\beta} E_\alpha^{\mu\nu} v^\beta + L v^\mu + \frac{\partial L_M}{\partial \nabla_\mu \psi} \delta_\nu \psi \right]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Os termos entre colchetes representam a corrente de Noether no teleparalelismo, que é idêntica a corrente dada por (6.16b),

$$\begin{aligned} J^\mu &= 2E^\mu_{\nu\nu} + \hat{\nabla}_\nu E_\alpha^{\nu\mu} v^\alpha - 2q^\mu_{\alpha\beta} \hat{\nabla}^\alpha v^\beta - E_\alpha^{\mu\nu} \nabla_\nu v^\alpha \\ &+ T^\alpha_{\nu\beta} E_\alpha^{\mu\nu} v^\beta + L v^\mu + \frac{\partial L_M}{\partial \nabla_\mu \psi} \delta_\nu \psi, \end{aligned} \quad (6.32)$$

exceto pelo primeiro termo.

Para o teleparalelismo métrico, temos [82]

$$J^\mu = \hat{\nabla}_\nu \left[ 2t_\alpha^{\nu\mu} - Z_\alpha^{\nu\mu} v^\alpha \right] - \frac{1}{2} Z_{(\mu}^{\alpha\beta} T_{\nu)\alpha\beta} + Z_{\alpha\beta(\mu} T^{\alpha\beta}_{\nu)} + \Delta T^\mu_{\nu\nu}. \quad (6.33)$$

onde consideramos uma densidade lagrangiana dada por

$$\mathfrak{L}_G = \frac{1}{2} t_\alpha^{\mu\nu} T^\alpha_{\mu\nu}. \quad (6.34)$$

O superpotential será

$$J_G^{\mu\nu} = -2t_\alpha^{\mu\nu} v^\alpha. \quad (6.35)$$

Agora, para o paralelismo simétrico

$$\mathfrak{L}_G = \frac{1}{2} q^\alpha{}_{\mu\nu} Q_\alpha{}^{\mu\nu} + \mathfrak{l}_\alpha{}^{\mu\nu} T^\alpha{}_{\mu\nu}, \quad (6.36)$$

obtemos [82]

$$\tilde{\mathfrak{J}}^\mu = \nabla_\alpha \mathfrak{h}^{\alpha\mu}{}_{\nu\nu} + \nabla_\alpha \mathfrak{z}_\nu{}^{\alpha\mu}{}_{\nu\nu} - \mathfrak{z}_\nu{}^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \nu^\nu + \Delta T^\mu{}_\nu. \quad (6.37)$$

Na equação acima, assumimos que a equação de campo para a conexão  $\nabla_\mu \mathfrak{E}_\alpha{}^{\mu\nu} = 0$  para  $\mathfrak{E}_\alpha{}^{\mu\nu}$  tem uma solução do tipo  $\mathfrak{l}_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_\alpha$ , que obedece

$$\nabla_\mu \mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_\alpha = \nabla_\mu (2q^{\mu\nu}{}_\alpha - \mathfrak{z}_\alpha{}^{\mu\nu}). \quad (6.38)$$

Aqui, devemos mencionar que  $\mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_\alpha$  é a densidade tensorial de excitação cinética [82] e faz o papel de superpotencial (simplético) de Noether.

#### 6.4 Entropia

Como citado,  $\mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_\alpha$  é o superpotencial simplético de Noether. Além disso, como visto em (6.20b), podemos identificar essa quantidade como a carga que gera a energia. De fato, quando trabalhamos no chamado referencial inercial – referencial caracterizado pelo anulamento do tensor energia-momento associado com a métrica –  $\mathfrak{h}^{\alpha\mu}{}_{\nu\nu}$  pode ser associado tanto com o hamiltoniano gerador de translações temporais quanto com a carga que representa a energia conservada.

Com isso em mente, e usando a primeira lei da termodinâmica de buracos negros

$$\delta M = \frac{m_P^2 \kappa}{4} S + \Omega \delta J, \quad (6.39)$$

podemos propor a seguinte expressão para a entropia

$$S = \frac{2\pi}{\kappa} \oint_{\mathcal{H}} d^{n-2} \sigma_{\mu\nu} \mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_{\alpha\nu}{}^\alpha. \quad (6.40)$$

A fórmula acima é justificada pelo fato de que a energia pode ser bem definida no referencial inercial [82]. A conexão com outras teorias pode ser feita por meio da identificação  $\mathfrak{h}^{\mu\nu}{}_{\alpha\nu}{}^\alpha = \tilde{\mathfrak{J}}_\nu{}^{\mu\nu}$ .

Para ilustrar a validade dessa expressão, vamos escrever a gravidade de superfície como  $\kappa = 2\pi m_P^2/m_S$  e notar que a integral é igual a  $C_0$  em (6.20b). Como  $C_0 = m_S$  (Veja a

seção VII. B de [82]), onde  $m_S$  é a massa do buraco negro, temos

$$S = \frac{m_S}{2m_P^2} C_0 = \frac{1}{2} \frac{m_S^2}{m_P}. \quad (6.41)$$

Agora, comparando esse resultado com a área do buraco negro  $A = m_S^2/4\pi m_P^4$ , vemos que a expressão acima corresponde exatamente a lei da área para buracos negros.

## 7 CONCLUSÃO

Esta tese está dividida em duas partes principais. Na primeira parte, investigamos os efeitos da violação da simetria de Lorentz para a termodinâmica de buracos negros. Os resultados referentes a essa parte se encontram no capítulo 5.

Na primeira seção desse capítulo (Seção 5.1), investigamos as propriedades termodinâmicas de duas soluções de buracos negros obtidas a partir do modelo de *bumblebee*, que chamamos de métrica B e métrica C. Em ambos os casos, observamos que as modificações de violação de Lorentz fornecem correções lineares para as quantidades termodinâmicas estudadas: temperatura, entropia e capacidade térmica. Tais modificações são consequência direta da modificação da geometria do espaço-tempo causada pela LSB. Para a métrica C, observamos que a temperatura sofre uma diminuição como consequência da LSB, enquanto entropia e capacidade térmica sofrem um aumento. Para a métrica B, a depender de condições para a distância arbitrária, podemos ter uma diminuição da temperatura enquanto a entropia e a capacidade térmica permanecem inalteradas, ou vice-versa. Esse resultado indica que, em algumas situações, podemos recuperar parcialmente os resultados sem violação.

Na seção 5.2, investigamos, principalmente, a correlação entre eventos de emissão para um buraco negro *rainbow*. Para tanto, introduzimos efeitos de *back-reaction* ao método de tunelamento quântico e calculamos a correção correspondente para a temperatura. Além disso, obtivemos e analisamos numericamente a temperatura e entropia (não-corrigidas), variação da entropia e correlação de eventos. Observamos que todas as quantidades tem correções de *rainbow* mais expressivas quando  $M \sim \gamma/2$ , que corresponde ao remanescente desse buraco negro. Em particular, vemos que nesse limite a correlação entre partículas emitidas é máxima, o que indica que, logo antes do fim do processo de evaporação, parte da informação do buraco negro é emitida.

Na segunda parte da tese, nos dedicamos ao estudo de como as correntes de Noether devido a difeomorfismos no contexto da Trindade Geométrica da Gravidade. Para tanto, obtemos a forma geral das correntes de Noether e aplicamos a essas teorias. Em particular, a corrente obtida na RG corresponde a expressão de Komar, como esperado. Além disso, propomos como definir as cargas de energia e a entropia de buracos negros.

## REFERÊNCIAS

- [1] NOETHER, E. Invariante Variationsprobleme. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 1918**, p. 235-257, 1918.
- [2] WALD, R. M. Black hole entropy is the Noether charge. **Phys. Rev. D**, v. 48, n. R3427(R), 1993.
- [3] PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. **Statistical mechanics**. 3. ed. Burlington: Elsevier, 2016.
- [4] CHRISTENSON, J. H.; CRONIN, J. W.; FITCH, V. L.; Turlay, R. Evidence for the  $2\pi$  Decay of the  $K_0^2$  Meson System. **Physical Review Letters**, v. 13, n. 4 p. 138, 1964.
- [5] WILL, C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. **Living Reviews in Relativity**, v. 9, n. 3 , 2006.
- [6] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Physical Review D**, v. 39, n. 2, p. 683–685, 1989.
- [7] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- [8] ALFARO, J. et al. Alternative approaches to Lorentz violation invariance in loop quantum gravity inspired models. **Physical Review D**, v. 70, n. 8, p. 084002, 2004.
- [9] COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. Very special relativity. **Physical review letters**, v. 97, n. 2, p. 021601, 2006.
- [10] AMELINO-CAMELIA, G. Testable scenario for relativity with minimum length. **Physics Letters B**, v. 510, n. 1-4, p. 255-263, 2001.
- [11] BLUHM, R. Explicit versus spontaneous diffeomorphism breaking in gravity. **Physical Review D**, v. 91, n. 6, p. 065034, 2015.
- [12] BLUHM, R.; YANG, Y. Gravity with explicit diffeomorphism breaking. **Symmetry**, v. 13, n. 4, p. 660, 2021.
- [13] ALTSCHUL, B.; BAILEY, Q. G.; KOSTELECKÝ, V. Alan. Lorentz violation with an antisymmetric tensor. **Physical Review D**, v. 81, n. 6, p. 065028, 2010..
- [14] BERTOLAMI, O.; PARAMOS, J. Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking. **Physical Review D**, v. 72, n. 4, p. 044001, 2005.

- [15] CASANA, R. et al. Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. **Physical Review D**, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- [16] GOMES, D. A.; MALUF, R. V.; ALMEIDA, C. A. S. Thermodynamics of Schwarzschild-like black holes in modified gravity models. **Annals of Physics**, v. 418, p. 168198, 2020.
- [17] MALUF, R. V.; NEVES, Juliano CS. Bumblebee field as a source of cosmological anisotropies. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2021, n. 10, p. 038, 2021.
- [18] LESSA, L. A.; SILVA, J. E. G.; ALMEIDA, C. A. S. The bumblebee field excitations in a cosmological braneworld. **Europhysics Letters**, v. 141, n. 2, p. 29001, 2023.
- [19] BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity. *Physical Review D*, v. 71, n. 6, p. 065008, 2005.
- [20] BAILEY, Q. G.; KOSTELECKÝ, V. A. Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity. **Physical Review D**, v. 74, n. 4, p. 045001, 2006.
- [21] MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Gravity's rainbow. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, n. 7, p. 1725, 2004.
- [22] ALI, A. F.; FAIZAL, M.; MAJUMDER, B. Absence of an effective horizon for black holes in gravity's rainbow. **Europhysics Letters**, v. 109, n. 2, p. 20001, 2015.
- [23] YADAV, G.; KOMAL, B.; MAJHI, B. R.. Rainbow Rindler metric and Unruh effect. **International Journal of Modern Physics A**, v. 32, n. 33, p. 1750196, 2017.
- [24] ALI, A. F.; FAIZAL, M.; MAJUMDER, B. Absence of an effective horizon for black holes in gravity's rainbow. **Europhysics Letters**, v. 109, n. 2, p. 20001, 2015.
- [25] GIM, Y.; KIM, W. Black hole complementarity in gravity's rainbow. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2015, n. 05, p. 002, 2015.
- [26] HENDI, S. H.; FAIZAL, M. Black holes in Gauss-Bonnet gravity's rainbow. **Physical Review D**, v. 92, n. 4, p. 044027, 2015.
- [27] HENDI, Seyed H. et al. Charged dilatonic black holes in gravity's rainbow. **The European Physical Journal C**, v. 76, p. 1-15, 2016.
- [28] HENDI, S. H. et al. Thermodynamic instability of nonlinearly charged black holes in gravity's rainbow. **The European Physical Journal C**, v. 76, p. 1-10, 2016.
- [29] KIM, Y.-W.; KIM, S. K.; PARK, Y.-J. Thermodynamic stability of modified Schwarzschild-AdS black hole in rainbow gravity. **The European Physical Journal C**, v. 76, p. 1-11, 2016.

- [30] HENDI, S. H.; PANAHA, B. Eslam; PANAHIYAN, S. Topological charged black holes in massive gravity's rainbow and their thermodynamical analysis through various approaches. **Physics Letters B**, v. 769, p. 191-201, 2017.
- [31] HENDI, S. H.; PANAHA, B. Eslam; PANAHIYAN, S. Topological charged black holes in massive gravity's rainbow and their thermodynamical analysis through various approaches. **Physics Letters B**, v. 769, p. 191-201, 2017.
- [32] GOMES, D. A.; LIMA, F. C. E.; ALMEIDA, C. A. S. Correlations between emission events in Rainbow Gravity. **Annals of Physics**, v. 428, p. 168436, 2021.
- [33] ALI, A. F.; FAIZAL, M.; KHALIL, M. M. Remnants of black rings from gravity's rainbow. *Journal of High Energy Physics*, v. 2014, n. 12, p. 1-14, 2014.
- [34] ALI, A. F. Black hole remnant from gravity's rainbow. **Physical Review D**, v. 89, n. 10, p. 104040, 2014.
- [35] ALI, A. F.; FAIZAL, M.; KHALIL, M. M. Remnant for all black objects due to gravity's rainbow. **Nuclear Physics B**, v. 894, p. 341-360, 2015.
- [36] LING, Y.; LI, X.; ZHANG, H. Thermodynamics of modified black holes from gravity's rainbow. **Modern Physics Letters A**, v. 22, n. 36, p. 2749-2756, 2007.
- [37] LI, H.; LING, Y.; HAN, X. Modified (A) dS Schwarzschild black holes in Rainbow spacetime. **Classical and Quantum Gravity**, v. 26, n. 6, p. 065004, 2009.
- [38] SMOLIN, L. Falsifiable predictions from semiclassical quantum gravity. **Nuclear physics B**, v. 742, n. 1-3, p. 142-157, 2006.
- [39] GARATTINI, R.; MANDANICI, G. Particle propagation and effective space-time in Gravity's Rainbow. **Physical Review D**, v. 85, n. 2, p. 023507, 2012.
- [40] MAGUEIJO, J. Speedy sound and cosmic structure. **Physical review letters**, v. 100, n. 23, p. 231302, 2008.
- [41] GARATTINI, R.; LOBO, F. S. N. Gravity's rainbow and traversable wormholes. **The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting**, Italy, 12–18 July 2015. 2018. p. 1448-1453.
- [42] ASHOUR, A. et al. Branes in gravity's rainbow. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 5, p. 264, 2016.
- [43] BARROW, J. D.; MAGUEIJO, J. Intermediate inflation from rainbow gravity. **Physical Review D**, v. 88, n. 10, p. 103525, 2013.
- [44] MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. **Physical Review D**, v. 67, n. 4, p. 044017, 2003.

- [45] JÄRV, L. et al. Nonmetricity formulation of general relativity and its scalar-tensor extension. **Physical Review D**, v. 97, n. 12, p. 124025, 2018.
- [46] JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. The geometrical trinity of gravity. **Universe**, v. 5, n. 7, p. 173, 2019.
- [47] FERRARO, R.; FIORINI, F. Modified teleparallel gravity: inflation without an inflaton. **Physical Review D**, v. 75, n. 8, p. 084031, 2007.
- [48] JIMÉNEZ, J. B. et al. Cosmology in  $f(Q)$  geometry. **Physical Review D**, v. 101, n. 10, p. 103507, 2020.
- [49] D'AMBROSIO, F. et al. Black holes in  $f(Q)$  gravity. **Physical Review D**, v. 105, n. 2, p. 024042, 2022.
- [50] BAHAMONDE, S.; CHEVRIER, J.; VALCARCEL, J. G.. New black hole solutions with a dynamical traceless nonmetricity tensor in Metric-Affine Gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2023, n. 02, p. 018, 2023.
- [51] BAHAMONDE, S. et al. Black hole solutions in scalar-tensor symmetric teleparallel gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2022, n. 08, p. 082, 2022.
- [52] BAHAMONDE, S.; JÄRV, L. Coincident gauge for static spherical field configurations in symmetric teleparallel gravity. **The European Physical Journal C**, v. 82, n. 10, p. 963, 2022.
- [53] BARDEEN, J. M.; CARTER, B.n; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. **Communications in mathematical physics**, v. 31, p. 161-170, 1973.
- [54] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. **Physical Review D**, v. 7, n. 8, p. 2333, 1973.
- [55] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. **Communications in mathematical physics**, v. 43, n. 3, p. 199-220, 1975.
- [56] PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. **Physical review letters**, v. 85, n. 24, p. 5042, 2000.
- [57] SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T. Particle production and complex path analysis. **Physical Review D**, v. 60, n. 2, p. 024007, 1999.
- [58] SHANKARANARAYANAN, S.; PADMANABHAN, T.; SRINIVASAN, K. Hawking radiation in different coordinate settings: complex paths approach. **Classical and Quantum Gravity**, v. 19, n. 10, p. 2671, 2002.

- [59] ANGHEBEN, Marco et al. Hawking radiation as tunneling for extremal and rotating black holes. **Journal of High Energy Physics**, v. 2005, n. 05, p. 014, 2005.
- [60] SILVA, C. A. S.; BRITO, F. A. Quantum tunneling radiation from self-dual black holes. **Physics Letters B**, v. 725, n. 4-5, p. 456-462, 2013.
- [61] PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. **Physical review letters**, v. 85, n. 24, p. 5042, 2000.
- [62] EINSTEIN, A. Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)**, pp. 1111-1116 (1916).
- [63] PADMANABHAN, T. A short note on the boundary term for the Hilbert action. **Modern Physics Letters A**, v. 29, n. 08, p. 1450037, 2014.
- [64] HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Path-integral derivation of black-hole radiance. **Physical Review D**, v. 13, n. 8, p. 2188, 1976.
- [65] OSHITA, N.; WU, Y.-P. Role of spacetime boundaries in a vierbein formulation of gravity. **Physical Review D**, v. 96, n. 4, p. 044042, 2017.
- [66] JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. Teleparallel palatini theories. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2018, n. 08, p. 039, 2018.
- [67] IYER, V.; WALD, R.M. Comparison of the Noether charge and Euclidean methods for computing the entropy of stationary black holes. **Physical Review D**, v. 52, n. 8, p. 4430-4439, 1995.
- [68] IYER, V.; WALD, R. M. Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. **Physical review D**, v. 50, n. 2, p. 846, 1994.
- [69] FRIEDMAN, J. L.; STERGIOULAS, N. **Rotating relativistic stars**. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [70] WALD, R. M.; ZOUPAS, A. General definition of “conserved quantities” in general relativity and other theories of gravity, **Phys.Rev. D** v.61, p.084027, 2000.
- [71] HEISENBERG, L.; KUHN, S.; WALLEGHEM, L. Wald’s entropy in Coincident General Relativity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 39, n. 23, p. 235002, 2022.
- [72] MA, Me.-S.; ZHAO, R. Corrected form of the first law of thermodynamics for regular black holes. **Classical and Quantum Gravity**, v. 31, n. 24, p. 245014, 2014.
- [73] MALUF, R. V.; NEVES, J. C. S. Thermodynamics of a class of regular black holes with a generalized uncertainty principle. **Physical Review D**, v. 97, n. 10, p. 104015, 2018.

- [74] HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. **Physical Review D**, v. 13, n. 2, p. 191, 1976.
- [75] WALD, R. M. The thermodynamics of black holes. **Living reviews in relativity**, v. 4, p. 1-44, 2001.
- [76] ALI, A. F. Black hole remnant from gravity's rainbow. **Physical Review D**, v. 89, n. 10, p. 104040, 2014.
- [77] ALI, A. F.; FAIZAL, M.; KHALIL, M. M. Remnants of black rings from gravity's rainbow. **Journal of High Energy Physics**, v. 2014, n. 12, p. 1-14, 2014.
- [78] ALI, A. F.; FAIZAL, M.; KHALIL, M.M. Remnant for all black objects due to gravity's rainbow. **Nuclear Physics B**, v. 894, p. 341-360, 2015.
- [79] FENG, Z.-W.; YANG, S.-Z. Thermodynamic phase transition of a black hole in rainbow gravity. **Physics Letters B**, v. 772, p. 737-742, 2017.
- [80] DAVIES, P. C. W. The thermodynamic theory of black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 353, n. 1675, p. 499-521, 1977.
- [81] ALI, A. F.; FAIZAL, M.; KHALIL, M. M. Remnant for all black objects due to gravity's rainbow. **Nuclear Physics B**, v. 894, p. 341-360, 2015.
- [82] GOMES, D. A.; JIMÉNEZ, J. B.; KOIVISTO, T. S. Energy and entropy in the geometrical trinity of gravity. **Physical Review D**, v. 107, n. 2, p. 024044, 2023.
- [83] KOMAR, A. Covariant conservation laws in general relativity. **Physical Review**, v. 113, n. 3, p. 934, 1959.