



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO YURE SANTOS DO NASCIMENTO

SOBRE A GEOMETRIA DAS HOROESFERAS

FORTALEZA
2013

FRANCISCO YURE SANTOS DO NASCIMENTO

SOBRE A GEOMETRIA DAS HOROESFERAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

N195s Nascimento, Francisco Yure Santos do.
Sobre a geometria das horoesferas / Francisco Yure Santos do Nascimento. – 2013.
65f.: il. enc.; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Geometria.
Orientação: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto.

1. Espaço hiperbólico. 2. Horoesferas. 3. Curvatura média. 4. Cilindros hiperbólicos.
I. Título.

CDD 516.36

FRANCISCO YURE SANTOS DO NASCIMENTO

SOBRE A GEOMETRIA DAS HOROESFERAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovada em: 23/07/2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a. Dr^a. Fernanda Ester Camillo Camargo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Dedico este trabalho à minha família.

“Provamos através da lógica, mas descobrimos a partir da intuição.”

Henri Poincaré (1854-1912).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por todas as bênçãos a mim concedidas e por ter me encorajado nos momentos difíceis.

Aos meus pais Mirlene e Sigi pela educação que me deram, pelo apoio e pelo amor. Agradeço também aos meus irmãos Franzi e Amanda, a minha avó (Neide) e meu avô (Xico) que são muito importantes para mim.

A minha esposa Emanuela pelo amor, paciência, compreensão e por estar comigo em todos os momentos.

Aos meus amigos e colegas da UFC: João Luiz, João Victor, Nícolas Alcântara, Anderson Feitoza, Rafael Alves, Itamar Sales, Rodrigo Matos, Renan Santos, Wanderley Oliveira, Diego Eloi, Edson Sampaio, Elisafã Braga, Roger Oliveira e Gilson Granja.

Aos meus amigos que moraram comigo na Residência universitária 2142: Cândido Átila, Edson Castro, Everton Alves, Evilasio Ribeiro, Rômulo Sousa, Tiago de Almeida e Antônio Costa Neto.

Ao meu orientador Antonio Caminha, pela atenção e pela confiança depositada em mim. Agradeço também aos professores Fernanda Camargo e Paulo Alexandre por terem participado da banca examinadora.

À Andrea pela solicitude e eficiência.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esse trabalho é baseado no artigo *On the geometry of horospheres* [4]. Nosso objetivo é estudar condições geométricas que garantam que uma hipersuperfície completa e orientável imersa no espaço hiperbólico deve ser uma horoesfera. Além disso, apresentamos um resultado que classifica as hipersuperfícies imersas no espaço hiperbólico tais que certas funções auxiliares da imersão correspondente sejam linearmente dependentes.

Palavras-Chaves: Espaço hiperbólico. Horoesferas. Curvatura média. Cilindros hiperbólicos.

ABSTRACT

This work is based on the paper *On the geometry of horospheres* [4]. Our goal is to study geometric conditions which ensure that a complete and orientable hypersurface immersed in a hyperbolic space must be a horosphere. We also present a result that classifies immersed hypersurfaces in hyperbolic space, such that two natural functions attached to the corresponding immersion are linearly dependent.

Keywords: Hyperbolic space. Horospheres. Mean curvature. Hyperbolic cylinders.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Horoesfera de \mathbb{H}^{n+1}	27
Figura 2 – As bolas $B_r(p)$, $B_\delta(q)$ e $B_{\delta_1}(p^*)$	43
Figura 3 – Homotetia de S tangenciando Σ^n no ponto p_0	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	11
2.1	Variedades semi-Riemannianas	11
2.2	Imersões isométricas	17
2.3	Mais sobre o espaço hiperbólico	24
3	RESULTADOS DE UNICIDADE NO ESPAÇO HIPERBÓLICO	34
3.1	Superfícies sob uma horoesfera	34
3.2	Hipersuperfícies imersas em uma faixa	39
3.3	O Princípio da tangência e aplicações	41
4	Hipersuperfícies de \mathbb{H}^{n+1} com funções auxiliares linearmente dependentes	52
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estudamos hipersuperfícies conexas, completas e orientáveis Σ^n imersas no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} e demonstramos resultados de unicidade referentes às horoesferas do espaço hiperbólico. Na maior parte do trabalho, consideramos \mathbb{H}^{n+1} como uma hiperquádrica do espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+2} e estudamos uma imersão $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, por meio das propriedades das funções auxiliares $l_\alpha = \langle \psi, \alpha \rangle$ e $f_\alpha = \langle N, \alpha \rangle$, onde α é um vetor tipo luz de \mathbb{L}^{n+2} . Mais precisamente, estamos interessados em estudar sob quais condições geométricas uma tal hipersuperfície Σ^n deve ser uma horoesfera. Em [3], L. Alías e M. Dajczer provaram que toda superfície completa propriamente imersa em \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante $|H| \leq 1$ e contida em uma faixa de \mathbb{H}^3 precisa ser uma horoesfera. Em nosso caso, consideramos hipersuperfícies imersas em uma faixa de \mathbb{H}^{n+1} , com curvatura média $|H| \leq 1$ não necessariamente constante e supomos, no caso de superfícies, que a curvatura Gaussiana de Σ^2 é não negativa, para usar um teorema clássico devido a A. Huber [8]; no caso de dimensão qualquer, supomos que $|\nabla l_\alpha|$ é integrável sobre Σ^n , a fim de utilizar um resultado devido a S. T. Yau [17]. Usando o modelo do semiplano, provamos mais um resultado de unicidade colocando uma condição sobre o ângulo normal da hipersuperfície e fazendo uso do princípio da tangência.

Em [5], C. P. Aquino e H. F. de Lima provaram que, se uma hipersuperfície conexa Σ^n , completa e com curvatura média constante, imersa em \mathbb{H}^{n+1} , é tal que as funções auxiliares satisfazem $l_\alpha = \lambda f_\alpha$, para uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ e um vetor tipo tempo ou tipo espaço $\alpha \in \mathbb{L}^{n+2}$, então Σ^n ou é totalmente umbílica ou é um cilindro hiperbólico. No caso em que $\alpha \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo luz, mostramos que vale o mesmo resultado, sendo que, quando Σ^n é totalmente umbílica, ela é uma horoesfera ou uma hiperesfera do espaço hiperbólico.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, fixamos a notação que será utilizada em todo o trabalho e abordamos os fundamentos básicos para uma boa compreensão dos resultados dos capítulos posteriores. Os resultados das duas primeiras seções são fatos gerais sobre geometria semi-Riemanniana e têm como referência geral os capítulos 3 e 4 de [15]. Na terceira seção, apresentamos os principais objetos de estudo e resultados que usaremos diretamente mais adiante.

2.1 Variedades semi-Riemannianas

Iniciamos com uma exposição sobre formas bilineares simétricas e produto escalar num espaço vetorial de dimensão finita; logo após, definimos o que é uma variedade semi-Riemanniana e, então, apresentamos os conceitos de conexão e curvatura.

No que segue, V sempre denotará um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica sobre V é uma função bilinear $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $b(v, w) = b(w, v)$, para quaisquer $v, w \in V$.

Definição 2.1. *Uma forma bilinear simétrica b sobre V é dita*

- i. positiva definida, se $b(v, v) > 0$, para todo $v \in V \setminus \{0\}$;*
- ii. negativa definida, se $b(v, v) < 0$, para todo $v \in V \setminus \{0\}$;*
- iii. não degenerada, se $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.*

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V e W é um subespaço de V , então a restrição $b|_{W \times W}$ é uma forma bilinear simétrica sobre W . Definimos o índice de b como a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b|_{W \times W}$ é negativa definida.

Definição 2.2. *Um produto escalar sobre um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que é não degenerada.*

Diremos que V é um espaço com produto escalar se V está munido com um produto escalar \langle, \rangle e definimos o índice de V como sendo o índice de seu produto escalar.

Se V é um espaço com produto escalar \langle, \rangle e W é um subespaço de V , dizemos que W é não degenerado se a restrição do produto escalar a W é não degenerada. Podemos considerar o subespaço $W^\perp = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$. Em geral, não é verdade que $W + W^\perp = V$ mas, como veremos a seguir, isto é verdade se W é não degenerado; em uma tal situação, diremos que W^\perp é o complemento ortogonal de W .

Lema 2.1. *Sejam V um espaço com produto escalar e W um subespaço de V . Então:*

- i. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.*
- ii. $(W^\perp)^\perp = W$.*
- iii. W é não degenerado se, e somente se, para uma base (v_1, \dots, v_k) de W , a matriz (v_{ij}) dada por $v_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ for invertível.*
- iv. W é não degenerado se, e somente se, $W + W^\perp = V$.*

Demonstração. Veja o capítulo 2 de [15]. □

Em um espaço vetorial V com produto escalar \langle, \rangle , para $v \in V$ o número $\langle v, v \rangle$ pode ser negativo; desta forma, definimos a norma de v com sendo $|v| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$. Um vetor v é unitário se $|v| = 1$ e v é ortogonal a $w \in V$ se $\langle v, w \rangle = 0$. Um conjunto de vetores é ortonormal se seus elementos forem mutuamente ortogonais e unitários.

É um fato básico de álgebra linear que todo espaço vetorial $V \neq 0$ com produto escalar tem uma base ortonormal. Considerando uma base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de V , teremos que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \epsilon_j$, onde $\epsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \pm 1$.

Lema 2.2. *Sejam V um espaço com produto escalar e (e_1, \dots, e_n) uma base ortonormal de V , com $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$. Então:*

- i. todo $v \in V$ tem uma única expressão $v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$;*
- ii. o número de elementos com sinais negativos em $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ é igual ao índice de V .*

Demonstração. Veja o capítulo 2 de [15]. □

Definição 2.3. *Se V é um espaço com produto escalar e $v \in V \setminus \{0\}$, o vetor v é dito:*

- i. tipo espaço, se $\langle v, v \rangle > 0$;*
- ii. tipo luz, se $\langle v, v \rangle = 0$;*
- iii. tipo tempo, se $\langle v, v \rangle < 0$.*

Seja V um espaço com produto escalar de índice 1 e seja \mathcal{T} o conjunto de todos vetores tipo tempo de V . Dado $u \in \mathcal{T}$, definimos

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle < 0\}$$

como o cone tipo tempo de V que contém u . O cone oposto é

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle > 0\}.$$

É possível mostrar, com o auxílio do lema anterior, que u^\perp só contém vetores tipo espaço; então, \mathcal{T} é a união disjunta destes dois cones tipo tempo. Pode-se demonstrar também que dois vetores tipo tempo v e w estão no mesmo cone tipo tempo se, e somente se, $\langle v, w \rangle < 0$. Dizemos que um vetor é causal se ele não é tipo espaço. Para um vetor tipo tempo v , o conjunto $\overline{C}(v)$ de todos vetores causais w tais que $\langle v, w \rangle < 0$ é dito o cone causal contendo v . Os cones causais têm as mesmas propriedades que os cones tipo tempo. As componentes conexas do conjunto de todos vetores causais de V são dois cones causais em V . Temos também que dois vetores causais v e w estão no mesmo cone causal se, e somente se, $\langle v, w \rangle < 0$ ou v e w são tipo luz com $w = av$ e $a > 0$.

Definição 2.4. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica semi-Riemanniana em M é uma correspondência que associa, a cada $p \in M$, um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $T_p M$, com índice constante e que é diferenciável no seguinte sentido: Se x_1, \dots, x_n são as funções coordenadas de um sistema de coordenadas de M , definido em um aberto U , então as funções $p \mapsto \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle_p$ são diferenciáveis em U , para $1 \leq i, j \leq n$.*

Uma variedade semi-Riemanniana é um par $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde M é uma variedade diferenciável e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica semi-Riemanniana em M . Quando não houver perigo de confusão, denotaremos $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ simplesmente por M .

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis sobre M e por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais diferenciáveis definidas sobre M . Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$,

então $X_p \in T_p M$ denota o vetor que o campo associa ao ponto p e $X(f) \in C^\infty(M)$ denota a função definida por $X(f)(p) = X_p(f)$, onde $X_p(f)$ é a derivada de f com relação ao vetor X_p . Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, denotamos por $\langle X, Y \rangle$ a função definida por $\langle X, Y \rangle(p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p$ e por $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ o colchete de Lie dos campos X e Y .

Definição 2.5. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

indicada por $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i.* $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- ii.* $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$;
- iii.* $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$. O campo $\nabla_X Y$ é chamado de derivada covariante de Y com respeito a X .

Teorema 2.1. (Levi-Civita) *Em uma variedade semi-Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ que satisfaz as duas condições a seguir:*

- i.* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;
- ii.* $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Esta conexão é chamada de conexão de Levi-Civita de M .

Demonstração. Veja o capítulo 3 de [15]. □

Trataremos, agora, de alguns conceitos sobre tensores numa variedade diferenciável M . Representaremos por $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto das 1-formas diferenciáveis sobre M . Se $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então $\theta_p \in T_p^* M$, o espaço vetorial dual de $T_p M$ em p ; para $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a função $\theta(X)$ sobre M por $\theta(X)(p) = \theta_p(X_p)$. Se r, s são inteiros não negativos, um tensor do tipo (r, s) sobre M é uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear

$$T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M).$$

Tensores se comportam como campos, associando a cada ponto $p \in M$ um valor T_p . Isso decorre do fato, possível de demonstração, de que o valor da função $T(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$ em um ponto p só depende dos valores $(\theta^1)_p, \dots, (\theta^r)_p, (X_1)_p, \dots, (X_s)_p$. Assim, um tensor T induz, em cada ponto p , uma aplicação multilinear

$$T_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

e a função $p \longmapsto T_p((\theta^1)_p, \dots, (\theta^r)_p, (X_1)_p, \dots, (X_s)_p)$ é diferenciável em M . Se M é uma variedade semi-Riemanniana, sua métrica \langle, \rangle é um tensor do tipo $(0, 2)$ sobre M .

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, uma conexão afim ∇ em M induz uma derivação tensorial ∇_X , tal que $\nabla_X(f) = X(f)$, para $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_X(Y) = \nabla_X Y$, para $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e, para um tensor T do tipo (r, s) , temos que $\nabla_X(T)$ é um tensor do tipo (r, s) tal que

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= X(T(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^r T(\theta^1, \dots, \nabla_X \theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^s T(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Se aplicarmos tal fórmula a $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, teremos que $(\nabla_X \theta)(Y) = X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y)$.

Observação 2.1. Se $A : \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear, definimos outra aplicação $\bar{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$ por

$$\bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_s)), \quad \forall \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \text{ e } X_i \in \mathfrak{X}(M).$$

É fácil notar que \bar{A} é $C^\infty(M)$ -multilinear e, portanto, um tensor do tipo $(1, s)$. Dessa forma, podemos considerar A como um tensor do tipo $(1, s)$. De fato, a cada aplicação da forma de A corresponde um único tensor do tipo $(1, s)$ através do isomorfismo $A \longmapsto \bar{A}$. Dado um $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir uma derivada tensorial para o tensor A como sendo a aplicação $\nabla_X A : \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$(\nabla_X A)(X_1, \dots, X_s) = \nabla_X A(X_1, \dots, X_s) - \sum_{i=1}^s A(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s);$$

observe que esta definição é natural, no sentido de que $\overline{\nabla_X A} = \nabla_X \bar{A}$.

Agora, abordaremos o conceito de curvatura em uma variedade semi-Riemanniana M . Daqui em diante, ∇ sempre denotará a conexão de Levi-Civita de M .

Definição 2.6. Seja M uma variedade semi-Riemanniana. O tensor de curvatura de M é a

aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Observe que a convenção acima difere apenas pelo sinal daquelas de [7] e [15]. É necessário checar que R é $C^\infty(M)$ -linear em cada um dos três fatores; assim, R pode ser visto como um tensor, pelo que comentamos na observação anterior. É comum escrever-se $R(X, Y)Z$ em vez de $R(X, Y, Z)$. Já que R é um tensor, ele induz, em cada ponto p , uma aplicação 3-linear $R_p : (T_p M)^3 \longrightarrow T_p M$ que representaremos simplesmente por R .

Sejam dados um ponto $p \in M$ e dois vetores v e w em $T_p M$, que determinam um plano Π . Considere

$$Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2.$$

Pelo Lema 2.1, o plano Π é não degenerado se, e somente se $Q(v, w) \neq 0$.

Definição 2.7. *Seja Π um plano não degenerado de $T_p M$ e (v, w) uma base para Π . O número*

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{Q(v, w)}$$

é chamado de curvatura seccional de Π e denotado por $K(\Pi)$.

Observe que $K(\Pi)$ independe da base escolhida para Π . De fato, se (x, y) for outra base de Π , teremos que $v = ax + by$ e $w = cx + dy$, com $ad - bc \neq 0$. Usando isto, obtemos $\langle R(v, w)w, v \rangle = (ad - bc)^2 \langle R(x, y)y, x \rangle$ e $Q(v, w) = (ad - bc)^2 Q(x, y)$.

Diremos que M tem curvatura seccional constante se o número $K(\Pi)$ independe do ponto $p \in M$ e do plano não degenerado $\Pi \subset T_p M$.

Proposição 2.1. *Se uma variedade semi-Riemanniana M tem curvatura seccional constante C , então*

$$R(X, Y)Z = C(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Demonstração. Veja o Capítulo 3 de [15]. □

Definição 2.8. *Sejam M uma variedade semi-Riemanniana, p um ponto em M , (E_1, \dots, E_n) um referencial ortonormal definido numa vizinhança de p e $\epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$. O tensor $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, definido em p por*

$$\text{Ric}(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle R(X, E_i)E_i, Y \rangle(p)$$

é denominado o tensor de Ricci de M . É imediato verificar que Ric independe do referencial ortonormal escolhido.

Diremos que o tensor de Ricci é limitado inferiormente se existir uma constante K tal que $\text{Ric}(X, X) \geq K\langle X, X \rangle$, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.9. *Sejam M uma variedade semi-Riemanniana, $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

- i. O gradiente de f é o campo de vetores ∇f tal que $\langle \nabla f, V \rangle = V(f)$, para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$.*
- ii. A divergência de X é a função $\text{div} X \in C^\infty(M)$, definida em p como o traço da aplicação $V_p \mapsto (\nabla_V X)(p)$. Em particular, se (E_1, \dots, E_n) é um referencial ortonormal definido numa vizinhança de p e $\epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, então*

$$\text{div} X(p) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle(p).$$

- iii. O Laplaciano de f é a função $\Delta f \in C^\infty(M)$, definida por $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$.*

- iv. O Hessiano de f é o operador linear $\text{Hess} f : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, definido por*

$$\text{Hess} f(Y) = \nabla_Y \nabla f.$$

2.2 Imersões isométricas

Dadas variedades semi-Riemannianas $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ e $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}})$, de dimensões n e $n+k$, respectivamente, dizemos que uma aplicação $\phi : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão isométrica se ela é uma imersão (isto é, se $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \overline{M}$ é injetiva $\forall p \in M$ – em particular, $k \geq 0$) e

$$\langle X_p, Y_p \rangle_M = \langle d\phi_p(X_p), d\phi_p(Y_p) \rangle_{\overline{M}}, \quad \forall p \in M \text{ e } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Nesse caso, diremos que M é uma subvariedade (imersa) de \overline{M} e que o número k é a codimensão da imersão. Quando $k=1$, diremos que M é uma hipersuperfície de \overline{M} . Toda imersão é localmente um mergulho; dessa forma, pode-se pensar que ϕ é localmente a aplicação inclusão, de modo que faremos as identificações

$$\phi(p) \approx p, \quad T_p M \approx d\phi_p(T_p M) \subset T_{\phi(p)} \overline{M} \text{ e } d\phi_p(v) \approx v.$$

Diremos que ϕ é uma imersão não degenerada se $T_p M$ é um subespaço não degenerado de $T_{\phi(p)} \overline{M}$, para todo $p \in M$; então, pelo Lema 2.1, teremos $T_{\phi(p)} \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$, para todo

$p \in M$. Se $\phi : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão não degenerada de uma variedade diferenciável M em uma variedade semi-Riemanniana $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}})$, então, para $p \in M$ e $v, w \in T_p M$, definimos uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ em M pondo

$$\langle v, w \rangle_M = \langle d\phi_p(v), d\phi_p(w) \rangle_{\overline{M}}.$$

Dessa forma, ϕ torna-se uma imersão isométrica e a métrica assim definida é dita induzida pela imersão ϕ .

De agora em diante, \overline{M} denotará uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $\phi : M \rightarrow \overline{M}$ será uma imersão não degenerada de uma variedade diferenciável M em \overline{M} . Consideraremos M com a métrica induzida por ϕ e com a conexão de Levi-Civita ∇ correspondente. Por simplicidade, denotaremos tanto a métrica de \overline{M} quanto a de M por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Diremos que X é um campo diferenciável ao longo da imersão ϕ se X é uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um vetor $X_p \in T_{\phi(p)}\overline{M}$ de maneira diferenciável. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $d\phi(X)$ é um campo diferenciável ao longo de ϕ . Diremos que um campo X ao longo de ϕ é tangente, se $X_p \in d\phi_p(T_p M) \approx T_p M$, $\forall p \in M$, e que X é normal, se $X_p \in d\phi_p(T_p M)^\perp \approx (T_p M)^\perp$, $\forall p \in M$. $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ denotará o conjunto dos campos diferenciáveis ao longo de ϕ , enquanto $\overline{\mathfrak{X}}(M)^\top$ e $\overline{\mathfrak{X}}(M)^\perp$ denotarão, respectivamente, os conjuntos dos campos tangentes e normais ao longo de ϕ .

Uma vez que $\overline{\mathfrak{X}}(M) = \overline{\mathfrak{X}}(M)^\top \oplus \overline{\mathfrak{X}}(M)^\perp$, podemos considerar as projeções ortogonais

$$\top : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)^\top \quad \text{e} \quad \perp : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)^\perp.$$

Observe que $\overline{\mathfrak{X}}(M)^\top \approx \mathfrak{X}(M)$ via a identificação $X \approx d\phi(X)$. Denominaremos de conexão induzida a aplicação $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)$, definida da seguinte forma: dados $V \in \mathfrak{X}(M)$ e $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, tomamos extensões \overline{V} e \overline{X} , sobre \overline{M} , dos campos $d\phi(V)$ e X ; então, pomos

$$\tilde{\nabla}(V, X) = \tilde{\nabla}_V X = \overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{X}.$$

Esta aplicação está bem definida, pois $(\overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{X})(p)$ depende apenas de \overline{V}_p e do valor de X ao longo de uma curva tangente a \overline{V}_p em p , fato este que se demonstra no capítulo 2 de [7].

A conexão induzida $\tilde{\nabla}$ tem as seguintes propriedades:

- i. $\tilde{\nabla}_{fV+gW} X = f\tilde{\nabla}_V X + g\tilde{\nabla}_W X$, $\forall X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$;
- ii. $\tilde{\nabla}_V(aX + bY) = a\tilde{\nabla}_V X + b\tilde{\nabla}_V Y$, $\forall X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, $V \in \mathfrak{X}(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$;
- iii. $\tilde{\nabla}_V(fX) = V(f)X + f\tilde{\nabla}_V X$, $\forall X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, $V \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$;

iv. se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, então $\tilde{\nabla}_V W - \tilde{\nabla}_W V = d\phi([V, W]) \approx [V, W]$;

v. se $V \in \mathfrak{X}(M)$ e $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, então $\langle X, Y \rangle$ é uma função diferenciável sobre M e $V\langle X, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_V X, Y \rangle + \langle X, \tilde{\nabla}_V Y \rangle$.

Essas propriedades seguem dos seguintes fatos: se \bar{f}, \bar{V} e \bar{W} estendem f, V e W sobre \bar{M} , então $\bar{V}(\bar{f})|_M = V(f)$; $\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{W}|_M = \tilde{\nabla}_V W$; $\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle|_M = \langle V, W \rangle$ e $[\bar{V}, \bar{W}]|_M = [V, W]$.

Proposição 2.2. *Se $\tilde{\nabla}$ é a conexão induzida pela imersão ϕ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top$.*

Demonstração. As propriedades **i,ii** e **iii** mostram que $(X, Y) \mapsto (\tilde{\nabla}_X Y)^\top$ define uma conexão afim em M e as propriedades **iv** e **v** mostram que ela cumpre as condições do Teorema 2.1; assim, ela é a conexão de Levi-Civita de M . \square

Agora, passaremos a denotar a conexão induzida por $\bar{\nabla}$. Usando a proposição anterior, temos que $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y \oplus (\nabla_X Y)^\perp$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos uma aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)^\perp$ por $\alpha(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$, e a denominamos de segunda forma fundamental da imersão ϕ . Um fato importante que pode ser demonstrado sobre a segunda forma fundamental é que ela é $C^\infty(M)$ -bilinear e simétrica. Dá-se o nome de fórmula de Gauss da imersão ϕ à expressão

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y). \quad (2.1)$$

Considere $\eta \in \overline{\mathfrak{X}}(M)^\perp$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Como vimos acima, podemos considerar que $(\bar{\nabla}_X \eta)^\top \in \mathfrak{X}(M)$, pois existe um único $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $d\phi(Y) = (\bar{\nabla}_X \eta)^\top$. Então, definimos uma aplicação linear $A_\eta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ por

$$A_\eta X = -(\bar{\nabla}_X \eta)^\top,$$

para a qual damos o nome de operador de Weingarten da imersão ϕ , associado ao campo normal η .

Sejam dados um ponto $p \in M$ e um referencial ortonormal (η_1, \dots, η_k) em $\overline{\mathfrak{X}}(M)^\perp$, definidos em uma vizinhança de p . Definimos o vetor curvatura média da imersão ϕ no ponto p por

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \epsilon_i \text{tr}(A_i) \eta_i,$$

onde $A_i = A_{\eta_i}$, $\text{tr}(A_i)$ é o traço do operador A_i e $\epsilon_i = \langle \eta_i, \eta_i \rangle$. É imediato verificar que \vec{H} independe do referencial ortonormal (η_1, \dots, η_k) escolhido.

Proposição 2.3. *Se A_η é o operador de Weingarten da imersão ϕ associado ao campo η e α é a segunda forma fundamental dessa imersão, então*

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Uma vez que $\langle Y, \eta \rangle = 0$, temos $0 = X\langle Y, \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X \eta \rangle$. Portanto,

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = \langle -(\bar{\nabla}_X \eta)^\top, Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle,$$

onde utilizamos (2.1) na última igualdade acima. \square

Segue da proposição anterior e da simetria de α que A_η é um operador linear autoadjunto. Portanto, pelo teorema espectral, quando a métrica induzida sobre M tem índice zero, A_η é diagonalizável; seus autovalores são chamados de curvaturas principais da imersão ϕ .

A partir de agora, suporemos que M é uma hipersuperfície imersa em \bar{M} , ou seja, que a imersão ϕ tem codimensão $k = 1$. Suporemos, também, que existe um campo diferenciável normal unitário N , globalmente definido sobre M . Neste caso, só há duas escolhas de campo normal unitário, N e $-N$, de modo que o operador de Weingarten é único a menos de sinal. Denotaremos o operador A_N simplesmente por A . Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\epsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$. Temos que $\alpha(X, Y) = fN$, para alguma função $f \in C^\infty(M)$, de modo que

$$\langle \alpha(X, Y), N \rangle = f\langle N, N \rangle = \epsilon f.$$

Usando a Proposição 2.3, obtemos

$$f = \epsilon \langle \alpha(X, Y), N \rangle = \epsilon \langle AX, Y \rangle,$$

de modo que

$$\alpha(X, Y) = \epsilon \langle AX, Y \rangle N. \quad (2.2)$$

Então, obtemos de (2.1) a fórmula de Gauss para hipersuperfícies, dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \epsilon \langle AX, Y \rangle N.$$

Veja agora que, para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\bar{\nabla}_X N = (\bar{\nabla}_X N)^\top + (\bar{\nabla}_X N)^\perp;$$

mas, como $\langle N, N \rangle = \epsilon$ é constante, derivando na direção de X , obtemos

$$0 = X\langle N, N \rangle = 2\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle,$$

de forma que $(\bar{\nabla}_X N)^\perp = 0$. Portanto, obtemos

$$AX = -\bar{\nabla}_X N,$$

a qual é chamada de fórmula de Weingarten para hipersuperfícies.

O vetor curvatura média de M é dado, nesse caso, por

$$\vec{H} = \frac{\epsilon}{n} \text{tr}(A)N$$

e a função $H = \frac{\epsilon}{n} \text{tr}(A)$ é chamada de curvatura média da hipersuperfície M na direção de N . Diremos que um ponto $p \in M$ é umbílico se $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tem todos os seus autovalores iguais; neste caso, $A_p = \epsilon H(p)I_n$. Diremos que M é uma hipersuperfície totalmente umbílica se todos os seus pontos forem umbílicos.

Consideremos, agora, os tensores de curvatura \bar{R} e R de \bar{M} e M , respectivamente. A seguinte proposição relaciona estes dois tensores.

Proposição 2.4. *Seja M uma hipersuperfície imersa em \bar{M} . Então, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos:*

i. (Equação de Gauss)

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + \epsilon \langle AY, Z \rangle AX - \epsilon \langle AX, Z \rangle AY.$$

ii. (Equação de Codazzi)

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = \epsilon \langle (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, Z \rangle N.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) - (\nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z)) \\ &= R(X, Y)Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) + \bar{\nabla}_X \alpha(Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \bar{\nabla}_Y \alpha(X, Z) - \alpha([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Agora, usando (2.2) e tomando a parte tangente em ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\top = R(X, Y)Z - \epsilon \langle AY, Z \rangle AX + \epsilon \langle AX, Z \rangle AY;$$

tomando a parte normal, novamente com o auxílio de (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp &= \epsilon \langle AX, \nabla_Y Z \rangle N + \epsilon X \langle AY, Z \rangle \\
&- \epsilon \langle AY, \nabla_X Z \rangle N - \epsilon Y \langle AX, Z \rangle - \alpha([X, Y], Z) \\
&= \epsilon \langle AX, \nabla_Y Z \rangle N + \epsilon \langle \nabla_X (AY), Z \rangle N + \epsilon \langle AY, \nabla_X Z \rangle N \\
&- \epsilon \langle AY, \nabla_X Z \rangle N - \epsilon \langle \nabla_Y (AX), Z \rangle N - \epsilon \langle AX, \nabla_Y Z \rangle N - \epsilon \langle A[X, Y], Z \rangle N \\
&= \epsilon \langle \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y) - \nabla_Y (AX) + A(\nabla_Y X), Z \rangle N \\
&= \epsilon \langle (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, Z \rangle N.
\end{aligned}$$

□

Se \bar{M} tem curvatura seccional constante \bar{C} , segue da Proposição 2.1 que

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{C} \langle Y, Z \rangle X - \bar{C} \langle X, Z \rangle Y.$$

Em particular, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, a parte normal de $\bar{R}(X, Y)Z$ é nula. Portanto, as equações de Gauss e Codazzi neste caso são, respectivamente,

$$R(X, Y)Z = \bar{C} \langle Y, Z \rangle X - \bar{C} \langle X, Z \rangle Y + \epsilon \langle AY, Z \rangle AX - \epsilon \langle AX, Z \rangle AY \quad (2.3)$$

e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \quad (2.4)$$

Para finalizar esta seção, daremos dois exemplos de hipersuperfícies, que serão utilizadas neste trabalho. Denotaremos por \mathbb{L}^{n+1} o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , munido com a métrica

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1},$$

a qual tem índice 1. O espaço \mathbb{L}^{n+1} é conhecido como espaço de Lorentz-Minkowski. Denotaremos por ∇^0 a conexão de Levi-Civita de \mathbb{L}^{n+1} , a qual é calculada da seguinte forma: para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$ dados em coordenadas por $X = (X_1, \dots, X_{n+1})$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_{n+1})$, temos

$$(\nabla_X^0 Y)(p) = \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v_1}(p), \dots, \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial v_{n+1}}(p) \right),$$

onde $v_i = X_i(p)$ para $1 \leq i \leq n+1$. Desta maneira, pode-se notar que o tensor de curvatura de \mathbb{L}^{n+1} é nulo e, portanto, sua curvatura seccional é constante igual a 0.

Exemplo 2.1. *Considere*

$$\mathbb{S}_1^n(r) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = r^2 \right\}.$$

Se $f : \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \langle x, x \rangle$, então f é diferenciável e tal que $\mathbb{S}_1^n(r) = f^{-1}(r^2)$. Uma vez que o gradiente $\nabla^0 f$ não se anula em nenhum ponto de $f^{-1}(r^2)$, temos que $\mathbb{S}_1^n(r)$ é uma hipersuperfície mergulhada em \mathbb{L}^{n+1} . De fato, como

$$\langle \nabla^0 f, X \rangle = X(f) = X\langle x, x \rangle = 2\langle \nabla_X^0 x, x \rangle = \langle 2x, X \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1}),$$

segue que $\nabla^0 f(x) = 2x$ e, portanto,

$$|\nabla^0 f(x)|^2 = 4r^2 \neq 0, \quad \forall x \in f^{-1}(r^2).$$

O campo $\nabla^0 f$ é normal sobre $\mathbb{S}_1^n(r)$. De fato, dados $x \in \mathbb{S}_1^n(r)$ e $v \in T_x \mathbb{S}_1^n(r)$, se tomarmos uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}_1^n(r)$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$, teremos que

$$\langle \nabla^0 f(x), v \rangle = df_x(v) = (f \circ \gamma)'(0) = 0,$$

uma vez que $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)$ é constante. Assim,

$$N(x) = \frac{\nabla^0 f(x)}{|\nabla^0 f(x)|} = \frac{2x}{2r} = \frac{1}{r}x$$

é um campo normal unitário globalmente definido sobre $\mathbb{S}_1^n(r)$. Então, a fórmula de Weingarten nos dá

$$AX = -\nabla_X^0 N = -\nabla_X^0 \left(\frac{1}{r}x \right) = -\frac{1}{r} \nabla_X^0 x = -\frac{1}{r}X,$$

de modo que $\mathbb{S}_1^n(r)$ é totalmente umbílica em \mathbb{L}^{n+1} . Ademais, como $\epsilon = \langle N, N \rangle = 1$, a curvatura média de $\mathbb{S}_1^n(r)$ (em relação a N) é constante igual a $\frac{\epsilon}{n} \text{tr}(A) = -\frac{1}{r}$.

Para calcularmos o tensor curvatura R de $\mathbb{S}_1^n(r)$, utilizamos a equação de Gauss (2.3), recordando que a curvatura seccional de \mathbb{L}^{n+1} é constante igual a zero. Assim, obtemos que

$$R(X, Y)Z = \epsilon \langle AY, Z \rangle AX - \epsilon \langle AX, Z \rangle AY = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Portanto, $\mathbb{S}_1^n(r)$ tem curvatura seccional constante, dada por

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{1}{r^2}.$$

O espaço $\mathbb{S}_1^n(1)$, o qual denotamos apenas por \mathbb{S}_1^n , é conhecido como espaço de de Sitter de dimensão n .

Exemplo 2.2. *Considere, agora*

$$\mathbb{H}^n(r) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -r^2 \right\}.$$

Procedendo analogamente ao exemplo anterior, definimos $f: \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle x, x \rangle$, de forma que $\mathbb{H}^n(r) = f^{-1}(-r^2)$ é uma hipersuperfície mergulhada em \mathbb{L}^{n+1} . Temos que $\nabla^0 f(x) = 2x$ e $\langle \nabla^0 f(x), \nabla^0 f(x) \rangle = -4r^2$. Temos, também, que $N(x) = (1/r)x$ é um campo normal unitário globalmente definido e, neste caso, $\epsilon = \langle N, N \rangle = -1$. Como no caso anterior, teremos que o operador de Weingarten de $\mathbb{H}^n(r)$ é dado por $AX = (-1/r)X$ e, daí, $\mathbb{H}^n(r)$ tem curvatura média (em relação a N) igual a $1/r$ e curvatura seccional constante igual a $-1/r^2$. A hipersuperfície $\mathbb{H}^n(1)$ tem duas componententes conexas, de forma que consideraremos somente uma delas. Chamaremos de espaço hiperbólico de dimensão n a componente conexa de $\mathbb{H}^n(1)$ dada por

$$\mathbb{H}^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -1 \text{ e } x_{n+1} \geq 0 \right\}.$$

Observação 2.2. *Para cada $x \in \mathbb{H}^n$, temos que $T_x \mathbb{L}^{n+1} = T_x \mathbb{H}^n \oplus \mathbb{R}x$. Como $T_x \mathbb{L}^{n+1}$ tem índice 1 e $\langle N(x), N(x) \rangle = -1$, concluímos, usando o Lema 2.2, que $T_x \mathbb{H}^n$ tem índice 0, isto é, que a métrica induzida em \mathbb{H}^n por \mathbb{L}^{n+1} é positiva definida. Portanto, \mathbb{H}^n é uma variedade Riemanniana.*

2.3 Mais sobre o espaço hiperbólico

Nesta seção, apresentaremos outro modelo do espaço hiperbólico e um tipo importante de hipersuperfície deste espaço, a saber, as horoesferas. Apresentaremos, também, as principais ferramentas e definições a serem utilizadas posteriormente.

Na seção anterior, definimos o espaço hiperbólico como uma certa hipersuperfície do espaço de Lorentz-Minkowski, munida com a métrica induzida. Agora, apresentaremos o espaço hiperbólico como sendo o semiplano aberto

$$H^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\},$$

munido com a métrica

$$\langle v, w \rangle_x = \frac{1}{x_n^2} (v_1 w_1 + \dots + v_n w_n),$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n$ e $v, w \in T_x H^n$.

Seja $\partial H^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$ a fronteira Euclidiana de H^n . Considere uma esfera S em \mathbb{R}^n de dimensão $n - 1$ e tangente a ∂H^n em p_0 , tal que $S - \{p_0\} \subset H^n$. As hipersuperfícies de H^n do tipo $S - \{p_0\}$ são chamadas de horoesferas de H^n . Uma isometria importante de H^n é a inversão Euclidiana em $p_0 \in \partial H^n$, dada por

$$f(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0.$$

A isometria f aplica uma horoesfera $S - \{p_0\}$ em um hiperplano P de \mathbb{R}^n , dado por $x_n = 1/2r$, onde r é o raio da esfera S . Dessa forma, os hiperplanos \mathbb{R}^n dados por $x_n = c$, com $c > 0$, também são horoesferas de H^n .

Uma horoesfera Σ de H^n divide o espaço hiperbólico em duas regiões. Quando Σ é da forma $S - \{p_0\}$, onde S é uma esfera Euclidiana como acima, chamamos de domínio interior de Σ o fecho do conjunto dos pontos de H^n que são interiores à esfera S (no sentido Euclidiano), e de domínio exterior de Σ o fecho do conjunto dos pontos de H^n que são exteriores à esfera S (no sentido Euclidiano). Como vimos, a horoesfera Σ é levada por uma isometria apropriada em uma horoesfera da forma

$$L(c) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n; x_n = c\},$$

onde $c > 0$. Tal isometria leva os domínios interior e exterior determinados por Σ respectivamente nas regiões

$$L(c)^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n; x_n \geq c\} \text{ e } L(c)^- = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n; x_n \leq c\}.$$

Então, da mesma maneira como se faz em [10], chamaremos $L(c)^+$ de domínio interior e $L(c)^-$ de domínio exterior determinados pela horoesfera $L(c)$.

A partir de agora, voltaremos a considerar o espaço hiperbólico n -dimensional como uma hiperquádrica de \mathbb{L}^{n+1} . Como vimos no Exemplo 2.2, neste contexto o espaço hiperbólico será dado por

$$\mathbb{H}^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -1 \text{ e } x_{n+1} \geq 0 \right\},$$

sendo munido com a métrica induzida de \mathbb{L}^{n+1} .

Lema 2.3. *Considere os dois modelos de espaço hiperbólico, quais sejam, o modelo do semiplano $H^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^n} = \frac{1}{x_n^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$, e o modelo \mathbb{H}^n da hiperquádrica de \mathbb{L}^{n+1} . A aplicação $F: H^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, dada por*

$$F(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}{2x_n}, \frac{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{2x_n} \right),$$

é uma isometria.

Demonstração. É imediato verificar que F está bem definida, isto é, aplica H^n em \mathbb{H}^n ; de fato, F é um difeomorfismo, pois tem inversa dada por

$$F^{-1}(y_1, \dots, y_{n+1}) = \left(\frac{y_1}{y_n + y_{n+1}}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_n + y_{n+1}}, \frac{1}{y_n + y_{n+1}} \right),$$

como é imediato verificar.

Daí, fazendo $F(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{n+1})$, temos que

$$y_i = \frac{x_i}{x_n}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1, \quad y_n = \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}{2x_n} \text{ e } y_{n+1} = \frac{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{2x_n};$$

então, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n$ e $v \in T_x \mathbb{H}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle dF_x(v), dF_x(v) \rangle &= dy_1(v)^2 + \dots + dy_n(v)^2 - dy_{n+1}(v)^2 \\ &= \frac{(x_n dx_1(v) - x_1 dx_n(v))^2}{x_n^4} + \dots + \frac{(x_n dx_{n-1}(v) - x_{n-1} dx_n(v))^2}{x_n^4} \\ &+ \frac{(-4(\sum_{i=1}^n x_i x_n dx_i(v)) - 2(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2) dx_n(v))^2}{16x_n^4} \\ &- \frac{(4(\sum_{i=1}^n x_i x_n dx_i(v)) - 2(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2) dx_n(v))^2}{16x_n^4} \\ &= \frac{x_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} dx_i(v)^2}{x_n^4} - 2 \frac{(\sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i(v)) x_n dx_n}{x_n^4} + \frac{(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2) dx_n(v)^2}{x_n^4} \\ &+ 2 \frac{(\sum_{i=1}^n x_i dx_i(v)) x_n dx_n}{x_n^4} + \frac{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2 dx_n(v)^2}{4x_n^4} - \frac{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^2 dx_n(v)^2}{4x_n^4} \\ &= \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} dx_i(v)^2 + \frac{2}{x_n^2} dx_n(v)^2 + \frac{(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2) dx_n(v)^2}{x_n^4} - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2) dx_n(v)^2}{x_n^4} \\ &= \frac{1}{x_n^2} (dx_1(v)^2 + \dots + dx_n(v)^2) = \langle v, v \rangle_{H^n}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5. As horoesferas de $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -1 \text{ e } x_{n+1} \geq 0\}$ são dadas por

$$L_\tau = \{x \in \mathbb{H}^n; \langle x, a \rangle = \tau\},$$

onde $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}$ é um vetor tipo luz tal que $a_{n+1} < 0$ e τ é um número real positivo.

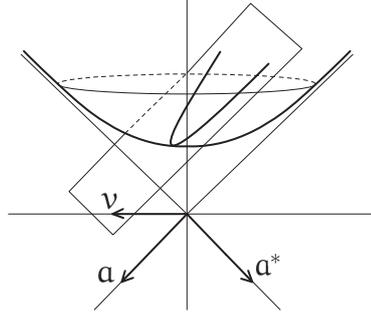


Figura 1: Horoesfera de \mathbb{H}^{n+1}

Geometricamente, L_τ é a interseção de \mathbb{H}^n com o hiperplano Euclidiano de \mathbb{R}^{n+1} , que passa por $v = \frac{\tau}{a_1} E_1$, onde $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$, e é perpendicular (também no sentido Euclidiano) ao vetor $a^* = (-a_1, \dots, -a_n, a_{n+1})$.

Demonstração. Seja $H^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^n} = \frac{1}{x_n^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$, o modelo do semiplano. Vamos mostrar que L_τ é imagem de uma horoesfera pela isometria F do lema anterior. Seja $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in L_\tau$, de sorte que

$$y_1 a_1 + \dots + y_n a_n - y_{n+1} a_{n+1} = \tau,$$

onde $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}$ é tal que $\langle a, a \rangle = 0$ e $a_{n+1} < 0$. Impondo que $(y_1, \dots, y_{n+1}) = F(x_1, \dots, x_n)$, teremos

$$\frac{x_1}{x_n} a_1 + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} a_{n-1} + \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}{2x_n} a_n - \frac{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{2x_n} a_{n+1} = \tau$$

e, então,

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2x_i a_i - (a_n + a_{n+1}) \sum_{i=1}^n x_i^2 + (a_n - a_{n+1}) = 2x_n \tau.$$

Se $a_n + a_{n+1} = 0$, devemos ter $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, já que $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2 = 0$. Daí, $x_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{2\tau}$, o que significa que $F^{-1}(L_\tau)$ está contido na horoesfera dada por

$$x_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{2\tau} = -\frac{a_{n+1}}{\tau} > 0.$$

Se $a_n + a_{n+1} \neq 0$, teremos

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2x_i \frac{a_i}{a_n + a_{n+1}} - \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{2x_n \tau}{a_n + a_{n+1}} - \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} 2x_i \left(\frac{a_i}{a_n + a_{n+1}} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_i}{a_n + a_{n+1}} \right)^2 + x_n^2 + 2x_n \left(\frac{\tau}{a_n + a_{n+1}} \right) \\ & + \left(\frac{\tau}{a_n + a_{n+1}} \right)^2 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_i}{a_n + a_{n+1}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{a_n + a_{n+1}} \right)^2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i - \frac{a_i}{a_n + a_{n+1}} \right)^2 + \left(x_n + \frac{\tau}{a_n + a_{n+1}} \right)^2 = \left(\frac{\tau}{a_n + a_{n+1}} \right)^2.$$

Como $a_n^2 - a_{n+1}^2 = -(a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2) \leq 0$, temos $|a_n| \leq |a_{n+1}| = -a_{n+1}$ e, daí, $a_{n+1} \leq a_n \leq -a_{n+1}$. Portanto, $a_n + a_{n+1} < 0$ e os cálculos acima nos dizem que (x_1, \dots, x_n) pertencem à esfera Euclidiana de centro $\left(\frac{a_1}{a_n + a_{n+1}}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n + a_{n+1}}, \frac{-\tau}{a_n + a_{n+1}} \right)$ e raio $\frac{-\tau}{a_n + a_{n+1}}$. Como tal esfera está contida em H^n e toca ∂H^n em um único ponto, concluímos que $F^{-1}(L_\tau)$ está contida em uma horoesfera.

Reciprocamente, seja $L(c) = \{(x_1, \dots, x_n) \in H^n; x_n = c\}$ uma horoesfera de H^n . Usando a inversa de F , temos que $(x_1, \dots, x_n) = F^{-1}(y_1, \dots, y_{n+1})$, de sorte que a imagem de $L(c)$ por F é o conjunto dos pontos (y_1, \dots, y_{n+1}) de \mathbb{H}^n , tais que $\frac{1}{y_n + y_{n+1}} = c$. Portanto, tomando o vetor tipo luz $\mathbf{a} = (0, \dots, 1, -1)$, temos que

$$F(L(c)) \subset \{y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{H}^n; \langle y, \mathbf{a} \rangle = 1/c\} = L_{1/c}.$$

O caso em que a horoesfera é da forma $S - \{p_0\}$, onde S e p_0 são como na página 15, pode ser tratado de modo análogo. \square

Observe agora que, dada uma horoesfera $L(c)$ no modelo do semiplano, seus domínios interior e exterior $L(c)^+$ e $L(c)^-$ são levados por F , respectivamente em

$$L_\tau^+ = \{p \in \mathbb{H}^n; \langle p, \mathbf{a} \rangle \leq \tau\} \text{ e } L_\tau^- = \{p \in \mathbb{H}^n; \langle p, \mathbf{a} \rangle \geq \tau\}.$$

Então, diremos que L_τ^+ é o domínio interior da horoesfera L_τ e L_τ^- é o seu domínio exterior.

Considere novamente a horoesfera dada por

$$L_\tau = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle x, \mathbf{a} \rangle = \tau\},$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}$ é um vetor tipo luz tal que $a_{n+1} < 0$ e τ é um número real positivo. Definindo $f: \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle x, \mathbf{a} \rangle$, temos $L_\tau = f^{-1}(\tau)$. Seja $\bar{\nabla}$ a conexão de

Levi-Civita de \mathbb{H}^{n+1} , para $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ e $x \in \mathbb{H}^{n+1}$, temos

$$\langle \bar{\nabla}f(x), X \rangle = df_x(X) = X\langle x, a \rangle = \langle \nabla_X^0 x, a \rangle = \langle X, a \rangle = \langle X, a^\top \rangle,$$

onde a^\top é a componente tangente do vetor a em $T_x\mathbb{H}^{n+1}$; assim, $\bar{\nabla}f = a^\top$. Como o campo posição x é normal a \mathbb{H}^{n+1} e unitário, com $\langle x, x \rangle = -1$, temos que $a = a^\top - \langle a, x \rangle x$; logo para $x \in L_\tau$, temos

$$\langle a^\top, a^\top \rangle = \langle a + \tau x, a + \tau x \rangle = \tau^2.$$

Segue que

$$N(x) = \frac{a^\top}{|a^\top|} = x + \frac{1}{\tau}a \quad (2.5)$$

é um campo normal unitário sobre L_τ . Sejam α a segunda forma fundamental da inclusão $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, \bar{A} o operador de Weingarten de \mathbb{H}^{n+1} na direção do campo posição. Como $\nabla_X^0 N = \bar{\nabla}_X N + \alpha(X, N) = \bar{\nabla}_X N - \langle \bar{A}X, N \rangle = \bar{\nabla}_X N$ (pois \mathbb{H}^{n+1} é totalmente umbílica em \mathbb{L}^{n+2}), o operador de Weingarten A de L_τ com respeito ao campo normal unitário N é dado por

$$AX = -\nabla_X^0 N = -X.$$

Portanto, a curvatura média de L_τ com respeito ao campo normal N é constante igual a -1 e, usando a equação de Gauss para hipersuperfícies (2.3), vemos que a curvatura seccional de L_τ é constante igual a 0.

Vamos considerar agora $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ uma hipersuperfície imersa no espaço hiperbólico $(n+1)$ -dimensional. Suponhamos que Σ^n seja orientável, orientada por um campo normal unitário N globalmente definido. Denotamos por A o operador de Weingarten com respeito ao campo N e por ∇^0 , $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de \mathbb{L}^{n+2} , \mathbb{H}^{n+1} e Σ^n , respectivamente. As fórmulas de Gauss e Weingarten para Σ^n são dadas por

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y + \langle X, Y \rangle \psi = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N + \langle X, Y \rangle \psi \quad (2.6)$$

e

$$AX = -\bar{\nabla}_X N = -\nabla_X^0 N, \quad (2.7)$$

para quaisquer campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$.

Fixado um vetor arbitrário $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, consideraremos as funções $f_a, l_a : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$f_a(x) = \langle N(x), a \rangle \text{ e } l_a(x) = \langle \psi(x), a \rangle$$

as quais chamaremos de funções auxiliares da imersão ψ .

Lema 2.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ uma hipersuperfície orientável imersa no espaço*

hiperbólico e sejam f_a, l_a as funções auxiliares da imersão. Então,

$$\nabla l_a = a^\top \text{ e } \nabla f_a = -A(a^\top), \quad (2.8)$$

onde $a^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ é a componente tangencial de a ao longo da imersão ψ , ou seja,

$$a^\top = a - f_a N + l_a \psi. \quad (2.9)$$

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ e fazendo a identificação $\psi(x) \approx x$, temos

$$\langle \nabla l_a, X \rangle = dl_a(X) = X\langle \psi, a \rangle = \langle \nabla_X^0 \psi, a \rangle = \langle X, a^\top \rangle$$

e

$$\langle \nabla f_a, X \rangle = df_a(X) = X\langle N, a \rangle = \langle \nabla_X^0 N, a \rangle = \langle -AX, a^\top \rangle = \langle -A(a^\top), X \rangle;$$

portanto, $\nabla l_a = a^\top$ e $\nabla f_a = -A(a^\top)$. Por fim, como $\langle \psi, \psi \rangle = -1$ e $\langle N, N \rangle = 1$, obtemos $a = a^\top + \langle N, a \rangle N - \langle \psi, a \rangle \psi$ e, daí, $a^\top = a - f_a N + l_a \psi$. \square

Tratamos, agora, de definir as curvaturas médias de ordem superior de Σ^n , bem como os operadores de Newton associados. Dado um ponto $p \in \Sigma^n$, o operador de Weingarten induz um operador linear autoadjunto $A_p : T_p \Sigma^n \rightarrow T_p \Sigma^n$, cujos autovalores são $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$. Obtemos, daí, n funções diferenciáveis $S_r : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$\det(tI_p - A_p) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k(p) t^{n-k},$$

onde I_p é o operador identidade em $T_p \Sigma^n$, $S_0(p) = 1$ por convenção e

$$S_k(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1}(p) \dots \lambda_{i_k}(p),$$

para $1 \leq k \leq n$. Para $0 \leq r \leq n$, definimos a r -ésima curvatura média H_r de Σ^n por $H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r$. Observe que $H_0 = 1$ e H_1 é a curvatura média H de Σ^n .

Para $0 \leq r \leq n$, definimos a r -ésima transformação de Newton $P_r : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ por $P_0 = I$, onde I é o operador identidade e

$$P_r = S_r I - A P_{r-1},$$

para $1 \leq r \leq n$.

Proposição 2.6. *Os operadores de Newton, como descritos acima, têm as seguintes propriedades:*

- i.* $\text{tr}(P_r) = (n-r)S_r$;
- ii.* $\text{tr}(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$;
- iii.* $\text{tr}(A^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Demonstração. Por uma fácil indução, obtemos

$$P_r = S_r I - S_{r-1}A + S_{r-2}A^2 - \dots + (-1)^r S_0 A^r.$$

Conclui-se que cada P_r , por ser um polinômio em A , é autoadjunto, comuta com A e tem os mesmos autovetores de A . Seja (e_1, \dots, e_n) uma base que diagonaliza A em um ponto p . Vamos mostrar que, para $1 \leq r \leq n$,

$$P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i,$$

onde

$$S_r(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n \\ j_1, \dots, j_r \neq i}} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_r}.$$

Para $r = 1$, temos

$$P_1 e_i = S_1 e_i - A e_i = (S_1 - \lambda_i) e_i = S_1(A_i) e_i.$$

Supondo, por indução, que a igualdade vale para algum $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, temos

$$P_{r+1} e_i = S_{r+1} e_i - A P_r e_i = S_{r+1} e_i - S_r(A_i) A e_i = (S_{r+1} - S_r(A_i) \lambda_i) e_i = S_{r+1}(A_i) e_i.$$

Então, obtemos a partir daí que

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_r) &= \sum_{i=1}^n \langle P_r e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle S_r(A_i) e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n S_r(A_i) = \sum_{i=1}^n (S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)) \\ &= n S_r - \sum_{i=1}^n \lambda_i S_{r-1}(A_i) = (n-r) S_r, \end{aligned}$$

uma vez que cada parcela que compõe S_r é contada r vezes em $\sum_{i=1}^n \lambda_i S_{r-1}(A_i)$. Agora, basta observar que $AP_r = S_{r+1}I - P_{r+1}$ e $A^2P_r = S_{r+1}A - AP_{r+1}$. De fato, tais igualdades fornecem

$$\text{tr}(AP_r) = \text{tr}(S_{r+1}I - P_{r+1}) = nS_{r+1} - (n - (r+1))S_{r+1} = (r+1)S_{r+1}$$

e

$$\operatorname{tr}(A^2 P_r) = \operatorname{tr}(S_{r+1} A - A P_{r+1}) = S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}.$$

□

Definimos, ainda, para $0 \leq r \leq n$, o operador diferencial $L_r : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ por

$$L_r(f) = \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f).$$

É fácil ver que $L_0 = \Delta$, o operador Laplaciano de Σ^n .

Proposição 2.7. *Dada uma função diferenciável $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(\Sigma^n)$, temos*

$$L_r(\varphi \circ f) = \varphi'(f) L_r(f) + \varphi''(f) \langle P_r \nabla f, \nabla f \rangle.$$

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Uma vez que

$$\langle \nabla(\varphi \circ f), X \rangle = d(\varphi \circ f)(X) = \varphi'(f) df(X) = \varphi'(f) \langle \nabla f, X \rangle,$$

segue que $\nabla(\varphi \circ f) = \varphi'(f) \nabla f$. Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(\varphi \circ f)(X) &= \nabla_X \nabla(\varphi \circ f) = \nabla_X(\varphi'(f) \nabla f) \\ &= X(\varphi'(f)) \nabla f + \varphi'(f) \nabla_X \nabla f \\ &= \varphi''(f) X(f) \nabla f + \varphi'(f) \operatorname{Hess} f(X) \end{aligned}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} P_r \operatorname{Hess} f(X) &= \varphi'(f) P_r \operatorname{Hess} f(X) + \varphi''(f) X(f) P_r \nabla f \\ &= \varphi'(f) P_r \operatorname{Hess} f(X) + \varphi''(f) \langle \nabla f, X \rangle P_r \nabla f. \end{aligned}$$

Tomando um referencial ortonormal local (e_1, \dots, e_n) , temos que

$$\operatorname{tr}(X \mapsto \langle \nabla f, X \rangle P_r \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle \langle \nabla f, e_i \rangle P_r \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle P_r \nabla f, e_i \rangle \langle \nabla f, e_i \rangle = \langle P_r \nabla f, \nabla f \rangle.$$

Portanto, $L_r(\varphi \circ f) = \varphi'(f) L_r(f) + \varphi''(f) \langle P_r \nabla f, \nabla f \rangle$. □

Proposição 2.8. *Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa no espaço hiperbólico e f_a e l_a as funções auxiliares da imersão. Então, temos*

$$L_r l_a = (r+1) S_{r+1} f_a + (n-r) S_r l_a \quad (2.10)$$

e

$$L_r f_a = -(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_a - (r+1)S_{r+1}l_a - \langle \nabla S_{r+1}, a^\top \rangle. \quad (2.11)$$

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, e usando a fórmula de Gauss (2.6), juntamente com (2.8) e (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Hess } l_a(X) &= \nabla_X \nabla l_a = \nabla_X^0(a - f_a N + l_a \psi) - \langle AX, a^\top \rangle N - \langle X, a^\top \rangle \psi \\ &= -X(f_a)N + f_a AX + X(l_a)\psi + l_a X - \langle A(a^\top), X \rangle N - X(l_a)\psi \\ &= -\langle \nabla f_a, X \rangle N + f_a AX + l_a X + \langle \nabla f_a, X \rangle N \\ &= (f_a A + l_a I)(X). \end{aligned}$$

Portanto, usando a Proposição 2.6, obtemos

$$L_r(l_a) = \text{tr}(P_r \text{Hess } l_a) = f_a \text{tr}(P_r A) + l_a \text{tr}(P_r) = (r+1)S_{r+1}f_a + (n-r)S_r l_a.$$

Provemos, agora, a identidade (2.11):

$$\text{Hess } f_a(X) = \nabla_X \nabla f_a = -\nabla_X A(a^\top).$$

Usando a equação de Codazzi (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Hess } f_a(X) &= -\nabla_{a^\top} AX + A[a^\top, X] \\ &= -(\nabla_{a^\top} A)(X) - A(\nabla_X a^\top) \\ &= -(\nabla_{a^\top} A)(X) - A(\text{Hess } l_a(X)) \\ &= (-\nabla_{a^\top} A - f_a A^2 - l_a A)(X). \end{aligned}$$

Portanto, novamente pela Proposição 2.6, temos que

$$L_r f_a = -\text{tr}(P_r(\nabla_{a^\top} A)) - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_a - (r+1)S_{r+1}l_a.$$

O Lema 3.9 de [13] garante que $\text{tr}(P_r(\nabla_{a^\top} A)) = a^\top(S_{r+1})$. Portanto, segue que

$$L_r f_a = -(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_a - (r+1)S_{r+1}l_a - \langle \nabla S_{r+1}, a^\top \rangle.$$

□

3 RESULTADOS DE UNICIDADE NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Agora, estamos preparados para apresentar os resultados principais desse trabalho. Todas as hipersuperfícies que consideraremos aqui serão supostas conexas e orientáveis. Com exceção da terceira seção, usaremos o modelo da hiperquádrica de \mathbb{L}^{n+2} para o espaço hiperbólico. Dada $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ uma hipersuperfície imersa em \mathbb{H}^{n+1} , denotaremos por N um campo normal unitário globalmente definido sobre Σ^n e por A o operador de Weingarten associado a N . Como antes, $f_\alpha = \langle N, \alpha \rangle$ e $\iota_\alpha = \langle \psi, \alpha \rangle$ denotarão as funções auxiliares da imersão ψ , onde $\alpha \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor não nulo.

3.1 Superfícies sob uma horoesfera

Começemos apresentando algumas formulações do princípio do máximo relevantes às discussões subsequentes, para o que precisamos de alguns conceitos preliminares.

Definição 3.1. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Dizemos que uma função $f \in C^\infty(M)$ é subharmônica se $\Delta f \geq 0$.*

Definição 3.2. *Dizemos que uma superfície Riemanniana M é parabólica se M é completa, não compacta e tal que toda função em M subharmônica e negativa é constante.*

A partir da definição acima, temos o seguinte.

Lema 3.1. *Toda função subharmônica e limitada superiormente sobre uma superfície Riemanniana parabólica é constante.*

Demonstração. Seja f uma função subharmônica sobre a superfície parabólica M , tal que $f < c$, para alguma constante c . Então, a função $f - c$ é subharmônica e negativa sobre M , de sorte que $f - c$ é constante sobre M e, conseqüentemente, f também o é. \square

Enunciamos, agora, um resultado clássico devido A. Huber, que pode ser encontrado em [8] e cuja prova foge ao escopo deste trabalho.

Proposição 3.1. *Toda superfície Riemanniana completa, não compacta e com curvatura Gaussiana não negativa é parabólica.*

Precisaremos, também, do resultado a seguir.

Lema 3.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície imersa em \mathbb{H}^{n+1} , com curvatura média $-1 \leq H \leq 1$. Então, a função l_a^2 é subharmônica, para qualquer vetor não nulo a tipo luz.*

Demonstração. Usando a Proposição 2.7 para o caso $L_0 = \Delta$, obtemos

$$\Delta l_a^2 = 2l_a \Delta l_a + 2|\nabla l_a|^2$$

e, pela Proposição 2.8,

$$\Delta l_a = \text{tr}(A)f_a + nl_a = nHf_a + nl_a.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \Delta l_a^2 &= 2nHf_a l_a + 2nl_a^2 + 2|\nabla l_a|^2 \\ &= (2nHf_a l_a + nf_a^2 + nH^2 l_a^2) + (nl_a^2 - nf_a^2) + (nl_a^2 - nH^2 l_a^2) + 2|\nabla l_a|^2 \\ &= n(f_a + Hl_a)^2 + n(l_a^2 - f_a^2) + n(1 - H^2)l_a^2 + 2|\nabla l_a|^2. \end{aligned}$$

Agora, usando (2.8) e (2.9), e supondo que a é um vetor tipo luz, obtemos

$$|\nabla l_a|^2 = |a^\top|^2 = |a - f_a N + l_a \psi|^2 = l_a^2 - f_a^2$$

e, desta forma,

$$\Delta l_a^2 = n(f_a + Hl_a)^2 + n(1 - H^2)l_a^2 + (n + 2)|\nabla l_a|^2.$$

Portanto, usando que $|H| \leq 1$, concluímos que $\Delta l_a^2 \geq 0$ sobre Σ^n . \square

A seguir, apresentamos um importante resultado, conhecido como princípio do máximo de Omori-Yau. Para uma prova do mesmo, referimos o leitor a [18].

Proposição 3.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa, com tensor de Ricci limitado inferiormente. Então, para qualquer função diferenciável $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$, com $u^* = \sup_M u < +\infty$, existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em M satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$(i) \ u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) \ |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k} \quad e \quad (iii) \ \Delta u(p_k) < \frac{1}{k}, \quad (3.1)$$

para qualquer $k \geq 1$.

Dada uma hipersuperfície orientada Σ^n de $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, podemos considerar o campo normal unitário N de Σ^n como uma aplicação $N : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$, onde \mathbb{S}_1^{n+1} é o espaço de de Sitter definido no Exemplo 2.1, o qual é dado por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\}.$$

A aplicação N é chamada de aplicação de Gauss da hipersuperfície Σ^n . Do mesmo modo, seja dada uma hipersuperfície tipo espaço Σ^n de \mathbb{S}_1^{n+1} , isto é, tal que a métrica induzida sobre Σ^n é Riemanniana. Pode-se mostrar que Σ^n é orientada por um campo normal unitário N tal que $\langle N, N \rangle = -1$ e chamamos a aplicação $N : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ de aplicação de Gauss de Σ^n . Agora, veremos um teorema de S. Montiel [11], o qual nos dá informações sobre uma hipersuperfície tipo espaço de \mathbb{S}_1^{n+1} ao colocarmos restrições sobre a imagem da aplicação de Gauss da mesma.

Teorema 3.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo espaço completa do espaço de de Sitter \mathbb{S}_1^{n+1} , com curvatura média constante $H \geq 1$. Suponha que a imagem $N(\Sigma^n)$ da aplicação de Gauss de Σ^n está contida no domínio interior determinado por uma horoesfera L_τ . Então, $H = 1$. Ademais, quando $n = 2$, Σ^2 é totalmente umbílica e a imagem de sua aplicação de Gauss é uma horoesfera.*

Demonstração. Suponha que $N(\Sigma^n)$ está contido no domínio interior da horoesfera $L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}$, onde $\tau > 0$ e $a = (a_1, \dots, a_{n+2})$ é tipo luz, com $a_{n+2} < 0$. Então, temos que

$$0 < \langle N(p), a \rangle \leq \tau, \quad \forall p \in \Sigma^n.$$

Seja $u \in C^\infty(\Sigma^n)$ dada por $u(p) = \langle N(p), a \rangle$. Dessa forma, $u^* = \sup_{p \in \Sigma^n} \langle N(p), a \rangle$ existe e é positivo. Seja A o operador de Weingarten da imersão $\chi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$, associado ao campo normal unitário N . Cálculos análogos àqueles do Lema 2.4 e da Proposição 2.8 nos dão $\Delta u = \text{tr}(A^2) \langle N, a \rangle - nH \langle \chi, a \rangle - \langle \nabla H, a^\top \rangle$. Mas, como H é constante, temos

$$\Delta u = \text{tr}(A^2) \langle N, a \rangle - nH \langle \chi, a \rangle.$$

Uma vez que $\chi - N$ é um vetor tipo luz para todo $p \in \Sigma^n$ e $\langle \chi - N, N \rangle = 1$, concluímos que $\chi - N$ e a estão no cone oposto ao do vetor N , logo $\langle \chi - N, a \rangle \leq 0$ e, assim, $\langle \chi, a \rangle \leq \langle N, a \rangle$. Além disso, temos que

$$0 \leq \text{tr} \left[(A + HI)^2 \right] = \text{tr}(A^2 + 2HA + H^2I) = \text{tr}(A^2) - 2nH^2 + nH^2 = \text{tr}(A^2) - nH^2,$$

de modo que

$$\Delta u \geq nH^2 \langle N, \mathbf{a} \rangle - nH \langle N, \mathbf{a} \rangle = nH(H-1)u.$$

Vejamos agora que o tensor de Ricci de Σ^n é limitado inferiormente. Usando a equação de Gauss (2.3), temos que o tensor de curvatura R de Σ^n é dado, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, por

$$R(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y - \langle AY, Z \rangle AX + \langle AX, Z \rangle AY.$$

A partir daí, obtemos o tensor de Ricci de Σ^n ,

$$\text{Ric}(X, Y) = (n-1)\langle X, Y \rangle + \langle AX, AY \rangle + nH\langle AX, Y \rangle.$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= (n-1)\langle X, X \rangle + \langle AX, AX \rangle + 2\frac{nH}{2}\langle AX, X \rangle + \left(\frac{nH}{2}\right)^2 |X|^2 - \left(\frac{nH}{2}\right)^2 |X|^2 \\ &= \left((n-1) - \frac{n^2 H^2}{4} \right) |X|^2 + \left| AX + \frac{nH}{2} X \right|^2 \\ &\geq \left((n-1) - \frac{n^2 H^2}{4} \right) |X|^2. \end{aligned}$$

Pelo princípio do máximo de Omori-Yau, existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ^n , tal que $u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}$ e $\Delta u(p_k) < \frac{1}{k}$. Então, $nH(H-1)u(p_k) \leq \Delta u(p_k) < \frac{1}{k}$ e, daí,

$$0 = \lim_k nH(H-1)u(p_k) = nH(H-1) \lim_k u(p_k) = nH(H-1)u^*.$$

Portanto, devemos ter $H = 1$. Se $n = 2$, um teorema de Akutagawa [1] garante que toda superfície completa tipo espaço de \mathbb{S}_1^3 com curvatura média H satisfazendo $|H| \leq 1$ é totalmente umbílica; por outro lado, em [2], prova-se que as hipersuperfícies tipo espaço completas e totalmente umbílicas de \mathbb{S}_1^{n+1} , com $|H| = 1$, são isométricas a \mathbb{R}^n e são da forma

$$\mathcal{L}_\tau = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, \mathbf{a} \rangle = \tau\},$$

para algum vetor tipo luz $\mathbf{a} \in \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $\mathbf{a}_{n+2} < 0$, e algum $\tau > 0$. É fácil ver que $\eta(p) = p - \frac{1}{\tau} \mathbf{a}$ define um campo normal unitário sobre Σ^n e, portanto, que a imagem de \mathcal{L}_τ por η é uma horoesfera L_τ de \mathbb{H}^{n+1} . \square

Motivados pelo teorema anterior, vamos considerar agora hipersuperfícies Σ^n de \mathbb{H}^{n+1} e a imagem de suas aplicações de Gauss. Dada uma horoesfera L_τ de \mathbb{H}^{n+1} determinada por um

vetor tipo luz $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+2})$, com $a_{n+2} < 0$, sabemos de (2.5) que

$$N(p) = p + \frac{1}{\tau} \mathbf{a}$$

define uma aplicação de Gauss para a horoesfera L_τ . A imagem $N(L_\tau)$ de L_τ pela aplicação de Gauss N é a hipersuperfície \mathcal{L}_τ de \mathbb{S}_1^{n+1} que vimos acima, a qual nos referiremos como um hiperplano de \mathbb{S}_1^{n+1} .

Definição 3.3. *Considere uma hipersuperfície Σ^n de \mathbb{H}^{n+1} .*

- i. Diremos que Σ^n está sob uma horoesfera L_τ , com $\tau > 0$, determinada por um vetor tipo luz $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+2})$, com $a_{n+2} < 0$, se sua função auxiliar $l_\mathbf{a}$ satisfaz $l_\mathbf{a} \leq \tau$, e diremos que ela está sobre L_τ se $l_\mathbf{a} \geq \tau$.*
- ii. Diremos que a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n está sob um hiperplano $\mathcal{L}_{\tilde{\tau}}$ de \mathbb{S}_1^{n+1} , com $\tilde{\tau} > 0$, determinado por um vetor tipo luz $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+2})$, com $a_{n+2} < 0$, se a função auxiliar $f_\mathbf{a}$ satisfaz $f_\mathbf{a} \leq \tilde{\tau}$, e diremos que está sobre $\mathcal{L}_{\tilde{\tau}}$ se $f_\mathbf{a} \geq \tilde{\tau}$.*

Observe que a hipersuperfície Σ^n está sob a horoesfera L_τ se, e somente se, Σ^n está contida no domínio interior determinado por L_τ . Temos, agora, o seguinte resultado de [4].

Teorema 3.2. *Seja $\psi : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma superfície completa imersa em \mathbb{H}^3 , com curvatura Gaussiana não negativa e situada sob uma horoesfera L_τ , $\tau > 0$, determinada por um vetor tipo luz $\mathbf{a} \in \mathbb{L}^4$ com $a_4 < 0$. Suponha que a curvatura média H de Σ^2 satisfaz $-1 \leq H \leq 1$ e que a imagem da aplicação de Gauss de Σ^2 está sobre um plano \mathcal{L}_β , com $\beta > 0$. Então Σ^2 é uma horoesfera.*

Demonstração. A hipótese sobre a imagem da aplicação de Gauss de Σ^2 nos diz que $f_\mathbf{a} \geq \beta$. Usando o Lema 2.4, obtemos

$$|\nabla l_\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}^\top|^2 = l_\mathbf{a}^2 - f_\mathbf{a}^2.$$

Daí, concluímos que $l_\mathbf{a}^2 = |\nabla l_\mathbf{a}|^2 + f_\mathbf{a}^2 \geq \beta^2$. Observe que, se $p \in L_\tau$, então \mathbf{a} está no cone oposto ao do vetor tipo tempo p ; mas, como todos os pontos de \mathbb{H}^3 estão no mesmo cone do vetor p , temos $l_\mathbf{a}(x) = \langle \psi(x), \mathbf{a} \rangle > 0$, para todo $x \in \Sigma^2$. Dessa forma, temos que $l_\mathbf{a} \geq \beta$ e, como Σ^2 está sob a horoesfera L_τ , concluímos que

$$\beta \leq l_\mathbf{a} \leq \tau.$$

Portanto, $l_\mathbf{a}^2$ é uma função limitada e subharmônica pelo Lema 3.2. Se Σ^2 não é compacta, segue da Proposição 3.1 e do Lema 3.1 que $l_\mathbf{a}$ é constante. Se Σ^2 é compacta, o teorema de Hopf (cf.

exercício 3.12 de [7]) garante que l_α é constante. Então $l_\alpha = \tau'$, para algum $\tau' > 0$. Assim, $\psi(\Sigma^2) \subset L_{\tau'}$ e, como Σ^2 é completa, temos que $\psi(\Sigma^2) = L_{\tau'}$. Logo Σ^2 é uma horoesfera. \square

3.2 Hipersuperfícies imersas em uma faixa

Na seção anterior consideramos superfícies de \mathbb{H}^3 situadas sob uma horoesfera. Agora, vamos considerar hipersuperfícies de \mathbb{H}^{n+1} situadas entre duas horoesferas. Mais precisamente, se L_{τ_1} e L_{τ_2} são duas horoesferas determinadas por um vetor tipo luz α tal que $\alpha_{n+2} < 0$, diremos que a região entre estas duas horoesferas é a faixa de \mathbb{H}^{n+1} determinada pelo vetor α . Diremos que uma hipersuperfície Σ^n imersa em $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ está imersa nesta faixa se sua função auxiliar l_α satisfizer $\tau_1 \leq l_\alpha \leq \tau_2$.

Um resultado semelhante ao Teorema 3.2 é obtido quando a superfície Σ^2 está imersa em uma faixa de \mathbb{H}^3 .

Teorema 3.3. *Seja $\psi : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma superfície completa imersa em uma faixa de \mathbb{H}^3 e com curvatura Gaussiana não negativa. Se a curvatura média H de Σ^2 satisfaz $-1 \leq H \leq 1$, então Σ^2 é uma horoesfera.*

Demonstração. Se Σ^2 está imersa em uma faixa de \mathbb{H}^3 , então existem um vetor tipo luz $\alpha \in \mathbb{L}^4$, com $\alpha_4 < 0$, e números positivos τ_1 e τ_2 tais que a função auxiliar $l_\alpha = \langle \psi, \alpha \rangle$ satisfaz $\tau_1 \leq l_\alpha(p) \leq \tau_2$, para todo $p \in \Sigma^2$. Pelo Lema 3.2, l_α^2 é uma função subharmônica e limitada sobre Σ^2 . Assim, argumentando como na demonstração do teorema anterior, $l_\alpha = \tau$, para algum $\tau > 0$. Logo, $\psi(\Sigma^2) = L_\tau$ é uma horoesfera. \square

A fim de generalizar o resultado acima para dimensões arbitrárias, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares. A seguinte proposição é uma extensão do teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não compactas, devida a S.T Yau [17]. Em tudo o que segue, $\mathcal{L}^1(\Sigma)$ denotará o espaço das funções Lebesgue integráveis sobre Σ .

Proposição 3.3. *Sejam Σ uma variedade Riemanniana n -dimensional completa, não compacta e orientada e ω uma $(n-1)$ -forma diferencial integrável (isto é, tal que $|\omega| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$) definida em Σ . Então, existe uma sequência de domínios $B_i \subset \Sigma$ tal que $B_i \subset B_{i+1}$, $\Sigma = \bigcup_{i \geq 1} B_i$ e*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Aplicando a proposição anterior, Yau estabeleceu a seguinte versão do teorema de Hopf para funções subharmônicas em variedades Riemannianas.

Lema 3.3. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana n -dimensional completa e orientada e $f : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se f é uma função subharmônica tal que $|\nabla f| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$, então f é uma função harmônica, isto é, $\Delta f = 0$.*

Demonstração. Sejam $\iota_{\nabla f}$ a contração na direção do gradiente de f e $d\Sigma$ o elemento de volume de Σ . Considere a $(n-1)$ -forma $\omega = \iota_{\nabla f} d\Sigma$ de modo que $|\omega| = |\nabla f| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Temos que $d\omega = \operatorname{div}(\nabla f)d\Sigma = \Delta f d\Sigma$. Por outro lado, pela proposição anterior, existem domínios $B_i \subset B_{i+1}$ em Σ , tais que $\Sigma^n = \bigcup_{i \geq 1} B_i$ e

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} \Delta f d\Sigma = 0.$$

Mas, uma vez que $\Delta f \geq 0$, temos $\Delta f = 0$ em Σ . □

Em [3], L. Alías e M. Dajczer demonstraram que toda superfície propriamente imersa em uma faixa de \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante H satisfazendo $|H| \leq 1$, é uma horoesfera. Agora, com o auxílio do lema anterior, podemos estender este resultado.

Teorema 3.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, imersa em uma faixa de \mathbb{H}^{n+1} determinada por um vetor tipo luz $\alpha \in \mathbb{L}^{n+2}$, com $\alpha_{n+2} < 0$, e tendo curvatura média H (não necessariamente constante) satisfazendo $-1 \leq H \leq 1$. Se $|\alpha^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$, onde α^\top é a componente tangencial de α sobre Σ^n , então Σ^n é uma horoesfera.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2, sabemos que l_α^2 é uma função subharmônica. Por outro lado, sabemos que $\nabla l_\alpha = \alpha^\top$ e, daí, segue que $|\nabla l_\alpha^2| = 2|l_\alpha| |\nabla l_\alpha|$ é integrável sobre Σ^n , uma vez que l_α é limitada. Conclui-se, usando o lema anterior, que l_α^2 é uma função harmônica. Voltando à demonstração do Lema 3.2, temos

$$\Delta l_\alpha^2 = n(f_\alpha + H l_\alpha)^2 + n(1 - H^2) l_\alpha^2 + (n+2) |\nabla l_\alpha|^2;$$

assim, $\Delta l_\alpha^2 = 0$ implica $\nabla l_\alpha = 0$ e, portanto, l_α é constante sobre Σ^n . Desta forma, Σ^n é uma horoesfera de \mathbb{H}^{n+1} . □

3.3 O Princípio da tangência e aplicações

Nesta seção, usaremos o princípio do máximo forte de Hopf para demonstrar o princípio da tangência e, com o auxílio do mesmo, estabeleceremos mais um resultado de unicidade no espaço hiperbólico. Esta seção tem como referências [12] e [6].

Definição 3.4. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um operador diferencial parcial linear de segunda ordem em U é uma aplicação do tipo*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

onde $a_{ij}, b_i, c : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas e $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 . Se, para cada $x \in U$, a matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ for simétrica e positiva definida, ou seja, se $a_{ij} = a_{ji}$, para todos $1 \leq i, j \leq n$ e

$$\langle A(x)\lambda, \lambda \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j > 0,$$

para qualquer $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então $Lu = 0$ é denominada uma equação diferencial parcial linear elíptica de segunda ordem em U .

Proposição 3.4. *Nas notações da definição acima, seja $c : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não positiva. Se $Lu > 0$ em U , então u não atinge máximo local não negativo em U .*

Demonstração. Suponha que exista $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) \geq 0$ e x_0 seja ponto de máximo local para u . Então, $\nabla u(x_0) = 0$ e a matriz $B = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)$ é negativa semi-definida. Portanto,

$$0 < Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + c(x_0)u(x_0).$$

Uma vez que $c(x_0)u(x_0) \leq 0$, chegaremos a uma contradição se mostrarmos que

$$\text{tr}((AB)(x_0)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leq 0,$$

onde $(AB)(x_0)$ denota o produto das matrizes $A(x_0) = (a_{ij}(x_0))$ e $B = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)$. Sabendo que o traço de uma matriz, bem como o fato dela ser positiva (semi-)definida ou negativa (semi-)definida, são conceitos invariantes por semelhança de matrizes. Tomamos uma

matriz P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

como A é positiva definida, temos que $\lambda_i > 0$, para $1 \leq i \leq n$, e $P^{-1}BP = (b_{ij})$ é negativa semi-definida; então, $b_{ii} \leq 0$ e, daí,

$$\operatorname{tr}((AB)(x_0)) = \operatorname{tr}((P^{-1}AP)(P^{-1}BP)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{ii} \leq 0.$$

□

Definição 3.5. Um operador diferencial parcial linear de segunda ordem L é dito localmente uniformemente elíptico se, para todo $p \in U$, existem uma vizinhança V de p em U e constantes $a, b > 0$ tais que $a|\lambda|^2 \leq \langle A(x)\lambda, \lambda \rangle \leq b|\lambda|^2$, para todos $x \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir é conhecido como o princípio do máximo forte de Hopf.

Teorema 3.5. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ um operador diferencial parcial linear de segunda ordem localmente uniformemente elíptico em U , com $c \leq 0$. Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , tal que $Lu \geq 0$. Se u atinge um máximo local não negativo em $p \in U$, então u é constante em uma vizinhança de p .

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $u(x) \leq u(p)$ sempre que $x \in B_r(p)$, com $B_r(p) \subset U$. Suponha, por contradição, que u não é constante em vizinhança alguma de p . Então, existe $q \in B_{r/3}(p)$ com $u(q) < u(p)$. Se $\delta_0 = |q - p|$, então $\overline{B_{\delta_0}(q)} \subset B_r(p)$ e $p \in \partial B_{\delta_0}(q)$. Seja, agora,

$$\delta = \inf\{\rho > 0; \overline{B_\rho(q)} \subset B_r(p) \text{ e } \partial B_\rho(q) \cap u^{-1}(u(p)) \neq \emptyset\}.$$

Devemos ter $\delta > 0$, pois, caso contrário, existiria uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $y_k \rightarrow q$ e $u(y_k) = u(p)$; mas, por continuidade, teríamos que $u(q) = u(p)$. Temos, também, que $u(x) < u(p)$, para todo $x \in B_\delta(q)$ pois, do contrário, já que $u(x) \leq u(p)$, para $x \in B_r(p)$, teríamos um $y \in B_\delta(q)$ tal que $u(y) = u(p)$, contrariando a definição de δ . Por fim, temos que existe $p^* \in \partial B_\delta(q)$ tal que $u(p^*) = u(p)$ pois, do contrário, teríamos que $u(x) < u(p)$, para todo $x \in \partial B_\delta(q)$ e, assim, existiriam, pela compacidade de $\partial B_\delta(q)$, bolas B_1, \dots, B_j cobrindo $\partial B_\delta(q)$

e tais que $u(x) < u(p)$, para todo $x \in \bigcup B_i$; assim, existiria $\delta' > \delta$ tal que $u(x) < u(p)$ para todo $x \in \partial B_{\delta'}(q)$, contradizendo a definição de δ . Mostramos até o momento que existe um $\delta > 0$ tal que:

- (a) $\overline{B_\delta(q)} \subset B_r(p)$.
- (b) $x \in B_\delta(q) \Rightarrow u(x) < u(p)$.
- (c) existe $p^* \in \partial B_\delta(q)$ tal que $u(p^*) = u(p)$.

Agora, veja que $\delta \leq \delta_0 < \frac{r}{3}$, de modo que, tomando $0 < \delta_1 < \delta$, temos que $\overline{B_{\delta_1}(p^*)} \subset B_r(p)$. De fato, se $x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}$, então

$$|x - p| \leq |x - p^*| + |p^* - q| + |q - p| < \delta_1 + \delta + \frac{r}{3} < r.$$

Daí, $u(x) \leq u(p) = u(p^*)$, para todo $x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}$. Tome $q^* \in [p^*, q]$, com $q^* \neq q$ e $\beta = |q^* - p^*| > \delta_1$.

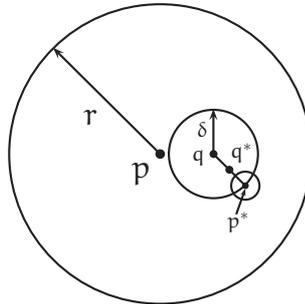


Figura 2: As bolas $B_r(p)$, $B_\delta(q)$ e $B_{\delta_1}(p^*)$

Seja $v : B_{\delta_1}(p^*) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(x) = e^{-K|x - q^*|^2} - e^{-K\beta^2},$$

onde K será escolhido posteriormente. Veja que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = -2K(x_i - q_i^*)e^{-K|x - q^*|^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = -2K\delta_{ij}e^{-K|x - q^*|^2} + 4K^2(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*)e^{-K|x - q^*|^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Lv(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) + c(x)v(x) \\ &= \left[\sum_{i,j=1}^n 4K^2 a_{ij}(x)(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*) - 2K \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) - 2K \sum_{i=1}^n b_i(x)(x_i - q_i^*) \right] e^{-K|x-q^*|^2} \\ &\quad + c(x) \left(e^{-K|x-q^*|^2} - e^{-K\beta^2} \right). \end{aligned}$$

Agora, a elipticidade uniforme local de L garante a existência de uma vizinhança V de p em U e constantes $a, b > 0$ tais que $a|\lambda|^2 \leq \langle A(x)\lambda, \lambda \rangle \leq b|\lambda|^2$, para todos $x \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Tomando $\lambda = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, temos que $a \leq a_{ii}(x) \leq b$ e, então, cada a_{ii} é limitado em V ; escolhendo $\lambda = x - q^*$, tem-se que

$$0 < a|x - q^*|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*) \leq b|x - q^*|^2, \quad \forall x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}.$$

Como b_i e c são funções contínuas, podemos supor que elas são limitadas em V . Considere que o r que tomamos desde o início é tal que $\overline{B_r(p)} \subset V$. Daí, a compacidade de $\overline{B_{\delta_1}(p^*)}$, junto com a elipticidade uniforme em $\overline{B_r(p)}$ e o fato de $c \leq 0$, garante a existência de constantes A, B, C (independentes de K), com $A > 0$ e

$$Lv(x) \geq (4AK^2 + BK + C)e^{-K|x-q^*|^2}, \quad \forall x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}.$$

Como $A > 0$, podemos tomar K de modo que $Lv(x) > 0$, para todo $x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}$. Então, para todo $\lambda > 0$, temos que $L(u + \lambda v) > 0$ em $\overline{B_{\delta_1}(p^*)}$.

Agora, façamos $\partial B_{\delta_1}(p^*) = E \cup F$, onde $E = \partial B_{\delta_1}(p^*) \cap \overline{B_{\beta}(q^*)}$ e F é o complemento de E em $\partial B_{\delta_1}(p^*)$. Temos dois casos a considerar:

1. Se $x \in F$, então $|x - q^*| > \beta$ e, daí, $v(x) < 0$. Como $u(x) \leq u(p)$ e $v(p^*) = 0$, temos

$$u(x) + \lambda v(x) < u(p) = u(p^*) = u(p^*) + \lambda v(p^*), \quad \forall x \in F, \quad \forall \lambda > 0.$$

2. Se $x \in E$, então $u(x) < u(p)$, pois a escolha de q^* e β garante que $E \subset B_{\delta}(q)$. Pela compacidade de E , podemos tomar $M > 0$ tal que $u(x) + M < u(p)$, para todo $x \in E$, e $\lambda > 0$ tal que $v(x) \leq \frac{M}{\lambda}$, $\forall x \in E$. Então,

$$u(x) + \lambda v(x) \leq u(x) + M < u(p) = u(p^*) = u(p^*) + \lambda v(p^*), \quad \forall x \in E.$$

Da análise dos dois casos acima e com o λ escolhido no caso 2, segue que $u + \lambda v : \overline{B_{\delta_1}(p^*)} \rightarrow \mathbb{R}$ atinge seu máximo em algum $y \in B_{\delta_1}(p^*)$, com

$$u(y) + \lambda v(y) \geq u(p^*) + \lambda v(p^*) = u(p) \geq 0.$$

Mas, como $L(u + \lambda v) > 0$, chegamos a uma contradição à proposição anterior. Portanto, u é constante em alguma vizinhança de p . \square

Corolário 3.1. *Nas notações e hipóteses do teorema anterior, se U é conexo e $p \in U$ for um ponto de máximo global para u , então u será constante em U .*

Demonstração. O conjunto $\{x \in U; u(x) = u(p)\}$ é fechado em U e o teorema anterior garante que ele é aberto. Então, pela conexidade de U , segue que u é constante em U . \square

Agora, vamos encontrar uma fórmula útil para a curvatura média de uma hipersuperfície de \mathbb{H}^{n+1} , dada localmente como um gráfico de uma função diferenciável. Para tanto, precisamos de algumas preliminares.

Consideramos o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} no modelo do semi-espaço,

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_n > 0\},$$

munido com a métrica

$$\langle V, W \rangle_x = \frac{1}{x_n^2} V \cdot W,$$

onde

$$V \cdot W = \sum_{i=0}^n v_i w_i$$

denota o produto interno Euclidiano em \mathbb{R}^{n+1} .

Denotamos por \overline{D} e \overline{V} as conexões de Levi-Civita de \mathbb{R}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1} , respectivamente. Temos o seguinte.

Lema 3.4. *Sejam X, Y, Z campos de vetores em \mathbb{H}^{n+1} . Então*

$$\langle Z, \overline{V}_Y X \rangle = \frac{1}{x_n^2} Z \cdot \overline{D}_Y X + \frac{1}{x_n^3} (-X(x_n) Y \cdot Z - Y(x_n) Z \cdot X + Z(x_n) X \cdot Y).$$

Demonstração. Sabemos que $Y \langle Z, X \rangle = \langle \overline{V}_Y Z, X \rangle + \langle Z, \overline{V}_Y X \rangle$. Por outro lado, temos que

$$Y \langle Z, X \rangle = Y \left(\frac{1}{x_n^2} Z \cdot X \right) = -\frac{2}{x_n^3} Y(x_n) Z \cdot X + \frac{1}{x_n^2} \overline{D}_Y Z \cdot X + \frac{1}{x_n^2} \overline{D}_Y X \cdot Z.$$

Fazendo o mesmo para $X \langle Y, Z \rangle$ e $Z \langle X, Y \rangle$, segue que

$$(1) \langle \bar{\nabla}_Y Z, X \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle = -\frac{2}{x_n^3} Y(x_n) Z \cdot X + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Y Z \cdot X + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Y X \cdot Z;$$

$$(2) \langle \bar{\nabla}_X Z, Y \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_X Y \rangle = -\frac{2}{x_n^3} X(x_n) Z \cdot Y + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_X Z \cdot Y + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_X Y \cdot Z;$$

$$(3) \langle \bar{\nabla}_Z Y, X \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_Z X \rangle = -\frac{2}{x_n^3} Z(x_n) Y \cdot X + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Z Y \cdot X + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Z X \cdot Y.$$

Somando (1) e (2) e subtraindo (3), obtemos

$$\begin{aligned} & \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_X Y \rangle = \\ &= \frac{2}{x_n^3} (-Y(x_n) Z \cdot X - X(x_n) Z \cdot Y + Z(x_n) Y \cdot X) \\ &+ \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Y Z \cdot X + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Y X \cdot Z + \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_X Z \cdot Y \\ &+ \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_X Y \cdot Z - \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Z Y \cdot X - \frac{1}{x_n^2} \bar{D}_Z X \cdot Y. \end{aligned}$$

Agora, usando que $[X, Y] = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = \bar{D}_X Y - \bar{D}_Y X$, cancelamos as duas primeiras parcelas do primeiro membro e quatro das seis últimas parcelas do segundo membro. Por fim, observando que $\bar{D}_Y X \cdot Z + \bar{D}_X Y \cdot Z = 2\bar{D}_Y X \cdot Z + \langle [X, Y], Z \rangle$ e $\langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_X Y \rangle = 2\langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle$, obtemos o resultado do enunciado. \square

Sejam Σ^n uma hipersuperfície de \mathbb{H}^{n+1} e N e η campos normais unitários sobre Σ^n , o primeiro no sentido hiperbólico e o segundo no sentido Euclidiano, ou seja, $\langle N, N \rangle = 1$ e $\eta \cdot \eta = 1$. Podemos assumir que N e η têm a mesma direção, de modo que

$$N = x_n \eta,$$

em $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^n$. O operador de Weingarten de Σ^n no sentido hiperbólico é dado por $AX = -\bar{\nabla}_X N$ e, no sentido Euclidiano, por $\mathcal{A}(X) = -\bar{D}_X \eta$. Se $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ é um referencial ortonormal local sobre Σ^n no sentido hiperbólico e que diagonaliza A em um ponto p , então as curvaturas principais de Σ^n em p , no sentido hiperbólico, são dadas por

$$\bar{k}_i = \langle A\bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} N, \bar{e}_i \rangle.$$

Sabemos que (e_1, \dots, e_n) , onde $e_i = \frac{1}{x_n} \bar{e}_i$ para $1 \leq i \leq n$, é um referencial ortonormal no sentido Euclidiano. Com tais notações, temos o seguinte.

Lema 3.5. *Sejam Σ^n uma hipersuperfície orientada de \mathbb{H}^{n+1} e N um campo normal unitário sobre Σ^n , no sentido hiperbólico. Então, a curvatura média de Σ^n com relação a N é dada por*

$$H = x_n h + \eta_n,$$

onde η_n é a última coordenada do campo normal unitário $\eta = \frac{1}{x_n}N$ no sentido Euclidiano e h é a curvatura média de Σ^n , vista como hipersuperfície do espaço Euclidiano.

Demonstração. Sejam $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$ as curvaturas principais de Σ^n vista como hipersuperfície do espaço hiperbólico e k_1, \dots, k_n as curvaturas principais de Σ^n vista como hipersuperfície do espaço Euclidiano, com relação aos vetores normais unitários N e $\eta = \frac{1}{x_n}N$, respectivamente. Nas notações que precedem o enunciado, temos, pelo lema anterior, que, em p ,

$$\begin{aligned} \bar{k}_i \delta_{ij} &= -\langle \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} N, \bar{e}_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} x_n \eta, \bar{e}_j \rangle = -\langle x_n \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} \eta, \bar{e}_j \rangle - \langle \bar{e}_i(x_n) \eta, \bar{e}_j \rangle \\ &= -x_n \left((1/x_n^2) \bar{D}_{\bar{e}_i} \eta \cdot \bar{e}_j + (1/x_n^3) (-\eta(x_n) \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j - \bar{e}_i(x_n) \bar{e}_j \cdot \eta - \bar{e}_j(x_n) \bar{e}_i \cdot \eta) \right) \\ &= x_n (-\bar{D}_{\bar{e}_i} \eta \cdot \bar{e}_j) + \eta(x_n) e_i \cdot e_j \\ &= x_n \mathcal{A} e_i \cdot e_j + \eta(x_n) \delta_{ij} = x_n \mathcal{A} e_i \cdot e_j + \eta_n \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto, (e_1, \dots, e_n) diagonaliza \mathcal{A} em p e, pondo $\mathcal{A}e_i = k_i e_i$ em p , obtemos $\bar{k}_i = k_i x_n + \eta_n$.

Daí,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{k}_i = x_n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \right) + \eta_n = x_n h + \eta_n.$$

□

Considere, agora, o hiperplano $P = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; x_0 = 0\}$. Dados um aberto $U \subset P$ e uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o gráfico horizontal de f no espaço hiperbólico por

$$G(f) = \{(f(x), x); x \in U\}.$$

Seja $\Sigma^n = G(f)$ a hipersuperfície de \mathbb{H}^{n+1} dada pelo gráfico horizontal de f . Se $g : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(t, x) = t - f(x)$, é fácil notar que $\Sigma^n = g^{-1}(0)$. Representando por \bar{D} o gradiente Euclidiano, temos que

$$\eta = \frac{\bar{D}g}{|\bar{D}g|} = \frac{(1, -Df)}{\sqrt{1 + |Df|^2}}$$

é um campo normal unitário sobre Σ^n no sentido Euclidiano, onde Df é o gradiente Euclidiano de f . Agora, dados um ponto $p \in \Sigma^n$ e (e_1, \dots, e_n) base ortonormal de $T_p \Sigma^n$ na métrica Euclidiana que diagonaliza o operador de Weingarten \mathcal{A} de Σ^n (vista como hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1}), e denotando por h a curvatura média Euclidiana de Σ^n , temos que

$$\begin{aligned} nh &= \text{tr}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n -\bar{D}_{e_i} \eta \cdot e_i = -\sum_{i=1}^n \bar{D}_{e_i} \eta \cdot e_i - \bar{D}_\eta \eta \cdot \eta \\ &= -\text{div}(\eta) = \text{div} \left(\frac{(-1, Df)}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = \text{div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right), \end{aligned}$$

onde div representa o divergente Euclidiano. Agora, podemos dar uma expressão para a curvatura média H de Σ^n no sentido hiperbólico. Usando o lema anterior, temos que

$$H = x_n h - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\sqrt{1 + |Df|^2}}$$

e, portanto, H satisfaz a equação diferencial parcial

$$\text{div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = \frac{n}{x_n} \left(H + \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right).$$

Pondo $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $W(f) = \sqrt{1 + |Df|^2}$, temos que

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_i}{W(f)} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ii}W(f) - f_i \frac{\partial}{\partial x_i} W(f)}{W(f)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f_{ii}W(f) - f_i \sum_{j=1}^n \frac{f_j f_{ij}}{W(f)}}{W(f)^2} = \frac{1}{W(f)} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{W(f)^2} \right) f_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que

$$nH = \frac{x_n}{W(f)} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{W(f)^2} \right) f_{ij} - \frac{nf_n}{W(f)}. \quad (3.2)$$

Considere duas hipersuperfícies Σ_1^n e Σ_2^n do espaço hiperbólico $(n+1)$ -dimensional, que são tangentes em um ponto $p \in \Sigma_1^n \cap \Sigma_2^n$ e têm o mesmo vetor normal unitário em p . Podemos escolher coordenadas locais para o espaço hiperbólico de forma que $T_p \Sigma_1^n = T_p \Sigma_2^n$ seja o plano $P = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0 = 0\}$ e o vetor normal seja $(1, 0, \dots, 0)$. Tomemos $U \subset P$ aberto tal que Σ_1^n e Σ_2^n são, em uma vizinhança de p , gráficos horizontais de funções suaves $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f_1 \geq f_2$ em U , diremos que Σ_1^n está acima de Σ_2^n em U . Agora, podemos enunciar o resultado a seguir, conhecido como o princípio da tangência.

Teorema 3.6. *Sejam Σ_1^n e Σ_2^n hipersuperfícies do espaço hiperbólico com curvaturas médias H_1 e H_2 , respectivamente. Se, em uma vizinhança conexa de um ponto de tangência de Σ_1^n e Σ_2^n , no qual ambas têm a mesma orientação, tivermos que Σ_1^n está acima de Σ_2^n e $H_1 \leq H_2$, então Σ_1^n e Σ_2^n coincidem nesta vizinhança.*

Demonstração. Como vimos acima, podemos assumir que $T_p \Sigma_i^n = P = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0 = 0\}$. Se $p = (0, x_1, \dots, x_n)$, então, tomando $b = (x_1, \dots, x_n)$, temos que Σ_1^n e Σ_2^n são, em uma vizinhança de p , gráficos horizontais de funções $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é uma vizinhança de b tal que $f_1(b) = f_2(b) = 0$ e $f_1 \geq f_2$ em U . Sejam $q = (q_1, \dots, q_n)$, $r = (r_{11}, \dots, r_{1n}, r_{21}, \dots, r_{2n}, \dots, r_{nn})$ e

defina $\phi : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(r, q, x) = \frac{x_n}{\sqrt{1+|q|^2}} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{1+|q|^2} \right) r_{ij} - \frac{nq_n}{\sqrt{1+|q|^2}}.$$

Sabemos da equação (3.2) que, tomando $q = q^i = (\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n})$, $r = r^i = (\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_n})$, para $i = 1, 2$, temos que $\phi(r^i, q^i, x) = nH_i$ para $i = 1, 2$. Uma vez que $H_1 \leq H_2$, temos

$$\phi(r^2, q^2, x) - \phi(r^1, q^1, x) \geq 0.$$

Definindo $\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\alpha(t) = \phi(tr^2 + (1-t)r^1, tq^2 + (1-t)q^1, x),$$

segue que $\alpha(0) \leq \alpha(1)$ e, pelo Teorema fundamental do Cálculo,

$$\int_0^1 \alpha'(t) dt = \alpha(1) - \alpha(0) \geq 0. \quad (3.3)$$

Usando a regra da cadeia, derivamos a função α e obtemos

$$\alpha'(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial r_{ij}}(\xi(t))(r_{ij}^2 - r_{ij}^1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial q_i}(\xi(t))(q_i^2 - q_i^1), \quad (3.4)$$

onde $\xi(t) = (tr^2 + (1-t)r^1, tq^2 + (1-t)q^1, x)$. Consideramos o operador diferencial parcial linear de segunda ordem

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $a_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial r_{ij}}(\xi(t)) dt$ e $b_i = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial q_i}(\xi(t)) dt$. Tomando $w = f_2 - f_1$, temos, por (3.3) e (3.4), que

$$Lw = \int_0^1 \alpha'(t) dt \geq 0.$$

Afirmamos que L é um operador localmente uniformemente elíptico. De fato, L é elíptico, já

que $a_{ij} = a_{ji}$ e, tomando $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial r_{ij}} \lambda_i \lambda_j &= \frac{x_n}{\sqrt{1+|q|^2}} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{1+|q|^2} \right) \lambda_i \lambda_j \\
&= \frac{x_n}{(1+|q|^2)^{3/2}} \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij}(1+|q|^2) - q_i q_j) \lambda_i \lambda_j \\
&= \frac{x_n}{(1+|q|^2)^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^n (1+q_1^2 + \dots + q_i^2 + \dots + q_n^2) \lambda_i^2 - 2 \sum_{i<j} q_i q_j \lambda_i \lambda_j \right) \\
&= \frac{x_n}{(1+|q|^2)^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sum_{i \neq j} (q_i \lambda_j)^2 - 2 \sum_{i<j} (q_i \lambda_j)(q_j \lambda_i) \right) \\
&= \frac{x_n}{(1+|q|^2)^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sum_{i<j} (q_i \lambda_j - q_j \lambda_i)^2 \right) > 0,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial r_{ij}}(\xi(t)) \lambda_i \lambda_j dt > 0.$$

Como a_{ij} é contínua, para cada $x_0 \in U$ existem uma vizinhança V de x_0 em U e constantes $a, b > 0$ tais que

$$a \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \leq b$$

para todos $\lambda \in \mathbb{R}^n$ com $|\lambda| = 1$ e $x \in \bar{V}$. Assim,

$$a|\lambda|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \leq b|\lambda|^2,$$

para todos $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $x \in V$ e, portanto, L é localmente uniformemente elíptico. Finalmente, observe que $w = f_2 - f_1 \leq 0$ em U e $w(b) = 0$, de modo que b é um ponto de máximo global de w e $Lw \geq 0$. Supondo U conexo, aplicamos o Corolário 3.1 para concluir que $f_1 = f_2$ em U e, portanto que, as hipersuperfícies Σ_1^n e Σ_2^n coincidem em $f_1(U) = f_2(U)$. Por fim, um fácil argumento de conexidade garante que Σ_1^n e Σ_2^n coincidem na vizinhança do enunciado. \square

Antes do próximo resultado, precisamos conhecer outro tipo de hipersuperfície de \mathbb{H}^{n+1} . Seja \bar{S} uma esfera em \mathbb{R}^{n+1} de dimensão n que corta $\partial \mathbb{H}^{n+1} = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_n = 0\}$ segundo um ângulo α e considere a interseção $S = \bar{S} \cap \mathbb{H}^{n+1}$. Tais hipersuperfícies têm curvatura média $H = \cos \alpha$ (cf. exercício 8.6(e) de [7]) e são chamadas de hiperesferas de \mathbb{H}^{n+1} .

Terminamos esta seção com uma aplicação do princípio da tangência, a qual também consta

em [4]. Dada uma hipersuperfície orientada Σ^n de \mathbb{H}^{n+1} , definimos o ângulo normal θ de Σ^n como uma função contínua $\theta : \Sigma^n \rightarrow [0, \pi]$ dada por

$$\cos \theta = \langle N, e_n \rangle,$$

onde $e_n(x) = (0, \dots, 0, x_n)$ e N é o vetor normal unitário de Σ^n .

Teorema 3.7. *Seja $\Sigma^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, conexa e orientada, contida no domínio interior determinado por uma horoesfera e com curvatura média H satisfazendo $-1 \leq H \leq 1$. Se o ângulo normal θ de Σ^n satisfaz $|\cos \theta| \geq \sup_{\Sigma^n} |H|$, então Σ^n é uma horoesfera.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que Σ^n está contida no domínio interior da horoesfera $L(c) = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^{n+1}; x_n = c\}$, ou seja, $\Sigma^n \subset L(c)^+ = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^{n+1}; x_n \geq c\}$. Seja $H_0 = \sup_{\Sigma^n} |H|$. Se $H_0 = 1$, então $|\cos \theta| \geq 1$, de sorte que $\theta = 0$ e, daí, concluímos facilmente que Σ^n é uma horoesfera. Suponha, pois, $H_0 < 1$. Seja S uma hipersfera de \mathbb{H}^{n+1} contida no domínio exterior de $L(c)$ e com curvatura média H_0 . Como vimos acima $S = \bar{S} \cap \mathbb{H}^{n+1}$, onde \bar{S} é uma esfera de \mathbb{R}^{n+1} de centro $\bar{p} \in \mathbb{H}^{n+1}$ e que corta $\partial \mathbb{H}^{n+1}$. Seja p a projeção do ponto \bar{p} sobre $\partial \mathbb{H}^{n+1}$, se S_λ é a imagem de S por uma homotetia de centro p e razão λ , então o teorema de Liouville (cf. capítulo 8 de [7]) garante que S_λ tem curvatura média H_0 , para qualquer $\lambda > 0$. Fazendo λ variar, podemos tomar $\lambda_0 > 0$ tal que S_{λ_0} tangencia Σ^n num ponto p_0 e é tal que Σ^n está acima de S_{λ_0} numa vizinhança de p_0 , isto é possível, pois Σ^n está situada acima de $L(c)$. Como $H \leq H_0$ (independentemente da orientação escolhida), segue do princípio da tangência, que Σ^n coincide com S_{λ_0} numa vizinhança de p_0 e, daí, concluímos que $\Sigma^n \cap S_{\lambda_0}$ é um conjunto não vazio e aberto em Σ^n . O conjunto $\Sigma^n \cap S_{\lambda_0}$ é também fechado, pois Σ^n e S_{λ_0} também o são, então, pela conexidade e completude de Σ^n , temos que $\Sigma^n = S_{\lambda_0}$, mas isso é um absurdo, uma vez que S_{λ_0} não está acima de qualquer horoesfera. \square

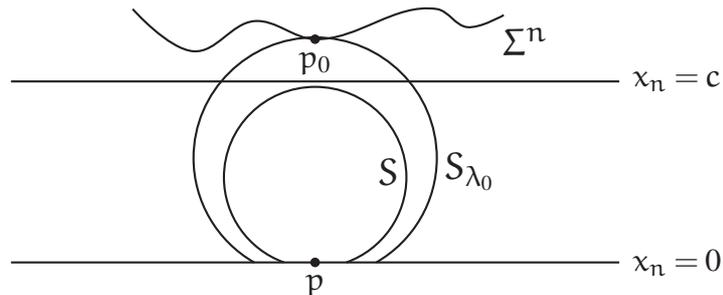


Figura 3: Homotetia de S tangenciando Σ^n no ponto p_0 .

4 HIPERSUPERFÍCIES DE \mathbb{H}^{n+1} COM FUNÇÕES AUXILIARES

LINEARMENTE DEPENDENTES

O objetivo deste capítulo é classificar as hipersuperfícies conexas e completas de $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, cujas funções auxiliares l_α e f_α com respeito a algum vetor tipo luz $\alpha \in \mathbb{L}^{n+2}$ são tais que existe uma constante λ tal que $l_\alpha = \lambda f_\alpha$. Como vimos em (2.5), o campo normal unitário de uma horoesfera L_τ determinada por um vetor tipo luz α é $N(p) = p + \frac{1}{\tau}\alpha$; assim, as funções auxiliares de L_τ satisfazem $f_\alpha = l_\alpha$. Note, também, que uma função auxiliar $l_\alpha = \langle \psi, \alpha \rangle$ nunca se anula, uma vez que, para $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ e $v \in \mathbb{L}^{n+2}$, $\langle x, v \rangle = 0$ implica v tipo espaço. Assim, se $l_\alpha = \lambda f_\alpha$, então $\lambda \neq 0$. Agora, podemos enunciar o seguinte teorema de [4].

Teorema 4.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa e completa, imersa em uma faixa de \mathbb{H}^{n+1} determinada por um vetor tipo-luz $\alpha \in \mathbb{L}^{n+2}$. Suponha que $l_\alpha = \lambda f_\alpha$, para alguma função diferenciável $\lambda : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$, e que a curvatura média H de Σ^n satisfaça $\frac{H}{\lambda} \geq -1$. Suponha também que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) para $n = 2$, a curvatura Gaussiana de Σ^2 é não negativa;
- (b) para $n \geq 3$, $|\alpha^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$.

Então, Σ^n é uma horoesfera.

Demonstração. Na prova do Lema 3.2, vimos que

$$\Delta l_\alpha^2 = n(f_\alpha + Hl_\alpha)^2 + n(l_\alpha^2 - f_\alpha^2) + n(1 - H^2)l_\alpha^2 + 2|\nabla l_\alpha|^2;$$

como $f_\alpha = \frac{1}{\lambda}l_\alpha$, temos

$$\Delta l_\alpha^2 = 2n \left(\frac{H}{\lambda} + 1 \right) l_\alpha^2 + 2|\nabla l_\alpha|^2. \quad (4.1)$$

Uma vez que Σ^n está contida em uma faixa de \mathbb{H}^{n+1} determinada por α , temos $\tau_1 \leq l_\alpha \leq \tau_2$, para certos τ_1, τ_2 positivos. Assim, l_α^2 é uma função subharmônica e limitada sobre Σ^n . No

caso $n = 2$, usamos o Lema 3.1 e a Proposição 3.1 para concluir que l_α é constante; no caso $n \geq 3$, $|\nabla l_\alpha| = |\alpha^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$ e, então, $|\nabla l_\alpha^2| = 2|l_\alpha||\nabla l_\alpha| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$; daí, pelo Lema 3.3, l_α^2 é harmônica e, por (4.1), devemos ter $|\nabla l_\alpha| = 0$, de sorte que l_α é constante. Agora, fazendo $l_\alpha = \tau$, com $\tau > 0$, obtemos $\Sigma^n \subset L_\tau$; mas, como Σ^n é completa, segue que $\Sigma^n = L_\tau$. \square

Agora, vamos exibir dois exemplos de hipersuperfícies com curvatura média constante que satisfazem $l_\alpha = \lambda f_\alpha$, para uma constante λ .

Exemplo 4.1. *Sejam α um vetor tipo luz e c um vetor tipo espaço de \mathbb{L}^{n+2} , tais que $\langle c, \alpha \rangle = 0$, e $F: \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \langle x, c \rangle.$$

Para $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere a hipersuperfície $\Sigma^n = F^{-1}(b)$ de \mathbb{H}^{n+1} . Veja que

$$\langle \bar{\nabla} F, X \rangle = X \langle x, c \rangle = \langle X, \hat{c} \rangle,$$

onde \hat{c} é a componente tangente de c em \mathbb{H}^{n+1} . Então, $\bar{\nabla} F = \hat{c}$, com $\hat{c} = c + \langle c, x \rangle x = c + bx$, para $x \in \Sigma^n$. O campo normal unitário de Σ^n em \mathbb{H}^{n+1} é dado por

$$N(x) = \frac{\bar{\nabla} F}{|\bar{\nabla} F|} = \frac{c + bx}{\sqrt{\langle c, c \rangle + b^2}},$$

de modo que o operador de Weingarten A de Σ^n é dado por

$$AX = -\frac{b}{\sqrt{\langle c, c \rangle + b^2}} X.$$

Portanto, Σ^n é totalmente umbílica com curvatura média $H = -\frac{b}{\sqrt{\langle c, c \rangle + b^2}}$. Agora, note que

$$\langle N, \alpha \rangle = \frac{\langle c, \alpha \rangle + b \langle x, \alpha \rangle}{\sqrt{\langle c, c \rangle + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{\langle c, c \rangle + b^2}} \langle x, \alpha \rangle$$

ou, ainda, $l_\alpha = \frac{\sqrt{\langle c, c \rangle + b^2}}{b} f_\alpha$.

As hipersuperfícies de \mathbb{H}^{n+1} da forma $\Sigma^n = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle x, c \rangle = b\}$, onde c é um vetor tipo espaço e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, são as hiperesferas do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$.

Exemplo 4.2. *Considere um inteiro k satisfazendo $0 \leq k < n$ e defina a função diferenciável $F: \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_{n+2}) = x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2.$$

Para $\rho > 0$, seja $\Sigma^n = F^{-1}(\rho^2)$. Observe que, dado um ponto $x = (x_1, \dots, x_{k+1}, \dots, x_{n+2})$ de Σ^n , temos

$$\begin{aligned} x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 &= \rho^2 \\ x_{k+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 &= -(1 + \rho^2) \end{aligned}$$

portanto, $\Sigma^n = \mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1 + \rho^2})$, de forma que Σ^n é uma hipersuperfície conexa, completa e orientável de \mathbb{H}^{n+1} . Vejamos que Σ^n tem curvatura média constante. Para tanto, se $X = (X_1, \dots, X_{n+2})$ é um campo diferenciável sobre \mathbb{H}^{n+1} , então

$$X(F) = 2x_1 X_1 + \dots + 2x_{k+1} X_{k+1};$$

logo,

$$\langle \bar{\nabla} F, X \rangle = X(F) = \langle (2x_1, \dots, 2x_{k+1}, 0, \dots, 0), X \rangle = \langle 2Z, X \rangle,$$

onde $Z = (x_1, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0)$. Tem-se que $Z = \hat{Z} - \langle Z, x \rangle x$, onde \hat{Z} é a parte tangente de Z sobre \mathbb{H}^{n+1} ; então

$$\langle \bar{\nabla} F, X \rangle = \langle 2Z, X \rangle = \langle 2\hat{Z}, X \rangle = \langle 2(Z + \langle Z, x \rangle x), X \rangle = \langle 2(Z + F(x)x), X \rangle,$$

de modo que

$$\bar{\nabla} F(x) = 2(Z(x) + F(x)x).$$

Dessa forma, se $x \in \Sigma^n = F^{-1}(\rho^2)$, então

$$\bar{\nabla} F(x) = 2(Z(x) + \rho^2 x)$$

e, daí,

$$\langle \bar{\nabla} F(x), \bar{\nabla} F(x) \rangle = 4(\langle Z, Z \rangle + 2\langle Z, x \rangle \rho^2 + \rho^4 \langle x, x \rangle) = 4(\rho^2 + 2\rho^4 - \rho^4) = 4\rho^2(1 + \rho^2).$$

Segue que

$$N(x) = \frac{\bar{\nabla} F}{|\bar{\nabla} F|}(x) = \frac{1}{\rho\sqrt{1 + \rho^2}}(Z(x) + \rho^2 x)$$

é um campo normal unitário sobre Σ^n . Se $X = (X_1, X_2)$ é um campo tangente sobre Σ^n , com X_1 e X_2 tangentes a $\mathbb{S}^k(\rho)$ e $\mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1 + \rho^2})$, respectivamente, seja A o operador de Weingarten

de Σ^n . Então,

$$\begin{aligned} AX &= -\bar{\nabla}_X N = -\nabla_X^0 N = -\frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} \nabla_X^0 (Z(x) + \rho^2 x) \\ &= -\frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} (\nabla_X^0 Z(x) + \nabla_X^0 \rho^2 x) = -\frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} \left((X_1, 0) + \rho^2 (X_1, X_2) \right) \\ &= -\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho} (X_1, 0) - \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} (0, X_2). \end{aligned}$$

Portanto, as curvaturas principais de Σ^n são

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = -\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho} \text{ e } \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = -\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}$$

e, assim, a curvatura média de Σ^n é constante. Além disso, tomando o vetor tipo-luz $\alpha = (0, \dots, 0, 1, -1) \in \mathbb{L}^{n+2}$, verifica-se que

$$f_\alpha(x) = \langle N(x), \alpha \rangle = \frac{\rho^2}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} \langle x, \alpha \rangle = \frac{\rho^2}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} l_\alpha(x),$$

ou seja,

$$l_\alpha = \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho} f_\alpha.$$

As hipersuperfícies $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2})$ de \mathbb{H}^{n+1} são chamadas cilindros hiperbólicos.

Mostraremos que os cilindros hiperbólicos, as hiperesferas do Exemplo 4.1 e as horoesferas são as únicas hipersuperfícies conexas e completas de \mathbb{H}^{n+1} , com curvatura média constante e satisfazendo $l_\alpha = \lambda f_\alpha$, para um vetor tipo luz α . Vejamos, antes, o seguinte teorema auxiliar importante.

Teorema 4.2. *Seja Σ^n uma hipersuperfície conexa, completa e orientada do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, cujas curvaturas principais são constantes. Então, ou Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica ou Σ^n é isométrica a um cilindro hiperbólico.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que Σ tem no máximo duas curvaturas principais distintas. Suponhamos que Σ tem pelo menos duas curvaturas principais distintas, e sejam A o operador de Weingarten de Σ e $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ as curvaturas principais de Σ . Como os autovalores de A são constantes, um resultado de [14] garante que podemos tomar um referencial ortonormal local (e_1, \dots, e_n) em $U \subset \Sigma$, com U conexo, que diagonaliza A em cada ponto de U , com $Ae_i = \lambda_i e_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Agora, seguiremos algumas ideias e construções de [16]. Escreva $\nabla_{e_i} e_j = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k e_k$ e seja $c_{ijk} = (\lambda_j - \lambda_k) \Gamma_{ij}^k$. Vamos mostrar que $c_{ijk} = c_{ikj} = c_{jik}$. Como $\langle e_j, e_k \rangle$ é constante, temos

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = -\langle e_j, \nabla_{e_i} e_k \rangle = -\Gamma_{ik}^j; \quad (4.2)$$

daí, segue que $c_{ijk} = c_{ikj}$. Agora, fazendo uso do fato de A ser autoadjunto e da equação de Codazzi (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \lambda_k(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) &= \lambda_k \langle [e_i, e_j], e_k \rangle = \langle [e_i, e_j], A e_k \rangle = \langle A[e_i, e_j], e_k \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} A e_j - \nabla_{e_j} A e_i, e_k \rangle = \langle \lambda_j \nabla_{e_i} e_j - \lambda_i \nabla_{e_j} e_i, e_k \rangle = \lambda_j \Gamma_{ij}^k - \lambda_i \Gamma_{ji}^k. \end{aligned}$$

Dessa forma, $c_{ijk} = (\lambda_j - \lambda_k) \Gamma_{ij}^k = (\lambda_i - \lambda_k) \Gamma_{ji}^k = c_{jik}$. A partir de $c_{ijk} = c_{ikj} = c_{jik}$, obtemos $c_{ijk} = c_{kij} = c_{jik}$ e, daí

$$(\lambda_j - \lambda_k) \Gamma_{ij}^k = (\lambda_i - \lambda_j) \Gamma_{ki}^j = (\lambda_i - \lambda_k) \Gamma_{ji}^k. \quad (4.3)$$

Agora, introduzimos uma relação de equivalência no conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$, relacionando dois índices i e j , se $\lambda_i = \lambda_j$. Denotamos a classe de equivalência de um índice i , por $[i] = \{k \in \{1, \dots, n\}; \lambda_k = \lambda_i\}$. Considere $[i, j] = [i] \cup [j]$. Fazendo $[i] \neq [j]$ e $k \in [i, j]$ em (4.3), segue que

$$\Gamma_{ks}^t = 0, \quad \text{para } s \in [i], t \in [j] \text{ e } k \in [i, j] \quad (4.4)$$

Tomando i e j tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$, vamos calcular $\langle R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle$. Usando (4.4), obtemos $\Gamma_{jj}^k = 0$, se $k \notin [j]$, e da mesma forma, $\Gamma_{ik}^i = -\Gamma_{ii}^k = 0$, se $k \notin [i]$. Então,

$$\langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_j, e_i \rangle = \left\langle \sum_k e_i (\Gamma_{jj}^k) e_k + \Gamma_{jj}^k \nabla_{e_i} e_k, e_i \right\rangle = e_i (\Gamma_{jj}^i) + \sum_k \Gamma_{jj}^k \Gamma_{ik}^i = 0,$$

Uma vez que $i \notin [j]$ e, para $1 \leq k \leq n$, se $k \notin [j]$, então $\Gamma_{jj}^k = 0$, e se $k \in [j]$, então $k \notin [i]$ e, daí, $\Gamma_{ik}^i = 0$. Agora, usando (4.3) para $[k] = [i]$ e $[i] \neq [j]$, temos que $\Gamma_{ij}^k = 0$ e, então temos

$$[e_i, e_j] = \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = \sum_{k \notin [i]} \Gamma_{ij}^k e_k - \sum_{k \notin [j]} \Gamma_{ji}^k e_k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle &= \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_j - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{[e_i, e_j]} e_j, e_i \rangle \\
&= -\langle \sum_{k \notin [i]} e_j (\Gamma_{ij}^k) e_k + \Gamma_{ij}^k \nabla_{e_j} e_k, e_i \rangle - \langle \sum_{k \notin [i]} \Gamma_{ij}^k \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle + \langle \sum_{k \notin [j]} \Gamma_{ji}^k \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \\
&= -\sum_{k \notin [i]} \Gamma_{ij}^k \langle \nabla_{e_j} e_k, e_i \rangle - \sum_{k \notin [i]} \Gamma_{ij}^k \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle + \sum_{k \notin [j]} \Gamma_{ji}^k \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \\
&= -\sum_{k \notin [i]} \Gamma_{ij}^k \Gamma_{jk}^i - \sum_{k \notin [i]} \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kj}^i + \sum_{k \notin [j]} \Gamma_{ji}^k \Gamma_{kj}^i.
\end{aligned}$$

Agora, veja que se $k \in [j]$, então (4.4) nos fornece $\Gamma_{ji}^k = 0$ e, daí $\Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{ji}^k = 0$; também por (4.4) temos $\Gamma_{kj}^i = 0$, se $k \in [i, j]$, de forma que

$$\begin{aligned}
\langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle &= \sum_{k \notin [i, j]} (-\Gamma_{ij}^k \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{ji}^k \Gamma_{kj}^i) \\
&= \sum_{k \notin [i, j]} \left(-\frac{c_{ijk}^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_k - \lambda_i)} - \frac{c_{ijk}^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_i)} + \frac{c_{ijk}^2}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_i)} \right) \\
&= \sum_{k \notin [i, j]} \frac{2c_{ijk}^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a equação de Gauss (2.3), temos que

$$\langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle = -1 + \lambda_j \lambda_i.$$

Então

$$-1 + \lambda_j \lambda_i = \sum_{k \notin [i, j]} \frac{2c_{ijk}^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)}. \quad (4.5)$$

Suponha que Σ tem mais de duas curvaturas principais distintas. Trocando o campo normal unitário N por $-N$, se necessário, podemos supor que $\lambda_1 < 0$. Suponha que as curvaturas principais de Σ são $\lambda_1 = \lambda_{j_1} < \lambda_{j_2} < \dots < \lambda_{j_m} = \lambda_n$. Argumentando por indução, suponha que $\lambda_{j_r} < 0$, para $r \in \{1, \dots, m-1\}$. Por (4.5), temos que $-1 + \lambda_{j_r} \lambda_{j_{r+1}} \geq 0$; assim, $\lambda_{j_{r+1}} < 0$ e, portanto, $\lambda_n < 0$. Por outro lado, também por (4.5), $-1 + \lambda_1 \lambda_n \leq 0$. Então, temos $-1 + \lambda_1 \lambda_n \leq 0 \leq -1 + \lambda_{j_{m-1}} \lambda_n$ e, daí, $\lambda_1 \geq \lambda_{j_{m-1}}$, uma contradição. Então, Σ tem no máximo duas curvaturas principais distintas.

Suponha que Σ tem duas curvaturas principais distintas λ, μ , com multiplicidades k e $n-k$, respectivamente. Para facilitar a notação, convecionamos que $i \in \{1, \dots, k\}$ e $r \in \{k+1, \dots, n\}$, de forma que $Ae_i = \lambda e_i$ e $Ae_r = \mu e_r$. Note que $[i, r] = \{1, \dots, n\}$; assim, $\langle R(e_i, e_r)e_r, e_i \rangle = 0$, pelos cálculos da página anterior e, então temos $-1 + \lambda \mu = 0$ ou, ainda, $\lambda \mu = 1$. Vamos supor

que $\lambda > \mu > 0$, de maneira que $\lambda^2 > 1$ e $\mu^2 < 1$. Denotando por x o campo posição e por N o campo normal unitário de Σ , definimos os campos

$$y = x + \lambda N \quad e \quad z = x + \mu N$$

ao longo de Σ . Se $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, fazendo uso da fórmula de Gauss (2.6), obtemos

$$\nabla_X^0 e_i = \nabla_X e_i + \langle AX, e_i \rangle N + \langle X, e_i \rangle x = \nabla_X e_i + \langle X, e_i \rangle y;$$

temos também, por (4.4), que $\langle \nabla_{e_s} e_i, e_r \rangle = \Gamma_{si}^r = 0$, para $1 \leq s \leq n$, logo $\langle \nabla_X e_i, e_r \rangle = 0$. Segue destes fatos que

$$\nabla_X^0 e_i = \langle X, e_i \rangle y + \sum_{j=1}^k a_{ij} e_j, \quad (4.6)$$

onde $a_{ij} = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle$ e, assim, $a_{ii} = 0$. De maneira análoga, obtemos

$$\nabla_X^0 e_r = \langle X, e_r \rangle z + \sum_{s=k+1}^n a_{rs} e_s, \quad (4.7)$$

onde $a_{rs} = \langle \nabla_X e_r, e_s \rangle$ e, assim, $a_{rr} = 0$.

Queremos provar que $\{e_1, \dots, e_k, y\}$ gera um subespaço $(k+1)$ -dimensional fixo de \mathbb{L}^{n+2} . Para isto, considere, para cada $x \in U$, as 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_y$ em \mathbb{L}^{n+2} dadas por $\omega_i(V) = \langle V, e_i \rangle$ e $\omega_y(V) = \langle V, y \rangle$. Agora, defina, para cada $x \in U$, $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_y \in \Lambda^{k+1}(\mathbb{L}^{n+2})$. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, vamos mostrar que $\nabla_X^0 \omega = 0$. Denotando por ω_ξ a 1-forma dada por $\omega_\xi(V) = \langle \xi, V \rangle$, não é difícil verificar que $\nabla_X^0(\omega_\xi) = \omega_{\nabla_X^0 \xi}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 \omega &= \sum_{j=1}^k (\omega_1 \wedge \dots \wedge \nabla_X^0 \omega_j \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_y) + \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \nabla_X^0 \omega_y \\ &= \sum_{s=1}^k (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{\nabla_X^0 e_j} \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_y) + \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_{\nabla_X^0 y}. \end{aligned}$$

Segue de (4.6) que $\omega_{\nabla_X^0 e_i} = \langle X, e_i \rangle \omega_y + \sum_{j=1}^k a_{ij} \omega_j$, com $a_{ii} = 0$. Portanto,

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{\nabla_X^0 e_i} \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_y = 0.$$

Para a última parcela, veja que $\nabla_X^0 y = \nabla_X^0(x + \lambda N) = X + \lambda \nabla_X^0 N = X - \lambda AX$, de forma que

$$\langle \nabla_X^0 y, e_r \rangle = e_r - \lambda A e_r = (1 - \lambda \mu) e_r = 0,$$

$$\langle \nabla_X^0 y, y \rangle = \frac{1}{2} X \langle y, y \rangle = 0 \quad e$$

$$\langle \nabla_X^0 y, z \rangle = \langle X - \lambda AX, x + \mu N \rangle = 0.$$

Portanto, segue que $\omega_{\nabla_X^0 y} = \sum_{j=1}^k \langle \nabla_X^0 y, e_j \rangle \omega_j$, logo

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_{\nabla_X^0 y} = 0,$$

e então, $\nabla_X^0 \omega = 0$. Dado $q \in U$ e $(e_1)_q, \dots, (e_k)_q, y_q$ vetores de \mathbb{L}^{n+2} , consideramos os campos $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}$ de \mathbb{L}^{n+2} , onde cada \bar{e}_i é constante igual a $(e_i)_q$, para $1 \leq i \leq k$, e \bar{y} é constante igual a y_q . Tomando a função $F(p) = \omega_p(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y})$ definida em U e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned} X(F) &= X(\omega(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y})) = X(\omega(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y})) - \sum_{i=1}^k \omega(\bar{e}_1, \dots, \nabla_X^0 \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_k) \\ &= (\nabla_X^0 \omega)(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}) = 0. \end{aligned}$$

Segue que F é constante e, daí $\omega_p((e_1)_q, \dots, (e_k)_q, \frac{y_q}{|y_q|}) = \omega_q((e_1)_q, \dots, (e_k)_q, \frac{y_q}{|y_q|}) = 1$, para todo $p \in U$. O Lema 4.1, ao final desta demonstração, garante que $\{(e_1)_p, \dots, (e_k)_p, \frac{y_p}{|y_p|}\}$ e $\{(e_1)_q, \dots, (e_k)_q, \frac{y_q}{|y_q|}\}$ geram o mesmo subespaço de \mathbb{L}^{n+2} .

Sejam W_1 o subespaço fixo de \mathbb{L}^{n+2} gerado por $\{e_1, \dots, e_k, y\}$ e (de maneira análoga) W_2 o subespaço fixo de \mathbb{L}^{n+2} gerado por $\{e_{k+1}, \dots, e_n, z\}$, de sorte que $\mathbb{L}^{n+2} = W_1 \oplus W_2$. Observe ainda que, como Σ é conexa, W_1 e W_2 independem do aberto $U \subset \Sigma$ escolhido, bem como do referencial (e_1, \dots, e_n) . Logo, W_1 e W_2 só dependem de Σ . Veja que $\langle y, y \rangle = -1 + \lambda^2 > 0$ e $\langle z, z \rangle = -1 + \mu^2 < 0$, logo W_1 é um subespaço de índice 0 e W_2 é um subespaço de índice 1. Portanto, podemos fazer as identificações $W_1 \approx \mathbb{R}^{k+1}$ e $W_2 \approx \mathbb{L}^{n-k+1}$. Considere, agora, a aplicação $\psi : \Sigma \longrightarrow W_1 \times W_2 \approx \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{L}^{n-k+1}$, dada por

$$\psi = (c_1 y, c_2 z),$$

onde $c_1 = \frac{1}{1-\lambda^2}$ e $c_2 = \frac{1}{1-\mu^2}$. Vamos mostrar que ψ é uma imersão isométrica. Como $dy = d(x + \lambda N) = I - \lambda A$ e $dz = d(x + \mu N) = I - \mu A$, com $\lambda \neq \mu$, a diferencial $d\psi = c_1 dy + c_2 dz$ é injetiva. Tomando $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, podemos escrever $X = X_1 + X_2$, onde $(I - \mu A)X_1 = 0$ e $(I - \lambda A)X_2 = 0$, então

$$\begin{aligned} d\psi(X) &= (c_1 dy(X), c_2 dz(X)) = (c_1(X - \lambda AX), c_2(X - \mu AX)) \\ &= (c_1(X_1 - \lambda AX_1), c_2(X_2 - \mu AX_2)) = (c_1(1 - \lambda^2)X_1, c_2(1 - \mu^2)X_2) \\ &= (X_1, X_2), \end{aligned}$$

de modo que $|d\psi(X)|^2 = |X_1|^2 + |X_2|^2 = |X|^2$. Como y está no subespaço $W_1 \approx \mathbb{R}^{k+1}$

e $\langle c_1 y, c_1 y \rangle = \frac{1}{\lambda^2 - 1}$, temos que $c_1 y \in \mathbb{S}^k(\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 1}}) \subset W_1$ e, de forma análoga, $c_2 z \in \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{\frac{1}{1 - \mu^2}}) \subset W_2 \approx \mathbb{L}^{n-k+1}$. Portanto, Σ é isométrica a uma subvariedade aberta do cilindro hiperbólico $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1 + \rho^2})$, onde $\rho = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 1}}$. Mas, como Σ é completa, segue que Σ é isométrica a este cilindro hiperbólico. \square

Na demonstração do teorema anterior, usamos o resultado auxiliar a seguir.

Lema 4.1. *sejam W um espaço vetorial real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (e_1, \dots, e_m) uma base ortonormal de W e ω_i o funcional linear dual de e_i em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja (e'_1, \dots, e'_m) outra base ortonormal de W , se $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(e'_1, \dots, e'_m) = 1$, então os conjuntos $\{e_1, \dots, e_l\}$ e $\{e'_1, \dots, e'_l\}$ geram o mesmo subespaço de W , para $1 \leq l \leq m$ fixado.*

Demonstração. Seja $e'_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} e_i$, para $1 \leq j \leq m$. Então, $\alpha_{ij} = \omega_i(e'_j)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_{ij}^2 = 1$ e, pela desigualdade de Hadamard (veja [9]),

$$\begin{aligned} 1 &= (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(e'_1, \dots, e'_l) = \det(\omega_i(e'_j))_{1 \leq i, j \leq l} = \det(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq l} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^l \alpha_{i1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdots \left(\sum_{i=1}^l \alpha_{il}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{i1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdots \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{il}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1, \end{aligned}$$

de forma que $\alpha_{ij} = 0$, $\forall l \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$. Portanto, $e'_j = \sum_{i=1}^l \alpha_{ij} e_i$, para $1 \leq j \leq l$, de sorte que $\{e'_1, \dots, e'_l\}$ gera o mesmo subespaço que $\{e_1, \dots, e_l\}$. \square

O resultado a seguir também consta de [4].

Teorema 4.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, completa e orientada de \mathbb{H}^{n+1} com curvatura média constante H . Se $\iota_a = \lambda f_a$, para algum vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, então ocorre um dos casos abaixo:*

- i.* Σ^n é isométrica a um cilindro hiperbólico $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1 + \rho^2})$.
- ii.* Σ^n é totalmente umbílica, com $|H| = \frac{1}{|\lambda|} \leq 1$. Quando $|H| = 1$, Σ^n é uma horoesfera e, quando $|H| < 1$, Σ^n é uma hiperesfera.

Demonstração. Uma vez que $\iota_a = \lambda f_a$ e ι_a nunca se anula, temos $\lambda \neq 0$. Veja que $\Delta \iota_a = \lambda \Delta f_a$. Usando a Proposição 2.8 com $r = 0$, temos que $S_1 f_a + n \iota_a = -\lambda(S_1^2 - 2S_2) f_a - \lambda S_1 \iota_a$ e, daí,

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{\lambda}{2} S_1 + \frac{1}{2\lambda} S_1 + \frac{n}{2}.$$

Como λ e $S_1 = nH$ são constantes, segue que S_2 é constante. Suponha, por hipótese de indução que para algum $1 \leq r < n$, temos S_j constante, para $1 \leq j \leq r$. Uma vez que $L_{r-1}l_a = \lambda L_{r-1}f_a$, usando novamente a Proposição 2.8, temos que

$$S_{r+1} = \frac{r}{(r+1)\lambda}S_r + \frac{n-r+1}{r+1}S_{r-1} + \frac{1}{r+1}S_1S_r + \frac{r\lambda}{r+1}S_r.$$

Então, S_{r+1} é constante e, portanto, S_r é constante, para $1 \leq r \leq n$. Dados pontos $p, q \in \Sigma^n$, temos que

$$\det(tI_p - A_p) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k(p) t^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k(q) t^{n-k} = \det(tI_q - A_q)$$

e, daí, os polinômios característicos de A_p e A_q são os mesmos. Portanto, as curvaturas principais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são constantes em Σ^n . No teorema anterior, vimos que as hipersuperfícies conexas, completas e orientadas de \mathbb{H}^{n+1} com as curvaturas principais constantes são os cilindros hiperbólicos e as hipersuperfícies totalmente umbílicas. No caso em que Σ^n é totalmente umbílica, vamos mostrar que $H = -\frac{1}{\lambda}$. Por contradição, suponha $H \neq -\frac{1}{\lambda}$. Como $\langle \psi, a \rangle = \lambda \langle N, a \rangle$, temos

$$\langle \psi - \lambda N, a \rangle = 0.$$

Assim,

$$0 = X \langle \psi - \lambda N, a \rangle = \langle \nabla_X^0(\psi - \lambda N), a \rangle = \langle (1 + \lambda H)X, a^\top \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n).$$

Como $1 + \lambda H \neq 0$, concluímos que $\nabla l_a = a^\top = 0$ em Σ^n e, portanto, l_a é constante em Σ^n , de sorte que Σ^n é uma horoesfera. No entanto, tomando o campo normal unitário para uma horoesfera como em (2.5), tem-se que $H = -1$ e $l_a = f_a$; portanto, para uma horoesfera sempre ocorre que $H = -\frac{1}{\lambda}$, o que é uma contradição. Então, se Σ^n é totalmente umbílica, segue que $H = -\frac{1}{\lambda}$ e, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$,

$$\nabla_X^0(\psi - \lambda N) = (1 + \lambda H)X = 0.$$

Assim, $\psi - \lambda N = c$ é constante sobre Σ^n . Como $\langle c, a \rangle = 0$ e a é um vetor tipo-luz, ou c é um vetor tipo-espaço ou $c = \tau a$, para algum $\tau \neq 0$. Veja que $\langle \psi(x), c \rangle = -1$, para todo $x \in \Sigma^n$. Então,

$$\psi(\Sigma^n) \subset \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle x, c \rangle = -1\}.$$

Segue daí e do Exemplo 4.1 que, quando c é tipo-espaço, Σ^n é uma hiperesfera. Por outro lado,

quando $c = \tau a$, temos que

$$\Sigma^n = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle x, \tau a \rangle = -1\} = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle x, a \rangle = -\frac{1}{\tau}\},$$

é a horoesfera $L_{\frac{1}{|\tau|}}$, pois se $\tau > 0$, então $a_{n+2} > 0$ e, se $\tau < 0$, então $a_{n+2} < 0$. Como $\langle c, c \rangle = -1 + \lambda^2 \geq 0$, temos $H^2 \leq 1$. Portanto, se $|H| = 1$, isto é, $\langle c, c \rangle = -1 + \lambda^2 = 0$, então Σ^n é uma horoesfera e, se $|H| < 1$, temos que Σ^n é uma hiperesfera. \square

REFERÊNCIAS

- [1] AKUTAGAWA, K. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. **Mathematische Zeitschrift**, v. 196, p. 13-19, 1987.
- [2] ALEDO, J. **Hipersuperfícies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio de de Sitter**. 1998. 107 f. Tesina de Licenciatura – Universidade de Murcia, 1998.
- [3] ALIAS, L. J.; DAJCZER, M. Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 81, p. 653-663, 2006.
- [4] AQUINO, C. P.; DE LIMA, H. F. On the geometry of horospheres. **Commentarii Mathematici Helvetici**, 2013. (A ser publicado).
- [5] AQUINO, C. P.; DE LIMA, H. F. On the Gauss map of complete CMC hypersurfaces in the hyperbolic space. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 386, p. 862-869, 2012.
- [6] BARBOSA, J. L. M.; SÁ EARP, R. **Geometric Methods and Nonlinear Analysis in Hiperbolic Space**. Minas Gerais, UFMG, 1998. (X Escola de Geometria Diferencial).
- [7] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides).
- [8] HUBER, A. On subharmonic functions and differential geometry in the large. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 32, p. 13-72, 1957.
- [9] LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v.2 (Projeto Euclides).
- [10] LÓPEZ, R.; MONTIEL, S. Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space. **Calc. Var.**, v. 8, p. 177-190, 1999.
- [11] MONTIEL, S. Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces. **J. of the Math. Soc. of Japan**, v. 55, p. 915-938, 2003.
- [12] MUNIZ NETO, A. C. **Notas de aula**.
- [13] MUNIZ NETO, A. C. **Sobre hipersuperfícies em espaços de curvatura seccional constante**. 2004. 67f. Tese (Doutorado em Matemática) – Centro de Ciências – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2004.
- [14] NOMIZU, K. Characteristic roots and vectors of a differentiable family of symmetric matrices. **Linear and Multilinear Algebra**, v.1, p. 159-162, 1973.

- [15] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.** Academic Press, Londres, 1983.
- [16] OTSUKI, T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature. **American Journal of Mathematics**, v. 92, p. 145-173, 1970.
- [17] YAU, S. T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 25, p. 659-670, 1976.
- [18] YAU, S. T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. **Comm. Pure and Appl. Math.**, v. 28, p. 487-507, 1975.