



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOÃO FRANCISCO DA SILVA FILHO

SOLITONS DE RICCI E MÉTRICAS QUASI-EINSTEIN  
EM VARIEDADES HOMOGÊNEAS

FORTALEZA  
2013

JOÃO FRANCISCO DA SILVA FILHO

SOLITONS DE RICCI E MÉTRICAS QUASI-EINSTEIN  
EM VARIEDADES HOMOGÊNEAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa  
Ribeiro Júnior

FORTALEZA  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

S58s Silva Filho, João Francisco da  
Solitons de Ricci e métricas quasi-Einstein em variedades homogêneas / João Francisco da Silva  
Filho. – 2013.  
84 f. : enc. ; 31 cm

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.  
Área de Concentração: Geometria diferencial  
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Geometria riemanniana. 2. Variedades riemannianas. 3. Variedades homogêneas. 4. Solitons de  
Ricci. 5. Métricas quasi-Einstein. I. Título.

---

CDD 516.373

Dedico este trabalho a todas as pessoas que  
contribuíram direta ou indiretamente com a  
sua realização.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado força, coragem e determinação para superar mais esse desafio, conquistando uma vitória que há alguns anos parecia apenas um sonho distante e pouco a pouco foi tornando-se realidade. Aos meus pais João Francisco da Silva (*in memoriam*) e Maria de Nazareth Silva pela educação que me deram e por todo o cuidado que tiveram com a minha formação, pois mesmo diante das dificuldades, sempre conseguiram priorizar os meus estudos.

Novamente à minha mãe Maria de Nazareth Silva e minhas irmãs Paula Maria da Silva e Poliana Silva por todo apoio, carinho, compreensão e incentivo ao longo dessa caminhada de pouco mais de uma década que inclui Graduação, Mestrado e Doutorado e principalmente por sempre terem acreditado no meu sucesso. Aos meus cunhados José Ivan Couto da Silva e Maurílio Pereira de Lima pela amizade e receptividade nas minhas visitas a Juazeiro do Norte.

Ao professor Ernani de Sousa Ribeiro Júnior pela orientação, pela parceria que começou quando ainda erámos colegas de Doutorado, pela amizade desde o Mestrado, pelos ensinamentos, conselhos, pela paciência e por sempre procurar aproveitar as minhas idéias da melhor maneira possível. Não poderia deixar de mencionar a convivência harmoniosa durante os dois anos em que dividimos apartamento, mais que um orientador, um exemplo de humildade, superação e antes de tudo um grande amigo.

Ao professor Abdênago Alves de Barros por aceitar o convite de participar da banca examinadora às vésperas da defesa, pela sua importante contribuição neste trabalho, através das correções, sugestões e da parceria no artigo, cujos resultados ajudam a compor o quinto capítulo. Devo ainda ressaltar a importância de seus conselhos e ensinamentos desde o Mestrado em que foi meu orientador e professor em várias disciplinas, acompanhando-me até o início do Doutorado como orientador acadêmico.

Ao professor Gregório Pacelli Feitosa Bessa por ter iniciado minha orientação no Doutorado, dando-me liberdade para trabalhar, confiando e apoiando todas as minhas decisões. Aos professores Jorge Herbert Soares de Lira da Universidade Federal do Ceará, Paolo Piccione da Universidade de São Paulo e Renato de Azevedo Tribuzy da Universidade Federal do Amazonas por aceitarem o convite de participar da banca examinadora, bem como pelas correções e valiosas sugestões apresentadas.

A Nazareno Gomes Vieira pelas várias conversas sobre Matemática ao longo desses anos, pela ajuda na minha preparação para o exame oral de qualificação, deixando suas ocupações de lado e sacrificando seu domingo e pela citação de um dos meus artigos na sua tese de Doutorado. A Kelton Silva Bezerra pelas valiosas observações no artigo que originou o último capítulo, também pelas conversas e discussões, sempre muito proveitosas e esclarecedoras sobre o conteúdo que foi tratado no referido artigo.

A Rondinelle Marcolino Batista por algumas sugestões de fontes de pesquisa e referências bibliográficas que foram usadas e pelas conversas sobre a teoria abordada no trabalho. A Rafael Jorge Pontes Diógenes pelas conversas, discussões sobre parte do conteúdo do trabalho e pela disponibilidade em assistir os ensaios da defesa, fazendo importantes observações. Devo ainda parabenizá-los pela qualidade das suas respectivas dissertações de Mestrado que me ajudaram a elucidar muitas dúvidas.

Ao professor Juscelino Pereira da Silva da Universidade Federal do Piauí, por ter sido o primeiro a me incentivar a fazer o curso de Matemática, quando ainda era meu professor no Ensino Médio em Juazeiro do Norte e mais recentemente tive o prazer de contar com sua presença na banca do exame oral de qualificação. Ao professor Mário de Assis Oliveira da Universidade Regional do Cariri, pela amizade, pelos conselhos e ensinamentos que me acompanham até hoje, um grande e talvez maior incentivador.

À professora Liane Mendes Feitosa Soares, orientadora na iniciação científica de 2005 a 2007, quando ainda lecionava na Universidade Regional do Cariri, agradeço principalmente pela amizade, pelos conselhos, por toda a ajuda, força e incentivo, durante e após a Graduação. Não poderia esquecer de citar o professor Carlos Humberto Soares Júnior, o qual foi meu professor na Universidade Regional do Cariri e com quem pude contar em vários momentos desde a Graduação.

Durante o Doutorado, tive a oportunidade de atuar na graduação semipresencial da UFC por mais de dois anos e por isso agradeço ao professor Celso Antônio da Silva Barbosa, coordenador do curso de Matemática semipresencial, pela confiança no meu trabalho como tutor a distância. Agradeço aos coordenadores de disciplina José Othon Dantas Lopes, Luciana de Lima e Marcos Ferreira de Melo, bem como aos tutores a distância Joserlan Perote da Silva e Paulo Ricardo Pinheiro Sampaio.

Gostaria ainda de agradecer à equipe do Instituto UFC Virtual pelo trabalho de suporte, pela colaboração, receptividade e prontidão de toda a equipe, pois sempre que precisei pude contar com todos. Não poderia deixar de destacar, em especial, duas excelentes profissionais da secretaria acadêmica que diversas vezes me ajudaram, refiro-me a Danielle Mascena Lopes e Michelle Guerra Vale, sou muito grato por toda a atenção, prestatividade, paciência e boa vontade que elas sempre tiveram comigo.

Aos meus ex-alunos do curso de Matemática semipresencial da UFC que acabaram tornando-se amigos e continuaram mantendo contato comigo, em especial Antônia Cláudia Costa Chaves, Francisco das Chagas Costa do Nascimento, Francisco das Chagas Soares Rodrigues, Joana Marina Alves Agostinho, Milton de Souza Pereira Júnior, Otávio Paulino Lavor e Pedro Gonçalves da Costa, pessoas muito batalhadoras e que me deram o privilégio de tê-los como alunos.

À minha querida e grande amiga Maria Cláudia Maia Costa que não vejo há tanto tempo e mesmo estando tão distante, sempre esteve presente através dos seus conselhos e das suas palavras de carinho, força e incentivo, pois uma verdadeira amizade supera

o tempo e a distância. A André Luiz da Silva, amigo de longa data que esteve comigo durante o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Graduação, principalmente pela amizade de vários e vários anos.

A Damião Júnio Gonçalves de Araújo, Flávio França Cruz e Jocel Faustino Norberto de Oliveira, entre outras coisas, pela receptividade e apoio durante os cursos de verão de 2006 e 2007. A José Tiago Nogueira Cruz pela amizade desde o curso de verão de 2006, pela receptividade durante o curso de verão de 2007 e por sua ajuda no início do Mestrado. A Marco Antonio Lázaro Velásquez pela ajuda ao longo do Mestrado e pela receptividade na minha recente visita a Campina Grande.

A Maria Cristiane Brandão de Magalhães, pessoa muito querida que admiro bastante e por quem tenho um carinho especial, sou grato pela sua valiosa amizade, pelas várias conversas, brincadeiras e momentos de descontração que diversas vezes alegraram o meu dia. A Ana Shirley Monteiro da Silva por ter contribuído de forma decisiva na minha aprovação em recente concurso que fiz pela Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

A Luiz Antônio Caetano Monte pela ótima convivência nos quase dois anos em que dividimos gabinete no saudoso bloco 917, pelas várias conversas sobre Matemática e sobre a vida. A Francisco de Assis Benjamim Filho pelas conversas e discussões sobre Matemática e pelas conversas informais à caminho do restaurante universitário. A Tiago Mendonça Lucena de Veras, pela amizade e por garantir minha hospedagem na casa dos seus pais em minha rápida passagem por Recife em 2012.

A Andréa Costa Dantas, secretária da Pós-Graduação em Matemática, pela competência, simpatia, delicadeza e principalmente pela paciência e muito boa vontade nas inúmeras vezes que precisei da sua ajuda, mostrando-se sempre muito atenciosa e disposta a ajudar. A Rocilda Maria Cavalcante Sales e Maria Eliene Vieira de Moura, pelas correções e orientações relacionadas às novas normas bibliográficas para trabalhos acadêmicos da Universidade Federal do Ceará.

Aos demais amigos que fiz durante toda essa caminhada e não tiveram o nome aqui citado, pessoas que vi chegar aqui em busca de um objetivo comum, compartilhando dos mesmos sonhos e que acabaram contribuindo de alguma maneira para tornar possível esse momento. Sinto-me satisfeito pelo dever cumprido, por encerrar mais uma importante etapa na minha vida acadêmica, mas principalmente por não decepcionar pessoas que tanto acreditaram em mim.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CAPES e CNPq) pelo suporte financeiro que me foi concedido durante o Doutorado.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal estudar os solitons de Ricci e as métricas quasi-Einstein em variedades Riemannianas homogêneas e simplesmente conexas, enfatizando problemas em dimensões três e quatro, procurando caracterizar e descrever explicitamente tais estruturas, obtendo resultados de existência, unicidade e conseqüentemente, construir novos exemplos sobre essas classes de variedades. A descrição mencionada, consiste basicamente em determinar condições que garantam existência e explicitar a família de campos de vetores que geram todas essas possíveis estruturas, relacionando-os entre si e identificando quais desses campos de vetores são do tipo gradiente. Devemos ressaltar que a parte do trabalho que corresponde às variedades homogêneas de dimensão três considera a classificação relativa à dimensão do grupo de isometrias, enquanto a parte que corresponde às variedades homogêneas de dimensão quatro, contempla apenas uma subclasse das variedades homogêneas de dimensão quatro que é constituída pelas variedades solúveis tipo-Lie, ou seja, grupos de Lie solúveis, simplesmente conexos e munidos de métrica invariante à esquerda.

**Palavras-chave:** Geometria Riemanniana. Variedades Riemannianas. Variedades homogêneas. Solitons de Ricci. Métricas quasi-Einstein.



## ABSTRACT

The purpose of this work is study Ricci solitons and quasi-Einstein metrics on simply connected homogeneous Riemannian manifolds, with emphasis in problems in three and four dimensions, trying to characterize and to describe explicitly such structures, getting results of existence, uniqueness and consequently, build new examples on these class of manifolds. The quoted description consists basically in to obtain conditions that ensure the existence and show explicitly the family of vector fields that generate each of these structures, relating them and identifying what of these vector fields are gradient. We should highlight that in the part of this work that corresponds to homogeneous three manifolds, we will consider the classification relative to dimension of isometry group, while in the part that corresponds to homogeneous four manifolds, we treat only the solvable geometry Lie type, namely, the simply connected solvable Lie group with left invariants metrics.

**Keywords:** Riemannian geometry. Riemannian manifolds. Homogeneous manifolds. Ricci solitons. Quasi-Einstein metrics.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	PRELIMINARES . . . . .	12
2.1	Notações e primeiras definições . . . . .	12
2.2	Variedades homogêneas . . . . .	14
2.3	Campos de vetores conformes . . . . .	15
2.4	Solitons de Ricci . . . . .	20
2.5	Métricas quasi-Einstein . . . . .	23
3	RESULTADOS INTRODUTÓRIOS . . . . .	29
3.1	Variedades homogêneas de dimensão 3 . . . . .	29
3.2	Variedades solúveis tipo-Lie de dimensão 4 . . . . .	35
3.3	Campos de Killing e solitons de Ricci . . . . .	39
4	SOLITONS DE RICCI HOMOGENEOS DE DIMENSÃO 3 . . . . .	42
4.1	Exemplos e Lemas-chave . . . . .	42
4.2	Descrição dos solitons de Ricci . . . . .	46
5	VARIEDADES QUASI-EINSTEIN HOMOGENEAS DE DIMENSÃO 3 . . . . .	59
5.1	Exemplos e Lemas-chave . . . . .	59
5.2	Descrição das métricas quasi-Einstein . . . . .	63
6	VARIEDADES QUASI-EINSTEIN HOMOGENEAS DE DIMENSÃO 4 . . . . .	70
6.1	Exemplos e Lemas-Chave . . . . .	70
6.2	Sobre a existência de métricas quasi-Einstein . . . . .	75
7	CONCLUSÃO . . . . .	78
	REFERÊNCIAS . . . . .	79

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo das métricas tipo-Einstein vem tendo grande destaque nos últimos anos, podemos citar como exemplos: solitons de Ricci, métricas quasi-Einstein, quase solitons de Ricci e métricas quasi-Einstein generalizadas. Aqui vamos estudar os solitons de Ricci e as métricas quasi-Einstein em variedades homogêneas de dimensões três e quatro, apresentando essencialmente resultados de caracterização, existência e unicidade. O trabalho encontra-se dividido em seis capítulos, os três primeiros correspondem à parte introdutória onde estabelecemos as notações e trazemos os resultados que serão usados nos capítulos que contém os resultados principais.

Diversos trabalhos buscam caracterizar os solitons de Ricci da forma mais clara e simples possível, facilitando a compreensão de tais estruturas e a construção de novos exemplos. Podemos citar o trabalho de Perelman [33] no qual ele prova que todo soliton de Ricci compacto é gradiente, enquanto Aquino, Barros e Ribeiro Jr [3] provam que os potenciais de Perelman e Hodge-de Rham diferem por constante. No contexto dos solitons de Ricci homogêneos, destacamos os trabalhos de Petersen e Wylie [35] e [36], bem como os resultados de Baird e Daniello [4] e [5].

Nos trabalhos de Baird e Daniello [4] e [5] os autores apresentam uma maneira de gerar todas as estruturas de solitons de Ricci a partir de um exemplo particular e dos campos de Killing sobre uma família de variedades homogêneas de dimensões três e quatro, provando a unicidade módulo campos de Killing. Nesse sentido, provamos que em variedades de curvatura escalar constante não-nula é possível obter conclusões similares, ou seja, uma estrutura de soliton de Ricci sobre uma variedade de curvatura escalar constante não-nula é única a menos de campos de Killing.

No intuito de melhorar os resultados de Baird e Daniello [5], descrevemos de forma explícita todas as possíveis estruturas de solitons de Ricci sobre variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três, apresentando expressões que determinam a família de todos os campos de vetores que geram tais estruturas e conseqüentemente, obtemos uma grande quantidade de novos exemplos. Essa descrição nos permitiu determinar com mais facilidade as estruturas gradientes, obter novos resultados e provas mais elementares de resultados já existentes na literatura.

Na seqüência, obtemos conclusões similares ao estudar as métricas quasi-Einstein e nessa direção, mostramos que as únicas variedades homogêneas de dimensão três que admitem estrutura de métricas quasi-Einstein não-triviais são  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e descrevemos ainda, todas as possíveis estruturas nessas variedades. Além disso, apresentamos exemplos de estruturas de métricas quasi-Einstein não-gradientes sobre  $Nil_3$  e  $\widetilde{PSl}_2$  e os primeiros exemplos compactos de variedades quasi-Einstein não-gradiente, obtidos sobre esferas de Berger  $S_{\kappa,\tau}^3$  e que motivam o estudo das estrutura não-gradientes.

Finalizamos o trabalho, estudando as variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro motivados pelo trabalho de Baird indicado em [4], no qual o autor descreve todas as possíveis estruturas de solitons de Ricci sobre  $Nil_4$ . De modo similar, apresentamos novos exemplos de solitons de Ricci sobre as variedades  $Nil_3 \times \mathbb{R}$ ,  $Sol_0^4$ ,  $Sol_{m,n}^4$  e  $Sol^3 \times \mathbb{R}$ , mostrando que tais exemplos são únicos a menos de campos de Killing. A descrição apresentada nos permite, entre outras coisas, verificar que essa classe de variedades não admite estruturas gradiente de soliton de Ricci.

Inspirados pelo trabalho de Lauret [28], provamos ainda que variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro não admitem estruturas de métricas  $m$ -quasi-Einstein gradientes para  $m$  finito, estendendo assim a conclusão já obtida para solitons de Ricci sobre essa mesma classe de variedades. Diante disso, podemos concluir que em geral, as únicas estruturas de métricas quasi-Einstein gradientes sobre variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro são os solitons de Ricci sobre  $\mathbb{R}^4$ , mais precisamente são os solitons Gaussianos.

## 2 PRELIMINARES

Neste trabalho, vamos considerar  $M^n$  uma *variedade diferenciável* de classe  $C^\infty$  e dimensão  $n$ , denotar por  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  uma *métrica Riemanniana* sobre  $M^n$ ,  $C^\infty(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M^n$ ,  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  sobre  $M^n$  e  $\nabla$  a *conexão Riemanniana* de  $(M^n, g)$ . Dado um ponto  $p \in M^n$  arbitrário, então  $T_pM$  denotará o *espaço tangente* a  $M^n$  em  $p$  e  $TM$  denotará o *fibrado tangente* de  $M^n$ .

### 2.1 Notações e primeiras definições

Agora vamos introduzir as principais notações e algumas definições que utilizaremos no decorrer do trabalho.

**Definição 2.1** O *gradiente* de  $f \in C^\infty(M)$  é o campo de vetores sobre  $M^n$ , denotado por  $\nabla f$  e definido pela condição

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definição 2.2** O *divergente* de  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é a função  $divX : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$divX(p) = tr[Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

onde  $tr$  denota o traço da aplicação.

**Definição 2.3** O *Laplaciano* é o operador  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definido por

$$\Delta f = div(\nabla f),$$

para toda  $f \in C^\infty(M)$ .

**Definição 2.4** Definimos o *hessiano* de  $f \in C^\infty(M)$  em  $p \in M^n$  como sendo o operador linear  $(hessf)_p : T_pM \rightarrow T_pM$ , dado por

$$(hessf)_p(v) = \nabla_v \nabla f,$$

para todo  $v \in T_pM$ .

**Observação 2.1** Prova-se que  $\Delta f = tr(hessf)$ .

**Definição 2.5** Dizemos que uma aplicação multilinear de ordem  $r$  (ou  $r$ -linear)

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow C^\infty(M)$$

é um  $r$ -tensor covariante sobre  $M^n$ .

**Observação 2.2** Podemos considerar o hessiano de  $f$  como um tensor, tal que

$$Hessf(X, Y) = \langle hessf(X), Y \rangle,$$

para cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definição 2.6** Definimos a *curvatura de Riemann*  $R$  de uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , como sendo uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\nabla$  denota a conexão Riemanniana de  $(M^n, g)$ .

**Definição 2.7** Definimos o *tensor de Ricci* de uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , como sendo a aplicação  $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , dada por

$$Ric(X, Y) = tr\{Z \mapsto R(Z, X)Y\},$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definição 2.8** Definimos a *curvatura escalar* de uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , como sendo a aplicação  $S : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$S = tr Ric,$$

ou seja, a curvatura escalar é o traço do tensor de Ricci.

**Definição 2.9** Sejam  $(M^n, g)$  e  $(N^n, h)$  variedades Riemannianas, então um difeomorfismo  $\varphi : M^n \rightarrow N^n$  é dito uma *isometria*, quando satisfaz

$$\langle u, v \rangle_g = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_h$$

para todo  $p \in M$  e  $u, v \in T_p M$ .

## 2.2 Variedades homogêneas

**Definição 2.10** Dizemos que uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  é *homogênea*, quando para cada dois pontos arbitrários  $p, q \in M^n$  existe uma isometria  $\varphi : M^n \rightarrow M^n$  tal que  $\varphi(p) = q$ .

**Proposição 2.1** Seja  $(M^n, g)$  uma variedade homogênea, então  $(M^n, g)$  é completa.

**Demonstração:** Suponha por absurdo que  $(M^n, g)$  não é completa, então existem um ponto  $p \in M^n$  e uma geodésica normalizada  $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$  partindo de  $p$  e que não se estende além do extremo  $t_0$ . Dessa forma, podemos tomar  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, de tal forma que  $q = \gamma(t_0 - \epsilon/2)$  e que  $B_\epsilon(p)$ ,  $B_\epsilon(q)$  sejam bolas normais em  $p$  e  $q$ , respectivamente.

Sejam  $\varphi : M^n \rightarrow M^n$  uma isometria e  $v \in T_p M$  um vetor unitário, tais que  $\varphi(p) = q$  e  $d\varphi_p v = \gamma'(t_0 - \epsilon/2)$ , então

$$|v| = |d\varphi_p v| = |\gamma'(t_0 - \epsilon/2)| = 1,$$

no entanto, considerando a geodésica  $\alpha : [0, \epsilon) \rightarrow M^n$  definida por  $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ , segue-se que

$$\varphi \circ \alpha(0) = \varphi(p) = q = \gamma(t_0 - \epsilon/2)$$

e também

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = d\varphi_p \alpha'(0) = d\varphi_p v = \gamma'(t_0 - \epsilon/2),$$

logo  $\varphi \circ \alpha$  é uma geodésica que parte do ponto  $q = \gamma(t_0 - \epsilon/2)$  com velocidade  $\gamma'(t_0 - \epsilon/2)$  na bola normal  $B_\epsilon(q)$ . Por unicidade, temos que  $\varphi \circ \alpha = \gamma|_{[t_0 - \epsilon/2, t_0]}$  e portanto estendemos  $\gamma$  na bola normal  $B_\epsilon(q)$ , ou seja, estendemos  $\gamma$  além do extremo  $t_0$ , chegando a uma contradição.  $\square$

**Proposição 2.2** Seja  $(M^n, g)$  uma variedade homogênea, então  $(M^n, g)$  possui curvatura escalar constante.

**Demonstração:** Dados  $p, q \in M^n$  arbitrários, existe uma isometria  $\varphi : M^n \rightarrow M^n$  tal que  $\varphi(p) = q$  e conseqüentemente,

$$S(q) = (S \circ \varphi)(p) = S(p),$$

concluindo a prova.  $\square$

### 2.3 Campos de vetores conformes

**Definição 2.11** Sejam  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores sobre uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  e  $\omega$  um tensor  $r$ -covariante, então definimos a derivada de Lie de  $\omega$  na direção de  $X$  por

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y_1, \dots, Y_r) = X(\omega(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^r \omega((Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_r)),$$

onde  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ . Em particular, se  $\omega$  for a métrica Riemanniana  $g$  de  $M^n$ , teremos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle$$

para todo  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definição 2.12** Dizemos que um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  sobre uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  é *conforme*, quando existe uma função  $\psi \in C^\infty(M)$  (*chamada fator conforme*) satisfazendo  $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$ . Dizemos ainda que  $X$  é um *campo de Killing*, se o fator conforme  $\psi$  for identicamente nulo.

**Observação 2.3** Usando diretamente as definições de divergente e de derivada de Lie, verifica-se facilmente que  $\psi = \frac{1}{n} \operatorname{div} X$ .

Um campo de vetores conforme frequentemente usado em uma forma espacial  $M_\kappa^n$  é determinado pelo vetor posição com origem em um ponto  $p_0 \in M_\kappa^n$  fixado, devemos ressaltar que esse campo de vetores foi introduzido para espaços não-Euclidianos por Heintze em [24]. Descrevemos a seguir o referido campo de vetores:

**Exemplo 2.1** Considere uma forma espacial  $(M_\kappa^n, g)$  e um ponto arbitrário  $p_0 \in M_\kappa^n$ , então definimos

$$X := (s \circ \phi) \nabla \phi,$$

onde  $\phi : M_\kappa^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função distância dada por  $\phi(\cdot) = \operatorname{dist}(\cdot, p_0)$ ,  $s(t)$  é solução da equação diferencial  $y'' + \kappa y = 0$ , satisfazendo  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$  e  $r$  uma função que satisfaz  $r' = s$ . Nessas condições, temos que  $X$  é um campo de vetores gradiente conforme com fator conforme  $\psi = s' \circ \phi$  e tal que  $X = \nabla(r \circ \phi)$ .



Para uma melhor compreensão do Exemplo 2.1, mostraremos os casos particulares em que  $\kappa = 0, 1$  ou  $-1$ , ou seja, os casos em que  $(M^n, g) = \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$  ou  $\mathbb{H}^n$ . Dessa forma, temos os exemplos a seguir:

**Exemplo 2.2** Considere  $\mathbb{R}^n$  munido da métrica canônica e um ponto  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  arbitrário, então a função distância  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\phi(p) = |p - p_0|$ ,  $s(t) = t$  e  $r(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$ , onde  $c$  é uma constante real. Dessa forma, temos que  $s \circ \phi = \phi$  e  $\nabla\phi(p) = \phi(p)^{-1}p$ , portanto o campo de vetores posição em  $\mathbb{R}^n$  é dado por  $X(p) = p$  e seu fator conforme é  $\psi \equiv 1$ .

**Exemplo 2.3** Considere  $\mathbb{S}^n$  munido da métrica canônica e um ponto arbitrário  $p_0 \in \mathbb{S}^n$ , então a função distância  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\phi(p) = \arccos\langle p, p_0 \rangle$ ,  $s(t) = \text{sent}$  e  $r(t) = -\text{cost} + c$ , onde  $c$  é uma constante real. Sendo assim, o campo de vetores posição em  $\mathbb{S}^n$  é dado por

$$X = \text{sen}\phi \nabla\phi,$$

seu fator conforme é a função dada por

$$\psi(p) = \cos\phi(p) = \langle p, p_0 \rangle.$$

**Exemplo 2.4** Considere  $\mathbb{H}^n$  e um ponto arbitrário  $p_0 \in \mathbb{H}^n$ , então vamos denotar por  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a função distância,  $s(t) = \text{senht}$  e  $r(t) = \text{cosht}$ . Nesse caso, o campo de vetores posição em  $\mathbb{H}^n$  é dado por

$$X = \text{senh}\phi \nabla\phi,$$

seu fator conforme é a função  $\psi = \cosh\phi$ .

Nesse momento, vamos apresentar um resultado, devido a Obata e Yano [32] que relaciona o fator conforme de um campo conforme com o seu laplaciano, a curvatura escalar e a dimensão da variedade onde o campo de vetores é definido. Mais precisamente, temos que:

**Proposição 2.3** (Obata e Yano [32]) Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X$  um campo de vetores conforme sobre  $(M^n, g)$ , então

$$\frac{1}{2}\langle X, \nabla S \rangle = -(n-1)\Delta\psi - S\psi,$$

onde  $\psi$  denota o fator conforme do campo de vetores  $X$ .

**Proposição 2.4** Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana,  $f \in C^\infty(M)$  uma função diferenciável e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de Killing sobre  $(M^n, g)$ , então

$$\mathcal{L}_X \text{Hess} f = \text{Hess} X(f).$$

**Demonstração:** Pode ser encontrada na referência indicada em [8].

Um caso particular interessante bastante explorado na literatura são os campos conformes fechados, definidos a seguir.

**Definição 2.13** Um campo conforme  $X \in \mathfrak{X}(M)$  com fator conforme  $\psi$  é dito fechado, se satisfaz a condição

$$\nabla_Y X = \psi Y,$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Dizemos ainda que  $X$  é *homotético* ou *paralelo*, quando  $\psi$  for constante ou identicamente nulo, respectivamente.

**Observação 2.4** Um campo de vetores conforme  $X = \nabla\varphi \in \mathfrak{X}(M)$  gradiente é fechado, pois dados  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , temos que

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \langle \nabla_Y \nabla\varphi, Z \rangle = \text{Hess}\varphi(Y, Z) = \langle \psi Y, Z \rangle,$$

portanto  $\nabla_Y X = \psi Y$ .

O resultado a seguir nos traz expressões do gradiente e laplaciano da norma de um campo de vetores conforme em termos da norma do campo, do fator conforme e do Ricci na direção do referido campo. Observe que trata-se de uma pequena generalização da Proposição 29 de [34] em que o autor trabalha com campos de Killing, no entanto os cálculos são similares.

**Proposição 2.5** Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores conforme com fator conforme  $\psi$ , então:

- (a)  $\frac{1}{2} \nabla |X|^2 = 2\psi X - \nabla_X X.$
- (b)  $\frac{1}{2} \Delta |X|^2 = |\nabla X|^2 - (n-2)\langle X, \nabla\psi \rangle - \text{Ric}(X, X).$

**Demonstração:**

(a) Considerando um ponto arbitrário  $p \in M^n$  e um referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  na sua vizinhança, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla|X|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n E_i|X|^2 E_i = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle E_i \\ &= \sum_{i=1}^n (2\psi \langle X, E_i \rangle - \langle \nabla_X X, E_i \rangle) E_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle 2\psi X - \nabla_X X, E_i \rangle E_i = 2\psi X - \nabla_X X, \end{aligned}$$

então devido a arbitrariedade de  $p$ , obtemos  $\frac{1}{2}\nabla|X|^2 = 2\psi X - \nabla_X X$ .

(b) Novamente calculando em  $p$  e usando a expressão do item anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\nabla|X|^2\right) = 2\operatorname{div}(\psi X) - \operatorname{div}(\nabla_X X), \\ &= 2\psi \operatorname{div} X + 2X(\psi) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla_X X, E_i \rangle \\ &= 2n\psi^2 + 2X(\psi) - \sum_{i=1}^n \langle R(E_i, X)X + \nabla_X \nabla_{E_i} X + \nabla_{[E_i, X]} X, E_i \rangle \\ &= 2n\psi^2 + 2X(\psi) - \operatorname{Ric}(X, X) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X \nabla_{E_i} X, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]} X, E_i \rangle, \end{aligned}$$

então usando o fato de  $X$  ser conforme, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= 2n\psi^2 + 2X(\psi) - \operatorname{Ric}(X, X) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &\quad - 2\psi \sum_{i=1}^n \langle [E_i, X], E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle [E_i, X], \nabla_{E_i} X \rangle \\ &= 2n\psi^2 + 2X(\psi) - \operatorname{Ric}(X, X) - \sum_{i=1}^n X \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle - 2\psi \operatorname{div} X + |\nabla X|^2 \end{aligned}$$

por fim, lembrando que  $\operatorname{div} X = n\psi$ , temos ainda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= 2n\psi^2 + 2X(\psi) - \operatorname{Ric}(X, X) - nX(\psi) - 2\psi \operatorname{div} X + |\nabla X|^2 \\ &= -(n-2)X(\psi) - \operatorname{Ric}(X, X) + |\nabla X|^2, \end{aligned}$$

então pelo mesmo argumento anterior, obtemos a igualdade desejada.  $\square$

**Proposição 2.6** Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores conforme fechado com fator conforme  $\psi$ , então

$$Ric(X, Y) = -(n-1)Y(\psi).$$

**Demonstração:** Considerando um ponto arbitrário  $p \in M^n$  e um referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  na sua vizinhança, temos que

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= Ric(Y, X) = \sum_{i=1}^n \langle R(E_i, Y)X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_{E_i} X - \nabla_{[E_i, Y]} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(\psi Y) - \nabla_Y(\psi E_i) - \psi[E_i, Y], E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle E_i(\psi)Y - Y(\psi)E_i, E_i \rangle \\ &= -(n-1)Y(\psi) \end{aligned}$$

e devido a arbitrariedade do ponto  $p$ , concluímos a prova da igualdade.  $\square$

**Corolário 2.1** Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores conforme fechado com fator conforme  $\psi$ , então:

- (a)  $\frac{1}{2} \nabla |X|^2 = \psi X$ .
- (b)  $\frac{1}{2} Hess |X|^2 = \psi^2 g + d\psi \otimes X^\flat$ .

**Demonstração:**

(a) Decorre diretamente do item (a) da Proposição 2.5.

(b) Usando o item (a) e fazendo um cálculo direto para  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Hess |X|^2(Y, Z) &= \langle \nabla_Y(\psi X), Z \rangle \\ &= \psi \langle \nabla_Y X, Z \rangle + Y(\psi) \langle X, Z \rangle \\ &= \psi^2 \langle Y, Z \rangle + \langle \nabla \psi, Y \rangle \langle X, Z \rangle \end{aligned}$$

e isso prova a igualdade esperada.  $\square$

## 2.4 Solitons de Ricci

Inicialmente, os solitons de Ricci aparecem nos trabalhos de Hamilton [22] como soluções auto-similares do fluxo de Ricci, ou seja, pontos estacionários do fluxo, invariantes por homotetia e scaling da métrica. Essa teoria foi usada por Perelman [33] para provar a conjectura de Poincaré e a conjectura da geometrização de Thurston, seguindo um roteiro iniciado pelo próprio Hamilton. A relação entre solitons de Ricci e fluxo de Ricci não é o foco do nosso trabalho, no entanto estaremos esclarecendo essa relação ao longo da subseção e além disso, outros detalhes podem ser encontrados nos livros indicados em [15] e [21].

Agora vamos introduzir algumas definições e informações básicas essenciais ao desenvolvimento do trabalho.

**Definição 2.14** Um *soliton de Ricci*  $(M^n, g, X, \lambda)$  é uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , junto com um campo de vetores  $X$ , satisfazendo a equação fundamental

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \quad (2.1)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é uma constante. Dizemos ainda que  $(M^n, g, X, \lambda)$  é expansivo, estacionário ou contrátil, quando  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  ou  $\lambda > 0$ , respectivamente.

Devemos notar que se  $X$  for um campo conforme, então a equação fundamental (2.1) resume-se à equação de Einstein e nesse sentido os solitons de Ricci generalizam as variedades de Einstein. Além disso, dois campos de vetores que geram estruturas de solitons de Ricci sobre uma variedade Riemanniana, diferem por um campo conforme com fator conforme constante.

**Observação 2.5** Um caso particular muito estudado, ocorre quando  $X$  é o gradiente de uma função  $f \in C^\infty(M)$  e assim, podemos escrever a equação (2.1) na forma

$$Ric + Hess f = \lambda g, \quad (2.2)$$

nesse caso, dizemos que o soliton de Ricci é gradiente e  $f$  é sua função potencial.

**Definição 2.15** Dizemos que um soliton de Ricci  $(M, g, X, \lambda)$  é trivial, quando o campo de vetores  $X$  é um campo de Killing. No caso particular de um soliton gradiente, basta dizer que a função potencial é constante.

Nesse momento, estamos em condições de explicar um pouco o fluxo de Ricci e esclarecer a sua relação com os solitons de Ricci definido anteriormente. Primeiro considere uma variedade  $M^n$  e uma família  $g(t)$  de métricas Riemannianas sobre  $M^n$ , então o fluxo de Ricci é dado pela equação

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)},$$

onde o objetivo era partir de  $M^n$  munida de uma métrica inicial arbitrária  $g_0$  e tentar deformá-la de maneira que ela pudesse convergir para uma variedade uniforme, aumentando ou diminuindo a curvatura nos pontos em que a mesma fosse pequena ou grande, respectivamente.

Para entendermos como os solitons de Ricci aparecem, vamos considerar uma métrica inicial  $g_0$  sobre  $M^n$  e uma solução do fluxo  $g(t) = \sigma(t)\varphi_t^*g_0$  com  $\varphi_t$  denotando uma família de difeomorfismos sobre  $M^n$  e  $\sigma(t) = 1 - 2\lambda t$ . Nessas condições, temos por um cálculo direto que

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \sigma'(t)\varphi_t^*g_0 + \sigma(t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^*g_0,$$

daí avaliando a última igualdade em  $t = 0$  e usando a notação  $X = \frac{\partial\varphi_t}{\partial t}$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}g(0) = -2\lambda g_0 + \mathcal{L}_X g_0,$$

portanto

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g_0 = \lambda g_0,$$

chegando assim na equação que define o soliton de Ricci.

Observe que os cálculos acima nos mostraram que dada uma solução do fluxo, podemos associá-la a um soliton de Ricci e no mesmo sentido, a proposição a seguir estabelece a recíproca de tal afirmação.

**Proposição 2.7** (Hamilton [21]) Seja  $(M, g_0, \nabla f_0, -\frac{\lambda}{2})$  um soliton gradiente com  $\nabla_{g_0} f_0$  completo, então existe uma solução  $g(t)$  do fluxo de Ricci, ou seja,

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)},$$

com  $g(0) = g_0$ , difeomorfismos  $\varphi(t) : M \rightarrow M$  com  $\varphi(0) = Id_M$  e funções  $f(t)$  com  $f(0) = f_0$ , definido para todo  $t$ , tal que  $\nu(t) = \lambda t + 1 > 0$ , satisfazendo

1. Os difeomorfismos  $\varphi(t) : M \rightarrow M$  constituem uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos gerados  $X(t) = \frac{1}{\nu(t)} \nabla_{g_0} f_0$ , isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = \frac{1}{\nu(t)} (\nabla_{g_0} f_0)(\varphi_t(x)),$$

2.  $g(t) = \nu(t) \varphi_t^* g_0$ ,
3.  $f(t) = f_0 \circ \varphi_t = \varphi_t \varphi_t^*(f_0)$ ,
4.  $Ric_{g(t)} + Hess_{g(t)} f(t) + \frac{\lambda}{2\nu(t)} g(t) = 0$ ,

onde  $\nabla_{g(t)} f(t)$  é o gradiente de  $f(t)$  com a métrica  $g(t)$ .

Partindo da equação fundamental (2.1), obtém-se uma identidade que relaciona curvatura escalar de  $(M^n, g)$  e o divergente do campo de vetores  $X$ . Para isso, tomamos o traço em (2.1) e assim

$$S + \operatorname{div} X = \lambda n, \quad (2.3)$$

onde  $S$  denota a curvatura escalar. Quando o referido soliton é gradiente, então a igualdade (2.3) torna-se

$$S + \Delta f = \lambda n, \quad (2.4)$$

a qual pode ser obtida tomando o traço na igualdade (2.2).

Para ilustrar as definições apresentadas acima, vejamos a seguir alguns exemplos clássicos de solitons de Ricci gradiente.

**Exemplo 2.5** (*Solitons de Einstein*) Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade de Einstein com constante de Einstein  $\lambda$  e  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função constante, então  $Hess f = 0$  e assim

$$Ric + Hess f = \lambda g,$$

portanto  $(M, g, \nabla f, \lambda)$  é um soliton de Ricci. Devemos lembrar que nessa classe de variedades estão as formas espaciais  $\mathbb{R}^n$  (espaço euclidiano),  $\mathbb{S}^n$  (esfera canônica) e  $\mathbb{H}^n$  (espaço hiperbólico).

**Exemplo 2.6** (*Solitons Gaussianos*) Seja  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $g$  a sua métrica canônica,  $\lambda$  um número real e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \frac{\lambda}{2} |x|^2$ , então verifica-se que  $(M, g, \nabla f, \lambda)$  é um soliton de Ricci gradiente.

**Exemplo 2.7** (*Solitons rígidos*) Sejam  $(N, h)$  uma variedade de Einstein e  $\lambda \in \mathbb{R}$  a sua constante de Einstein, daí considere o produto cartesiano  $M = N \times \mathbb{R}^k$  munido da métrica produto  $g$  e defina a função  $f : M = N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(p, x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2,$$

então  $(M, g, \nabla f, \lambda)$  é um soliton de Ricci gradiente que pode ser expansivo, estacionário ou contrátil.

**Observação 2.6** Nos artigos indicados em [35] e [36], ambos de Petersen e Wylie, pode-se encontrar mais informações sobre os solitons rígidos.

**Exemplo 2.8** (*Soliton de Hamilton*) Sejam  $\Sigma = (\mathbb{R}^2, g)$  uma variedade Riemanniana com

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}$$

e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2)$ , então  $(\Sigma, \nabla f, \lambda = 0)$  é um soliton de Ricci gradiente estacionário.

## 2.5 Métricas quasi-Einstein

As métricas quasi-Einstein são generalizações das métricas de Einstein e dos solitons de Ricci, tais métricas possuem uma relação direta com os produtos-warped, conforme abordado em [9], [14], [23] e [26]. Essas métricas também estão relacionadas com as métricas estáticas que aparecem em problemas sobre o teorema da massa positiva e relatividade geral, como explorado nas referências indicadas em [1], [2] e [30]. Essas relações são as principais motivações para o estudo das referidas métricas e serão melhor explicadas ao longo da seção.

Iniciaremos com algumas definições e informações básicas que serão fundamentais no desenvolvimento dos Capítulos 5 e 6 do presente trabalho.

**Definição 2.16** Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana, então definimos o *m-Bakry-Emery tensor de Ricci* por

$$Ric_X^m := Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^b \otimes X^b,$$

e onde  $m$  é um inteiro positivo ou  $m = \infty$ ,  $\mathcal{L}_X g$  denota a derivada de Lie da métrica  $g$  na direção do campo de vetores  $X$  e  $X^b$  denota a 1-forma associada a  $X$ .



Geralmente o tensor  $m$ -Bakry-Emery de Ricci aparece na literatura considerando  $X$  um campo de vetores gradiente e na maioria das vezes em problemas relacionados a produtos-warped, como podemos conferir em [7], [9], [10], [13], [14], [23] e [26]. Recentemente e de forma independente Barros e Ribeiro Jr [6] e Limoncu [30] estenderam essa definição para um campo de vetores arbitrário não necessariamente gradiente, conforme a definição anterior.

**Observação 2.7** Observe que se  $X \equiv 0$ , então o  $m$ -Bakry-Emery tensor de Ricci coincide com o tensor de Ricci.

**Definição 2.17** Uma métrica  $g$  sobre uma variedade diferenciável  $M^n$  é chamada de  $m$ -quasi Einstein, quando existem um campo de vetores  $X$  e uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , satisfazendo

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g \quad (2.5)$$

e além disso,  $(M^n, g)$  será dita uma variedade  $m$ -quasi-Einstein. Dizemos ainda que a referida métrica (ou variedade)  $m$ -quasi-Einstein é expansiva, estacionária ou contrátil, quando  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  ou  $\lambda > 0$ , respectivamente.

Devemos ressaltar que se tivermos  $m = \infty$ , então a equação (2.5) resume-se à equação fundamental (2.1) que define soliton de Ricci, enquanto  $X \equiv 0$  em (2.5) resulta na equação de Einstein  $Ric = \lambda g$  e por isso, dizemos que as métricas quasi-Einstein generalizam os solitons de Ricci e as métricas de Einstein. Fazendo analogia à notação usada para os solitons de Ricci, usaremos  $(M^n, g, X, \lambda)$  para denotar uma métrica (ou variedade) quasi-Einstein.

**Definição 2.18** Dizemos que uma métrica quasi-Einstein  $(M^n, g, X, \lambda)$  é gradiente, quando  $X$  é o gradiente de uma função  $f \in C^\infty(M)$  e assim, escrevemos

$$Ric_f^m := Ric + Hess f - \frac{1}{m}df \otimes df = \lambda g, \quad (2.6)$$

de modo similar,  $(M^n, g)$  será dita uma variedade quasi-Einstein gradiente.

**Observação 2.8** Podemos simplificar a equação acima, definindo a função positiva  $u \in C^\infty(M)$  por  $u = e^{-f/m}$ , daí obtemos

$$\nabla u = -\frac{1}{m}e^{-f/m}\nabla f,$$

consequentemente,

$$\frac{m}{u}Hessu = -Hessf + \frac{1}{m}df \otimes df,$$

portanto, reescrevemos a equação fundamental (2.6) na forma

$$Ric - \frac{m}{u}Hessu = \lambda g, \quad (2.7)$$

obtendo uma equação mais simples de trabalhar.

Nesse momento, estamos em condições de esclarecer a relação existente entre as métricas quasi-Einstein, produtos-warped e métricas estáticas que motivam o estudo das métricas quasi-Einstein. Para isso, vamos considerar uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  e o operador  $L^2$ -adjunto formal da linearização da curvatura escalar total, denotado por  $\mathfrak{L}_g^*$  e definido em  $u \in C^\infty(M)$  pela expressão

$$\mathfrak{L}_g^*(u) = -(\Delta u)g + Hessu - uRic,$$

então dizemos que a métrica  $g$  é estática sobre  $M^n$ , quando existe uma função não-constante pertencente ao núcleo do operador acima definido. Por outro lado, usando a Proposição 2.7 de Corvino [16], podemos garantir que  $u \in C^\infty(M)$  é um elemento não-constante do núcleo de  $\mathfrak{L}_g^*$ , se e somente se, a métrica warped  $\bar{g} = g - u^2 dt^2$  é de Einstein sobre  $M^n \times \mathbb{R}$ .

Agora sejam  $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$  uma métrica 1-quasi-Einstein não-trivial e  $u \in C^\infty(M)$  a função positiva definida por  $u = e^{-f}$ , então a equação fundamental 2.7 nos fornece a igualdade

$$uRic - Hessu = \lambda u g,$$

logo a métrica em questão será estática, desde que a função  $u$  satisfaça a condição

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\Delta e^{-f} + \lambda e^{-f} = 0, \quad (2.8)$$

portanto uma maneira de construir métricas estáticas e variedades de Einstein é obter métricas quasi-Einstein cuja função potencial satisfaz a equação (2.8).

Uma outra relação entre as métricas quasi-Einstein e os produtos-warped surge de forma natural e fica evidenciada com o resultado a seguir:

**Proposição 2.8** (Besse [9]) Sejam  $(M^n, g)$  e  $(N^m, h)$  variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano  $M \times N$  munido da métrica  $\bar{g} = g + e^{-\frac{2f}{m}}h$ , então  $(M \times N, \bar{g})$  é uma variedade de Einstein, se e somente se,  $(N^m, h)$  é uma variedade de Einstein e as seguintes igualdades são satisfeitas

$$Ric_f^m = Ric_N + Hessf - \frac{1}{m}df \otimes df = \lambda g$$

e

$$u\Delta u - (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda_N = \lambda u^2,$$

onde  $u = e^{-\frac{f}{m}}$ ,  $\lambda_N$  e  $\lambda$  são as respectivas constantes de Einstein de  $(N, h)$  e  $(M \times N, \bar{g})$ .

**Definição 2.19** Uma métrica quasi-Einstein será dita trivial, se tivermos  $X \equiv 0$ . No caso particular de métrica quasi-Einstein gradiente, basta afirmar que a função potencial é constante.

A partir da equação fundamental (2.5), podemos obter uma identidade que relaciona a curvatura escalar  $S$  de  $(M^n, g)$ , divergente e norma do campo de vetores  $X$ . Basta tomar o traço em (2.5) para chegar em

$$S + \operatorname{div}X - \frac{1}{m}|X|^2 = n\lambda \quad (2.9)$$

e se a referida métrica for gradiente, então a igualdade (2.9) torna-se

$$S + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 = n\lambda, \quad (2.10)$$

que também pode ser obtida tomando o traço na igualdade (2.6).

Nesse momento, passamos a apresentar alguns exemplos para ilustrar a definição central da seção. O primeiro exemplo traz uma estrutura não-trivial de métrica quasi-Einstein gradiente sobre o espaço hiperbólico.

**Exemplo 2.9** (Wei, 2009) Considere o semi-espaço  $H^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  de  $\mathbb{R}^n$  e a métrica  $g = x_n^{-2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)$ , daí definimos o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional por  $\mathbb{H}^n = (H^n, g)$ . Agora seja  $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = m \log x_n$ , então  $(\mathbb{H}^n, \nabla f, \lambda = -m - n + 1)$  é uma métrica  $m$ -quasi-Einstein.

De fato, observe que  $\{E_i = x_n \partial_{x_i}\}_{i=1}^n$  é um referencial ortonormal, então escrevemos  $\nabla f = mE_n$  e assim, obtemos

$$Hessf = m \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} E_n, E_j \rangle E_i^b \otimes E_j^b = m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} E_n, E_j \rangle E_i^b \otimes E_j^b,$$

daí usando a fórmula de Koszul, segue-se que

$$Hessf = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} [\langle [E_i, E_n], E_j \rangle - \langle [E_i, E_j], E_n \rangle - \langle [E_n, E_j], E_i \rangle] E_i^b \otimes E_j^b,$$

no entanto,  $[E_i, E_j] = 0$ ,  $[E_i, E_n] = -E_i$  e  $[E_n, E_j] = E_j$ , conseqüentemente

$$Hessf = -m \sum_{i,j=1}^{n-1} E_i^b \otimes E_j^b,$$

ou ainda,  $Hessf = -m(g - E_n^b \otimes E_n^b)$ . Devemos lembrar que  $Ric = -(n-1)g$ , temos também  $df = mE_n^b$  e  $\lambda = -(m+n-1)$ , portanto combinamos essas informações e verificamos que a equação fundamental (2.6) é satisfeita.

O próximo exemplo descreve uma família de estruturas de métrica quasi-Einstein gradientes que construímos sobre o espaço hiperbólico a partir da função distância.

**Exemplo 2.10** Considere novamente o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional  $\mathbb{H}^n$  e a função distância  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  descrita no Exemplo 2.4, então defina  $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = -m \log \cosh \phi,$$

portanto  $(\mathbb{H}^n, \nabla f, \lambda = -m - n + 1)$  é uma métrica  $m$ -quasi-Einstein.

De fato, primeiro fazemos  $\varphi = \cosh \phi$  e assim, vamos ter

$$\nabla f = -m\varphi^{-1}\nabla\varphi,$$

conseqüentemente,

$$Hessf = -m\varphi^{-1}Hess\varphi + m\varphi^{-2}d\varphi \otimes d\varphi,$$

no entanto, observe que  $d\varphi = -m^{-1}\varphi df$  e  $Hess\varphi = \varphi g$ , portanto

$$Hessf = -mg + \frac{1}{m}df \otimes df,$$

então lembrando que  $Ric = -(n-1)g$  e  $\lambda = -(m+n-1)$ , verifica-se facilmente que a equação fundamental (2.6) é satisfeita.

O último exemplo, traz uma estrutura de métrica quasi-Einstein não-gradiente que obtivemos sobre  $\mathbb{R}^4$ .

**Exemplo 2.11** Considere  $\mathbb{R}^4$  munido da métrica Riemanniana

$$g = e^t dx^2 + e^{-t} dy^2 + (xdy - dz)^2 + dt^2$$

e o campo de vetores, definido por

$$X = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \partial_z,$$

então  $(\mathbb{R}^4, g, X, \lambda = -1/2)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein expansiva e não-gradiente.

De fato, primeiro verifica-se facilmente com a Proposição 3.5 que  $X$  é um campo de Killing, então  $\mathcal{L}_X g = 0$  e assim

$$Ric + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g - \frac{1}{m} X^b \otimes X^b = Ric - \frac{1}{2} dz^2$$

novamente pela Proposição 3.5, temos que

$$Ric = -\frac{1}{2} g + \frac{1}{2} dz^2,$$

portanto,

$$Ric + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g - \frac{1}{m} X^b \otimes X^b = -\frac{1}{2} g,$$

observe ainda que  $Ric(X, X) \neq 0$ , daí usamos a Proposição 2.6 para concluir que  $X$  não pode ser gradiente.

### 3 RESULTADOS INTRODUTÓRIOS

Nas duas primeiras seções do presente capítulo discutiremos um pouco sobre as variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três e variedades solúveis de dimensão quatro tipo-Lie, determinando estruturas geométricas, tais como colchetes de Lie, conexões, tensor de Ricci e curvatura escalar, enquanto a última seção contém resultados que estabelecem relações entre solitons de Ricci e campos de Killing.

#### 3.1 Variedades homogêneas de dimensão 3

Uma classificação das variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três bastante conhecida na literatura, está relacionada à dimensão do grupo de isometria que pode ser três, quatro ou seis. Maiores detalhes sobre as variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três e a classificação mencionada, podem ser encontrados nas referências indicadas em [17], [41] e [44].

##### 3.1.1 Variedades homogêneas com grupo de isometria de dimensão 3

As variedades homogêneas simplesmente conexas com grupo de isometria de dimensão três são isométricas ao grupo de Lie  $\text{Sol}_3$ , definido como sendo o grupo de Lie cuja variedade base é o  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica invariante à esquerda

$$g = e^{2t}dx^2 + e^{-2t}dy^2 + dt^2,$$

portanto os campos de vetores  $E_1 = e^{-t}\partial_x$ ,  $E_2 = e^t\partial_y$  e  $E_3 = \partial_t$  constituem um referencial ortonormal.

Podemos calcular os colchetes de Lie em termos do referencial  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , usando a definição e aplicando cada colchete em uma função arbitrária  $f \in C^\infty(M)$ , daí obtemos

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_3] = E_1 \quad \text{e} \quad [E_2, E_3] = -E_2,$$

e além disso, deduz-se a partir da fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}E_1 &= -E_3, & \nabla_{E_1}E_2 &= 0, & \nabla_{E_1}E_3 &= E_1, \\ \nabla_{E_2}E_1 &= 0, & \nabla_{E_2}E_2 &= E_3, & \nabla_{E_2}E_3 &= -E_2, \\ \nabla_{E_3}E_1 &= 0, & \nabla_{E_3}E_2 &= 0 & \text{e} & \nabla_{E_3}E_3 &= 0. \end{aligned}$$

A partir dos colchetes de Lie e das conexões apresentados acima, podemos obter o tensor de Ricci de  $\text{Sol}_3$  em termos do referencial ortonormal apresentado acima e conseqüentemente, deduzimos ainda a sua curvatura escalar. Mais precisamente, temos a proposição a seguir.

**Proposição 3.1** O tensor de Ricci do  $\text{Sol}_3$  é dado por  $\text{Ric} = -2E_3^\flat \otimes E_3^\flat$  e sua curvatura escalar é constante  $S \equiv -2$ .

**Demonstração:** Sendo  $\{E_1, E_2, E_3\}$  um referencial ortonormal, escrevemos

$$\text{Ric} = \sum_{j,k=1}^3 \text{Ric}(E_j, E_k) E_j^\flat \otimes E_k^\flat, \quad (3.1)$$

então usando os colchetes e conexões apresentados anteriormente, calculamos diretamente

$$\begin{aligned} \text{Ric}(E_1, E_2) &= \sum_{i=1}^3 \langle R(E_i, E_1)E_1, E_i \rangle = \langle R(E_3, E_1)E_2, E_3 \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle - \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_2, E_3 \rangle - \langle \nabla_{[E_3, E_1]} E_2, E_3 \rangle, \\ &= \langle \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle = 0, \end{aligned}$$

analogamente, obtém-se  $\text{Ric}(E_1, E_3) = \text{Ric}(E_2, E_3) = 0$  e portanto a igualdade (3.1) torna-se

$$\text{Ric} = \sum_{j=1}^3 \text{Ric}(E_j, E_j) E_j^\flat \otimes E_j^\flat. \quad (3.2)$$

Por outro lado, observe ainda que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(E_1, E_1) &= \sum_{i=1}^3 \langle R(E_i, E_1)E_1, E_i \rangle = \sum_{i=2}^3 \langle R(E_i, E_1)E_1, E_i \rangle \\ &= \langle R(E_2, E_1)E_1, E_2 \rangle + \langle R(E_3, E_1)E_1, E_3 \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle - \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle - \langle \nabla_{[E_2, E_1]} E_1, E_2 \rangle \\ &+ \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_1, E_3 \rangle - \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_1, E_3 \rangle - \langle \nabla_{[E_3, E_1]} E_1, E_3 \rangle, \\ &= -\langle \nabla_{E_2} E_3, E_2 \rangle + \langle \nabla_{E_3} E_3, E_3 \rangle - \langle \nabla_{E_2} E_2, E_3 \rangle, \\ &= \langle E_2, E_2 \rangle - \langle E_3, E_3 \rangle = 0, \end{aligned}$$

de modo similar, conclui-se que  $\text{Ric}(E_2, E_2) = 0$  e  $\text{Ric}(E_3, E_3) = -2$ . Substituindo esses valores em (3.2), chegamos na expressão do tensor de Ricci e tomando o traço nessa expressão, obtemos  $S \equiv -2$  e isso finaliza a prova da proposição.  $\square$

### 3.1.2 Variedades homogêneas com grupo de isometria de dimensão 4

Quando o grupo de isometria possui dimensão quatro,  $M^3$  é uma fibração sobre uma forma espacial  $\mathbb{N}_\kappa$  de dimensão dois com curvatura Gaussiana  $\kappa$  e existe uma submersão de Killing  $\pi : M^3 \rightarrow \mathbb{N}_\kappa$ , onde as fibras são difeomorfas a  $\mathbb{S}^1$  e a  $\mathbb{R}$  para  $M^3$  compacta e não-compacta, respectivamente. O campo de vetores  $E_3$  tangente às fibras é um campo de Killing, tal que  $\nabla_X E_3 = \tau X \times E_3$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M^3)$ , onde  $\tau$  é uma constante chamada de curvatura do fibrado.

Dessa forma,  $M^3$  está relacionada às constantes  $\kappa$  e  $\tau$  que satisfazem a desigualdade  $\kappa \neq 4\tau^2$  e assim introduzimos a notação  $M^3 = \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ . Além disso, fazendo o uso dessas constantes, tais variedades podem ser classificadas conforme a seguinte lista

$$\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \begin{cases} \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}, & \kappa > 0 \text{ e } \tau = 0 \\ \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}, & \kappa < 0 \text{ e } \tau = 0 \\ Nil_3(\kappa, \tau) \text{ (Espaço de Heisenberg)}, & \kappa = 0 \text{ e } \tau \neq 0 . \\ \widetilde{PSl}_2(\kappa, \tau), & \kappa < 0 \text{ e } \tau \neq 0 \\ \mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3 \text{ (Esferas de Berger)}, & \kappa > 0 \text{ e } \tau \neq 0 \end{cases}$$

Quando o espaço  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  é não-compacto, ele é dado topologicamente por

$$\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \{(x, y, t) : (x, y) \in N_\kappa^2 \text{ e } t \in \mathbb{R}\},$$

então munindo a forma espacial  $N_\kappa^2$  com a métrica

$$h = \rho(\kappa)^2(dx^2 + dy^2),$$

onde  $\rho$  é dada por

$$\rho(\kappa) = \begin{cases} 1, & \text{se } \kappa = 0 \\ \frac{2}{1 + \kappa(x^2 + y^2)}, & \text{se } \kappa \neq 0 \end{cases} ,$$

temos que  $\{e_1 = \rho^{-1}\partial_x, e_2 = \rho^{-1}\partial_y\}$  é um referencial ortonormal para  $N_\kappa^2$ .

A projeção  $\pi : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow N_\kappa^2$ , dada por  $\pi(x, y, t) = (x, y)$  é uma submersão de Killing e as translações ao longo das fibras são isometrias, por isso  $E_3$  é um campo de Killing. Fazendo um levantamento horizontal do referencial  $\{e_1, e_2\}$ , obtemos  $\{E_1, E_2\}$  e juntamente com  $E_3$ , obtemos o referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3\}$  para  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ . O referencial natural para  $N_\kappa^2$  é  $\{\partial_x, \partial_y\}$ , daí um referencial natural para  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  é dado por  $\{\partial_x, \partial_y, \partial_t\}$ , onde  $\partial_t$  é tangente às fibras e portanto  $E_3 = \partial_t$ .



Nesse momento, enunciamos um lema que descreve a métrica, conexões e colchetes de Lie das variedades homogêneas  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ . Mais precisamente, temos o lema a seguir.

**Lema 3.1** (Thruston [44]) Escrevendo o referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3\}$  em termos de  $\{\partial_x, \partial_y, \partial_t\}$ , temos

$$\begin{array}{ll} \kappa \neq 0 & \kappa = 0 \\ E_1 = \rho^{-1}\partial_x + 2\kappa\tau y\partial_t & E_1 = \partial_x - \tau y\partial_t \\ E_2 = \rho^{-1}\partial_y - 2\kappa\tau x\partial_t & E_2 = \partial_y + \tau x\partial_t \\ E_3 = \partial_t & E_3 = \partial_t \end{array} ,$$

além disso, munindo o espaço  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  com a métrica

$$g = \begin{cases} dx^2 + dy^2 + [\tau(ydx - xdy) + dt]^2, & \text{se } \kappa = 0 \\ \rho^2(dx^2 + dy^2) + [2\kappa\tau\rho(ydx - xdy) - dt]^2, & \text{se } \kappa \neq 0 \end{cases} ,$$

teremos a conexão Riemanniana dada por

$$\begin{array}{lll} \nabla_{E_1} E_1 = \kappa y E_2, & \nabla_{E_1} E_2 = -\kappa y E_1 + \tau E_3, & \nabla_{E_1} E_3 = -\tau E_2, \\ \nabla_{E_2} E_1 = -\kappa x E_2 - \tau E_3, & \nabla_{E_2} E_2 = \kappa x E_1, & \nabla_{E_2} E_3 = \tau E_1, \\ \nabla_{E_3} E_1 = -\tau E_2, & \nabla_{E_3} E_2 = \tau E_1 & \text{e} \quad \nabla_{E_3} E_3 = 0, \end{array}$$

consequentemente

$$[E_1, E_2] = -\kappa y E_1 + \kappa x E_2 + 2\tau E_3, \quad [E_1, E_2] = 0 \quad \text{e} \quad [E_1, E_3] = 0.$$

Por outro lado, quando  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  é compacto, temos as esferas de Berger, as quais são descritas brevemente nesse parágrafo. Começamos a construção das esferas de Berger, apresentando o modelo da esfera unitária  $\mathbb{S}^3$  dado por

$$\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

e munido da métrica  $g_{\kappa, \tau}$ , definida por

$$g_{\kappa, \tau} := \frac{4}{\kappa^2} [\kappa g - (\kappa - 4\tau^2)V^b \otimes V^b],$$

onde  $g$  denota a métrica canônica de  $\mathbb{S}^3$  e o campo de vetores  $V$  é dado por

$$V_{(z, w)} = (iz, iw),$$

para cada  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ .

De agora em diante, passaremos a usar a notação  $\mathbb{S}_{\kappa,\tau}^3$  para nos referir a  $\mathbb{S}^3$  munido da métrica  $g_{\kappa,\tau}$  definida acima, vale ainda ressaltar que o campo de vetores vertical tangente às fibras é dado por  $E_3 = \frac{\kappa}{4\tau}V$  e também que  $\mathbb{S}_{4,1}^3$  é a esfera unitária canônica. Na esfera de Berger  $\mathbb{S}_{\kappa,\tau}^3$ , vamos considerar os campos de vetores, dados por  $E_1(z, w) = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}(-\bar{w}, \bar{z})$  e  $E_2(z, w) = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}(-i\bar{w}, i\bar{z})$  e junto com o campo de vetores  $E_3$ , obtemos um referencial ortonormal.

Agora enunciamos mais um lema que apresenta as conexões e os colchetes de Lie nas esferas de Berger  $\mathbb{S}_{\kappa,\tau}^3$ , dadas em termos do referencial ortonormal acima.

**Lema 3.2** (Torrallbo [45]) A conexão Riemanniana associada à métrica  $g_{\kappa,\tau}$  é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}E_1 &= 0, & \nabla_{E_1}E_2 &= -\tau E_3, & \nabla_{E_1}E_3 &= \tau E_2, \\ \nabla_{E_2}E_1 &= \tau E_3, & \nabla_{E_2}E_2 &= 0, & \nabla_{E_2}E_3 &= -\tau E_1, \\ \nabla_{E_3}E_1 &= -\frac{\kappa - 2\tau^2}{2\tau}E_2, & \nabla_{E_3}E_2 &= \frac{\kappa - 2\tau^2}{2\tau}E_1 & \text{e} & \nabla_{E_3}E_3 = 0, \end{aligned}$$

consequentemente, o colchete de Lie será dado por

$$[E_1, E_2] = -2\tau E_3, \quad [E_1, E_3] = \frac{\kappa}{2\tau}E_2 \quad \text{e} \quad [E_2, E_3] = -\frac{\kappa}{2\tau}E_1.$$

Usamos os Lemas 3.1 e 3.2 para obter a próxima proposição, onde determina-se o tensor de Ricci das variedades homogêneas  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  em termos da métrica e do campo de vetores vertical  $E_3$ .

**Proposição 3.2** Seja  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  uma variedade Riemanniana homogênea simplesmente conexa de dimensão três e com grupo de isometria de dimensão quatro, então o tensor de Ricci é dado por

$$Ric = (\kappa - 2\tau^2)g - (\kappa - 4\tau^2)E_3^{\flat} \otimes E_3^{\flat},$$

enquanto a sua curvatura escalar é constante  $S \equiv 2(\kappa - \tau^2)$ .

**Demonstração:** Faremos a prova apenas para o caso não-compacto, já que o caso compacto é completamente análogo e para isso, vamos considerar o referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, E_3\}$  presente no Lema 3.1, então escrevemos

$$Ric = \sum_{j,k=1}^3 Ric(E_j, E_k)E_j^{\flat} \otimes E_k^{\flat}, \quad (3.3)$$

no entanto, usando as conexões e colchetes presentes no Lema 3.1, vamos ter

$$\begin{aligned}
Ric(E_1, E_2) &= \sum_{i=1}^3 \langle R(E_i, E_1)E_2, E_i \rangle = \langle R(E_3, E_1)E_2, E_3 \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle - \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_2, E_3 \rangle - \langle \nabla_{[E_3, E_1]} E_2, E_3 \rangle \\
&= -\kappa y \langle \nabla_{E_3} E_1, E_3 \rangle + \tau \langle \nabla_{E_3} E_3, E_3 \rangle = 0,
\end{aligned}$$

do mesmo modo, chegamos a  $Ric(E_1, E_3) = Ric(E_2, E_3) = 0$  e assim a igualdade (3.3) torna-se

$$Ric = \sum_{j=1}^3 Ric(E_j, E_j) E_j^\flat \otimes E_j^\flat. \quad (3.4)$$

Por outro lado, observe ainda que

$$\begin{aligned}
Ric(E_1, E_1) &= \sum_{i=1}^3 \langle R(E_i, E_1)E_1, E_i \rangle = \langle R(E_2, E_1)E_1, E_2 \rangle + \langle R(E_3, E_1)E_1, E_3 \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle - \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle - \langle \nabla_{[E_2, E_1]} E_1, E_2 \rangle \\
&+ \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_1, E_3 \rangle - \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_1, E_3 \rangle - \langle \nabla_{[E_3, E_1]} E_1, E_3 \rangle,
\end{aligned}$$

novamente usando as conexões e os colchetes apresentados no Lema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
Ric(E_1, E_1) &= \kappa y \langle \nabla_{E_2} E_2, E_2 \rangle + E_2(\kappa y) + \kappa x \langle \nabla_{E_1} E_2, E_2 \rangle \\
&+ \tau \langle \nabla_{E_1} E_3, E_2 \rangle + E_1(\kappa x) - \kappa y \langle \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle + \kappa x \langle \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle \\
&+ 2\tau \langle \nabla_{E_3} E_1, E_2 \rangle + \langle \nabla_{E_3} (\kappa y E_2), E_3 \rangle + \tau \langle \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle \\
&= E_2(\kappa y) - \tau^2 + E_1(\kappa x) - \kappa^2 y^2 - \kappa^2 x^2 - 2\tau^2 + \kappa y \langle \nabla_{E_3} E_2, E_3 \rangle + \tau^2 \\
&= E_2(\kappa y) + E_1(\kappa x) - \tau^2 - \kappa^2 y^2 - \kappa^2 x^2 - 2\tau^2 + \tau^2 \\
&= 2\kappa \rho^{-1} - \kappa^2 (x^2 + y^2) - 2\tau^2 = \kappa - 2\tau^2,
\end{aligned}$$

da mesma forma, obtém-se  $Ric(E_2, E_2) = \kappa - 2\tau^2$  e  $Ric(E_3, E_3) = 2\tau^2$  e por fim, basta substituir todos os valores na igualdade (3.4).  $\square$

### 3.1.3 Variedades homogêneas com grupo de isometria de dimensão 6

As variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três com grupo de isometria de dimensão seis são as formas espaciais, tendo portanto curvatura seccional constante. As formas espaciais de dimensão três são o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , a esfera canônica  $\mathbb{S}^3$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , cujas curvaturas escalares são constantes  $S \equiv 0$ ,  $S > 0$  e  $S < 0$ , respectivamente. Essas variedades homogêneas são chamadas variedades de

Einstein, já que o tensor de Ricci é múltiplo da métrica e tem a expressão

$$Ric = \frac{1}{3}Sg,$$

onde  $S$  denota a curvatura escalar da referida variedade. Apresentamos a seguir, mais algumas informações sobre essas variedades, iniciando pelas respectivas definições.

Iniciamos descrevendo  $\mathbb{R}^3$  que consiste do que o conjunto  $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  munido da métrica  $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$  e sua curvatura escalar é identicamente nula. Para descrever a esfera  $\mathbb{S}^3$  e unificar notação, vamos considerar a mesma construção das esferas de Berger, fazendo  $\kappa = 4\tau^2$  e caso necessário, usaremos as informações apresentadas na subseção anterior.

**Observação 3.1** Devemos ressaltar que a descrição de  $\mathbb{S}^3$ , mencionada no parágrafo anterior, não é a mais usual da literatura, porém é a mais conveniente para os propósitos do trabalho.

Finalmente, considere o semi-espaço  $H^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$  de  $\mathbb{R}^3$  e a métrica  $g = z^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , então definimos o espaço hiperbólico por  $\mathbb{H}^3 := (H^3, g)$ , cuja curvatura é dada por  $\kappa = -1$ . Verifica-se facilmente que  $\{E_1 = z\partial_x, E_2 = z\partial_y, E_3 = z\partial_z\}$  é um referencial ortonormal sobre  $\mathbb{H}^3$  e em termos desse referencial, podemos determinar os colchetes de lie, calculados em uma função arbitrária  $f \in C^\infty(\mathbb{H}^3)$  e assim, obtemos

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_3] = -E_1 \quad \text{e} \quad [E_2, E_3] = -E_2$$

e além disso, deduz-se a partir da fórmula de Koszul que

$$\begin{array}{lll} \nabla_{E_1} E_1 = E_3, & \nabla_{E_1} E_2 = 0, & \nabla_{E_1} E_3 = -E_1, \\ \nabla_{E_2} E_1 = 0, & \nabla_{E_2} E_2 = E_3, & \nabla_{E_2} E_3 = -E_2, \\ \nabla_{E_3} E_1 = 0, & \nabla_{E_3} E_2 = 0 & \text{e} \quad \nabla_{E_3} E_3 = 0. \end{array}$$

### 3.2 Variedades solúveis tipo-Lie de dimensão 4

As variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro são grupos de Lie solúveis, simplesmente conexos, difeomorfos a  $\mathbb{R}^4$  e munidos de métrica invariante à esquerda, consequentemente constituem uma classe de variedades homogêneas. Maiores informações sobre variedades solúveis tipo-Lie podem ser encontradas em [25], [40] e [46], enquanto um bom suporte teórico sobre grupos de Lie pode ser obtido em [29] e [31].

Definimos as variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro, conforme [25], [40] e [46], mencionadas no parágrafo anterior. Nessas condições, listamos as referidas variedades como a seguir.

$$(\mathbb{R}^4, g) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^4, \text{ se } g = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2. \\ Nil^4, \text{ se } g = dx^2 + dz^2 + (dy + xdz)^2 + (xdy + \frac{1}{2}x^2dz + dt)^2. \\ Nil^3 \times \mathbb{R}, \text{ se } g = dx^2 + dy^2 + (xdy - dz)^2 + dt^2. \\ Sol_0^4, \text{ se } g = e^{-2t}(dx^2 + dy^2) + e^{4t}dz^2 + dt^2. \\ Sol_1^4, \text{ se } g = e^{2t}dx^2 + e^{-2t}dy^2 + (xdy - dz)^2 + dt^2. \\ Sol_{m,n}^4, \text{ se } g = e^{-2at}dx^2 + e^{-2bt}dy^2 + e^{-2ct}dz^2 + dt^2, \text{ onde } e^a, e^b \text{ e } e^c \\ \text{são raízes reais distintas do polinômio } p(t) = t^3 - mt^2 + nt - 1 \text{ para} \\ \text{números reais } a < b < c \text{ e inteiros } m < n. \\ Sol^3 \times \mathbb{R}, \text{ se } g = e^{2t}dx^2 + e^{-2t}dy^2 + dz^2 + dt^2. \end{array} \right. .$$

Nesse momento, vamos munir  $\mathbb{R}^4$  com a métrica dada por

$$g = e^{-2at}dx^2 + e^{-2bt}dy^2 + e^{-2ct}dz^2 + dt^2$$

para obter expressões que descrevam simultaneamente colchetes, conexões, tensor de Ricci e curvatura escalar de  $\mathbb{R}^4$ ,  $Sol_0^4$ ,  $Sol_{m,n}^4$  e  $Sol^3 \times \mathbb{R}$ , pois atribuindo valores convenientes às constantes  $a, b$  e  $c$ , teremos cada uma das variedades mencionadas. Baseado nessa notação, deduzimos a seguinte proposição.

**Proposição 3.3** Considere  $\mathbb{R}^4$  munido da métrica

$$g = e^{-2at}dx^2 + e^{-2bt}dy^2 + e^{-2ct}dz^2 + dt^2$$

e o referencial ortonormal  $\{E_1 = e^{at}\partial_x, E_2 = e^{bt}\partial_y, E_3 = e^{ct}\partial_z, E_4 = \partial_t\}$  sobre  $M = (\mathbb{R}^4, g)$ . Nessas condições, os colchetes de Lie são dados por

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] = [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0, & \quad [E_1, E_4] = -aE_1, \\ [E_2, E_4] = -bE_2 & \quad \text{e} \quad [E_3, E_4] = -cE_3, \end{aligned}$$

enquanto as conexões são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}E_1 &= aE_4, & \nabla_{E_1}E_2 &= 0, & \nabla_{E_1}E_3 &= 0, & \nabla_{E_1}E_4 &= -aE_1, \\ \nabla_{E_2}E_1 &= 0, & \nabla_{E_2}E_2 &= bE_4, & \nabla_{E_2}E_3 &= 0, & \nabla_{E_2}E_4 &= -bE_2, \\ \nabla_{E_3}E_1 &= 0, & \nabla_{E_3}E_2 &= 0, & \nabla_{E_3}E_3 &= cE_4, & \nabla_{E_3}E_4 &= -cE_3, \\ \nabla_{E_4}E_1 &= 0, & \nabla_{E_4}E_2 &= 0, & \nabla_{E_4}E_3 &= 0 & \text{e} \quad \nabla_{E_4}E_4 &= 0 \end{aligned}$$

e o tensor de Ricci por

$$Ric = -(a + b + c)(aE_1^b \otimes E_1^b + bE_2^b \otimes E_2^b + cE_3^b \otimes E_3^b) - (a^2 + b^2 + c^2)E_4^b \otimes E_4^b,$$

em particular, a curvatura escalar será  $S \equiv -(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ .

**Demonstração:** Determinamos os colchetes de Lie, usando a definição e aplicando diretamente cada colchete em uma função  $f \in C^\infty(M)$ , depois usamos os valores obtidos junto com a fórmula de Koszul para determinar as conexões Riemannianas. Agora usando o fato de  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  ser um referencial ortonormal, juntamente com a bilinearidade do tensor de Ricci, escrevemos

$$Ric = \sum_{j,k=1}^4 Ric(E_j, E_k)E_j^b \otimes E_k^b, \quad (3.5)$$

mas usando as conexões e colchetes acima, teremos

$$\begin{aligned} Ric(E_1, E_2) &= \sum_{i=1}^4 \langle R(E_i, E_1)E_2, E_i \rangle = \sum_{i=3}^4 \langle R(E_i, E_1)E_2, E_i \rangle, \\ &= \sum_{i=3}^4 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_1} E_2, E_i \rangle - \sum_{i=3}^4 \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_i} E_2, E_i \rangle - \sum_{i=3}^4 \langle \nabla_{[E_i, E_1]} E_2, E_i \rangle \\ &= -\langle \nabla_{[E_4, E_1]} E_2, E_4 \rangle = -a \langle \nabla_{E_1} E_2, E_4 \rangle = 0, \end{aligned}$$

de modo similar, conclui-se que  $Ric(E_1, E_3) = Ric(E_1, E_4) = Ric(E_2, E_3) = Ric(E_2, E_4) = Ric(E_3, E_4) = 0$ , então a igualdade (3.5) torna-se

$$Ric = \sum_{j=1}^4 Ric(E_j, E_k)E_j^b \otimes E_j^b. \quad (3.6)$$

Além disso, temos o seguinte

$$\begin{aligned} Ric(E_1, E_1) &= \sum_{i=1}^4 \langle R(E_i, E_1)E_1, E_i \rangle = \sum_{i=2}^4 \langle R(E_i, E_1)E_1, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^4 \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_1} E_1, E_i \rangle - \sum_{i=2}^4 \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_i} E_1, E_i \rangle - \sum_{i=2}^4 \langle \nabla_{[E_i, E_1]} E_1, E_i \rangle, \end{aligned}$$

daí usamos as conexões e colchetes apresentados anteriormente para obtermos

$$\begin{aligned} Ric(E_1, E_1) &= a \sum_{i=2}^4 \langle \nabla_{E_i} E_4, E_i \rangle - \langle \nabla_{[E_4, E_1]} E_1, E_1 \rangle, \\ &= a(\langle \nabla_{E_2} E_4, E_2 \rangle + \langle \nabla_{E_3} E_4, E_3 \rangle) - a \langle \nabla_{E_1} E_1, E_4 \rangle \\ &= -a(a + b + c), \end{aligned}$$

de modo análogo, obtemos  $Ric(E_2, E_2) = -b(a + b + c)$ ,  $Ric(E_3, E_3) = -c(a + b + c)$  e  $Ric(E_4, E_4) = -(a^2 + b^2 + c^2)$  e substituímos esses valores em (3.6) para chegar na expressão do tensor de Ricci, daí tomamos o traço do tensor de Ricci que nos fornece a curvatura escalar constante

$$S \equiv -(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

concluindo a prova.  $\square$

Agora vamos determinar os colchetes de Lie, conexões, tensor de Ricci e curvatura escalar do  $Nil^4$  com o seguinte lema.

**Proposição 3.4** Considere sobre  $Nil^4$  o referencial ortonormal

$$\{E_1 = \partial_x, E_2 = \partial_y - x\partial_t, E_3 = -x\partial_y + \partial_z + x^2\partial_t/2, E_4 = \partial_t\},$$

então os colchetes de Lie são dados por

$$[E_1, E_2] = -E_4, \quad [E_1, E_3] = -E_2 \quad \text{e} \quad [E_1, E_4] = [E_2, E_3] = [E_2, E_4] = [E_3, E_4] = 0,$$

enquanto as conexões são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= 0, & \nabla_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2}(E_3 - E_4), & \nabla_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2}E_2, & \nabla_{E_1} E_4 &= \frac{1}{2}E_2, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= \frac{1}{2}(E_3 + E_4), & \nabla_{E_2} E_2 &= 0, & \nabla_{E_2} E_3 &= -\frac{1}{2}E_1, & \nabla_{E_2} E_4 &= -\frac{1}{2}E_1, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= \frac{1}{2}E_2, & \nabla_{E_3} E_2 &= -\frac{1}{2}E_1, & \nabla_{E_3} E_3 &= 0, & \nabla_{E_3} E_4 &= 0, \\ \nabla_{E_4} E_1 &= \frac{1}{2}E_2, & \nabla_{E_4} E_2 &= -\frac{1}{2}E_1, & \nabla_{E_4} E_3 &= 0 & \text{e} & \nabla_{E_4} E_4 &= 0 \end{aligned}$$

e o tensor de Ricci por

$$Ric = -E_1^\flat \otimes E_1^\flat - \frac{1}{2}(E_3^\flat \otimes E_3^\flat - E_4^\flat \otimes E_4^\flat),$$

consequentemente a curvatura escalar será  $S \equiv -1$ .

**Demonstração:** Similar à prova da Proposição 3.3.

Agora vamos munir  $\mathbb{R}^4$  com a métrica  $g = e^{-2at} dx^2 + e^{-2bt} dy^2 + e^{-2ct} dy^2 + dt^2$  e assim, observe que fazendo  $a = 0$  ou  $a = 1$ , obtemos  $(\mathbb{R}^4, g)$  igual a  $Nil^3 \times \mathbb{R}$  ou  $Sol_1^4$  respectivamente, então trabalhando com a referida métrica, podemos descrever simultaneamente colchetes, conexões, tensor de Ricci e curvatura escalar dessas variedades.

**Proposição 3.5** Considere  $\mathbb{R}^4$  munido da métrica

$$g = e^{2at} dx^2 + e^{-2at} dy^2 + (xdy - dz)^2 + dt^2$$

e o referencial ortonormal  $\{E_1 = e^{-at}\partial_x, E_2 = e^{at}(\partial_y + x\partial_z), E_3 = \partial_z, E_4 = \partial_t\}$  sobre  $(\mathbb{R}^4, g)$ . Dessa forma, os colchetes de Lie são dados por

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= E_3, & [E_1, E_3] &= [E_2, E_3] = [E_3, E_4] = 0, \\ [E_1, E_4] &= aE_1 & e & [E_2, E_4] = -aE_2, \end{aligned}$$

enquanto as conexões são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= -aE_4, & \nabla_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2}E_3, & \nabla_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2}E_2, & \nabla_{E_1} E_4 &= aE_1, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= -\frac{1}{2}E_3, & \nabla_{E_2} E_2 &= aE_4, & \nabla_{E_2} E_3 &= \frac{1}{2}E_1, & \nabla_{E_2} E_4 &= -aE_2, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= -\frac{1}{2}E_2, & \nabla_{E_3} E_2 &= \frac{1}{2}E_1, & \nabla_{E_3} E_3 &= 0, & \nabla_{E_3} E_4 &= 0, \\ \nabla_{E_4} E_1 &= 0, & \nabla_{E_4} E_2 &= 0, & \nabla_{E_4} E_3 &= 0 & e & \nabla_{E_4} E_4 = 0, \end{aligned}$$

o tensor de Ricci por

$$Ric = -\frac{1}{2}[E_1^\flat \otimes E_1^\flat + E_2^\flat \otimes E_2^\flat - E_3^\flat \otimes E_3^\flat + 4a^2 E_4^\flat \otimes E_4^\flat],$$

e a curvatura escalar será  $S = -\frac{1}{2}(4a^2 + 1)$ .

**Demonstração:** Análoga à prova da Proposição 3.3.

### 3.3 Campos de Killing e solitons de Ricci

Nesta seção, vamos apresentar resultados sobre solitons de Ricci que exploram principalmente a relação existente entre essas estruturas, os campos de Killing e a curvatura escalar e que serão muito úteis nos próximos capítulos. O primeiro resultado estabelece uma relação entre as estruturas de solitons de Ricci em variedades Riemannianas de curvatura escalar constante não-nula, mostrando que nessa classe de variedades é possível chegar a resultados similares aos que Baird e Daniello obtiveram em [4] e [5] para variedades homogêneas de dimensões três e quatro.

**Proposição 3.6** Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana com curvatura escalar constante não-nula que admite uma estrutura  $(M^n, g, X, \lambda)$  de soliton de Ricci, então essa estrutura é única a menos de campos de Killing.



**Demonstração:** Dada uma estrutura  $(M^n, g, Y, \zeta)$  de solitons de Ricci, temos que

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g = \zeta g,$$

e por hipótese,  $(M^n, g, X, \lambda)$  também satisfaz a equação

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

daí comparamos as igualdades acima, obtendo

$$\mathcal{L}_{(X-Y)}g = 2(\lambda - \zeta)g,$$

então usamos a Proposição 2.3 para garantir que  $X - Y$  é um campo de Killing e portanto  $\zeta = \lambda$ , finalizando a prova.  $\square$

**Observação 3.2** A Proposição 3.6 nos mostra que a partir de uma estrutura particular de soliton de Ricci e dos campos de Killing sobre uma variedade de curvatura escalar não-nula, podemos determinar todas as outras estruturas de soliton de Ricci sobre essa variedade.

**Corolário 3.1** Nas mesmas condições da proposição anterior, suponha ainda que  $(M^n, g)$  admite estrutura de soliton de Ricci gradiente com função potencial  $f$ , então vale a decomposição  $X = \nabla f + K$  para algum campo de Killing  $K$ .

Considerando apenas estruturas de solitons de Ricci gradiente, podemos obter um resultado similar à Proposição 3.6 que dispensa hipótese sobre a curvatura escalar, como podemos conferir no próximo resultado.

**Proposição 3.7** Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana não-flat que admite uma estrutura  $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$  de soliton de Ricci gradiente, então essa estrutura é a única gradiente a menos de campos de Killing.

**Demonstração:** Basta repetir os mesmos passos da prova da proposição anterior e por fim, aplicar o Teorema 2 de Tashiro [43].  $\square$

**Corolário 3.2** Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta que admite uma estrutura  $(M^n, g, X, \lambda)$  de soliton de Ricci, então essa estrutura é única a menos de campos de Killing.

**Demonstração:** Basta admitir a existência de uma outra estrutura, aplicar o Teorema de Perelman [33] às duas estruturas e por fim, usar a proposição anterior ou o próprio Teorema 2 de Tashiro [43].

**Corolário 3.3** Seja  $(N \times \mathbb{R}^k, g, \nabla f, \lambda)$  um soliton de Ricci gradiente, onde  $N$  é uma variedade de Einstein com constante de Einstein  $\lambda$  não-nula e  $g$  é a métrica produto, então a função potencial  $f \in C^\infty(N \times \mathbb{R}^k)$  é da forma

$$f(p, x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2 + \langle a, x \rangle + b,$$

onde  $a \in \mathbb{R}^k$  e  $b$  é uma constante.

**Demonstração:** Considere a função  $h \in C^\infty(N \times \mathbb{R}^k)$ , definida por

$$h(p, x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$$

e observe que  $(N \times \mathbb{R}^k, \nabla h, \lambda)$  é um soliton de Ricci, então a Proposição 3.7 nos garante que  $K = \nabla f - \nabla h$  é paralelo. Usamos a Proposição 2.6 para concluir que

$$K = a_1 \partial_{x_1} + \dots + a_k \partial_{x_k}$$

e portanto  $f$  pode ser escrita da forma

$$f(p, x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2 + \langle a, x \rangle + b,$$

onde  $a \in \mathbb{R}^k$  e  $b \in \mathbb{R}$ , conforme queríamos provar. □

## 4 SOLITONS DE RICCI HOMOGÊNEOS DE DIMENSÃO 3

Neste capítulo, vamos apresentar os resultados obtidos em parceria com Ribeiro Jr em [39] para solitons de Ricci homogêneos simplesmente conexos de dimensão três, os quais trazem uma descrição explícita dos referidos solitons, melhorando alguns dos resultados obtidos por Baird e Daniello [5] e esboçando uma prova mais elementar dos mesmos. Os resultados que obtivemos nos fornecem expressões gerais para solitons de Ricci e campos de Killing sobre  $\text{Sol}^3$ ,  $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e  $\text{Nil}_3$  e além disso, nos permite chegar às seguintes conclusões:

- Todas as estruturas de soliton de Ricci gradiente sobre  $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  são similares às descritas nos Exemplos 4.3 e 4.5, diferindo apenas pela função potencial.
- $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  é o único soliton de Ricci contrátil, homogêneo e simplesmente conexo de dimensão três.
- $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  é o único soliton de Ricci gradiente não-flat, expansivo, homogêneo e simplesmente conexo de dimensão três.
- $\text{Sol}^3$  e  $\text{Nil}_3$  admitem apenas estruturas expansivas e não-gradientes de solitons de Ricci.

**Observação 4.1** A última das conclusões mencionada acima, já era esperada devido aos resultados de Baird e Daniello em [5] e por ser uma consequência do Teorema 1.1 de Petersen e Wylie em [35].

### 4.1 Exemplos e Lemas-chave

Conforme vimos na Seção 3.1, geralmente as variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três são classificadas quanto à dimensão do grupo de isometria que pode ser três, quatro ou seis e a menos de isometria, podemos determinar todas essas variedades. Neste capítulo, vamos nos restringir às variedades com grupos de isometria de dimensões três e quatro, pois as variedades que possuem grupo de isometria de dimensão seis são bem conhecidas na literatura por serem variedades de Einstein.

Primeiramente devemos recordar a definição de soliton de Ricci apresentada no segundo capítulo para podermos dar continuidade com os exemplos e os primeiros resultados obtidos.

**Definição 4.1** Um soliton de Ricci  $(M^n, g, X, \lambda)$  é uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , junto com um campo de vetores  $X$ , satisfazendo a equação fundamental

$$\text{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é uma constante.

Nesse momento, apresentamos alguns exemplos de estruturas de solitons de Ricci sobre variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três. O primeiro exemplo descreve uma estrutura de soliton de Ricci sobre  $\text{Sol}^3$ .

**Exemplo 4.1** (Baird e Daniello, 2007) Sejam  $(M^3, g) = \text{Sol}^3$  e  $X \in \mathfrak{X}(\text{Sol}^3)$  o campo de vetores dado por

$$X = -4ye^{-t}E_1 - 2E_3,$$

então  $(\text{Sol}^3, X, \lambda = -2)$  é um soliton de Ricci não-gradiente e expansivo.

Na sequência, trazemos outra estrutura não-gradiente de soliton de Ricci que obtivemos sobre  $\text{Sol}^3$ .

**Exemplo 4.2** Sejam  $(M^3, g) = \text{Sol}^3$  e  $X \in \mathfrak{X}(\text{Sol}^3)$  o campo de vetores dado por

$$X = -2xe^tE_1 - 2ye^{-t}E_2,$$

então  $(\text{Sol}^3, X, \lambda = -2)$  é um soliton de Ricci não-gradiente e expansivo.

O próximo exemplo, trata-se de um caso particular do Exemplo 2.7, no qual  $N = \mathbb{S}_\kappa^2$  é a variedade de Einstein e  $\lambda = \kappa > 0$  a sua constante de Einstein.

**Exemplo 4.3** Sejam  $M^3 = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto  $g$  e  $f : \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, t) = \frac{1}{2}\kappa t^2$ , então  $(\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}, X = \nabla f, \lambda = \kappa)$  é um soliton de Ricci gradiente contrátil.

Agora vamos mostrar uma estrutura não-gradiente de soliton de Ricci que construímos sobre  $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto.

**Exemplo 4.4** Sejam  $M^3 = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto  $g$  e  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R})$  o campo de vetores dado por

$$X = y\rho E_1 - x\rho E_2 + \kappa t E_3,$$

então  $(\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}, X, \lambda = \kappa)$  é um soliton de Ricci não-gradiente contrátil.

O exemplo a seguir, também representa apenas um caso particular do Exemplo 2.7, onde  $N = \mathbb{H}_\kappa^2$  é a variedade de Einstein e  $\lambda = \kappa < 0$  a sua constante de Einstein.

**Exemplo 4.5** Sejam  $M^3 = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto  $g$  e  $f : \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, t) = \frac{1}{2}\kappa t^2$ , então  $(\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}, X = \nabla f, \lambda = \kappa)$  é um soliton de Ricci gradiente expansivo.

De modo similar, construímos uma estrutura não-gradiente de soliton de Ricci sobre  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto.

**Exemplo 4.6** Sejam  $M^3 = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto  $g$  e  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R})$  o campo de vetores dado por

$$X = -y\rho E_1 + x\rho E_2 + \kappa t E_3,$$

então  $(\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}, X, \lambda = \kappa)$  é um soliton de Ricci não-gradiente expansivo.

O último exemplo que vamos apresentar, refere-se a uma estrutura de soliton de Ricci que construímos sobre  $Nil_3$ , descrita a seguir.

**Exemplo 4.7** Sejam  $(M^3, g) = Nil_3$  e  $X \in \mathfrak{X}(Nil_3)$  o campo de vetores dado por

$$X = -4\tau^2 x E_1 - 4\tau^2 y E_2 - 8\tau^2 t E_3,$$

então  $(Nil_3, X, \lambda = -6\tau^2)$  é um soliton de Ricci expansivo não-gradiente.

Os dois primeiros lemas a seguir são fundamentais na prova dos teoremas que serão apresentados no decorrer do capítulo.

**Lema 4.1** Seja  $(Sol^3, X, \lambda)$  um soliton de Ricci, então as seguintes equações são satisfeitas

$$E_1\langle X, E_1 \rangle + \langle X, E_3 \rangle = \lambda \tag{4.1}$$

$$E_2\langle X, E_2 \rangle - \langle X, E_3 \rangle = \lambda \tag{4.2}$$

$$E_3\langle X, E_3 \rangle = \lambda + 2, \tag{4.3}$$

$$E_2\langle X, E_1 \rangle + E_1\langle X, E_2 \rangle = 0, \tag{4.4}$$

$$E_3\langle X, E_1 \rangle + E_1\langle X, E_3 \rangle - \langle X, E_1 \rangle = 0, \tag{4.5}$$

$$E_3\langle X, E_2 \rangle + E_2\langle X, E_3 \rangle + \langle X, E_2 \rangle = 0, \tag{4.6}$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são tais como na Subseção 3.1.1.

**Demonstração:** As equações acima são todas obtidas a partir da igualdade

$$Ric(E_i, E_j) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(E_i, E_j) = \lambda\langle E_i, E_j \rangle, \quad (i, j = 1, 2 \text{ e } 3)$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L}_X g(E_i, E_j) = 2[\lambda\delta_{ij} - Ric(E_i, E_j)],$$

portanto segue da definição de derivada de Lie e das propriedades da conexão que a igualdade acima pode ser escrita como

$$E_i\langle X, E_j \rangle + E_j\langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_j + \nabla_{E_j} E_i \rangle = 2[\lambda\delta_{ij} - Ric(E_i, E_j)]. \quad (4.7)$$

Observe que para  $i = j$ , obtemos

$$E_i\langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle = [\lambda - Ric(E_i, E_i)],$$

então fazemos  $i = 1, 2$  e  $3$ , usando a Proposição 3.1 e as conexões apresentadas na Subseção 3.1.1, obtemos (4.1), (4.2) e (4.3). Para o caso  $i \neq j$ , temos que a igualdade (4.7) torna-se

$$E_i\langle X, E_j \rangle + E_j\langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_j + \nabla_{E_j} E_i \rangle = 0,$$

por fim, fazendo  $i, j = 1, 2$  e  $3$  e usando o mesmo procedimento do caso anterior, chegamos nas equações (4.4), (4.5) e (4.6).  $\square$

**Lema 4.2** Seja  $(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau), X, \lambda)$  um soliton de Ricci homogêneo de dimensão três e com grupo de isometria de dimensão quatro, então são satisfeitas as equações

$$E_1\langle X, E_1 \rangle - \kappa y\langle X, E_2 \rangle = \lambda - (\kappa - 2\tau^2), \quad (4.8)$$

$$E_2\langle X, E_2 \rangle - \kappa x\langle X, E_1 \rangle = \lambda - (\kappa - 2\tau^2), \quad (4.9)$$

$$E_3\langle X, E_3 \rangle = \lambda - 2\tau^2, \quad (4.10)$$

$$E_2\langle X, E_1 \rangle + E_1\langle X, E_2 \rangle + \kappa(y\langle X, E_1 \rangle + x\langle X, E_2 \rangle) = 0, \quad (4.11)$$

$$E_3\langle X, E_1 \rangle + E_1\langle X, E_3 \rangle + 2\tau\langle X, E_2 \rangle = 0, \quad (4.12)$$

$$E_3\langle X, E_2 \rangle + E_2\langle X, E_3 \rangle - 2\tau\langle X, E_1 \rangle = 0, \quad (4.13)$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são como no Lema 3.1.

**Demonstração:** Completamente análoga à prova do Lema 4.1.

O último lema da seção nos traz informações parciais das estruturas de solitons de Ricci sobre  $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e será muito útil na prova do Teorema 4.2.

**Lema 4.3** Seja  $(M^3, g, X, \lambda)$  um soliton de Ricci com  $(M^3, g) = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ , então

$$E_3\langle X, E_1 \rangle = E_3\langle X, E_2 \rangle = E_1\langle X, E_3 \rangle = E_2\langle X, E_3 \rangle = 0,$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são como no Lema 3.1.

**Demonstração:** Inicialmente, usamos o Corolário 3.1 para obter a decomposição

$$X = \nabla f + K,$$

onde  $f$  é dada por  $f(x, y, t) = \frac{1}{2}\kappa t^2$  e  $K$  é um campo de Killing, daí obtemos

$$\begin{aligned} E_1\langle X, E_3 \rangle &= E_1E_3(f) + E_1\langle K, E_3 \rangle \\ &= E_3E_1(f) + E_1\langle K, E_3 \rangle \\ &= E_1\langle K, E_3 \rangle. \end{aligned}$$

Sabendo que  $E_3$  é um campo de Killing gradiente, então a Proposição 2.4 implica que o gradiente de  $\langle K, E_3 \rangle$  é um campo de Killing e combinando as Proposições 2.6 e 3.2, temos que

$$\nabla\langle K, E_3 \rangle = cE_3,$$

para alguma constante real  $c$  e portanto  $E_1\langle X, E_3 \rangle = 0$ . De modo análogo, prova-se que  $E_2\langle X, E_3 \rangle = 0$  e das equações (4.12) e (4.13), obtemos

$$E_3\langle X, E_1 \rangle = E_3\langle X, E_2 \rangle = 0,$$

conforme queríamos provar. □

## 4.2 Descrição dos solitons de Ricci

Na referência [5] Baird e Daniello apresentam uma descrição das estruturas de solitons de Ricci sobre  $\text{Sol}^3$ , módulo campos de Killing. Motivados por esse resultado, procuramos obter uma descrição mais clara de tais estruturas, apresentando expressões gerais que englobam todos os possíveis exemplos de solitons de Ricci sobre  $\text{Sol}^3$ . Nesse sentido, enunciamos agora o primeiro teorema.

**Teorema 4.1** Seja  $(\text{Sol}^3, X, \lambda)$  um soliton de Ricci, então  $\lambda = -2$  e além disso

$$X = \varphi_1 E_1 + \varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3,$$

com  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(\text{Sol}^3)$  definidas por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, t) &= -[(c + 2)x + a]e^t, \\ \varphi_2(x, y, t) &= [(c - 2)y + b]e^{-t}, \\ \varphi_3(x, y, t) &= c,\end{aligned}$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes reais.

**Demonstração:** Considerando o Exemplo 4.1 e usando a Proposição 3.6, temos que

$$\lambda = -2, \tag{4.14}$$

então a equação (4.3) nos fornece

$$E_3 \langle X, E_3 \rangle = 0, \tag{4.15}$$

daí aplicamos  $E_3$  na equação (4.1) para obter

$$E_3 E_1 \langle X, E_1 \rangle = 0. \tag{4.16}$$

Derivando a equação (4.4) em relação a  $E_3$ , chegamos em

$$E_2 E_3 \langle X, E_1 \rangle + E_2 \langle X, E_1 \rangle + E_1 E_3 \langle X, E_2 \rangle - E_1 \langle X, E_2 \rangle = 0, \tag{4.17}$$

no entanto, aplicando  $E_1$  e  $E_2$  nas equações (4.6) e (4.5) respectivamente, temos ainda

$$E_2 E_3 \langle X, E_1 \rangle = E_2 \langle X, E_1 \rangle - E_1 E_2 \langle X, E_3 \rangle$$

e também

$$E_1 E_3 \langle X, E_1 \rangle = -E_1 \langle X, E_2 \rangle - E_1 E_2 \langle X, E_3 \rangle.$$

Substituindo as duas últimas igualdades em (4.17), chegamos em

$$E_2 \langle X, E_1 \rangle - E_1 \langle X, E_2 \rangle = E_1 E_2 \langle X, E_3 \rangle$$

e combinando-a com (4.4), segue-se que

$$2E_2 \langle X, E_1 \rangle = E_1 E_2 \langle X, E_3 \rangle,$$



por fim, aplicamos  $E_3$  em cada membro e usamos a equação (4.3) para obter

$$E_2 E_3 \langle X, E_1 \rangle + E_2 \langle X, E_1 \rangle = 0. \quad (4.18)$$

Aplicando  $E_1$  na igualdade (4.18) e depois usando (4.16), temos

$$E_1 E_2 \langle X, E_1 \rangle = 0, \quad (4.19)$$

então derivamos (4.1) com respeito a  $E_2$  resultando em

$$E_2 E_1 \langle X, E_1 \rangle + E_2 \langle X, E_3 \rangle = 0,$$

em seguida, comutamos  $E_1$  e  $E_2$  e usamos (4.19) para deduzir que

$$E_2 \langle X, E_3 \rangle = 0. \quad (4.20)$$

Observe que derivando (4.5) na direção de  $E_2$  e usando (4.20), obtemos

$$E_2 E_3 \langle X, E_1 \rangle - E_2 \langle X, E_1 \rangle = 0,$$

daí comparando a última igualdade com (4.18), vamos ter

$$E_2 \langle X, E_1 \rangle = 0,$$

a qual comparamos com (4.4) que nos fornece

$$E_1 \langle X, E_2 \rangle = 0.$$

Finalmente, derivamos (4.2) na direção de  $E_1$  para obter a igualdade

$$E_1 \langle X, E_3 \rangle = 0$$

e junto com (4.15) e (4.17), temos que  $\langle X, E_3 \rangle$  é constante e escrevemos

$$\langle X, E_3 \rangle = c,$$

então comparamos (4.1) e (4.5), depois (4.2) e (4.6) para concluir que

$$\langle X, E_1 \rangle = -[(c+2)x + a]e^t \quad \text{e} \quad \langle X, E_2 \rangle = [(c-2)y + b]e^{-t},$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais. □

Como consequência do Teorema 4.1, temos o Corolário 4.1 que também foi obtido de forma independente por Baird e Danielo em [5], no entanto apresentamos aqui uma prova elementar.

**Corolário 4.1**  $\text{Sol}^3$  não admite estrutura de soliton de Ricci gradiente.

**Demonstração:** Suponha por absurdo que existe soliton de Ricci gradiente  $(\text{Sol}^3, X, \lambda)$  com função potencial  $f \in C^\infty(\text{Sol}^3)$ , então a Proposição 3.3 e a Proposição 3 de [36] nos fornecem

$$\text{Ric}(X, X) = -2\langle X, E_3 \rangle^2 = 0,$$

portanto  $\langle X, E_3 \rangle = 0$  e junto com a equação (4.5), temos que  $\langle X, E_1 \rangle = 0$  e isso contraria o Teorema 4.1, finalizando a prova do corolário.  $\square$

O próximo resultado descreve explicitamente todas as estruturas de solitons de Ricci sobre  $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.2** Seja  $(M, g, X, \lambda)$  um soliton de Ricci com  $(M, g) = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  ou  $(M, g) = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ , então  $\lambda = \kappa$  e além disso

$$X = \varphi_1 E_1 + \varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3,$$

com  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(M)$  definidas por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, t) &= [3\kappa a(x^2 - y^2) - 2\kappa bxy + 2cy + 3a]\rho, \\ \varphi_2(x, y, t) &= [\kappa b(x^2 - y^2) + 6\kappa axy - 2cx - b]\rho \quad \text{e} \\ \varphi_3(x, y, t) &= \kappa t + d, \end{aligned}$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes reais.

**Demonstração:** Considerando os Exemplos 4.3 e 4.5 e usando a Proposição 3.6, obtemos

$$\lambda = \kappa,$$

então a equação (4.10) nos dá

$$E_3 \langle X, E_3 \rangle = \kappa$$

e pelo Lema 4.3, segue-se que

$$\langle X, E_3 \rangle = \kappa t + d,$$

onde  $d$  é uma constante real.

Agora escrevemos  $\langle X, E_1 \rangle = F\rho$  e  $\langle X, E_2 \rangle = G\rho$ , daí subtraímos (4.9) de (4.8) para deduzir a igualdade

$$\partial_x F = \partial_y G \quad (4.21)$$

e além disso a equação (4.11) nos dá

$$\partial_y F + \partial_x G = 0, \quad (4.22)$$

combinando as duas igualdades, temos que

$$\partial_{xx}^2 F + \partial_{yy}^2 F = 0 \quad (4.23)$$

e também

$$\partial_{xx}^2 G + \partial_{yy}^2 G = 0. \quad (4.24)$$

Novamente usando a equação (4.8) e (4.9), chegamos em

$$\rho^{-1} \partial_x F = \rho^{-1} \partial_y G = \kappa(xF + yG), \quad (4.25)$$

então aplicando  $E_1$  e usando (4.22), temos que

$$\rho^{-1} \partial_{xx}^2 F = \kappa[F - y\partial_y F],$$

daí aplicamos  $E_2$  em cada membro, depois usamos (4.22) e (4.23) para obter

$$\partial_{yxx}^3 F = \partial_{yyy}^3 F = 0,$$

da mesma forma aplicamos  $E_1$  em cada membro e usamos (4.21) e (4.23) para obter

$$\partial_{xxx}^3 F = \partial_{xyy}^3 F = 0,$$

portanto  $\partial_{xx}^2 F$ ,  $\partial_{yy}^2 F$ ,  $\partial_{xy}^2 F$  são constantes e  $F$  tem expressão polinomial.

Observe que (4.25) implica que  $\partial_x F$  não possui termo independente, daí escrevemos

$$F = 3\kappa a(x^2 - y^2) - 2\kappa bxy + 2cy + 3e,$$

de modo análogo, obtemos

$$\partial_{yxx}^3 G = \partial_{yyy}^3 G = 0,$$

da mesma forma aplicamos  $E_1$  em cada membro e usamos (4.21) e (4.23) para obter

$$\partial_{xxx}^3 G = \partial_{xyy}^3 G = 0,$$

concluindo que  $\partial_{xx}^2 G$ ,  $\partial_{yy}^2 G$  e  $\partial_{xy}^2 G$  são constantes, daí escrevemos

$$G = \kappa \bar{a}(x^2 - y^2) + \kappa \bar{b}xy + \bar{c}x + \bar{e},$$

onde  $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}, e$  e  $\bar{e}$  são constantes reais.

Substituindo as expressões acima em (4.21), (4.22) e (4.25), obtemos  $\bar{a} = b$ ,  $\bar{b} = 6a$ ,  $\bar{c} = -2c$ ,  $e = a$  e  $\bar{e} = -b$ , daí reescrevemos  $F$  e  $G$  na forma

$$F = 3\kappa a(x^2 - y^2) - 2\kappa bxy + 2cy + 3a$$

e ainda

$$G = \kappa b(x^2 - y^2) + 6\kappa axy - 2cx - b,$$

consequentemente,

$$\langle X, E_1 \rangle = [3\kappa a(x^2 - y^2) - 2\kappa bxy + 2cy + 3a]\rho,$$

e ainda

$$\langle X, E_2 \rangle = [\kappa b(x^2 - y^2) + 6\kappa axy - 2cx - b]\rho.$$

concluindo a prova. □

De modo similar, descrevemos a seguir as possíveis estruturas de solitons de Ricci sobre o espaço de Heisenberg.

**Teorema 4.3** Seja  $(Nil_3, X, \lambda)$  um soliton de Ricci, então  $\lambda = -6\tau^2$  e além disso

$$X = \varphi_1 E_1 + \varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3,$$

com  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(M)$  definidas por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, t) &= -4\tau^2 x + ay + b, \\ \varphi_2(x, y, t) &= -ax - 4\tau^2 y + c \quad e \\ \varphi_3(x, y, t) &= \tau[a(x^2 + y^2) - 2(cx - by) - 8\tau t + d] \end{aligned}$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  constantes reais.

**Demonstração:** Considerando o Exemplo 4.7 e aplicando a Proposição 3.6, temos que

$$\lambda = -6\tau^2,$$

então usando as equações (4.8), (4.9) e (4.10), vamos ter

$$E_1\langle X, E_1 \rangle = E_2\langle X, E_2 \rangle = -4\tau^2,$$

e ainda

$$E_3\langle X, E_3 \rangle = -8\tau^2.$$

Derivando (4.12) e (4.13) com respeito a  $E_3$  e usando a equação (4.10), obtemos

$$E_3E_3\langle X, E_1 \rangle = -2\tau E_3\langle X, E_2 \rangle \quad (4.26)$$

e também

$$E_3E_3\langle X, E_2 \rangle = 2\tau E_3\langle X, E_1 \rangle, \quad (4.27)$$

daí substituímos (4.13) e (4.12) em (4.26) e (4.27) respectivamente, chegando nas identidades

$$E_3E_3\langle X, E_1 \rangle = 2\tau(E_2\langle X, E_3 \rangle - 2\tau\langle X, E_1 \rangle) \quad (4.28)$$

e ainda

$$E_3E_3\langle X, E_2 \rangle = -2\tau(E_1\langle X, E_3 \rangle + 2\tau\langle X, E_2 \rangle). \quad (4.29)$$

Além disso, calculando a derivada de (4.8) na direção de  $E_3$  e substituindo (4.28) na igualdade resultante, vamos ter

$$E_3\partial_x\langle X, E_1 \rangle - 2\tau^2yE_2\langle X, E_3 \rangle + 4\tau^3y\langle X, E_1 \rangle = 0,$$

mais uma vez aplicamos  $E_3$  em cada membro, usamos (4.10) e em seguida substituímos (4.28), obtendo

$$2\tau\partial_xE_2\langle X, E_3 \rangle - 4\tau^2(\partial_x\langle X, E_1 \rangle - \tau y\partial_t\langle X, E_1 \rangle) = 0,$$

usamos ainda (4.8), para chegar em

$$\partial_xE_2\langle X, E_3 \rangle = -8\tau^3 \quad (4.30)$$

e por fim, usamos a equação (4.10) na igualdade acima, tornando-a

$$\partial_{xy}^2 \langle X, E_3 \rangle = 0. \quad (4.31)$$

Observe que a equação (4.8) nos dá

$$\partial_x \langle X, E_1 \rangle - \tau y E_3 \langle X, E_1 \rangle = -4\tau^2$$

e combinando com (4.12), obtemos

$$\partial_x \langle X, E_1 \rangle + \tau y (E_1 \langle X, E_3 \rangle + 2\tau \langle X, E_2 \rangle) = -4\tau^2,$$

daí aplicamos  $E_3$  em cada membro e usamos (4.10) para deduzir que

$$E_3 \partial_x \langle X, E_1 \rangle + 2\tau^2 y E_3 \langle X, E_2 \rangle = 0. \quad (4.32)$$

Derivando (4.12) na direção de  $\partial_x$ , temos a igualdade

$$E_3 \partial_x \langle X, E_1 \rangle + \partial_x E_1 \langle X, E_3 \rangle + 2\tau \partial_x \langle X, E_2 \rangle = 0, \quad (4.33)$$

então comparando-a com (4.32), chegamos em

$$\partial_x E_1 \langle X, E_3 \rangle = -2\tau E_1 \langle X, E_2 \rangle$$

e usando a equação (4.10), segue-se que

$$\partial_{xx}^2 \langle X, E_3 \rangle = -2\tau E_1 \langle X, E_2 \rangle. \quad (4.34)$$

Por outro lado, observe que (4.9) nos fornece a igualdade

$$\partial_y \langle X, E_2 \rangle + \tau x E_3 \langle X, E_2 \rangle = -4\tau^2,$$

daí combinando-a com a equação (4.13), vamos ter

$$\partial_y \langle X, E_2 \rangle - \tau x (E_2 \langle X, E_3 \rangle - 2\tau \langle X, E_1 \rangle) = -4\tau^2,$$

no entanto, aplicando  $E_3$  em cada membro e usando (4.10), obtemos ainda

$$E_3 \partial_y \langle X, E_2 \rangle + 2\tau^2 x E_3 \langle X, E_1 \rangle = 0. \quad (4.35)$$

Calculando a derivada de (4.13) com respeito a  $\partial_y$ , chegamos na igualdade

$$E_3 \partial_y \langle X, E_2 \rangle + \partial_y E_2 \langle X, E_3 \rangle - 2\tau \partial_y \langle X, E_1 \rangle = 0,$$

a qual comparamos com (4.35), resultando em

$$\partial_y E_2 \langle X, E_3 \rangle = 2\tau E_2 \langle X, E_1 \rangle,$$

usamos ainda (4.10) para obter

$$\partial_{yy}^2 \langle X, E_3 \rangle = 2\tau E_2 \langle X, E_1 \rangle \quad (4.36)$$

e portanto, segue de (4.11), (4.34) e (4.36) que

$$\partial_{xx}^2 \langle X, E_3 \rangle = \partial_{yy}^2 \langle X, E_3 \rangle. \quad (4.37)$$

Agora combinando a última igualdade com (4.10) e (4.31), podemos afirmar que  $\partial_{xx}^2 \langle X, E_3 \rangle$  e  $\partial_{yy}^2 \langle X, E_3 \rangle$  são constantes, então escrevemos

$$\partial_{xx}^2 \langle X, E_3 \rangle = \partial_{yy}^2 \langle X, E_3 \rangle = 2\tau a, \quad (4.38)$$

onde  $a$  é uma constante real. Nessas condições, aplicamos  $E_3$  em (4.36) para obter

$$\partial_y E_3 \langle X, E_1 \rangle + \tau x E_3 E_3 \langle X, E_1 \rangle = 0, \quad (4.39)$$

no entanto, derivando (4.8) em relação a  $\partial_y$ , temos ainda

$$\partial_{xy}^2 \langle X, E_1 \rangle - \tau E_3 \langle X, E_1 \rangle - \tau y \partial_y E_3 \langle X, E_1 \rangle = 0,$$

e substituindo (4.39) na igualdade acima, chegamos em

$$\partial_{xy}^2 \langle X, E_1 \rangle = \tau (E_3 \langle X, E_1 \rangle - \tau xy E_3 E_3 \langle X, E_1 \rangle). \quad (4.40)$$

De modo análogo, aplicando  $\partial_x$  em cada membro da igualdade (4.36) e usando (4.38), temos que

$$\partial_{xy}^2 \langle X, E_1 \rangle + \tau E_3 \langle X, E_1 \rangle + \tau x E_3 \partial_x \langle X, E_1 \rangle = 0,$$

mas observe que (4.8) nos dá

$$E_3 \partial_x \langle X, E_1 \rangle = \tau y E_3 E_3 \langle X, E_1 \rangle,$$

logo a igualdade anterior torna-se

$$\partial_{xy}^2 \langle X, E_1 \rangle = -\tau (E_3 \langle X, E_1 \rangle + \tau xy E_3 E_3 \langle X, E_1 \rangle).$$

Comparando a última igualdade com (4.40), chegamos em

$$E_3 \langle X, E_1 \rangle = 0 \quad (4.41)$$

daí substituímos em (4.8) e usamos o ítem anterior, obtendo

$$\partial_x \langle X, E_1 \rangle = -4\tau^2,$$

também substituindo (4.38) e (4.41) em (4.36), vamos ter

$$\partial_y \langle X, E_1 \rangle = a,$$

logo podemos escrever

$$\langle X, E_1 \rangle = -4\tau^2 x + ay + b \quad (4.42)$$

onde  $b$  é uma constante real.

Substituindo (4.41) em (4.26), temos a igualdade

$$E_3 \langle X, E_2 \rangle = 0, \quad (4.43)$$

a qual substituída em (4.34) juntamente com (4.38), resulta em

$$\partial_x \langle X, E_2 \rangle = -a,$$

também substituindo a mesma igualdade em (4.9), segue-se que

$$\partial_y \langle X, E_2 \rangle = -4\tau^2,$$

donde chegamos na expressão

$$\langle X, E_2 \rangle = -ax - 4\tau^2 y + c, \quad (4.44)$$

onde  $c$  é uma constante real.

Finalmente, substituímos (4.10) e as igualdades (4.42) e (4.44) nas equações (4.12) e (4.13), obtendo

$$\partial_x \langle X, E_3 \rangle = 2\tau(ax - c) \quad (4.45)$$



e também

$$\partial_y \langle X, E_3 \rangle = 2\tau(ay + b). \quad (4.46)$$

portanto, segue de (4.10), (4.45) e (4.46) que

$$\langle X, E_3 \rangle = \tau[a(x^2 + y^2) - 2(cx - by) - 8\tau t + d],$$

concluindo assim a prova.  $\square$

O próximo teorema foi obtido por Baird e Daniello em [5] e encerra a descrição dos solitons de Ricci homogêneos com grupo de isometria de dimensão quatro, implicando que as únicas estruturas existentes foram todas descritas nos teoremas apresentados anteriormente.

**Teorema 4.4** (Baird e Daniello [5])  $\widetilde{PSl}_2$  não admite estrutura de soliton de Ricci.

O corolário a seguir determina quais variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três admitem estrutura de soliton de Ricci gradiente e descreve tais estruturas.

**Corolário 4.2** Seja  $(M^3, g, X, \lambda)$  um soliton de Ricci gradiente não-trivial e não-flat, homogêneo e de dimensão três, então  $(M^3, g) = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  ou  $(M^3, g) = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\lambda = \kappa$  e a função potencial é dada por

$$f(x, y, t) = \frac{1}{2}\kappa t^2 + at + b,$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais.

**Demonstração:** Sabendo que o referido soliton é não-trivial e não-flat, então  $(M^3, g)$  não pode ser nenhuma das formas espaciais e usando o Corolário 4.1, garantimos que  $(M^3, g)$  não pode ser  $\text{Sol}^3$ . Observe ainda que  $(M^3, g)$  não pode ser  $\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$ , pois as esferas de Berger são compactas e não pode ser  $\widetilde{PSl}_2$ , devido ao Teorema 4.4.

Agora supondo por absurdo que existe uma estrutura  $(Nil_3, X, \lambda)$  de soliton de Ricci gradiente com função potencial  $f \in C^\infty(Nil_3)$  e usando a equação (4.10), obtemos

$$E_3 E_3 \langle X, E_1 \rangle = E_3 E_3 E_1(f) = E_1 E_3 E_3(f) = E_1 E_3 \langle X, E_3 \rangle = 0,$$

no entanto, aplicando  $E_3$  em (4.12) e usando a última igualdade, chegamos em

$$E_3 \langle X, E_2 \rangle = 0,$$

daí usando (4.13), temos ainda

$$\langle X, E_1 \rangle = 0,$$

contrariando o Teorema 4.3 e portanto  $(M^3, g)$  não pode ser  $Nil_3$ .

Podemos afirmar que  $(M^3, g) = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ , então o Teorema 4.2 nos fornece  $\lambda = \kappa$ , enquanto a Proposição 3.2 e a Proposição 3 de [36] implicam na igualdade

$$Ric(X, X) = \kappa(\langle X, E_1 \rangle^2 + \langle X, E_2 \rangle^2) = 0,$$

consequentemente,

$$\langle X, E_1 \rangle = \langle X, E_2 \rangle = 0$$

então segue das equações (4.10), (4.12) e (4.13) que  $\langle X, E_3 \rangle = \kappa t + a$ , portanto

$$f(x, y, t) = \frac{1}{2}\kappa t^2 + at + b,$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais. □

O corolário a seguir é uma consequência imediata do Corolário 4.2 e além disso a hipótese "não-flat" não pode ser retirada, pois teríamos um contra-exemplo com os solitons Gaussianos.

**Corolário 4.3** Seja  $(M^3, g, X, \lambda)$  um soliton de Ricci gradiente não-flat, expansivo, homogêneo e de dimensão três, então  $(M^3, g) = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ .

O próximo corolário decorre dos Teoremas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, novamente a hipótese "não-flat" não pode ser retirada, pela mesma razão alegada anteriormente.

**Corolário 4.4** Seja  $(M^3, g, X, \lambda)$  um soliton de Ricci contrátil não-flat, homogêneo e de dimensão três, então  $(M^3, g) = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ .

Mais uma consequência do Corolário 4.2 é apresentada no Corolário 4.5 que já era esperado devido aos resultados obtidos por Petersen e Wylie [35] sobre solitons rígidos e por Lauret [27] sobre nilsolitons.

**Corolário 4.5** Seja  $(Nil_3, X, \lambda)$  um soliton de Ricci, então o referido soliton não pode ser gradiente.

Usando a Proposição 3.6 junto com os Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3, obtemos expressões que descrevem explicitamente todos os campos de Killing sobre  $\text{Sol}^3$ ,  $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e  $\text{Nil}_3$ . Mais precisamente, temos os corolários a seguir.

**Corolário 4.6** Seja  $K$  um campo de Killing sobre  $\text{Sol}^3$ , então

$$K = \varphi_1 E_1 + \varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3$$

com  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(\text{Sol}^3)$  definidas por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, t) &= -(cx + a)e^t, \\ \varphi_2(x, y, t) &= (cy + b)e^{-t}, \\ \varphi_3(x, y, t) &= c,\end{aligned}$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes reais.

**Corolário 4.7** Seja  $(M^3, g) = \mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  ou  $(M^3, g) = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e  $K$  um campo de Killing sobre  $(M^3, g)$ , então

$$K = \varphi_1 E_1 + \varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3$$

com  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(M)$ , definidas por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, t) &= [3\kappa a(x^2 - y^2) - 2\kappa bxy + 2cy + 3a]\rho, \\ \varphi_2(x, y, t) &= [\kappa b(x^2 - y^2) + 6\kappa axy - 2cx - b]\rho \quad \text{e} \\ \varphi_3(x, y, t) &= d,\end{aligned}$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes reais.

**Corolário 4.8** Seja  $K$  um campo de Killing sobre  $\text{Nil}^3$ , então

$$K = \varphi_1 E_1 + \varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3,$$

onde as funções  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(\text{Nil}^3)$  são definidas por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, t) &= ay + b, \\ \varphi_2(x, y, t) &= -ax + c \quad \text{e} \\ \varphi_3(x, y, t) &= \tau[a(x^2 + y^2) - 2(cx - by) + d]\end{aligned}$$

com  $a, b, c, d$  são constantes reais.

## 5 VARIEDADES QUASI-EINSTEIN HOMOGÊNEAS DE DIMENSÃO 3

Neste capítulo vamos apresentar os resultados obtidos em parceria com Barros e Ribeiro Jr em [7] para métricas  $m$ -quasi-Einstein gradientes com  $m$  finito e em variedades homogêneas de dimensão três, bem como resultados obtidos posteriormente. Na primeira seção apresentamos os lemas-chave do capítulo e exemplos que obtivemos ao longo do trabalho, entre eles um contra-exemplo que mostra não ser possível estender para métricas quasi-Einstein um famoso teorema de Perelman, válido para solitons de Ricci compactos. Na segunda seção, trazemos os resultados principais que nos permitem concluir que as únicas variedades homogêneas de dimensão três que admitem estrutura não-trivial de métricas quasi-Einstein gradiente são  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ .

### 5.1 Exemplos e Lemas-chave

Iniciamos essa seção, lembrando a definição de métrica quasi-Einstein e na sequência, apresentamos alguns exemplos que obtivemos de variedades quasi-Einstein homogêneas de dimensão três que construímos. Na sequência da seção, encerramos apresentando os lemas que serão utilizados ao longo do capítulo.

**Definição 5.1** Uma métrica  $g$  sobre uma variedade diferenciável  $M^n$  é chamada de  $m$ -quasi Einstein, quando existem um campo de vetores  $X$  e uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , satisfazendo

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g$$

e além disso,  $(M^n, g)$  será dita uma variedade  $m$ -quasi-Einstein.

A seguir trazemos uma família de exemplos sobre variedades homogêneas de dimensão três com grupo de isometria de dimensão quatro, não incluindo apenas  $\mathbb{S}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.1** Sejam  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  uma variedade homogênea de dimensão três, simplesmente conexa com grupo de isometria de dimensão quatro, satisfazendo a desigualdade  $\kappa < 4\tau^2$  e  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$  o campo de vetores, definido por

$$X = \pm \sqrt{m(4\tau^2 - \kappa)}E_3,$$

onde  $E_3$  é o campo de Killing vertical tangente as fibras. Nessas condições, podemos afirmar que  $(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau), X, \lambda = \kappa - 2\tau^2)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein.

De fato, observe que  $X$  é um campo de Killing, então  $\mathcal{L}_X g = 0$  e portanto

$$\begin{aligned} Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat &= Ric - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat \\ &= Ric + (\kappa - 4\tau^2)E_3^\flat \otimes E_3^\flat, \end{aligned}$$

finalmente usamos a Proposição 3.2 para concluir que

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat = (\kappa - 2\tau^2)g,$$

conforme queríamos verificar.

Agora vamos detalhar melhor o exemplo acima, observando o que acontece em cada variedade  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  e analisando a natureza do exemplo em cada caso. Diante disso, apresentamos os quatro exemplos a seguir:

**Exemplo 5.2** Sejam  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$  e  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R})$  o campo de vetores, definido por

$$X = \pm\sqrt{-m\kappa}E_3,$$

então  $(\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}, X, \lambda = \kappa)$  é uma variedade quasi-Einstein expansiva gradiente com função potencial, dada por  $f(x, y, t) = \pm\sqrt{-m\kappa}t$ .

**Observação 5.1** O exemplo acima foi descrito de forma mais geral sobre  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  por Bezerra e Ribeiro Jr em [10].

Os dois próximos exemplos não são gradientes e encerram a lista dos representantes não-compactos da família que estamos descrevendo. O fato desses exemplos não serem gradientes é uma consequência direta do Teorema 5.2, mas também é consequência do fato de  $E_3$  não ser um campo gradiente e isso pode ser verificado diretamente.

**Exemplo 5.3** Sejam  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = Nil_3$  e  $X \in \mathfrak{X}(Nil_3)$  o campo de vetores, definido por

$$X = \pm 2\tau\sqrt{m}E_3,$$

então  $(Nil_3, X, \lambda = -2\tau^2)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein expansiva não-gradiente.

**Exemplo 5.4** Sejam  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \widetilde{PSl}_2$  e  $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{PSl}_2)$  o campo de vetores, definido por

$$X = \pm\sqrt{m(4\tau^2 - \kappa)}E_3,$$

então  $(\widetilde{PSl}_2, X, \lambda = \kappa - 2\tau^2)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein expansiva não-gradiente.

Um resultado bem conhecido no estudo de solitons de Ricci, conjecturado e provado por Perelman em [33], afirma que todo soliton de Ricci compacto é do tipo gradiente, no entanto o próximo exemplo mostra que esse resultado não pode ser estendido para métricas quasi-Einstein. De fato, apresentamos a seguir estruturas de métricas quasi-Einstein não-gradientes nas esferas de Berger que são variedades compactas.

**Exemplo 5.5** Sejam  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$  com  $\kappa < 4\tau^2$  e  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3)$  o campo de vetores, definido por

$$X = \pm \sqrt{m(4\tau^2 - \kappa)} E_3,$$

então  $(\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3, X, \lambda = \kappa - 2\tau^2)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein não-gradiente. Dependendo dos valores assumidos por  $\kappa$  e  $\tau$ , podemos obter estruturas expansiva, estável ou contrátil.

Partimos para a apresentação dos lemas principais do capítulo e iniciamos com um lema de E.D.O. que será muito importante na prova dos Teoremas 5.2 e 5.3.

**Lema 5.1** Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável, tal que

$$m\varphi' \equiv \varphi^2 - r$$

para constantes  $m \in \mathbb{Z}^*$  e  $r \in \mathbb{R}$ , então  $r \geq 0$ . Além disso  $\varphi$  é uma função constante, dada por  $\varphi \equiv \pm\sqrt{r}$  ou  $\varphi$  é não-constante, dada por

$$\varphi(t) = -\sqrt{r} \tanh \left[ \sqrt{r} \left( \frac{t+c}{m} \right) \right] \quad (c \text{ constante}).$$

**Demonstração:** Inicialmente, observe que se a função  $\varphi$  satisfaz uma equação diferencial ordinária separável de primeira ordem, então supondo por absurdo que  $r < 0$ , obtemos

$$\varphi(t) = \sqrt{-r} \tan \left( \frac{\sqrt{-r}t + c}{m} \right) \quad (c \text{ constante}),$$

mas com  $\varphi$  é derivável, chegamos a um absurdo. Observe que no caso  $r \geq 0$ , temos  $\varphi$  dada por

$$\varphi(t) = \frac{m}{c-t} \quad (c \text{ constante}),$$

para  $r = 0$  e por

$$\varphi(t) = -\sqrt{r} \coth \left[ \sqrt{r} \left( \frac{t+c}{m} \right) \right] \quad (c \text{ constante}),$$

ou ainda

$$\varphi(t) = -\sqrt{r} \tanh \left[ \sqrt{r} \left( \frac{t+c}{m} \right) \right] \quad (c \text{ constante}),$$

para  $r > 0$  e temos ainda  $\varphi \equiv \pm\sqrt{r}$  para  $r \geq 0$ , por fim usamos o fato de  $\varphi$  ser uma função derivável em  $\mathbb{R}$  para concluir a prova.  $\square$

**Lema 5.2** Suponha que  $(\text{Sol}^3, \nabla f, \lambda)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente, então as seguintes equações são satisfeitas

$$E_1 E_1(f) + E_3(f) = \frac{1}{m} E_1(f)^2 + \lambda \quad (5.1)$$

$$E_2 E_2(f) - E_3(f) = \frac{1}{m} E_2(f)^2 + \lambda \quad (5.2)$$

$$E_3 E_3(f) = \frac{1}{m} E_3(f)^2 + \lambda + 2, \quad (5.3)$$

$$E_1 E_2(f) = E_2 E_1(f) = \frac{1}{m} E_1(f) E_2(f), \quad (5.4)$$

$$E_1 E_3(f) - E_1(f) = E_3 E_1(f) = \frac{1}{m} E_1(f) E_3(f), \quad (5.5)$$

$$E_1 E_3(f) + E_2(f) = E_3 E_2(f) = \frac{1}{m} E_2(f) E_3(f), \quad (5.6)$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são tais como na Subsecção 3.1.1.

**Demonstração:** As equações enunciadas acima são obtidas da igualdade

$$\text{Ric}(E_i, E_j) + \text{Hess}f(E_i, E_j) - \frac{1}{m} df(E_i) \otimes df(E_j) = \lambda \langle E_i, E_j \rangle, \quad (i, j = 1, 2 \text{ e } 3)$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$\text{Hess}f(E_i, E_j) = \frac{1}{m} E_i(f) E_j(f) + \lambda \delta_{ij} - \text{Ric}(E_i, E_j),$$

então usando a definição de hessiano e as propriedades da conexão, temos

$$E_i E_j(f) + E_j E_i(f) - (\nabla_{E_i} E_j + \nabla_{E_j} E_i)(f) = \frac{1}{m} E_i(f) E_j(f) + \lambda \delta_{ij} - \text{Ric}(E_i, E_j). \quad (5.7)$$

Observe que para  $i = j$ , obtemos a igualdade

$$E_i E_i(f) - (\nabla_{E_i} E_i)(f) = \frac{1}{m} E_i(f)^2 + \lambda - \text{Ric}(E_i, E_i),$$

daí fazendo  $i = 1, 2$  e  $3$ , usando a Proposição 3.1 e as conexões apresentadas na Seção 3.1.1, obtemos (5.1), (5.2) e (5.3). Para o caso  $i \neq j$ , a igualdade (5.7) torna-se

$$E_i E_j(f) + E_j E_i(f) - (\nabla_{E_i} E_j + \nabla_{E_j} E_i)(f) = \frac{1}{m} E_i(f) E_j(f),$$

finalmente, fazendo  $i, j = 1, 2$  e  $3$  e repetindo o procedimento anterior, chegamos nas equações (5.4), (5.5) e (5.6).  $\square$

**Lema 5.3** Seja  $(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau), X, \lambda)$  um variedade  $m$ -quasi-Einstein não-compacta homogênea, simplesmente conexa e com grupo de isometria de dimensão quatro, então são satisfeitas as equações

$$E_1 E_1(f) - \kappa y E_2(f) = \frac{1}{m} E_1(f)^2 + \lambda - (\kappa - 2\tau^2), \quad (5.8)$$

$$E_2 E_2(f) - \kappa x E_1(f) = \frac{1}{m} E_2(f)^2 + \lambda - (\kappa - 2\tau^2), \quad (5.9)$$

$$E_3 E_3(f) = \frac{1}{m} E_3(f)^2 + \lambda - 2\tau^2, \quad (5.10)$$

$$E_1 E_2(f) + \kappa y E_1(f) - \tau E_3(f) = \frac{1}{m} E_1(f) E_2(f), \quad (5.11)$$

$$E_1 E_3(f) + \tau E_2(f) = \frac{1}{m} E_1(f) E_3(f), \quad (5.12)$$

$$E_2 E_3(f) - \tau E_1(f) = \frac{1}{m} E_2(f) E_3(f), \quad (5.13)$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são tais como na Seção 3.1.2.

**Demonstração:** Completamente análoga à do Lema 5.2. □

## 5.2 Descrição das métricas quasi-Einstein

Sabemos que as variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três com grupo de isometria de dimensão seis são as formas espaciais  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$  e além disso, a estrutura trivial é a única estrutura de métrica quasi-Einstein admitida por  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , enquanto  $\mathbb{H}^3$  admite estrutura não-trivial, conforme vimos no Exemplo 2.9. Nessa seção, vamos determinar as variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três que admitem estrutura não-trivial de métrica quasi-Einstein gradiente, descrevendo todas as possíveis estruturas de forma explícita.

O primeiro teorema que vamos enunciar, nos traz informações sobre o grupo de Lie  $\text{Sol}^3$ . Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 5.1**  $\text{Sol}_3$  não admite estrutura de variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente.

**Demonstração:** Suponha por absurdo que  $(\text{Sol}_3, \nabla f, \lambda)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente, daí aplicamos  $E_3$  em (5.1) e em seguida usamos a equação (5.5) para obter

$$\left( \frac{1}{m} E_3(f) - 1 \right) E_1 E_1(f) + E_3 E_3(f) = -\frac{1}{m} E_1(f)^2 + \frac{1}{m^2} E_1(f)^2 E_3(f),$$



substituindo as equações (5.1) e (5.3), segue-se que

$$\left(\frac{\lambda}{m} + 1\right) E_3(f) = -2,$$

no entanto, fazendo cálculos similares com as equações (5.2) e (5.6), temos ainda

$$\left(\frac{\lambda}{m} + 1\right) E_3(f) = 2$$

e por fim, comparamos as duas últimas igualdades e chegamos a um absurdo.  $\square$

O teorema a seguir refere-se às variedades homogêneas com grupo de isometria de dimensão quatro e nos diz que as únicas estruturas de métrica quasi-Einstein gradiente estão presentes em  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ , também descreve como é essa estrutura.

**Teorema 5.2** Seja  $(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau), \nabla f, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente, homogênea de dimensão três e com grupo de isometria de dimensão quatro. Nessas condições, podemos afirmar que  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\lambda = \kappa < 0$  e além disso, a função potencial  $f : \mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$  será dada por

$$f(x, y, t) = \pm\sqrt{-m\kappa}t + c$$

ou por

$$f(x, y, t) = -m \log \cosh \left[ \sqrt{-\frac{\kappa}{m}}(t + a) \right] + b,$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes reais.

**Demonstração:** Primeiro observe que a Proposição 2.1 de [14] nos garante que  $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$  não é compacta e portanto, estamos nas condições do Lema 5.3. Dessa forma, aplicando  $E_1$  na equação (5.10) e lembrando que  $[E_1, E_3] = 0$ , obtemos

$$E_3 E_1 E_3(f) = \frac{2}{m} E_1 E_3(f) E_3(f), \quad (5.14)$$

mas substituindo (5.12) e (5.13), segue-se que

$$\frac{1}{m} E_1(f) E_3 E_3(f) - \tau^2 E_1(f) = \frac{1}{m^2} E_1(f) E_3(f)^2.$$

e por fim, substituímos (5.10) para chegar na igualdade

$$\frac{1}{m} [\lambda - (m + 2)\tau^2] E_1(f) = 0,$$

no entanto, aplicando  $E_2$  em (5.10) e fazendo cálculos similares, deduzimos também

$$\frac{1}{m}[\lambda - (m + 2)\tau^2]E_2(f) = 0.$$

Por outro lado, observe que o Teorema de Qian [37] nos fornece

$$\lambda - (m + 2)\tau^2 \leq 0,$$

enquanto o Lema 3.2 e a Proposição 3.6, ambos de [14], nos permite afirmar que a desigualdade acima é estrita, ou seja,

$$\lambda - (m + 2)\tau^2 < 0$$

e assim, segue-se que

$$E_1(f) = E_2(f) = 0, \tag{5.15}$$

então combinando a igualdade acima com a equação (5.8), chegamos em

$$\lambda = \kappa - 2\tau^2. \tag{5.16}$$

Nessas condições, devemos lembrar que

$$[E_1, E_2](f) = -\kappa y E_1(f) + \kappa x E_2(f) + 2\tau E_3(f) \tag{5.17}$$

em seguida, usamos (5.15) para chegar em

$$2\tau E_3(f) = 0 \tag{5.18}$$

portanto (5.10) e 5.16 implicam que  $\tau = 0$ . Substituindo  $\tau = 0$  em (5.16) e novamente usando o Teorema de Qian [37], obtemos

$$\lambda = \kappa < 0 \tag{5.19}$$

e com isso concluímos que  $(M^3, g) = \mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ , finalmente aplicamos o Lema 5.1 na equação (5.10) para encerrar a prova do teorema.  $\square$

**Observação 5.2** Uma consequência do teorema acima é a descrição explícita das duas únicas estruturas de métricas quasi-Einstein gradiente sobre  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ . Nesse sentido, Ribeiro Jr e Bezerra provam em [10] que  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  admite apenas dois tipos de estruturas de métricas quasi-Einstein, descrevendo-as explicitamente.

O último teorema desse capítulo, descreve todas as estruturas de métricas quasi-Einstein gradiente presentes no espaço hiperbólico, mas antes de apresentá-lo, faremos um lema que será muito útil na prova do referido teorema.

**Lema 5.4** Seja  $u \in C^\infty(\mathbb{H}^3)$  uma função cujo gradiente é um campo de vetores conforme com fator conforme  $\psi$ , então  $u$  e  $\psi$  diferem por uma constante e a função  $u$  é da forma

$$u(x, y, z) = \frac{1}{z}[a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e],$$

onde  $a, b, c, d$  e  $e$  são constantes reais.

**Demonstração:** Primeiramente, lembrando que o tensor de Ricci de  $\mathbb{H}^3$  é dado por

$$Ric = -2g,$$

temos pela Proposição 2.6 que

$$\langle \nabla u, Y \rangle = \langle Y, \nabla \psi \rangle,$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^3)$  e assim

$$\nabla(u - \psi) = 0,$$

portanto  $u - \psi$  é constante e daí escrevemos  $\psi = u - d$ , onde  $d$  é uma constante real.

Sabendo que o gradiente de  $u$  é um campo conforme com fator conforme  $\psi = u - d$ , isto é,  $Hess u = (u - d)g$ , então precisamos solucionar o sistema de equações

$$E_i E_j(u) - \nabla_{E_i} E_j(u) = (u - d)\delta_{ij}, \quad (5.20)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$ . Definindo  $v \in C^\infty(\mathbb{H}^3)$  por  $v := zu$  e fazendo  $i = 1$  e  $j = 2$  na igualdade (5.20), obtemos  $E_1 E_2(v) = 0$  e assim

$$\partial_{xy}^2 v = 0, \quad (5.21)$$

analogamente, fazendo  $i = 1$  e  $j = 3$  e depois  $i = 2$  e  $j = 3$ , chegamos na igualdade

$$\partial_{xz}^2 v = \partial_{yz}^2 v = 0. \quad (5.22)$$

Da mesma forma, fazendo  $i = j = 1, 2, 3$  na igualdade (5.20), vamos ter

$$z\partial_{xx}^2 v - \partial_z v = z\partial_{yy}^2 v - \partial_z v = z\partial_{zz}^2 v - \partial_z v = u - \psi = d,$$

consequentemente,

$$\partial_{xx}^2 v = \partial_{yy}^2 v = \partial_{zz}^2 v, \quad (5.23)$$

então combinando a última identidade com (5.21) e (5.23), segue-se que  $\partial_{xx}^2 v$ ,  $\partial_{yy}^2 v$  e  $\partial_{zz}^2 v$  são constantes, daí escrevemos

$$\partial_{xx}^2 v = \partial_{yy}^2 v = \partial_{zz}^2 v = 2a,$$

onde  $a$  e  $d$  são uma constantes reais. Finalmente, combinamos a igualdade anterior com as igualdades (5.21) e (5.23) para chegar em

$$v(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e,$$

daí basta lembrar que  $v = zu$  para obtermos a expressão da função  $u$ , concluindo a prova do lema.  $\square$

**Observação 5.3** O lema apresentado acima também é válido em dimensão  $n$ , ou seja, uma função  $u \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$  cujo gradiente é um campo conforme, difere do fator conforme do seu gradiente por uma constante e além disso, a função  $u$  tem a forma

$$u(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_n} \left( a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right),$$

onde  $a, b_1, \dots, b_n$  e  $c$  são constantes reais. Devemos ainda ressaltar que a prova em dimensão  $n$  é completamente análoga à prova da versão em dimensão três que apresentamos acima.

**Teorema 5.3** Seja  $(\mathbb{H}^3, \nabla f, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente com estrutura não-trivial, então  $\lambda = -(m + 2)$  e a função potencial  $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f = -m \log u,$$

com  $u \in C^\infty(\mathbb{H}^3)$  uma função positiva da forma

$$u(x, y, z) = \frac{1}{z} [a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + d],$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes reais. Podemos afirmar que a função  $u$  ser positiva, equivale a termos as constantes  $a, b, c$  e  $d$  satisfazendo as desigualdades  $a, d \geq 0$ ,  $a + d > 0$  e  $4ad \geq b^2 + c^2$ .

**Demonstração:** Definindo a função positiva  $u \in C^\infty(\mathbb{H}^3)$  por  $u := e^{-\frac{f}{m}}$ , obtemos

$$\nabla u = -\frac{1}{m}e^{-\frac{f}{m}}\nabla f$$

consequentemente,  $Ric_f^m = Ric - \frac{m}{u}Hessu$  e assim reescrevemos (2.2) na forma

$$Ric - \frac{m}{u}Hessu = \lambda g.$$

no entanto, substituindo  $Ric = -2g$  na última igualdade, vamos ter

$$Hessu = -\frac{\lambda + 2}{m}ug$$

então usamos o Lema 5.4 que nos fornece  $\lambda = -(m + 2)$  e portanto  $Hessu = ug$ , concluindo que  $u$  e  $f$  são como descritas no enunciado.

Supondo  $u$  uma função positiva, obviamente  $a \geq 0$  e observando a expressão de  $u$ , temos que  $a = 0$  implica em  $b = c = 0$  e  $d > 0$ , em particular,  $a, d \geq 0$ ,  $a + d > 0$  e  $4ad \geq b^2 + c^2$ . Para o caso  $a > 0$ , podemos escrever

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4az}[(2ax + b)^2 + (2ay + c)^2 + 4a^2z + 4ad - (b^2 + c^2)],$$

então

$$4ad > b^2 + c^2 \geq 0$$

consequentemente  $d > 0$ . Por outro lado, admitindo as desigualdades  $a, d \geq 0$ ,  $a + d > 0$  e  $4ad \geq b^2 + c^2$  e analisando separadamente os casos  $a = 0$  e  $a > 0$ , veremos que a recíproca é imediata.  $\square$

**Observação 5.4** O teorema apresentado acima também vale para dimensão  $n$ , ou seja, se  $(\mathbb{H}^n, \nabla f, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente com estrutura não-trivial então  $\lambda = -(m + n - 1)$  e a função potencial  $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f = -m \log u$ , com  $u \in C^\infty(\mathbb{H}^3)$  uma função positiva da forma

$$u(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_n} \left( a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right),$$

onde  $a, b_1, \dots, b_n$  e  $c$  são constantes reais e além disso, afirmar que  $u$  é positiva, equivale a termos  $a, c \geq 0$ ,  $a + c > 0$  e  $4ac \geq \sum_{i=1}^n b_i^2$ . Novamente ressaltamos que a prova é completamente análoga à prova da versão em dimensão três que apresentamos anteriormente.

Usando diretamente os teoremas provados acima, obtemos os três corolários que encerram o presente capítulo.

**Corolário 5.1** As únicas variedades homogêneas, simplesmente conexas de dimensão três que admitem estrutura não-trivial de variedades  $m$ -quasi-Einstein gradientes são  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{H}_\kappa^2 \times \mathbb{R}$ .

**Corolário 5.2** Seja  $(M^3, g, \nabla f, \lambda)$  uma variedade 1-quasi-Einstein não-trivial, homogênea e simplesmente conexa de dimensão três, então  $g$  é uma métrica estática sobre  $M^3$ .

**Corolário 5.3** Seja  $(M^3, g, \nabla f, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi-Einstein não-trivial, homogênea e simplesmente conexa de dimensão três, então  $(M^3, g)$  é uma variedade de Einstein ou isométrica a  $N^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto, onde  $N^2$  é uma variedade de Einstein de dimensão dois e  $\lambda$  é a sua constante de Einstein.

## 6 VARIEDADES QUASI-EINSTEIN HOMOGÊNEAS DE DIMENSÃO 4

Um resultado bem conhecido na teoria de solitons de Ricci, devido a Petersen e Wylie [35], garante que solitons de Ricci gradientes homogêneos são rígidos e em particular, são produtos Riemannianos da forma  $N \times \mathbb{R}^k$ , onde  $N$  é uma variedade de Einstein. Isso implica que  $\mathbb{R}^4$  é a única variedade solúvel tipo-Lie de dimensão quatro que admite estrutura de soliton de Ricci gradiente, dadas pela estrutura trivial e solitons Gaussianos e baseado nesse mesmo resultado, Lauret afirmou em [28] que

*”the noncompact expanding case is the only one allowing nontrivial homogeneous Ricci solitons, and furthermore, they can not be of gradient type.”*

Motivados por isso, vamos apresentar no decorrer do capítulo uma extensão do referido resultado para as métricas quasi-Einstein, mais precisamente, provaremos que a única estrutura de métrica  $m$ -quasi-Einstein gradiente com  $m$  finito, presente em variedades solúveis tipo-Lie é a estrutura trivial sobre  $\mathbb{R}^4$  e portanto, as únicas estruturas de métricas quasi-Einstein sobre variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro são os solitons de Ricci.

**Observação 6.1** Os principais resultados aqui apresentados foram obtidos em [42] e os exemplos de solitons de Ricci foram obtidos em parceria com Ribeiro Jr em [40].

### 6.1 Exemplos e Lemas-Chave

Muitos são os exemplos de solitons de Ricci (métricas  $\infty$ -quasi-Einstein) em variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro, no entanto nos restringindo às estruturas gradientes, vamos ter apenas  $\mathbb{R}^4$  com a estrutura trivial e os solitons Gaussianos. Uma descrição das estruturas de solitons de Ricci sobre  $Nil_4$  foi obtida por Baird em [4], então faremos algo similar ao descrever as estruturas de solitons de Ricci sobre as variedades solúveis tipo-Lie de dimensão 4, módulo campos de Killing.

Nesse momento, vamos apresentar alguns exemplos de solitons de Ricci em variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro, ilustrando o comentário de Lauret [28] citado anteriormente. O primeiro exemplo traz uma estrutura de soliton de Ricci sobre  $Nil_4$ , expansiva e não-gradiente.

**Exemplo 6.1** (Baird, 2012) Sejam  $(M^4, g) = Nil_4$  e  $X \in \mathfrak{X}(Nil_4)$ , dado por

$$X = -\frac{1}{2}x\partial_x - \frac{3}{2}y\partial_y - z\partial_z - 2t\partial_t,$$

então  $(Nil_4, X, \lambda = -3/2)$  é um soliton de Ricci não-gradiente.

Finalmente, apresentamos quatro novos exemplos de estruturas de solitons de Ricci expansivos e não-gradientes sobre  $Nil^3 \times \mathbb{R}$ ,  $Sol_0^4$ ,  $Sol_{m,n}^4$  e  $Sol^3 \times \mathbb{R}$ , obtidos em parceria com Ribeiro Jr em [40].

**Exemplo 6.2** Sejam  $(M^4, g) = Nil^3 \times \mathbb{R}$  e  $X \in \mathfrak{X}(Nil^3 \times \mathbb{R})$ , então

$$X = -x\partial_x - y\partial_y - 2z\partial_z - \frac{3}{2}t\partial_t,$$

então  $(Nil^3 \times \mathbb{R}, X, \lambda = -3/2)$  é um soliton de Ricci gradiente expansivo.

De fato, usando o referencial ortonormal

$$\{E_1 = \partial_x, E_2 = \partial_y + x\partial_z, E_3 = \partial_z, E_4 = \partial_t\}$$

e a bilinearidade da derivada de Lie, escrevemos

$$\mathcal{L}_X g = \sum_{i,j=1}^4 \mathcal{L}_X g(E_i, E_j) E_i^b \otimes E_j^b, \quad (6.1)$$

então para  $i \neq j$ , vamos ter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g(E_i, E_j) &= \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle + \langle E_i, \nabla_{E_j} X \rangle, \\ &= E_i(\varphi_j) + E_j(\varphi_i) - \langle X, \nabla_{E_i} E_j + \nabla_{E_j} E_i \rangle, \end{aligned}$$

daí fazemos  $i, j = 1, 2, 3$  e  $4$  e usamos a Proposição 3.5, obtendo  $\mathcal{L}_X g(E_i, E_j) = 0$  e consequentemente a igualdade (6.1) torna-se

$$\mathcal{L}_X g = \sum_{i=1}^4 \mathcal{L}_X g(E_i, E_i) E_i^b \otimes E_i^b. \quad (6.2)$$

Novamente usando a Proposição 3.5, segue-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g(E_i, E_i) &= 2\langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= 2[E_i(\varphi_i) - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle], \\ &= 2E_i(\varphi_i), \end{aligned}$$



portanto  $\mathcal{L}_X g(E_1, E_1) = \mathcal{L}_X g(E_2, E_2) = -2$ ,  $\mathcal{L}_X g(E_3, E_3) = -4$  e  $\mathcal{L}_X g(E_4, E_4) = -3$  e assim a igualdade (6.2) nos fornece

$$\mathcal{L}_X g = -2E_1^b \otimes E_1^b - 2E_2^b \otimes E_2^b - 4E_3^b \otimes E_3^b - 3E_4^b \otimes E_4^b$$

e mais uma vez, recorremos à Proposição 3.5 para concluir que

$$\text{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = -\frac{3}{2}g,$$

conforme queríamos verificar.

A verificação dos três próximos exemplos é completamente similar à verificação feita do Exemplo 6.2, no entanto usamos a Proposição 3.3 ao invés de usar a Proposição 3.5 como anteriormente.

**Exemplo 6.3** Sejam  $(M^4, g) = \text{Sol}_0^4$  e  $X \in \mathfrak{X}(\text{Sol}_0^4)$ , dado por

$$X = -6x\partial_x - 6y\partial_y + 6z\partial_z,$$

então  $(\text{Sol}_0^4, X, \lambda = -6)$  é um soliton de Ricci não-gradiente expansivo.

**Exemplo 6.4** Sejam  $(M^4, g) = \text{Sol}_{m,n}^4$  e  $X \in \mathfrak{X}(\text{Sol}_{m,n}^4)$ , dado por

$$X = [b(a-b) + c(a-c)]x\partial_x + [a(b-a) + c(b-c)]y\partial_y + [a(c-a) + b(c-b)]z\partial_z,$$

então  $(\text{Sol}_{m,n}^4, X, \lambda = -a^2 - b^2 - c^2)$  é um soliton de Ricci não-gradiente expansivo.

**Exemplo 6.5** Sejam  $(M^4, g) = \text{Sol}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X \in \mathfrak{X}(\text{Sol}^3 \times \mathbb{R})$ , dado por

$$X = -2x\partial_x - 2y\partial_y - 2z\partial_z,$$

então  $(\text{Sol}^3 \times \mathbb{R}, X, \lambda = -2)$  é um soliton de Ricci não-gradiente expansivo.

**Observação 6.2** Foi provado por Baird em [4] que o Exemplo 6.1 é único a menos de campos de Killing, no entanto podemos usar a Proposição 3.6 e obter uma prova mais simples. De modo análogo, aplicamos a Proposição 3.6 para concluir que os Exemplos 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 também são únicos módulo campos de Killing.

Nesse momento, faremos três lemas que serão fundamentais na prova do teorema central do capítulo.

**Lema 6.1** Seja  $(\mathbb{R}^4, g, X, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi-Einstein com  $g = e^{-2at}dx^2 + e^{-2bt}dx^2 + e^{-2ct}dx^2 + dt^2$ , então são satisfeitas as equações

$$E_1E_1(f) - aE_4(f) = \frac{1}{m}E_1(f)^2 + \lambda + a(a + b + c), \quad (6.3)$$

$$E_2E_2(f) - bE_4(f) = \frac{1}{m}E_2(f)^2 + \lambda + b(a + b + c), \quad (6.4)$$

$$E_3E_3(f) - cE_4(f) = \frac{1}{m}E_3(f)^2 + \lambda + c(a + b + c), \quad (6.5)$$

$$E_4E_4(f) = \frac{1}{m}E_4(f)^2 + \lambda + a^2 + b^2 + c^2, \quad (6.6)$$

$$E_1E_2(f) = E_2E_1(f) = \frac{1}{m}E_1(f)E_2(f), \quad (6.7)$$

$$E_4E_1(f) = E_1E_4(f) + aE_1(f) = \frac{1}{m}E_1(f)E_4(f), \quad (6.8)$$

$$E_4E_2(f) = E_2E_4(f) + bE_2(f) = \frac{1}{m}E_2(f)E_4(f), \quad (6.9)$$

$$E_4E_3(f) = E_3E_4(f) + cE_3(f) = \frac{1}{m}E_3(f)E_4(f), \quad (6.10)$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_4$  são como na Proposição 3.3.

**Demonstração:** As equações enunciadas são obtidas da igualdade

$$Ric(E_i, E_j) + Hessf(E_i, E_j) - \frac{1}{m}df(E_i) \otimes df(E_j) = \lambda \langle E_i, E_j \rangle, \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ e } 4)$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$Hessf(E_i, E_j) = \frac{1}{m}E_i(f)E_j(f) + \lambda \delta_{ij} - Ric(E_i, E_j),$$

então usando a definição de derivada de Lie e as propriedades da conexão, a igualdade anterior torna-se

$$E_iE_j(f) + E_jE_i(f) - (\nabla_{E_i}E_j + \nabla_{E_j}E_i)(f) = \frac{1}{m}E_i(f)E_j(f) + \lambda \delta_{ij} - Ric(E_i, E_j). \quad (6.11)$$

Observe que para  $i = j$ , vamos ter a igualdade

$$E_iE_i(f) - (\nabla_{E_i}E_i)(f) = \frac{1}{m}E_i(f)^2 + \lambda - Ric(E_i, E_i),$$

daí fazemos  $i = 1, 2, 3$  e  $4$  e usamos a Proposição 3.3, obtendo as equações (6.3), (6.4), (6.5) e (6.6). Para o caso  $i \neq j$ , temos que a igualdade (6.11) torna-se

$$E_i E_j(f) + E_j E_i(f) - (\nabla_{E_i} E_j + \nabla_{E_j} E_i)(f) = \frac{1}{m} E_i(f) E_j(f),$$

por fim, fazendo  $i = 1, 2, 3$  e  $4$ ,  $j = 4$  e depois usando o mesmo procedimento do caso anterior, chegamos nas equações (6.7), (6.8), (6.9) e (6.10).  $\square$

**Lema 6.2** Suponha que  $(Nil^4, X, \lambda)$  é uma variedade  $m$ -quasi-Einstein, então são satisfeitas as equações

$$E_1 E_1(f) = \frac{1}{m} E_1(f)^2 + \lambda + 1, \quad (6.12)$$

$$E_3 E_3(f) = \frac{1}{m} E_3(f)^2 + \lambda + 1/2, \quad (6.13)$$

$$E_4 E_4(f) = \frac{1}{m} E_4(f)^2 + \lambda - 1/2, \quad (6.14)$$

$$E_3 E_4(f) = \frac{1}{m} E_3(f) E_4(f), \quad (6.15)$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_4$  são como na Proposição 3.4.

**Demonstração:** Similar à prova do Lema 6.1.

**Lema 6.3** Suponha que  $(\mathbb{R}^4, g, X, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi-Einstein com  $g = e^{2at} dx^2 + e^{-2at} dy^2 + (xdy - dz)^2 + dt^2$ . então são satisfeitas as equações

$$E_1 E_1(f) + a E_4(f) = \frac{1}{m} E_1(f)^2 + \lambda + 1/2, \quad (6.16)$$

$$E_3 E_3(f) = \frac{1}{m} E_3(f)^2 + \lambda - 1/2, \quad (6.17)$$

$$E_4 E_4(f) = \frac{1}{m} E_4(f)^2 + \lambda + 2a^2, \quad (6.18)$$

$$E_4 E_1(f) = E_1 E_4(f) - a E_1(f) = \frac{1}{m} E_1(f) E_4(f), \quad (6.19)$$

$$E_4 E_2(f) = E_2 E_4(f) + a E_2(f) = \frac{1}{m} E_2(f) E_4(f), \quad (6.20)$$

$$E_3 E_4(f) = \frac{1}{m} E_3(f) E_4(f), \quad (6.21)$$

onde os campos de vetores  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_4$  são como na Proposição 3.5.

**Demonstração:** Análoga à prova do Lema 6.1.

## 6.2 Sobre a existência de métricas quasi-Einstein

Na presente seção, vamos desenvolver os lemas necessários para a prova do resultado principal do capítulo, encerrando com seu enunciado e demonstração que trata da não-existência de métricas quasi-Einstein sobre variedades solúveis tipo-Lie.

**Lema 6.4** Seja  $(\mathbb{R}^4, g, \nabla f, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente com

$$g = e^{-2at} dx^2 + e^{-2bt} dy^2 + e^{-2ct} dz^2 + dt^2,$$

então as constantes  $a, b$  e  $c$  são iguais.

**Demonstração:** Inicialmente, suponha por absurdo que duas das constantes  $a, b$  e  $c$  são distintas, então usando  $[E_1, E_4] = -aE_1$  e a equação (6.8), obtemos as identidades

$$E_1 E_4(f) = \left( \frac{1}{m} E_4(f) - a \right) E_1(f), \quad (6.22)$$

e

$$E_4 E_1(f) = \frac{1}{m} E_1(f) E_4(f), \quad (6.23)$$

além disso, aplicando  $E_1$  na equação (6.6) e novamente usando  $[E_1, E_4] = -aE_1$ , segue-se que

$$-aE_1 E_4(f) + E_4 E_1 E_4(f) = \frac{2}{m} E_1 E_4(f) E_4(f),$$

daí substituímos (6.22) e (6.23), chegando na igualdade

$$\frac{1}{m} E_1(f) E_4 E_4(f) + a^2 E_1(f) = \frac{1}{m^2} E_1(f) E_4(f)^2.$$

Substituindo (6.6) na última igualdade, temos que

$$\frac{1}{m} [\lambda + ma^2 + a^2 + b^2 + c^2] E_1(f) = 0,$$

analogamente, aplicamos  $E_2$  em (6.6) e fazemos cálculos similares ao anterior, obtendo

$$\frac{1}{m} [\lambda + mb^2 + a^2 + b^2 + c^2] E_2(f) = 0,$$

também aplicamos  $E_3$  em (6.6) e repetimos o mesmo procedimento, o qual nos fornece

$$\frac{1}{m} [\lambda + mc^2 + a^2 + b^2 + c^2] E_3(f) = 0,$$

no entanto, duas das constantes  $a, b$  e  $c$  são distintas e isso implica que pelo menos duas das funções  $E_1(f)$ ,  $E_2(f)$  e  $E_3(f)$  são identicamente nulas. Usamos ainda as equações (6.3), (6.4) e (6.5) para obter  $\lambda = 0$ , por fim aplicando o Lema 5.1 na equação (6.6), concluímos que

$$0 = \lambda \leq -(a^2 + b^2 + c^2) < 0,$$

chegando assim a um absurdo.  $\square$

**Lema 6.5** Sejam  $M = \mathbb{R}^4$  e  $g = e^{2at}dx^2 + e^{-2at}dy^2 + (xdy - dz)^2 + dt^2$ , então  $(M^4, g)$  não admite estrutura de métrica  $m$ -quasi-Einstein.

**Demonstração:** Suponha por absurdo que existe métrica quasi-Einstein  $(\mathbb{R}^4, g, \nabla f, \lambda)$ , então aplicamos  $E_4$  em (6.17) e usamos que  $[E_3, E_4] = 0$ , obtendo

$$E_3 E_3 E_4(f) = \frac{2}{m} E_3(f) E_3 E_4(f), \quad (6.24)$$

no entanto, (6.21) nos dá

$$E_3 E_4(f) = \frac{1}{m} E_3(f) E_4(f), \quad (6.25)$$

a qual substituída na igualdade anterior, resulta em

$$E_3 E_3(f) E_4(f) = \frac{1}{m} E_3(f)^2 E_4(f), \quad (6.26)$$

daí substituímos (6.17) e assim, temos que

$$(\lambda - 1/2) E_4(f) = 0, \quad (6.27)$$

no entanto, usamos o Teorema de Qian [37] para obter  $E_4(f) = 0$ .

Substituindo  $E_4(f) = 0$  em (6.18), (6.19) e (6.20), depois combinando as igualdades obtidas com o Lema 3.2 e a Proposição 3.6, ambos de [36], podemos afirmar que

$$E_1(f) = E_2(f) = 0, \quad (6.28)$$

consequentemente,

$$E_3(f) = E_1 E_2(f) - E_2 E_1(f) = 0, \quad (6.29)$$

finalmente, usamos a igualdade (6.17) para concluir que  $\lambda = 1/2$ , contradizendo o Teorema de Qian [37].  $\square$

**Teorema 6.1** Uma variedade solúvel não-flat, tipo-Lie e dimensão quatro não admite estrutura de métrica  $m$ -quasi-Einstein gradiente.

**Demonstração:** Suponha por absurdo que existe uma variedade  $m$ -quasi-Einstein gradiente  $(M^4, g, \nabla f, \lambda)$  com  $(M^4, g)$  solúvel não-flat, tipo-Lie e dimensão quatro, então  $(M^4, g)$  não pode ser  $\mathbb{R}^4$  munido da métrica canônica. Por outro lado, tomando  $a = 0$  e  $a = 1$  no Lema 6.5, temos que  $(M^4, g)$  não pode ser  $Nil^3 \times \mathbb{R}$  e  $Sol_1^4$ . Da mesma forma, tomando valores convenientes para  $a, b$  e  $c$  no Lema 6.4, concluímos que  $(M^4, g)$  não pode ser  $Sol_0^4$ ,  $Sol_{m,n}^4$  e  $Sol^3 \times \mathbb{R}$ , portanto  $(M^4, g) = Nil_4$ .

Nessas condições, aplicamos  $E_4$  em (6.13) e obtemos

$$E_3 E_3 E_4(f) = \frac{2}{m} E_3(f) E_3 E_4(f), \quad (6.30)$$

no entanto, (6.15) nos dá

$$E_3 E_4(f) = \frac{1}{m} E_3(f) E_4(f), \quad (6.31)$$

a qual substituída na igualdade anterior, resulta em

$$E_3 E_3(f) E_4(f) = \frac{1}{m} E_3(f)^2 E_4(f), \quad (6.32)$$

daí substituímos (6.13) e assim

$$(\lambda + 1/2) E_4(f) = 0, \quad (6.33)$$

mas aplicando o Lema 5.1 na equação (6.14), podemos afirmar que  $\lambda = -1/2$  e novamente, aplicando o mesmo lema em (6.12), vamos ter  $\lambda \leq -1$  e portanto um absurdo, finalizando a prova do teorema.  $\square$

Nos corolários a seguir, apresentamos duas implicações diretas do teorema que acabamos de provar.

**Corolário 6.1** Seja  $(M^4, g, \nabla f, \lambda)$  uma variedade  $m$ -quasi Einstein gradiente de dimensão quatro e admita que  $(M^4, g)$  é uma variedade solúvel tipo-Lie, então  $(M^4, g) = \mathbb{R}^4$  e a referida estrutura é trivial.

**Corolário 6.2** As únicas estruturas de métricas quasi-Einstein gradientes em variedades solúveis tipo-Lie de dimensão quatro são os solitons Gaussianos.

## 7 CONCLUSÃO

Diante dos estudos realizados ao longo do desenvolvimento do trabalho, podemos afirmar que os resultados esperados em relação aos solitons de Ricci foram todos obtidos e assim cumprimos a proposta de descrever explicitamente as estruturas de solitons de Ricci homogêneos simplesmente conexos de dimensão três, bem como a construção de novos exemplos de estruturas de solitons de Ricci não-gradientes sobre variedades Riemannianas solúveis tipo-Lie de dimensão quatro.

No que diz respeito às métricas quasi-Einstein, os resultados obtidos não cumpriram exatamente a proposta inicial, pois ficaram restritos ao caso gradiente e portanto, deixaram em aberto questionamentos similares para o caso geral que contemplaria as métricas quasi-Einstein não-gradientes. Essa restrição não tira a relevância dos referidos resultados, pois o caso gradiente tem grande importância nessa teoria e encontra-se presente nas principais aplicações que justificam o estudo de tais estruturas.

Devemos ainda ressaltar o sucesso obtido na construção de novos exemplos de métricas quasi-Einstein em dimensão três, com destaque para os primeiros exemplos de métricas quasi-Einstein não-gradientes, incluindo o primeiro exemplo sobre uma variedade compacta, constituindo-se num contra-exemplo que impossibilita a extensão para métricas quasi-Einstein de um famoso resultado devido a Perelman, válido para solitons de Ricci compactos.

## REFERÊNCIAS

- [1] ANDERSON, M. Scalar curvature, metric degenerations and the static vacuum Einstein equations on 3-manifolds. *Geometric and Functional Analysis*, v. 9, n. 5, p. 855-967, 1999.
- [2] ANDERSON, M.; KHURI, M. The static extension problem in general relativity. 2009. arXiv:0909.4550[math.DG]. Disponível em: <<http://www.arxiv.org>> Acesso em: 10 ago. 2013.
- [3] AQUINO, C.; BARROS, A.; RIBEIRO Jr, E. Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons. *Results in Mathematics*, v. 60, n. 1-4, p. 235-246, 2011.
- [4] BAIRD, P. Explicit constructions of Ricci solitons. *Variational problems in differential geometry*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. p. 37-55. (London Mathematical Society Lecture Note Series 394).
- [5] BAIRD, P.; DANIELLO, L. Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 608, p. 65-71, 2007.
- [6] BARROS, A.; RIBEIRO Jr. E. Integral formulae on quasi-Einstein manifolds and applications. *Glasgow Mathematical Journal*, v. 54, p. 213-223, 2012.
- [7] BARROS, A.; RIBEIRO Jr, E.; SILVA Filho, J. Uniqueness of quasi-Einstein metrics on 3-dimensional homogeneous Riemannian manifold. Fortaleza, 2012. Artigo (Submetido).
- [8] BATISTA, M. Rigidez de solitons gradiente. 2010, 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.
- [9] BESSE, A.L. *Einstein manifolds*. Berlin: Springer-Verlag, 2008. (Classics Mathematics).
- [10] BEZERRA, K.; RIBEIRO Jr, E. J. Uniqueness of quasi-Einstein metrics on  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ . 2013. arXiv: 1301.7737v3 [math.DG]. Disponível em: <<http://www.arxiv.org>>. Acesso em: 15 fev. 2013.
- [11] CAO, H-D. Recent progress on Ricci soliton. Preprint, 2009. arXiv: 0908.2006v1 [math.DG]. Disponível em: <<http://www.arxiv.org>>. Acesso em: 20 set. 2012.
- [12] CARMO, M. P. do *Geometria Riemanniana*. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).



- [13] CASE, J. On the nonexistence of quasi-Einstein metrics. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 248, p. 227-284, 2010.
- [14] CASE, J.; SHU Y.; WEI, S. Rigidity of quasi-Einstein metrics. *Differential Geometry and its Applications*, v. 29, p. 93-100, 2010.
- [15] CHOW, B.; LU, P.; NI, L. *Hamilton's Ricci Flow*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 77).
- [16] CORVINO, J. Scalar curvature deformations and a gluing construction for the Einstein constraint equations. *Communications in Mathematical Physics*, v. 214, p. 137-189, 2000.
- [17] DANIEL, B. Isometric Immersions into 3-Dimensional Homogeneous Manifolds, *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 82, p. 87-131, 2007.
- [18] DI CERBO, L. Generic Properties of homogeneous Ricci Solitons. 2012. arXiv:0711.0465v1[math.DG]. Disponível em: <<http://www.arxiv.org>>. Acesso em: 25 ago. 2012.
- [19] DIÓGENES, R. Métricas m-quasi-Einstein em variedades compactas. 2012, 71 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.
- [20] EMINENTI, M.; LA NAVE, G.; MANTEGAZZA, C. Ricci solitons - The equation point of view. *Manuscripta mathematica*, v. 127, p. 345-367, 2008.
- [21] HAMILTON, R. S. *The formation of singularities in the Ricci flow*. Surveys in Differential Geometry. Cambridge, MA: International Press, 1995. v. 2, p. 7-136.
- [22] HAMILTON, R. S. The Ricci flow in dimension three. *Journal Differential Geometry*, v. 17, p. 255-306, 1982.
- [23] HE, C.; PETERSEN, P.; WYLIE, W. On the classification of warped product Einstein metrics. *Communnications in Analysis and Geometry*, v. 20, p. 271-312, 2012.
- [24] HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for  $\lambda_1$ . *Mathematische Annalen*, v. 280, p. 389-402, 1988.
- [25] KASUYA, H. Geometrical formality of solvmanifolds and solvable Lie type geometries. 2012. arXiv:1207.2390v2[math.DG]. Disponível em: <<http://www.arxiv.org>>. Acesso em: 10 out. 2012.
- [26] KIM, D. S.; KIM, Y. H. Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 131, p. 2573-2576, 2003.

- [27] LAURET, J. Ricci solitons homogeneous nilmanifolds. *Mathematische Annalen*, v. 319, p. 715-733, 2001.
- [28] LAURET, J. Ricci solitons solvmanifolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 650, p. 1-21, 2011.
- [29] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer-Verlag, 2002. (New York Graduate Texts in Mathematics, v. 218.)
- [30] LIMONCU, M. Modifications of the Ricci tensor and applications. *Archiv der Mathematik*, v. 95, p. 191-199, 2010.
- [31] MILNOR, J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Mathematics*, v. 21, p. 293-329, 1976.
- [32] OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. *Journal Differential Geometry*, v. 4, p. 53-72, 1970.
- [33] PERELMAN, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. Preprint, 2002. arXiv: math/0211159v1, 2002. Disponível em: <<http://www.arxiv.org>>. Acesso em: 20 ago. 2012.
- [34] PETERSEN, P. *Riemannian geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate texts in mathematics, v. 171.)
- [35] PETERSEN, P.; WYLIE, W. On gradient Ricci Solitons with symmetry. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 137, p. 2085-2092, 2009.
- [36] PETERSEN, P.; WYLIE, W. Rigidity of gradient Ricci Solitons. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 241, n. 2, p. 329-345, 2009.
- [37] QIAN, Z. Estimates for weighted volumes and applications. *Quarterly Journal of Mathematics*, v. 48, n. 190, p. 235-242, 1997.
- [38] RIBEIRO Jr, E. *A geometria das métricas tipo-Einstein*. 2011, 90f. Tese (Doutorado) - Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- [39] RIBEIRO Jr, E.; SILVA Filho, J. Explicit description of three-dimensional homogeneous Ricci solitons. Fortaleza, 2012. Artigo(Submetido).
- [40] RIBEIRO Jr, E.; SILVA Filho, J. Ricci Solitons structures on four-dimensional solvable Lie type geometries, Preprint.
- [41] SCOTT, P. The geometries of 3-manifolds. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 15, p. 401-487, 1983.

- [42] SILVA Filho, J. Nonexistence of quasi-Einstein structure on four-dimensional solvable Lie type manifolds. Fortaleza, 2013. Artigo(Submetido), 2013.
- [43] TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 117, p. 251-275, 1965.
- [44] THURSTON, W. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. New Jersey: Princeton University Press, 1997.
- [45] TORRALBO, F. Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Differential Geometry Applications*, v. 28(5), p. 593-607, 2011.
- [46] WALL, C. Geometric structures on compact complex analytic surfaces. *Topology*, v. 25, p. 119-133, 1986.
- [47] YANO, K. *Integral formulas in Riemannian geometry*. New York: Marcel Dekker, 1970.