



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

VINÍCIUS DE OLIVEIRA PRADO

MERGULHOS BI-LIPSCHITZ DE CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS

FORTALEZA

2023

VINÍCIUS DE OLIVEIRA PRADO

MERGULHOS BI-LIPSCHITZ DE CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P921m Prado, Vinícius de Oliveira.

Mergulhos bi-Lipschitz de conjuntos semialgébricos / Vinícius de Oliveira Prado. – 2023.
53 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes.

1. Mergulho bi-Lipschitz. 2. Conjuntos semialgébricos. 3. Extensões de aplicações. I. Título.

CDD 510

VINÍCIUS DE OLIVEIRA PRADO

MERGULHOS BI-LIPSCHITZ DE CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 23 de Maio de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel
Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Edson Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Zbigniew Jelonek
Institute of Mathematics of the Polish Academy of
Sciences (IMPAN)/Universidade Federal do Ceará
(UFC)

À toda minha família, por terem acreditado em
minha capacidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Jucileuda de Oliveira e Rogério Prado, que me deram todo o apoio necessário para eu chegar até aqui e respeitaram todas as minhas escolhas.

Ao Professor Alexandre César, pela excelente orientação e por sempre ter me auxiliado desde a graduação. Também agradeço pelas conversas fora do âmbito matemático, já que minha natureza faladora não me permitia ir embora das reuniões sem falar aleatoriedades antes.

À todos os membros da banca, Alexandre Fernandes, Edson Sampaio e Zbigniew Jelonek, que se disponibilizaram a revisar este trabalho.

Aos meus colegas do mestrado Lucas Pimentel, Matheus Mendes, Nalbert Pietro, Luciano Gauss, Karen Sabrina e Bianca Campos, que não me abandonaram nem nos momentos mais difíceis que passei durante toda a pós-graduação, principalmente no final. Peço desculpas pelos nomes que eu esqueci.

Aos professores do Departamento de Matemática com os quais tive aula. Independente de reclamações durante as cadeiras, foram essas experiências que ajudaram no meu amadurecimento tanto pessoal quanto matemático.

Ao Professor Antonio Caminha, tanto pela experiência que me foi dada no estágio à docência quanto por ter sido um professor que se importa com o bem estar dos estudantes, me ajudando e aconselhando bastante em algumas conversas mesmo depois do estágio.

Aos meus amigos Lucas de Gois e Felipe Carvalhedo, que, apesar do tempo e da distância, sempre se mantiveram ao meu lado e me apoiaram.

Ao Prof. Dr. Tobias Rafael Fernandes Neto, coordenador do Laboratório de Sistemas Motrizes (LAMOTRIZ) onde este *template* foi desenvolvido.

“Ostras felizes não fazem pérolas. Pessoas felizes não sentem a necessidade de criar. O ato criador, seja na ciência ou na arte, surge sempre de uma dor. Não é preciso que seja uma dor doída. Por vezes a dor aparece como aquela coceira que tem o nome de curiosidade”

(ALVES, 2008)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o mergulho de um conjunto semialg\u00e9brico fechado em \mathbb{R}^n em um espa\u00e7o euclidiano de dimens\u00e3o menor. No caso, vemos que se o conjunto tem dimens\u00e3o k , ent\u00e3o \u00e9 poss\u00edvel mergulh\u00e1-lo de maneira bi-Lipschitz em \mathbb{R}^{2k+1} . Ap\u00f3s isso utilizamos esse fato para mostrar que \u00e9 poss\u00edvel, dadas certas condi\u00e7\u00f5es, estender uma aplica\u00e7\u00e3o bi-Lipschitz definida em um semialg\u00e9brico fechado para todo o espa\u00e7o.

Palavras-chave: mergulho bi-Lipschitz; conjuntos semialg\u00e9bricos; extens\u00f5es de aplica\u00e7\u00f5es.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the fact that a closed semialgebraic set with dimension k in \mathbb{R}^n can be embedded in \mathbb{R}^{2k+1} in a bi-Lipschitz way. After that, using this fact, we show that is possible, under certain conditions, to extend a bi-Lipschitz application to the whole space.

Keywords: bi-Lipchitz embedding; semialgebraic sets; extension.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Símbolo do infinito.	13
Figura 2 – Zig zag infinito	14
Figura 3 – Um conjunto semialgébrico do \mathbb{R}^2 segundo a decomposição cilíndrica.	20
Figura 4 – $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x - y^2) = 0\}$	21
Figura 5 – Decomposição de X segundo o Teorema 2.3.1.	21
Figura 6 – Estratificação de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x - y^2) = 0\}$ segundo o Teorema 2.3.2	23
Figura 7 – Três semialgébricos de dimensão 1 que se intersectam em $0 \in \mathbb{R}^2$	28
Figura 8 – Cone com vértice na origem.	34
Figura 9 – "Corneta" com vértice na origem.	34
Figura 10 – Conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ onde as curvas em pret estão contidas num plano e as curvas azul e vermelha partem e chega no plano de maneira transversal.	49
Figura 11 – Duas possibilidades de mergulho no \mathbb{R}^2	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PASSOS PRELIMINARES	12
2.1	Propriedades básicas dos semialgêbricos	12
2.2	Funções semialgêbricas	16
2.3	Decomposições de um conjunto semialgêbrico	19
2.4	Um pouco de Teoria do Contato Lipschitz	24
3	MERGULHOS DE VARIEDADES BI-LIPSCHITZ	29
3.1	Conjuntos semialgêbricos x Variedades bi-Lipschitz	29
3.2	Existência do mergulho bi-Lipschitz para variedades bi-Lipschitz	37
4	TEOREMAS DE MERGULHO BI-LIPSCHITZ	40
4.1	Mergulhos bi-Lipschitz	40
4.2	Projeções como mergulhos bi-Lipschitz	43
5	RESULTADOS	48
5.1	Existência do mergulho bi-Lipschitz	48
5.2	Extensões de aplicações bi-Lipschitz	50
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

Resultados de mergulho em \mathbb{R}^n na matemática são aqueles que, dado uma classe de conjuntos e uma regularidade definida para uma aplicação, assertam o quão bem é possível mergulhar, com tal regularidade, tais conjuntos em espaços euclidianos com base apenas na sua dimensão. O teorema mais conhecido desse meio foi provado por Hassler Whitney, em 1936 ele mostrou que qualquer variedade suave de dimensão k pode ser mergulhada de maneira suave em \mathbb{R}^{2k+1} . Após alguns anos, em 1944, Whitney conseguiu melhorar seu resultado e mostrou que qualquer variedade suave de dimensão k pode ser mergulhada de maneira suave em \mathbb{R}^{2k} , as demonstrações da versão inicial e final do Teorema podem ser encontradas em [6] e [12] respectivamente. Saindo da classe suave e indo para a classe topológica, Karl Menger e Georg Nöbeling demonstraram que qualquer espaço topológico compacto e metrizável de dimensão k pode ser mergulhado topologicamente em \mathbb{R}^{2k+1} . Em [9] pode ser visto uma demonstração de tal fato. Por fim, se aproximando do foco deste trabalho, em [7] pode ser visto uma prova de que qualquer variedade bi-Lipschitz de dimensão k pode ser mergulhada de maneira bi-Lipschitz em \mathbb{R}^{k^2+k} .

Nos primeiros exemplos dados acima, a dimensão do espaço euclidiano em que conseguíamos mergulhar os conjuntos eram do tipo $2k$ ou $2k + 1$, mas no contexto bi-Lipschitz ainda não se sabe se o mesmo é possível, o mergulho por enquanto ainda é “ruim” e é necessário uma dimensão muito grande do espaço para que o conjunto possa ser mergulhado. Entretanto, com uma certa interseção na classe de conjuntos, Lev Birbrair, Alexandre Fernandes e Zbigniew Jelonek provaram em [3] que qualquer conjunto semialgébrico fechado de dimensão k pode ser mergulhado de maneira bi-Lipschitz em \mathbb{R}^{2k+1} , e este é o foco deste trabalho.

No primeiro capítulo são introduzidos, com algumas demonstrações omitidas, conceitos e resultados importantes acerca dos conjuntos semialgébricos. Dentre esses se destacam os Teoremas 2.3.1 e 2.3.2, por serem o necessário para que se possa definir a dimensão de um conjunto semialgébrico. Também será visto bem superficialmente duas propriedades sobre contato Lipschitz entre conjuntos semialgébricos de dimensão 1, estas servirão para um exemplo futuro de que o mergulho em \mathbb{R}^{2k+1} é o melhor que se pode obter considerando inclusive o caso $k = 1$.

No segundo capítulo, são abordados alguns conceitos sobre aplicações bi-Lipschitz. Ao fim do capítulo são provados os Lemas 4.2.1 e 4.2.2, que são a base para os resultados principais mostrados no próximo capítulo.

No terceiro capítulo, iniciamos provando o resultado de mergulho principal do trabalho, que garante a existência de um mergulho bi-Lipschitz de qualquer semialgébrico fechado de dimensão k em \mathbb{R}^{2k+1} . Após isso, utilizamos este e outros fatos para garantir que se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação bi-Lipschitz entre semialgébricos fechados de \mathbb{R}^n com mesma dimensão k , então é possível estender a aplicação para todo o \mathbb{R}^n caso $n \geq 4k + 2$.

2 PASSOS PRELIMINARES

Este capítulo é dedicado a apresentar algumas definições básicas e propriedades fundamentais dos conjuntos semialgêbricos. Após isso, será possível enunciar os resultados necessários para a abordagem dos problemas principais. Vale ressaltar que alguns resultados terão suas demonstrações omitidas por serem muito extensas ou por se distanciarem do objetivo principal do trabalho.

2.1 Propriedades básicas dos semialgêbricos

As demonstrações omitidas nesta seção podem ser encontradas em [4].

Definição 2.1.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito semialgêbrico se pode ser escrito como o conjunto dos pontos que satisfazem uma combinação booleana de igualdades e desigualdades de polinômios com coeficientes reais. Ou seja, uma combinação finita de e's e ou's.*

Em outras palavras, X é semialgêbrico se é uma união finita de conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0 \wedge Q_1(x) > 0 \wedge \cdots \wedge Q_k(x) > 0\}$$

onde $P(x), Q_1(x), \dots, Q_k(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0 \wedge Q_1(x) > 0 \wedge \cdots \wedge Q_k(x) > 0\}$ descritos acima serão chamados de semialgêbricos básicos. Visto que o complementar do semialgêbrico básico dado acima é o conjunto

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) < 0 \wedge P > 0 \wedge Q_1(x) = 0 \wedge Q_1 < 0 \wedge \cdots \wedge Q_k(x) < 0 \wedge Q_k = 0\} \\ & = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\sum_{i=1}^k Q_i^2(x) \right) = 0 \wedge P(x) > 0 \wedge -P(x) > 0 \wedge -Q_1(x) > 0 \wedge \cdots \wedge -Q_k(x) > 0 \right\} \end{aligned}$$

que é um semialgêbrico básico. Também notando que o complementar de uma união finita de conjuntos é a interseção dos seus respectivos complementares e que a interseção de finitos semialgêbricos básicos ainda é semialgêbrico desde que a interseção pode ser interpretada como um e, fica claro que o complementar de um conjunto semialgêbrico ainda é um conjunto semialgêbrico. Mais precisamente, temos a seguinte propriedade:

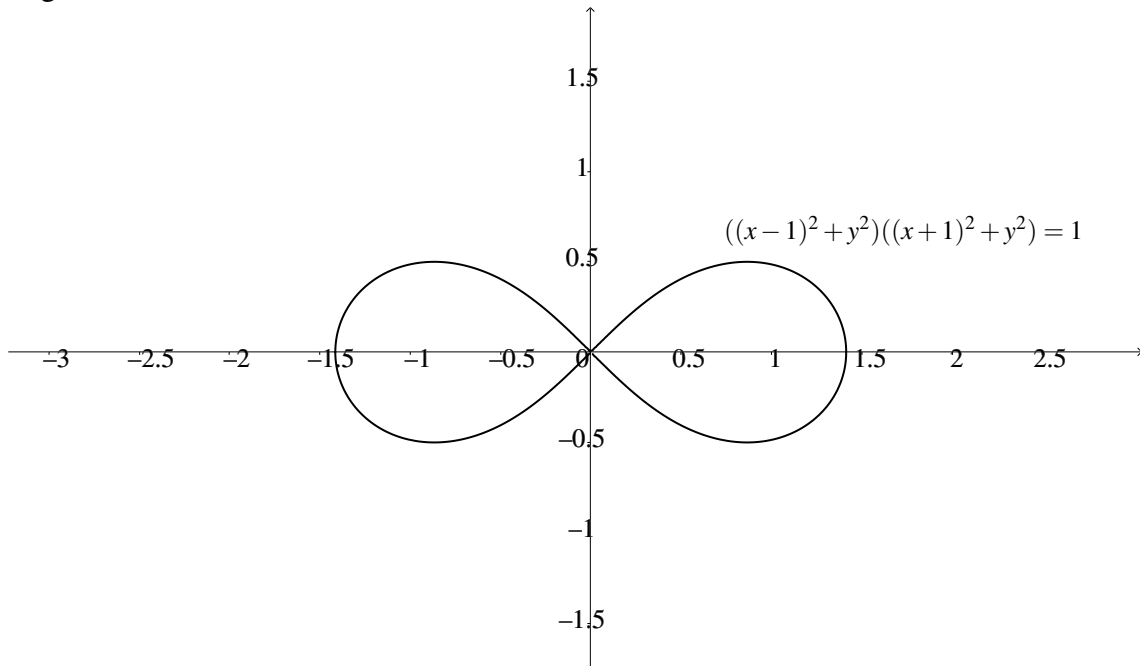
Proposição 2.1.1. *A coleção de conjuntos semialgêbricos de \mathbb{R}^n é a menor coleção que contém os conjuntos da forma*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \geq 0\}$$

onde $P(x)$ é um polinômio e é fechada para uniões finitas, interseções finitas e complementares.

Exemplo 2.1.1. Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = 1\}$ o conjunto dos pontos tais que o produto de suas distâncias para os pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$ é 1. Tal conjunto é um exemplo básico de semialgébrico, seu formato é o símbolo do infinito, como pode ser visto abaixo

Figura 1 – Símbolo do infinito.



Fonte: elaborada pelo autor

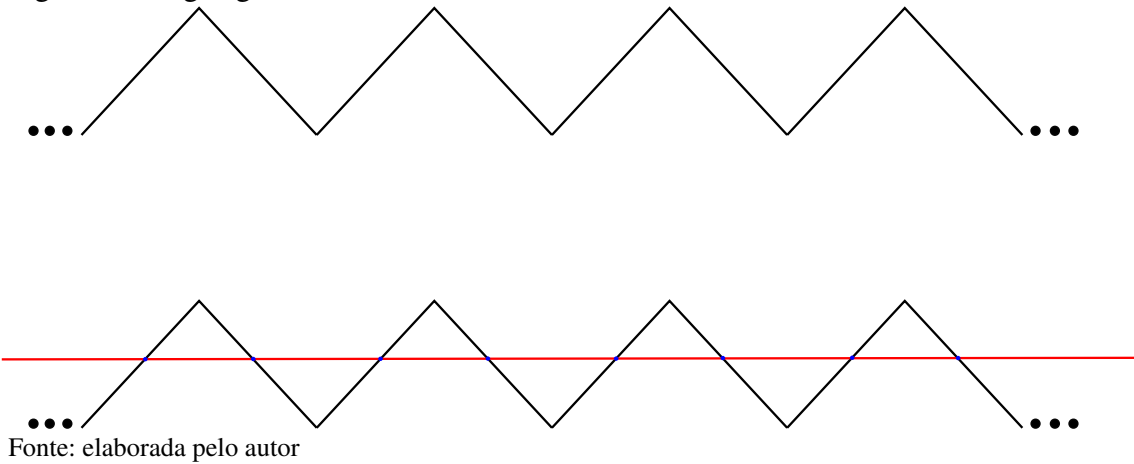
Notemos que nem sempre os conjuntos semialgébricos precisam ter uma estrutura “suave” como pode ser visto na origem do conjunto X acima.

Exemplo 2.1.2. Como consequência imediata do Teorema Fundamental da Álgebra, todo semialgébrico em \mathbb{R} é dado por união finita de pontos e intervalos abertos.

Exemplo 2.1.3. Já sabemos que interseção de dois conjuntos semialgébricos ainda é semialgébrico. Mas em particular, se $L \subset \mathbb{R}^n$ é uma reta e $X \subset \mathbb{R}^n$ é um semialgébrico qualquer, $L \cap X$ deve satisfazer a mesma propriedade do item anterior, ou seja, $L \cap X$ é união de finitos pontos e intervalos abertos em L .

Exemplo 2.1.4. O conjunto X dado abaixo não é semialgébrico, pois sua interseção com alguma reta horizontal é composto por infinitos pontos.

Figura 2 – Zig zag infinito



Exemplo 2.1.5. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são semialgêbricos, então $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é também semialgêbrico.

Agora, será enunciado, primeiro em sua forma geométrica, um Teorema crucial na identificação de conjuntos semialgêbricos. Após isso, traduziremos a essência do Teorema para uma linguagem lógica e, dessa forma, teremos uma descrição simples de como representar tal tipo de conjunto.

Teorema 2.1.1 (Tarski-Seidenberg - versão geométrica). Seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto semialgêbrico e $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção nas n primeiras coordenadas. Então $\pi(X) \subset \mathbb{R}^n$ é semialgêbrico.

Corolário 2.1.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto semialgêbrico e $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção nas n primeiras coordenadas. Então $\pi(X) \subset \mathbb{R}^n$ é semialgêbrico.

Demonstração. Para cada $i = 1, 2, \dots, p$, seja $\pi_i: \mathbb{R}^{n+i} \rightarrow \mathbb{R}^{n+i-1}$ a projeção nas $n+i-1$ primeiras coordenadas. Pelo Teorema 2.1.1, tem-se que $\pi_p(X) \subset \mathbb{R}^{n+p-1}$ é semialgêbrico. Ora, aplicando novamente o Teorema 2.1.1, tem-se $\pi_{p-1}(\pi_p(X)) \subset \mathbb{R}^{n+p-2}$ é semialgêbrico. Repetindo o processo indutivamente um total de p vezes, tem-se que $\pi_1(\pi_2(\dots(\pi_p(X)))) \subset \mathbb{R}^n$ é semialgêbrico. Portanto, notando que $\pi(X) = \pi_1(\pi_2(\dots(\pi_p(X))))$, concluímos o resultado. \square

Em alguns casos, é trabalhoso escrever conjuntos semialgêbricos como sua forma básica com polinômios ou utilizando projeções de semialgêbricos já conhecidos. Dessa forma, uma linguagem lógica vem para facilitar o processo. De fato, não é difícil ver que interseções, uniões e projeções podem ser traduzidas como operadores lógicos simples, dando luz ao que chamamos de *fórmulas de primeira ordem*.

Definição 2.1.2. *Uma fórmula de primeira ordem é uma fórmula obtida pelas seguintes regras:*

- 1 Se $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, então $P > 0$ e $P = 0$ são fórmulas de primeira ordem
- 2 Se φ e ψ são fórmulas de primeira ordem, então " φ e ψ " (" $\varphi \wedge \psi$ "), " φ ou ψ " (" $\varphi \vee \psi$ ") e " $\text{não } \varphi$ " (" $\neg \varphi$ ") são fórmulas de primeira ordem.
- 3 Se φ é uma fórmula de primeira ordem e x é uma variável em \mathbb{R} , então $\exists x \varphi$ e $\forall x \varphi$ são fórmulas de primeira ordem.

Teorema 2.1.2 (Tarski-Seidenberg - versão lógica). *Se $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ é uma fórmula de primeira ordem, então o conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$ é semialgébico.*

Demonstração. Ora, é claro que a regra 1 nos dá um conjunto semialgébico, a regra 2 faz uniões, interseções e complementares de conjuntos formados pela regra 1, que ainda se enquadram na definição de semialgébico.

Para a regra 3, basta notar que $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists x_{n+1} \varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\}$ é a projeção do conjunto $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : \varphi(x_1, \dots, x_{n+1})\}$ nas n primeiras coordenadas. Além disso, $\forall x_{n+1} \varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) \equiv \neg \exists x_{n+1} \neg \varphi(x_1, \dots, x_{n+1})$. Desse modo, conjuntos formados pela regra 3 nada mais são que projeções e complementares de conjuntos formados pela regra 2. \square

Note que implicações entre duas fórmulas de primeira ordem também são aceitas na definição de um conjunto semialgébico, pois $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$.

Exemplo 2.1.6. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébico, então \bar{X} também é semialgébico, pois*

$$\bar{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon \left(\exists y \in X \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right) \right) \right\}$$

Exemplo 2.1.7. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébico, então seu interior X° também é semialgébico, pois*

$$X^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon \left(\forall y \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow y \in X \right) \right) \right\}$$

De outro modo, pode-se notar que $X^\circ = (\bar{X}^c)^c$.

Exemplo 2.1.8. *O conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists n \in \mathbb{N} y = nx\}$ não é semialgébico, mesmo tendo a estrutura semelhante a de uma fórmula de primeira ordem. A pequena diferença aqui é que o quantificador não está em \mathbb{R} , e sim em \mathbb{N} . Dessa maneira, note que X é a união de todas as retas que passam pela origem e tem inclinação natural, se traçarmos a reta $y = 1 - x$ por exemplo, sua interseção com X são infinitos pontos da forma $(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1})$, assertando assim que X não é semialgébico.*

2.2 Funções semialgébricas

Definição 2.2.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ semialgébricos, uma função $f: X \rightarrow Y$ é dita semialgébrica se seu gráfico $\Gamma_f = \{(x, y) \in A \times B: y = f(x)\}$ é um conjunto semialgébrico de \mathbb{R}^{m+n} .*

Exemplo 2.2.1. *Seja $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $P(x) = (P_1(x), \dots, P_m(x))$ onde, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, P_i são polinômios em n variáveis. Então P é uma função semialgébrica, pois $\Gamma_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m: P(x) - y = 0\}$ e $P(x) - y$ é um polinômio. Em particular, se A é uma aplicação linear, é claro que A é polinomial, logo semialgébrica.*

Exemplo 2.2.2. *Mais geralmente, se $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ semialgébricos e $P: X \rightarrow Y$ é uma função racional, ou seja, suas funções coordenadas são quocientes de polinômios onde os denominadores não se anulam em X , temos que P é função semialgébrica, pois a fórmula $\frac{Q}{R} > 0$ equivale à $(Q > 0 \wedge R > 0) \vee (Q < 0 \wedge R < 0)$ e a fórmula $\frac{Q}{R} = 0$ equivale à $P = 0$.*

Pelo mesmo motivo, podemos concluir que quociente de funções semialgébricas é ainda semialgébrico contanto que a função do denominador não se anule.

Exemplo 2.2.3. *Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é semialgébrica, então $|f|$ e $\sqrt{|f|}$ são semialgébricas.*

Agora, vamos explorar algumas propriedades importantes das funções semialgébricas.

Proposição 2.2.1. *Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função semialgébrica, $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos semialgébricos. Então $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$ são conjuntos semialgébricos.*

Demonstração. É fácil ver que

$$f(X) = \pi_2(\{\Gamma_f \cap X \times \mathbb{R}^n\}) \text{ e } f^{-1}(Y) = \pi_1(\{\Gamma_f \cap \mathbb{R}^m \times Y\})$$

onde π_1 e π_2 são as projeções nas m primeiras e nas n últimas coordenadas respectivamente. Assim, pelo Teorema 2.1.1, obtemos o resultado. \square

Proposição 2.2.2. *Seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função semialgébrica e sejam, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ suas funções coordenadas. Então todas as f_i são também semialgébricas.*

Demonstração. Seja Γ o gráfico de f e, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, seja Γ_i o gráfico de f_i . Tem-se que

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \{(x, y_i) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : y_i = f_i(x)\} \\ &= \pi_i(\{(x, y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) = f(x)\}) \\ &= \pi_i(\Gamma)\end{aligned}$$

onde $\pi_i: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ é a projeção nas m primeiras e na $m+i$ -ésima coordenadas. \square

Proposição 2.2.3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função semialgébrica e limitada. Então f possui todos os limites laterais onde fazem sentido serem definidos.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos mostrar que, onde faz sentido, os limites laterais à direita existem. Seja $a \in \bar{I}$ tal que $(a, a + \varepsilon) \subset I$, afirmo que o limite lateral em a pela direita de cada função coordenada de f existe, e daí o limite lateral de f em a pela direita também existe. De fato, se $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, então pela Proposição 2.2.2, cada $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ é semialgébrica e limitada. O limite $\lim_{x \rightarrow a^+} f_i(x)$ não existir significa que f_i cresce ou decresce ilimitadamente ao se aproximar de a pela direita ou então oscila infinitamente ao se aproximar de a pela direita. Nenhum dos casos pode ocorrer, o primeiro pois f_i é limitada e o segundo pois caso ocorresse, seria possível encontrar uma reta que cruza o gráfico de f_i em infinitos pontos, o que gera um absurdo já que o gráfico de f_i é semialgébrico. \square

Proposição 2.2.4. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ semialgébrico, $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ função semialgébrica e seja $\sigma \in \{=, >, <\}$, então o conjunto*

$$\{x \in X : P(f(x)) \sigma 0\}$$

é semialgébrico. Em particular, podemos substituir polinômios na definição de semialgébrico por funções semialgébricas, ou seja, combinações booleanas de igualdades e desigualdades de funções semialgébricas são conjuntos semialgébricos.

Demonstração. A propriedade segue diretamente da igualdade abaixo

$$\{x \in X : P(f(x)) \sigma 0\} = f^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^n : P(y) \sigma 0\})$$

que é claramente semialgébrico, pois é pré-imagem de um conjunto semialgébrico por uma função semialgébrica.

Além disso, se tomarmos $P(y) = y$, temos que

$$\{x \in X : P(f(x)) \sigma 0\} = \{x \in X : f(x) \sigma 0\}$$

Portanto, fica concluído que combinações booleanas de igualdades e desigualdades de funções semialgébricas é um conjunto semialgébrico. \square

Proposição 2.2.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^p$ semialgébricos e sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ funções semialgébricas. Então $g \circ f: X \rightarrow Z$ é uma função semialgébrica.*

Demonstração. Note que o gráfico de $g \circ f$: pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Gamma_{g \circ f} &= \pi(\{(x, z, y) \in X \times Z \times Y : g(y) - z = 0 \wedge f(x) - y = 0\}) \\ &= \pi(\{(x, z, y) \in X \times Z \times Y : z = g(y)\} \cap \{(x, z, y) \in X \times Z \times Y : y = f(x)\}) \end{aligned}$$

onde π é a projeção nas $m + p$ primeiras coordenadas. Tal conjunto é semialgébrico, pois, a menos de reordenação dos pares ordenados, os conjuntos que estão sendo aplicados em π são cartesianos dos gráficos das funções f e g com outro conjunto semialgébrico. \square

Definição 2.2.2. *Uma função $f: X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo semialgébrico se é bijetiva, contínua, semialgébrica e sua inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ é contínua.*

Note que não precisamos exigir na definição que a inversa de f seja semialgébrica para que f seja um homeomorfismo semialgébrico, afinal, vale que:

Proposição 2.2.6. *Se $f: X \rightarrow Y$ é semialgébrica e bijetiva, então f^{-1} também é semialgébrica.*

Demonstração. Ora, basta notar que vale a igualdade abaixo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{f^{-1}} &= \{(x, y) \in Y \times X : y = f^{-1}(x)\} \\ &= \{(x, y) \in Y \times X : x = f(y)\} \end{aligned}$$

que, a menos de troca da ordem dos pares ordenados, é próprio gráfico de f , que é um conjunto semialgébrico. \square

2.3 Decomposições de um conjunto semialgébrico

Nesta seção, serão dados dois resultados fundamentais sobre a estrutura de um conjunto semialgébrico, que deles derivam diversas propriedades importantes sobre tais conjuntos. Contudo, as demonstrações dos dois resultados necessitam de algumas definições e resultados a mais e são bastante extensas, e como os pontos principais deste trabalho utilizam apenas as consequências desses resultados, suas demonstrações serão omitidas, podendo elas serem encontradas em [1].

Definição 2.3.1. *Dadas duas funções $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f < g$, a faixa entre f e g é o conjunto $(f, g) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}: f(x) < t < g(x)\}$.*

Claramente, se f e g são funções semialgébricas, (f, g) é um conjunto semialgébrico.

Definição 2.3.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e \mathcal{P} uma partição de \mathbb{R}^n , dizemos que \mathcal{P} é compatível com X se para todo $P \in \mathcal{P}$, $P \cap X = \emptyset$ ou $P \cap X = P$.*

Agora, vamos enunciar o Teorema da Decomposição Cilíndrica, que garante existir uma maneira de escrever qualquer conjunto semialgébrico como união de finitas componentes conexas e semialgébricas. Sua demonstração detalhada pode ser encontrada em [1], sendo este o Teorema 2.2.1.

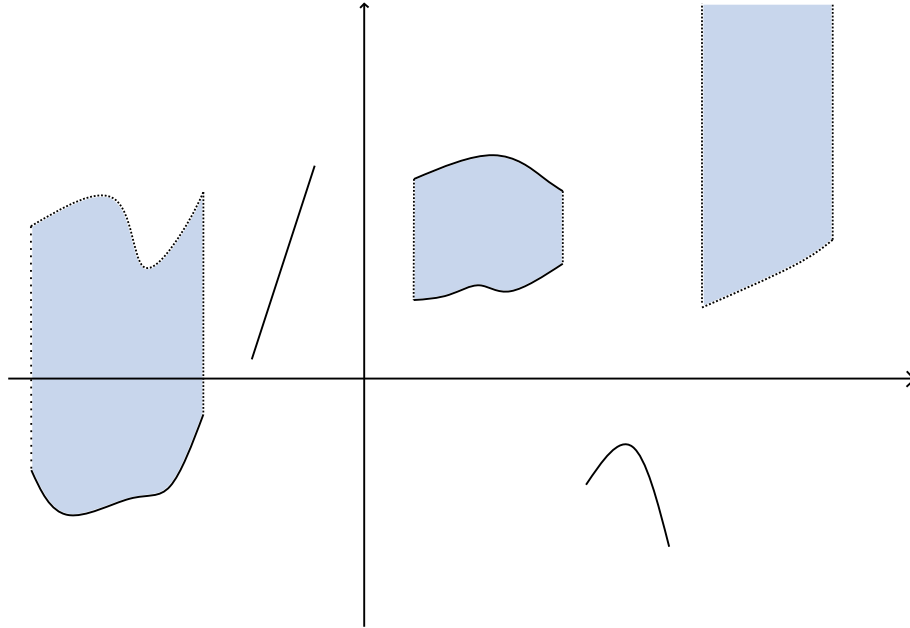
Teorema 2.3.1 (Decomposição Cilíndrica). *Seja $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com coordenadas (x, t) , tal que $x = (x_1, \dots, x_n)$. Seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ semialgébrico. Então, existe uma partição finita \mathcal{P} de \mathbb{R}^n composta por semialgébricos conexos com a seguinte propriedade:*

Para cada $A \in \mathcal{P}$, tem-se que existem funções semialgébricas contínuas $\xi_i^A: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m(A), m(A) + 1$ tais que

$$-\infty \equiv \xi_0^A(x) < \xi_1^A(x) < \dots < \xi_{m(A)}^A(x) < \xi_{m(A)+1}^A(x) \equiv \infty$$

e a família composta pelas faixas (ξ_i^A, ξ_{i+1}^A) e gráficos $\Gamma_{\xi_i^A}$ formam uma partição de \mathbb{R}^{n+1} em subconjuntos semialgébricos compatíveis com X .

Figura 3 – Um conjunto semialgébrico do \mathbb{R}^2 segundo a decomposição cilíndrica.



Fonte: elaborada pelo autor

A teoria apresentada até aqui pode ser estudada em mais de uma abordagem. Em [1] por exemplo, a demonstração do Teorema 2.3.1 é dada antes do Teorema 2.1.1. Dito isto, para mostrar a força da decomposição cilíndrica, vamos demonstrar de uma maneira simples a forma geométrica de Tarski-Seidenberg:

Demonstração (alternativa). Seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ semialgébrico, pelo Teorema 2.3.1, existe uma partição finita \mathcal{P} de \mathbb{R}^n composta por semialgébricos conexos tais que X é uma união de conjuntos do tipo $A \times \mathbb{R}$ ou gráficos ou faixas de funções semialgébricas contínuas definidas em A , onde $A \in \mathcal{P}$. Dessa forma, é fácil ver que a projeção nas n primeiras coordenadas $\pi(X)$ é a união de tais conjuntos $A \in \mathcal{P}$, que são semialgébricos. \square

Corolário 2.3.1. *Todo semialgébrico possui finitas componentes conexas, estas sendo uniões de faixas e gráficos de funções dadas pelo Teorema 2.3.1 que estão contidas em X .*

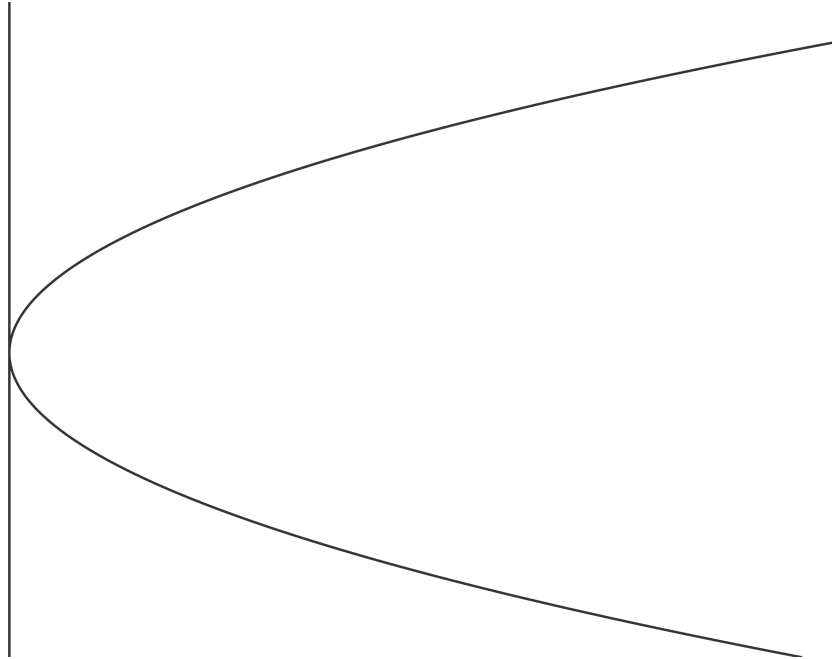
Corolário 2.3.2. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, então X é localmente conexo.*

Demonstração. Dados $a \in X$ e U_a vizinhança aberta de a em X , ou seja, $U_a = U \cap X$ para algum U aberto de \mathbb{R}^n , tome $B(a, \varepsilon) \subset U$ bola aberta. Dessa forma, $B(a, \varepsilon) \cap X \subset U_a$ e desde que $B(a, \varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |a_i - x_i|^2 < \varepsilon^2 \right\}$ é semialgébrico, temos que $B(a, \varepsilon) \cap X \subset U_a$ é semialgébrico, logo, pela decomposição cilíndrica, possui finitas componentes conexas (abertas), onde uma delas contém a . Portanto, X é localmente conexo. \square

Agora, vamos observar um exemplo mais concreto de uma decomposição segundo o Teorema 2.3.1, que será melhorado mais a frente.

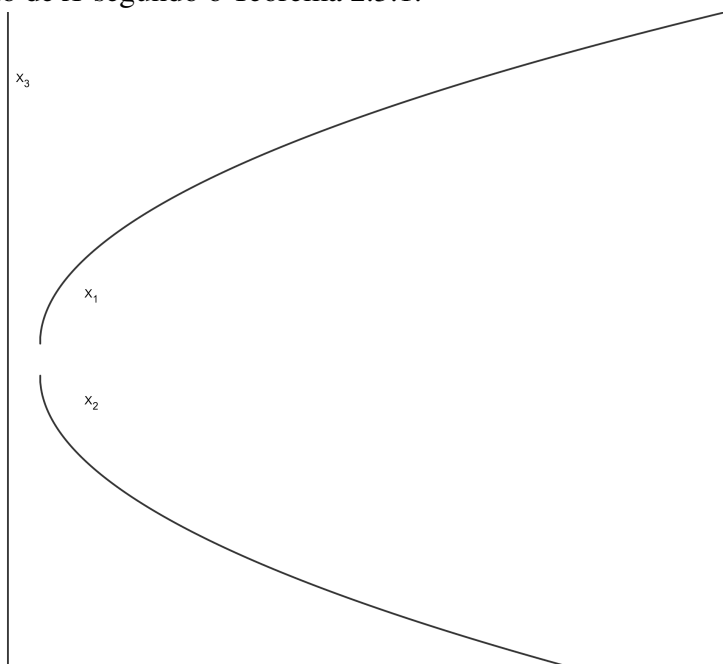
Exemplo 2.3.1. *Seja $f(x,y) = x(x - y^2)$, o conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ é um semialgébrico, um exemplo de decomposição de X pode ser visto abaixo*

Figura 4 – $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x - y^2) = 0\}$



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 5 – Decomposição de X segundo o Teorema 2.3.1.



Fonte: elaborada pelo autor

Corolário 2.3.3. *Cada componente da decomposição cilíndrica é semialgebricamente homeomorfa a um cubo d -dimensional $(0,1)^d$ (onde $(0,1)^0$ é um ponto).*

Definição 2.3.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico e $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ decomposição de X em semialgébricos dois a dois disjuntos e semialgebricamente homeomorfos a um cubo. Seja d_i a dimensão do cubo semialgebricamente homeomorfo à X_i . A dimensão de X é dada por $\dim(X) = \max\{d_1, \dots, d_k\}$.*

É de se esperar que um mesmo conjunto semialgébrico possa ter mais de uma decomposição possível em conjuntos conexos e semialgébricos que são semialgebricamente difeomorfos a cubos. Mas de qualquer maneira, é possível ver que o cálculo da dimensão de um conjunto semialgébrico não depende de qual decomposição foi tomada. Esta demonstração pode ser encontrada em [4], sendo esta a Proposição 3.15.

Proposição 2.3.1. *A dimensão de um conjunto semialgébrico está bem definida, ou seja, independe da decomposição tomada.*

É possível melhorar a decomposição cilíndrica no sentido de que se alguma componente intersecta o fecho de outra em X , então ela deve estar totalmente contida no fecho. Por exemplo, note que na Figura 5, temos que X_3 intersecta o fecho de X_1 em X mas não está contido nele, pois $\overline{X_1} = X_1 \cup \{(0,0)\}$. O teorema a seguir garantirá a existência de uma decomposição que satisfaça a propriedade aqui comentada. Sua demonstração pode ser encontrada em [1], sendo esta a Proposição 2.5.1.

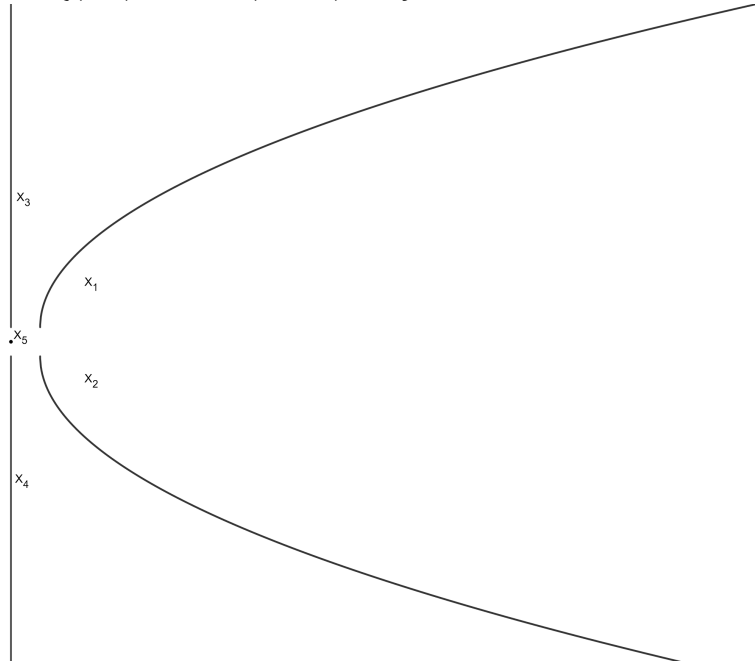
Teorema 2.3.2 (Teorema de Estratificação). *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico e S_1, \dots, S_m semialgébricos contidos em X . Então, existe decomposição finita de X em semialgébricos C_1, \dots, C_p dois a dois disjuntos tais que*

- Cada C_i é semialgebricamente difeomorfo a um cubo aberto $(0,1)^{d_i}$, neste caso, $d_i = \dim(C_i)$.
- O fecho de cada C_i em X é união de alguns C_j com dimensão menor ou igual que $\dim(C_i)$ (aqui, a dimensão só é igual quando $i = j$).
- Cada S_j é união de alguns C_i , ou seja, a decomposição é compatível com S_j para todo $j = 1, \dots, m$.

Uma decomposição como a dada no Teorema 2.3.2 é dita *estratificação* de X compatível com S_1, \dots, S_m . Os conjuntos C_j são chamados de *estratos* da estratificação de X .

Exemplo 2.3.2. A decomposição do conjunto X no Exemplo 2.3.1 dada pela Figura 5 não é uma estratificação como já foi comentado antes de enunciarmos o Teorema 2.3.2, já a decomposição dada pela Figura 6 é uma estratificação de X .

Figura 6 – Estratificação de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x - y^2) = 0\}$ segundo o Teorema 2.3.2



Fonte: elaborada pelo autor

Tendo o Teorema 2.3.2 em mãos, podemos obter outras propriedades acerca da dimensão de conjuntos semialgébricos, listaremos algumas delas abaixo.

Proposição 2.3.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico. Então $\dim(\bar{X}) = \dim(X)$ e $\dim(\bar{X} \setminus X) < \dim(X)$.*

Demonstração. Basta tomar uma estratificação de \bar{X} compatível com X , assim, os conjuntos da decomposição que pertencem a $\bar{X} \setminus X$ terão necessariamente dimensão menor que a dimensão dos conjuntos que pertencem a X e daí o resultado segue. \square

Proposição 2.3.3. *Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébricos tais que $\dim Y < \dim X$. Então $\dim(X \setminus Y) = \dim X$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.2, podemos tomar decomposição de X compatível com Y , digamos $C_1, \dots, C_r, C_{r+1}, \dots, C_n$ onde $Y = C_{r+1} \cup \dots \cup C_n$, ou seja, algum C_i tem dimensão $\dim X$ para $i = 1, \dots, r$ e todos os C_j com $j = r + 1, \dots, n$ tem dimensão no máximo $\dim Y$. Dessa forma, C_1, \dots, C_r é uma decomposição de $X \setminus Y$, que possui um C_i com dimensão $\dim X$. Portanto, como a dimensão independe da decomposição tomada, concluímos que $\dim X \setminus Y = \dim X$. \square

Lema 2.3.1. *Seja $X \in \mathbb{R}^{n+k}$ semialg\u00e9brico e $\pi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a proje\u00e7\u00e3o nas n primeiras coordenadas. Ent\u00e3o $\dim(\pi(X)) \leq \dim(X)$. Al\u00e9m disso, se a proje\u00e7\u00e3o \u00e9 injetiva em X , ent\u00e3o a igualdade ocorre.*

Demonstra\u00e7\u00e3o. Caso $k = 1$, temos que X \u00e9 a uni\u00e3o de finitas faixas e gr\u00e1ficos de fun\u00e7\u00f5es cont\u00ednuas e semialg\u00e9bricas, assim, o lema segue diretamente da constru\u00e7\u00e3o da decomposi\u00e7\u00e3o cil\u00edndrica, visto que a proje\u00e7\u00e3o nas n primeiras coordenadas s\u00e3o conjuntos semialg\u00e9bricos da parti\u00e7\u00e3o do \mathbb{R}^n dada pela decomposi\u00e7\u00e3o cil\u00edndrica, que tem dimens\u00e3o igual aos gr\u00e1ficos (proje\u00e7\u00e3o injetiva) e menor que as faixas.

Para $k > 1$, a proje\u00e7\u00e3o nas n primeiras coordenadas \u00e9 a composi\u00e7\u00e3o das proje\u00e7\u00f5es nas $n + i - 1$ primeiras coordenadas, com $i = k, k - 1, \dots, 1$. Assim, o lema segue de uma simples indu\u00e7\u00e3o. \square

Teorema 2.3.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialg\u00e9brico e seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma fun\u00e7\u00e3o semialg\u00e9brica. Ent\u00e3o $\dim(f(X)) \leq \dim(X)$. Al\u00e9m disso, se f \u00e9 injetiva, a igualdade ocorre.*

Demonstra\u00e7\u00e3o. Como j\u00e1 vimos antes, $f(X)$ \u00e9 a proje\u00e7\u00e3o do gr\u00e1fico de f nas k primeiras coordenadas. Logo, pelo Lema 2.3.1, $\dim f(X) \leq \dim \Gamma_f$. Al\u00e9m disso, X \u00e9 a proje\u00e7\u00e3o do gr\u00e1fico de f nas n primeiras coordenadas, a qual \u00e9 injetiva. Logo, novamente pelo Lema 2.3.1, $\dim X = \dim \Gamma_f$. Portanto, temos que $\dim f(X) \leq \dim X$.

Por fim, se f \u00e9 injetiva, ent\u00e3o existe $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$, da\u00ed, aplicando o Lema 2.3.1 em f^{-1} , obtemos a desigualdade contr\u00e1ria e podemos concluir que $\dim f(X) = \dim X$. \square

2.4 Um pouco de Teoria do Contato Lipschitz

Para finalizar as preliminares, apresentaremos, de forma resumida e sem todas as demonstra\u00e7\u00f5es, alguns conceitos de Teoria do Contato Lipschitz. Tais conceitos s\u00e3o introduzidos para mostrar mais a frente que o limitante inferior encontrado em um dos resultados principais \u00e9 preciso. Vale ressaltar que as defini\u00e7\u00f5es dadas nesta se\u00e7\u00e3o s\u00e3o dadas de forma particular para apenas se adequar ao nosso problema posterior, a refer\u00eancia de onde foram tiradas tais conceitos e resultados, e que possui toda a teoria de forma mais precisa e aprofundada, foram as notas de aula do minicurso Lipschitz geometry of singularities ministrado no evento CIMPA Research School: Singularities and Applications em 2022.

Definição 2.4.1. Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é dita um homeomorfismo bi-Lipschitz se é bijetiva, Lipschitz, e sua inversa f^{-1} também é Lipschitz. Em outras palavras, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c_2\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

Dado um homeomorfismo bi-Lipschitz nas notações da definição acima e tomando $c = \max\left\{\frac{1}{c_1}, c_2\right\}$, tem-se que $\frac{1}{c} \leq c_1$ e $c_2 \leq c$. Logo, vale $\frac{1}{c}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ e também vale que $c \geq 1$. Ou seja, f é um homeomorfismo bi-Lipschitz se, e somente se existe uma constante $c \geq 1$ tal que $\frac{1}{c}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$. Vamos chamar tal $c > 1$ de *constante bi-Lipschitz de f* .

Definição 2.4.2. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico. Para cada $a \in \overline{X}$, o cone tangente de X em a é o conjunto semialgébrico dado por

$$C(X, a) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X, \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty) \text{ com } \lim x_n = a, \lim t_n = 0 \text{ e } \lim \frac{x_n - a}{t_n} = v \right\}$$

Em semialgébricos de dimensão 1 chamaremos o cone tangente de X num ponto de vetor tangente à X nesse ponto. Agora, veremos uma outra maneira de enxergar o cone tangente, a demonstração do resultado pode ser encontrada de maneira mais geral em [11], sendo este o Teorema 2.2.24

Teorema 2.4.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico, para cada $a \in \overline{X}$ tal que a não é ponto isolado, temos que

$$C(X, a) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \exists \gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \overline{X} \text{ semialgébrico com } \gamma(0) = a \text{ e } \gamma(t) - a = tv + o(t) \right\}$$

Definição 2.4.3. Sejam X_1, X_2 semialgébricos fechados e conexos por caminhos de dimensão 1 tais que $\overline{X_1} \setminus \{0\} \cap \overline{X_2} \setminus \{0\} = \emptyset$. Seja $(X_1, X_2)(r)$ a função que calcula a distância entre os conjuntos $X_1 \cap B(0, r)^c$ e $X_2 \cap B(0, r)^c$, ou seja,

$$(X_1, X_2)(r) = \inf\{\|x_1 - x_2\| : x_i \in X_i \text{ e } \|x_i\| \geq r\}$$

Dessa forma, o contato Lipschitz entre X_1 e X_2 em 0 é definido por

$$\text{Lip.Cont.}(X_1, X_2) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log((X_1, X_2)(r))}{\log r}$$

Agora veremos duas propriedades do contato Lipschitz que serão importantes para um exemplo futuro.

Proposição 2.4.1. *Sejam $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ semialgêbricos fechados de dimensão 1, conexos por caminhos que contém $0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $\overline{X_1 \setminus \{0\}} \cap \overline{X_2 \setminus \{0\}} = \{0\}$ e seja $f: X \rightarrow Y$ homeomorfismo bi-Lipschitz tal que $f(0) = 0$. Então*

$$\text{Lip.Cont.}(X_1, X_2) = \text{Lip.Cont.}(f(X_1), f(X_2)).$$

Ou seja, o contato Lipschitz é invariante por homeomorfismos bi-Lipschitz.

Demonstração. Digamos que f satisfaça $\frac{1}{c}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ para algum $c \geq 1$.

Dado $r > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} (f(X_1), f(X_2))(r) &= \inf\{\|f(x_1) - f(x_2)\| : x_i \in X_i \text{ e } \|f(x_i)\| \geq r\} \\ &\geq \inf\left\{\frac{1}{c}\|x_1 - x_2\| : x_i \in X_i \text{ e } \|x_i\| \geq \frac{r}{c}\right\} \\ &= \frac{1}{c}(X_1, X_2)\left(\frac{r}{c}\right) \end{aligned}$$

Portanto, desde que $r > 0$ pequeno o suficiente implica que $\log(r)$ é negativo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\log[(f(X_1), f(X_2))(r)]}{\log(r)} &\leq \frac{\log\left[\frac{1}{c}(X_1, X_2)\left(\frac{r}{c}\right)\right]}{\log(r)} \\ &= \frac{\log[(X_1, X_2)\left(\frac{r}{c}\right)] - \log(c)}{\log(r)} \\ &= \frac{\log[(X_1, X_2)\left(\frac{r}{c}\right)]}{\log\left(\frac{r}{c}\right) + \log(c)} - \frac{\log(c)}{\log(r)} \end{aligned}$$

Dessa forma, passando o limite com $r \rightarrow 0^+$ notando que $\log(c)$ é uma constante e que $\frac{r}{c} \rightarrow 0^+$ quando $r \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\text{Lip.Cont.}(f(X_1), f(X_2)) \leq \text{Lip.Cont.}(X_1, X_2)$$

Repetindo o mesmo procedimento para f^{-1} , obtemos que

$$\text{Lip.Cont.}(X_1, X_2) = \text{Lip.Cont.}(f^{-1}(f(X_1)), f^{-1}(f(X_2))) \leq \text{Lip.Cont.}(f(X_1), f(X_2)).$$

Portanto,

$$\text{Lip.Cont.}(X_1, X_2) = \text{Lip.Cont.}(f(X_1), f(X_2)).$$

□

O outro fato que será útil mais a frente é a observação de que o contato Lipschitz entre X_1 e X_2 vale 1 se, e somente se as retas tangentes aos conjuntos em 0 são distintas. No

entanto, a demonstração de tal fato se baseia na equivalência da definição de contato Lipschitz entre X_1 e X_2 com a ordem da função $(X_1, X_2)(r)$ dada pelo Teorema de Newton-Puiseux, como pode ser visto em [2]. Portanto, não será apresentada a demonstração de tal fato, mas vamos dar uma definição para auxiliar o entendimento do resultado.

Como também pode ser visto em [2], dado um semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão 1 com, digamos, $0 \in X$, existe uma vizinhança U de 0 tal que

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^k X_i$$

onde cada X_i possui as seguintes propriedades:

1. X_i é semialgébrico e existe homeomorfismo $\gamma_i: [0, \varepsilon) \rightarrow X_i$ tal que $\gamma_i(0) = 0$;
2. Para cada $i \neq j$, tem-se $X_i \cap X_j = \{0\}$;
3. Existe $r_0 > 0$ tal que para todo $0 \leq r < r_0$, X_i possui exatamente um ponto de norma r .

Definição 2.4.4. *Os conjuntos semialgébricos que satisfazem as 3 propriedades dos elementos X_i da decomposição acima são chamados de ramos.*

Agora, enunciaremos a última propriedade necessária para entender o exemplo futuro, a prova desta propriedade pode ser encontrada dentro da demonstração do Lema de Comparação de Ordens no capítulo 3 em [2].

Proposição 2.4.2. *Sejam X_1, X_2 ramos semialgébricos parametrizados por comprimento de arco tais que $\overline{X_1 \setminus \{0\}} \cap \overline{X_2 \setminus \{0\}} = \{0\}$. Então $\text{Lip.Cont}(X_1, X_2) = 1$ se, e somente se X_1 e X_2 em 0 tem vetores tangentes unitários distintos.*

Note que faz sentido falar de vetores tangentes nos ramos semialgébricos parametrizados por comprimento de arco, pois se X é parametrizado por $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow X$ com $\|\gamma(t)\| = \|t\|$, então a função

$$f(t) = \frac{\gamma(t)}{t}, t > 0$$

é semialgébrica e limitada. Logo, pela Proposição 2.2.3, existe o limite lateral

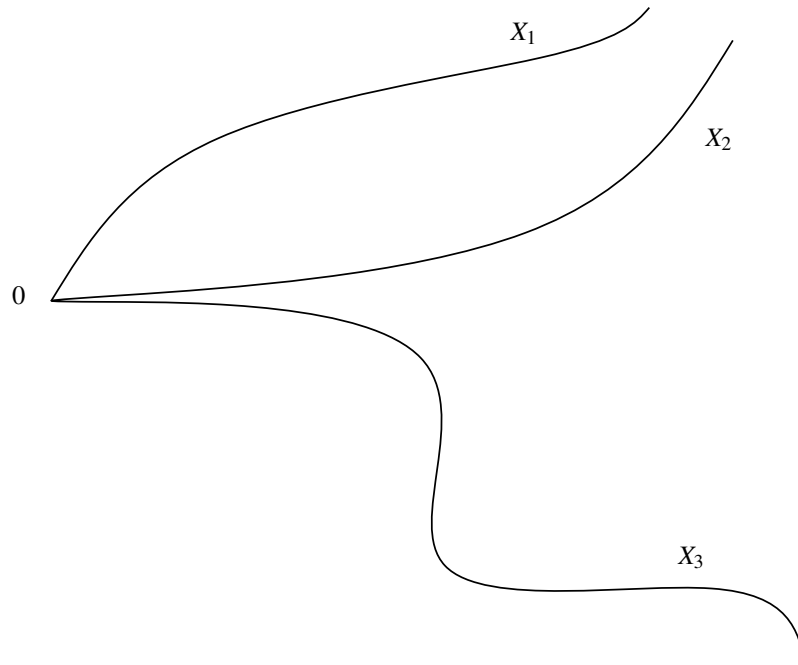
$$\gamma'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

e portanto, a reta tangente à X em 0 existe.

Dessa maneira fica simples de observar se o contato Lipschitz entre dois conjuntos é 1 ou não. Por exemplo, na figura abaixo, vemos que o contato Lipschitz entre X_1 e X_2 ou X_3 é 1,

já o contato entre X_2 e X_3 deve ser distinto de 1, não importando o quão distante os conjuntos se tornem longe da origem.

Figura 7 – Três semialgêbricos de dimensão 1 que se intersectam em $0 \in \mathbb{R}^2$.



Fonte: elaborada pelo autor

3 MERGULHOS DE VARIEDADES BI-LIPSCHITZ

Neste capítulo, será mostrado que o problema de mergulhar variedades bi-Lipschitz em espaços de dimensão menor não tem o resultado esperado como acontecerá mais a frente com os conjuntos semialgêbricos fechados.

3.1 Conjuntos semialgêbricos x Variedades bi-Lipschitz

Definição 3.1.1. *Um conjunto fechado S contido em um espaço métrico X é dito uma variedade bi-Lipschitz de dimensão d se para cada $p \in S$, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^d$ e $V \subset X$ e uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi: U \rightarrow S \cap V$. Ou seja, S é variedade bi-Lipschitz se pode ser coberto por vizinhanças parametrizadas de forma bi-Lipschitz.*

É claro que podemos trocar os abertos U na definição acima por bolas abertas, basta restringir a parametrização para uma bola contida em U com centro em $\varphi^{-1}(p)$.

Como dito na introdução, o problema de mergulho bi-Lipschitz não tem uma resposta tão satisfatória em variedades bi-Lipschitz como ocorre com os semialgêbricos fechados. Nesta seção serão dados, com alguns pré-requisitos antes, exemplos de conjuntos que mostram que de fato a classe das variedades bi-Lipschitz em \mathbb{R}^n e dos conjuntos semialgêbricos são distintas.

Para poder justificar um dos exemplos que serão dados, é necessário o básico sobre medida de Hausdorff e densidade de pontos em conjuntos. As demonstrações omitidas nesta seção junto com toda a teoria prévia de medida abstrata podem ser encontradas em [5].

Sejam (X, ρ) um espaço métrico, $d \geq 0$ e $\delta > 0$. Para $A \subset X$, tome

$$H_{d,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B_j)^d : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \text{ e } \text{diam } B_j \leq \delta \right\}$$

convencionando-se que $\inf \emptyset = \infty$.

Ao diminuir δ , o valor de $H_{d,\delta}(A)$ aumenta, pois o ínfimo está sendo tomado num conjunto obtido a partir de uma família menor de coberturas de A .

Definição 3.1.2. *O limite*

$$H_d(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_{d,\delta}(A)$$

é chamado de medida de Hausdorff d -dimensional de A . Em particular, é claro que $H_{d,\delta}(A) \leq H_d(A)$ para qualquer $\delta > 0$.

Proposição 3.1.1. (X, B, H_d) é um espaço de medida, onde B é a sigma álgebra dos conjuntos de Borel.

A partir de agora, vamos nos restringir ao caso $X = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana.

Proposição 3.1.2. Sejam $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|g(x) - g(y)\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

então

$$H_d(f(A)) \leq K^d H_d(g(A)) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Dados $\varepsilon, \delta > 0$, cubra $g(A)$ por conjuntos B_j tais que $\text{diam } B_j \leq \frac{\delta}{K}$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B_j)^d \leq H_{d, \frac{\delta}{K}}(g(A)) + \varepsilon \leq H_d(g(A)) + \varepsilon.$$

Dessa forma, os conjuntos $B'_j = f(g^{-1}(B_j))$ cobrem $f(A)$ e vale que $\text{diam } B'_j \leq K \cdot \text{diam } B_j \leq \delta$, dessa forma,

$$\begin{aligned} H_{d, \delta}(f(A)) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B'_j)^d \\ &\leq K^d \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B_j)^d \\ &\leq K^d H_d(g(A)) + K^d \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$H_d(f(A)) \leq K^d H_d(g(A)).$$

□

Corolário 3.1.1. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz com constante K , então

$$H_d(f(A)) \leq K^d H_d(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Basta tomar g como sendo a identidade em \mathbb{R}^n e aplicar f e g na Proposição 3.1.2. □

Proposição 3.1.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Se $H_d(A) < \infty$, então $H_c(A) = 0 \quad \forall c > d$. Se $H_d(A) > 0$, então $H_c(A) = \infty \quad \forall c < d$.

Demonstração. Se $H_d(A) < \infty$, então dados $\varepsilon, \delta > 0$, existe $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ com $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\text{diam } B_j \leq \delta$ e $\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B_j)^d \leq H_d(A) + \varepsilon$. Logo, para $c > d$, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B_j)^c &= \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B_j)^{c-d} \cdot (\text{diam } B_j)^d \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \delta^{c-d} (\text{diam } B_j)^d \\ &= \delta^{c-d} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } B_j)^d \\ &\leq \delta^{c-d} (H_d(A) + \varepsilon) \end{aligned}$$

Assim, $H_{c,\delta}(A) \leq \delta^{c-d} (H_d(A) + \varepsilon)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$, conclui-se que $H_c(A) = 0$.

A segunda parte da proposição é exatamente a contrapositiva da primeira, portanto, a demonstração está finalizada. \square

Pelo resultado acima, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, existe um único valor $d > 0$ tal que $H_c(A) = 0$ sempre que $c > d$ e $H_c(A) = \infty$ sempre que $c < d$. Tal valor d é chamado de *dimensão de Hausdorff de A*.

Até o final desta seção, denotaremos por $B_k(a, r)$ a bola de centro a e raio r em \mathbb{R}^k .

Definição 3.1.3. Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in X$, a densidade de p em X é o limite

$$\Theta(X, p) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{H_d(X \cap B_n(p, r))}{H_d(B_d(0, r))}$$

onde d é a dimensão de Hausdorff de $X \cap B_n(p, r)$.

A partir de agora, para simplificar a notação, será escrito apenas limite ao invés de limite superior no cálculo da densidade.

É necessário observar que, a menos da multiplicação por uma constante, a medida de Hausdorff n – dimensional em \mathbb{R}^n coincide com a medida de Lebesgue. Já tendo o conhecimento de que a integral de Lebesgue coincide com a integral de Riemann em funções integráveis à Riemann, podemos então utilizar conceitos básicos de cálculo para calcular a medida de Hausdorff de certos conjuntos que tem suas áreas ou volumes definidas por integrais de Riemann.

Proposição 3.1.4. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade bi-Lipschitz de dimensão d , então X tem dimensão de Hausdorff d .

Demonstração. Dado $p \in X$, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^d$ e $p \in V \subset X$ e uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi: U \rightarrow X \cap V$. Digamos que φ satisfaça

$$\frac{1}{K}\|x - y\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

A primeira desigualdade implica que φ^{-1} também tem constante Lipschitz K , sendo assim, o Corolário 3.1.1 implica que

$$H_c(X \cap V) \leq K^c H_c(U) \text{ e } H_c(U) \leq K^c H_c(X \cap V).$$

Sendo assim, caso $c > d$, tem-se $H_c(X \cap V) \leq K^c H_c(U) = 0$, logo $H_c(X \cap V) = 0$, e caso $c < d$, tem-se $\infty = H_c(U) \leq K^c H_c(X \cap V)$, logo $H_c(X \cap V) = \infty$.

Para cada ponto de X , já sabemos que é possível encontrar uma vizinhança parametrizada desse ponto, a união de todas as vizinhanças parametrizadas de X forma uma cobertura aberta, e como X é um subconjunto de \mathbb{R}^n , existe subcobertura enumerável de vizinhanças parametrizadas de X . Ou seja, X é coberto por enumeráveis abertos $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ tais que existem aplicações bi-Lipschitz de abertos de \mathbb{R}^d para $X \cap V_i$. Dessa forma, caso $c > d$, tem-se que

$$H_c(X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H_c(X \cap V_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0,$$

e caso $c < d$, tem-se que, como $X \cap V_i \subset X$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$,

$$\infty = H_c(X \cap V_i) \leq H_c(X).$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff de X é d . □

Proposição 3.1.5. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade bi-Lipschitz de dimensão d . Então X não possui pontos com densidade de Hausdorff 0.*

Demonstração. Dado $p \in X$ qualquer, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^d$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi: U \rightarrow X \cap V$. Digamos que φ satisfaça

$$\frac{1}{K}\|x - y\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Assim como na demonstração do resultado anterior, a primeira desigualdade implica que φ^{-1} também tem constante Lipschitz K , já a segunda desigualdade implica que a imagem de uma bola de raio r e centro em a por φ está contida na bola de raio Kr e centro em $\varphi(a)$.

Agora, vamos comparar a densidade de Hausdorff de p em X com a densidade de Hausdorff de $\varphi^{-1}(p)$ em U utilizando que tanto U quanto $X \cap V$ têm dimensão de Hausdorff d pela Proposição 3.1.4.

Seja $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_d(\varphi^{-1}(p), r) \subset U$, tem-se então que

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{H_d(B_d(\varphi^{-1}(p), r))}{H_d(B_d(0, r))} = \frac{H_d(U \cap B_d(\varphi^{-1}(p), r))}{H_d(B_d(0, r))} \\
 &\leq \frac{K^d H_d(\varphi(B_d(\varphi^{-1}(p), r)))}{H_d(B_d(0, r))} \\
 &\leq \frac{K^d H_d(X \cap B_n(p, Kr))}{H_d(B_d(0, r))} \\
 &= \frac{K^d H_d(X \cap B_n(p, Kr))}{\frac{1}{K^d} H_d(B_d(0, Kr))} \\
 &= K^{2d} \frac{H_d(X \cap B_n(p, Kr))}{H_d(B_d(0, Kr))}
 \end{aligned}$$

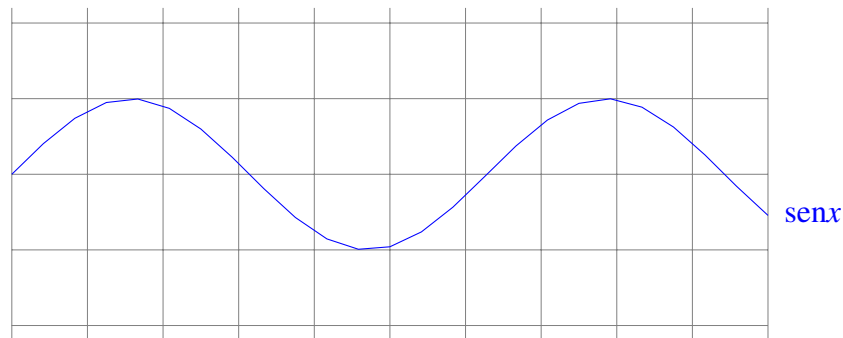
Fazendo $r \rightarrow 0^+$, obtem-se

$$0 < \frac{1}{K^{2d}} \leq \Theta(X, p)$$

encerrando assim a demonstração. □

A seguir, serão dados três exemplos de conjuntos, um que é tanto semialgébrico quanto variedade bi-Lipschitz, um que não é semialgébrico mas é variedade bi-Lipschitz e outro que é semialgébrico mas não é variedade bi-Lipschitz. Apenas para mostrar que este último não é variedade bi-Lipschitz de fato, será utilizada toda a teoria desenvolvida nesta seção.

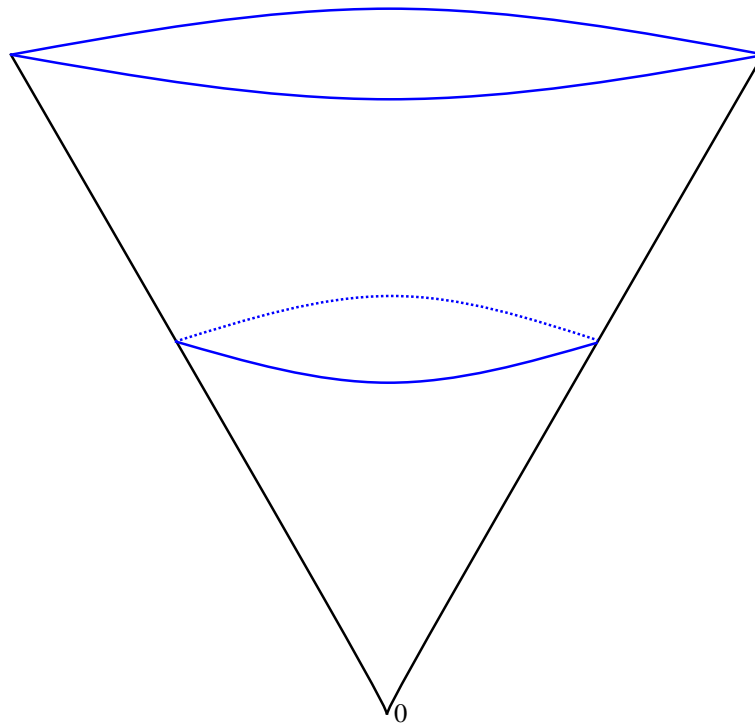
Exemplo 3.1.1. Seja $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \text{sen}(x) \text{ e } x \geq 0\}$ o conjunto abaixo



Tal conjunto é uma variedade bi-Lipschitz, parametrizado por $x \mapsto (x, \text{sen}(x))$. No entanto, Y não é semialgébrico, pois a reta $y = \frac{1}{2}$ intersecta Y uma quantidade infinita de pontos isolados.

Exemplo 3.1.2. Seja $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ o conjunto abaixo

Figura 8 – Cone com vértice na origem.

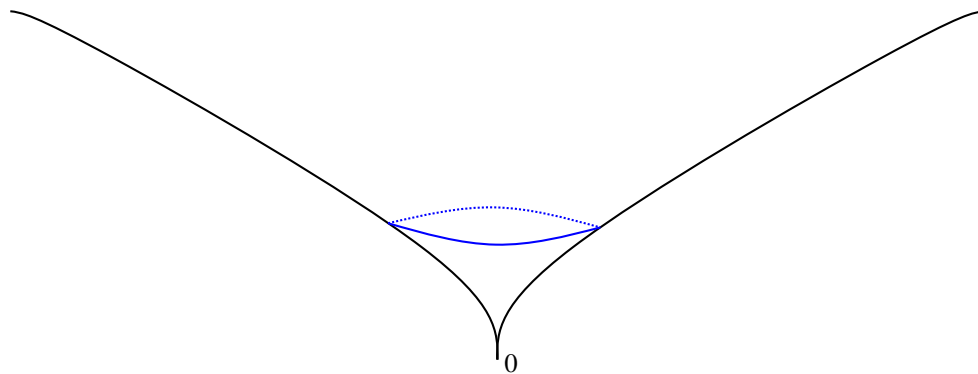


Fonte: elaborada pelo autor

Tal conjunto é claramente semialgébrico fechado. Além disso, X também é variedade bi-Lipschitz, parametrizado pela função $(x, y, z) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$.

Exemplo 3.1.3. *Seja $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 = x^2 + y^2\}$ o conjunto abaixo*

Figura 9 – "Corneta" com vértice na origem.



Fonte: elaborada pelo autor

Tal conjunto é claramente semialgébrico fechado. No entanto, Z não é variedade bi-Lipschitz, como será mostrado abaixo.

Afirmção: $0 \in Z$ é um ponto de densidade de Hausdorff 0.

Note primeiro que, como a medida de Lebesgue e a medida de Hausdorff diferem apenas por uma multiplicação por constante, os cálculos a seguir serão feitos na medida de Lebesgue visto que, ao quocientarmos as medidas para calcular a densidade, a constante será cancelada, mas para não fugir da notação, manteremos a notação da medida de Hausdorff.

Perceba que $Z \cap B_3(0, r)$ nada mais é que o conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 = x^2 + y^2 \text{ e } z \in [0, h]\}$, onde h é a altura em que a esfera de raio r toca Z , ou seja, h satisfaz as equações $x^2 + y^2 + h^2 = r^2$ e $h^3 = x^2 + y^2$. Em outras palavras, $h^3 + h^2 = r^2$. O conjunto $Z \cap B_3(0, r)$ pode ser parametrizado inteiramente pela aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: B_2\left(0, h^{\frac{3}{2}}\right) &\rightarrow Z \cap B_3(0, r) \\ (x, y) &\mapsto \left(x, y, (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right), \end{aligned}$$

Dessa forma, calcular a medida de $Z \cap B_3(0, r)$ nada mais é que calcular a área de tal superfície, a qual é dada por

$$\begin{aligned} H_2(Z \cap B_3(0, r)) &= \int_{Z \cap B_3(0, r)} 1 = \int_{B_2\left(0, h^{\frac{3}{2}}\right)} \|\varphi_x \times \varphi_y\| dx dy \\ &= \int_{B_2\left(0, h^{\frac{3}{2}}\right)} \left(\frac{4}{9} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} dx dy \end{aligned}$$

Agora, fazendo substituição por coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} H_2(Z \cap B_3(0, r)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{h^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4}{9\rho^{\frac{2}{3}}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{h^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4}{9\rho^{\frac{2}{3}}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \rho d\rho \end{aligned}$$

Já $H_2(B_2(0, r))$ tem sua fórmula bem conhecida, vale πr^2 . Note que quando $r \rightarrow 0^+$, também temos que $h \rightarrow 0^+$, logo, podemos calcular o limite que define densidade pondo $h \rightarrow 0^+$.

Dessa forma, escreveremos a medida da bola como $H_2(B_2(0, r)) = \pi r^2 = \pi(h^3 + h^2)$.

$$\begin{aligned}\Theta(Z, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{H_2(Z \cap B_3(0, r))}{H_2(B_2(0, r))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2\pi \int_0^{h^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4}{9\rho^{\frac{2}{3}}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \rho \, d\rho}{\pi(h^3 + h^2)}\end{aligned}$$

Notando que tanto o numerador quanto o denominador da fração acima vão para 0 quando $h \rightarrow 0^+$, podemos aplicar L'Hospital e obter

$$\begin{aligned}\Theta(Z, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2\pi \left(\frac{4}{9h} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} h^{\frac{1}{2}}}{\pi(3h^2 + 2h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 \frac{\left(\frac{4}{9h} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} h^2}{3h^2 + 2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 \frac{\left(\frac{4}{9h} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} h}{3h + 2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 \frac{\left(\frac{4}{9h} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} h}{3h + 2} \cdot \frac{\left(\frac{4}{9h} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{4}{9h} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 \frac{\frac{4}{9} + h}{(3h + 2) \left(\frac{4}{9h} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 0\end{aligned}$$

concluindo assim a afirmação.

Para finalizar, pela Proposição 3.1.5, Z não pode ser uma variedade bi-Lipschitz como havíamos afirmado.

Uma outra maneira bem mais prática de mostrar que o conjunto Z do exemplo não pode ser uma variedade bi-Lipschitz é utilizando o teorema abaixo, demonstrado em [11], sendo este o Teorema 4.1.1

Teorema 3.1.1. *Sejam X, Y semialgêbricos, se existe um homeomorfismo bi-Lipschitz φ entre X e Y , então os respectivos cones tangentes $C(X, a)$ e $C(Y, \varphi(a))$ são bi-Lipschitz homeomorfos.*

Assim, se Z fosse uma variedade bi-Lipschitz, existiria um homeomorfismo bi-Lipschitz entre uma vizinhança de 0 em Z e um aberto de \mathbb{R}^2 , mas é fácil ver que o cone tangente de Z em 0 é uma reta enquanto que o cone tangente de qualquer aberto de \mathbb{R}^2 em qualquer ponto é todo o \mathbb{R}^2 . Portanto, Z não pode ser uma variedade bi-Lipschitz.

3.2 Existência do mergulho bi-Lipschitz para variedades bi-Lipschitz

Nesta seção, será mostrado que uma variedade bi-Lipschitz de dimensão k pode ser mergulhada de maneira bi-Lipschitz em \mathbb{R}^N , para algum $N \in \mathbb{N}$ que depende da variedade. Após isso, enunciaremos sem prova um resultado análogo em que o N depende apenas da dimensão k , sua demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 3.2.1. *Seja X uma variedade bi-Lipschitz compacta de dimensão k . Então existe um mergulho bi-Lipschitz $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N$, para algum $N \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para cada ponto de X , já sabemos que é possível encontrar uma vizinhança parametrizada desse ponto, a união de todas as vizinhanças parametrizadas de X forma uma cobertura aberta, e como X é compacto, podemos sempre então extrair uma subcobertura finita. Sejam então $\{V_i\}_{i=1}^n$ vizinhanças parametrizadas que cobrem X , digamos que as parametrizações bi-Lipschitz sejam $\phi_i: U_i \rightarrow V_i$, onde cada U_i é uma bola aberta de \mathbb{R}^k . Dessa forma, as funções $\phi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ dadas por $\phi_i(x) = \phi_i^{-1}(x)$ são mergulhos bi-Lipschitz.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e $x \in V_i$, existe r_{ix} tal que $\overline{B(x, r_{ix})} \subset V_i$. Dessa forma, obtemos uma cobertura de X por bolas abertas onde cada bola tem seu fecho contido em algum V_i , em particular, as bolas com metade dos raios também formam uma cobertura de X , e como X é compacto, podemos tomar subcobertura finita $\left\{ B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right) \right\}_{i=1}^m$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$ a função dada por

$$\psi_i(x) = \frac{d(x, X \setminus B(x_i, r_{j_i x_i}))}{d(x, X \setminus B(x_i, r_{j_i x_i})) + d\left(x, B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right)\right)},$$

tais funções são Lipschitz, pois são quocientes de funções Lipschitz e limitadas. Além disso $\psi_i(X \setminus B(x_i, r_{j_i x_i})) = \{0\}$ e $\psi_i\left(B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right)\right) = \{1\}$. Note agora que o suporte de ψ_i está contido em $\overline{B(x_i, r_{j_i x_i})} \subset V_i$, pois $\psi_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset B(x_i, r_{j_i x_i})$ e o suporte é definido por $\text{supp}(\psi_i) = \overline{\psi_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$. Por fim, note que a soma $\sum_{i=1}^m \psi_i(x)$ é sempre positiva, pois $\left\{ B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right) \right\}_{i=1}^m$ cobre X . Defina então, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, a função $h_i: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$h_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x) \cdot \phi_i(x) & , \text{ se } x \in V_i \\ 0 & , \text{ se } x \in X \setminus \text{supp}(\psi_i). \end{cases}$$

A função está bem definida pois $\psi_i(x) = 0$ em $V_i \cap X \setminus \text{supp}(\psi_i)$, logo $\psi_i(x) \cdot \phi_i(x) = 0$. Além disso, como ψ_i e ϕ_i são Lipschitz, h_i também o é.

Defina

$$f: X \rightarrow \left(\overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{m \text{ vezes}} \times \overbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}^{m \text{ vezes}} \right)$$

$$x \mapsto (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x), h_1(x), \dots, h_n(x)).$$

Tal função é claramente Lipschitz, pois suas funções coordenadas o são. Além disso, f é injetiva, pois se $f(x) = f(y)$, então $\psi_i(x) = \psi_i(y)$ e $h_i(x) = h_i(y)$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Como $\psi_{i_0}(x) > 0$ para algum i_0 desde que $\sum_{i=1}^m \psi_i(x)$ é positiva. Logo $\psi_{i_0}(y) > 0$ também, ou seja, $x, y \in U_{i_0}$. Assim,

$$\psi_{i_0}(x) \cdot \phi_{i_0}(x) = h_{i_0}(x) = h_{i_0}(y) = \psi_{i_0}(y) \cdot \phi_{i_0}(y),$$

daí como $\psi_{i_0}(x) = \psi_{i_0}(y) > 0$, concluímos que $\phi_{i_0}(x) = \phi_{i_0}(y)$. Portanto, como ϕ_{i_0} é injetiva, obtemos que $x = y$.

Para finalizar a demonstração, afirmo que f é de fato bi-Lipschitz. Como já sabemos que f é Lipschitz, basta mostrar que existe uma constante $v > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \geq v\|x - y\|$ para todo $x, y \in X$, vamos fazer este trabalho na norma da soma, denotada por $\|u\|_s$. De fato, suponha por absurdo que f não é bi-Lipschitz, ou seja, que para todo $l \in \mathbb{N}$, existem $x_l, y_l \in X$ tais que

$$\|f(x_l) - f(y_l)\|_s < \frac{1}{l} \|x_l - y_l\|_s.$$

Por compacidade, podemos supor sem perda que x_l e y_l são convergentes, digamos $x_l \rightarrow x \in X$ e $y_l \rightarrow y \in X$. Tomando o limite na desigualdade acima, obtemos que $\|f(x) - f(y)\|_s = 0$, daí, como f é injetiva, então $x = y$. Novamente, como $\left\{ B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right) \right\}_{i=1}^m$ cobre X , temos que $x = y \in B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right)$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, dessa forma, temos que existe $l_0 \in \mathbb{N}$ x_l e y_l também pertencem à $B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right)$ para todo $l \geq l_0$. Dessa forma, para qualquer $l \geq l_0$,

$$\begin{aligned} \|\psi_i(x_l) \cdot \phi_i(x_l) - \psi_i(y_l) \cdot \phi_i(y_l)\|_s &\leq \sum_{j=1}^n \|\psi_j(x_l) - \psi_j(y_l)\|_s + \|\psi_j(x_l) \cdot \phi_j(x_l) - \psi_j(y_l) \cdot \phi_j(y_l)\|_s \\ &= \|f(x_l) - f(y_l)\|_s \\ &< \frac{1}{l} \|x - y\|_s, \end{aligned}$$

mas $\psi_i\left(B\left(x_i, \frac{r_{j_i x_i}}{2}\right)\right) = \{1\}$, logo, vale que $\|\phi_i(x_l) - \phi_i(y_l)\|_s < \frac{1}{l} \|x_l - y_l\|_s$. Por outro lado, $c\|x_l - y_l\|_s \leq \|\phi_i(x_l) - \phi_i(y_l)\|_s$ para algum $c > 0$ pois ϕ_i é bi-Lipschitz. Dessas duas desigualdades obtivemos que

$$c\|x_l - y_l\|_s < \frac{1}{l} \|x_l - y_l\|_s,$$

ou seja, $c < \frac{1}{l}$ para todo $l \geq l_0$, absurdo.

Portanto, a função f de fato é um mergulho bi-Lipschitz de X em \mathbb{R}^N . \square

Na demonstração acima, quando tomamos a cobertura finita por bolas contidas nas vizinhanças parametrizadas para definir as funções ϕ_i , possivelmente a quantidade de bolas da cobertura ultrapassa a quantidade de vizinhanças parametrizadas, mas nesse caso, como cada bola estava contida em uma vizinhança parametrizada, poderíamos ter tomado a união de todas as bolas contidas em cada V_i e assim encontraríamos uma cobertura de X por n abertos cada um contido em seu respectivo V_i . Tal trabalho não foi feito para não complicar demais as notações. Veja agora que o N encontrado na demonstração acima depende unicamente da quantidade de conjuntos da cobertura finita que utilizamos para definir as ϕ_i e da dimensão da variedade, mais precisamente, $N = m(k + 1)$. Mas pela observação feita no início do parágrafo, poderíamos ter tomado $m = n$, assim, $N = n(k + 1)$, onde n é a quantidade de elementos na cobertura de X por suas vizinhanças parametrizadas. Além disso, note que a hipótese de compacidade foi utilizada somente para obter uma cobertura finita de vizinhanças parametrizadas de X , dessa forma, mesmo que a variedade não seja compacta, caso ela possa ser coberta com uma quantidade finita de vizinhanças parametrizadas, seria possível mergulhá-la em \mathbb{R}^N . De fato, vale o teorema abaixo, que segue diretamente dos resultados encontrados em [10] e do fato de que toda variedade bi-Lipschitz também é variedade topológica.

Teorema 3.2.2. *Toda variedade bi-Lipschitz de dimensão k admite uma cobertura por $k + 1$ vizinhanças parametrizadas.*

Com este Teorema em mãos, podemos enunciar diretamente uma estimativa para a dimensão do espaço euclidiano em que a variedade está sendo mergulhada.

Proposição 3.2.1. *Seja X uma variedade bi-Lipschitz compacta de dimensão k . Então existe um mergulho bi-Lipschitz de $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{(k+1)^2}$.*

Utilizando tais fatos, é demonstrado em [7] que vale de fato um mergulho melhor ainda.

Teorema 3.2.3. *Seja X uma variedade bi-Lipschitz de dimensão k . Então existe um mergulho bi-Lipschitz $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{k(k+1)}$*

4 TEOREMAS DE Mergulho BI-LIPSCHITZ

Neste capítulo, iremos focar na propriedade bi-Lipschitz das aplicações entre conjuntos semialgêbricos e todos os objetivos principais serão baseados em existência e extensões de aplicações com tal propriedade.

4.1 Mergulhos bi-Lipschitz

Agora, veremos o conceito e algumas propriedades básicas de mergulhos bi-Lipschitz.

Definição 4.1.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado (e semialgêbrico) e seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitz injetiva e seja $Y = f(X)$. Dizemos que f é um mergulho bi-Lipschitz (semialgêbrico) se $f: X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz (semialgêbrico).*

Visto que um dos objetivos do trabalho é mostrar que, em certas condições, aplicações bi-Lipschitz podem ser estendidas para todo o espaço, se faz necessário observar que toda função Lipschitz pode ser estendida para todo o espaço, sem nenhuma outra restrição. Este inclusive será um fato importante no desenvolvimento desta seção.

Teorema 4.1.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto qualquer e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ função Lipschitz, então é possível estender f para todo o \mathbb{R}^n , tal extensão sendo Lipschitz. Além disso, a extensão tem a mesma constante Lipschitz que f .*

Demonstração. Digamos que $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$ para $x, y \in X$ quaisquer, defina então $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por $\phi(x) = \sup_{y \in X} \{f(y) - M\|y - x\|\}$. Se $x \in X$, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\| \Rightarrow f(y) - M\|y - x\| \leq f(x)$$

Logo, $f(x)$ é uma cota superior para o conjunto que define $\phi(x)$, e tal cota superior é alcançada quando $y = x$, ou seja, $\phi(x) = f(x)$.

Agora, falta apenas mostrar que de fato ϕ satisfaz a condição Lipschitz com a constante M . Para isso, tome $x, x' \in \mathbb{R}^n$ e, sem perda de generalidade, suponha que $\phi(x') \geq \phi(x)$. Então, a menos que $\phi(x) = \phi(x') = \infty$, temos que

$$\begin{aligned}
0 \leq \phi(x') - \phi(x) &= \sup_{y \in X} \{f(y) - M\|y - x'\|\} - \sup_{y \in X} \{f(y) - M\|y - x\|\} \\
&\leq \sup_{y \in X} \{(f(y) - M\|y - x'\|) - (f(y) - M\|y - x\|)\} \\
&= M \cdot \sup_{y \in X} \{\|y - x'\| - \|y - x\|\} \\
&\leq M \cdot \sup_{y \in X} \{\|x' - x\|\} \\
&= M \cdot \|x' - x\|
\end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se

$$|\phi(x') - \phi(x)| \leq M\|x' - x\| \quad (4.1)$$

desde que $\phi(x'), \phi(x) \neq \infty$. Note agora que dado $x \in \mathbb{R}^n$ qualquer e $x' \in X$, $\phi(x') = f(x')$ é finito, logo, a equação 4.1 vale, e então $\phi(x)$ também é finito. Portanto, $\phi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ estende f e é Lipschitz com mesma constante Lipschitz de f . \square

Note que o Teorema 4.1.1 está enunciado para funções com imagem em \mathbb{R} , mas caso $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ for uma função Lipschitz, estendendo cada função coordenada, também obtemos $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz tal que $F|_X = f$, mas aqui a constante Lipschitz pode não ser a mesma.

Corolário 4.1.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ função Lipschitz semialgébrica, então é possível estender f para todo o \mathbb{R}^n , tal extensão sendo Lipschitz e semialgébrica. Além disso, a extensão tem a mesma constante Lipschitz que f .*

Demonstração. O Teorema 4.1.1 garante que a função $F(x) = \sup_{y \in X} \{f(y) - M\|y - x\|\}$ estende f , é Lipschitz e tem mesma constante Lipschitz de f . Agora, veja que

$$\begin{aligned}
\Gamma_F &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t = F(x)\} \\
&= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t = \sup_{y \in X} \{f(y) - M\|y - x\|\}\} \\
&= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 (\exists y \in X (t < f(y) - M\|y - x\|))\}
\end{aligned}$$

é um conjunto semialgébrico pelo Teorema 2.1.2 e pela Proposição 2.2.4. \square

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado e seja $\mathbf{V}(X)$ o conjunto de todas as funções Lipschitz de X em \mathbb{R} . Então, $\mathbf{V}(X)$ é claramente um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Agora, se X é

fechado e semialg\u00e9brico, denotamos por $\mathbf{VS}(X)$ o conjunto de todas as fun\u00e7\u00f5es Lipschitz e semialg\u00e9bricas de X em \mathbb{R} . Para notar que $\mathbf{VS}(X)$ tamb\u00e9m \u00e9 espa\u00e7o vetorial, basta demonstrar o resultado abaixo.

Proposi\u00e7\u00e3o 4.1.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ semialg\u00e9brico e $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ fun\u00e7\u00f5es semialg\u00e9bricas, ent\u00e3o $f + g$ \u00e9 semialg\u00e9brica.*

Demonstra\u00e7\u00e3o. Como f e g s\u00e3o semialg\u00e9bricas, ent\u00e3o a fun\u00e7\u00e3o $h: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = (f(x), g(x), y)$ \u00e9 semialg\u00e9brica, pois cada fun\u00e7\u00e3o coordenada \u00e9 semialg\u00e9brica. Tome $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polin\u00f4mio dado por $P(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$, dessa forma, pela Proposi\u00e7\u00e3o 2.2.4, temos que o conjunto $\{(x, y) : P(h(x)) = 0\}$ \u00e9 semialg\u00e9brico. Ora, $P(h(x)) = f(x) + g(x) - y$, assim, obtemos que $\Gamma_{f+g} = \{(x, y) : P(h(x)) = 0\}$, concluindo a demonstra\u00e7\u00e3o. \square

Corol\u00e1rio 4.1.2. *$\mathbf{VS}(X)$ \u00e9 um espa\u00e7o vetorial.*

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma fun\u00e7\u00e3o Lipschitz, ent\u00e3o f induz um homomorfismo entre espa\u00e7os vetoriais $\mathbf{V}(f): \mathbf{V}(Y) \rightarrow \mathbf{V}(X)$ dado por $\mathbf{V}(f)(h) = h \circ f$. Se f for Lipschitz e semialg\u00e9brica, analogamente, f induz o homomorfismo $\mathbf{VS}(f): \mathbf{VS}(Y) \rightarrow \mathbf{VS}(X)$ dado por $\mathbf{VS}(f)(h) = h \circ f$.

Em particular, tomando a fun\u00e7\u00e3o para ser a inclus\u00e3o can\u00f4nica $\iota: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos $\mathbf{V}(\iota)$ por ι^* , que, por defini\u00e7\u00e3o, \u00e9 o homomorfismo restri\u00e7\u00e3o. Com o Teorema 4.1.1, temos que ι^* \u00e9 sobrejetivo. Mais geralmente, o seguinte resultado \u00e9 v\u00e1lido.

Proposi\u00e7\u00e3o 4.1.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma fun\u00e7\u00e3o Lipschitz. Ent\u00e3o as seguintes afirma\u00e7\u00f5es s\u00e3o equivalentes:*

- f \u00e9 um mergulho bi-Lipschitz.
- A aplica\u00e7\u00e3o induzida $\mathbf{V}(f): \mathbf{V}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbf{V}(X)$ \u00e9 sobrejetiva.

Demonstra\u00e7\u00e3o. \Rightarrow Seja $Y = f(X)$ e $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ dada por $\tilde{f}(x) = f(x)$, sabemos que Y \u00e9 fechado e ent\u00e3o a aplica\u00e7\u00e3o

$$\mathbf{V}(\tilde{f}): \mathbf{V}(Y) \rightarrow \mathbf{V}(X)$$

$$\alpha \mapsto \alpha \circ f$$

\u00e9 um isomorfismo, pois como \tilde{f} \u00e9 bijetiva, \u00e9 claro que se tomamos $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbf{V}(Y)$, ent\u00e3o $\alpha_1 \circ f \neq \alpha_2 \circ f$, j\u00e1 para a sobrejetividade, dado $g \in \mathbf{V}(X)$, tome $\alpha = g \circ \tilde{f}^{-1}$, que \u00e9 claramente Lipschitz j\u00e1 que \tilde{f}^{-1} o \u00e9, da\u00ed, $\mathbf{V}(\tilde{f})(\alpha) = g$.

Agora, seja $\iota: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ a inclusão canônica, como observado logo antes desta proposição, $\mathbf{V}(\iota)$ é sobrejetiva. Daí, basta notar que $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(\tilde{f}) \circ \mathbf{V}(\iota)$.

\Leftrightarrow Sejam x_1, \dots, x_m as coordenadas de \mathbb{R}^m , visto que $\alpha_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$ são funções Lipschitz para $i = 1, \dots, m$, temos que, pela sobrejetividade de $\mathbf{V}(f)$, existem $H_i \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^n)$ tais que $H_i \circ f(x_1, \dots, x_m) = x_i$ para $i = 1, \dots, m$. Defina então $H = (H_1, \dots, H_m)$. Temos que $H \circ f(x) = x$.

A partir disso, note que para $y \in f(X)$, tem-se $f^{-1}(\{y\}) = \{H(y)\} \subset X$, pois como $y \in f(X)$, então existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, logo por um lado tem-se $H(y) = x \in X$ e daí $f(H(y)) = f(x) = y$, ou seja, $f^{-1}(\{y\}) \supset \{H(y)\}$. Por outro lado, se existisse outro ponto em $x' \neq x \in X$ tal que $f(x') = y$, então $H(y) = H(f(x')) = x' \neq x = H(f(x)) = H(y)$. Logo, $f: X \rightarrow f(X)$ é bijetiva e sua inversa em $f(X)$ é $f^{-1} = H$, que é uma função Lipschitz. Portanto, f é um mergulho bi-Lipschitz. \square

Em [8] é provado o resultado abaixo com a mesma demonstração de 4.1.2.

Proposição 4.1.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico fechado e $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função Lipschitz e semialgébrica. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- f é um mergulho bi-Lipschitz semialgébrico.
- A aplicação induzida $\mathbf{VS}(f): \mathbf{VS}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{VS}(X)$ é sobrejetiva.

4.2 Projeções como mergulhos bi-Lipschitz

Nesta seção serão vistos dois lemas que desempenham papel fundamental na demonstração de todos os resultados principais do trabalho. O próximo lema garante que a projeção em algumas coordenadas definida em um conjunto fechado pode ser estendida para todo o espaço desde que ela seja um mergulho bi-Lipschitz, tal fato será utilizado para provar os teoremas de extensão que são o objetivo do trabalho.

Lema 4.2.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $d < n$. Suponha que a projeção $\pi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$ seja um mergulho bi-Lipschitz. Então existe um homeomorfismo bi-Lipschitz $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Pi|_X = \pi$.*

Demonstração. Seja $Y = \pi(X)$, como π é mergulho bi-Lipschitz, Y é fechado de \mathbb{R}^n . Além disso, a Proposição 4.1.2 garante que $\mathbf{V}(\pi): \mathbf{V}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{V}(X)$ é sobrejetiva. Dessa forma, para cada $s > d$, existe $p_s \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{V}(\pi)(p_s) = x_s$, ou seja, $x_s = p_s \circ \pi(x_1, \dots, x_n) = p_s(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$

em X . Considere então a aplicação

$$\Pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1} - p_{d+1} \circ \pi(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n - p_n \circ \pi(x_1, \dots, x_n))$$

Desde que $p_s \circ \pi = x_s$ em X , temos que $\Pi|_X = \pi$.

Por fim, basta mostrarmos que Π é um homeomorfismo bi-Lipschitz. Claramente Π é Lipschitz, pois suas funções coordenadas o são. A injetividade é trivial desde que as d primeiras funções coordenadas de Π são injetivas. Para a sobrejetividade, seja $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, agora, para cada $s > d$ e para b_{d+1}, \dots, b_n números reais quaisquer, sejam $a_s = p_s \circ \pi(y_1, \dots, y_d, b_{d+1}, \dots, b_n) = p_s(y_1, \dots, y_d, 0, \dots, 0)$ (o valor independe das $n - d$ últimas coordenadas), dessa forma temos que $\Pi(y_1, \dots, y_d, y_{d+1} + a_{d+1}, \dots, y_n + a_n) = (y_1, \dots, y_n)$. Por fim, como vimos na sobrejetividade, fica claro notar que a inversa de Π é dada por $\Pi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_d, y_{d+1} + p_{d+1} \circ \pi(y_1, \dots, y_n), \dots, y_n + p_n \circ \pi(y_1, \dots, y_n))$, que também é claramente Lipschitz. Portanto, Π é homeomorfismo bi-Lipschitz. \square

A forma que tal extensão é construída também será importante nos resultados futuros, isto é, é importante lembrar que a extensão é produzida como uma aplicação da forma $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + f_{d+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n + f_n(x_1, \dots, x_n))$ onde f_{d+1}, \dots, f_n são Lipschitz. Também vale ressaltar que a projeção poderia ter sido tomada em outras coordenadas que não sejam necessariamente as $2k + 1$ primeiras.

A partir de agora, podemos iniciar a demonstração do Teorema 5.1.1, a ideia é de que, a menos de uma mudança de coordenadas, a projeção nas $2k + 1$ primeiras coordenadas é um mergulho bi-Lipschitz, assim, o mergulho que estamos buscando no Teorema 5.1.1 será a composição desta tal projeção com a mudança de base. Dito isto, vamos primeiro mostrar o lema abaixo.

Lema 4.2.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado e semialgébrico e seja $k = \dim X$. Se $n > 2k + 1$, então existe um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) tal que a projeção $\pi: X \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{2k+1}, 0, \dots, 0)$ é um mergulho bi-Lipschitz.*

Demonstração. Seja $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$, note que Δ é semialgébrico de dimensão k , pois é homeomorfo à X desde que Δ é o gráfico da função identidade em X . Logo, desde que $\dim \Delta < \dim X \times X$, temos que $\dim(X \times X \setminus \Delta) = \dim X \times X = 2k$ pela Proposição 2.3.3. Em

seguida, tome a aplicação

$$A: X \times X \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

Claramente A é uma função semialgébrica pois é quociente de funções semialgébricas onde o denominador não se anula, então $\Lambda = A(X \times X \setminus \Delta)$ é um conjunto semialgébrico, de dimensão no máximo $2k < n - 1$ pelo Teorema 2.3.3. Dessa forma, $\Sigma = \overline{\Lambda}$ também tem dimensão no máximo $2k < n - 1$ pela Proposição 2.3.2.

Assim, $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \Sigma \neq \emptyset$. Seja então $p \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \Sigma$, temos que p define uma direção P em \mathbb{R}^n , seja então $H \subset \mathbb{R}^n$ um hiperplano ortogonal à direção dada por p . Como $p \notin \Lambda$, a projeção $S: X \rightarrow H$ dada por $S(x) = Px \cap H$ é injetiva. De fato, a reta que passa por x e tem direção dada por p toca um único ponto de X , pois se tocasse em dois pontos $x, y \in X$, teríamos $A(X \times X \setminus \Delta) \ni A(x, y) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ define a mesma direção que P , um absurdo. Afirimo agora que S é uma aplicação própria. De fato, seja $K \subset H$ compacto e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S^{-1}(K)$ uma sequência em sua pré-imagem. A menos de passagem para uma subsequência, podemos assumir que $S(x_n)$ é convergente visto que $S(x_n) \in K$, queremos mostrar que $\{x_n\}$ possui subsequência convergente. Caso $\{x_n\}$ não possua subsequência convergente, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m(n) > n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_{m(n)}| \geq \varepsilon$. Como $S(x_n)$ é a projeção de x_n em H na direção dada por P , temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe λ_n tal que $x_n - S(x_n) = \lambda_n \cdot P$. Temos então a equação seguinte:

$$\frac{x_n - x_{m(n)}}{\|x_n - x_{m(n)}\|} + \frac{S(x_{m(n)}) - S(x_n)}{\|x_n - x_{m(n)}\|} = \frac{\lambda_n - \lambda_{m(n)}}{\|x_n - x_{m(n)}\|} \cdot P$$

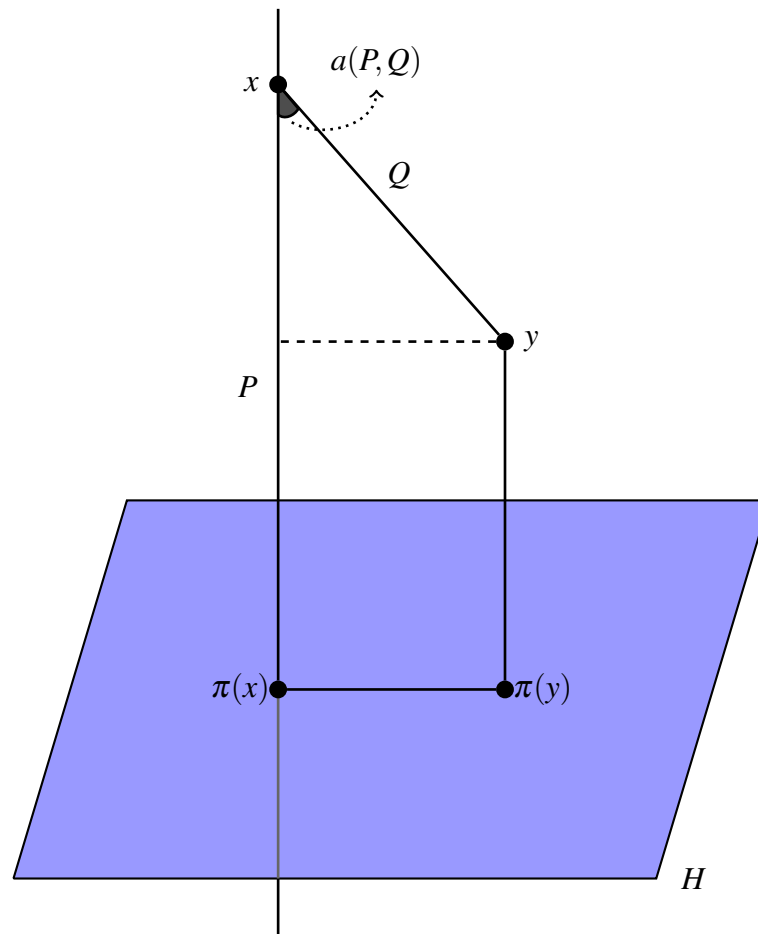
Dessa forma, como o primeiro termo da soma pertence à esfera unitária, que é compacta, a menos novamente de passagem para subsequência, podemos assumir que $\frac{x_n - x_{m(n)}}{\|x_n - x_{m(n)}\|}$ converge. Além disso, $\frac{S(x_{m(n)}) - S(x_n)}{\|x_n - x_{m(n)}\|}$ converge para 0 desde que seu denominador é limitado inferiormente e seu numerador converge para 0. Logo, tem-se que $\frac{\lambda_n - \lambda_{m(n)}}{\|x_n - x_{m(n)}\|}$ converge, digamos que para λ , ou seja, encontramos uma sequência de pares de pontos x_n e $x_{m(n)}$ tal que $\lim \frac{x_n - x_{m(n)}}{\|x_n - x_{m(n)}\|} = \lambda \cdot P$, em outras palavras a direção dada por $\lim A(x_n - x_{m(n)})$ é P , logo $P \in \Sigma = \overline{\Lambda}$, absurdo do fato de supormos que $\{x_n\}$ não possuía subsequência convergente. Mostramos então que S é uma aplicação própria.

Seja $a(P, Q)$ o ângulo entre a reta dada pela direção P e a reta dada pelo ponto $Q \in \Sigma$,

digamos $P = (p_1, \dots, p_n)$ e $Q = (q_1, \dots, q_n)$, tem-se então que

$$\text{sen}(a(P, Q)) = \sqrt{1 - \frac{(\sum_{i=1}^n p_i q_i)}{(\sum_{i=1}^n p_i^2)(\sum_{i=1}^n q_i^2)}}$$

A função $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(Q) = \text{sen}(a(P, Q))$ é contínua e estritamente positiva, pois $P \notin \Sigma$, logo $a(P, Q) \neq 0$ e $a(P, Q) \neq \pi$. Logo, desde que Σ é compacto, pois é fechado contido na esfera, que é compacta e de Hausdorff, temos que F atinge um mínimo, o qual é estritamente positivo, ou seja, existe $c > 0$ tal que $\text{sen}(a(P, Q)) \geq c > 0$ para todo $Q \in \Sigma$. Assim, se tomarmos o novo sistema de coordenadas para ser o sistema em que o hiperplano H representa as $n - 1$ primeiras coordenadas, ou seja, aplicando em \mathbb{R}^n o isomorfismo linear que mapeia H em $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, temos que a projeção π de X nas $n - 1$ primeiras coordenadas nesse novo sistema nada mais é que a projeção ortogonal de X em H , que chamamos de S . Com isso feito, veremos facilmente que a projeção π é bi-Lipschitz.



De fato, dados $x, y \in X$ quaisquer, temos que $\pi(x)$ e $\pi(y)$ são suas projeções ortogonais em H , daí é claro que $\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|x - y\|$ pois os catetos de um triângulo retângulo

são sempre menores que sua hipotenusa. Por outro lado, pela definição de seno, se $Q = [x - y]$ temos que

$$\begin{aligned} \text{sen}(a(P, Q)) &= \frac{\|\pi(x) - \pi(y)\|}{\|x - y\|} \\ \Rightarrow c &\leq \frac{\|\pi(x) - \pi(y)\|}{\|x - y\|} \\ \Rightarrow c\|x - y\| &\leq \|\pi(x) - \pi(y)\| \end{aligned}$$

Portanto, π é bi-Lipschitz satisfazendo $c\|x - y\| \leq \|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|x - y\|$.

Com isso, obtivemos que a projeção de X é nas $n - 1$ primeiras coordenadas em tal sistema de coordenadas é bi-Lipschitz. Caso $n - 1 = 2k + 1$, o resultado está finalizado, já caso $n - 1$ ainda seja maior que $2k + 1$, podemos considerar a imagem dessa projeção como subconjunto de \mathbb{R}^{n-1} , repetir o processo e encontrar outro sistema de coordenadas tal que a projeção nas $n - 2$ primeiras coordenadas seja bi-Lipschitz. Repetindo indutivamente tal procedimento, é possível encontrar no fim, quando estivermos com um conjunto semialgébrico em \mathbb{R}^{2k+2} , um sistema de coordenadas que torna a projeção nas $2k + 1$ primeiras coordenadas bi-Lipschitz, finalizando assim a demonstração. \square

Note que no Lema 4.2.2, a projeção não necessariamente precisa ser nas $2k + 1$ primeiras coordenadas, afinal, o Lema encontra uma direção na qual podemos projetar o conjunto X , após isso apenas mudamos as variáveis para tornar tal projeção como a projeção nas $2k + 1$ primeiras coordenadas. Dessa forma, trocando o sistema de coordenadas, podemos encontrar uma projeção em quaisquer $2k + 1$ dentre as n coordenadas. Na demonstração do Teorema 5.2.1 por exemplo, utilizaremos o Lema 4.2.2 para encontrar uma projeção nas $2k + 1$ últimas coordenadas.

Observe também que, em termos métricos, as aplicações $\pi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\pi}: X \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ dadas por $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{2k+1}, 0, \dots, 0)$ e $\tilde{\pi}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{2k+1})$ são essencialmente iguais visto que as $n - 2k - 1$ coordenadas adicionais com 0's na primeira aplicação não alteram as distâncias. Ou seja, $\|\pi(x) - \pi(y)\| = \|\tilde{\pi}(x) - \tilde{\pi}(y)\|$. O que implica que π é bi-Lipschitz se, e somente se $\tilde{\pi}$ é bi-Lipschitz. Dessa forma, poderíamos ter enunciado o lema utilizando a projeção em \mathbb{R}^{2k+1} .

5 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados e demonstrados os dois principais resultados desse trabalho, a existência de um mergulho bi-Lipschitz de um conjunto semialgébrico e a extensão de uma função bi-Lipschitz para todo o espaço, ambos os resultados provados em [3].

5.1 Existência do mergulho bi-Lipschitz

Com o Lema 4.2.2 em mãos, a demonstração do primeiro resultado principal segue de maneira imediata.

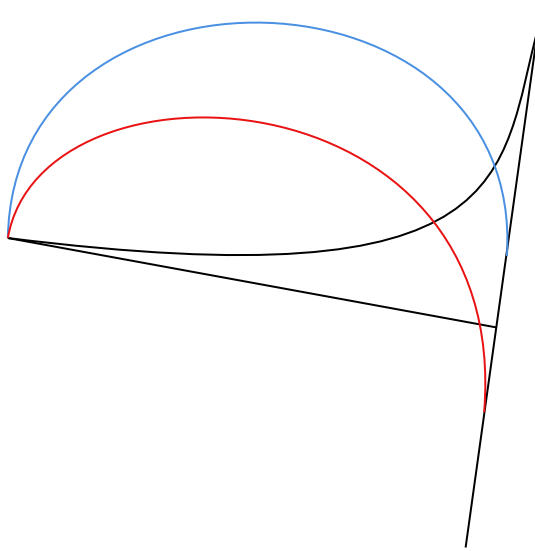
Teorema 5.1.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado e semialgébrico de dimensão k . Então existe um mergulho bi-Lipschitz semialgébrico $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$.*

Demonstração. Primeiramente, note que podemos ver X como subconjunto de \mathbb{R}^m para qualquer $m > n$ se for necessário para termos $m > 2k + 1$. Pelo Lema 4.2.2 existe uma mudança de coordenadas $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, vendo \mathbb{R}^n nessas novas coordenadas, a projeção nas $2k + 1$ primeiras coordenadas $\pi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho bi-Lipschitz. Ora, desde que A é um isomorfismo linear, tanto A quanto A^{-1} são Lipschitz. Além disso, A é polinomial, logo é semialgébrico. Com isso temos que A é um homeomorfismo bi-Lipschitz, e a função buscada pelo Teorema nada mais é que a composição da projeção com a mudança de coordenadas A . \square

A estimativa dada no Teorema acima é precisa, ou seja, pode ser que exista um mergulho bi-Lipschitz para alguma dimensão menor que $2k + 1$ a depender do conjunto, mas não há garantia de que isso ocorre. De fato, abaixo podemos ver um exemplo de um conjunto semialgébrico fechado de dimensão 1 em \mathbb{R}^3 que não pode ser mergulhado de maneira bi-Lipschitz em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 5.1.1. *Na figura abaixo vemos um conjunto semialgébrico, fechado e conexo por caminhos de dimensão 1 em \mathbb{R}^3 , segue de 2.4.1 que se existisse um mergulho bi-Lipschitz da curva abaixo para \mathbb{R}^2 , o contato em 0 da curva azul e da curva vermelha com as duas curvas pretas que a tocam deve se manter.*

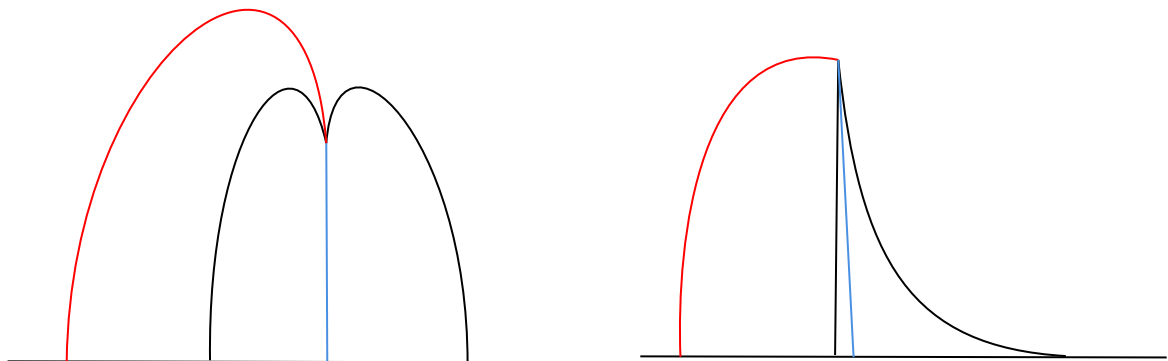
Figura 10 – Conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ onde as curvas em pret estão contidas num plano e as curvas azul e vermelha partem e chega no plano de maneira transversal.



Fonte: elaborada pelo autor.

No entanto, é fácil ver que as curvas azul e vermelha têm contato igual a 1 com as duas curvas pretas que as tocam, pois partem do plano de forma transversal, logo suas tangentes não estão contidas no plano, que é o caso das curvas pretas. Por outro lado, caso o mergulho bi-Lipschitz existisse, o contato entre as duas curvas pretas deve permanecer diferente de 1, assim, o mergulho deveria ser algo semelhante com as ilustrações abaixo

Figura 11 – Duas possibilidades de mergulho no \mathbb{R}^2 .



Fonte: elaborada pelo autor.

No primeiro caso, o contato entre a curva azul e as curvas pretas permanece diferente de 1, mas o contato da curva vermelha com as curvas pretas passa a ser 1. Semelhantemente,

no segundo caso, o contato entre a curva vermelha e as curvas pretas permanece diferente de 1, mas o contato da curva azul com as curvas pretas passa a ser 1. Portanto, não há como mergulhar X em \mathbb{R}^2 de maneira bi-Lipschitz.

5.2 Extensões de aplicações bi-Lipschitz

Como vimos no Teorema 4.1.1, toda função Lipschitz pode ser estendida para outra função Lipschitz definida em todo o espaço. Nesta seção, veremos que o mesmo é possível para funções bi-Lipschitz desde que certas condições de dimensão sejam satisfeitas.

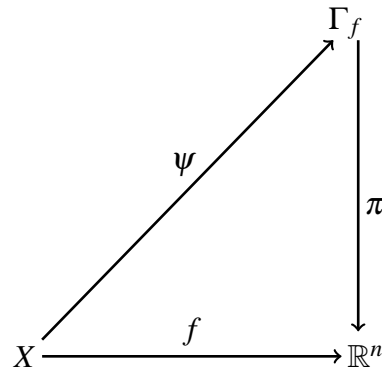
Lema 5.2.1. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ fechados e suponha que existam subespaços lineares S_1 e S_2 com $\dim S_1 = d$ e $\dim S_2 = n - d$ tais que $X \subset S_1$ e $Y \subset S_2$. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho bi-Lipschitz com $f(X) = Y$, então existe um homeomorfismo bi-Lipschitz $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F|_X = f$.*

Demonstração. Primeiramente, note que existem isomorfismos lineares $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com determinante 1 de modo que $A \circ f \circ B|_{B^{-1}(X)}: B^{-1}(X) \rightarrow A(Y)$ é tal que $B^{-1}(X) \subset \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ e $A(Y) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$. De fato, para construir A , seja $B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ base ortonormal de \mathbb{R}^n tal que $\{b_{n-d+1}, \dots, b_n\}$ é base de S_2 , assim, defina $A(b_i) = e_i$, onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n e estenda A por linearidade, temos assim um isomorfismo linear tal que $A(S_2) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$ visto que $\{e_{n-d+1}, \dots, e_n\}$ é base de $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$. Além disso, $\det A = \pm 1$, e caso seja -1 , podemos trocar b_n por $-b_n$ na base de S_2 e obter o resultado desejado. De forma análoga, é possível definir B com $\det B = 1$ tal que $B(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = S_1$.

Com isso, podemos assumir que $S_1 = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ e $S_2 = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$. De fato, se o resultado vale para $A \circ f \circ B$, que é um mergulho bi-Lipschitz, onde os subespaços dados pelas hipóteses do Teorema são exatamente $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$, então existe G extensão satisfazendo as propriedades desejadas. Podemos definir então $F = A^{-1} \circ G \circ B$ para ser a extensão de f , que também satisfaz as propriedades desejadas. Assumindo então $S_1 = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ e $S_2 = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$, escreveremos a partir de agora um ponto genérico de X como $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}^d$ e $0 \in \mathbb{R}^{n-d}$, e um ponto genérico de Y como $(0, y)$, com $0 \in \mathbb{R}^d$ e $y \in \mathbb{R}^{n-d}$. Seja Γ_f o gráfico de f , que é um conjunto fechado. Visto que $X \subset S_1$ e $Y \subset S_2$, podemos identificar cada ponto $((x, 0), (0, f(x, 0))) \in \Gamma_f$ com o ponto $(x, f(x, 0)) \in \mathbb{R}^n$, dessa forma, vamos ver Γ_f como um subconjunto de \mathbb{R}^n .

Seja $\psi: X \rightarrow \Gamma_f$ dada por $\psi(x, 0) = (x, f(x, 0))$ e $\pi: \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção nas $n - d$ últimas coordenadas, ou seja, a projeção do gráfico de f em Y , temos então que $f(x, 0) =$

$\pi \circ \psi(x, 0)$, em outras palavras, o diagrama abaixo comuta



Desde que f é uma aplicação bi-Lipschitz, ψ também o é, pois é claramente bijetiva e suas funções coordenadas são bi-Lipschitz, logo, π é um mergulho bi-Lipschitz. Pelo Lema 4.2.1, existe um homeomorfismo bi-Lipschitz $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Pi|_{\Gamma_f} = \pi$. Além disso, como $X \subset \mathbb{R}^d \times \{0\} \cong \mathbb{R}^d$, a observação dada após o Teorema 4.1.1 garante que existe $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ função Lipschitz tal que $\tilde{f}|_X = f$. Defina então $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\Psi(x, y) = (x, y + \tilde{f}(x, 0))$, aqui $x \in \mathbb{R}^d$ e $y \in \mathbb{R}^{n-d}$. É claro que $\Psi|_X = \psi$, pois em X , a coordenada y é nula, logo $\Psi(x, 0) = (x, f(x, 0)) = \psi(x, 0)$. Além disso, Ψ é claramente injetiva e tem inversa dada por $\Psi^{-1}(w, z) = (w, z - \tilde{f}(w, 0))$, que garante a sobrejetividade e também garante que a inversa é Lipschitz. Portanto, Ψ é um homeomorfismo bi-Lipschitz que estende ψ . Em particular, tem-se $f = (\Pi \circ \Psi)|_X$. Logo, a função $F = \Pi \circ \Psi$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz tal que $F|_X = f$ como desejado. \square

Agora, se pedirmos que dois conjuntos semialgêbricos fechados X e Y tenham a mesma dimensão e estejam dentro de um espaço de dimensão suficientemente grande, é possível estender uma função bi-Lipschitz entre tais conjuntos, pois com ajuda do Lema 4.2.2 conseguimos encaixar X e Y nas hipóteses do Lema 5.2.1.

Teorema 5.2.1. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ semialgêbricos fechados de dimensão k . Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação bi-Lipschitz. Se $n \geq 4k + 2$, então existe uma aplicação bi-Lipschitz $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F|_X = f$. Além disso, F é isotópico à identidade, ou seja, existe uma aplicação contínua $\bar{F}: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $t \in [0, 1]$, a aplicação $F_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $F_t(x) := \bar{F}(x, t)$ é bi-Lipschitz, $F_0 = Id$ e $F_1|_X = f$.*

Demonstração. Aplicando o Lema 4.2.2 em X , a menos de uma mudança no sistema de coordenadas do domínio, podemos supor que a projeção de X nas $2k + 1$ primeiras coordenadas é um

mergulho bi-Lipschitz. Da mesma maneira, aplicando o Lema 4.2.2 em $f(X)$, a menos de uma mudança no sistema de coordenadas do contradomínio, podemos supor que a projeção de $f(X)$ nas $2k + 1$ últimas coordenadas é um mergulho bi-Lipschitz. Digamos que as projeções são π_1 e π_2 respectivamente. Agora, pelo Lema 4.2.1, existem $\Pi_1, \Pi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismos bi-Lipschitz que estendem π_1 e π_2 respectivamente. Dessa forma, temos que $\Pi_1(X) \subset \mathbb{R}^{2k+1} \times \{0\}$ e $\Pi_2(f(X)) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{2k+1} \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-(2k+1)}$.

Seja agora $\tilde{f}: \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_2(f(X)) \subset \mathbb{R}^n$ dada pela igualdade $\tilde{f} = \Pi_2 \circ f \circ \Pi_1^{-1}$, temos então que \tilde{f} se encaixa nas hipóteses do Lema 5.2.1, assim, existe $\tilde{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitz tal que $\tilde{F}|_{\Pi_1(X)} = \tilde{f}$. Portanto, a aplicação $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F = \Pi_2^{-1} \circ \tilde{F} \circ \Pi_1$ ainda é bi-Lipschitz e tem-se que

$$\begin{aligned} F|_X &= (\Pi_2^{-1} \circ \tilde{F} \circ \Pi_1)|_X \\ &= \Pi_2^{-1}|_{\tilde{F}(\Pi_1(X))} \circ \tilde{F}|_{\Pi_1(X)} \circ \Pi_1|_X \\ &= \Pi_2^{-1}|_{\tilde{f}(\pi_1(X))} \circ \tilde{f} \circ \pi_1 \\ &= \pi_2^{-1} \circ \tilde{f} \circ \pi_1 \\ &= f. \end{aligned}$$

Além disso, note que a extensão encontrada nada mais é do que a composta de dois isomorfismos lineares, que podem ser tomados para ter determinante positivo, com a extensão dada pelo Lema 5.2.1, que por sua vez é a composta de duas aplicações da forma $(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + f_{d+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n + f_n(x_1, \dots, x_n))$ onde f_{d+1}, \dots, f_n são Lipschitz. Ou seja, basta mostrarmos que isomorfismos lineares de determinante positivo e que aplicações da forma dada acima são isotópicos à identidade, pois é claro que se $G: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isotopia entre g e Id e $H: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isotopia entre h e Id , então a aplicação $(x, t) \mapsto H_t \circ G_t(x)$ define uma isotopia entre $h \circ g$ e Id . Sendo assim, a conexidade por caminhos do conjunto de todas as matrizes $n \times n$ de determinante positivo garante que qualquer isomorfismo linear de determinante positivo é isotópico à identidade, tal isotopia nada mais é que o caminho que liga a identidade à matriz que representa o isomorfismo. Para finalizar, basta notar que $(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + t f_{d+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n + t f_n(x_1, \dots, x_n))$ é uma isotopia entre a identidade e a aplicação da forma dada no início do parágrafo. \square

O Teorema 5.2.1 garante uma espécie de unicidade no mergulho bi-Lipschitz se a dimensão do espaço tiver uma certa folga. De fato, temos o resultado abaixo.

Corolário 5.2.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico fechado de dimensão k . Se $n \geq 4k + 2$, então X possui um único mergulho bi-Lipschitz em \mathbb{R}^n a menos de aplicações bi-Lipschitz de \mathbb{R}^n . Ou seja, se $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ são mergulhos bi-Lipschitz, então existe uma aplicação bi-Lipschitz $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(f(X)) = g(X)$.*

Demonstração. A existência de um mergulho bi-Lipschitz é garantida pelo Teorema 5.1.1, pois \mathbb{R}^{2k+1} pode ser visto como subconjunto de \mathbb{R}^n . Para a unicidade, note que como $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ são mergulhos bi-Lipschitz, então $f(X)$ e $g(X)$ tem a mesma dimensão de X pelo Teorema 2.3.3. Além disso, a aplicação $g \circ f^{-1}: f(X) \rightarrow g(X)$ é bi-Lipschitz, assim, pelo Teorema 5.2.1, tem-se que existe uma aplicação bi-Lipschitz $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(f(X)) = g(X)$. \square

Perceba que a chamada do Teorema 5.1.1 para a existência não é realmente necessária, pois ele nos dá um mergulho bi-Lipschitz de X em \mathbb{R}^{2k+1} . No entanto, como o Corolário 5.2.1 fala de mergulhos em \mathbb{R}^n , poderíamos ter tomado a aplicação identidade que é um exemplo trivial de mergulho bi-Lipschitz de $X \subset \mathbb{R}^n$ para \mathbb{R}^n . De qualquer maneira, tal chamada foi feita para mostrar que de fato podem haver diversos mergulhos de X em \mathbb{R}^n , mas estes todos sendo equivalentes entre si.

REFERÊNCIAS

- [1] BENEDETTI, Riccardo; RISLER, Jean-Jacques. **Real algebraic and semialgebraic sets**. Paris: Hermann, 1991.
- [2] BIRBRAIR, Lev; FERNANDES, Alexandre. Metric theory of semialgebraic curves. **Rev. Mat. Complut**, v. 13, n. 2, p. 369–382, 2000.
- [3] BIRBRAIR, Lev; FERNANDES, Alexandre; JELONEK, Zbigniew. On the extension of bi-Lipschitz mappings. **Selecta Mathematica**, v. 27, n. 2, p. 1–23, 2021.
- [4] COSTE, Michel. **An introduction to semialgebraic geometry**. France, 2000.
- [5] FOLLAND, Gerald B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. New York: Wiley, 1999.
- [6] LEE, John M. **Introduction to smooth manifolds**. New York: Springer, 2013.
- [7] LUUKKAINEN, Jouni; VÄISÄLÄ, Jussi. **Elements of Lipschitz topology**. Helsinki: University of Helsinki, 1976.
- [8] MCSHANE, Edward James. Extension of range of functions. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 40, n. 12, p. 837–842, 1934.
- [9] MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.
- [10] OSTRAND, Phillip A. Covering dimension in general spaces. **General Topology and its applications**, v. 1, n. 3, p. 209–221, 1971.
- [11] SAMPAIO, José Edson. **Regularidade Lipschitz, invariância da multiplicidade e a geometria dos cones tangentes de conjuntos analíticos**. 2015. 56 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
- [12] WHITNEY, Hassler. The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space. **Annals of Mathematics**, v. 45, n. 2, p. 220–246, Apr. 1944.