UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

WANDERLEY DE OLIVEIRA PEREIRA

CARACTERIZAÇÃO DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO ESPAÇO COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE E DUAS CURVATURAS PRINCIPAIS NO ESPAÇO ANTI DE SITTER

FORTALEZA-CE
2013

WANDERLEY DE OLIVEIRA PEREIRA

CARACTERIZAÇÃO DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO ESPAÇO COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE E DUAS CURVATURAS PRINCIPAIS NO ESPAÇO ANTI DE SITTER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtençãoao do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa.

FORTALEZA-CE

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

P496c Pereira, Wanderley de Oliveira
Caracterização de hipersuperfícies tipo espaço com curvatura média constante e duas curvaturas principais no espaço anti de Sitter / Wanderley de Oliveira Pereira. – 2013.
84 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Geometria diferencial
Orientação: Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa

1. Espaço Anti de Sitter. 2. Hipersuperfícies tipo espaço. 3. Cilindros hiperbólicos. I. Título.

CDD 516.36

WANDERLEY DE OLIVEIRA PEREIRA

CARACTERIZAÇÃO DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO ESPAÇO COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE E DUAS CURVATURAS PRINCIPAIS NO ESPAÇO ANTI DE SITTER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovado em: 31/ 07/ 2013.

BANCA EXAMINADORA

João Lucas Marques Barbosa

Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Fernanda E. C. Camargo

Prof.ª Dr.ª Fernanda Ester Camillo Camargo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Sebastião Carneiro de Almeida

Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida
Universidade Federal do Ceará (CAEN-UFC)

A Deus. A minha família. Aos meus Amigos. Dedico.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, pelo Dom da vida. Agradeço por todas as realizações, tropeços no meu caminho, as oportunidades de levantar e recontruir meus passos, e por todas as pessoas maravilhosas que colocaste em minha vida, muitas das quais são citadas aqui.

Agradeço a toda minha família, em especial aos meus pais, Santa Barbosa e Francisco Pereira, por sempre me apoiarem na realização dos meus sonhos, e aos meus irmãos Antônia Barbosa, Alexsandra Barbosa e Antônio Marcos pelo estímulo e força para continuar. Jamais esquecerei.

Aos meus grandes amigos da gradução, em especial a Mariana, Tony, Mônica, Paulo e Marcia que, embora distantes, estamos juntos na mesma caminhada, fornecendo auxílio um ao outro sempre que preciso, e a Thayana Barbosa. Que Deus abençoe a todos.

Agradeço aos professores do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos, por acreditarem em mim e pela mão amiga fornecida, indicando trilhas nesta minha caminhada.

Agradeço ao Professor João Lucas M. Barbosa, meu orientador, por me apresentar a beleza da geometria. Agradeço pela orientação, pela confiança e pelos conselhos, importantes para meu crescimento.

Agradeço ao professor Ernani Ribeiro Jr. pelo incentivo e amizade, ao professor Lev Birbrair pela oportunidade de estudo em Singularidades e trabalho conjunto.

Agradeço à professora Fernanda Camargo pelo auxílio fornecido durante a realização deste trabalho e por aceitar o convite para participar da banca examinadora de minha dissertação. Ao professor Sebastião Carneiro pela disponibilidade de compor a banca e pelas contribuições no meu trabalho.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UFC, em especial a Marcos Melo, Luquésio Jorge, Fábio Montenegro, Othon Lopes, Pacelli Bessa e Daniel Cibotaru, que contribuiram para o meus conhecimento em matemática.

Aos amigos que fiz durante o curso, em especial a Henrique Blanco com quem divide sala de estudo e realizei valiosas discussoes sobre matemática, Maria Selene pelo apoio que me deste desde o início. Aos demais amigos Breno Sampaio, Elaine Sampaio, Francisco Edson, Francisco Yure dos Santos, Gilson Granja, Janielly Gonçalves, João Nunes, João Victor Maximiano, José Eduardo, Leo Ivo, Marlon de Oliveira, Neilha Marcia, Nicolas Alcântara, Roger Oliveira, Diego Elói, Fabiana Alves, Renivaldo Sodré, Rafael Diógenes, Rui Eduardo, João Vitor da Silva e Francisco Assis, pelo companheirismo.

Agradeço a Andrea Dantas pela eficiência, e aos demais funcionários da UFC.

Agradeço a FUNCAP pelo apoio financeiro.

A todos, muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fornecer uma caracterização de hipersuperfícies tipo espaço completas no espaço anti de Sitter, tais como os cilindros hiperbólicos, sob a hipótese de curvatura média constante e duas curvaturas principais distintas. No caso em que umas das curvaturas principais é simples, é adicionada uma condição sobre tais curvaturas. A caracterização aqui sugerida, teve como referência principal o trabalho de B. Yang e X. Liu, que dá uma resposta positiva à conjectura de L. F. Cao e G. Wei sobre hipersuperfícies tipo espaço em tais condições. Para a realização do trabalho, foi utilizada uma Fórmula do tipo Simons juntamente com o Princípio do Máximo Generalizado (Omori-Yau).
Palavras-chave: Espaço anti de Sitter. Hipersuperfícies tipo espaço. Cilindros Hiperbólicos.

ABSTRACT

The aim of this work is to provide a characterization of complete spacelike hypersurfaces in anti de Sitter space, such as hyperbolic cylinders, under the assumption constant mean curvature and two distinct principal curvatures. In the case that one of the principal curvatures is simple, a condition is added on the curvatures. The characterization suggested here had as main reference the work of B. Yang and X. Liu, giving a positive answer to the L. F. Cao and G. Wei's conjecture on spacelike hypersurfaces in such conditions. To carry out the work, we used a formula of type Simons along with the Generalized Maximum Principle (Omori-Yau).
Keywords: Anti de Sitter space. Spacelike hypersurfaces. Hyperbolic cylinders.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, tem sido crescente o interesse pelo estudo da estrutura das hipersuperfícies tipo espaço (hipersuperfícies cuja métrica induzida pela imersão é positiva definida) em variedades semi-Riemannianas de índice 1 com curvatura seccional constante c, chamadas de variedades de Lorentz e representadas por $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. De acordo com o sinal da curvatura, as variedade de Lorentz $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, são denominadas de: espaço de Sitter, se $c > 0$, caso em que são representadas por $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$, espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}(0)$, se $c = 0$, e de espaço anti de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, se $c < 0$.

O interesse por esse estudo se deve ao fato da grande importância de tais hipersuperfícies no estudo da Relatividade Geral, do ponto de vista físico, e por possuírem boas propriedades do tipo Bernstein, do ponto de vista matemático. No estudo de hipersuperfícies tipo espaço, é de grande destaque o caso em que estas possuem curvatura média constante. Sendo a curvatura média expressa pelas curvaturas principais (autovalores da aplicação linear associada a segunda forma fundamental, chamada de Endomorfismo de Weingarten), um caso simples de curvatura média constante ocorre quando a hipersuperfície possuie as curvaturas principais constantes. Uma hipersuperfície tipo espaço nestas condições é chamada de isoparamétrica, conceito introduzido por Nomizu em [9]. Ele provou que hipersuperfícies tipo espaço isoparamétricas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e em $\mathbb{L}^{n+1}$ possuem, no máximo, duas curvaturas principais distintas.

Para o caso do espaço anti de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$, que será o objetivo de estudo neste trabalho, T. Ishihara em [4] estudou as hipersuperfícies tipo espaço completas (no sentido de que toda geodésica está definida para todo valor do parâmetro) com curvatura média identicamente nula, obtendo uma cota superior para o quadrado da norma da segunda forma fundamental (S) da imersão, a qual depende da dimensão da hipersuperfície e da curvatura do espaço ambiente. Além disso, ele caracterizou as hipersuperfícies que atingem essa cota como os cilindros hiperbólicos (definidos no Capítulo 2). Na sua demonstração, nota-se que, para este caso, a hipersuperfície possui exatamente duas curvaturas principais. Mais precisamente, T. Ishihara provou o seguinte:

Teorema 1. *Seja M^n uma hipersuperfície ($n \geq 2$) tipo espaço, completa e máxima em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. Então, o quadrado da norma da Segunda Forma Fundamental de M^n satisfaz*

$$S \leq n.$$

Além disto, a igualdade ocorre se, e somente se,

$$M^n = \mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right) \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$, existem hipersuperfícies tipo espaço completas que possuem apenas uma curvatura principal (umbílicas), como sendo os espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^n(-r^2)$ de curvatura $-r^2$. Isso sugere que no espaço anti de Sitter, as hipersuperfícies isoparamétricas também possuem, no máximo, duas curvaturas principais. Este fato foi provado por L. Zhen-qi e X. Xian-Hua em [7], os quais também fornecem uma caracterização das hipersuperfícies para os possíveis casos (umbílicas e com duas curvaturas principais). Nesta mesma essa linha de pesquisa, também podemos citar o trabalho [5] de K. Abe, N Koike e S. Yamaguchi.

Substituindo a hipótese de isoparamétrica por curvatura média constante com duas curvaturas principais (caso mais geral do que o estudado acima), L. F. Cao e G. Wei, em [1], estudaram as hipersuperfícies tipo espaço, completas e máximas. Neste contexto, baseados no trabalho de T. Ishihara, L. F. Cao e G. Wei, caracterizaram as hipersuperfícies como cilindros hiperbólicos, como no Teorema de T. Ishihara, exigindo uma condição a mais sobre no caso em que uma das curvaturas é simples (ver Capítulo 3).

Neste mesmo trabalho, os autores conjecturaram que o resultado seria válido para o caso de hipersuperfícies tipo espaço em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, com $c \leq 0$, exigindo apenas que elas fossem completas, com curvatura média constante, duas curvaturas principais e, no caso de umas das curvaturas ser simples, as mesmas condições do caso de máximas.

Mediante essa linha de estudo, este trabalho tem como objetivo estudar hipersuperfícies tipo espaço, completas com curvatura média constante e duas curvaturas principais no espaço anti de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$, tendo como principal referência o trabalho de B. Yang e X. Liu [15], no qual se apresenta uma solução para conjectura de L. F. Cao e G. Wei.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. O primeiro, a Introdução, apresentamos o trabalho e a motivação de sua realização. No segundo, é apresentada uma síntese dos conceitos e propriedades básicas de hipersuperfícies tipo espaço em espaços de Lorentz com curvatura constante, utilizando o método do referencial móvel. Deduzimos as equações fundamentais para o estudo (equações de estrutura, equação de Gauss e equação de Codazzi) e uma fórmula do tipo Simons.

No terceiro capítulo, é contextualizado o cenário de estudo e são apresentados resultados fundamentais para o estudo de hipersuperfícies tipo espaço completas com curvatura média constante e duas curvaturas principais, tais como o Teorema de T. Ishihara e o Teorema de L. Zhen-qi e X. Xian-Hua, mencionados acima, e Princípio do Máximo Generalizado (Omori-Yau).

No quarto e último capítulo, são apresentados os resultados de L. F. Cao e G. Wei sobre o assunto central deste trabalho, sua conjectura e uma solução para tal, como dito anteriormente, baseada no trabalho de B. Yang e X. Liu em [15].

Capítulo 2

PRELIMINARES

Neste capítulo, são apresentados alguns dos principais conceitos e ferramentas utilizados no decorrer deste trabalho. Iniciamos com definições básicas sobre espaços vetoriais e tensores para definirmos o principal conceito desta seção, o de variedades semi-Riemanniana.

2.1 Tensores

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e V^* o espaço vetorial de todas as funções $\mathbb{R}$-lineares de V em $\mathbb{R}$. Definimos um tensor do tipo (r, s) $(r \geq 0, s \geq 0)$ sobre V como uma aplicação $\mathbb{R}$-multilinear $T : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$, isto é, uma função $\mathbb{R}$-linear em cada entrada.

A partir deste conceito, definimos campo tensorial sobre uma variedade diferenciável M n-dimensional. Estabelecemos as seguintes notações:

1. M^n denota uma variedade n-dimensional;

2. T_pM^n representa o espaço tangente à variedade M^n no ponto p, para $p \in M^n$;

3. $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis sobre M^n;

4. $X(p)$ denota um vetor tangente em T_pM, ou o valor de um campo X em p;

5. $C^\infty(M)$ representa o conjunto das funções diferenciáveis definidas de M^n em $\mathbb{R}$;

6. $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto das 1-formas diferenciais sobre M^n.

Um elemento $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ é tal que, dado $p \in M^n$, $\theta_p \in (T_pM)^*$, e se $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos a função $\theta(X) : M \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(X)(p) = \theta_p(X(p))$.

Definição 2.1. *Um campo tensorial diferenciável do tipo (r, s) sobre uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação $C^\infty(M)$-linear*

$$T : (\mathfrak{X}^*(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s \to C^\infty(M)$$

que induz, para cada ponto p de M, uma aplicação $\mathbb{R}$-multilinear

$$T_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

tal que, para quaisquer $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, a função

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s) : M \to \mathbb{R}$$

definida por

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T_p(\omega_1(p), \ldots, \omega_r(p), X_1(p), \ldots, X_s(p))$$

é diferenciável.

O conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) é denotado por $\mathscr{T}_s^r(M)$. Assim, denotamos por

1. $\mathscr{T}_s^0(M)$, o conjunto dos tensores do tipo (0,s) sobre M^n;

2. $\mathscr{T}_0^r(M)$, o conjunto dos tensores do tipo (r,0) sobre M^n.

2.2 Variedades semi-Riemannianas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear sobre V é uma função $\mathbb{R}$-bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$. Se b é uma forma bilinear tal que $b(u, v) = b(v, u)$, $\forall u, v \in V$, dizemos que b é uma forma bilinear simétrica.

Uma forma bilinear simétrica $b = \langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita

1. positiva definida, se $\langle v, v \rangle > 0$, $\forall v \in V \backslash \{0\}$;

2. negativa definida, se $\langle v, v\rangle < 0$, $\forall v \in V\backslash\{0\}$;

3. não-degenerada, se $\langle v, w\rangle = 0$, para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, então para qualquer subespaço W de V, a restrição $b_{|(W\times W)}$ é ainda simétrica e bilinear. Um subespaço W de V é dito não degenerado se $b_{|(W\times W)} : W \times W \to \mathbb{R}$ é não degenerada.

Definição 2.2. *O índice ν de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b_{|(W\times W)} : W \times W \to \mathbb{R}$ é negativa definida.*

Assim, $0 \leq \nu \leq n = \dim V$ e $\nu = 0$ se, e só se, b é positiva definida. Associada a forma bilinear simétrica está a função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v),\ \forall v \in V$, denominada de forma quadrática associada.

Sendo V um espaço vetorial, se tomarmos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V, a matriz $(b_{ij}) = (b(e_i, e_j))$ é chamada a matriz de b relativa a $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Desde que b é simétrica, a matriz (b_{ij}) é simétrica.

Definição 2.3. *Um produto escalar g sobre um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não degenerada sobre V. Um produto interno é um produto escalar positivo definido.*

Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W, definimos o conjunto $W^{\perp}$, chamado de W perp, por

$$W^{\perp} = \{v \in V; \langle v, w\rangle = 0, \quad \forall w \in W\}. \tag{2.1}$$

Lema 2.4. *Sejam b uma forma bilinear simétrica sobre um espaço vetorial V de dimensão finita e W um subespaço de V. Então:*

a) b é não degenerado se, e somente se, sua matriz com respeito a uma base de V for invertível.

b) Se W é não degenerado, então $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = n = \dim V$ e $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

c) *W é não degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^{\perp}$. Em particular, W é não degenerado se, e somente se, $W^{\perp}$ for não degenerado.*

Demonstração. Ver o capítulo 2 de [11]. ■

Se b é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre o espaço vetorial real V, dizemos que um vetor $v \in V\backslash\{0\}$ é

a) tipo tempo, se $\langle v, v\rangle < 0$;

b) tipo luz, se $\langle v, v\rangle = 0$;

c) tipo espaço, se $\langle v, v\rangle > 0$.

De modo análogo, define-se um subespaço não degenerado W de V ser tipo tempo, tipo luz e tipo espaço. Se $v \in V\backslash\{0\}$ não for tipo luz, define-se o sinal $\varepsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\varepsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A norma de $v \in V$ é dada por $|v| = \sqrt{\varepsilon_v \langle v, v\rangle}$ e v é unitário se $|v| = 1$.

Os Lemas a seguir, cuja demonstração podem ser encontradas em [11], fornecem informações sobre um espaço V munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada.

Lema 2.5. *Um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ com um produto escalar tem uma base ortonormal.*

Lema 2.6. *Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal para V. Então, cada $v \in V$ tem uma única expressão*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i b(v, e_i) e_i, \tag{2.2}$$

onde $\varepsilon_i = b(e_i, e_i)$ é o sinal de e_i.

Definição 2.7. *Um tensor métrico g sobre uma variedade diferenciável M é um (0,2)-tensor simétrico sobre M, tal que g_p é não degenerado, para todo $p \in M$, e de índice constante.*

Em outras palavras, g é um (0,2)-tensor assumindo diferenciavelmente, em cada ponto p de M um produto escalar g_p sobre o espaço tangente T_pM, e o índice g_p é o mesmo para todo p.

Uma variedade semi-Riemanniana M é um par (M, g), onde M é uma variedade diferenciável e $g = \langle , \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre M.

O valor comum ν do índice de g_p sobre uma variedade semi-Riemanniana é chamado o índice de M $(0 \leq \nu \leq n = \dim M)$. Se $\nu = 0$, M é uma variedade Riemanniana e g_p é positiva definida sobre T_pM. Se $\nu = 1$ e $n \geq 2$, M é denominada variedade de Lorentz e $g = \langle , \rangle$ é, então, uma métrica de Lorentz. Para uma variedade semi-Riemanniana M de curvatura constante, adotamos a notação $M^n_\nu(c) = (M, g)$ para indicar a sua dimensão n, o seu índice ν e a sua curvatura c.

Um exemplo de variedade semi-Riemanniana é o espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}^n_\nu$, que é o espaço $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n-\nu} x_i^2 - x_{n-\nu+1}^2 - \ldots - x_n^2,$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ e $\nu \geq 1$.

Definição 2.8. *Uma variedade semi-Riemanniana completa e simplemente conexa de curvatura constante c é chamada de forma espacial semi-Riemanniana.*

O sinal de c determina modelos para as formas espaciais $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, a menos do seu recobrimento semi-Riemanniano. Os modelos são:

1. se $c = 0$, $\overline{M}_1^{n+1}(c) = \mathbb{R}_1^{n+1} = \mathbb{L}^{n+1}$, chamado de Espaço de Lorentz-Minkowski;

2. se $c > 0$, $\overline{M}_1^{n+1}(c) = \mathbb{S}_1^{n+1}(c) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle x, x\rangle = \frac{1}{c}\}$, chamado de Espaço de Sitter;

3. se $c < 0$, $\overline{M}_1^{n+1}(c) = \mathbb{H}_1^{n+1}(c) = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+2} : \langle x, x\rangle = \frac{1}{c}\}$, chamado de Espaço anti de Sitter.

É importante notar que $\mathbb{L}^{n+1}$ e $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ são simplesmente conexas. Para uma prova deste fato, consideremos as aplicações $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{L}^{n+1}$ e $\Psi : \mathbb{S}^n(c) \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1^{n+1}(c)$, definidas, respectivamente, por

$$\Phi(x) = x \quad \text{e} \quad \Psi(p,t) = \left(\sqrt{1+t^2}\,p, \frac{1}{\sqrt{c}}t\right).$$

É simple a verificação de que Φ e Ψ são difeomorfismos. Assim, os grupos fundamentais $\pi_1(\mathbb{L}^{n+1})$ e $\pi_1(\mathbb{S}_1^{n+1})$ são isomorfos, respectivamente, a $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\pi_1(\mathbb{S}^n(c) \times \mathbb{R})$, que são triviais e, portanto, $\mathbb{L}^{n+1}$ e $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ são simplesmente conexas.

Já a forma espacial $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$ não é simplesmente conexa, pois com o auxílio da aplicação $\Upsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1(-c) \to \mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, definida por

$$\Upsilon(x,p) = \left(\frac{1}{\sqrt{-c}}x, \sqrt{1+|x|^2}\,p\right),$$

que é um difeomorfismo, o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{H}_1^{n+1}(c))$ é isomorfo a $\pi_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1(-c))$, que não é trivial. Um modelo para o recobrimento $\tilde{\mathbb{H}}_1^{n+1}(c)$ semi-Riemanniano, simplesmente conexa de $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, é o $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica induzida a partir da aplicação de recobrimento $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, definida por

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{-c}}(x, \sqrt{1+|x|^2}\cos t, \sqrt{1+|x|^2}\operatorname{sen} t).$$

Assim, a geometria de $\tilde{\mathbb{H}}_1^{n+1}(c)$ pode ser obtida a partir da geometria de $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, com uma modificação pela a aplicação Γ.

Passemos agora, ao estudo de subvariedades M^n de dimensão n nas formas espaciais $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, isto é, de codimensão 1, chamadas de hipersupefícies.

Seja M^n uma variedade diferenciável conexa de dimensão n. Consideremos uma imersão $x : M^n \to \overline{M}_1^{n+1}(c)$ (uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis tal que, para todo $p \in M$, sua diferencial $dx_p : T_pM \to \overline{M}_1^{n+1}(c)$ é injetiva). Munimos M^n com a métrica induzida

$$\langle u, v\rangle_p = \langle dx_p(u), dx_p(v)\rangle_{x(p)},$$

para todos $u, v \in T_pM^n$ e $p \in M^n$.

Uma tal imersão é dita ser tipo espaço se a métrica induzida é positiva definida, isto é, uma métrica Riemanniana. Neste caso, dizemos que M^n é uma hipersuperfície tipo espaço de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$.

Dos exemplos apresentados acima, escolheremos o espaço anti de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$ para ser o espaço ambiente de estudo. Contudo, na seção a seguir denotaremos o espaço ambiente como $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, visto que a teoria apresentada é válida em qualquer uma das formas espaciais apresentadas acima.

2.3 Equações de estrutura

A técnica que será utilizada para desenvolver os estudos futuros, é chamada o Método do Referencial Móvel. Para mais detalhes, ver [3]. Iniciamos esta seção apresentando um resultado que auxiliará no estudo aqui proposto.

Lema 2.9 (Cartan)**.** *Sejam M^k uma variedade diferenciável e $\omega_1, \ldots, \omega_r$ 1-formas linearmente independentes sobre um aberto $U \subset M$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ são 1-formas sobre U tais que:*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \omega_i = 0. \tag{2.3}$$

Então, existem funções diferenciáveis $b_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} b_{ij}\omega_j$ e $b_{ij} = b_{ji}$.

Observação 2.10. *O símbolo "$\wedge$"denota o produto exterior entre duas formas diferenciais ω e θ.*

Demonstração. De forma geral, consideremos $r \leq k$. Inicialmente, completemos o conjunto das 1-formas ω_i para obtermos uma base $\{\omega_1, \ldots, \omega_r, \ldots, \omega_k\}$ de $(T_pM)^*$. Assim, como as $\alpha_i's$ são 1-formas, existem funções diferenciáveis tais que:

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} b_{ij}\omega_j + \sum_{j=r+1}^{k} a_{ij}\omega_j.$$

Por hipótese, temos que

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \omega_i = \sum_{i,j}^{r} b_{ij}\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq k} a_{ij}\omega_j \wedge \omega_i.$$

Como $\omega_i \wedge \omega_j = -\omega_j \wedge \omega_i$, para todo $1 \leq i, j \leq k$, obtemos

$$0 = \sum_{i<j}^{r} (b_{ij} - b_{ji})\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{1 \leq i \leq r,\, r+1 \leq j \leq k} a_{ij}\omega_j \wedge \omega_i.$$

Uma vez que $\omega_j \wedge \omega_i$, com $i < j$ e $1 \leq i, j \leq k$, formam uma base para o espaço das 2-formas, obtemos

$$b_{ij} = b_{ji} \quad e \quad a_{ij} = 0.$$

Portanto, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}\omega_j$, com $b_{ij} = b_{ji}$ funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$.

■

Sejam $x : M^n \to \overline{M}_1^{n+1}(c)$ uma imersão tipo espaço em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ de uma variedade conexa e $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ um referencial ortornormal local adaptado à imersão, isto é, para cada ponto $p \in M^n$ os vetores $\{e_1(p), \ldots, e_n(p)\}$ geram T_pM e e_{n+1} gera o espaço normal a M^n. Adotemos a seguinte convenção sobre a variação dos índices:

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+1, \qquad 1 \leq i, j, k, \ldots \leq n.$$

Como M^n é tipo espaço, temos

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1, \qquad \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = -1.$$

Associado a este referencial ortonormal local, temos o co-referencial $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}\}$, tal que $\omega_i(e_j) = \varepsilon_j \delta_{ij}$, isto é, em cada ponto de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, $\{\omega_1(p), \ldots, \omega_{n+1}(p)\}$ é uma base dual da base $\{e_i(p), \ldots, e_{n+1}(p)\}$. Com este co-referencial a métrica semi-Riemanniana de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, que denotaremos por $d\overline{s}^2$, é dada por

$$d\overline{s}^2 = \sum_A \varepsilon_A\, \omega_A^2, \qquad \varepsilon_i = 1, \quad \varepsilon_{n+1} = -1.$$

Temos, ainda, associado a $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ o conjunto das 1-formas $\{\omega_{AB}\}$, chamadas formas de conexão de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, para as quais temos as *equações de estrutura* de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$:

$$d\omega_A = \sum_B \varepsilon_B\, \omega_{AB} \wedge \omega_B, \qquad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{2.4}$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \varepsilon_C\, \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}. \tag{2.5}$$

As 2-formas $\overline{\Omega}_{AB}$ são chamadas as formas de curvaturas de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Para cada p, dados $X, Y \in T_p\overline{M}_1^{n+1}$, a matriz $((\overline{\Omega}_{AB})_p(X,Y))$ gerada pelas 2-formas $\overline{\Omega}_{AB}$ define um operador $\overline{R}(X,Y)_p : T_p\overline{M}_1^{n+1} \to T_p\overline{M}_1^{n+1}$, chamado operador curvatura e um (0,4)-tensor $\overline{R}$, dado por $\overline{R}(X,Y,Z,W) = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle$, chamado de tensor curvatura. Denotando $\overline{R}_{ABCD} = \overline{R}(e_A, e_B, e_C, e_D)$, as componentes do tensor curvatura, no referencial $\{e_A\}$, segue que

$$\overline{\Omega}_{AB} = -\frac{1}{2}\sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_D \, \overline{R}_{ABCD}\omega_C \wedge \omega_D.$$

Temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.11. *Para X, Y, Z, T campos diferenciáveis de vetores em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, temos*

1. $\overline{R}(X,Y) = -\overline{R}(Y,X)$;
2. $\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = -\langle \overline{R}(X,Y)T, Z\rangle$;
3. $\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle \overline{R}(Z,T)X, Y\rangle$;
4. $\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle + \langle \overline{R}(Y,Z)X, T\rangle + \langle \overline{R}(Z,X)Y, T\rangle = 0$.

Restringindo as formas ω_A e ω_{AB} à M^n, obtemos formas que ainda satisfazem (2.4) e (2.5). Em M^n, temos $\omega_{n+1} = 0$, visto que, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X = \sum_i X_i e_i$, e

$$\omega_{n+1}(X) = \omega_{n+1}\left(\sum_i X_i e_i\right) = \sum_i X_i \omega_{n+1}(e_i) = 0. \tag{2.6}$$

Assim, a métrica induzida sobre M^n é dada por $ds^2 = \sum_i \omega_i^2$. Em M^n, temos

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_{n+1} = \sum_B \varepsilon_B \, \omega_{n+1B} \wedge \omega_B, \\ &= \sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_i. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Cartan, existem funções diferenciáveis h_{ij}, tais que:

$$\omega_{n+1i} = \sum_j h_{ij}\, \omega_j, \qquad h_{ij} = h_{ji}. \tag{2.7}$$

Com estas funções, definimos a segunda forma fundamental da imersão x por

$$h = \sum_{i,j} h_{ij}\, \omega_i \otimes \omega_j e_{n+1}.$$

Sendo as funções h_{ij} simétricas em relação aos índices, temos que h é uma aplicação simétrica. Definimos o vetor curvatura média por

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n}\left(\sum_i h_{ii}\right) e_{n+1}.$$

Deste vetor, definimos a função curvatura média por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}. \tag{2.8}$$

Assim, uma hipersuperfície tipo espaço é dita ter curvatura média constante (CMC) se a função H for constante. No caso particular de $H \equiv 0$, dizemos que a hipersuperfície tipo espaço é máxima.

As 1-formas ω_{AB} são chamadas formas de conexão de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, em virtude de que elas definem uma derivação sobre $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ (conexão), representada por $\overline{\nabla}$. $\overline{\nabla}$ é chamada de derivada covariante e definida da seguinte forma: sejam X e Y, campos de vetores diferenciáveis sobre $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ e $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal local, a derivada covariante de Y em relação a X, $\overline{\nabla}_X Y$, é definida por

$$\overline{\nabla}_X Y = \sum_B \{dy_B(X) + \sum_A \omega_{AB}(X) y_A\} e_B.$$

É importante notar que $\overline{\nabla}_X Y$ não depende do referencial, e sim da métrica. Se $Y = e_C$, temos

$$\langle \overline{\nabla}_X e_C, e_D\rangle = \omega_{CD}(X),$$

o que fornece um interpretação geométrica das formas de conexão ω_{AB} em termos da derivação covariante.

A derivada covariante possui as seguintes propriedades.

Proposição 2.12. *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis de vetores em $\overline{M}_1^{n+1}$, f, g funções diferenciáveis em $\overline{M}_1^{n+1}$ e a, b números reais. Então, a conexão*

$$\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(\overline{M}_1^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}_1^{n+1}) \to \mathfrak{X}(\overline{M}_1^{n+1})$$

satisfaz:

1. *$\overline{\nabla}$ é $C^\infty(\overline{M}_1^{n+1})$-linear na primeira coordenada, isto é,*

$$\overline{\nabla}_{fX+gY}Z = f\overline{\nabla}_X Z + g\overline{\nabla}_Y Z;$$

2. *$\overline{\nabla}$ é $\mathbb{R}$-linear na segunda coordenada, isto é,*

$$\overline{\nabla}_X(aY + bZ) = a\overline{\nabla}_X Y + b\overline{\nabla}_X Z;$$

3. *$\overline{\nabla}_X(fY) = X(f)Y + f\overline{\nabla}_X Y$;*

4. *$\langle\overline{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle$;*

5. *Se $p \in \overline{M}_1^{n+1}$, $(\overline{\nabla}_X Y)(p)$ só depende do valor de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva parametrizada $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}_1^{n+1}$, com $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = X(p)$.*

Com essa noção de conexão, temos que o colchete de Lie entre dois campos vetoriais tangentes X e Y, que fornece um novo campo vetorial tangente sobre M^n, é dado por

$$[X, Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X.$$

Separando nas equações de estrutura de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ as parte tangente e normal a M^n, obtemos de $\omega_{n+1} = 0$, que:

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j; \tag{2.9}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} + \overline{\Omega}_{ij}; \tag{2.10}$$

$$d\omega_{in+1} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn+1} + \overline{\Omega}_{in+1}. \tag{2.11}$$

As formas ω_{ij} restritas à M^n só dependem da métrica de M^n e da parte tangente do referencial $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$. Assim, definimos uma derivada covariante ∇ sobre M^n a partir da derivada covariante de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, como sendo a parte tangente de $\overline{\nabla}$ a M^n, isto é,

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T = \sum_j \{dy_j(X) + \sum_i \omega_{ij}(X) y_i\} e_j, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A conexão ∇ de M^n possui todas as propriedades enunciadas na Proposição 2.12. Definimos também as formas de curvatura da métrica de M^n por

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

Portanto, as equações de estrutura de M^n são

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0; \tag{2.12}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}. \tag{2.13}$$

De forma análoga as formas de curvatura de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, dado $p \in M^n$ e $X, Y \in T_pM^n$, a matriz $((\Omega_{ij})_p(X,Y))$ gerada pelas 2-formas Ω_{ij} define um operador curvatura $R(X,Y)_p : T_pM^n \to T_pM^n$ e um (0,4)-tensor curvatura para M^n tal que $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$. Esse tensor tem propriedades similares ao tensor $\overline{R}$ de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Denotando por $R_{ijkl} = \langle R(e_i,e_j)e_k, e_l\rangle = \Omega_{lk}(e_i,e_j)$ as componentes do tensor R, as formas Ω_{ij} podem ser escritas como

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\, \omega_k \wedge \omega_l.$$

Da equação (2.10), decorre que as componentes do tensor curvatura de M^n estão relacionadas com as componentes tangentes do tensor curvatura de $\overline{M}_1^{n+1}$. A relação é estabelecida por:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l &= \Omega_{ij} \\
&= d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\
&= -\omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} + \overline{\Omega}_{ij} \\
&= -\sum_k h_{ik}\omega_k \wedge \sum_l h_{jl}\omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= -\sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\omega_k \wedge \omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Assim,

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{2.14}$$

A equação (2.14) é chamada de *Equação de Gauss*.

As funções componentes R_{ijkl} do tensor curvatura de M^n, permitem definir outras curvaturas como, por exemplo, as curvaturas seccionais.

Dado $p \in M^n$, consideremos em T_pM^n um subespaço P bidimensional. Suponhamos $\mathrm{span}\{e_i, e_j\} = P$, para alguns $i, j = 1, \ldots, n$. Assim, temos a seguinte

Proposição 2.13. *O número $\Omega_{ij}(e_i, e_j) = R_{ijij}$ depende apenas do subespaço P.*

Podemos então, definir:

Definição 2.14. *O número*

$$K_p(P) = -\Omega_{ij}(e_i, e_j)$$

é chamado a curvatura seccional de M^n em p, segundo P.

Mais geralmente, temos:

Proposição 2.15. *Sejam $X, Y \in P \subset T_pM$ linearmente independentes e um referencial ortonormal $\{e_i\}$ tal que span$\{e_i, e_j\} = P$, para alguns $i, j = 1, \ldots, n$. Então,*

$$K(p) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2}.$$

É importante notar que, como P é não degenerado, $\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle \neq 0$.

Definição 2.16. *Dizemos que uma variedade tem curvatura (seccional) constante, se $K_p(P)$ não depende de p e do subespaço não degenerado P.*

Assim, se $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ tem curvatura constante, temos que

$$\overline{R}_{ABCD} = \varepsilon_A \varepsilon_B\, c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}).$$

Logo, a equação de Gauss para uma hipersuperfície M^n tipo espaço em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ pode ser escrita como

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{2.15}$$

A partir das curvaturas seccionais, denifimos as seguintes curvaturas:

Definição 2.17 (Tensor Curvatura de Ricci). *Seja R o tensor curvatura de M^n. O tensor curvatura de Ricci de M^n é definido por*

$$Ric(X,Y) = \sum_i \langle R(X,e_i)Y,e_i\rangle, \tag{2.16}$$

onde $\{e_1,\dots,e_n\}$ é um referencial ortonormal e X, Y são campos vetoriais sobre M^n.

O número $\mathrm{Ric}(X,X)$ é chamado curvatura de Ricci na direção de X. Se $X = e_i$, $Y = e_j$, temos que as componentes do tensor curvatura de Ricci no referencial $\{e_1,\dots,e_n\}$, denotadas por R_{ij}, são dadas por

$$R_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n} R_{ikjk}, \tag{2.17}$$

onde $R_{ikjk} = \langle R(e_i,e_k)e_j,e_k\rangle$. A partir da equação de Gauss (2.14), deduzimos que as componentes do tensor curvatura de Ricci satisfazem

$$R_{ij} = c(n-1)\delta_{ij} - nHh_{ij} + \sum_k h_{ik}h_{kj}. \tag{2.18}$$

Dizemos que M^n tem tensor curvatura de Ricci limitado inferiormente se existe α tal que

$$\mathrm{Ric}(X,Y) \geq \alpha\langle X,Y\rangle,$$

para quaisquer X, Y campos vetoriais sobre M^n. Similarmente, a curvatura de Ricci é limitada inferiormente se

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq \alpha\langle X,X\rangle,$$

para qualquer campo vetorial X sobre M^n. Ou equivalentemente, a curvatura de Ricci é limitada inferiormente se

$$R_{ii} \geq \alpha, \tag{2.19}$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

Definição 2.18 (Curvatura Escalar Normalizada (R)). *A curvatura escalar normalizada é uma função diferenciável sobre M^n obtida a partir do tensor* *curvatura de Ricci. Se* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é uma base ortonormal de campos locais sobre* M*, temos que*

$$R(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i Ric_p(e_i, e_i) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} R_{ijij}. \qquad (2.20)$$

De (2.18)

$$\begin{aligned} n(n-1)\mathrm{R} &= \sum_i R_{ii} \\ &= \sum_i c(n-1) - \sum_i nHh_{ii} + \sum_{i,k} h_{ik}^2 \\ &= cn(n-1) - n^2H^2 + \sum_{i,k} h_{ik}^2. \end{aligned}$$

Logo

$$n(n-1)\mathrm{R} = cn(n-1) - n^2H^2 + S, \qquad (2.21)$$

onde $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M^n.

2.4 Tensores e operadores diferenciais

Nesta seção, definimos alguns operadores diferenciais que serão utilizados para a obtenção e emprego de fórmulas durante todo o trabalho. Iniciamos definindo operações de derivação de tensores sobre M^n.

Dado um (0,2)-tensor covariante T diferenciável definido em M^n, podemos representar T, por

$$T = \sum_{i,j} T_{ij}\, \omega_i \otimes \omega_j, \qquad (2.22)$$

onde, $T_{ij} = T(e_i, e_j)$ definem as componentes de T no referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para M^n.

Como T é um tensor diferenciável, temos que as funções componentes no referencial são funções diferenciáveis. Assim, faz sentido falar em dT_{ij}.

Definição 2.19. *Seja* T *um (0,2)-tensor covariante em* M^n*. A diferencial covariante* ∇T *de* T *é um (0,3)-tensor definido da seguinte maneira: as* *componentes $T_{ijk} = (\nabla T)(e_i, e_j, e_k)$, para $i, j, k = 1, \dots, n$, chamadas de derivadas covariantes de T_{ij}, são dadas por:*

$$\sum_k T_{ijk}\omega_k \;=\; d(T_{ij}) + \sum_k T_{kj}\omega_{ki} + \sum_k T_{ik}\omega_{kj}. \tag{2.23}$$

De forma similar à diferencial covariante de um tensor diferenciável T sobre M^n, definimos a segunda diferencial covariante como sendo o (0,4)-tensor $\nabla(\nabla T)$, cujas funções componentes são $T_{ijkl} = \nabla(\nabla T)(e_i, e_j, e_k, e_l)$, chamadas de segundas derivadas covariantes de T_{ij} e dadas por

$$\sum_l T_{ijkl}\omega_l \;=\; d(T_{ijk}) + \sum_l T_{ljk}\omega_{li} + \sum_l T_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l T_{ijl}\omega_{lk}. \tag{2.24}$$

Observação 2.20. *Se o tensor é da forma $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ sobre M^n, defina $\overline{T} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ da seguinte forma*

$$\overline{T}(X_1, X_2, Y) = \langle T(X_1, X_2), Y\rangle.$$

Claramente $\overline{T}$ é $C^\infty(M)-$multilinear e, consequentemente, um (0,3)-tensor. Isto define um isomorfismo canônico $T \to \overline{T}$ entre o conjunto das aplicações de $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $\mathscr{T}_3^0(M)$. Assim, podemos definir uma diferencial covariante para T, de modo que as derivadas covariantes de T_{ij} safizfazem

$$\sum_k T_{ijk}\omega_k \;=\; d(T_{ij}) + \sum_k T_{kj}\omega_{ki} + \sum_k T_{ik}\omega_{kj},$$

no sentido natural, visto que, pelo isomorfismo temos $\overline{\nabla_Y T} = \nabla_Y \overline{T}$, para todo campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Um exemplo simples, porém muito útil é $I : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que $I(X) = X$. O (0,2)-tensor a ele associado é o tensor métrico $G : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ e sua diferencial covariante é $(\nabla I) = 0$.

De forma similar, dada uma aplicação $\Phi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$, isto é, $\Phi = \sum_{i,j} \Phi_{ij}\omega_i \otimes \omega_j e_{n+1}$, suas diferenciais covariantes são tais que as derivadas covariantes de Φ_{ij} são dadas por:

$$\sum_k \Phi_{ijk}\omega_k = d(\Phi_{ij}) + \sum_k \Phi_{kj}\omega_{ki} + \sum_k \Phi_{ik}\omega_{kj}; \tag{2.25}$$

$$\sum_l \Phi_{ijkl}\omega_l \;=\; d(\Phi_{ijk}) + \sum_l \Phi_{ljk}\omega_{li} + \sum_l \Phi_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l \Phi_{ijl}\omega_{lk}. \tag{2.26}$$

Observação 2.21. *Como o campo vetorial resultante é um campo normal a M^n teriamos uma parcela com as formas de conexão relativas ao campo normal, mas no caso de hipersuperfícies, temos que esta forma é $\omega_{n+1n+1} = 0$.*

A derivada covariante de tensores nos permite estender às variedades Riemannianas (variedades tipo espaço estão nesta classe) certos operadores diferenciais usuais do espaço Euclidiano.

Definição 2.22. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana M^n. O gradiente de f é o campo vetorial ∇f em M^n definido por*

$$\langle \nabla f, X\rangle_p = df_p(X),$$

para todo $p \in M$ e todo $X \in T_pM$.

Considerando um referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M^n$ podemos escrever, em U, $df = \sum_i f_i\omega_i$. A função f_i é chamada a derivada de f na direção de e_i. Verifica-se, em U, que

$$\nabla f = \sum_{i=1} f_i e_i.$$

Sendo df uma 1-forma e, consequentemente, um (0,1)-tensor, temos, das definições apresentadas acima, que a sua diferencial covariante de $\nabla(df)$ é um (0,2)-tensor, cujas componentes f_{ij} satisfazem

$$\sum_j f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_j f_j\omega_{ji}.$$

Definição 2.23. *A forma bilinear $\nabla(df)$ é chamada o Hessiano de f na métrica de M^n. O traço desta forma é chamado o Laplaciano de f, e é dado por*

$$\Delta f = \sum_i f_{ii}.$$

Dado um campo de vetores X em M^n, a métrica Riemanniana faz corresponder a X uma 1-forma diferenciável ω_X (isomorfismo da Observação 2.20) definida por

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y\rangle_p,$$

para todo $p \in M$ e todo $Y \in T_pM$. Em um referencial $\{e_i\}$ sobre um aberto de M, se $X = \sum_i x_i e_i$, temos que

$$\omega_X = \sum_i x_i \omega_i.$$

A diferencial covariante $\nabla\omega_X$ é uma forma bilinear cujas funções componentes x_{ij} são dadas por

$$\sum_j x_{ij}\omega_j = dx_i + \sum_j x_j \omega_{ji}.$$

Definição 2.24. *O traço de $\nabla\omega_X$ é chamado divergente de X, e tem a expressão*

$$\mathrm{div} X = \sum_i x_{ii}.$$

Observe que

$$\Delta f = \mathrm{div}\nabla f.$$

Para os operadores definidos acima temos as seguintes propriedades: dadas funções diferenciáveis $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ e X, Y campos vetoriais diferenciáveis em M^n, temos

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

2.$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

3. Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então $\nabla(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\nabla f$.

4. $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$.

5. $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + \langle \nabla f, X\rangle$.

6. $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$.

7. Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então $\Delta(\varphi \circ f) = (\varphi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\varphi' \circ f)\Delta f$.

2.5 Fórmula do tipo Simons

O objetivo desta seção é determinar uma expressão para o Laplaciano de S, que, como mencionado acima, representa o quadrado da norma da segunda forma fundamental da imersão x. Uma expressão desse tipo é chamada Fórmula do tipo

Simons. Para sua determinação no caso considerado na seção 2.3, passemos às seguintes observações.

Sendo a segunda forma fundamental da imersão $x : M^n \to \overline{M}_1^{n+1}$ dada por $h = \sum_k h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j e_{n+1}$, temos que as derivadas covariantes de h_{ij} satisfazem

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = d(h_{ij}) + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}, \tag{2.27}$$

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = d(h_{ijk}) + \sum_l h_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}. \tag{2.28}$$

Uma primeira consequência destas expressões são as *equações de Codazzi*,

$$h_{ijk} = h_{ikj}; \qquad \forall i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{2.29}$$

Para obtê-las, substitua dh_{ij} na derivada exterior da equação (2.7)

$$\begin{aligned} d\omega_{in+1} &= d(-\sum_j h_{ij}\,\omega_j) = -\sum_j (dh_{ij} \wedge \omega_j + h_{ij} d\omega_j) \\ &= -\sum_{j,k} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \underbrace{\sum_{j,k} h_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_j}_{a} + \underbrace{\sum_{j,k} h_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_j}_{b} - \underbrace{\sum_{j,k} h_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k}_{b}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ tem curvatura (seccional) constante e igual a c, temos $\overline{\Omega}_{in+1} = 0$. Assim, resta em (2.11)

$$d\omega_{in+1} \;=\; \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn+1}. \tag{2.30}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d\omega_{in+1} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \left(-\sum_j h_{kj}\omega_j \right) \\ &= \underbrace{-\sum_{k,j} h_{kj}\omega_{ik} \wedge \omega_j}_{a}. \end{aligned}$$

Assim, igualando as duas sentenças e notando que os somatórios indicados pelas mesmas letras se cancelam, resta

$$0 = \sum_{j,k} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j = \sum_{j<k} (h_{ijk} - h_{ikj})\omega_k \wedge \omega_j,$$

donde, segue que $h_{ijk} = h_{ikj}$.

Uma outra relação importante, agora envolvendo as segunda derivadas covariantes de h_{ij}, é a chamada *identidade de Ricci*

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj} R_{mikl} + \sum_m h_{im} R_{mjkl}. \tag{2.31}$$

Para uma demonstração, diferenciemos exteriormente o primeiro membro de (2.27) e utilizemos (2.28) no desenvolvimento

$$\begin{aligned}
d(\sum_k h_{ijk}\omega_k) &= \sum_k (d(h_{ijk}) \wedge \omega_k + h_{ijk} d\omega_k) \\
&= \sum_{k,l} (h_{ijkl}\omega_l - h_{ljk}\omega_{li} - h_{ilk}\omega_{lj} - h_{ijl}\omega_{lk}) \wedge \omega_k + \sum_{k,l} h_{ijk}\omega_{kl} \wedge \omega_l \\
&= \sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k - \overbrace{\sum_{k,l} h_{ljk}\omega_{li} \wedge \omega_k}^{a} - \overbrace{\sum_{k,l} h_{ilk}\omega_{lj} \wedge \omega_k}^{b} \\
&\quad - \overbrace{\sum_{k,l} h_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k}^{c} + \overbrace{\sum_{k,l} h_{ijk}\omega_{kl} \wedge \omega_l}^{c}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, diferenciando o segundo membro de (2.27), tem-se

$$\begin{aligned}
d(\sum_k h_{ijk}\omega_k) &= d(dh_{ij}) + \sum_k dh_{kj} \wedge \omega_{ki} + \sum_k h_{kj} d\omega_{ki} + \sum_k dh_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_k h_{ik} d\omega_{kj} \\
&= \sum_{k,l} (h_{kjl}\omega_l - h_{lj}\omega_{lk} - h_{kl}\omega_{lj}) \wedge \omega_{ki} + \sum_{k,l} h_{kj}\omega_{kl} \wedge \omega_{li} + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} \\
&\quad + \sum_{k,l} (h_{ikl}\omega_l - h_{lk}\omega_{li} - h_{il}\omega_{lk}) \wedge \omega_{kj} + \sum_{k,l} h_{ik}\omega_{kl} \wedge \omega_{lj} + \\
&\quad + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj} \\
&= \overbrace{\sum_{k,l} h_{kjl}\omega_l \wedge \omega_{ki}}^{a} - \overbrace{\sum_{k,l} h_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki}}^{d} - \overbrace{\sum_{k,l} h_{kl}\omega_{lj} \wedge \omega_{ki}}^{e} \\
&\quad + \overbrace{\sum_{k,l} h_{kj}\omega_{kl} \wedge \omega_{li}}^{d} + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} + \overbrace{\sum_{k,l} h_{ikl}\omega_l \wedge \omega_{kj}}^{b} - \\
&\quad - \overbrace{\sum_{k,l} h_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj}}^{e} - \overbrace{\sum_{k,l} h_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj}}^{f} + \overbrace{\sum_{k,l} h_{ik}\omega_{kl} \wedge \omega_{lj}}^{f} + \\
&\quad + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}.
\end{aligned}$$

Observe que, após uma mudança nos índices, os somatórios indicados com mesmas letras se cancelam. Assim, igualando as duas sentenças, resta:

$$\sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k = \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}.$$

Daí, obtém-se

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}\Omega_{mi}(e_l, e_k) + \sum_m h_{im}\Omega_{mj}(e_l, e_k).$$

Notando que

$$\begin{aligned}\Omega_{mi}(e_l, e_k) &= -\frac{1}{2}\sum_{r,s} R_{mirs}\omega_r \wedge \omega_s(e_l, e_k) = R_{mikl},\\ \Omega_{mj}(e_l, e_k) &= -\frac{1}{2}\sum_{r,s} R_{mjrs}\omega_r \wedge \omega_s(e_l, e_k) = R_{mjkl},\end{aligned}$$

segue que

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}.$$

Com esta relação e usando a simetria das funções h_{ij} em relação aos índices, temos que o Laplaciano de h_{ij} é dado por

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij} &= \sum_k h_{ijkk} = \sum_k h_{ikjk}\\ &= \sum_k \left(h_{ikkj} + \sum_m h_{mk}R_{mijk} + \sum_m h_{im}R_{mkjk} \right)\\ &= \sum_k h_{kkij} + \sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk}. \qquad (2.32)\end{aligned}$$

A partir da segunda forma fundamental, podemos definir o (0,2)-tensor $\overline{h}(X,Y) = \langle h(X,Y), e_{n+1}\rangle$. Pelo isomorfismo apresentado na Observação 2.20, temos que, para cada $p \in M^n$, existe uma tranformação linear $A_p : T_pM \to T_pM$ tal que

$$\langle h(X,Y), e_{n+1}\rangle_p = \langle A(X), Y\rangle_p; \qquad \forall\ X, Y \in T_pM^n.$$

A tranformação linear A_p é chamada de *endomorfismo de Weingarten*. Como h é diferenciável e simétrica é fácil verificar que A varia diferenciavelmente com o ponto p e é auto-adjunta. Pela relação acima, obtemos que $A = \sum_{i,j} h_{ij}\omega_i e_j$, assim (pela Observação 2.20) podemos derivar A covariantemente, onde as funções componentes de ∇A são h_{ijk}. Desta forma,

$$|A|^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2 = S; \qquad |\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2. \tag{2.33}$$

Observação 2.25. *Como A_p é auto-adjunta em cada ponto $p \in M^n$, sua matriz $(h_{ij}(p))$ é diagonalizável, isto é, existem um referencial $\{e_i\}$ e números λ_i tais que $h_{ij}(p) = \lambda_i \delta_{ij}$. Os números λ_i são chamados de curvaturas principais de M^n em p e cada direção de $\{e_i\}$ é chamada de direção principal.*

Com este aporte de ferramentas, passaremos a deduzir uma fórmula do tipo Simons para hipersupefícies tipo espaço com curvatura média constante, apresentada no seguinte

Teorema 2.26 (Fórmula do tipo Simons). *Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ de curvatura seccional constante c. Se S denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental e a imersão tem curvatura média constante H, então*

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla A|^2 + S^2 + nc(S - nH^2) - nH tr(A^3). \tag{2.34}$$

Demonstração. Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço como no enunciado. Sendo $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ temos, das propriedades do Laplaciano, que

$$\Delta S = \sum_{i,j} \Delta h_{ij}^2. \tag{2.35}$$

E, ainda, para cada par de $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Delta h_{ij}^2 = 2h_{ij}\Delta h_{ij} + 2|\nabla h_{ij}|^2.$$

De (2.32), decorre que

$$\frac{1}{2}\Delta h_{ij}^2 = \underbrace{h_{ij}\sum_k h_{kkij}}_{I} + \underbrace{h_{ij}\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + h_{ij}\sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk}}_{II} + |\nabla h_{ij}|^2.$$

Examinemos (I) e (II). De (2.28), temos que

$$\sum_k h_{kkij} = \sum_k d(h_{kki})(e_j) + \sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j). \tag{2.36}$$

Note que, utilizando (2.27)

$$\begin{aligned} \sum_k d(h_{kki})(e_j) &= \sum_k e_j\left(d(h_{kk})(e_i) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right) \\ &= e_j(e_i\left(\sum_k h_{kk}\right)) + 2e_j\left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Trocando os índices k e m na segunda parcela, utilizando a antissimetria das 1-formas de conexão ω_{mk} e a simetria das funções h_{ij}, temos que

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = \sum_{k,m} h_{km}\omega_{km}(e_i) = -\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i). \tag{2.38}$$

Logo,

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = 0. \tag{2.39}$$

Assim, como $\sum_k h_{kk} = nH$ e H é constante, segue de (2.37) que $\sum_k d(h_{kki})(e_j) = 0$.

De forma análoga, como em (2.38), conclui-se utilizando a equaçao de Codazzi (2.29) que

$$\sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) = \sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) = 0. \tag{2.40}$$

Para o terceiro termo de (2.36), temos

$$\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) = \sum_t\left(\sum_k h_{kkt}\omega_{ti}(e_j)\right).$$

Utilizando (2.27), temos:

$$\begin{aligned} \sum_k h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_k\left(d(h_{kk})(e_t) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t)\right)\omega_{ti}(e_j) \\ &= \sum_k\left((e_t)(h_{kk}) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t)\right)\omega_{ti}(e_j) \\ &= e_t\left(\sum_k h_{kk}\right)\omega_{ti}(e_j) + 2\left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t)\right)\omega_{ti}(e_j). \end{aligned}$$

Como em (2.38), obtemos que $\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t) = 0$ e, sendo $\sum_k h_{kk} = nH$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_t \left(e_t\left(\sum_k h_{kk}\right)\omega_{ti}(e_j)\right)\\ &= \sum_t (e_t(nH))\omega_{ti}(e_j) = 0,\end{aligned}$$

pois H é constante. Logo, $(I) = 0$.

Analisando (II), segue da equação de Gauss (2.14), que

$$\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} = \sum_{k,m}[ch_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) - h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})]. \tag{2.41}$$

Se $i = j$

$$\begin{aligned}\sum_{k,m} h_{mk}R_{miik} &= \sum_{k\neq m}[ch_{mk}(\delta_{mi}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ii})] + \sum_{k=m}[ch_{mm}(\delta_{mi}\delta_{im} - \delta_{mm}\delta_{ii})]\\ &\quad -\sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})]\\ &= ch_{ii} - c\delta_{ii}\sum_m h_{mm} - \sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mk}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})].\end{aligned}$$

Se $i \neq j$

$$\begin{aligned}\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} &= \sum_{k\neq m}[ch_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij})] + \sum_{k=m}[ch_{mm}(\delta_{mj}\delta_{im} - \delta_{mm}\delta_{ij})]\\ &\quad -\sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})]\\ &= ch_{ji} - c\delta_{ij}\sum_m h_{mm} - \sum_{k,m} h_{mk}[(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})].\end{aligned}$$

De forma que, para todo $1 \leq i, j \leq n$

$$\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} = ch_{ji} - c\delta_{ij}\sum_m h_{mm} - \sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})]. \tag{2.42}$$

Temos, ainda,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk} &= \sum_{k,m}[ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk}-\delta_{mk}\delta_{kj})-h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj})]\\
&= \sum_{k\neq m}[ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk}-\delta_{mk}\delta_{kj})]+\sum_{k=m}[ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{mm}-\delta_{mm}\delta_{mj})]-\\
&\quad -\sum_{k,m}[h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj})]\\
&= ch_{ji}(n-1)-\sum_{k,m}[h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj})].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(II) &= cnh_{i,j}^2-c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}-\sum_{k,m}[h_{ij}h_{mk}(h_{mj}h_{ik}-h_{mk}h_{ij})]\\
&\quad -\sum_{k,m}[h_{ij}h_{mi}(h_{mj}h_{kk}-h_{mk}h_{kj})]\\
&= cnh_{ij}^2-c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}-\underbrace{\sum_{k,m}h_{ij}h_{mk}h_{mj}h_{ik}}_{a}+\sum_{k,m}h_{ij}^2h_{mk}^2\\
&\quad -\sum_{k,m}h_{ij}h_{mi}h_{mj}h_{kk}+\underbrace{\sum_{k,m}h_{ij}h_{mi}h_{mk}h_{kj}}_{a}.
\end{aligned}$$

Note que, após uma mudança nos índices m e k, os somatórios indicados por a se cancelam. Assim,

$$(II) = cnh_{ij}^2-c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}+\sum_{k,m}h_{ij}^2h_{mk}^2-\sum_{k,m}h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Delta {h_{ij}}^2 = cn\sum_{i,j}h_{ij}^2 &- c\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}\right)+\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^2h_{mk}^2-\\
&- \sum_{i,j,k,m}h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij}+\sum_{i,j}|\nabla h_{ij}|^2.
\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
cn\sum_{i,j} h_{ij}^2 &= cnS,\\
c\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}\right) &= c\sum_{i,j}(\delta_{ij}h_{ij}nH) = cn^2H^2,\\
\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^2h_{mk}^2 &= \sum_{i,j}\left(h_{ij}^2\sum_{k,m}h_{mk}^2\right) = S^2,\\
\sum_{i,j,k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij} &= \sum_{i,j,k}\left(h_{ki}h_{kj}h_{ij}\sum_m h_{mm}\right) = nH\sum_{i,j,k}(h_{ki}h_{kj}h_{ij}) = nH\mathrm{tr}(A^3),\\
\sum_{i,j}|\nabla h_{ij}|^2 &= \sum_{i,j}|\sum_k e_k(h_{ij})e_k|^2 = \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2.
\end{aligned}
$$

Assim, das simplificações acima e de (2.33), temos

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Delta h_{ij}^2 = cnS - cn^2H^2 + S^2 - nH\mathrm{tr}(A^3) + |\nabla A|^2.$$

Portanto, de (2.35) segue que

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla A|^2 + S^2 + cn(S - nH^2) - nH\mathrm{tr}(A^3).$$

■

Esta expressão possibilita a obtenção de vários resultados globais sobre hipersuperfícies, como caracterização de hipersuperfícies e estimativas para a curvatura média e o quadrado da norma da segunda forma fundamental.

Historicamente, J. Simons apresentou, em [14], uma expressão para o Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma variedade conexa na esfera e estabeleceu vários resultados no estudo de imersões mínimas e variedades compactas. Posteriormente vários autores obtiveram resultados análogos, como é o caso de T. Ishihara em [4], cujo resultado apresentaremos no capítulo a seguir.

Capítulo 3

HIPERSUPERFÍCIES TIPO ESPAÇO COMPLETAS EM FORMAS ESPACIAIS SEMI-RIEMANNIANAS

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados para o estudo de hipersuperfícies tipo espaço completas em formas espaciais. Iniciaremos com uma breve apresentação do conceito de Distribuição e Variedade Integral que faremos uso no decorrer deste trabalho.

3.1 Fatos básicos

Definição 3.1. *Seja M^n uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma distribuição (tangente) D k-dimensional sobre M é uma escolha de um subespaço linear k-dimensional $D_p \subset T_pM$, em cada ponto $p \in M$. Uma distribuição D é dita diferenciável se a união dos subespaços D_p forma um subfibrado diferenciável*

$$D = \coprod_{p \in M} D_p \subset TM.$$

Observação 3.2. *TM denota o fibrado tangente sobre M^n.*

Para determinar se uma distribuição D é diferenciável, temos o seguinte critério.

Lema 3.3 (Critério do Referencial Local). *Sejam M^n uma variedade diferenciável e $D \subset TM$ uma distribuição k-dimensional. Então, D é diferenciável se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita:*

Cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U sobre a qual existem campos vetoriais diferenciáveis $Y_1, \ldots, Y_k : U \to TM$, tais que $Y_{1|_q}, ..., Y_{k|_q}$ formam uma base para D_q, para cada $q \in U$.

Demonstração. Ver referência [6], página 495.

∎

Agora seja $D \subset TM$ uma distribuição k-dimensional diferenciável sobre M^n e considere uma subvariedade k-dimensional imersa S^k em M^n. Para cada $s \in S^k$, temos $T_s S^k$ é um subespaço linear de $T_s M^n$. Algumas questões naturais que surgem são:

- $T_s S$ corresponde a D_s ?
- Existem subvariedades imersas em M^n tal que $T_s S = D_s$?

Uma subvariedade S com tal propriedade seria como uma curva integral de um campo de vetores, e sua existência motiva a seguinte definição:

Definição 3.4. *Uma subvariedade imersa S é uma variedade integral de uma distribuição D se $T_s S = D_s$, para cada $s \in S$. D é uma distribuição integrável se cada ponto de M pertence a uma variedade integral de D.*

Para responder a segunda questão introduzimos a seguinte

Definição 3.5. *Seja D uma distribuição diferenciável sobre M. Dizemos que M é involutiva se, dado qualquer par de campos vetoriais locais diferenciáveis de D, (isto é, campos X, Y definidos em um subconjunto aberto de M tais que $X_p, Y_p \in D_p$ para cada p), seu colchete de Lie é também um campo vetorial local diferenciável de D.*

Com respeito a esse conceito temos a seguinte

Proposição 3.6. *Toda distribuição integrável é involutiva.*

Demonstração. Seja $D \subset TM$ uma distribuição integrável. Suponha V e W campos locais de D definidos em algum subconjunto aberto $U \subset M$. Seja $p \in U$ um ponto qualquer e seja S uma variedade integral de D contendo p. Desde que V e W são campos de D, temos que V e W são tangentes a S sobre U. Das propriedades do colchete de Lie, temos que $[V, W]$ é também tangente a S e, consequentemente, $[V, W]_p \in D_p$. Sendo verdade para todo $p \in U$, D é involutiva.

■

Um modo alternativo para caracterizar se uma distribuição é diferenciável e involutiva é utilizando o conceito de formas diferenciais. Os critérios são apresentados a seguir.

Lema 3.7. *Sejam M uma variedade diferenciável n-dimensional e $D \subset TM$ uma distribuição k-dimensional. Então, D é diferenciável se, e somente, se cada ponto de M tem uma vizinhança U sobre a qual existem 1-formas diferenciais $\omega_1, ..., \omega_{n-k}$ tais que para cada $q \in U$,*

$$D_q = Ker(\omega_{1|_q}) \cap \ldots \cap Ker(\omega_{n-k|_q}). \tag{3.1}$$

Demonstração. Suponha, primeiro, que existam formas $\omega_1, ..., \omega_{n-k}$ em uma vizinhança de cada ponto de M que satisfaçam (3.1). Completemos o conjunto das 1-formas acima, de forma a obter um co-referencial diferenciável $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ sobre uma vizinhança (se necessário, menor). Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é o referencial dual, é fácil verificar que D é localmente gerado por $e_{n-k+1}, ..., e_n$, assim, é diferenciável pelo critério do referencial local.

Reciprocamente, suponha D uma distribuição diferenciável. Em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, existem campos vetoriais diferenciáveis $Y_1, ..., Y_k$ que geram D (critério do referencial local). Completemos este conjunto de modo a obter um referencial local diferenciável $\{Y_1, ..., Y_n\}$ numa vizinhança $U \subset M$ de p. Com o co-referencial dual associado a $\{Y_1, ..., Y_n\}$, denotado por $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$, vemos que D é localmente caracterizado por

$$D_q = \mathrm{Ker}\,(\varepsilon_{1|_q}) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,(\varepsilon_{n-k|_q}),$$

para todo $q \in U$. ■

Quaisquer $(n-k)$ 1-formas diferenciais independentes $\omega_1, ..., \omega_{n-k}$ definidas em um subconjunto aberto $U \subset M$ e satisfazendo (3.1), para cada $q \in U$, são chamadas de formas locais de definição da distribuição D.

Lema 3.8. *Suponha $D \subset TM$ uma distribuição diferenciável. Então, D é involutiva se, e somente, se a seguinte condição é satisfeita:*

"Se η é uma 1-forma qualquer que anula D sobre um subconjunto aberto $U \subset M$, então $d\eta$ também anula D sobre U".

Para a demonstração deste lema precisamos do seguinte fato, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], na página 310.

Lema 3.9 (Derivada Exterior de uma 1-forma)**.** *Para quaisquer 1-forma diferencial η e campos vetoriais diferenciáveis X e Y, temos:*

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]). \tag{3.2}$$

Demonstração do Lema 3.8. Primeiro suponha que D é uma distribuição involutiva. Seja η uma 1-forma diferencial que anula D sobre um aberto $U \subset M$. Então, para quaisquer campos locais diferenciáveis X, Y de M, segue de (3.2) que $d\eta$ é dado por

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]).$$

A hipótese implica que cada um dos termos do segundo membro é zero em U (se D é involutiva para X, Y campos locais de D, temos que [X, Y] é um campo local de D). Logo, $d\eta$ também anula D em U.

Reciprocamente, suponha que D é uma distribuição k-dimensional que satisfaz a propriedade acima, e suponha que X, Y são campos locais de D. Se $\omega_1, ..., \omega_{n-k}$ são formas locais de definição de D, segue de (3.2)

$$\omega_i([X,Y]) = X(\omega_i(Y)) - Y(\omega_i(X)) - d\omega_i(X,Y) = 0. \ \ \forall 1 \leq i \leq n-k.$$

Isso implica que $[X, Y]$ é um campo local de D. Portanto, D é involutiva.

∎

Dada uma distribuição diferenciável D, k-dimensional sobre M, buscamos as melhores condições possíveis para esperar a existência de variedades integrais de D. É facil ver que se D é integrável, existe uma variedade integral para D. Na busca de tais condições, desenvolveram-se os seguintes conceitos.

Definição 3.10. *Seja $D \subset TM$ uma distribuição k-dimensional. Dizemos que uma carta coordenada (U, φ) sobre M é flat para D se $\varphi(U)$ é um produto de subconjuntos abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e, em cada ponto $p \in U$, D_p é gerado pelos primeiros k campos vetoriais coordenados $\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_k$. Dizemos que uma distribuição $D \subset TM$ é completamente integrável se existe uma carta flat para D em uma vizinhança de todo ponto de M.*

Desta definição, temos que toda distribuição completamente integrável é integrável e, consequentemente, involutiva. A recíproca é verdadeira, e se configura como a melhor condição procurada para garantir a existência de variedades integrais.

Teorema 3.11 (Frobenius)**.** *Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

Demonstração. Ver referência [6], página 501. ∎

3.2 Hipersuperfícies tipo espaço completas e isoparamétricas nas formas espaciais semi-Riemannianas

Partindo do princípio de que uma hipersuperfície tipo espaço é Riemanniana, iniciamos o estudo das hipersuperfícies tipo espaço completas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, no caso de hipersuperfícies compactas, onde temos a garantia da completitude. Importante ressaltar que as hipersuperfícies compactas são consideradas sem bordo.

Teorema 3.12. *Não existem hipersuperfícies tipo espaço compactas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $x : M^n \to \mathbb{H}_1^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$ uma hipersuperfície tipo espaço compacta em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$. Consideremos um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ adaptado à imersão x, isto é, de modo que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sejam tangentes a M^n, e_{n+1} normal a M^n e e_{n+2} normal a $\mathbb{H}_1^{n+1}$. O referencial acima pode ser tomado de forma que $\{e_1, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2} = \sqrt{-c}x\}$. Tomando um vetor v fixo de $\mathbb{R}_2^{n+2}$, defina a função altura $f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, v\rangle$. Assim, f é uma função diferenciável sobre M^n.

Pela definição de gradiente, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, temos:

$$\langle \nabla f, X\rangle = X\langle x, v\rangle = \langle X, v\rangle = \langle X, v^T\rangle, \tag{3.3}$$

visto que a derivada do campo posição em $\mathbb{R}_2^{n+2}$ na direção de um vetor tangente é o vetor tangente.

Assim, $\nabla f = v^T$ (v^T denota a parte tangente a M^n). Como $v \in \mathbb{R}_2^{n+2} = T_pM^n \oplus \mathrm{span}\{e_{n+1}\} \oplus \mathrm{span}\{e_{n+2}\}$, temos que $v = v^T + c\langle v, x\rangle x - \langle v, e_{n+1}\rangle e_{n+1}$. Logo

$$|v^T|^2 = |v|^2 - c\langle v, x\rangle^2 + \langle v, e_{n+1}\rangle^2.$$

Então, $|\nabla f|^2 = |v|^2 - c\langle v, x\rangle^2 + \langle v, e_{n+1}\rangle^2$.

Se tomarmos $v \in \mathbb{R}_2^{n+2}$ tal que $\langle v, v\rangle > 0$, teremos que a função altura f não terá pontos críticos e, assim não possuirá pontos de máximo ou pontos de mínimo, o que é um absurdo. Portanto, M^n não pode ser compacta.

■

Observação 3.13. *Uma prova similar à apresentada acima nos permite concluir que também não existe hipersuperfície tipo espaço compacta em $\mathbb{L}^{n+1}$. Contudo, existem hipersuperfícies tipo espaço compactas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, visto que se pode imergir a esfera S^n de modo que a métrica induzida seja positiva definida. Para isso, basta considerar o seguinte conjunto*

$$S^n(c_1) = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_1^{n+2};\, x_{n+2} = \sqrt{1/c_1 - 1/c},\ e\ 0 < c_1 \leq c\}.$$

Desta forma, quando considerarmos uma hipersuperfície tipo espaço completa em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, ela será uma hipersuperfície não compacta. Dando continuidade ao estudo, apresentaremos um contexto válido para qualquer um dos modelos de formas espaciais sugeridos no capítulo 1, para este fim, passaremos a denotar, por um instante a forma espacial ambiente por $\overline{M}_1^{n+1}$.

Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço conexa em uma variedade Lorentziana $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ de curvatura constante c. Como no capítulo 1, denotemos por h a segunda forma fundamental de M^n em $\overline{M}_1^{n+1}$ e por A o endomorfismo de Weingarten associado a h. Sendo h simétrico em cada $p \in M$, temos que A é auto-adjunta e, sendo a métrica induzida positiva definida, existe uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ em T_pM^n que diagonaliza A, ou seja, $A_p(e_i) = \lambda_i(p)e_i$, ou, ainda, $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$. Os autovalores $\lambda_i(p)$ de A_p, como antes, são chamados de curvaturas principais de M^n em p. Desta forma, definimos n funções em M^n $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, tais que, em cada ponto, elas são as curvaturas principais de M^n em p.

P.J. Ryan mostrou, em [13], que essas funções variam continuamente sobre M^n. Quanto à diferenciabilidade destas funções, K. Nomizu, em [8], apresentou condições suficientes para garantir sua diferenciabilidade. Ele apresentou o seguinte

Teorema 3.14. *Seja $A : D \subset \mathbb{R}^n \to S_n$ (S_n denota o conjunto das matrizes simétricas $(n \times n)$) uma aplicação diferenciável. Se λ é uma função contínua em D tal que, para todo $x \in D$, o número $\lambda(x)$ é o autovalor de $A(x)$ com multiplicidade m comum em todo ponto, então λ é uma função diferenciável. Além disso, para cada $p \in D$, existem m aplicações diferenciáveis $X_1, ..., X_m$ de uma vizinhança $U \subset D$ de p tais que, para cada $q \in U$, $X_1(q), ..., X_m(q)$, formam uma base ortonormal do autoespaço de $A(q)$ correspondente ao autovalor $\lambda(q)$.*

Esse resultado é naturalmente estendido para variedades diferenciáveis, no caso de aplicações diferenciáveis em um aberto de M^n no conjunto das matrizes simétricas, como o endomorfismo de Weingarten. Assim, se uma curvatura principal λ tem multiplicidade constante m, temos que ela é diferenciável e, para cada $p \in M$, existem campos vetoriais diferenciáveis $X_1, ..., X_m$ de uma vizinhança $U \subset M$ de p tais que, para cada $q \in U$, $X_1(q), ..., X_m(q)$ formam uma base ortonormal do autoespaço de A_q para o autovalor $\lambda(q)$. Desta forma, o referencial

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ pode ser tomado com tal propriedade.

Assim, consideremos o seguinte caso. Suponhamos que existam exatamente 2 curvaturas principais distintas e as multiplicidades de cada uma sejam comuns em cada ponto $p \in M^n$, digamos m e $n-m$. Caso seja necessário, podemos reordenar $e_1, ..., e_n$ de forma a que possamos escrever

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = \mu_1 \quad \text{e} \quad \lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = \mu_2.$$

Nesta situação, definamos, para cada curvatura principal μ_j, as distribuições D_j sobre M^n a partir das seguintes escolhas de subespaços de T_pM^n, para cada ponto $p \in M^n$

$$D_p^j = \{X \in T_pM^n | AX = \mu_j X\}. \tag{3.4}$$

Cada distribuição $D_j = \coprod_{p \in M} D_p^j \subset TM$ sobre M^n tem dimensão $m_j = m(\mu_j)$, que representa a multiplicidade da curvatura μ_j. Com base no que foi exposto acima, temos a seguinte

Proposição 3.15. *Na situação acima, temos que as curvaturas principais μ_1, μ_2 são funções diferenciáveis e as distribuições D_j, para cada $j = 1, 2$, são diferenciáveis.*

Com essa teoria, T. Otsuki estudou as distribuições geradas pelos vetores principais de uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana de curvatura constante. Em [12], T. Otsuki apresentou o seguinte

Teorema 3.16 (T. Otsuki)**.** *Seja M^n uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana $\overline{N}^{n+1}(c)$ de curvatura constante c, tal que a multiplicidade das curvaturas principais de M^n são constantes em todo ponto. Então, a distribuição gerada pelos vetores principais, correspondentes a cada curvatura principal, é completamente integrável. Em particular, se a multiplicidade de uma curvatura principal é maior do que 1, então esta curvatura principal é constante sobre a variedade integral da distribuição correspondente ao espaço gerado pelos respectivos vetores principais.*

Com uma argumentação similar a apresentada por T. Otsuki em [12], nos permite afirmar que o resultado é válido quando o espaço ambiente é uma variedade Lorentziana $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ de curvatura constante c.

Esse resultado sugere uma técnica que possibilita determinar características locais ou globais de hipersuperfície em espaços de curvatura seccional constante. Utilizando essa técnica, N. Abe, N. Koike e S. Yamaguchi, em [5], e L. Zhen-qi e X. Xian-Hua, em [7], caracterizaram hipersuperfícies tipo espaço em espaços de Lorentz de curvatura constante.

No estudo de hipersuperfícies M^n tipo espaço, conexa de uma forma espacial Lorentziana $\overline{M}_1^{n+1}$ sob condições nas curvaturas principais, o caso mais simples a ser considerado é quando as curvaturas principais são funções constantes. Em 1981, Nomizu, em [9], denominou uma hipersuperfície em tal situação como uma hipersuperfície isoparamétrica. A seguir, utilizando o *Modelo de Minkowski* para o *Espaço Hiperbólico*, apresentamos exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$.

Definição 3.17 (Espaço hiperbólico - Modelo de Minkowski)**.** *O Espaço Hiperbólico no Modelo de Minkowshi é definido como o subconjunto de* $\mathbb{L}^{n+1}$ *definido por*

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} |\, \langle x, x\rangle = -1,\ e\ x_{n+1} > 0\}. \tag{3.5}$$

Sobre esse espaço, temos a seguinte

Proposição 3.18. *O Modelo de Minkowshi para* $\mathbb{H}^n$ *é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante e igual a* -1.

Exemplo 3.19. Espaço Hiperbólico: *O subconjunto de* $\mathbb{H}_1^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$ *definido por*

$$M^n = \{x \in \mathbb{H}_1^{n+1}(c);\, x_{n+2} = \sqrt{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c}}\ e\ c_1 \leq c\}$$

é uma hipersuperfície tipo espaço completa isométrica ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(c_1)$.

Para demonstrar a afirmação, consideremos dois casos:

Caso 1: $c_1 = c$

Neste caso, $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, 0)$. Como $\langle x, (0, \dots, 0, 1)\rangle = 0$ e $\mathbb{R}^{n+2}_2 = \mathbb{R}^{n+1}_1 \times \mathbb{R}^1_1$, temos $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}_1(c) \cap \mathbb{R}^{n+1}_1$, com

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = \frac{1}{c}. \tag{3.6}$$

Assim, x define uma imersão bijetiva de M^n em $\mathbb{H}^n(c)$. Logo, M^n é uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$. Como, para todo $p \in M^n$,

$$\mathbb{R}^{n+2}_2 = T_p\mathbb{H}^{n+1}_1(c) \oplus \operatorname{span}\{x\},$$

e $\langle N, x\rangle = 0$, com $N = (0, \dots, 0, 1)$, temos que $N(p) \in T_p\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$. Desta forma, $T_p\mathbb{H}^{n+1}_1 = T_pM^n \oplus \operatorname{span}\{N(p)\}$. Sabendo que $\langle N, dx\rangle = 0$ (N é um campo constante) e $\langle N, N\rangle = -1$, temos que N é um campo tipo tempo normal e unitário a M^n. Portanto, x é uma imersão tipo espaço. De (3.6), temos que M^n é isométrica à $\mathbb{H}^n(c)$ e, consequentemente, M^n é completa.

Caso 2: $c_1 < c$

Neste caso, para $x \in M^n$, temos $x_{n+2} = \sqrt{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c}}$ e $x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = \frac{1}{c_1}$. Considerando a função diferenciável $f : \mathbb{H}^{n+1}_1(c) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ teremos que $M^n = f^{-1}(\frac{1}{c_1})$. Assim, mostremos que M^n é um conjunto de nível de $\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$.

Pela definição de gradiente, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}_1)$, temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, X\rangle &= X(f) = 2x_1X_1 + \dots + 2x_nX_n - 2x_{n+1}X_{n+1}\\ &= \langle 2(x_1, \dots, x_{n+1}, 0), X\rangle = \langle 2Z, X\rangle,\end{aligned}$$

onde $Z = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$. Fazendo $Z = \tilde{Z} + c\langle Z, x\rangle x$, com $\tilde{Z}$ a parte tangente a $\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$, e notando que $\langle Z, x\rangle = f(x)$, temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, X\rangle &= \langle 2Z, X\rangle = \langle 2\tilde{Z}, X\rangle = \langle 2(Z - c\langle Z, x\rangle x), X\rangle\\ &= \langle 2(Z - cf(x)x), X\rangle.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla f(x) = 2(Z(x) - \frac{c}{c_1}x), \;\; \forall x \in M^n.$$

Sendo $\langle Z(x), Z(x)\rangle = f(x)$, segue que

$$\begin{aligned}\langle\nabla f, \nabla f\rangle &= 4\left(\langle Z(x), Z(x)\rangle - \frac{2c}{c_1}\langle Z(x), x\rangle + \frac{c^2}{c_1^2}\langle x, x\rangle\right)\\ &= 4\left(\frac{1}{c_1} - \frac{2c}{c_1^2} + \frac{c}{c_1^2}\right) = \frac{4}{c_1}\left(1 - \frac{c}{c_1}\right).\end{aligned}$$

Como $c_1 < c < 0$, temos

$$\frac{1}{c_1} > \frac{1}{c} \;\Rightarrow\; \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c} > 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{c}{c_1} > 0.$$

Portanto, $\langle\nabla f, \nabla f\rangle < 0$, o que implica que M^n é uma hipersuperfície de $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$. Como $T_p\mathbb{H}_1^{n+1} = T_pM^n \oplus \operatorname{span}\{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\}$, $\forall\, p \in M^n$ (pois $\langle\nabla f, Y\rangle = 0$, $\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$), concluímos, ainda, que M^n é uma hipersuperfície tipo espaço.

Agora, considere a aplicação $y : M^n \subset \mathbb{H}_1^{n+1}(c) \to \mathbb{H}^n(c_1) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ definida por $y(x) = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Notando que y é bijetiva e $d_xy = I : T_xM^n \to T_{y(x)}\mathbb{H}^n$, concluímos que M^n é isométrica à $\mathbb{H}^n(c_1)$ e completa.

Como o campo normal a M^n é dado por

$$N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} = \frac{2\left(Z(x) - \frac{c}{c_1}x\right)}{\sqrt{-\frac{4}{c_1}\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)}} = \frac{c_1 Z(x) - cx}{\sqrt{c - c_1}},$$

canculando a diferencial de $N(x)$, concluímos facilmente que as curvaturas principais são todas iguais e dadas por $-\sqrt{c - c_1}$.

Portanto, para ambos os casos, M^n é totalmente umbílica com as curvaturas principais dadas por $-\sqrt{c - c_1}$.

Exemplo 3.20. Produto de espaços hiperbólicos: *Sejam* $1 \leq m \leq n-1$, $c_1 < 0$ *e* $c_2 < 0$ *com* $\dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2} = \dfrac{1}{c}$. *O subconjunto de* $\mathbb{H}_1^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$ *definido por*

$$M^n = \{x \in \mathbb{H}_1^{n+1}(c);\ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - x_{n+2}^2 = \frac{1}{c_1},\ \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = \frac{1}{c_2}\}$$

é uma hipersuperfície tipo espaço completa e isométrica ao produto de espaços hiperbólico $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2)$.

Mostremos inicialmente que M^n é uma hipersuperfície tipo espaço. Para isso, consideremos a função diferenciável $f : \mathbb{H}_1^{n+1}(c) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) =$

$x_{m+1}^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2$. Como $\dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2} = \dfrac{1}{c}$, temos que $M^n = f^{-1}(\frac{1}{c_2})$ e assim, basta mostrar que M^n é um conjunto de nível de $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$.

Pela definição de gradiente, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$, temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, X\rangle &= X(f) = 2x_{m+1}X_{m+1} + \ldots + 2x_nX_n - 2x_{n+1}X_{n+1}\\ &= \langle 2(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_{n+1},0),X)\rangle = \langle 2Z, X\rangle,\end{aligned}$$

onde $Z = (0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_{n+1},0)$. Fazendo $Z = \tilde{Z} + c\langle Z, x\rangle x$, com $\tilde{Z}$ a parte tangente a $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, e notando que $\langle Z(x), x\rangle = f(x)$, temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, X\rangle &= \langle 2Z, X\rangle = \langle 2\tilde{Z}, X\rangle = \langle 2(Z - c\langle Z, x\rangle x), X\rangle\\ &= \langle 2(Z - cf(x)x), X\rangle.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla f(x) = 2(Z(x) - \frac{c}{c_2}x), \ \ \forall x \in M^n.$$

Sendo $\langle Z(x), Z(x)\rangle = f(x)$, segue que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, \nabla f\rangle &= 4\left(\langle Z(x), Z(x)\rangle - \frac{2c}{c_2}\langle Z(x), x\rangle + \frac{c^2}{c_2^2}\langle x, x\rangle\right)\\ &= 4\left(\frac{1}{c_2} - \frac{2c}{c_2^2} + \frac{c}{c_2^2}\right) = \frac{4}{c_2}\left(1 - \frac{c}{c_2}\right).\end{aligned}$$

Como $\dfrac{c}{c_1} = 1 - \dfrac{c}{c_2}$, temos que

$$\langle \nabla f, \nabla f\rangle = \frac{4c}{c_2c_1} < 0.$$

Portanto, M^n é um conjunto de nível de $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$ e, consequentemente, uma hipersuperfície. Como $T_p\mathbb{H}_1^{n+1} = T_pM^n \oplus \mathrm{span}\{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\}$, $\forall\, p \in M^n$ (pois $\langle \nabla f, Y\rangle = 0$, $\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$), concluímos, ainda, que M^n é uma hipersuperfície tipo espaço.

Agora, considere a aplicação $y : M^n \subset \mathbb{H}_1^{n+1}(c) \to \mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2) \subset \mathbb{R}_1^{m+1} \times \mathbb{R}_1^{n-m+1}$ definida por $y(x) = (x_1,\ldots,x_m,x_{n+2},x_{m+1},\ldots,x_{n+1})$. Notando que y é bijetiva e $d_xy = I : T_xM^n \to T_{y(x)}(\mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^{n-m})$, concluímos que M^n é isométrica à $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2)$ e, assim, completa.

Como o campo normal a M^n é dado por

$$N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} = \frac{2(Z(x) - \frac{c}{c_2}x)}{\sqrt{-\frac{4c}{c_1c_2}}} = \sqrt{-c_1 - c_2}\, Z(x) - \frac{c}{c_2}\sqrt{-c_1 - c_2}\, x,$$

calculando a diferencial de $N(x)$, obtemos que M^n tem duas curvaturas principais dadas por

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = -\sqrt{c - c_1} \text{ e } \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = \sqrt{c - c_2}.$$

A partir da existência de exemplos de hipersuperfícies tipo espaço isoparamétricas, uma pergunta natural que surge, é: quem são as hipersuperfícies tipo espaço, completas e isoparamétricas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$? Uma resposta para esse problema, foi dada por L. Zhen-qi e X. Xian-Hua, em [7], classificando as hipersuperfícies com tais propriedades em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. Mais precisamente, eles apresentam o seguinte

Teorema 3.21. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço, completa e isoparamétrica em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$. Então, M^n tem, no máximo, duas curvaturas principais. Além disso, M é isométrica a uma das seguintes hipersuperfícies*

(i) Hipersuperfície totalmente umbílica

$$\mathbb{H}^n(-\operatorname{cossec}^2 t) = \{((\operatorname{sen} t)y, (\cos t)) \in \mathbb{R}_2^{n+2} | y \in \mathbb{H}^n(-1), \mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}\},$$

onde $t \in (0, \pi/2]$.

(ii) O produto de dois espaços hiperbólicos, $\mathbb{H}^m(-\sec^2 t)$ e $\mathbb{H}^{n-m}(-\operatorname{cossec}^2 t)$

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^m(-\sec^2 t) \times \mathbb{H}^{n-m}(-\operatorname{cossec}^2 t) = \{(x, y) \ &\in \ \mathbb{R}_1^{m+1} \times \mathbb{R}_1^{n-m+1} | \langle x, x\rangle = \\ &- \ \cos^2 t, \langle y, y\rangle = -\operatorname{sen}^2 t\},\end{aligned}$$

onde $0 < m < n$, $t \in (0, \pi/2)$, e $\mathbb{H}^m(-r^2)$ denota o espaço hiperbólico m-dimensional com curvatura seccional constante $-r^2$.

Demonstração. Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço isoparamétrica em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+2} | \langle x, x\rangle = -1\}$, onde $\langle ., .\rangle$ é a métrica definida por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+2}y_{n+2}, \tag{3.7}$$

para $x = (x_1, ..., x_{n+2})$, $y = (y_1, ..., y_{n+2})$ em $\mathbb{R}_2^{n+2}$.

No que se segue, adotaremos a seguinte notação para variação dos índices: $1 \leq i, j, k \leq n$. A imersão isométrica $x : M^n \to \mathbb{H}_1^{n+1}$ define uma função vetorial de M^n, com x como vetor posição. Assim, consideremos um referencial ortonormal local adaptado à imersão $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, e_{n+2} = x\}$ tal que e_{n+1} seja normal a M^n e $\{e_i\}$ seja um campo vetorial tangentes a M^n.

Reenumerando os índices dos campos, consideremos $\{e_0 = x, e_1, ..., e_n, e_{n+1}\}$, com e_{n+1} normal a M^n, consideremos também o co-referencial $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}\}$ associado ao referencial acima e $\{\omega_{ij}\}$ as formas de conexão. Supondo que o referencial tomado acima diagonaliza a segunda forma fundamental, temos que o endomorfismo de Weingarten satisfaz $Ae_i = \lambda_i e_i$, onde λ_i são as curvaturas principais. Temos, ainda,

$$\langle x, x\rangle = -1, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = -1. \tag{3.8}$$

Cada campo $e_i : U \to \mathbb{R}_2^{n+2}$ é uma aplicação diferenciável que induz uma forma diferencial vetorial $de_i : \mathbb{R}_2^{n+2} \to \mathbb{R}_2^{n+2}$. Daí, podemos escrever

$$dx = \sum_i \omega_i e_i, \tag{3.9}$$

$$de_i = \omega_i x + \sum_j \omega_{ij} e_j + \lambda_i \omega_i e_{n+1}, \tag{3.10}$$

$$de_{n+1} = \sum_i \lambda_i \omega_i e_i. \tag{3.11}$$

Note que $A = de_{n+1}$.

Diferenciando exteriormente as equações acima podemos deduzir as equações de estrutura de M^n

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \ \text{ e } \ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{3.12}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + (1 + \lambda_i \lambda_j)\omega_i \wedge \omega_j, \tag{3.13}$$

$$\lambda_i \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j = \sum_j \lambda_j \omega_{ij} \wedge \omega_j. \tag{3.14}$$

Para demonstrar que M^n tem no máximo duas curvaturas principais, consideremos dois casos:

(i) M totalmente umbílica

Se M é totalmente umbílica, temos que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda$. Seja $\{\xi_0, \xi_1 ..., \xi_{n+1}\}$ a base natural do espaço $\mathbb{R}_2^{n+2}$.

Se $\lambda = 0$, temos que $de_{n+1} = 0$ e, assim, e_{n+1} é um vetor tipo tempo constante. Desta forma a menos de isometrias, podemos considerar $e_{n+1} = \xi_{n+1} = (0, 0, ..., 1)$. Como $\langle x, e_{n+1}\rangle = 0$ e $\mathbb{R}_2^{n+2} = \mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^1$, temos que $M^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$, e

$$\langle x, x\rangle = -1 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -1.$$

Assim, $M^n \subset \mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{R}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_2^{n+2}$. Como M^n é completa, temos que $M^n = \mathbb{H}^n(-1)$. Isto prova o caso umbílica para $t = \pi/2$.

Se $\lambda \neq 0$, definimos o campo vetorial $c = x - \lambda^{-1} e_{n+1}$. Como

$$dc = dx - \lambda^{-1} de_{n+1} = \sum_i \omega_i e_i - \sum_i \omega_i e_i = 0,$$

$$\langle c, c\rangle = \langle x, x\rangle + \lambda^{-2}\langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = -(1 + \lambda^{-2}),$$

temos que c é um vetor tipo tempo constante com $\langle x, c\rangle = \langle x, x\rangle = -1$. Fazendo $\sec^2 t = (1 + \lambda^{-2})$, podemos fixar $c = (\sec t)\xi_{n+1}$, com $t \in (0, \pi/2)$. Desta forma, $x = (x_0, x_1, ..., x_n, \cos t) := (z, \cos t)$, onde $z \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ satisfazendo $\langle z, z\rangle = -\operatorname{sen}^2 t$. Assim, M^n é isométrica a $\mathbb{H}^n(-\operatorname{cossec}^2 t) = \{((\operatorname{sen} t)z, \cos t) \in \mathbb{R}_2^{n+2} |\, z \in \mathbb{H}^n(-1)\}$.

(ii) M^n não umbílica.

Suponhamos, inicialmente, que M tenha, no mínimo, duas curvaturas principais, e assumamos que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Como ω_{ij} são 1-formas e $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ é uma base local para o espaço dual, temos que existem funções diferenciáveis Γ_{ij}^k tais que $\omega_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \omega_k$. Definamos, para cada k, a aplicação $c_{ijk} : U \to \mathbb{R}$, dada por: $c_{ijk} = (\lambda_i - \lambda_j)\Gamma_{ij}^k$. Essas funções são diferenciáveis e satisfazem: $c_{ijk} = c_{jik} = c_{ikj}$. Ora, como $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, segue que

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k \omega_k = -\sum_k \Gamma_{ji}^k \omega_k.$$

Sendo $\{\omega_i\}$ linearmente independentes, temos que $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ji}^k$ e, consequentemente,

$c_{ijk} = c_{jik}$. De (3.14) e sendo $\omega_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \omega_k$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij} \wedge \omega_j \\ &= \sum_j (\lambda_i - \lambda_j) \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \omega_k \right) \wedge \omega_j \\ &= \sum_{j,k} (\lambda_i - \lambda_j) \Gamma_{ij}^k \omega_k \wedge \omega_j \\ &= \sum_{j,k} c_{ijk}\, \omega_k \wedge \omega_j = \sum_{j<k} (c_{ijk} - c_{ikj}) \omega_k \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

Assim, $c_{ijk} = c_{ikj}$. Daí,

$$c_{ijk} = (\lambda_i - \lambda_j)\Gamma_{ij}^k = \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)\Gamma_{ik}^j}_{c_{ikj}} = \underbrace{(\lambda_j - \lambda_k)\Gamma_{jk}^i}_{c_{jki}}. \tag{3.15}$$

Para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ fixado, denotemos por $[i] = \{k \in \{1, ..., n\} |\, \lambda_k = \lambda_i\}$ e $[i] \bigcup [j]$ por $[i, j]$. De (3.15), sempre que $\lambda_i \neq \lambda_j$ (que é possível, visto que M^n tem, no mínimo, duas curvaturas principais), temos

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad e \quad c_{ijk} = 0, \;\; \forall k \in [i, j]. \tag{3.16}$$

Com estas ferramentas, provaremos que M tem, no máximo, duas curvaturas principais. Suponha que M^n tem mais de duas curvaturas principais. Assim, para $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\omega_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \omega_k = \sum_{k \notin [i,j]} \Gamma_{ij}^k \omega_k = \sum_{k \notin [i,j]} \frac{c_{ijk}}{\lambda_i - \lambda_j} \omega_k. \tag{3.17}$$

Diferenciando exteriormente o primeiro membro de (3.17) e usando $\omega_{ij} = \sum_{k=1} \Gamma_{ij}^k \omega_k$, temos

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + (1 + \lambda_i \lambda_j)\omega_i \wedge \omega_j \\ &= \sum_{k,l,m} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{kj}^m \omega_l \wedge \omega_m + (1 + \lambda_i \lambda_j)\omega_i \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

Diferenciando exteriormente o segundo membro de (3.17) e usando as equações de estrutura de M^n, temos

$$\begin{aligned}
d\left(\sum_{k\notin[i,j]}\Gamma_{ij}^k\,\omega_k\right) &= \sum_{k\notin[i,j]} d\Gamma_{ij}^k\wedge\omega_k+\sum_{k\notin[i,j]}\Gamma_{ij}^k\,d\omega_k\\
&= \sum_{k\notin[i,j]} d\Gamma_{ij}^k\wedge\omega_k+\sum_{k\notin[i,j]}\Gamma_{ij}^k\left(\sum_l\omega_{kl}\wedge\omega_l\right)\\
&= \sum_{k\notin[i,j]} d\Gamma_{ij}^k\wedge\omega_k+\sum_{k\notin[i,j],\,l,m}\Gamma_{ij}^k\,\Gamma_{kl}^m\,\omega_m\wedge\omega_l.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{k,l,m}\Gamma_{ik}^l\,\Gamma_{kj}^m\,\omega_l\wedge\omega_m+(1+\lambda_i\lambda_j)\omega_i\wedge\omega_j=\sum_{k\notin[i,j]} d\Gamma_{ij}^k\wedge\omega_k+\sum_{k\notin[i,j],\,l,m}\Gamma_{ij}^k\,\Gamma_{kl}^m\,\omega_m\wedge\omega_l.$$

Comparando os coeficientes de $\omega_i\wedge\omega_j$ e usando (3.16) e (3.17)

$$\begin{aligned}
1+\lambda_i\lambda_j &= \sum_{k\notin[i,j]}\left(\Gamma_{ij}^k\,\Gamma_{kj}^i-\Gamma_{ij}^k\,\Gamma_{ki}^j\right)-\sum_{k\notin[i,j]}\left(\Gamma_{ik}^i\,\Gamma_{kj}^j-\Gamma_{ik}^j\,\Gamma_{kj}^i\right)\\
&= \sum_{k\notin[i,j]}\left(\Gamma_{ik}^j\,\Gamma_{kj}^i+\Gamma_{ij}^k\,\Gamma_{kj}^i-\Gamma_{ij}^k\,\Gamma_{ki}^j\right)\qquad(\Gamma_{ik}^i=\Gamma_{kj}^j=0)\\
&= \sum_{k\notin[i,j]}c_{ijk}^2\left(\frac{1}{(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda_k-\lambda_j)}+\frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_k-\lambda_j)}-\frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_k-\lambda_i)}\right)\\
&= \sum_{k\notin[i,j]}\frac{2c_{ijk}^2}{(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda_k-\lambda_j)}.
\end{aligned}$$

Se M^n tem mais de duas curvaturas principais, então pela suposição de $\lambda_1\leq\ldots\leq\lambda_n$, temos que λ_1 é a menor curvatura principal, e λ_n é a maior. Substituindo, se necessário, e_{n+1} por $-e_{n+1}$, podemos assumir que $\lambda_n>0$. Assim, da expressão acima temos

$$1+\lambda_1\lambda_n=\sum_{k\notin[1,n]}^n\frac{2c_{1nk}^2}{\underbrace{(\lambda_1-\lambda_k)}_{<0}\underbrace{(\lambda_k-\lambda_n)}_{<0}}\geq 0.$$

Seja λ_j a última curvatura principal menor do que λ_n e maior que λ_1 (que existe, pois estamos supondo M^n ter mais de duas curvaturas principais). Para λ_j, temos

$$1+\lambda_j\lambda_n=\sum_{k\notin[j,n]}^n\frac{2c_{jnk}^2}{\underbrace{(\lambda_j-\lambda_k)}_{>0}\underbrace{(\lambda_k-\lambda_n)}_{<0}}\leq 0.$$

Assim, $1+\lambda_j\lambda_n \le 0 \le 1+\lambda_1\lambda_n$ que implica $0<\lambda_n(\lambda_j-\lambda_1)=\lambda_n\lambda_j-\lambda_n\lambda_1\le 0$, e consequentemente $\lambda_n<0$, uma contradição. Logo, M^n tem no máximo duas curvaturas principais.

Desta forma, sejam λ e μ as duas curvaturas principais de M^n com multiplicidades m e $n-m$, respectivamente. Consideremos a seguinte notação sobre a variação dos índices:

$$1\le a,b,c,\ldots\le m \quad e \quad m+1\le\alpha,\beta,\gamma\le n.$$

Assim,

$$\lambda_1=\ldots=\lambda_m=\lambda, \qquad \lambda_{m+1}=\ldots=\lambda_n=\mu.$$

Consideremos, também, as distribuições D^1 e D^2 sobre M^n definidas pelas seguintes escolhas de subespaços em cada espaço tangente, em cada ponto de M^n

$$D^1_p=\{X\in T_pM|AX=\lambda X\} \;\; e \;\; D^2_p=\{Y\in T_pM|AY=\mu Y\},$$

onde A é endomorfismo de Weingarten.

Pelo Proposição 3.15 temos que as distribuições D^1 e D^2 são diferenciáveis e, pelo Teorema 3.16, que elas são completamente integráveis, garantindo a existência de variedades integrais M_1^m e M_2^{n-m} correspondentes às distribuições D^1 e D^2, passando por cada ponto de M^n. Como existem apenas duas curvaturas principais, temos de (3.16) que $\omega_{b\alpha}=0$, para todos b e α. Assim, podemos reescrever as equações (3.9)-(3.11), como:

$$dx = \sum_b \omega_b e_b + \sum_\alpha \omega_\alpha e_\alpha, \tag{3.18}$$

$$de_b = \omega_b\, x + \sum_c \omega_{bc}\, e_c + \lambda\omega_b\, e_{n+1}, \tag{3.19}$$

$$de_\alpha = \omega_\alpha\, x + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta}\, e_\beta + \mu\omega_\alpha\, e_{n+1}, \tag{3.20}$$

$$de_{n+1} = \lambda\sum_b \omega_b\, e_b + \mu\sum_\alpha \omega_\alpha\, e_\alpha. \tag{3.21}$$

Ainda de $\omega_{b\alpha} = 0$, temos de (3.13) que

$$\begin{aligned} 0 = d\omega_{b\alpha} &= \sum_k \omega_{bk} \wedge \omega_{k\alpha} + (1+\lambda\mu)\omega_b \wedge \omega_\alpha \\ &= 0 + (1+\lambda\mu)\omega_b \wedge \omega_\alpha \\ &= (1+\lambda\mu)\omega_b \wedge \omega_\alpha. \end{aligned}$$

Como $\omega_b \wedge \omega_\alpha$ é não nulo, temos que $\lambda\mu + 1 = 0$. Desta relação, podemos supor $\lambda = \tan t$ e $\mu = -\operatorname{cotg} t = \tan(t + \pi/2)$, com $t \in (0, \pi/2)$.

Considere o campo vetorial definido por

$$y = (\cos t)(x + \lambda e_{n+1}) = (\cos t)x + (\operatorname{sen} t)e_{n+1}. \tag{3.22}$$

Sendo $\langle y, y\rangle = -1$, temos que y é um campo vetorial tipo tempo unitário. Como $\lambda = \tan t$ e $\mu = -\operatorname{cotg} t$, obtemos das equações (3.18) e (3.21) que

$$\begin{aligned} dy &= (\cos t)dx + (\operatorname{sen} t)de_{n+1} \\ &= (\cos t)\left(\sum_b \omega_b\, e_b + \sum_\alpha \omega_\alpha\, e_\alpha\right) + (\operatorname{sen} t)\left(\lambda \sum_b \omega_b\, e_b + \mu \sum_i \omega_\alpha\, e_\alpha\right) \\ &= (\cos t + (\operatorname{sen} t)\lambda)\sum_b \omega_b\, e_b + \underbrace{(\cos t + (\operatorname{sen} t)\mu)}_{=0}\sum_\alpha \omega_\alpha\, e_\alpha \\ &= (\sec t)\sum_b \omega_b\, e_b. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Assim, y é uma campo vetorial constante ao longo de M_2^{n-m}. Além disso, segue de (3.19) que

$$\begin{aligned} de_b &= \omega_b\, x + \sum_c \omega_{bc}\, e_c + \lambda\, \omega_b\, e_{n+1} \\ &= \omega_b(x + \lambda e_{n+1}) + \sum_j \omega_{bc}\, e_c \\ &= (\sec t)\, \omega_b\, y + \sum_c \omega_{bc}\, e_c. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Logo, temos

$$d(e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_m \wedge y) = 0.$$

Consequentemente, $W_1 = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_m, y\}$ é um subespaço fixo de $\mathbb{R}_2^{n+2}$.

De modo análogo,

$$z = (\operatorname{sen} t)(x + \mu e_{n+1}) = (\operatorname{sen} t)x - (\cos t)e_{n+1}. \tag{3.25}$$

é um campo vetorial tipomtempo unitário e, como campo vetorial, é constante sobre M_1^m, visto que

$$dz = (\,\mathrm{cossec}\, t) \sum_\alpha \omega_\alpha\, e_\alpha. \tag{3.26}$$

Temos, também, que $W_2 = \mathrm{span}\{e_{m+1}, ..., e_{n+1}, z\}$ é um subespaço fixo de $\mathbb{R}_2^{n+2}$. Claramente W_1 é ortogonal a W_2 e assim, $\mathbb{R}_2^{n+2} = W_1 \oplus W_2$. Observando que W_1 e W_2 independem da vizinhança sobre M e do referencial $\{e_1, ..., e_n\}$, temos que W_1 e W_2 dependem apenas de M. Como $\langle y, y\rangle = -1$ e $\langle z, z\rangle = -1$, temos que W_1 e W_2 são subespaços de índice 1. Portanto, podemos fazer as identificações $W_1 \approx \mathbb{R}_1^{m+1}$ e $W_2 \approx \mathbb{R}_1^{n-m+1}$.

Combinando (3.22) e (3.25), temos

$$x = (\cos t) y + (\,\mathrm{sen} t) z : M^n \to \mathbb{R}_1^{m+1} \times \mathbb{R}_1^{n-m+1}. \tag{3.27}$$

Segue de (3.23) e (3.26) que x é uma imersão. Tomando qualquer campo vetorial X sobre M^n, podemos escrevê-lo como $X = X_1 + X_2$, onde $(A - \lambda I)X_1 = 0$ e $(A - \mu I)X_2 = 0$. Assim, $\omega_b(X_2) = 0$, $\omega_\alpha(X_1) = 0$, e de (3.23) e (3.26), temos

$$\begin{aligned} dx(X) &= (\cos t) dy(X) + (\,\mathrm{sen}\, t) dz(X) = \sum_b \omega_b(X_1 + X_2) e_b + \sum_\alpha \omega_\alpha(X_1 + X_2) e_\alpha \\ &= \sum_b \omega_b(X_1) e_b + \sum_\alpha \omega_\alpha(X_2) e_\alpha \\ &= X_1 + X_2. \end{aligned}$$

De modo que, $|dx(X)|^2 = |X_1|^2 + |X_2|^2 = |X|^2$. Logo, x é uma imersão isométrica. Sendo $\langle y, y\rangle = \langle z, z\rangle = -1$, temos que M^n é isométrica a um subconjunto aberto de $H^m(-\sec^2 t) \times H^{n-m}(-\,\mathrm{cossec}^2 t)$. Mas como M^n é completa temos $M = \mathbb{H}^m(-\sec^2 t) \times \mathbb{H}^{n-m}(-\,\mathrm{cossec}^2 t)$, o que finaliza a prova do teorema.

■

L. Zhen-qi e X. Xian-Hua, em [7], utilizando a mesma técnica, classificaram, as hipersuperfícies tipo espaço completas e isoparamétricas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Para a forma espacial $\mathbb{L}^{n+1}$, Nomizu, em [9], demonstrou que uma hipersuperfície tipo espaço em $\mathbb{L}^{n+1}$ possui, no máximo, duas curvaturas principais. Para uma caracterização de tais hipersupefícies, podemos citar N. Abe, N. Koike e S. Yamaguchi que, em [5], apresentam o seguinte

Teorema 3.22. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço completa em $\mathbb{L}^{n+1}$. Se M^n tem $\{\lambda\}$ ou $\{\lambda, \mu\}$ como o conjunto de suas curvaturas principais, com λ e μ constantes, então M^n é isométrica a umas das seguintes hipersuperfícies*

(i) Hipersuperfície umbílica

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1};\, x_{n+1} = 0\},$$

ou

$$\mathbb{H}^n(-r^2) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = -\frac{1}{r^2}\}.$$

(ii) O produto de um espaço Euclidiano m-dimensional $\mathbb{R}^m$, e um espaço hiperbólico (n-m)-dimensional $\mathbb{H}^{n-m}(-r^2)$

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^{n-m}(-r^2) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1};\, \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = -\frac{1}{r^2}\}.$$

Tomando um referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ que diagonaliza A, temos que as funções componentes da segunda forma fundamental $h = \sum_i h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j e_{n+1}$ de uma imersão $x : M^n \to \overline{M}_1^{n+1}$ de tipo espaço nesse referencial são dads por $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Logo, a curvatura média de M^n é dada por $nH = \sum_i \lambda_i$. Assim, a hipótese de M^n ser uma hipersuperfície isoparamétrica implica que a curvatura média H é constante. Concluímos, também que uma condição mais geral sobre as curvaturas principais é curvatura média ser constante.

Em 1988, T. Ishihara estudando subvariedades tipo espaço máximas ($H \equiv 0$) em variedades semi-Riemannianas de curvatura seccional constante, apresentou, em [4], os seguintes Teoremas

Teorema 3.23. *Seja M^n uma hipersuperfície ($n \geq 2$) completa, tipo espaço e máxima em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. Então, o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M^n satisfaz*

$$S \leq n.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,

$$M^n = \mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right) \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Teorema 3.24. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço completa imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ $(c \geq 0)$. Se M^n é máxima, então a imersão é totalmente geodésica e M^n tem curvatura constante e igual a c.*

Para as demonstrações destes resultados (e para resultados que serão apresentados no capítulo seguinte), faz-se uso do Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau encontrado em [10] e [16].

Lema 3.25 (Princípio do Máximo Generalizado)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormante. Seja F uma função C^2 que é limitada inferiormente sobre M. Então, existe uma sequência de pontos p_n em M tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} F(p_n) = \inf(F), \quad \lim_{n\to\infty} |\nabla F(p_n)| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta F(p_n) \geq 0.$$

Agora, passemos a demonstração dos Teoremas 3.23 e 3.24.

Demonstração.

Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço, máxima e completa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Considere um referencial ortonormal local adaptado $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ sobre um aberto $U \subset \overline{M}_1^{n+1}(c)$ e suponha que $\{e_1, ..., e_n\}$ diagonaliza o endomorfismo de Weingarten, isto é,

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Assim, $nH = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $S = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2$ e de (2.14), obtemos a equação de Gauss na forma

$$R_{ijkl} = -(1 + \lambda_i \lambda_j)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Como M^n é máxima, isto é, $H \equiv 0$, obtemos da Fórmula do tipo Simons (2.34) que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S &= |\nabla A|^2 + S^2 + cn(S - nH) - nHtr(A)^3 && (3.28)\\ &= |\nabla A|^2 + S^2 + cnS && (3.29)\\ &\geq S(S + cn) && (3.30) \end{aligned}$$

e, ainda, que as componentes do tensor curvatura de Ricci, são

$$R_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ c(n-1) + \lambda_i^2, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Daí, temos que $R_{ii} = c(n-1) + \lambda_i^2 \geq c(n-1)$, ou seja, a curvatura de Ricci é limitada inferiormente.

Definamos a função $F : M^n \to \mathbb{R}$, por $F(p) = \dfrac{1}{(S+a^2)^{1/2}}(p)$, com $a =$ cte. Sabemos que

(i) F é limitada inferiormente,

(ii) $F \in C^\infty(M^n)$ e

$$\nabla F = -\frac{1}{2(S+a^2)^{3/2}}\nabla S. \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \mathrm{div}\nabla F \\
&= \mathrm{div}(-\frac{1}{2(S+a^2)^{3/2}}\nabla S) \\
&= -\frac{\Delta S}{2(S+a^2)^{3/2}} - \frac{1}{2}\langle -\frac{3}{2(S+a^2)^{5/2}}\nabla S, \nabla S\rangle \\
&= -\frac{\Delta S}{2(S+a^2)^{3/2}} + \frac{3}{4(S+a^2)^{5/2}}|\nabla S|^2. \\
\Delta F &= -\frac{F^3}{2}\Delta S + \frac{3}{4}F^5|\nabla S|^2.
\end{aligned}$$

$$F\Delta F = -\frac{F^4}{2}\Delta S + \frac{3}{4}F^6|\nabla S|^2. \tag{3.32}$$

Assim, estamos nas condições do Lema 3.25 aplicado a função F. Então, existe uma sequência de pontos $p_n \in M$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} F(p_n) = \inf(F), \quad \lim_{n\to\infty} |\nabla F(p_n)| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta F(p_n) \geq 0.$$

Ou, equivalentemente, que para cada ε >0, existe $x \in M$ tal que

$$F(x) < \inf F + \varepsilon; \quad |\nabla F(x)| < \varepsilon; \quad \Delta F(x) > -\varepsilon.$$

Assim, de (3.31)

$$\frac{|\nabla S|^2}{4(S+a^2)^3} = \frac{F^6}{4}|\nabla S|^2 < \varepsilon.$$

Segue de (3.32), que

$$-\varepsilon(\inf F + \varepsilon) < -\frac{F^4}{2}\Delta S(x) + 3\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{F^4}{2}\Delta S < 3\varepsilon + \varepsilon(\inf F + \varepsilon),$$

e de (3.30), temos

$$\begin{aligned} F^4(x)(S(S+cn)) &\leq \frac{F^4}{2}\Delta S < 3\varepsilon + \varepsilon(\inf F + \varepsilon) \\ \frac{S}{(S+a^2)^2}(-cn - S) &\geq -3\varepsilon - \varepsilon(\inf F + \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que F tende para seu ínfimo e, portanto, S tende para seu supremo. Assim, concluimos, de (3.33), que S é limitada superiormente sobre M de tal forma que $S \leq -cn$.

Assim, se $c \geq 0$ temos que $S = 0$, o que implica que M^n é totalmente geodésica em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Isto, demonstra o Teorema 3.24.

Se $c < 0$, temos que $S \leq -cn$. Fazendo $c = -1$, temos $S \leq n$, como afirma o Teorema 3.23.

Suponha que ocorra a igualdade $S = n$. Temos assim, $\Delta S = 0$ e de (3.29) que $|\nabla A|^2 = 0$. Como $|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2$ (ver (2.33)), concluímos que $h_{ijk} = 0$, para todos $1 \leq i, j, k \leq n$.

Da fórmula (2.27), temos, para $i = j$ que

$$\sum_{k=1}^{n} h_{iik}\omega_k = d(h_{ii}) + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n} h_{ki}\omega_{ki}. \tag{3.34}$$

Como $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ e $h_{ijk} = 0$, para todos $1 \leq i, j, k \leq n$, segue

$$\begin{aligned} 0 &= d(\lambda_i\delta_{ii}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\delta_{ik}\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\delta_{ki}\omega_{ki} \\ &= d\lambda_i + \lambda_i\omega_{ii} + \lambda_i\omega_{ii}. \end{aligned}$$

Como $\omega_{ii} = 0$, segue que $d\lambda_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Assim, sendo M^n conexa, as curvaturas principais λ_i são todas constantes, e portanto M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica. Do Teorema 3.21, temos que M^n tem, no máximo, duas curvaturas principais.

Suponhamos agora que M^n seja umbílica, isto é, $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda$. De $H \equiv 0$, segue que $\lambda = 0$ e $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 0$, o que é absurdo, pois $S = n$. Assim, M^n tem exatamente duas curvaturas principais:

$$\lambda_1 = ... = \lambda_m = \lambda \;\text{ e }\; \lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = \mu, \quad \text{com} \;\; 1 \leq m \leq n-1.$$

Novamente do Teorema 3.21, concluímos que $M^n = \mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2)$. Para calcular as curvaturas c_1 e c_2, denotemos a variação dos índices por:

$$1 \leq a, b, c, \ldots \leq m, \quad m+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n, \quad 1 \leq i, j, k, \ldots \leq n.$$

Da equação de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= (-1-\lambda^2)(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}), \\ R_{\alpha\beta\gamma\sigma} &= (-1-\mu^2)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma}). \end{aligned}$$

Assim, as curvaturas de $\mathbb{H}^m(c_1)$ e $\mathbb{H}^{n-m}(c_2)$ são constantes e dadas, respectivamente, por $c_1 = -1-\lambda^2$ e $c_2 = -1-\mu^2$. Da fórmula (2.27), $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ e $h_{ijk} = 0$, para todos $1 \leq i, j, k \leq n$, temos, ainda

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=1}^{n} h_{b\alpha k}\omega_k &= d(h_{b\alpha}) + \sum_{k=1}^{n} h_{bk}\omega_{k\alpha} + \sum_{k=1}^{n} h_{k\alpha}\omega_{kb} \\ &= d(\lambda_b\delta_{b\alpha}) + \lambda\omega_{b\alpha} + \mu\alpha\omega_{\alpha b} \\ &= (\mu - \lambda)\omega_{b\alpha}. \end{aligned}$$

Como $\mu - \lambda \neq 0$, segue que $\omega_{b\alpha} = 0$, para todos $1 \leq b \leq m$ e $m+1 \leq \alpha \leq n$. Assim, da segunda equação de estrutura de M^n, (2.13), temos

$$\begin{aligned} 0 = d\omega_{b\alpha} &= \sum_{k=1}^{n} \omega_{bk} \wedge \omega_{k\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} R_{b\alpha kl}\omega_k \wedge \omega_l \\ &= 0 - R_{b\alpha b\alpha}\omega_b \wedge \omega_\alpha. \end{aligned}$$

Logo, $R_{b\alpha b\alpha} = 0$ e da equação de Gauss,

$$\begin{aligned} 0 = R_{b\alpha b\alpha} &= (-1-\lambda\mu)(\delta_{bb}\delta_{\alpha\alpha} - \delta_{b\alpha}\delta_{\alpha b}) \\ &= -1-\lambda\mu, \end{aligned}$$

obtemos que $1 + \lambda\mu = 0$. Usando esta relação na equação da curvatura média, $m\lambda + (n-m)\mu = nH = 0$, obtém-se $\lambda^2 = \frac{n-m}{m}$, $\mu^2 = \frac{m}{n-m}$ e, consequentemente, $c_1 = -\frac{n}{m}$ e $c_2 = -\frac{n}{n-m}$. Portanto,

$$M^n = \mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right) \qquad (1 \leq m \leq n-1).$$

Do Exemplo 3.20, sabemos $M^n = \mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right)$ é uma hipersuperfície tipo espaço completa com duas curvaturas princiapis λ e μ, onde

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \lambda = \sqrt{\frac{n-m}{m}} \quad e \quad \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = \mu = -\sqrt{\frac{m}{n-m}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} nH &= m\lambda + (n-m)\mu = m\sqrt{\frac{n-m}{m}} - (n-m)\sqrt{\frac{m}{n-m}} = 0, \\ S &= \sum_{i}^{n} \lambda_i^2 = m\left(\sqrt{\frac{n-m}{m}}\right)^2 + (n-m)\left(-\sqrt{\frac{m}{n-m}}\right)^2 = n, \end{aligned}$$

que prova a recíproca da segunda afirmação do Teorema (3.23).

■

As variedades produto possuindo um espaço hiperbólico $\mathbb{H}^m(-r^2)$ como uma das variedades são chamadas cilindros hiperbólicos. Os resultados acima inspiraram novas caracterizações de hipersuperfícies tipo espaço completas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ como cilindros hiperbólicos, que serão apresentados no próximo capítulo.

Capítulo 4

RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados de caracterização de hipersuperfícies tipo espaço, completas e de curvatura média constante (CMC) em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, como cilindros hiperbólicos, semelhantes aos apresentados no capítulo anterior. O objetivo principal é obter uma resposta para a conjectura de L. Cao e G. Wei apresentada no desenvolvimento deste capítulo.

Para a demonstração dos resultados, faremos uso do aporte teórico apresentado nos capítulos anteriores. Fixamos aqui, que toda hipersuperfície tipo espaço considerada será conexa.

4.1 Hipersuperfícies tipo espaço completas com CMC e duas curvarturas principais em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$

No estudo de hipersuperfícies tipo espaço completa com curvatura média constante e duas curvaturas principais distintas, o primeiro caso a ser considerado é quando ambas as curvaturas principais possuam multiplicidades maior do que 1. Nesta situação, temos o seguinte

Teorema 4.1. *Seja M^n $(n > 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço completa em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$ com curvatura média constante. Suponha que M^n tem duas curvaturas principais, λ e μ, com multiplicidades constantes m e $n-m$, respectivamente. Se $2 \leq m \leq n-2$, então M^n é isométrica a $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2)$, com c_1 e c_2*

constantes negativas.

Demonstração. Seja M^n uma hipersuperfície com curvatura média constante H e duas curvaturas principais, λ e μ. Tomemos um referencial ortonormal local $\{e_1, ..., e_n\}$ que diagonaliza o endomorfismo de Weingarten associado à segunda forma fundamental de M^n em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$, isto é, $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ (é importante observar que nas condições apresentados no enunciado, as funções λ_i são diferenciáveis). Reordenando, se necessário, os índices do referencial, podemos supor que $\lambda_1 = ... = \lambda_m = \lambda$ e $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = \mu$. Adotemos a seguinte convenção sobre a variação dos índices:

$$1 \leq i, j, k, \ldots \leq n; \quad 1 \leq a, b, c, \ldots \leq m; \quad \text{e} \quad m+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n.$$

Assim, $h_{ab} = \lambda \delta_{ab}$, $h_{a\alpha} = \lambda \delta_{a\alpha} = 0$ e $h_{\alpha\beta} = \mu \delta_{\alpha\beta}$.

Consideremos as distribuições D^1 e D^2 sobre M^n como definidas em (3.4)

$$D_p^1 = \{X \in T_pM^n | AX = \lambda X\} \quad \text{e} \quad D_p^2 = \{X \in T_pM^n | AX = \mu X\}.$$

Pelo Teorema 3.16, temos que essas distribuições são completamentes integráveis, garantindo a existência de variedades integrais em cada ponto $p \in M^n$ denotadas, respectivamente, por $M_1^m(p)$ e $M_2^{n-m}(p)$.

Como $2 \leq m \leq n-2$, temos $m \geq 2$ e $n - m \geq 2$ e, assim, do Teorema 3.16, λ e μ são constantes sobre cada variedade integral da distribuição correspondente, isto é,

$$e_b(\lambda) = 0 \quad e \quad e_\alpha(\mu) = 0. \tag{4.1}$$

($e_b(\lambda)$ e $e_\alpha(\mu)$ denotam as derivadas covariantes de λ e μ nas direções de e_b e e_α, respectivamente)

Sendo H constante e $nH = m\lambda + (n-m)\mu$ temos, para todo $1 \leq i \leq n$, que

$$m\, e_i(\lambda) + (n-m)\, e_i(\mu) \;\;=\;\; 0. \tag{4.2}$$

Como $e_\alpha(\mu) = 0$, segue de (4.2) que $e_\alpha(\lambda) = 0$. Logo, $d\lambda = \sum_i e_i(\lambda)\, \omega_i = 0$, implicando λ constante sobre o aberto de definição do referencial. Sendo M^n conexa, temos λ constante em M^n. Similarmente, como $e_b(\lambda) = 0$ obtemos, de

(4.2), que $e_b(\mu) = 0$ e, assim, μ é constante em M^n. Consequentemente, M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$. Desta forma, pelo Teorema 3.21, concluímos que M^n é isométrica a $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2)$, com c_1 e c_2 constantes negativas.

■

Observação 4.2. *A técnica utilizada na demonstração do Teorema 4.1, é aplicável independentemente do valor da curvatura c do espaço ambiente, assim obtêm-se resultados similares para os casos $c = 0$ e $c > 0$. Por exemplo, para o caso de $c = 0$, a conclusão da demonstração anterior se dá pelo Teorema 3.22, e temos o seguinte*

Teorema 4.3. *Seja M^n $(n > 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço completa em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média constante não nula. Suponha que M^n tem duas curvaturas principais, λ e μ, com multiplicidades constantes m e $n-m$, respectivamente. Se $2 \leq m \leq n-2$, então M^n é isométrica a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^{n-m}(c_1)$ ou $\mathbb{H}^m(c_2) \times \mathbb{R}^{n-m}$, com c_1 e c_2 constantes negativas.*

No Teorema 4.1, a hipótese $2 \leq m \leq n-2$ exclui o caso de uma hipersuperfície tipo espaço, completa, com curvatura média constante e duas curvaturas principais em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ possuir uma curvatura principal com multiplicidade $n-1$ em todo ponto. Esse caso foi estudado por L. Cao e G. Wei, apresentando uma solução para a situação particular $H \equiv 0$, e acrescentando a hipótese $\inf(\lambda-\mu)^2 > 0$ sobre as curvaturas principais λ e μ. Eles apresentaram, em [1], o seguinte

Teorema 4.4. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço completa máxima $(H \equiv 0)$ e com duas curvaturas principais, λ e μ, e com multiplicidades constantes em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. Se $\inf(\lambda-\mu)^2 > 0$, então M^n é isométrica à*

$$\mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right) \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Temos dois casos a considerar: $2 \leq m \leq n-2$ e $m = n-1$. O caso $2 \leq m \leq n-2$ segue do Teorema 4.1. Para demonstrar o caso $m = n-1$, estabelecemos os seguintes resultados:

Lema 4.5. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço máxima ($H \equiv 0$) em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. Se M^n tem duas curvaturas principais com multiplicidades constantes, então*

$$|\nabla S|^2 = \sum_{k=1}^{n}(e_k(S))^2 = \frac{4nS}{n+2}\sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2, \tag{4.3}$$

onde $e_k(S)$ denota a k-ésima derivada de S.

Demonstração. Consideremos dois casos.

(i) Caso $2 \leq m \leq n-2$

Na demonstração do Teorema 4.1, se $2 \leq m \leq n-2$, obtivemos que as duas curvaturas principais são constantes, isto é, $d\lambda = d\mu = 0$. Assim, tomando um referencial local tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, e estabelecendo a notação para a variação dos índices $1 \leq a, b, c, \ldots \leq m$ e $m+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n$, temos:

$$h_{ab} = \lambda_a \delta_{ab}, \quad h_{b\alpha} = \lambda_b \delta_{b\alpha} = 0 \ \ e \ \ h_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

Assim,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \quad \Rightarrow \quad \nabla S = 0.$$

Da fórmula (2.27) para a derivada covariante de h_{ij} e de $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$, temos que as derivadas de h_{ab} são

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= dh_{ab} + \sum_{k=1}^{n} h_{kb}\omega_{ka} + \sum_{k=1}^{n} h_{ak}\omega_{kb}, \\
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= d\lambda\delta_{ab} + \lambda\omega_{ba} + \lambda\omega_{ab}, \\
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= 0 \quad \Rightarrow h_{abk} = 0, \ \ \forall \ \ 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

Da equação de Codazzi (2.29), $h_{ijk} = h_{ikj}$, obtemos

$$h_{a\beta b} = h_{ab\beta} = 0.$$

Agora, para $h_{\alpha\beta}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} h_{\alpha\beta k}\omega_k &= dh_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{n} h_{k\beta}\omega_{k\alpha} + \sum_{k=1}^{n} h_{\alpha k}\omega_{k\beta}, \\
\sum_{k=1}^{n} h_{\alpha\beta k}\omega_k &= d\mu\delta_{\alpha\beta} + \mu\omega_{\beta\alpha} + \mu\omega_{\alpha\beta}, \\
\sum_{k=1}^{n} h_{\alpha\beta k}\omega_k &= 0 \quad \Rightarrow h_{\alpha\beta k} = 0, \quad \forall \;\; 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

Novamente da Equação de Codazzi, obtemos

$$h_{\alpha b\beta} = h_{\alpha\beta b} = 0.$$

Assim, $h_{ijk} = 0$, para todos $1 \leq i, j, k \leq n$ e, portanto, vale a igualdade (4.3).

(ii) Caso $m = n - 1$

Para $m = n - 1 \geq 2$, consideremos a seguinte notação: $1 \leq a, b, c, \ldots \leq n - 1$, com $\lambda_a = \lambda$ e $\lambda_n = \mu$. Definindo a distribuição $D_p = \{X \in T_pM^n | AX = \lambda X\}$ temos, do Teorema 3.16, que $e_a(\lambda) = 0$ (derivada covariante de λ na a-ésima direção) sobre a variedade integral correspondente. Como $H \equiv 0$, da equação da curvatura média, temos que

$$\mu = -(n-1)\lambda, \tag{4.4}$$

$$e_i(\mu) = -(n-1)e_i(\lambda). \tag{4.5}$$

Logo, $e_a(\mu) = 0$ e $e_n(\mu) = -(n-1)e_n(\lambda)$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= dh_{ab} + \sum_{k=1}^{n} h_{kb}\omega_{ka} + \sum_{k=1}^{n} h_{ak}\omega_{kb}, \\
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= d(\lambda\delta_{ab}) + \lambda\omega_{ba} + \lambda\omega_{ab}, \\
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= \delta_{ab}\sum_{k=1}^{n} e_i(\lambda)\omega_k.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$h_{abk} = \begin{cases} e_k(\lambda)\delta_{ab} = 0, & \text{se} \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ e_n(\lambda)\delta_{ab}, & \text{se} \qquad k = n \end{cases}. \tag{4.6}$$

De forma similar, obtemos:

$$h_{nnk} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ e_n(\mu), & \text{se} \quad k = n \end{cases}. \tag{4.7}$$

Utilizando (4.6), (4.7), e a Equação de Codazzi, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 &= \sum_{a,b,c} h_{abc}^2 + 3\sum_{a,b} h_{abn}^2 + 3\sum_{a} h_{nna}^2 + h_{nnn}^2 \\ &= 0 + 3\sum_{a,b} (e_n(\lambda)\delta_{ab})^2 + 0 + (e_n(\mu))^2 \\ &= 3\sum_{a=b} (e_n(\lambda))^2 + (e_n(\mu))^2. \end{aligned}$$

Como $1 \leq a \leq n-1$ e $e_n(\mu) = -(n-1)e_n(\lambda)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 &= 3(n-1)(e_n(\lambda))^2 + (n-1)^2(e_n(\lambda))^2 \\ &= (n-1)(n+2)(e_n(\lambda))^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por outro lado, de (4.4), temos

$$\begin{aligned} S &= (n-1)\lambda^2 + \mu^2 \\ &= (n-1)\lambda^2 + (n-1)^2\lambda^2 \\ &= n(n-1)\lambda^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Assim, $e_k(S) = 2n(n-1)\lambda e_k(\lambda)$. Como $e_a(\lambda) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (e_k(S))^2 &= (e_n(S))^2 \\ &= 4n^2(n-1)^2\lambda^2(e_n(\lambda))^2 \\ &= 4n(n-1)[n(n-1)\lambda^2](e_n(\lambda))^2 \qquad (4.10) \\ &= 4n(n-1)\, S\, (e_n(\lambda))^2. \qquad (4.11) \end{aligned}$$

Comparando as equações (4.8) e (4.11), encontramos

$$|\nabla S|^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_k(S))^2 = \frac{4nS}{n+2} \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 = \frac{4nS}{n+2} |\nabla A|^2.$$

■

Lema 4.6. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço completa máxima com duas curvaturas principais distintas, λ e μ, em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. Se λ e μ têm multiplicidades constantes $n-1$ e 1, respectivamente, e satisfazem $\inf(\lambda-\mu)^2 > 0$, então*

$$S \geq n. \tag{4.12}$$

Demonstração. Uma vez que $H \equiv 0$, temos da equação da curvatura média que

$$(n-1)\lambda + \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-\mu)^2 = n^2\lambda^2. \tag{4.13}$$

Como a situação em questão é similar à do Lema 4.5, vale (4.9), donde concluímos que

$$S = \frac{(n-1)}{n}(\lambda-\mu)^2.$$

Logo, sendo $\inf(\lambda-\mu)^2 > 0$, temos que $\inf S > 0$. Novamente usando o fato que $H \equiv 0$, temos que $R_{ii} = -(n-1) + \lambda^2 \geq -(n-1)$. Assim, estamos nas condições do Lema 3.25, e portanto, existe uma sequência de pontos (p_n) de M^n tais que

$$\lim_{n\to\infty} S(p_n) = \inf(S), \quad \lim_{n\to\infty} |\nabla S(p_n)| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta S(p_n) \geq 0. \tag{4.14}$$

Da Fórmula do tipo Simons (2.34) para $H \equiv 0$ e do Lema 4.5, a expressão para o Laplaciano de S torna-se

$$\frac{1}{2}\Delta S = \frac{(n+2)}{4nS}|\nabla S|^2 + S(S-n). \tag{4.15}$$

Aplicando (4.15) à sequência de pontos (p_n) e utilizando (4.14), temos

$$0 \leq \inf S(\inf S - n). \tag{4.16}$$

Como $\inf S > 0$, obtemos que $\inf S \geq n$ e, consequentemente, $S \geq n$.

■

Podemos agora apresentar a demonstração do Teorema 4.4.

Demonstração. Assumindo que M^n tem duas curvaturas principais λ e μ de multiplicidades m e $n-m$, respectivamente, temos:

(i) Caso 1: $2 \leq m \leq n-2$

Como $H \equiv 0$, o Teorema 3.21 garante que M^n é isométrica à

$$\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2).$$

As curvaturas c_1 e c_2 são determinadas pela equação de Gauss. Denotando a variação dos índices por $1 \leq a, b, c, \ldots \leq m$ e $m+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n$, consideremos os seguintes casos:

$$R_{abcd} = (-1-\lambda^2)(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}).$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = (-1-\mu^2)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma}).$$

Logo, $c_1 = -1-\lambda^2$ e $c_2 = -1-\mu^2$. Similarmente, como na demonstração do Teorema 3.23, obtemos a relação $\lambda\mu = -1$ que, juntamente com (4.13), implica que $\lambda^2 = \frac{n-m}{m}$, $\mu^2 = \frac{m}{n-m}$. Portanto, $c_1 = -\frac{n}{m}$ e $c_2 = -\frac{n}{n-m}$.

(ii) Caso 2: $m = n-1$

Sendo M^n máxima, temos do Teorema 3.23 que $S \leq n$. Se M^n tem duas curvaturas principais, do Lema 4.6, segue que $S \geq n$. Assim, $S = n$, ocorrendo a igualdade do Teorema 3.23. Logo, M^n é isométrica à

$$\mathbb{H}^1(-n) \times \mathbb{H}^{n-1}\left(-\frac{n}{n-1}\right) \quad (m = n-1).$$

Portanto, em ambos os casos, M^n é isométrica à

$$\mathbb{H}^m\left(-\frac{n}{m}\right) \times \mathbb{H}^{n-m}\left(-\frac{n}{n-m}\right) \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

$\blacksquare$

4.2 O problema proposto por L. F. Cao e G. Wei

Em [1], L. Cao e G. Wei propõem a seguinte

Conjectura: *"As únicas hipersuperfícies tipo espaço completas em* $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ *($c \leq 0$) (Variedade Lorentziana), com curvatura média constante e duas curvaturas principais* λ *e* μ*, com multiplicidades contantes, e satisfazendo* $\inf(\lambda-\mu)^2 > 0$

no caso de uma das curvaturas principais ter multiplicidade 1, são os cilindros hiperbólicos."

O caso em que a hipersuperfície tem curvatura média constante e duas curvaturas principais, ambas com multiplicidades maior do que 1, já se sabia ser verdade pelos Teoremas 4.1 e 4.3. Resta apenas o caso em que uma curvatura principal tem multiplicidade 1. A solução deste problema foi dada por B. Yang e X. Liu em [15], no seguinte

Teorema 4.7. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço completa com curvatura média constante H em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$. Suponha que M^n tem duas curvaturas principais λ e μ, com multiplicidades $n-1$ e 1, respectivamente, satisfazendo* $\inf(\lambda-\mu)^2 > 0$. *Então, M^n é isométrica a $\mathbb{H}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$.*

Para a demonstração deste teorema, foi conveniente introduzir a aplicação $\Phi = A - HI$, onde A é o endomorfismo de Weingarten, I denota a matriz identidade $n \times n$ e H a curvatura média de M^n. Esta aplicação tem traço zero, pois

$$\mathrm{tr}\Phi = \mathrm{tr}(A - HI) = \mathrm{tr}A - H\mathrm{tr}I = nH - nH = 0$$

e

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2 = S - nH^2. \tag{4.17}$$

No caso em que H é constante, essa aplicação é uma ferramenta muito útil para obter propriedades similares ao do caso da curvatura média $H \equiv 0$, pelo fato de seu traço ser zero.

Como A é diagonalizável, temos que Φ também o é. Assim, tomando um referencial $\{e_i\}$ que diagonaliza A, segue

$$\Phi e_i = \tilde{\lambda}_i e_i, \qquad \tilde{\lambda}_i = \lambda_i - H, \tag{4.18}$$

onde λ_i é um autovalor de A. Uma outra propriedade de Φ é a seguinte

Proposição 4.8. *A aplicação Φ satisfaz $|\Phi|^2 \geq 0$. A igualdade ocorre se, e somente se, M^n for totalmente umbílica.*

Demonstração. Escolhendo um referencial $\{e_i\}$ que diagonaliza Φ, temos

$$|\Phi|^2 = \mathrm{tr}\Phi^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi^2 e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi e_i, \Phi e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\Phi e_i|^2 \geq 0.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\lambda_i = H$ para todo i, isto é, M^n for umbílica em todo ponto, pois

$$\begin{aligned} 0 &= |\Phi|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\Phi e_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\lambda}_i e_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\lambda}_i)^2 \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - H)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = H. \end{aligned}$$

■

Com o auxílio dessa aplicação, temos algumas proposições, que são válidas em qualquer uma das formas espaciais $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ apresentadas no capítulo 1.

Proposição 4.9. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço com curvatura média constante em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Se M^n tem duas curvaturas principais λ e μ com multiplicidades $n-1$ e 1, respectivamente, então*

$$|\nabla \Phi|^2 = \frac{(n+2)}{n} |\nabla |\Phi||^2. \tag{4.19}$$

Demonstração. Seja $\Phi = A - HI$ definido em M^n como acima. Como H é constante e $\nabla I = 0$, temos

$$\nabla \Phi = \nabla A - \nabla(HI) = \nabla A$$

e daí,

$$|\nabla \Phi|^2 = |\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2.$$

Tomemos um referencial ortonormal local $\{e_1, ..., e_n\}$ tal que $\Phi e_i = \tilde{\lambda}_i e_i$, em que $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - H$, e estabeleçamos a seguinte notação para a variação dos índices: $1 \leq a, b, c, \ldots \leq n-1$, com $\lambda_a = \lambda$ e $\lambda_n = \mu$. Assim

$$\begin{aligned} \Phi e_a &= \tilde{\lambda} e_a \ \ (\tilde{\lambda}_a = \lambda - H), \\ \Phi e_n &= \tilde{\mu} e_n \ \ (\tilde{\mu} = \mu - H). \end{aligned}$$

Definindo a distribuição $D_p = \{X \in T_pM^n | AX = \lambda X\}$, temos do Teorema 3.16 que $e_a(\lambda) = 0$ (derivada de λ na a-ésima direção) sobre a variedade integral correspondente. Como H é constante, temos

$$\mu = -(n-1)\lambda + nH \qquad \Rightarrow \qquad e_i(\mu) = -(n-1)e_i(\lambda). \tag{4.20}$$

Dai, segue que $e_a(\mu) = 0$ e $e_n(\mu) = -(n-1)e_n(\lambda)$. Portanto, de (2.27) e de $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$, as derivadas covariantes de h_{ij} são dadas por

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= dh_{ab} + \sum_{k=1}^{n} h_{kb}\omega_{ka} + \sum_{k=1}^{n} h_{ak}\omega_{kb},\\
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= d\lambda\delta_{ab} + \lambda\omega_{ba} + \lambda\omega_{ab},\\
\sum_{k=1}^{n} h_{abk}\omega_k &= \delta_{ab}\sum_{k=1}^{n} e_i(\lambda)\omega_k.
\end{aligned}$$

$$h_{abk} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 1 \le k \le n-1 \\ e_n(\lambda)\delta_{ab}, & \text{se} \quad k = n \end{cases}. \tag{4.21}$$

De forma similar, obtemos

$$h_{nnk} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 1 \le k \le n-1 \\ e_n(\mu), & \text{se} \quad k = n \end{cases}. \tag{4.22}$$

Utilizando as equações de Codazzi, $h_{ijk} = h_{ikj} = h_{kij}$, segue de (4.21) e (4.37) que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k}^{n} h_{ijk}^2 &= \sum_{a,b,c} h_{abc}^2 + 3\sum_{a,b} h_{abn}^2 + 3\sum_{a} h_{ann}^2 + h_{nnn}^2\\
&= 0 + 3\sum_{a,b}(e_n(\lambda)\delta_{ab})^2 + 0 + (e_n(\mu))^2\\
&= 3\sum_{a} h_{aan}^2 + h_{nnn}^2\\
&= 3(n-1)(e_n(\lambda))^2 + (e_n(\mu))^2\\
&= 3(n-1)(e_n(\lambda))^2 + (n-1)^2(e_n(\lambda))^2\\
&= (n-1)(n+2)(e_n(\lambda))^2.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Sendo $\nabla\lambda = \sum_{i=1}^{n} e_i(\lambda)e_i = e_n(\lambda)e_n$, temos

$$|\nabla\Phi|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 = (n-1)(n+2)|\nabla\lambda|^2. \tag{4.24}$$

Por outro lado, como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ diagonaliza Φ, temos

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 = \mathrm{tr}\Phi^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi^2(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi(e_i), \Phi(e_i) \rangle \\ &= (n-1)\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\mu}^2. \end{aligned}$$

Como $(n-1)\tilde{\lambda} + \tilde{\mu} = \mathrm{tr}\Phi = 0$, segue

$$\tilde{\mu} = -(n-1)\tilde{\lambda}. \tag{4.25}$$

$$n\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} - \tilde{\mu} = \lambda - \mu. \tag{4.26}$$

Resulta de (4.25), que $|\Phi|^2 = n(n-1)\tilde{\lambda}^2$ e, de (4.26), que o sinal de $\tilde{\lambda}$ é o sinal de $(\lambda - \mu)$, que denotaremos por $\varepsilon = \mathrm{sgn}(\lambda - \mu)$. Daí,

$$\tilde{\lambda} = \varepsilon \frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{4.27}$$

Sendo $\tilde{\lambda} = \lambda - H$, com H constante, segue que $|\nabla\tilde{\lambda}|^2 = |\nabla\lambda|^2$. Assim, de (4.27) temos

$$|\nabla\lambda|^2 = \frac{|\nabla|\Phi||^2}{n(n-1)}. \tag{4.28}$$

De (4.24) e (4.28) segue que

$$|\nabla\Phi|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 = (n-1)(n+2)\frac{|\nabla|\Phi||^2}{n(n-1)}. \tag{4.29}$$

Portanto,

$$|\nabla\Phi|^2 = \frac{(n+2)}{n}|\nabla|\Phi||^2.$$

■

Proposição 4.10. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço com curvatura média constante em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Se M^n tem duas curvaturas principais λ e μ com multiplicidades $n-1$ e 1, respectivamente, então*

$$|\nabla A|^2 = \frac{(n+2)}{4n}\frac{|\nabla S|^2}{S - nH^2}. \tag{4.30}$$

Demonstração. Sendo $|\Phi|^2 = S - nH^2$, temos que $|\Phi| = \sqrt{S - nH^2}$. Assim,

$$\nabla|\Phi| = \frac{\nabla S}{2\sqrt{S - nH^2}} \quad \Rightarrow \quad |\nabla|\Phi||^2 = \frac{|\nabla S|^2}{4(S - nH^2)}. \tag{4.31}$$

Como $|\nabla\Phi|^2 = |\nabla A|^2$, segue de (4.19) e (4.31) que

$$|\nabla A|^2 = \frac{(n+2)}{4n}\frac{|\nabla S|^2}{(S-nH^2)}.$$

■

Observação 4.11. *Neste caso, $S - nH^2 \neq 0$, pois M^n não é totalmente umbílica.*

Utilizando as Proposições 4.9 e 4.10, temos a seguinte

Proposição 4.12. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço com curvatura média constante em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Se M^n tem duas curvaturas principais distintas λ e μ com multiplicidades $n-1$ e 1, respectivamente, então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S = \frac{(n+2)}{4n}\frac{|\nabla S|^2}{S-nH^2} &+ (S-nH^2)^2 + n(c-H^2)(S-nH^2)\\ &+ \varepsilon n(n-2)H(S-nH^2)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}},\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = \frac{(n+2)}{n}|\nabla|\Phi||^2 + |\Phi|^2 P_{H,\varepsilon}(|\Phi|), \tag{4.33}$$

onde $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\lambda-\mu)$ e $P_{H,\varepsilon}(x) = x^2 + \frac{\varepsilon n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}x + n(c-H^2)$.

Demonstração. Tomando um referencial $\{e_i\}$ que diagonaliza Φ, temos $\Phi e_i = \tilde{\lambda}_i e_i$, com $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - H$. Como M^n tem duas curvaturas principais λ e μ com multiplicidades $n-1$ e 1, respectivamente, estabeleçamos a notação

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda \quad \text{e} \quad \lambda_n = \mu.$$

Sendo $|\Phi|^2 = S - nH^2$ e $\tilde{\lambda} = \lambda - H$, temos de (4.27) que

$$\tilde{\lambda} = \varepsilon\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = H + \varepsilon\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}. \tag{4.34}$$

Como $(n-1)\lambda + \mu = nH$, segue que

$$\mu = H - \varepsilon(n-1)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}. \tag{4.35}$$

Sendo,

$$\operatorname{tr}A^3 = \sum_{i=1}^{n}\langle A^3(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \lambda_i^3 e_i, e_i\rangle = (n-1)\lambda^3 + \mu^3.$$

De (4.34) e (4.35), temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}A^3 &= (n-1)\left(H^3+3H^2\varepsilon\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}+3H\frac{S-nH^2}{n(n-1)}+\varepsilon\left(\frac{S-nH^2}{n(n-1)}\right)^{3/2}\right)+\\
&\quad +H^3-3H^2(n-1)\varepsilon\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}+3H(n-1)^2\frac{S-nH^2}{n(n-1)}-\\
&\quad -\varepsilon(n-1)^3\left(\frac{S-nH^2}{n(n-1)}\right)^{3/2}\\
&= nH^3+3H\frac{S-nH^2}{n}+\varepsilon\frac{S-nH^2}{n}\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}+\frac{3H(n-1)(S-nH^2)}{n}-\\
&\quad -\varepsilon(n-1)^2\frac{(S-nH^2)}{n}\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Fazendo as simplificações possíveis,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}A^3 &= nH^3+3H(S-nH^2)-\varepsilon((n-1)^2-1)\frac{(S-nH^2)}{n}\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}\\
&= nH^3+3H(S-nH^2)-\varepsilon(n-2)(S-nH^2)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Substituindo $\mathrm{tr}A^3$ na Fórmula do tipo Simons (2.34), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= |\nabla A|^2+S^2+nc(S-nH^2)-nH\mathrm{tr}A^3\\
&= |\nabla A|^2+S^2+nc(S-nH^2)-n^2H^4-3nH^2(S-nH^2)+\\
&\quad +\varepsilon nH(n-2)(S-nH^2)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}\\
&= |\nabla A|^2+S^2-2nH^2S+n^2H^4+nc(S-nH^2)+n^2H^4-nH^2S+\\
&\quad +n\varepsilon H(n-2)(S-nH^2)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}\\
&= |\nabla A|^2+(S-nH^2)^2-nH^2(S-nH^2)+nc(S-nH^2)+\\
&\quad +n\varepsilon H(n-2)(S-nH^2)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}\\
&= |\nabla A|^2+(S-nH^2)^2+(S-nH^2)(nc-nH^2)+\\
&\quad +n\varepsilon H(n-2)(S-nH^2)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Da Proposição 4.10 temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \frac{(n+2)}{4n}\frac{|\nabla S|^2}{S-nH^2}+(S-nH^2)^2+(S-nH^2)(nc-nH^2)+\\ &\quad +n\varepsilon H(n-2)(S-nH^2)\sqrt{\frac{S-nH^2}{n(n-1)}}. \qquad (4.36)\end{aligned}$$

Como $|\Phi|^2 = S - nH^2$ e H é constante, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &= \frac{1}{2}\Delta S \qquad \nabla|\Phi| = \frac{1}{2\sqrt{S-nH^2}}\nabla S\\ &= \frac{(n+2)}{n}|\nabla|\Phi||^2+|\Phi|^2\left(|\Phi|^2+\frac{\varepsilon n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|+n(c-H^2)\right)\\ &= \frac{(n+2)}{n}|\nabla|\Phi||^2+|\Phi|^2(P_{\varepsilon,H}(|\Phi|)),\end{aligned}$$

onde $P_{H,\varepsilon}(x) = x^2 + \dfrac{\varepsilon n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}x + n(c-H^2)$.

■

Agora, estamos em condições de apresentar a demonstração do Teorema 4.7.

Demonstração. Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço completa com curvatura média constante H em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$ $(c < 0)$. Tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ que diagonaliza o endomorfismo de Weingarten associado à segunda forma fundamental de M^n, isto é, $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, temos que as componentes do tensor curvatura de Ricci (2.18), se escrevem como

$$R_{ij} = c(n-1)\delta_{ij} - nH\lambda_i\delta_{ij} + \sum_k \lambda_i\delta_{ik}\lambda_k\delta_{kj}.$$

Assim,

$$R_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \ i \neq j \\ c(n-1) - nH\lambda_i + \lambda_i^2, & \text{se } \ i = j \end{cases}. \qquad (4.37)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}R_{ii} &= c(n-1) + \lambda_i^2 - nH\lambda_i + \left(\frac{n^2H^2}{4} - \frac{n^2H^2}{4}\right)\\ &= c(n-1) + \left(\lambda_i - \frac{nH}{2}\right)^2 - \frac{n^2H^2}{4}\\ &\geq c(n-1) - \frac{n^2H^2}{4}.\end{aligned}$$

Logo, como H é constante, temos que M^n tem curvatura de Ricci limitada inferiormente.

Seja $F : M^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(p) = |\Phi|^2(p) = (S - nH^2)(p)$. Notemos que F é uma função infinitamente diferenciável, visto que S e H são diferenciáveis, e limitada inferiormente. Para provar esta última afirmação utilizemos novamente a notação

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda \quad \text{e} \quad \lambda_n = \mu.$$

Assim, de (4.34) e (4.35), temos que

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= H + \varepsilon\sqrt{\frac{S - nH^2}{n(n-1)}} - H + \varepsilon(n-1)\sqrt{\frac{S - nH^2}{n(n-1)}} = \varepsilon n\sqrt{\frac{S - nH^2}{n(n-1)}}. \\ (\lambda - \mu)^2 &= \frac{n(S - nH^2)}{n-1} \quad \Rightarrow \quad |\Phi|^2 = \frac{(n-1)}{n}(\lambda - \mu)^2. \end{aligned}$$

Como $\inf(\lambda - \mu)^2 > 0$ em M^n, temos que existe $\delta > 0$ tal que $(\lambda - \mu)^2 \geq \delta > 0$. Daí,

$$F(p) = \frac{(n-1)}{n}(\lambda - \mu)^2 \geq \frac{(n-1)}{n}\delta > 0.$$

Logo, F é limitada inferiormente com ínfimo estritamente positivo.

Estamos nas condições do Lema 3.25, o qual garante a existência de uma sequência de pontos (p_n) em M^n tal que

$$\lim_{n\to\infty} F(p_n) = \inf F, \qquad \lim_{n\to\infty} |\nabla F|(p_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta F(p_n) \geq 0. \tag{4.38}$$

Como $|\Phi|^2 = S - nH^2$ e H é constante, temos que $\nabla F = \nabla|\Phi|^2 = \nabla S$ e $\Delta F = \Delta|\Phi|^2 = \Delta S$. Temos, ainda, que

$$\begin{aligned} \nabla|\Phi| &= \frac{1}{2\sqrt{S - nH^2}}\nabla S. \\ |\nabla|\Phi|| &= \frac{|\nabla S|}{2(\sqrt{S - nH^2})} = \frac{|\nabla F|}{2\sqrt{F}}. \end{aligned}$$

Logo, aplicando a equação acima à sequência de pontos (p_n) e, utilizando (4.38) e o fato do ínfimo de F ser estritamente positivo, temos que

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla|\Phi|| = 0.$$

Assim, aplicando a equação (4.33) à mesma sequência, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &= \frac{(n+2)}{n}|\nabla|\Phi||^2 + |\Phi|^2 P_{H,\varepsilon}(|\Phi|) \\ 0 &\leq \alpha^2\left(\alpha^2 + \frac{\varepsilon n(n-2)H\alpha}{\sqrt{n(n-1)}} + n(c - H^2)\right) = \alpha^2 P_{H,\varepsilon}(\alpha), \end{aligned} \tag{4.39}$$

onde $\alpha = \inf |\Phi|$ sobre M.

Defina agora a função $G : M^n \to \mathbb{R}$ por

$$G(p) = \frac{1}{(|\Phi|^2 + a^2)^{1/2}}(p),$$

onde a é uma constante. Como F, G também é uma função infinitamente diferenciável e limitada inferiormente. Utilizando as propriedades dos operadores diferenciais, temos

$$\begin{aligned}
\nabla G &= -\frac{1}{2(|\Phi|^2 + a^2)^{3/2}}\nabla|\Phi|^2 = -\frac{|\Phi|}{(|\Phi|^2 + a^2)^{3/2}}\nabla|\Phi|. && (4.40)\\
\Delta G &= \mathrm{div}\nabla G\\
&= -\frac{\Delta|\Phi|^2}{2(|\Phi|^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{3}{4}\frac{|\nabla|\Phi|^2|^2}{(|\Phi|^2 + a^2)^{5/2}}\\
&= -\frac{\Delta|\Phi|^2}{2(|\Phi|^2 + a^2)^{3/2}} + 3\frac{|\Phi|^2|\nabla|\Phi||^2}{(|\Phi|^2 + a^2)^{5/2}}. && (4.41)
\end{aligned}$$

Das expressões acima, obtemos

$$\begin{aligned}
G\Delta G - 3|\nabla G|^2 &= \frac{1}{(|\Phi|^2 + a^2)^{1/2}}\left(-\frac{\Delta|\Phi|^2}{2(|\Phi|^2 + a^2)^{3/2}} + 3\frac{|\Phi|^2|\nabla|\Phi||^2}{(|\Phi|^2 + a^2)^{5/2}}\right) -\\
&\quad - 3\frac{|\Phi|^2|\nabla|\Phi||^2}{(|\Phi|^2 + a^2)^{3}}\\
&= -\frac{\Delta|\Phi|^2}{2(|\Phi|^2 + a^2)^{2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(|\Phi|^2 + a^2)^{1/2}}\right)^4\Delta|\Phi|^2\\
&= -\frac{G^4}{2}\Delta|\Phi|^2.
\end{aligned}$$

Daí

$$3|\nabla G|^2 - G\Delta G = \frac{G^4}{2}\Delta|\Phi|^2. \tag{4.42}$$

Aplicando o Lema 3.25 a função G, temos que existe uma sequência de pontos (q_n) em M tal que

$$\lim_{n\to\infty} G(q_n) = \inf G, \qquad \lim_{n\to\infty} |\nabla G|(q_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta G(q_n) \geq 0. \tag{4.43}$$

Aplicando a equação (4.42) à sequência de pontos (q_n)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G^4}{2}\Delta|\Phi|^2\right) &= \lim_{n\to\infty}\big(3|\nabla G|^2 - G\Delta G\big)\\
\frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} G(q_n))^4 \lim_{n\to\infty}\Delta|\Phi|^2(q_n) &\leq -(\lim_{n\to\infty} G(q_n))\lim_{n\to\infty}\Delta G(q_n),
\end{aligned}$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \Delta|\Phi|^2(q_n) \ \leq \ 0. \tag{4.44}$$

Notando que

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\nabla G|(q_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|\Phi||\nabla|\Phi||}{(|\Phi|^2 + a^2)^{3/2}} \right)(q_n) \tag{4.45}$$

e que G tem ínfimo, obtemos que $|\Phi|$ tem supremo, $\inf G = \beta > 0$ e, consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla|\Phi|| = 0. \tag{4.46}$$

Assim, da equação (4.33)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &= \frac{(n+2)}{n}|\nabla|\Phi||^2 + |\Phi|^2 P_{H,\varepsilon}(|\Phi|) \\ 0 &\geq \gamma^2 \left(\gamma^2 + \frac{\varepsilon n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}\gamma + n(c - H^2) \right) = \gamma^2 P_{H,\varepsilon}(\gamma), \end{aligned} \tag{4.47}$$

onde $\gamma = \sup|\Phi|$ sobre M.

Consideremos agora a seguinte equação polinomial

$$x^2 + \frac{\varepsilon n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}x + n(c - H^2) = P_{H,\varepsilon}(x) = 0. \tag{4.48}$$

Note que, se $c < 0$ o discriminante da equação acima será

$$\triangle = \frac{n^2(n-2)^2H^2}{n(n-1)} - 4n(c - H^2) > 0. \tag{4.49}$$

Logo, a equação (4.48) tem duas raízes distintas x_ε^- e x_ε^+, dadas por

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^\pm &= \frac{-\frac{\varepsilon n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}} \pm \sqrt{\frac{n^2(n-2)^2H^2 - 4n^2(n-1)(c-H^2)}{n(n-1)}}}{2}, \\ x_\varepsilon^\pm &= \frac{-\varepsilon n(n-2)H \pm n\sqrt{n^2H^2 - 4c(n-1)}}{2\sqrt{n(n-1)}} \end{aligned} \tag{4.50}$$

e satisfazendo

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^- + x_\varepsilon^+ &= -\frac{\varepsilon n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}, \\ x_\varepsilon^- x_\varepsilon^+ &= n(c - H^2) < 0. \end{aligned}$$

Assim, as raízes da equação (4.48) têm sinais opostos. Seja $x_\varepsilon^+ > 0$. Estudando o sinal do polinômio $P_{H,\varepsilon}$ encontramos que as soluções para as desigualdades em (4.39) e (4.47) são

$$\alpha \geq \frac{-\varepsilon n(n-2)H + n\sqrt{n^2H^2 - 4c(n-1)}}{2\sqrt{n(n-1)}} \tag{4.51}$$

e

$$0 \leq \gamma \leq \frac{-\varepsilon n(n-2)H + n\sqrt{n^2H^2 - 4c(n-1)}}{2\sqrt{n(n-1)}}. \tag{4.52}$$

Como $\alpha = \inf|\Phi|$ e $\gamma = \sup|\Phi|$ sobre M, segue que

$$|\Phi| = \alpha = \gamma = \frac{-\varepsilon n(n-2)H + n\sqrt{n^2H^2 - 4c(n-1)}}{2\sqrt{n(n-1)}} \tag{4.53}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= \frac{n^2(n-2)^2H^2 - 2\varepsilon n^2(n-2)\sqrt{n^2H^2 - 4c(n-1)} + n^2(n^2H^2 - 4c(n-1))}{4n(n-1)} \\ |\Phi|^2 &= -cn + \frac{n^3H^2 - \varepsilon n(n-2)H\sqrt{n^2H^2 - 4c(n-1)}}{2(n-1)} - nH^2. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Sendo $|\Phi|^2 = S - nH^2$, temos

$$S = -cn + \frac{n^3H^2 - \varepsilon n(n-2)H\sqrt{n^2H^2 - 4c(n-1)}}{2(n-1)}. \tag{4.55}$$

Logo, $|\Phi|$ é raiz da equação (4.48) e, portanto, constante. De (4.34) e (4.35),

$$\begin{aligned} \lambda &= H + \varepsilon\frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}}, \\ \mu &= H - \varepsilon\frac{(n-1)|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}} \end{aligned}$$

temos que λ e μ são constantes. Desta forma, M^n é uma hipersuperfície tipo espaço isoparamétrica em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$. Portanto, pelo Teorema 3.21, temos que M^n é isométrica à $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$, o que prova o teorema.

■

É importante observar que o método utilizado na demonstração acima, necessitou de $c < 0$ para garantir que a equação (4.48) tivesse solução. Contudo, fazendo $c = 0$ e $H \neq 0$, temos que a equação (4.48) ainda tem duas soluções e, assim, o método é aplicável. A condição $H \neq 0$ é natural ser exigida quando a hipersuperfície tem duas curvaturas principais, pois se $H = 0$ em $\mathbb{L}^{n+1}$, temos do Teorema 3.24 que M^n é totalmente geodésica de curvatura $c = 0$ e, consequentemente, uma hipersuperfície totalmente umbílica e isométrica à $\mathbb{R}^n$.

Portanto, para $c = 0$, uma hipersuperfície M^n tipo espaço completa com curvatura média constante $H \neq 0$ nas demais condições será também isoparamétrica e, pelo Teorema 3.22 temos que M^n é isométrica à $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(c_1)$ ou $\mathbb{H}^1(c_2) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Desta forma, temos o seguinte

Teorema 4.13. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície tipo espaço completa com curvatura média constante $H \neq 0$ em $\mathbb{L}^{n+1}$. Suponha que M^n tem duas curvaturas principais λ e μ com multiplicidades $n-1$ e 1, respectivamente, satisfazendo $\inf(\lambda - \mu)^2 > 0$. Então, M^n é isométrica à $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(c_1)$ ou $\mathbb{H}^1(c_2) \times \mathbb{R}^{n-1}$, com c_1 e c_2 constantes negativas.*

Com os teoremas apresentados neste capítulo, temos uma resposta positiva para a conjectura de L. Cao e G. Wei.

REFERÊNCIAS

[1] CAO, L. F; WEI, G. X. A new characterization of hyperbolic cylinder in anti-de Sitter space $H_1^{n+1}(-1)$. *J. Math Anal Appl.*, v. 329 n. 1: p. 408-414, 2007.

[2] DO CARMO, M. P. *Geometria riemanniana.* 3°. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005 (Projeto Euclides).

[3] DO CARMO, M. P. *Método do referencial móvel.* Rio de Janeiro: IMPA, 1976. (III Escola Latino-Americana de Matemática).

[4] ISHIHARA, T. Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space form of constant curvature. *Michigan Math. J.*, v. 35, p. 345-352, 1988

[5] ABE, K.; KOIKE, N.; YAMAGUCHI, S. Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form. *Yokohama Math. J.*, v. 35, p. 123-136, 1987.

[6] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds.* New York: Springer, 2003.

[7] LI, Z. Q.; XEI, X. H. Spacelike isoparametric hypersurfaces in Lorentzian space forms. *Front Math China*, v. 1, n. 1, p. 130-137, 2006.

[8] NOMIZU, K. Characteristic roots and vectors of a Differentiable Family of Symmetric Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 1, n. 2, p. 159-162, 1973.

[9] NOMIZU, K. On isoparametric hypersufaces in the Lorentzian space forms. *Jpn. J. Math. (N.S.)*, v. 7, n. 1, p. 217-226, 1981.

[10] OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *J. Math Soc. Japan*, v. 19, p. 205-214, 1967.

[11] O'NEILL, B. *Semi-riemannian geometry with Applications to Relativity.* New York: Academic Press, 1983.

[12] OTSUKI, T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature. *Amer. J. Math.*, v. 92, p. 145-173, 1970.

[13] RYAN, P. J. Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces. *Tôhoku Math. J.*, v. 21, p. 363-388, 1969.

[14] SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann of Math.*,v. 88, n. 2, p. 62-105, 1968.

[15] YANG, B.; LIU, X. Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in anti-de Sitter space. *Frontiers of mathematics in China*, v. 4, n. 4, p. 727-737, 2005.

[16] YAU, S. T. Harmonic function on complete Riemannian manifolds. *Comm Pure Appl Math.*, v. 28, p. 201-228, 1975.