



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
**EM REDE NACIONAL**

**JUAREZ ALVES BARBOSA NETO**

**DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES  $2 \times 2$  E RECONHECIMENTO DE CÔNICAS**

.

**FORTALEZA**

**2013**

JUAREZ ALVES BARBOSA NETO

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES 2X2 E RECONHECIMENTO DE CÔNICAS.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

B2id      Barbosa Neto, Juarez Alves  
Diagonalização de matrizes  $2 \times 2$  e reconhecimento de cônicas / Juarez Alves Barbosa Neto. – 2013.  
28 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Geometria. 2. Software educacional. 3. Ensino médio. I. Título.

---

CDD 516


JUAREZ ALVES BARBOSA NETO


DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES  $2 \times 2$  E RECONHECIMENTO DE CÔNICAS

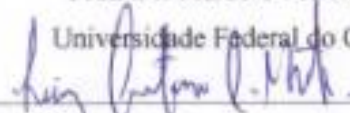
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 23 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Luiz Antonio Caetano Monte  
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

À minha esposa, Jaqueline.

## AGRADECIMENTOS

À DEUS!

À minha esposa, Jaqueline por ter compreensão, e me dar motivação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo por confiar no meu trabalho.

Aos professores Dr. Marcelo Ferreira de Melo, Dr. José Afonso de Oliveira, Dr. José Othon Dantas Lopes, Dr. José Robério Rogério, Dr. Cleon da Silva Barroso, Dr. José Fábio Bezerra Montenegro e Dr. Michel Pinho Rebouças, por todas as aulas ministradas.

Aos meus colegas do curso de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC) por todos os sábados de conhecimento, diversão e companheirismo.

Ao colega Roberto Rodrigues Silva, pela ajuda no TCC.

Aos idealizadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura oferecida.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas de trabalho que me incentivaram.

Enfim a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste sonho.

## RESUMO

Este trabalho trata do reconhecimento de CÔNICAS utilizando o método de diagonalização de matrizes  $2 \times 2$ . No início é apresentada a definição de cônicas, as equações padrões seguidas de seus respectivos nomes e representações geométricas. Seguem-se então as ideias de autovalores e autovetores de uma transformação linear que servem de base para a diagonalização de matrizes. Logo após são discutidas a independência linear de autovetores bem como suas propriedades de formarem uma base de um espaço vetorial. A condição para que toda matriz quadrada seja diagonalizável é apresentada em seguida, bem como as particularidades de uma matriz simétrica. A demonstração de que toda matriz simétrica  $2 \times 2$  é diagonalizável é feita a partir de uma abordagem matricial, elegante e elementar. O reconhecimento de cônicas é feito a partir de cálculos básicos, utilizando alguns conteúdos amplamente explorados no Ensino Médio tais como: matrizes, determinantes, sistemas lineares e equações algébricas. No final é apresentada uma forma de ensinar cônicas na escola utilizando o software educacional Winplot.

**Palavras-chave:** Cônicas, Diagonalização, Matrizes, Equações, Software Educacional.

## ABSTRACT

This paper deals with the recognition of TAPER using the method of matrix diagonalization  $2 \times 2$ . At first, it shows the definition of conics, standard equations followed by their names and geometric representations. Then follows the ideas of eigenvalues and eigenvectors of a linear transformation that are the basis for the diagonalization of matrices. Immediately after that, the linear independence eigenvector is discussed, as well as its properties of forming a basis of a vector space. The condition for any square matrix to be diagonalizable is shown below, as well as the particulars of a symmetric matrix. The demonstration that all  $2 \times 2$  symmetric matrix is diagonalizable is made from a matrix, elegant and elemental approach. The recognition of conics is made from basic calculations using some content widely exploited in high school such as matrices, determinants, linear systems and algebraic equations. At the end it is presented a way of teaching conical school using educational software

Winplot.

**Keywords:** Conical, Diagonalization, Matrices, Equations, Educational Software.



## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2. CÔNICAS.....</b>	<b>10</b>
<b>3. AUTOVALORES E AUTOVETORES.....</b>	<b>13</b>
<b>4. DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES.....</b>	<b>15</b>
<b>5. DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS.....</b>	<b>17</b>
<b>6. DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS 2X2.....</b>	<b>19</b>
<b>7. RECONHECIMENTO DE CÔNICAS .....</b>	<b>21</b>
<b>8. RECURSOS COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>24</b>
<b>9. CONCLUSÃO .....</b>	<b>28</b>
<b>REFERÊNCIAS. ....</b>	<b>29</b>

## Capítulo 1

### INTRODUÇÃO

Um dos últimos assuntos do Ensino médio é a Geometria Analítica, que é tratada de um modo muito tímido e superficial, deixando muitas partes para o Ensino Superior. Ainda deve se levar em conta que alguns professores não têm a base necessária para um bom estudo da matéria.

Aqui vamos compartilhar a Álgebra com a Geometria de uma forma simples, mas muito importante. A bagagem teórica da Álgebra Linear, o professor deve trazer para a sala de aula e passar para seus alunos de um melhor modo possível.

O professor deve utilizar todos os recursos institucionais, inclusive os mais modernos para a sua aula se tornar mais atrativa e prender mais a atenção de seus alunos.

## Capítulo 2

### CÔNICAS.

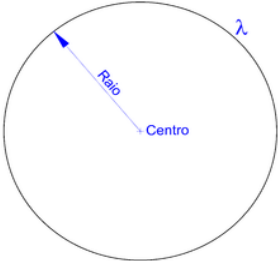
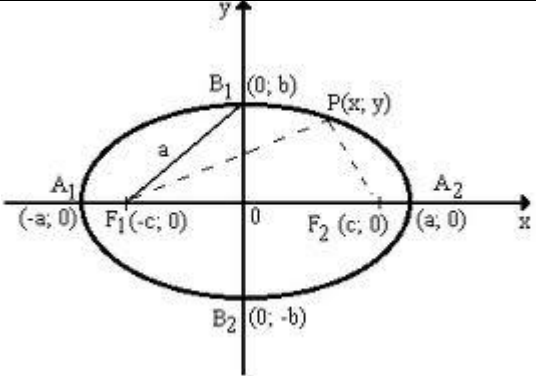
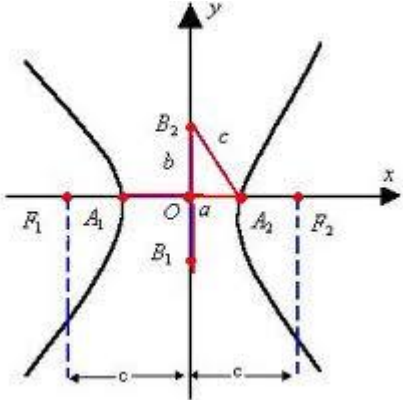
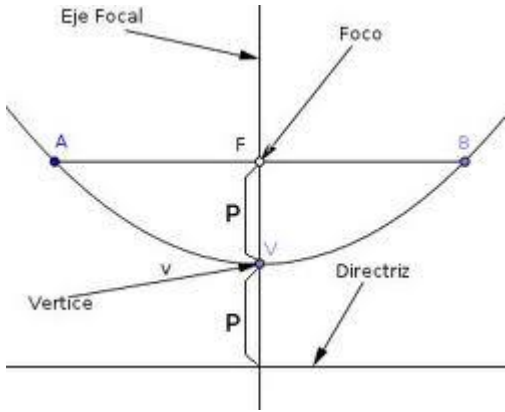
Consideremos a equação geral do 2º grau com duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{I})$$

em que A, B, C, D, E, F, são constantes reais tais que A, C, é diferente de zero, e x, y são variáveis reais.

Vamos fazer uma mudança de base de modo que a equação escrita em relação à nova base não tenha mais o termo misto ( $B = 0$ ), daí, usaremos bases ortonormais a fim de que as figuras que estas equações representam não sofram deformações.

A seguir serão apresentadas as equações chamadas de padrões, pois definem todas as curvas cônicas possíveis de uma forma quadrática, seguidas dos respectivos nomes e representações geométricas:

Equação	Cônica	Figura
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	Circunferência	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse	
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbole	
$y^2 = 4px$	Parábola	

Além dessas, existem as cônicas degeneradas que podem ser:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	<b>Conjunto vazio</b>
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	<b>Duas retas paralelas.</b>
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	<b>Um ponto.</b>
Quando $A.C=0$ e $B = 0$ $D.x + E.y + F = 0$	<b>Podemos ter: uma reta</b>
$x.y = 1$	<b>Hipérbole Equilátera</b>
$x^2 - 2xy + y^2 = 0$	<b>Reta</b>

A partir da equação dada na forma (I), teremos que encontrar uma das equações listadas acima e reconhecer a cônica ou sua forma degenerada.

### Capítulo 3

#### AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial  $T: V \rightarrow V$ , devemos determinar vetores que são um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor  $v \in V$  com  $v \neq \mathbf{0}$  e um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que

$$T(v) = \lambda v$$

O escalar  $\lambda$  será chamado autovalor de  $T$  e o vetor  $v$  um autovetor de  $T$ . Chamaremos de operador linear a toda transformação linear  $T: V \rightarrow V$ .

Observação 1: Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Se existirem  $v \in V$ ,  $v \neq \mathbf{0}$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $T(v) = \lambda v$ ,  $\lambda$  é um autovalor de  $T$  e  $v$  um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$ .

**Exemplo 1:** Seja  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Vamos determinar os autovalores de  $A$  e o conjunto dos autovetores associados a cada autovalor. Seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$ . Então existe um vetor (dado em forma de coluna)  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , não nulo, tal que  $AX = \lambda X$ , isto é:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo temos:

$$\begin{pmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isto equivale ao sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x - 4y = 0 \\ x + (\lambda - 2)y = 0 \end{cases}$$

O sistema acima terá solução não trivial se, e somente se, a matriz dos coeficientes tiver determinante nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) - (-4) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Portanto  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -2$  são os autovalores de  $A$ .

Substituindo  $\lambda = \lambda_1 = 1$  no sistema temos:

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é  $x = y$ . Portanto todos os vetores do tipo  $(y, y)$  ou  $t(1, 1)$ ,  $t \neq 0$ , são autovetores de  $\lambda_1 = 1$ .

Substituindo  $\lambda = \lambda_2 = -2$  no sistema temos:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é  $x = 4y$ . Portanto todos os vetores do tipo  $(4x, x)$  ou  $t(4, 1)$ ,  $t \neq 0$ , são autovetores de  $\lambda_2 = -2$ .

**Observação 2:** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Chamaremos de polinômio característico de  $A$  o polinômio  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  onde  $I$  é matriz identidade.

**Exemplo 2:** O polinômio característico da matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  é dado por:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 7$$

## Capítulo 4

### DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES.

**Proposição 1:** Autovetores associados a autovalores distintos de um operador  $T: V \rightarrow V$  são linearmente independentes.

Demonstração:

Provaremos para o caso de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  distintos. A prova para o caso de  $n$  autovalores distintos é análoga.

Sejam  $T(v_1) = \lambda_1 v_1$  e  $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Consideremos a igualdade:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \mathbf{0} \quad (1)$$

Pela linearidade de  $T$ , tem-se:

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = \mathbf{0}$$

Ou:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = \mathbf{0} \quad (2)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade de (1) por  $\lambda_1$ , vem:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = \mathbf{0} \quad (3)$$

Subtraindo (3) de (2):

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = \mathbf{0}$$

Mas:

$$\lambda_2 - \lambda_1 \neq \mathbf{0} \text{ e } v_2 \neq \mathbf{0}$$

Logo:

$$a_2 = \mathbf{0}$$

Substituindo  $a_2$  por seu valor em (1), tendo em vista que  $v_1 \neq \mathbf{0}$ , vem:

$$a_1 = \mathbf{0}$$

Logo, o conjunto  $\{v_1, v_2\}$  é linearmente independente.



**Observação 3:** Sempre que tivermos um operador  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , o conjunto  $\{v_1, v_2\}$ , formados pelos autovetores associados, será uma base do  $\mathbb{R}^2$ . Em geral, se  $T: V \rightarrow V$  é linear,  $\dim V = n$  e  $T$  possui  $n$  autovalores distintos, o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de  $V$ .

**Observação 4:** Dado um operador linear  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  que possui autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  distintos, associados a  $v_1, v_2$ , respectivamente. A definição anterior garante que o conjunto  $P = \{v_1, v_2\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ .

Sabendo que

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2$$

$$T(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2$$

O operador  $T$  é representado na base  $P$  dos autovetores pela matriz diagonal:

$$[T]_P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$$

Constituída de autovalores na diagonal principal.

**Observação 5:** A matriz quadrada  $A$  é diagonalizável se existe uma matriz inversível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  seja diagonal.

## Capítulo 5

### DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS

**Proposição 2:** O polinômio característico de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

Demonstração:

Demonstraremos para o caso de uma matriz simétrica  $A$  de ordem 2.

Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$

O polinômio característico de  $A$  é:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} = 0$$

Isto é:

$$(\lambda - a)(\lambda - b) - c^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2 = 0$$

O discriminante dessa equação do 2º grau em  $\lambda$  é:

$$(a + b)^2 - 4(ab - c^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2 = (a - b)^2 + 4c^2 > 0$$

As raízes da equação são reais e, portanto, a matriz  $A$  possui dois autovalores.

Quando  $\Delta = 0$  e  $c \neq 0$ , teremos  $a=b$ .

**Proposição 3:** Se  $T: V \rightarrow V$  é um operador linear simétrico com autovalores distintos, então os autovetores são ortogonais.

Demonstração:

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dois autovalores do operador simétrico  $T$  e  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Seja ainda

$T(v_1) = \lambda_1 v_1$  e  $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ . Vamos mostrar que  $v_1 \cdot v_2 = 0$ .

Sendo  $T$  um operador simétrico, vem:

$$T(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot T(v_2)$$

Ou

$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot \lambda_2 v_2$$

Ou

$$\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) - \lambda_2 (v_1 \cdot v_2) = 0$$

Ou, ainda:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0$$

Mas,

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  implica  $v_1 \cdot v_2 = 0$ , ou seja:

$$v_1 \perp v_2$$

**Observação 6:** A matriz  $\mathbf{A}$  é diagonalizada pela matriz  $\mathbf{P}$  dos autovetores através de uma matriz  $\mathbf{D}$  de tal forma que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

Se  $\mathbf{A}$  for simétrica,  $\mathbf{P}$  será base ortogonal. Nas aplicações a seguir, é conveniente que  $\mathbf{P}$ , além de ortogonal, seja ortonormal. Isso se obtém normalizando cada vetor.

Normalizar é obter o vetor unitário.

## Capítulo 6

### DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS 2X2

Considere a equação geral de 2º grau a duas variáveis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ela pode ser escrita, matricialmente, da seguinte forma:

$$(x \ y) \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D \ E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0 \quad (I)$$

Chamaremos de parte quadrática de cada uma das equações o produto: matriz linha  $\times$  matriz quadrada  $\times$  matriz coluna e de parte linear o produto: matriz linha  $\times$  matriz coluna. A matriz quadrada da parte quadrática é uma matriz simétrica, logo se ela fosse uma matriz diagonal o problema estaria resolvido.

Sejam  $\beta$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ ;  $\beta'$  uma base ortonormal;  $(x, y)$  as coordenadas de um ponto, em relação à base  $\beta$ , que satisfaz à equação (I) e  $(x', y')$  as coordenadas desse mesmo ponto em relação à base  $\beta'$ . Sejam  $M = M_{\beta}^{\beta'}$ . Então,  ${}^tM = M_{\beta'}^{\beta}$ , uma vez que  $\beta'$  é ortonormal. Temos:

$$M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } (x' \ y') {}^tM = (x \ y)$$

A estratégia é determinar  $\beta'$  de modo que

$${}^tM \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \end{bmatrix}, \text{ para algum } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2.$$

Desse jeito a equação (I) se transformará em

$$(x' \ y') {}^tM \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (D \ E) M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0 \text{ ou}$$

$$(x' \ y') \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (D \ E) M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0,$$

não tendo os “termos mistos”.

O problema então ficará resolvido se diagonalizarmos a matriz quadrada da parte quadrática da equação.

**Admitiremos verdadeiro, sem demonstração, o seguinte teorema:**

**TEOREMA ESPECTRAL:** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$  e  $A$  a matriz de um operador simétrico  $T: V \rightarrow V$ . Então existe uma base ortonormal ou base espectral  $\beta$  de  $V$  tal que  $A$  é diagonal.

**TEOREMA:** Toda matriz simétrica 2x2 é diagonalizável

Demonstração:

Seja  $A$  uma matriz simétrica 2x2 e  $p(\lambda)$  seu polinômio característico. Sendo  $p(\lambda)$  um polinômio de grau 2 a coeficientes reais, então  $p(\lambda)$  admite uma raiz real. Seja  $\lambda_1$  uma raiz real de  $p(\lambda)$ . Consideremos  $V_{\lambda_1}$ . Distinguiremos dois casos:  $\dim V_{\lambda_1} = 2$  ou  $\dim V_{\lambda_1} = 1$ .

Caso 1:  $\dim V_{\lambda_1} = 2$ . Neste caso,  $V_{\lambda_1} = \mathbb{R}^2$  e, portanto, a base canônica é uma base espectral de  $\mathbb{R}^2$  com respeito a  $A$ .

Caso 2:  $\dim V_{\lambda_1} = 1$ . Digamos que  $V_{\lambda_1} = [X_1]$ . Podemos admitir que  $|X_1| = 1$ . Seja  $X_2$  perpendicular a  $X_1$  tal que  $|X_2| = 1$ . Então,  $\{X_1, X_2\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ . Já temos que  $X_1$  e  $X_2$  são autovetores associados a  $\lambda_1$ . Escrevamos  $AX_2$  como combinação linear da base  $\{X_1, X_2\}$ .

$$AX_2 = a_1X_1 + a_2X_2 \quad (I)$$

Tentaremos mostrar que  $a_1 = 0$ .

Multiplicando-se (I), membro a membro, por  ${}^tX_1$ , obteremos:

$${}^tX_1(AX_2) = {}^tX_1(a_1X_1) + {}^tX_1(a_2X_2)$$

Sendo  $A$  uma matriz simétrica, vem que  ${}^tX_1(AX_2) = {}^tX_2(AX_1)$

Assim sendo, teremos:

$${}^tX_2(AX_1) = a_1({}^tX_1 \cdot X_1) + a_2({}^tX_1 \cdot X_2) = a_1$$

Desde que  $AX_1 = \lambda_1X_1$  segue-se que:

$$a_1 = {}^tX_2(\lambda_1X_1) = \lambda_1({}^tX_2 \cdot X_1) = \lambda_1 \cdot 0 = 0.$$

Portanto,  $\{X_1, X_2\}$  é uma base espectral de  $\mathbb{R}^2$  em relação à matriz  $A$ .

## Capítulo 7

### RECONHECIMENTO DE CÔNICAS

Para reconhecer uma cônica é preciso reduzir a equação dada a uma das listadas no Capítulo 2. Para facilitar a compreensão dividiremos em dois casos.

**Caso 1:** Equações do tipo  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

A equação possui o termo misto  $xy$  nulo. Podemos usar a técnica de completar quadrados para identificar as cônicas.

**Exemplo 3)**  $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 16 = 4$

Completando os quadrados temos:

$$(x^2 - 2x + 1) + (4y^2 + 16y + 16) = -16 + 4 + 16$$

$$(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$$

Dividindo ambos os membros por 4 teremos:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + (y + 2)^2 = 1$$

Façamos uma translação de eixo usando as coordenadas:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

A equação fica então:

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$

A equação representa uma elipse.

**Caso 2:** Equações do tipo  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Se a equação possuir parte linear nula vamos convertê-la para a forma matricial

$$(x' \ y')^t M \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (D \ E) M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0,$$

A seguir determinar o polinômio característico e calcular os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$ .

A equação tomará a forma abaixo:

$$(x' \ y') \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (D \ E) M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0,$$

**Exemplo 4)  $2x^2 + 2y^2 + 8xy - 2 = 0$** 

Devemos primeiro simplificar a equação, dividindo ambos os membros por 2.

$$\text{Teremos: } x^2 + y^2 + 4xy - 1 = 0$$

Vamos escrever a matriz simétrica A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \text{ nos dará}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

cujas raízes são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 3$

Portanto os autovalores são:  $\lambda_1 = -1$ , e  $\lambda_2 = 3$

Vamos diagonalizar

$$(x' \ y') \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1 = 0 \text{ ou}$$

$$-x^2 + 3y^2 = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{x^2}{-1} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

A equação representa uma hipérbole.

**Exemplo 5)  $-xy = 1$** 

A matriz simétrica de sua parte quadrática é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cujo polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1/4 \text{ cujas raízes } \pm 1/2, \text{ são os autovalores.}$$

Conseqüentemente a equação escrita em relação à base espectral é:

$$(x' \ y') \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Ou seja: } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1 \text{ representa uma hipérbole.}$$

Exemplo 6)  $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 90y = 0$

A matriz simétrica de sua parte quadrática é  $\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$

Seus autovalores são 0 e 25. Uma base espectral

$$\beta' = \left\{ \frac{1}{5}(3,4), \frac{1}{5}(4,-3) \right\}$$

Se  $\beta$  é a base canônica então  $M_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

Assim a equação escrita em relação à base  $\beta'$  é:

$$(x' \ y') \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-60 \ -80) \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

Desenvolvendo, encontraremos algo do tipo:  $y^2 = 4x$ , que representa uma parábola



## Capítulo 8

### RECURSOS COMPUTACIONAIS.

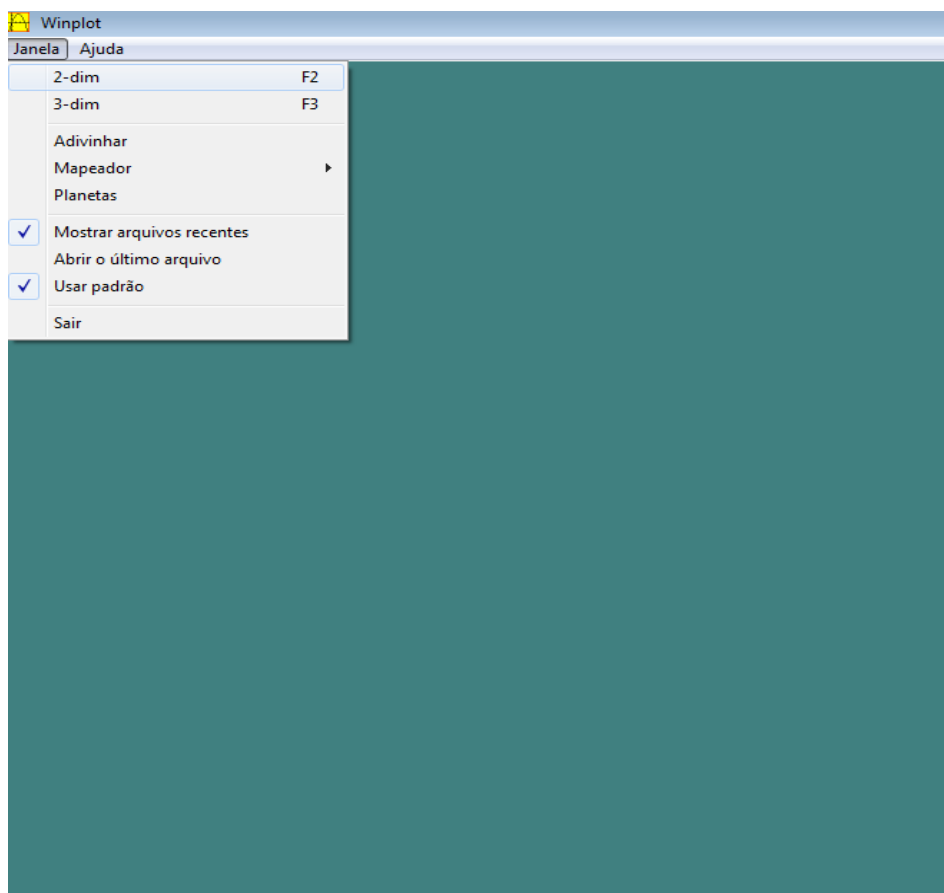
Vimos no capítulo anterior que o cálculo necessário para reconhecer uma cônica possui um nível compatível com o currículo de Matemática do Ensino Médio. Porém o uso de recursos computacionais facilita a aprendizagem do educando, além de tornar o conteúdo mais atrativo e curioso.

O Winplot é uma excelente ferramenta computacional para fazer gráficos em 2D e 3D. Além de ser gratuito, é de fácil utilização e pode enriquecer bastante as aulas. Mostraremos como usar o aplicativo para gerar e visualizar cônicas.

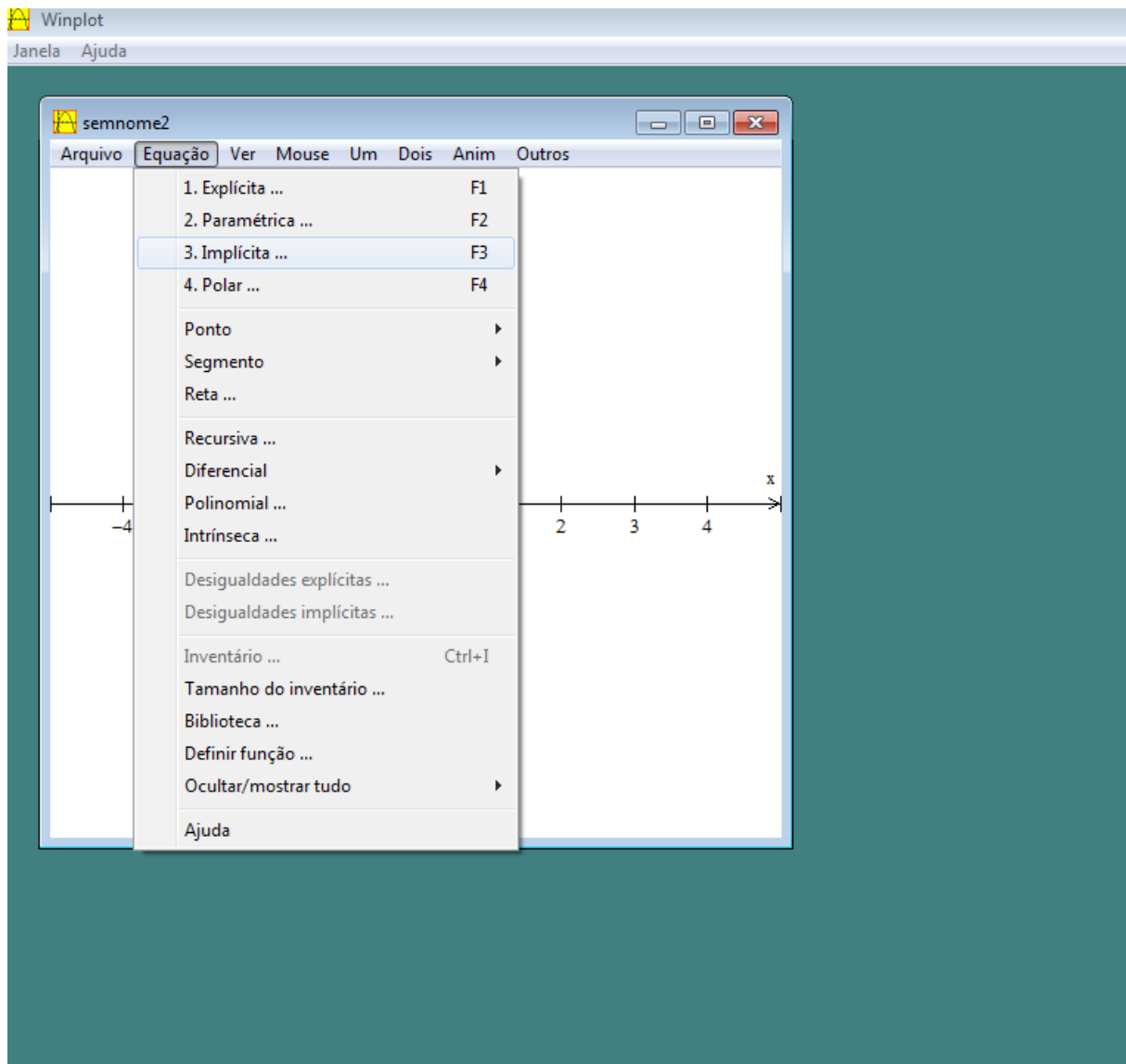
Vamos construir a elipse de equação:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ao abrir o programa, devemos seleccionar a opção 2-dim:

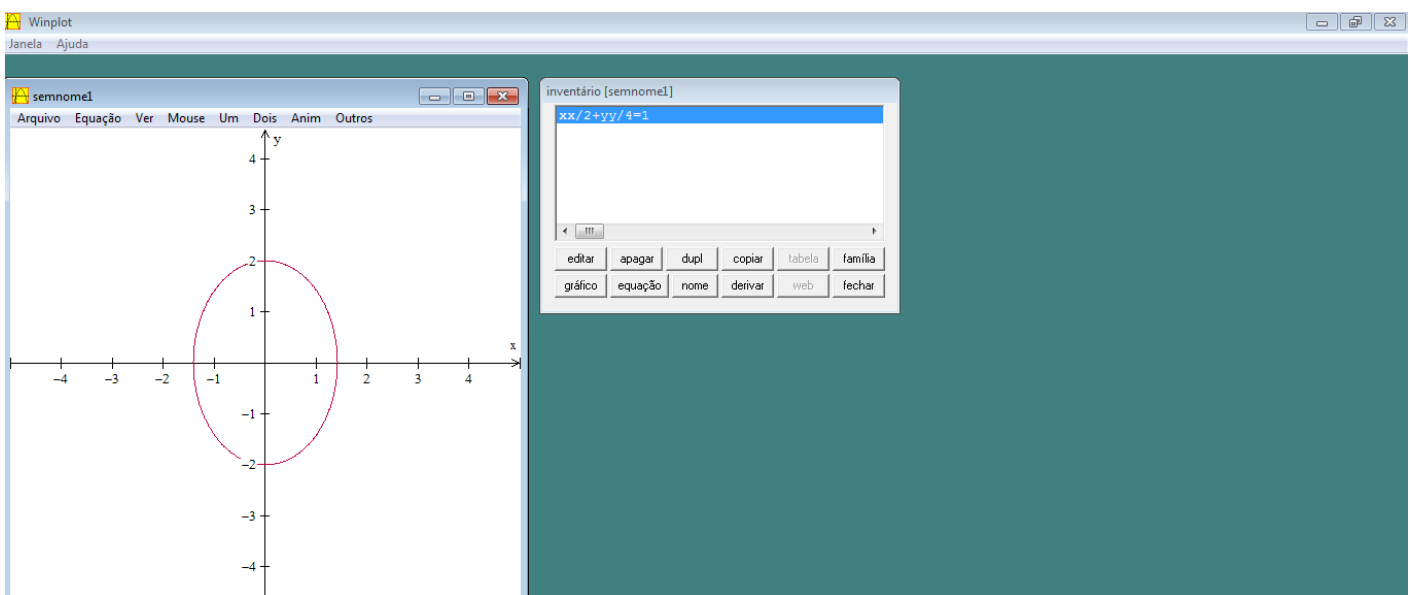


Em equação, escolheremos a forma **implícita**:



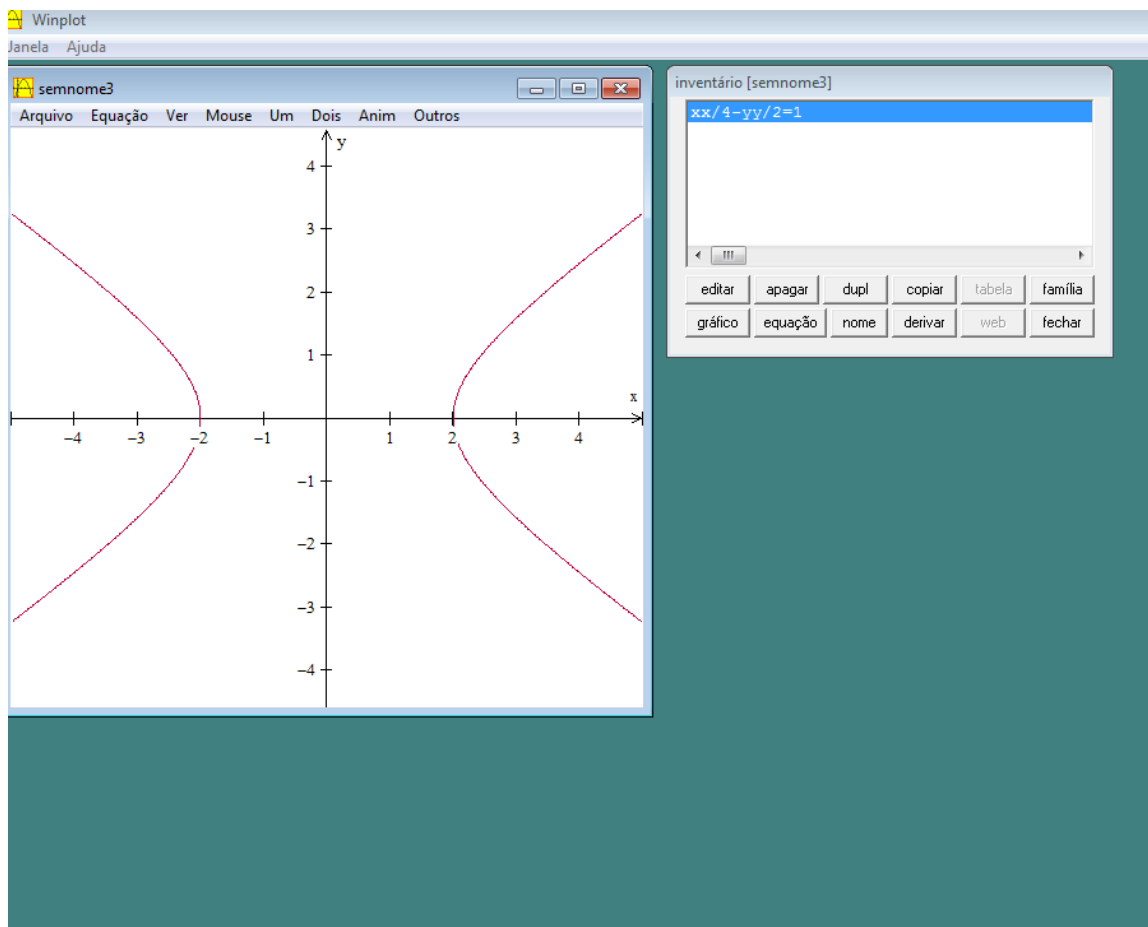
Escrevemos a equação da forma mostrada na figura abaixo, clicando em ok:

Os valores devem ser atribuídos às duas variáveis e depois clicar em auto.

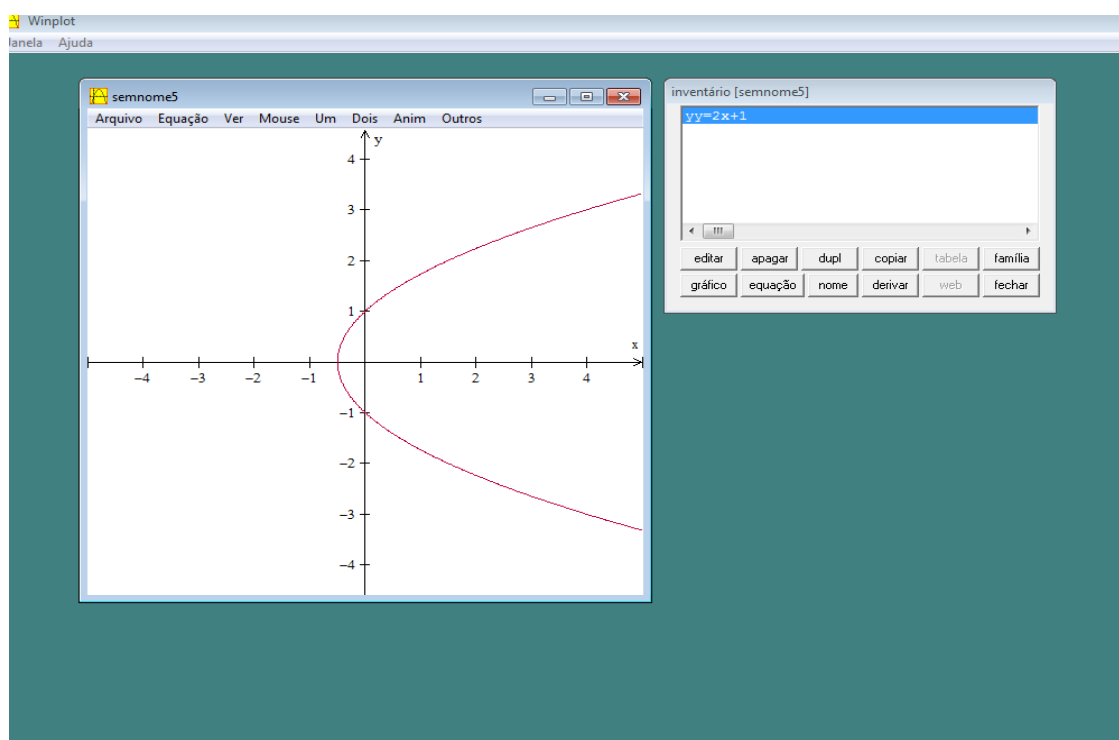


Vamos construir a hipérbole de equação:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

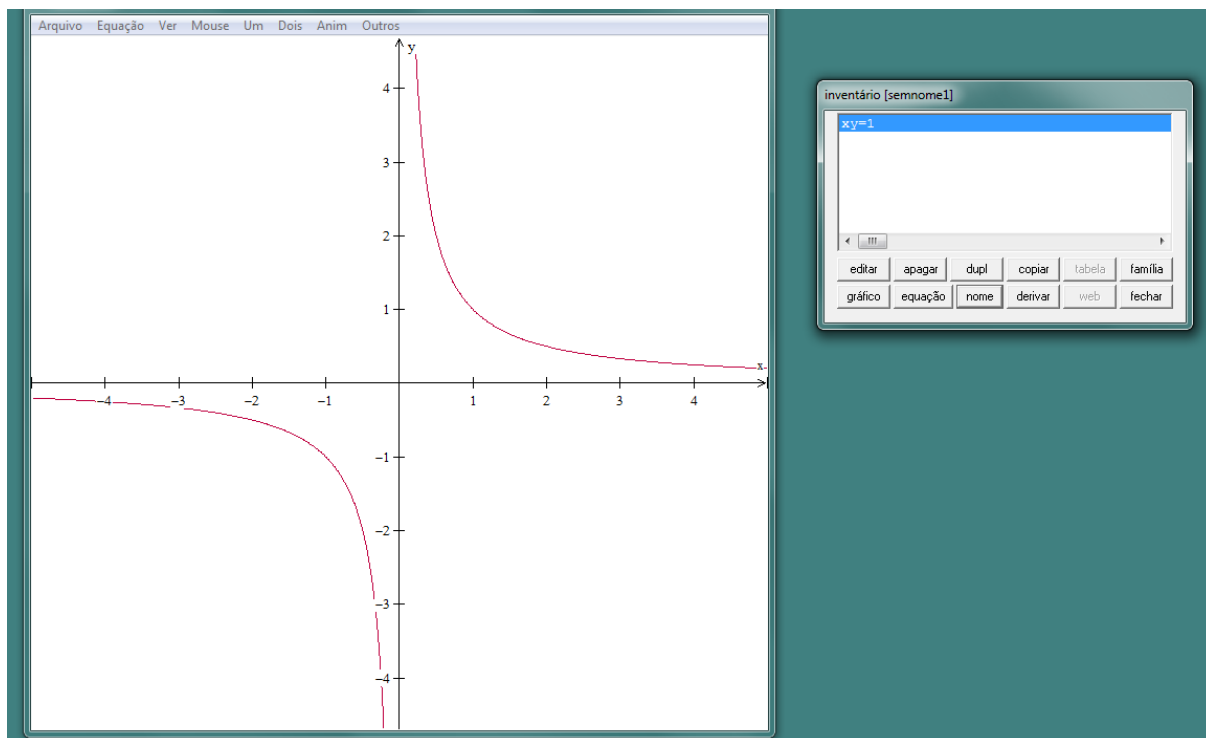


Vamos construir a parábola de equação:  $y^2 = 2x + 1$



Vamos fazer o gráfico de

$$x \cdot y = 1$$



## Capítulo 9

### CONCLUSÃO

A Geometria Analítica é trabalhada no Ensino Médio numa abordagem básica, levando-se em conta o conhecimento prévio do aluno que percebe o formato de uma cônica, ao ver uma pista olímpica que tem a forma de uma elipse; uma antena parabólica; uma obra arquitetônica como a Catedral Metropolitana de Brasília, que lembra uma hipérbole, ou ainda diversas imagens concretas do seu dia a dia.

Ao considerar o conhecimento do aluno historicamente constituído em suas práticas didáticas, tão importante quanto o domínio do conteúdo, o docente aproxima-se consideravelmente do discente, quebrando barreiras, possibilitando um processo ensino-aprendizagem mais eficiente.

**REFERÊNCIAS**

FILHO, Manoel Ferreira de Azevedo. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Fortaleza: Edições Livro Técnico, 2003.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPAR, 2011.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G.. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora HARBRA Ltda., 1986.