



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

ANTÔNIO MATHEUS OSTERNO LEITÃO

**FLEXIBILIDADE DA FAMÍLIA EXPONENCIALIZADA VIA DIVERGÊNCIAS DE
KULLBACK-LEIBLER E JEFFREYS E DISTÂNCIA L_1**

FORTALEZA

2021

ANTÔNIO MATHEUS OSTERNO LEITÃO

FLEXIBILIDADE DA FAMÍLIA EXPONENCIALIZADA VIA DIVERGÊNCIAS DE
KULLBACK-LEIBLER E JEFFREYS E DISTÂNCIA L_1

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Estatística do Centro
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
bacharel em Estatística.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Jeniffer Johana
Duarte Sanchez

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- L548f Leitão, Antonio Matheus Osterno.
Flexibilidade da família exponencializada via divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e distância L1 / Antonio Matheus Osterno Leitão. – 2021.
73 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Estatística, Fortaleza, 2021.
Orientação: Profa. Dra. Jeniffer Johana Duarte Sanchez.
1. Família Exponencializada. 2. Divergência de Kullback-Leibler. 3. Divergência de Jeffreys. 4. Distância L1. 5. Exponencial Exponencializada. I. Título.

CDD 519.5

ANTÔNIO MATHEUS OSTERNO LEITÃO

FLEXIBILIDADE DA FAMÍLIA EXPONENCIALIZADA VIA DIVERGÊNCIAS DE
KULLBACK-LEIBLER E JEFFREYS E DISTÂNCIA L_1

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Estatística do Centro
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
bacharel em Estatística.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Jeniffer Johana Duarte
Sanchez (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gualberto Segundo Agamez Montalvo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Mauricio Araujo Mota
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Ao meu irmão, Francisco Damião Renê Osterno
Leitão, *in memoriam*, que inspirou, e continua a
inspirar, nos seus, a força e a alegria necessárias
a continuar.

AGRADECIMENTOS

A Deus, “Se soubesse como Deus é bom para comigo! Mas se Ele fosse um bocadinho menos bom, continuava a achá-l’O ainda bom...” (Santa Teresinha do Menino Jesus). A interseção contante de Nossa Senhora de Nazaré.

Aos meus pais, Francisco Antônio e Armênia, por todo zelo, dedicação, amor e carinho a mim e a minha educação. Aos meus irmãos Renan Osterno e Júnior Leitão, por serem presentes, bem como a toda minha família.

À Prof^a. Dr^a. Jeniffer Johana Duarte Sanchez por ter aceito o convite de me orientar, meu muito obrigado, muito obrigado também por toda a paciência. A sua orientação na condução deste trabalho foi muito valiosa.

Ao Prof. Dr. Gualberto Segundo Agamez Montalvo por ser um professor dedicado e sempre atento aos alunos. Obrigado também por toda a colaboração neste trabalho.

Ao Prof. Dr. João Mauricio Araújo Mota por ser um professor sempre disponível e por ensinar com tanto entusiasmo. Obrigado ainda por ter aceito o convite de participar desta banca.

A todos os professores do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada - DEMA que contribuíram para minha formação.

A minha namorada e amiga, Juliana Sales, obrigado por me amar e por estar sempre ao meu lado. Como diz um trecho da canção interpretada por Ana (part. Melin) “você é a melhor pessoa que eu conheço, eu não te largo, não te troco e não te esqueço”.

A todos os amigos que fiz durante a graduação que tornaram tudo mais leve e que muito me fizeram sorrir, em especial ao Claudio Matheus, Daniele Norões, Diego Santos, Jamilly Sousa e Lorena Cândido.

A todos os colegas da Empresa Júnior de Estatística - GAUSS, meu muito obrigado.

E por fim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma, seja na minha formação acadêmica ou na construção deste trabalho.

“É justo que muito custe o que muito vale.”

(Santa Teresa D'Ávila)

RESUMO

Em anos recentes novas distribuições têm surgido, a maioria delas baseadas em geradores, tais como o Exponencializado, Kumaraswamy, Beta, entre outros. Estas novas distribuições surgem com o intuito de serem mais flexíveis e acomodar diversos conjuntos de dados com características especiais, como por exemplo, caudas pesadas, assimetrias e bimodalidades. No entanto, não se tem estudos sobre o quão flexíveis são estas novas distribuições quando comparadas com seus pares mais simples, as distribuições de base. Desse modo, neste trabalho será realizada uma análise de divergência entre as distribuições de base e as obtidas considerando o gerador exponencial. A flexibilidade da generalização da distribuição de base foi medida através das divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e da distância L_1 , e foram obtidas expressões explícitas para toda a família de distribuições exponencializadas. Foram considerados, ainda, casos especiais, como o modelo Exponencial Exponencializado e Weibull Exponencializado para evidenciar os resultados obtidos. Por fim, foram realizados estudos de simulação com os modelos Exponencial Exponencializado e Weibull Exponencializado com o objetivo de avaliar o comportamento do parâmetro adicional, bem como a flexibilidade do modelo, além de um estudo de simulação para avaliar cada uma das medidas utilizadas.

Palavras-chave: Família Exponencializada; Divergência de Kullback-Leibler; Divergência de Jeffreys; Distância- L_1 ; Exponencial Exponencializada; Weibull Exponencializada

ABSTRACT

In recent years, new distributions have emerged, most of them based on generators, such as Exponentiated, Kumaraswamy, Beta, among others. These new distributions appear with the aim of being more flexible and accommodating several sets of data with special characteristics, such as, for example, heavy-tailed, skewness and bimodalities. However, there are no studies on how flexible these new distributions are when compared to their simpler peers, the base distributions. Therefore, in this work an analysis of divergence between the base distributions and those obtained considering the Exponentiated generator will be performed. The flexibility of the generalization of the base distribution was measured through the Kullback-Leibler and Jefferys divergences and the distance L_1 , and explicit expressions were obtained for the entire family of Exponentiated distributions. Special cases were also considered, such as the Exponential Exponentiated and Weibull Exponentiated distribution to evidence the results obtained. Finally, simulation studies were carried out with the Exponential Exponentiated and Weibull Exponentiated distribution models in order to assess the behavior of the additional parameter, as well as the model's flexibility, in addition to a simulation study to evaluate each of the measures used.

Keywords: Exponentiated family; Kullback-Leibler divergence; Jeffreys divergence; L_1 -Distance; Exponentiated Exponential; Exponentiated Weibull

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função densidade de probabilidade do modelo Exponencial Exponencializado, para diferentes valores de α e $\lambda = 2$, $EE(\alpha, \lambda = 2)$	20
Figura 2 – Função densidade de probabilidade do modelo Weibull Exponencializado, para diferentes valores de α , $\gamma = 2$ e $\lambda = 2$, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$	24
Figura 3 – Divergência de Kullback-Leibler entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido por meio do gerador exponencializado, $D_{Kull}(F_X(x), G_X(x))$	32
Figura 4 – Divergência de Jeffreys entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido por meio do gerador exponencializado, (2.1), $J(F_X(x), G_X(x))$	34
Figura 5 – Distância L_1 entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido em (2.1), $L_1(f_X(x), g_X(x))$	37
Figura 6 – Comparação entre as medidas Kullback-Leibler, Jeffreys e L_1 , entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido em (2.1).	37
Figura 7 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha = 100, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 20$	42
Figura 8 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha = 100, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 500$	43
Figura 9 – Simulação da divergência de Kullback-Leibler entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n	45
Figura 10 – Simulação da divergência de Jeffreys entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n	46
Figura 11 – Simulação da distância L_1 entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n	46
Figura 12 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Weibull Exponencializado, $WE(\alpha = 100, \gamma = 2, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 20$	49

Figura 13 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Weibull Exponencializado, $WE(\alpha = 100, \gamma = 2, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 500$	50
Figura 14 – Simulação da divergência de Kullback-Leibler entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n	52
Figura 15 – Simulação da divergência de Jeffreys entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n	53
Figura 16 – Simulação da distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estimativa dos parâmetros do modelo Exponencial Exponencializado para diferentes valores de α e $\lambda = 2$, via mil replicas de Monte Carlo.	41
Tabela 2 – Simulação das divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α , via mil replicas de Monte Carlo.	44
Tabela 3 – Estimativa dos parâmetros do modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 2$ e $\lambda = 2$, via mil replicas de Monte Carlo.	48
Tabela 4 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α , via mil replicas de Monte Carlo.	51
Tabela 5 – Estimativa dos parâmetros do modelo Exponencial Exponencializada para diferentes valores de α e $\lambda = 25$, via mil replicas de Monte Carlo.	70
Tabela 6 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 25)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 25)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo.	71
Tabela 7 – Estimativa dos parâmetros da modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 25$ e $\lambda = 2$, via mil replicas de Monte Carlo.	72
Tabela 8 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 25, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo.	73
Tabela 9 – Estimativa dos parâmetros do modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 2$ e $\lambda = 25$, via mil replicas de Monte Carlo.	74
Tabela 10 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 25)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 25)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo.	75
Tabela 11 – Estimativa dos parâmetros do modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 25$ e $\lambda = 25$, via mil replicas de Monte Carlo.	76

Tabela 12 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 25, \lambda = 25)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 25)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo. 77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FAMÍLIA EXPONENCIALIZADA	17
2.1	Exponencial Exponencializada	19
2.1.1	<i>Momentos</i>	20
2.1.2	<i>Estimação dos parâmetros</i>	21
2.1.2.1	<i>Método dos momentos</i>	21
2.1.2.2	<i>Método da máxima Verossimilhança</i>	22
2.2	Weibull Exponencializada	23
2.2.1	<i>Momentos</i>	25
2.2.2	<i>Estimação dos parâmetros</i>	25
2.2.2.1	<i>Método da máxima verossimilhança</i>	25
3	MEDIDAS DE DIVERGÊNCIA	27
3.1	Divergência de Kullback Leibler	28
3.2	Divergência de Jeffreys	28
3.3	Distância L_1	28
3.4	Relação entre as medidas Kullback-Leibler, Jeffreys e L_1	29
4	RESULTADOS	30
4.1	Medidas de divergência para a família exponencializada	30
4.1.1	<i>Divergência de Kullback-Leibler</i>	30
4.1.2	<i>Divergência de Jeffreys</i>	32
4.1.3	<i>Distância L_1</i>	35
4.1.4	<i>Relação entre as medidas Kullback-Leibler, Jeffreys e L_1</i>	37
5	SIMULAÇÃO	38
5.1	Modelo Exponencial Exponencializada	39
5.2	Modelo Weibull Exponencializada	47
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	55
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICES	61
	APÊNDICE A –DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS	61
A.1	Exponencial	61

A.2	Weibull	61
A.3	Rayleigh	62
A.4	Rayleigh Exponencializado e Burr tipo-X	62
	APÊNDICE B–EXEMPLOS	64
B.1	Modelo Exponencial Exponencializado	64
<i>B.1.1</i>	<i>Divergência de Kullback-Leibler</i>	64
<i>B.1.2</i>	<i>Divergência de Jeffreys</i>	64
<i>B.1.3</i>	<i>Distância L_1</i>	66
B.2	Modelo Weibull Exponencializado	67
<i>B.2.1</i>	<i>Divergência de Kullback-Leibler</i>	67
<i>B.2.2</i>	<i>Divergência de Jeffreys</i>	67
<i>B.2.3</i>	<i>Distância L_1</i>	69
	APÊNDICE C–TABELAS	70

1 INTRODUÇÃO

Distribuições estatísticas são frequentemente empregues para descrever fenômenos do mundo real e devido a isso sua teoria é amplamente estudada (ALZAATREH *et al.*, 2013). Esses modelos, ainda, podem ser generalizados com o intuito de tornar as distribuições mais flexíveis por meio da adição de um ou mais parâmetros (BARROS, 2008). Segundo Johnson *et al.* (1995), não há dúvidas que para se obter um bom ajuste, em alguns casos, são necessários pelo menos três parâmetros. Contudo, a adição de um quarto parâmetro produz uma melhoria considerável, no entanto, são feitas ressalvas sobre a adição de um quinto ou sexto parâmetro devido ao trabalho associado à estimação.

Segundo Alzaatreh *et al.* (2013) diversos autores propuseram diferentes formas de generalizar distribuições, dentre eles, pode-se mencionar: Azzalini (1985), que considerou inicialmente a distribuição normal como distribuição de base, e gerou uma nova distribuição assimétrica, a qual tem um parâmetro adicional que controla a assimetria, conhecida como *skew-normal*; Eugene *et al.* (2002), que utilizaram a distribuição beta como gerador de novas distribuições, tendo como exemplo o modelo beta-normal, útil na análise de dados com características bimodais e recentemente Jones (2009) e Cordeiro e Castro (2011), que propuseram um gerador baseado na distribuição Kumaraswamy, análogo ao gerador de distribuições baseado no modelo beta.

Além destes, tem-se, Gompertz e Verhulst (1825; 1839, 1845, 1847 apud AL-HUSSAINI; AHSANULLAH, 2015), que propuseram a exponenciação de uma função de distribuição acumulada, $F_X(x)$, por um parâmetro positivo, α , com o objetivo de flexibilizar as distribuições utilizadas, até então, nas análises de tabelas de mortalidade humana e crescimento populacional. A esta classe de distribuições é dada o nome de família exponencializada de distribuições, a qual tem ganhado cada vez mais espaço na modelagem estatística e será o enfoque deste trabalho.

Desde então, diversos autores propuseram modelos pertencentes à família exponencializada de distribuições. Destacam-se: Mudholkar e Srivastava (1993), com seus estudos do modelo Weibull Exponencializado; Gupta e Kundu (1999), com a distribuição Exponencial Exponencializada; Nadarajah e Gupta (2007), que propuseram o modelo Gama Exponencializado; Nadarajah e Kotz (2003), com o modelo Fréchet Exponencializado, entre outros muitos. Esses modelos, ainda, tiveram suas propriedades e métodos de estimação estudadas por outros autores. Nadarajah e Kotz (2006) e Al-Hussaini e Ahsanullah (2015), trazem, cada um, uma coletânea de

estudos com os principais modelos desta família de distribuições, bem como suas propriedades e técnicas de estimação.

Al-Hussaini e Ahsanullah (2015), em uma análise gráfica, tanto da função densidade de probabilidade quanto da função de risco, atentam que as distribuições pertencentes à família exponencializada são bem diferentes da distribuição de base. Desse modo, com o intuito de avaliar e quantificar esta diferença, que até então é avaliada apenas de forma gráfica, faz-se necessário considerar algumas medidas de divergência.

Segundo Pardo *et al.* (1995) e Pardo (2005), as medidas de divergência entre duas distribuições de probabilidade desempenham um importante papel na inferência estatística, uma vez que conseguem mensurar o quão distante duas distribuições estão “uma da outra”.

O objetivo deste trabalho é realizar uma comparação entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e o modelo gerado a partir do gerador exponencializado, $g_X(x)$, com o propósito de verificar e quantificar o quão flexíveis são essas novas distribuições adicionadas de um parâmetro de forma, α . Para tal fim, serão empregues as medidas de divergência de Kullback-Leibler e Jeffreys, além da medida de distância L_1 . O Capítulo 2 traz uma sucinta introdução da família exponencializada de distribuições, bem como, um breve resumo dos modelos Exponencial Exponencializado e Weibull Exponencializado. No capítulo seguinte é feito um ensaio sobre medidas de divergência, além da explanação das medidas de divergência de Kullback-Leibler, Jeffreys e distância L_1 . No Capítulo 4 encontram-se os resultados obtidos da aplicação das medidas de Kullback-Leibler, Jeffreys e distância L_1 , tanto para o caso geral, quanto para os modelos Exponencial Exponencializado e Weibull Exponencializado. No último capítulo são apresentados estudos de simulação dos modelos, em questão, com o objetivo de investigar o quão flexíveis são as novas distribuições adicionadas do parâmetro de forma, α , além de um estudo de simulação com cada uma das medidas apresentadas.

2 FAMÍLIA EXPONENCIALIZADA

A construção de generalizações de distribuições bem conhecidas tem como objetivo obter melhorias nos ajustes destes modelos aos diversos tipos de dados (SANTOS, 2016). As generalizações tem um incremento no número de parâmetros do modelo. A forma mais simples de realizar a generalização de uma distribuição é promovendo a exponenciação da função de distribuição acumulada, $F_X(x)$, por um número real positivo, α (AL-HUSSAINI; AHSANULLAH, 2015). Segundo Al-Hussaine e Ahsanullah (2015), esse método foi proposto, inicialmente, por Gompertz (1825), para comparar as tabelas de mortalidade humana, e Verhulst (1839, 1845, 1847), para representar o crescimento populacional. Posteriormente Ahuja e Nash (1967) também se utilizaram do mesmo gerador, denominado até então de distribuições generalizadas de Gompertz-Verhulst, afim de obter novas distribuições generalizadas.

Definição 1. *Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$. Considere $\alpha > 0$, segundo Gupta et al. (1998), a função de distribuição acumulada de uma variável X pertencente a família exponencializada é dada por*

$$G_X(x) = [F_X(x)]^\alpha, \quad (2.1)$$

consequentemente, a função densidade é

$$g_X(x) = \alpha f_X(x) F_X(x)^{\alpha-1}, \quad (2.2)$$

em que $f_X(x) = dF_X(x)/dx$ é a função densidade da distribuição de base.

A função de sobrevivência associada a (2.1) é

$$\bar{G}_X(x) = 1 - [F_X(x)]^\alpha, \quad (2.3)$$

e a partir de (2.2) e (2.3), tem-se a função de risco dada por

$$\lambda_{\bar{G}_X}(x) = \frac{g_X(x)}{\bar{G}_X(x)} = \frac{\alpha f_X(x) F_X(x)^{\alpha-1}}{1 - [F_X(x)]^\alpha}. \quad (2.4)$$

Gupta e Kundu (2007) atentam que se, em (2.1), $\alpha = 1$, então $G_X(x) = F_X(x)$ e se $\alpha = N$, um número inteiro positivo, $N = 1, 2, 3, \dots$, então $G_X(x) = F_X(x)^N$ é a função de distribuição acumulada do máximo de uma amostra aleatória de tamanho N de $F_X(x)$.

Segundo Al-Hussaine e Ahsanullah (2015) as distribuições da família exponencializada, são bem diferentes da distribuição de base, $F_X(x)$, que a gerou. As distribuições

exponencializadas, normalmente, acomodam funções de risco monótonas e não monótonas, diferentemente das distribuições de base que acomodam apenas funções de risco monótonas.

De acordo com Gupta *et al.* (1998), as distribuições da família exponencializada também podem ser conhecidas na literatura como alternativas de Lehmann, devido aos trabalhos de Lehmann (1953) com enfoque em técnicas não paramétricas.

Segundo Brito (2014) e Barros *et al.* (2017), a família exponencializada é utilizada por diversas outras famílias de distribuições generalizadas, uma vez que suas funções de distribuição acumulada (função densidade de probabilidade), podem ser reescritas em termos de combinações lineares da função de distribuição acumulada (função densidade de probabilidade) da família exponencializada. Por exemplo, Barros *et al.* (2017) ao apresentar uma nova classe de distribuições generalizadas, $H_X(x)$, denominada nova Weibull-X (NWX), que incrementa três parâmetros reais positivos, $\lambda > 0$, $\theta > 0$ e $\delta > 0$ na distribuição de base, $F_X(x)$, cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$H_X(x) = e^{-\lambda^\theta [\delta(1-F_X(x))]^\theta} - e^{-\lambda^\theta [\delta - \log(1-F_X(x))]^\theta}, \quad x > 0, \quad (2.5)$$

atentam que, se considerarmos $M_1(x) = e^{-\lambda^\theta [\delta(1-F_X(x))]^\theta}$ e $M_2(x) = e^{-\lambda^\theta [\delta - \log(1-F_X(x))]^\theta}$, suas respectivas expansões em série de Taylor,

$$M_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta}}{s!} [1 - G_X(x; \alpha)]^{s\theta} \quad \text{e} \quad M_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(G_X(x; \alpha) - \frac{e-1}{e} \right)^k$$

em que $G_X(x; \alpha)$, neste caso, denota uma função de distribuição acumulada do modelo exponencializado com parâmetro $\alpha > 0$, $\beta_k = M_2^{(k)}((e-1)/e)/k!$ e $M_2^{(k)}((e-1)/e)$ a k -ésima derivada de $M_2(x)$ avaliada no ponto $(e-1)/e$, e também as expansões dos binômios destas mesmas funções, $M_1(x)$ e $M_2(x)$, podemos reescrever a função de distribuição acumulada do gerador (2.5) da forma

$$H_X(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{s\theta}{\alpha} \frac{(-1)^{s+\alpha}}{s!} \lambda^{s\theta} \delta^{s\theta} G_X(x; \alpha) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_k (-1)^j \left(\frac{e-1}{e} \right)^j G_X(x; k-j),$$

subsequentemente pode-se então obter a função densidade de probabilidade, $h_X(x)$, do modelo em questão. Mais detalhes sobre esta e outras e outras expansões, tanto de distribuições estatísticas quanto de geradores de distribuições, ver, por exemplo, Alexander *et al.* (2012), Brito (2014) e Barros *et al.* (2017).

Segundo Brito (2014) estas combinações lineares são úteis nos estudos e propriedades do modelo em questão, como: momentos ordinários, momentos centrais, momentos fatoriais, função geradora de momentos, entre outras quantidades de interesse.

2.1 Exponencial Exponencializada

Proposta por Gupta e Kundu (1999), a função distribuição de probabilidade Exponencial Exponencializada, (EE), gerada a partir de (2.1), também conhecida por Exponencial Generalizada, tem como distribuição base o modelo Exponencial, (E).

Definição 2. *Uma variável aleatória X segue distribuição Exponencial Exponencializada, de acordo com Gupta e Kundu (1999), se a função de distribuição acumulada e função densidade de probabilidade forem dadas por*

$$G_X(x) = \left[1 - e^{-\lambda x}\right]^\alpha \quad (2.6)$$

e

$$g_X(x) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} \left[1 - e^{-\lambda x}\right]^{\alpha-1} \quad (2.7)$$

respectivamente, com $x > 0$, $\alpha > 0$, parâmetro de forma, e $\lambda > 0$, parâmetro de localização, que seguem a forma (2.1) e (2.2), respectivamente, considerando $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, o modelo Exponencial.

A função de sobrevivência associada a (2.6) é

$$\bar{G}_X(x) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda x}\right]^\alpha, \quad (2.8)$$

e, a partir (2.7) e (2.8), a função de risco é dada por

$$\lambda_{G_X(x)} = \frac{\alpha \lambda e^{-\lambda x} \left[1 - e^{-\lambda x}\right]^{\alpha-1}}{1 - \left[1 - e^{-\lambda x}\right]^\alpha}. \quad (2.9)$$

Na Figura 1 são apresentadas possíveis formas de (2.7) para diferentes valores de α , com λ fixo e igual a dois, $\lambda = 2$.

Segundo Nadarajah (2011), se $\alpha < 1$ tem-se então, que a função de densidade do modelo Exponencial Exponencializado, (2.7), é uma função monótona decrescente. Para os valores de $\alpha > 1$, por sua vez, consta-se uma função unimodal, com o máximo em $\log(\alpha)/\lambda$.

O modelo EE reúne, em si, características das distribuições Gama e Weibull e se apresenta como uma alternativa as mesmas em várias situações, como por exemplo, análise de tempo de vida (BARROS, 2008). Gupta e Kundu (2001, 2007) afirmam que os modelos EE , Gama e Weibull são generalizações do modelo exponencial, cada um com um parâmetro a mais, adicionado de formas diferentes. De acordo com Gupta e Kundu (2002, apud BARROS, 2008) o modelo EE possui bom desempenho quando utilizado em análises de sobrevivência, principalmente, quando há censura ou dados agrupados.

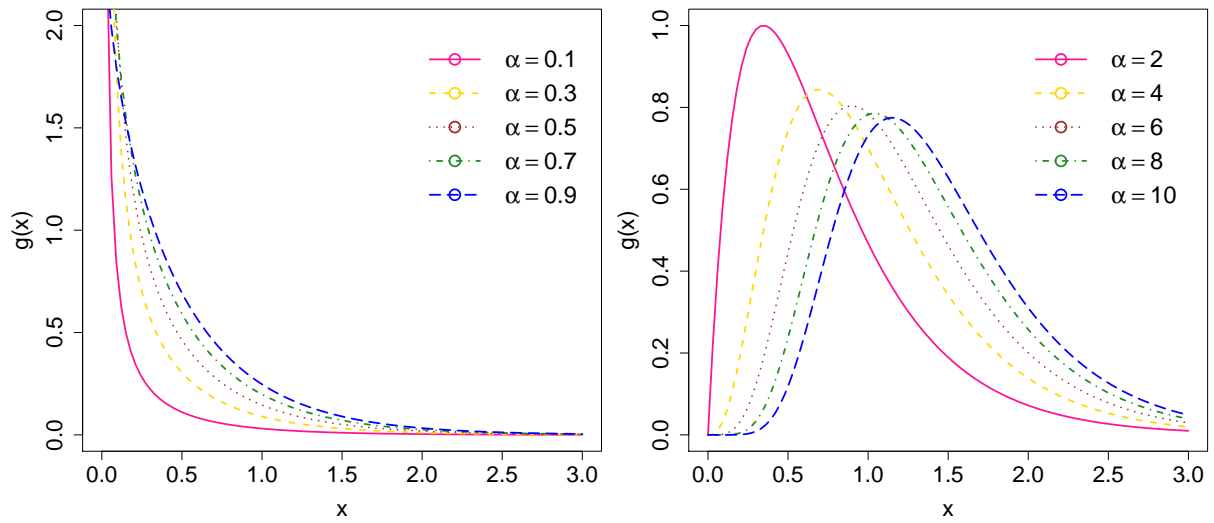
(a) $\alpha < 1$ (b) $\alpha > 1$

Figura 1 – Função densidade de probabilidade do modelo Exponencial Exponencializado, para diferentes valores de α e $\lambda = 2$, $EE(\alpha, \lambda = 2)$.

2.1.1 Momentos

Seja X uma variável aleatória com distribuição EE , com $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, $X \sim EE(\alpha, \lambda)$, então, segundo Gupta e Kundu (2001a), a função geradora de momentos, $M_X(t)$, de X , com $0 < t < \lambda$, é dada por

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \alpha\lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} dx,$$

substituindo $y = e^{-\lambda x}$, tem-se

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \alpha \int_0^1 y^{-(t/\lambda)} (1-y)^{\alpha-1} dy = \alpha B\left(1 - \frac{t}{\lambda}, \alpha\right) = \alpha \frac{\Gamma(1 - \frac{t}{\lambda}) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1 - \frac{t}{\lambda})}, \quad (2.10)$$

em que

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, \quad q > 0$$

e

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad z > 0 \quad (2.11)$$

denotam a função beta e a função gama, respectivamente. Note que a função geradora de momentos, $M_X(t)$, do modelo EE , apenas esta definida para $0 < t < \lambda$, haja vista as restrições da função beta.

Uma vez que a função geradora de momentos, $M_X(t)$, do modelo EE esta definida, pode-se agora obter as funções de esperança e variância do modelo em questão. Anteriormente a

definição destas funções, tem-se que ter definido algumas funções especiais, como a r -ésima derivada da função gama e a função poligama,

$$\Gamma^{(r)}(z) = \int_0^{\infty} \log(z)^r x^{z-1} e^{-x} dx,$$

$$\psi^{(r)}(z) = \frac{d^{(r+1)}}{dz^{(r+1)}} \log(\Gamma(z)), \quad (2.12)$$

nesta ordem. Para $r = 0$, tem-se, respectivamente, a função gama, $\Gamma(z)$, já apresentada em (2.11), e a função digama, $\psi^{(0)}(z)$, que também pode ser escrita como $\Gamma^{(1)}(z)/\Gamma(z)$. Para $r = 1$, tem-se, respectivamente, a primeira derivada da função gama, $\Gamma^{(1)}(z)$, e a função trigama, $\psi^{(1)}(z)$. Caso $z = 1$, tem-se, $\Gamma^{(1)}(1) = \psi^{(0)}(1) = -\gamma$, em que γ é a constante de Euler-Mascheroni, e $\psi^{(1)}(1) = \pi^2/6$, note que $\psi^{(0)}(z)$ e $\psi^{(1)}(z)$, denotam a função digama e trigama, respectivamente, apresentadas em (2.12). Mais detalhes sobre as funções especiais utilizadas podem ser encontradas em, por exemplo, Gradshteyn e Ryzhik (2014).

A partir de (2.10) e das funções especiais apresentadas, pode-se obter esperança e variância do modelo EE , nesta ordem,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\lambda} (\psi^{(0)}(\alpha + 1) - \psi^{(0)}(1)) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\psi^{(0)}(\alpha + 1) + \gamma) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2} (\psi^{(1)}(1) - \psi^{(1)}(\alpha + 1)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \psi^{(1)}(\alpha + 1) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nadarajah (2011) e Al-Hussaini e Ahsanullah (2015) afirmam que tanto a $\mathbb{E}(X)$ quanto a $\text{Var}(X)$ crescem monotonicamente com os valores de α , além de para $\lambda = 1$, explicar a relação entre essas medidas, se $\alpha \leq 1$ então $\text{Var}(X) \geq \mathbb{E}(X)$ e se $\alpha \geq 1$ então $\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}(X)$. Gupta e Kundu (2003) ressaltam ainda que, quando o parâmetro de forma, α , tende para o infinito, a Variância do modelo, $\text{Var}(X)$, tende para a constante $\pi^2/(6\lambda^2)$.

2.1.2 Estimação dos parâmetros

2.1.2.1 Método dos momentos

Segundo Bolfarine e Sandoval (2001), o método dos momentos é um dos mais simples e antigos utilizados para a estimação de parâmetros de uma distribuição. Esse método

consiste, basicamente, em igualar os momentos amostrais aos respectivos momentos populacionais e resolver o sistema de equações encontrado.

Seja X uma variável aleatória com distribuição Exponencial Exponencializada, $X \sim EE(\alpha, \lambda)$, com parâmetros α e λ . A esperança e variância do modelo são dadas em (2.13) e (2.14), respectivamente, os estimadores de α e λ são obtidos com a solução das equações

$$\frac{1}{\lambda}(\psi^{(0)}(\alpha + 1) + \gamma) = \bar{X} \quad (2.15)$$

e

$$\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \psi^{(1)}(\alpha + 1) \right) = S^2 \quad (2.16)$$

em que $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ e $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ são respectivamente a média e a variância amostral e $\psi^{(0)}(\alpha + 1)$ e $\psi^{(1)}(\alpha + 1)$ são calculadas como definida em (2.12).

Dessa forma, a partir de (2.15) e (2.16), temos que os estimador via método dos momentos de λ é

$$\hat{\lambda} = \frac{\psi^{(0)}(\hat{\alpha} + 1) + \gamma}{\bar{X}}, \quad (2.17)$$

enquanto o estimador, via mesmo método, de α é dado pela solução de

$$\frac{\pi^2 - 6\psi^{(1)}(\hat{\alpha} + 1)}{6 [\psi^{(0)}(\hat{\alpha} + 1) + \gamma]^2} = \frac{S^2}{\bar{X}^2}. \quad (2.18)$$

2.1.2.2 Método da máxima Verossimilhança

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de um modelo Exponencial Exponencializado, $X_i \sim EE(\alpha, \lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sua função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha, \lambda; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \alpha \lambda e^{-\lambda x_i} \left(1 - e^{-\lambda x_i}\right)^{\alpha-1} \\ &= \alpha^n \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-\lambda x_i}\right)^{\alpha-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Desse modo, a partir de (2.19), o logaritmo da função de verossimilhança é dada por

$$l(\alpha, \lambda; \mathbf{x}) = n \log(\alpha) + n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log\left(1 - e^{-\lambda x_i}\right).$$

Portanto, os estimadores de máxima verossimilhança de α e λ da distribuição Exponencial Exponencializada são dados a partir da solução das seguintes equações:

$$\frac{\partial l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log\left(1 - e^{-\lambda x_i}\right) = 0; \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} = 0. \quad (2.21)$$

De (2.20) tem-se que o estimador de máxima verossimilhança de α , $\hat{\alpha}$, é uma função de λ , $\hat{\alpha}(\lambda)$, da forma

$$\hat{\alpha}(\lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\lambda x_i})}. \quad (2.22)$$

Portanto, se o parâmetro de localização, λ , for conhecido, o estimador de máxima verossimilhança para α , $\hat{\alpha}$, pode ser obtido diretamente de (2.22). Se ambos parâmetros forem desconhecidos, uma das possíveis formas da obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança de α e λ são métodos numéricos, nos quais pode-se usar os estimadores de métodos dos momentos como valores iniciais, dado pela solução das equações (2.17) e (2.18). Gupta e Kundu (2001b) apresentam, além destes, outros métodos de estimação dos parâmetros do modelo em questão, tais como estimadores baseados em percentis, estimador de mínimos quadrados e mínimos quadrados ponderados e L-momentos.

2.2 Weibull Exponencializada

A distribuição Weibull Exponencializada (*WE*) foi proposta por Mudholkar e Srivastava (1993) e desde então tem sido objeto de estudo de diversos autores, dentre esses temos: Nassar e Eissa (2003) que além de revisar os estudos realizados, até então, obtiveram uma expressão para a moda e resultados úteis na análise de sobrevivência; Nadarajah e Gupta (2005) e Choudhury (2005) que, independentemente, propuseram formas alternativas para as expressões dos momentos do modelo Weibull Exponencializada, que até então eram expressos com restrições nos parâmetros; Pal *et al.* (2006) apresentaram um estudo sobre a taxa de falha bem como uma comparação, em análise de sobrevivência, com os modelos Weibull e Gama; Cordeiro *et al.* (2013) apresentaram uma revisão sobre os resultados já obtidos e Alizadeh *et al.* (2015) trouxeram comparações do desempenho de diferentes métodos de estimação.

Definição 3. *Seja X uma variável aleatória, X tem distribuição WE com parâmetros α , γ e λ , segundo Mudholkar e Srivastava (1993), se sua função de distribuição acumulada é dada por*

$$G_X(x) = \left[1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}\right]^\alpha, \quad x > 0, \quad \alpha, \gamma, \lambda > 0, \quad (2.23)$$

logo, sua função densidade de probabilidade é dada por

$$g_X(x) = \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \left[1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}\right]^{\alpha-1}, \quad (2.24)$$

em que α e γ são os parâmetros de forma e λ o parâmetro de posição, que seguem a forma (2.1) e (2.2), respectivamente, considerando $F_X(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}$, o modelo Weibull.

A função de sobrevivência associada a (2.23) é

$$\bar{G}_X(x) = 1 - \left[1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}\right]^\alpha, \quad (2.25)$$

e, a partir (2.24) e (2.25), a função de risco é dada por

$$\lambda_{G_X(x)} = \frac{\alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \left[1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}\right]^{\alpha-1}}{1 - \left[1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}\right]^\alpha}. \quad (2.26)$$

De acordo com Nassar e Eissa (2003), Nadarajah *et al.* (2013) e Al-Hussaini e Ahsanullah (2015) o modelo (2.24) possui as seguintes distribuições como casos especiais: se $\gamma = 1$, então, tem-se um modelo Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda)$; se $\gamma = 2$, tem-se um modelo Rayleigh Exponencializado, $RayE(\alpha, \lambda)$, para o mesmo valor do parâmetro de forma, γ , tem-se ainda um modelo Burr tipo-X, $BurrX(\alpha, \lambda)$; se $\alpha = 1$, então, tem-se um modelo Weibull, $W(\gamma, \lambda)$; se $\alpha = 1$ e $\gamma = 1$, tem-se um modelo Exponencial, $E(\lambda)$; se $\alpha = 1$ e $\gamma = 2$, então, tem-se um modelo Rayleigh, $Ray(\gamma)$. Mais detalhes sobre estes casos especiais do modelo Weibull Exponencializado ver Apêndice A.

Na Figura 2 são apresentadas possíveis formas de (2.24) para diferentes valores de α com γ e λ fixos e iguais a dois, $\gamma = 2$ e $\lambda = 2$.

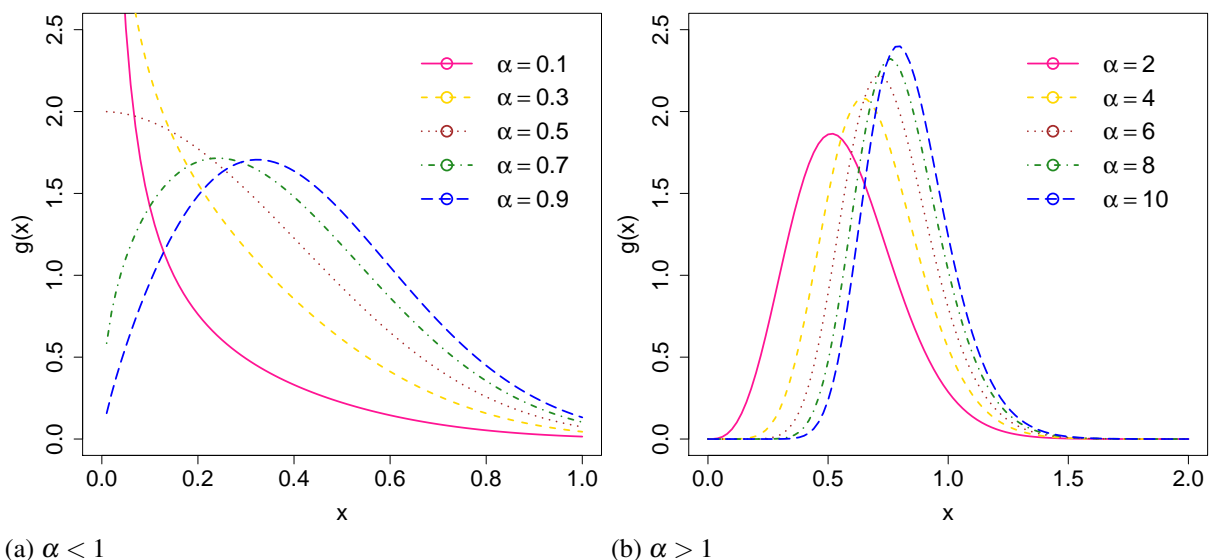


Figura 2 – Função densidade de probabilidade do modelo Weibull Exponencializado, para diferentes valores de α , $\gamma = 2$ e $\lambda = 2$, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$.

Segundo estudos de caracterização dos parâmetros no plano bidimensional, a função de densidade do modelo Weibull Exponencializado, (2.24), pode assumir duas possíveis for-

mas, monótona decrescente, se $\gamma\alpha \leq 1$, e unimodal, se $\gamma\alpha > 1$ (MUDHOLKAR *et al.*, 1996; MUDHOLKAR; HUTSON, 1996; JIANG; MURTHY, 1999).

2.2.1 Momentos

Seja X uma variável aleatória com distribuição WE , com $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ e $\lambda > 0$, $X \sim WE(\alpha, \gamma, \lambda)$, Choudhury (2005) e Nadarajah e Gupta (2005), independentemente, apresentaram os momentos ordinários, $\mathbb{E}(X^k)$, de X , como sendo

$$\mathbb{E}(X^k) = \alpha\lambda^{-k}\Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)_j}{j!} (-1)^j (j+1)^{-k/\gamma-1} \right], \quad (2.27)$$

em que $(\alpha-1)_j = (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-j+1)$. A serie infinita, contida em (2.27), converge para todo $\alpha > 0$, ver Choudhury (2005).

Nassar e Eissa (2003) atentam que a função de momentos ordinários, $M_X(t)$, do modelo Weibull Exponencializado pode ser reescrita como uma combinação linear da função de momentos ordinários do modelo Weibull, $W \sim W(\gamma, \lambda)$, da forma

$$\mathbb{E}(X^k) = \alpha\mathbb{E}(W^k) \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)_j}{j!} (-1)^j (j+1)^{-k/\gamma-1} \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

2.2.2 Estimação dos parâmetros

2.2.2.1 Método da máxima verossimilhança

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de um modelo Weibull Exponencializado, $X_i \sim WE(\alpha, \gamma, \lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sua função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha, \gamma, \lambda; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \alpha\gamma\lambda^\gamma x_i^{\gamma-1} e^{-(\lambda x_i)^\gamma} \left(1 - e^{-(\lambda x_i)^\gamma}\right)^{\alpha-1} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x_i) \\ &= \alpha^n \gamma^n \lambda^{\gamma n} e^{-\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^\gamma} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma-1} \left(1 - e^{-(\lambda x_i)^\gamma}\right)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x_i). \end{aligned} \quad (2.29)$$

A partir de (2.29), o logaritmo da função de verossimilhança fica dada por

$$\begin{aligned} l(\alpha, \gamma, \lambda; \mathbf{x}) &= n \log(\alpha) + n \log(\gamma) + \gamma n \log(\lambda) - \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^\gamma + (\gamma-1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \\ &\quad (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \log\left(1 - e^{-(\lambda x_i)^\gamma}\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Desse modo, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α , γ e λ são dadas a partir da solução das seguintes equações:

$$\frac{\partial l(\alpha, \gamma, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\lambda x_i)^\gamma}) = 0; \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \gamma, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + n \log(\lambda) - \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^\gamma \log(\lambda x_i) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \\ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda x_i)^\gamma \log(\lambda x_i) e^{-(\lambda x_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^\gamma}} = 0; \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \gamma, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \lambda} = \frac{\gamma n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \gamma \lambda^{\gamma-1} x_i^\gamma + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma \lambda^{\gamma-1} x_i^\gamma e^{-(\lambda x_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^\gamma}} = 0. \quad (2.33)$$

De (2.31) tem-se que o estimador de máxima verossimilhança de α , $\hat{\alpha}$, é uma função de γ e λ , $\hat{\alpha}(\gamma, \lambda)$, da forma

$$\hat{\alpha}(\gamma, \lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\lambda x_i)^\gamma})}. \quad (2.34)$$

Portanto, se os parâmetros de forma e localização, γ e λ , respectivamente, forem conhecidos, o estimador de máxima verossimilhança para α , $\hat{\alpha}$, pode ser obtido diretamente de (2.34). Se os parâmetros α , γ e λ forem desconhecidos, uma das possíveis formas da obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança é através dos métodos numéricos.

3 MEDIDAS DE DIVERGÊNCIA

O conceito de distância entre dois corpos foi introduzido inicialmente, na estatística, por Mahalanobis (1936) em seus estudos antropométricos (MCLACHLAN, 1999). Essa métrica ficou conhecida como distância de Mahalanobis em homenagem ao seu autor, Prasanta Chandra Mahalanobis. Desde então foram propostos diversos outros coeficientes para mensurar o quão próximas estão duas distribuições de probabilidade (PARDO, 2005). Pardo (2005) aponta que esses coeficientes tem sido chamados de diversas formas por diferentes autores como, medida de distância entre duas distribuições por Adhikari e Joshi (1956), medidas de separação por Rao (1949, 1954), medidas de informação discriminatória por Kullback e Leibler (1951), Chernoff *et al.* (1952) e Kullback (1959) e medidas de variação-distância por Kolmogorov (1963).

Embora os coeficientes citados anteriormente não tenham sido todos introduzidos para exatamente o mesmo propósito, eles têm a propriedade comum de aumentar, a medida que as duas distribuições envolvidas estão “mais longe uma da outra”. Um coeficiente com essa propriedade será chamado de medida de divergência entre duas distribuições de probabilidade (PARDO, 2005).

Eguchi (1985) define a divergência entre duas distribuições de probabilidade a partir de um suporte comum \mathcal{F}_0 , em que uma função $\rho : \mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça $\rho(f_X(x), g_X(x)) \geq 0$ tal que $f_X(x), g_X(x) \in \mathcal{F}_0$ com a igualdade se, e somente se $f_X(x) = g_X(x)$.

Tendo definido uma função de divergência entre duas distribuições de probabilidade, $f_X(x)$ e $g_X(x)$, pode-se agora definir uma função distância. Uma distância, no contexto estatístico, pode ser definida a partir de uma função de divergência, uma vez que esta possui as mesmas propriedades de uma divergência, tendo como acréscimo a propriedade de simetria, $\rho(f_X(x), g_X(x)) = \rho(g_X(x), f_X(x))$, também chamada de desigualdade triangular. (ALENCAR, 2016).

O conceito de divergência de fenômenos aleatórios ocupa uma função importante em vários campos das ciências exatas, por exemplo: mecânica estatística, teoria da informação, sistema de controle, genética e estatística (EGUCHI, 1985).

De acordo com Pardo (2005), muitos dos testes de qualidade de ajuste utilizados atualmente podem ser demonstrados em termos de distâncias apropriadas, como o teste de razão de verossimilhança, o teste qui-quadrado e o teste de Wald.

3.1 Divergência de Kullback Leibler

Introduzida por Kullback e Leibler (1951), denominada até então pelos próprios autores como medida de informação discriminatória, e hoje, intitulada de divergência de Kullback-Leibler ou ainda entropia relativa, entre duas distribuições de probabilidade, $F_X(x)$ e $G_X(x)$, é definida como

$$D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log \left(\frac{f_X(x)}{g_X(x)} \right) dx = \mathbb{E}_{f_X(x)} \left[\log \left(\frac{f_X(x)}{g_X(x)} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Segundo Pardo (2005) a divergência de Kullback-Leibler é o caso especial mais famoso da família ϕ -divergência definida simultaneamente por CsiszÁr (1967) e Ali e Silvey (1966). Mais informações sobre a família ϕ -divergência e outras mais podem ser vistas em, por exemplo, Basseville (2013).

3.2 Divergência de Jeffreys

A medida de divergência de Jeffreys (1946), denominada J -divergência, entre duas distribuições de probabilidade $F_X(x)$ e $G_X(x)$ é definida como sendo

$$J(F_X(x), G_X(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_X(x) - g_X(x)) \log \left(\frac{f_X(x)}{g_X(x)} \right) dx$$

Pardo (2005) define a medida de divergência de Jeffreys, J -divergência, como uma versão simétrica da divergência de Kullback-Leibler, uma vez que ela pode ser rescrita como

$$J(F_X(x), G_X(x)) = D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) + D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) \quad (3.2)$$

3.3 Distância L_1

Brooks *et al.* (1997) atentam que antes de definir a distância L_1 é necessário, previamente, definir a distância de variação total. Desse modo, temos que a distância de variação total entre duas medidas de probabilidade, M_1 e M_2 , em \mathbb{R}^k para algum k é dado por

$$\Delta(M_1, M_2) = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)} |M_1(A) - M_2(A)|,$$

em que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ denota uma álgebra de Borel. Se as duas medidas de probabilidades, M_1 e M_2 , são funções de densidade, $f_X(x)$ e $g_X(x)$, pode-se reescrever a distância de variação total entre as medidas como sendo a distância L_1 , de modo que

$$\Delta(M_1, M_2) = L_1(f_X(x), g_X(x)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f_X(x) - g_X(x)| dx. \quad (3.3)$$

Vidal *et al.* (2006) atentam que $L_1(f_X(x), g_X(x))$ é o limite superior das diferenças $|M_1(A), M_2(A)|$ para qualquer conjunto A . Além disso, apresentaram que a distância L_1 é limitada no intervalo $[0,1]$, de tal forma que $L_1(f_X(x), g_X(x)) = 0$ implica que $f_X(x) = g_X(x)$, e $L_1(f_X(x), g_X(x)) = 1$ indica divergência máxima.

3.4 Relação entre as medidas Kullback-Leibler, Jeffreys e L_1

De acordo com Caglar *et al.* (2020) a comparação entre medidas de divergência é interessante para diversos fins. Relacionando a medida de divergência de Kullback-Leibler, (3.1), e a distância L_1 , (3.3), ambas pertencentes a classe de medidas ϕ -divergência, tem-se a mais famosa dessas inequações: a desigualdade de Pinsker, definida como

$$2L_1(f_X(x), g_X(x))^2 \leq D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)). \quad (3.4)$$

Segundo Caglar *et al.* (2020), comparar essas duas divergências tem inúmeras vantagens, como a troca de resultados da teoria da informação para a teoria da probabilidade e vice-versa, ver por exemplo Fedotov *et al.* (2003a, 2003b).

Taneja e Kumar (2003) apresentam uma desigualdade entre as medidas de divergência de Kullback-Leibler, (3.1), e Jeffreys, (3.2), como sendo

$$D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) \leq J(F_X(x), G_X(x)). \quad (3.5)$$

Então, relacionando (3.4) e (3.5), tem-se

$$2L_1(f_X(x), g_X(x))^2 \leq D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) \leq J(F_X(x), G_X(x)). \quad (3.6)$$

4 RESULTADOS

Com o objetivo de estudar o quão flexíveis são os modelos exponencializados, $g_X(x)$, obtidos considerando (2.1), em comparação com suas respectivas distribuições de base, $f_X(x)$, foram utilizadas as medidas de divergência de Kullback-Leibler, (3.1) e Jeffeys, (3.2), além da distância L_1 , (3.3), apresentadas no Capítulo 3. Adicionalmente, o modelo Exponencial é comparado com o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7), e o modelo Weibull é comparado com o modelo Weibull Exponencializado, (2.24).

4.1 Medidas de divergência para a família exponencializada

Nas secções subsequentes são apresentados os resultados da divergência de Kullback-Leibler, (3.1), divergência de Jeffreys, (3.2), e distância L_1 , (3.3), nesta ordem, calculada entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada a partir da distribuição de base, $g_X(x)$, por meio do gerador (2.1). Os casos particulares dos modelos Exponencial Exponencializado e Weibull Exponencializado, com seus respectivos pares mais simples, são apresentados no Apêndice B.

4.1.1 Divergência de Kullback-Leibler

Corolário 4.1.1. *Aplicando a divergência Kullback-Leibler, (3.1), entre os modelos $f_X(x)$ e $g_X(x)$, apresentados em (2.2), tem-se*

$$D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) = (\alpha - 1) - \log(\alpha).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left(\frac{f(x)}{\alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1}} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left(\frac{1}{\alpha [F(x)]^{\alpha-1}} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\log(1) - \log(\alpha [F(x)]^{\alpha-1})] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [-\log(\alpha) - (\alpha - 1) \log(F(x))] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\log(\alpha) f(x) - (\alpha - 1) f(x) \log(F(x))] dx \\ &= -\log(\alpha) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_I - (\alpha - 1) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(F(x)) dx}_{II}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

a partir de (I) e (II), da equação (4.1), tem-se,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

$$II = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(F(x))dx,$$

fazendo $u = F(x)$, consta-se que $du = f(x)dx$, então,

$$II = \int_0^1 \log(u)du$$

considerando, agora, a técnica de integração por partes com

$$f = \log(u), \quad dg = du,$$

$$df = u^{-1}du \quad \text{e} \quad g = u,$$

tem-se que,

$$II = \log(u)u - \int du$$

utilizando-se do fato que $\lim_{u \rightarrow 0} u \log(u) = 0$, pode-se, então, concluir que

$$II = [\log(u)u - u] \Big|_0^1 = -1$$

respectivamente. Substituindo os resultados de (I) e (II) da equação (4.1), tem-se

$$\begin{aligned} D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= -\log(\alpha) - (\alpha - 1)(-1) \\ &= (\alpha - 1) - \log(\alpha). \end{aligned} \tag{4.2}$$

□

A Figura 3 apresenta a medida de divergência de Kullback-Leibler, calculada entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada a partir da distribuição de base, $g_X(x)$, por meio do gerador (2.1). Percebe-se que para valores de α menores que um, $\alpha < 1$, a função possui um comportamento decrescente, enquanto para valores de α maiores que um, $\alpha > 1$, a função possui um comportamento crescente. Dado este comportamento, a Figura 3 é construída de tal forma que a figura à direita funciona como um “zoom” para valores pequenos de α da figura à esquerda. Note que, a medida que os valores de α se aproximam de um, menor é a diferença entre o modelo de base, $f_X(x)$, e o modelo gerado a partir da distribuição de base, $g_X(x)$. Note também que, a medida que α se distancia de um, tanto para valores maiores quanto menores, maior é a diferença entre os modelos.

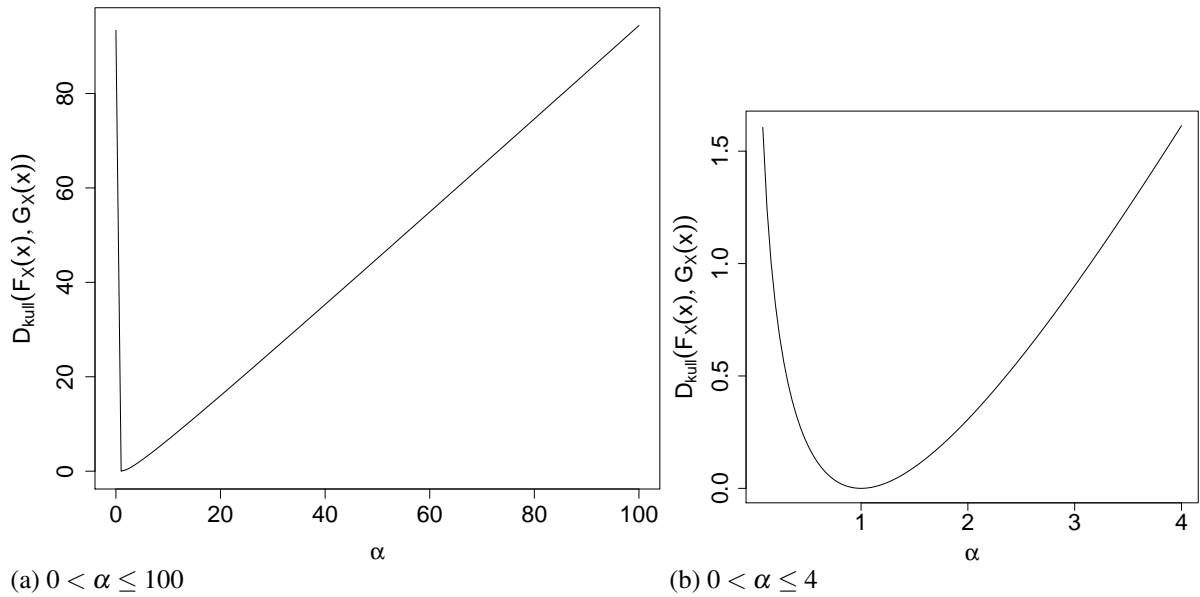


Figura 3 – Divergência de Kullback-Leibler entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido por meio do gerador exponencializado, $D_{Kull}(F_X(x), G_X(x))$.

4.1.2 Divergência de Jeffreys

Note que, como apresentado na Seção 3.2, a divergência de Jeffreys, (3.2), pode ser vista como uma soma das divergências de Kullback-Leibler, (3.1). Desse modo, antemão, é preciso calcular a divergência de Kullback-Leibler, (3.1), entre o modelo gerado a partir da base considerando (2.1), $g_X(x)$, e a base, $f_X(x)$, haja visto que a divergência entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada, $g_X(x)$, por meio do gerador exponencializado, (2.1), já é apresentada no Corolário 4.1.1.

Corolário 4.1.2. *Aplicando a divergência Kullback-Leibler, (3.1), entre os modelos $g_X(x)$ e $f_X(x)$, apresentados em (2.2), tem-se*

$$D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) = \log(\alpha) - \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} \log \left(\frac{\alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1}}{f(x)} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} \log(\alpha [F(x)]^{\alpha-1}) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} [\log(\alpha) + (\alpha - 1) \log(F(x))] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\log(\alpha) \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} + (\alpha - 1) \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} \log(F(x))] dx \\
&= \log(\alpha) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} dx}_{\text{I}} + \\
&\quad (\alpha - 1) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} \log(F(x)) dx}_{\text{II}}, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

a partir de (I) e (II), da equação (4.3), tem-se,

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} dx = 1 \\
\text{II} &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} \log(F(x)) dx \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} \log(F(x)^\alpha) dx
\end{aligned}$$

fazendo $u = F(x)^\alpha$, consta-se que $du = \alpha f(x) [F(x)]^{\alpha-1} dx$, então,

$$\text{II} = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \log(u) du$$

note que, como $\int_0^1 \log(u) du = -1$, já apresentado na solução de (4.1), tem-se então

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \frac{1}{\alpha} (-1) \\
&= -\frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

respectivamente. Substituindo os resultados de (I) e (II) da equação (4.3), tem-se,

$$\begin{aligned}
D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) &= \log(\alpha) + (\alpha - 1) \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \log(\alpha) - \frac{\alpha - 1}{\alpha}. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

□

Agora, de posse dos resultados apresentados nos Corolários 4.1.1 e 4.1.2 é possível demonstrar o cálculo da medida de divergência de Jeffreys, (3.2), entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada a partir da distribuição de base, $g_X(x)$, por meio do gerador (2.1).

Corolário 4.1.3. *Aplicando a divergência de Jeffreys, (3.2), entre os modelos $f_X(x)$ e $g_X(x)$, apresentado em (2.2), tem-se*

$$J(F_X(x), G_X(x)) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} J(F_X(x), G_X(x)) &= D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) + D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) \\ &= (\alpha - 1) - \log(\alpha) + \left(\log(\alpha) - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) \\ &= \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

□

A Figura 4 apresenta a medida de divergência de Jeffreys, calculada entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada a partir da distribuição de base, $g_X(x)$. Note que o quão mais próximo os valores α estão de um, menor é a diferença entre o modelo de base, $f_X(x)$ e do modelo gerado a partir da distribuição de base, $g_X(x)$, e que a medida que α se distancia de um, tanto para valores maiores quanto menores, maior é a diferença entre os modelos, comportamento análogo ao apresentado na Figura 3.

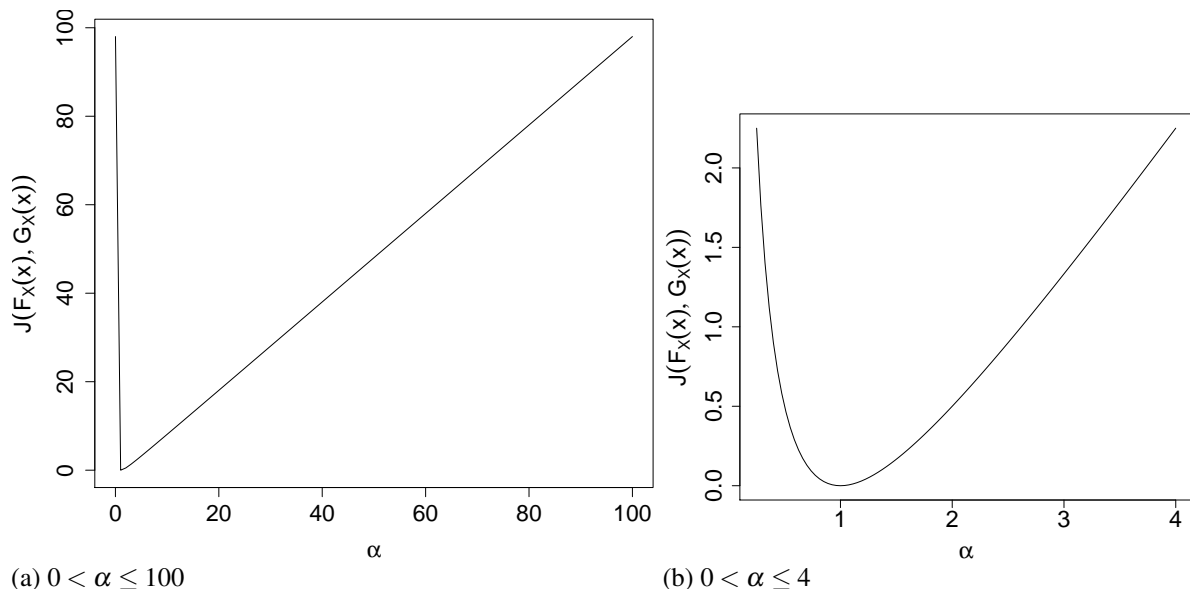


Figura 4 – Divergência de Jeffreys entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido por meio do gerador exponencializado, (2.1), $J(F_X(x), G_X(x))$.

4.1.3 Distância L_1

Corolário 4.1.4. *Aplicando a distância L_1 , (3.3), entre os modelos $f_X(x)$ e $g_X(x)$, apresentados em (2.2), tem-se*

$$L_1(f_X(x), g_X(x)) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} L_1(f(x), g(x)) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f_X(x) - g_X(x)| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \alpha f(x)(F(x))^{\alpha-1}| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}| dx, \end{aligned}$$

em que a função módulo, $|1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}|$, é definida como

$$|1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}| = \begin{cases} 1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}, & \text{se } 1 - \alpha F(x)^{\alpha-1} \geq 0, & \text{(I)} \\ -(1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}), & \text{se } 1 - \alpha F(x)^{\alpha-1} < 0, & \text{(II)} \end{cases}$$

em que (I) e (II) são, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} 1 - \alpha F(x)^{\alpha-1} \geq 0 & 1 - \alpha F(x)^{\alpha-1} < 0 \\ -\alpha F(x)^{\alpha-1} \geq -1 & -\alpha F(x)^{\alpha-1} < -1 \\ \alpha F(x)^{\alpha-1} \leq 1 & \alpha F(x)^{\alpha-1} > 1 \\ F(x)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\alpha} & F(x)^{\alpha-1} > \frac{1}{\alpha} \\ F(x) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & F(x) > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ F^{-1}(F(x)) \leq F^{-1}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) & F^{-1}(F(x)) > F^{-1}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \\ x \leq F^{-1}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) & x > F^{-1}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \end{array}$$

atende ao fato que como $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, e ao fato da restrição $F(x) \leq (1/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ então $(1/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}} \leq 1$, o que implica que, $\alpha \geq 1$. Considerando $\Delta = (1/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, a função módulo, definida anteriormente, pode ser reescrita da forma:

$$|1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}| = \begin{cases} 1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}, & \text{se } x \leq F^{-1}(\Delta), & \text{(I)} \\ \alpha F(x)^{\alpha-1} - 1, & \text{se } x > F^{-1}(\Delta). & \text{(II)} \end{cases}$$

De posse dos resultados apresentados em (I) e (II), pode-se reescrever (??) da forma

$$\begin{aligned}
L_1(f_X(x), g_X(x)) &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{F^{-1}(\Lambda)} f(x)(1 - \alpha F(x)^{\alpha-1}) dx + \int_{F^{-1}(\Lambda)}^{\infty} f(x)(\alpha F(x)^{\alpha-1} - 1) dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{F^{-1}(\Lambda)} f(x) dx - \int_{-\infty}^{F^{-1}(\Lambda)} \alpha f(x) F(x)^{\alpha-1} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{F^{-1}(\Lambda)}^{\infty} \alpha f(x) F(x)^{\alpha-1} dx - \int_{F^{-1}(\Lambda)}^{\infty} f(x) dx \right] \\
&= \frac{1}{2} [F(F^{-1}(\Lambda)) - G(F^{-1}(\Lambda)) + (1 - G(F^{-1}(\Lambda))) - (1 - F(F^{-1}(\Lambda)))] \\
&= \frac{1}{2} [2F(F^{-1}(\Lambda)) - 2G(F^{-1}(\Lambda))] \\
&= F(F^{-1}(\Lambda)) - G(F^{-1}(\Lambda)) \\
&= F(F^{-1}(\Lambda)) - (F(F^{-1}(\Lambda)))^\alpha \\
&= \Lambda - \Lambda^\alpha,
\end{aligned}$$

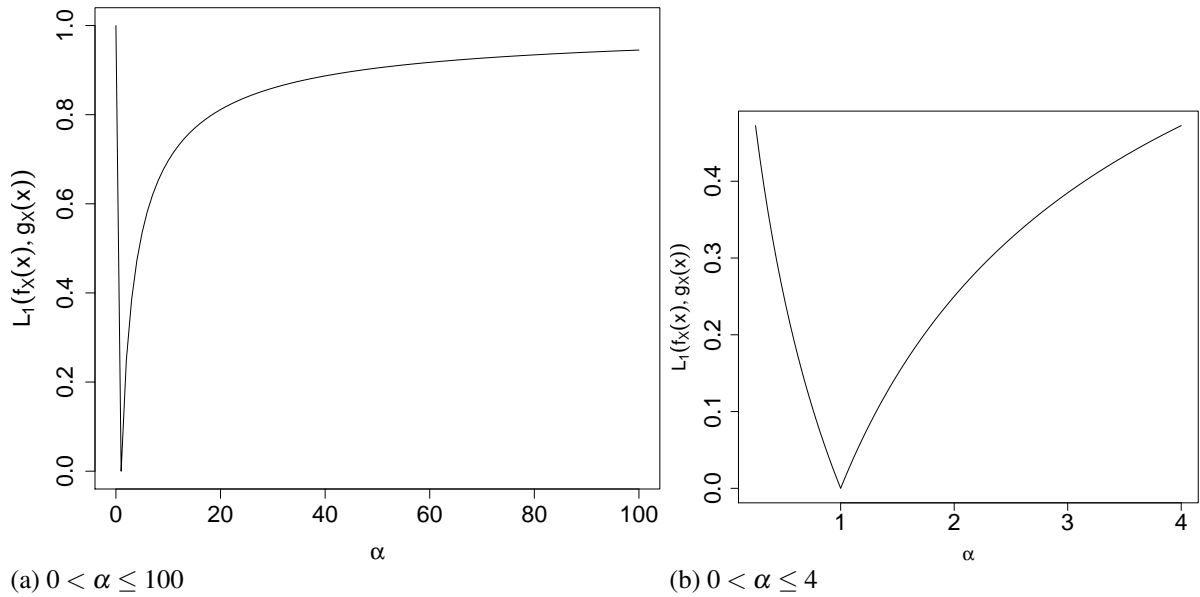
ao ponto que, se substituirmos $\Lambda = (1/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ temos

$$L_1(f_X(x), g_X(x)) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad (4.6)$$

□

Uma vez que calculada a distância L_1 , tem-se que esta medida apenas está definida para $\alpha > 1$, haja vista as restrições impostas a medida avaliada.

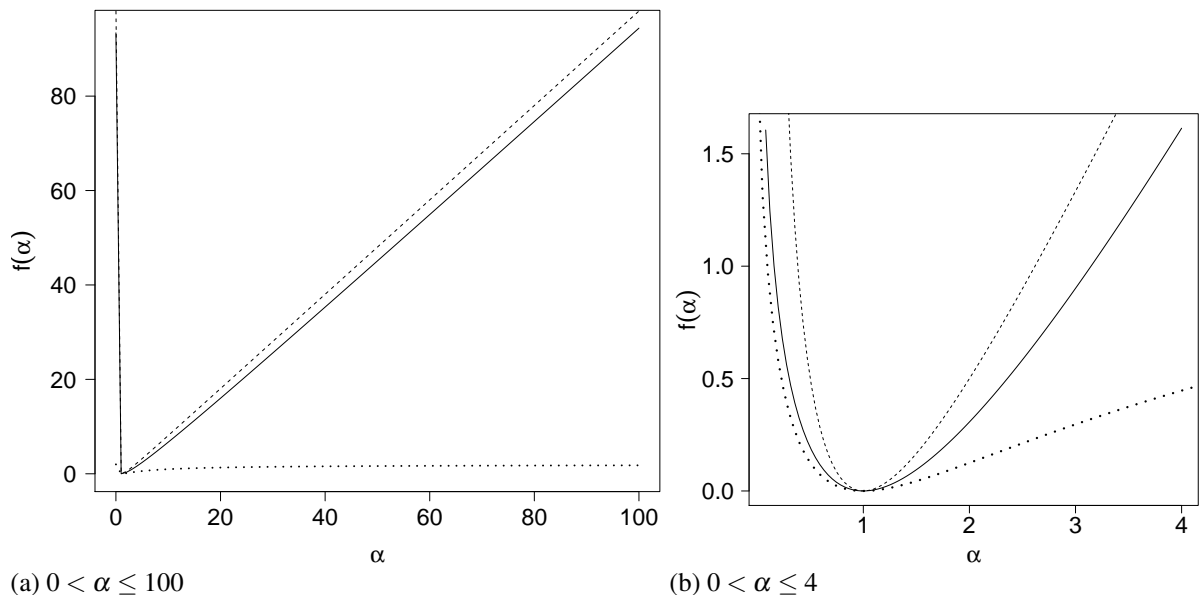
A Figura 5 apresenta a medida de distância L_1 , (4.6), calculada entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada a partir da distribuição de base, $g_X(x)$, por meio do gerador (2.1). Note que o quão mais próximo os valores α estão de um, menor é a diferença entre o modelo de base, $f_X(x)$ e o modelo gerado a partir da distribuição de base, $g_X(x)$, e que a medida que α se distancia de um, tanto para valores maiores quanto menores, maior é a diferença entre os modelos, comportamento análogo ao apresentado nas Figuras 3 e 4.



(a) $0 < \alpha \leq 100$ (b) $0 < \alpha \leq 4$
 Figura 5 – Distância L_1 entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido em (2.1), $L_1(f_X(x), g_X(x))$.

4.1.4 Relação entre as medidas Kullback-Leibler, Jeffreys e L_1

A Figura 6 apresenta uma comparação gráfica entre as medidas de divergência de Kullback-Leibler, (3.1), Jeffreys, (3.2), além da distância L_1 , (3.3), entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e o modelo $g_X(x)$, definido em (2.1), segundo a relação apresentada em (3.6)



(a) $0 < \alpha \leq 100$ (b) $0 < \alpha \leq 4$
 Figura 6 – Comparação entre as medidas Kullback-Leibler, Jeffreys e L_1 , entre os modelos $F_X(x)$, base, e $G_X(x)$, definido em (2.1).
 Linha pontilhada: $2L_1(f_X(x), g_X(x))^2$; linha solida: $D_{kull}(F_X(x), G_X(x))$ e linha tracejada: $J(F_X(x), G_X(x))$.

5 SIMULAÇÃO

Neste capítulo é estudado o comportamento das estimativas obtidas com o método de máxima verossimilhança para os modelos, Exponencial Exponencializado, (2.7), e Weibull Exponencializado, (2.24), foi considerado o método de máxima verossimilhança apresentado no Capítulo 2 em suas secções correspondentes. As estimativas obtidas via método de máxima verossimilhança são avaliadas através de algumas medidas, dentre elas tem-se: viés, erro quadrático médio (*EQM*) e erro padrão (*EP*). Note que por ser um estudo de simulação não é possível calcular os valores exatos destas medidas, desse modo são utilizadas estimativas de Monte Carlo para o *Viés*, *EQM* e *EP*, dadas por

$$\widehat{Viés} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\widehat{\theta}^{(i)} - \theta), \quad (5.1)$$

$$\widehat{EQM} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\widehat{\theta}^{(i)} - \theta)^2 \quad (5.2)$$

e

$$\widehat{EP} = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\widehat{\theta}^{(i)} - \theta)^2}, \quad (5.3)$$

respectivamente, r é o número de réplicas de Monte Carlo, $\widehat{\theta}^{(i)}$ representa o i -ésimo vetor de Monte Carlo estimado, $i = 1, 2, \dots, r$, e θ o verdadeiro vetor de parâmetros. Concomitantemente são avaliadas estimativas para do logaritmo da função de verossimilhança, $l(\theta; \mathbf{x})$, através das medidas

$$\widehat{l(\theta; \mathbf{x})} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r l(\theta; \mathbf{x})^{(i)}, \quad (5.4)$$

$$\widehat{l(\widehat{\theta}; \mathbf{x})} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r l(\widehat{\theta}; \mathbf{x})^{(i)}, \quad (5.5)$$

e

$$\widehat{Viés}_R = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left(\frac{l(\widehat{\theta}; \mathbf{x})^{(i)} - l(\theta; \mathbf{x})^{(i)}}{l(\theta; \mathbf{x})^{(i)}} \right) \times 100, \quad (5.6)$$

em que $l(\theta; \mathbf{x})^{(i)}$ representa o i -ésimo logaritmo da função de verossimilhança calculada no verdadeiro vetor de parâmetros, θ , $l(\widehat{\theta}; \mathbf{x})^{(i)}$ representa o i -ésimo logaritmo da função de verossimilhança avaliada em suas respectivas estimativas de Monte Carlo, $\widehat{\theta}^{(i)}$, e $Viés_R$ denota o viés

relativo. São utilizadas ainda medidas de *Viés* e *EQM* para avaliar o logaritmo da função de verossimilhança, $l(\theta; \mathbf{x})$, estas são análogas as já apresentadas em (5.1) e (5.2), respectivamente.

No estudo para avaliar as distâncias entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada a partir da base, $g_X(x)$, por meio do gerador (2.1), são utilizadas as divergências de Kullback-Leibler, (3.1), Jeffreys, (3.2), além da distância L_1 , (3.3), discutidas no Capítulo 3, uma vez que a distância L_1 apenas está definida para $\alpha \geq 1$, no estudo quando é considerado um valor diferente do que está definido, $\alpha < 1$, este é avaliado numericamente. Este estudo é realizado tomando cada uma das estimativas obtidas via método de máxima verossimilhança, já expostas, aplicado em cada uma das medidas, (3.1), (3.2) e (3.3). Apesar de que, como visto nos Corolários 4.1.1, 4.1.3 e 4.1.4, as medidas estudadas apenas dependem do parâmetro adicional, α , neste estudo são considerados a estimação de todos os parâmetros associados ao modelo, embora alguns tenham sido deixados fixos. Em cada uma das medidas são avaliadas o *Viés* e o *Viés_R*, análogas ao apresentado em (5.1) e (5.6), respectivamente, são utilizadas, ainda, para avaliar as medidas, os quantis 0,05 e 0,95, bem como, um intervalo interquântilico, (*IIQ*), entre os quantis 0,05 e 0,95, $0,95 - 0,05$, de tal forma que o intervalo, correspondente, contém 0,90 das medidas, $IIQ_{0,90}$.

Neste estudo foram consideradas mil réplicas de Monte Carlo, $r = 1000$, e utilizadas, ainda, cinco tamanhos amostrais, $n \in \{20; 50; 100; 200; 500\}$. Todos os resultados apresentados neste capítulo, e no Apêndice C, foram obtidos com o auxílio do *software* R Core Team (2020).

5.1 Modelo Exponencial Exponencializada

As estimativas do modelo Exponencial Exponencializada, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$, denotado a partir daqui como $\theta = (\alpha, \lambda)^T$, através do método de máxima verossimilhança serão calculadas utilizando o método numérico de Newton-Raphson. De acordo com Bolfarine e Sandoval (2001) o procedimento iterativo de Newton-Raphson é iniciado com um vetor θ_0 , denominado chute inicial, e então um novo vetor θ_1 é obtido. Dessa forma, tem-se

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \mathcal{J}(\theta)_j^{-1} \mathbf{U}(\theta)_j \quad (5.7)$$

em que j representa o j -ésimo processo de interação começando com um chute inicial, denominado θ_0 , que gera um novo vetor estimado θ_1 , e assim por diante, $\mathcal{J}(\theta)$ a matriz de informação observada e $\mathbf{U}(\theta)$ o vetor escore. Esse processo é continuado até que o procedimento se estabilize, ou seja, para um dado ε pequeno, $|l(\theta_{j+1}; \mathbf{x}) - l(\theta_j; \mathbf{x})| < \varepsilon$. Quando o procedimento é

estabilizado, então, tem-se o estimador de máxima verossimilhança, $\hat{\theta}$, de θ .

Para o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7), tem-se os seguintes resultados para o vetor escore, \mathbf{U} , e matriz de informação observada, \mathcal{I} ,

$$\mathbf{U}(\alpha, \lambda) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\lambda x_i}) \\ \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\alpha, \lambda) &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \lambda \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} -\frac{n}{\alpha^2} & \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} & -\frac{n}{\lambda^2} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\lambda x_i}}{(1 - e^{-\lambda x_i})^2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

respectivamente. Para o chute inicial, θ_0 , foram utilizados as estimativas do método dos momentos apresentadas na Seção 2.1.2.1, com exceção de quando o valor de α estudado é 0,5 e 1, $\alpha \in \{0,5; 1\}$ que foi considerado como chute inicial para α de 0,25, afim de que a convergência ocorresse e como critério de parada foi utilizado um $\varepsilon = 10^{-10}$.

Nas Tabelas 1 e 2 são apresentados os resultados do estudo de simulação realizado. Foi escolhido um valor fixo de λ igual a dois, $\lambda = 2$, e os valores de α variaram no intervalo paramétrico de 0,5 a 100, $\alpha \in \{0,5; 1; 2; 4; 10; 20; 50; 100\}$. Para o parâmetro de localização, λ , além de 2, $\lambda = 2$, também foi considerado o valor igual a vinte e cinco, $\lambda = 25$, os resultados desta simulação são apresentados no Apêndice C. O comportamento das estimativas e da flexibilidade do modelo, apresentados no Apêndice C, são similares ao apresentado nesta seção.

A Tabela 1 traz os resultados obtidos do estudo de simulação das estimativas dos parâmetros de forma e localização, α e λ , e do logaritmo da função de verossimilhança, $l(\alpha, \lambda; \mathbf{x})$, para o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7). Percebe-se que a medida que o valor do parâmetro de forma, α , aumenta, o valor do Viés aumenta, assim como o *EQM* e o *EP*, os quais vão diminuindo a medida que o tamanho amostral, n , aumenta. O parâmetro de posição, λ , não se vê afetado pelo valor do parâmetro de forma, α , uma vez que o *Viés*, *EQM* e *EP* são similares para todos os valores de α e n considerados. Para os valores do logaritmo da função de verossimilhança, $l(\alpha, \lambda; x)$ percebe-se uma constância nos valores do *EQM*, além de que, para valores de $\alpha > 4$, a função de máxima verossimilhança não aumenta, do qual, conclui-se que para valores cada vez maiores de α não é garantido uma função de verossimilhança maior.

Tabela 1 – Estimativa dos parâmetros do modelo Exponencial Exponencializado para diferentes valores de α e $\lambda = 2$, via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Estimativas para α				Estimativas para λ				Estimativas para $l(\alpha, \lambda; x)$				
		$\hat{\alpha}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\lambda}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}; x)$	$l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}; x)$	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_{SR}$	\widehat{EQM}
0,5	20	0,56	0,06	0,04	0,19	2,38	0,38	1,17	1,01	7,72	8,79	-1,07	-19,19	2,36
	50	0,52	0,02	0,01	0,09	2,13	0,13	0,27	0,51	18,85	19,83	-0,98	-2,22	1,90
	100	0,51	0,01	0,00	0,06	2,08	0,08	0,12	0,34	38,46	39,44	-0,98	-3,99	1,90
	200	0,51	0,01	0,00	0,04	2,03	0,03	0,06	0,24	77,05	78,10	-1,04	-2,96	2,30
	500	0,50	0,00	0,00	0,03	2,01	0,01	0,02	0,14	193,95	194,91	-0,96	-0,53	1,72
1	20	1,16	0,16	0,24	0,46	2,24	0,24	0,53	0,69	-6,21	-5,14	-1,06	3,74	2,28
	50	1,07	0,07	0,05	0,21	2,12	0,12	0,18	0,40	-15,24	-14,20	-1,04	5,37	2,15
	100	1,03	0,03	0,02	0,14	2,04	0,04	0,08	0,28	-31,16	-30,13	-1,03	4,57	2,03
	200	1,01	0,01	0,01	0,10	2,02	0,02	0,04	0,19	-61,95	-60,92	-1,04	1,90	2,13
	500	1,01	0,01	0,00	0,06	2,01	0,01	0,01	0,12	-153,65	-152,71	-0,94	0,64	1,70
2	20	2,49	0,49	1,53	1,14	2,22	0,22	0,39	0,58	-12,21	-11,18	-1,03	10,26	2,12
	50	2,15	0,15	0,26	0,49	2,09	0,09	0,12	0,33	-30,51	-29,50	-1,01	3,56	2,00
	100	2,06	0,06	0,09	0,30	2,03	0,03	0,05	0,22	-61,50	-60,54	-0,96	1,62	1,79
	200	2,04	0,04	0,05	0,22	2,03	0,03	0,03	0,16	-121,99	-120,98	-1,01	0,86	2,12
	500	2,01	0,01	0,02	0,13	2,01	0,01	0,01	0,10	-307,23	-306,26	-0,97	0,32	1,92
4	20	5,21	1,21	11,68	3,20	2,17	0,17	0,29	0,51	-15,14	-14,10	-1,04	7,78	2,19
	50	4,43	0,43	1,70	1,23	2,07	0,07	0,09	0,29	-37,65	-36,65	-1,00	2,79	1,99
	100	4,17	0,17	0,67	0,80	2,03	0,03	0,04	0,21	-75,52	-74,48	-1,03	1,40	2,07
	200	4,09	0,09	0,29	0,54	2,02	0,02	0,02	0,14	-150,71	-149,67	-1,04	0,70	2,19
	500	4,03	0,03	0,09	0,31	2,00	0,00	0,01	0,08	-377,21	-376,27	-0,94	0,25	1,83
10	20	13,73	3,73	99,27	9,24	2,14	0,14	0,20	0,43	-16,76	-15,73	-1,03	6,52	1,99
	50	11,37	1,37	17,32	3,93	2,07	0,07	0,07	0,26	-41,45	-40,48	-0,96	2,41	1,79
	100	10,65	0,65	6,00	2,36	2,04	0,04	0,03	0,18	-83,02	-82,04	-0,98	1,20	1,89
	200	10,35	0,35	2,96	1,68	2,02	0,02	0,02	0,13	-166,48	-165,45	-1,03	0,63	2,21
	500	10,18	0,18	1,00	0,98	2,01	0,01	0,01	0,08	-415,13	-414,15	-0,98	0,24	1,89
20	20	34,24	14,24	4.759,74	67,54	2,14	0,14	0,43	0,01	-17,30	-16,29	-1,01	6,31	2,08
	50	23,50	3,50	114,32	10,11	2,06	0,06	0,07	0,25	-42,93	-41,96	-0,97	2,35	1,85
	100	21,70	1,70	41,67	6,23	2,03	0,03	0,03	0,17	-85,99	-85,00	-0,99	1,17	2,03
	200	21,13	1,13	18,98	4,21	2,02	0,02	0,02	0,13	-171,12	-170,09	-1,04	0,62	2,22
	500	20,21	0,21	5,68	2,38	2,00	0,00	0,01	0,08	-429,77	-428,71	-1,06	0,25	2,15
50	20	131,67	81,67	570.690,53	751,39	2,17	0,17	0,44	0,01	-17,31	-16,26	-1,05	6,72	2,17
	50	61,49	11,49	1.460,19	36,46	2,04	0,04	0,06	0,25	-44,21	-43,16	-1,05	2,45	2,17
	100	55,47	5,47	370,56	18,47	2,03	0,03	0,03	0,17	-87,38	-86,38	-1,00	1,16	1,93
	200	52,20	2,20	150,46	12,07	2,01	0,01	0,01	0,12	-175,50	-174,47	-1,03	0,59	2,22
	500	51,38	1,38	57,64	7,47	2,01	0,01	0,01	0,07	-436,32	-435,33	-0,99	0,23	2,03
100	20	259,01	159,01	332.609,61	554,65	2,16	0,16	0,43	0,01	-17,54	-16,44	-1,10	6,76	2,24
	50	133,11	33,11	9.844,60	93,58	2,05	0,05	0,06	0,24	-44,15	-43,12	-1,03	2,39	2,16
	100	114,34	14,34	2.109,12	43,65	2,03	0,03	0,03	0,16	-87,93	-86,91	-1,02	1,17	2,00
	200	106,53	6,53	905,25	29,39	2,01	0,01	0,01	0,12	-175,94	-174,96	-0,98	0,57	1,93
	500	102,46	2,46	274,96	16,41	2,00	0,00	0,01	0,07	-440,04	-439,05	-0,99	0,23	1,97

Gupta e Kundu (2001a) apresentam um estudo de simulação similar ao apresentado. Nesse estudo, apesar de Gupta e Kundu (2001) terem estimado conjuntamente os parâmetros, são fixados, apenas, valores pequenos para α e λ , $\alpha \in \{0,5; 1; 2\}$ e $\lambda \in \{0,1; 0,2\}$, com $n \in \{10; 15; 40; 50; 100\}$, avaliados através da raiz quadrada do erro quadrático médio, \sqrt{EQM} , e da probabilidade de cobertura, técnica útil na avaliação de intervalos de confiança.

As Figuras 7 e 8 apresentam, graficamente, na forma de histograma $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ na diagonal principal, na forma de gráfico de dispersão os pares $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ e na forma de curva de nível, também os pares, $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$, cada um, um conjunto de estimativas apresentado na Tabela 1 considerando $n = 20$ e $n = 500$, respectivamente, gerado via mil réplicas de Monte Carlo, a partir de um

modelo Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha = 100, \lambda = 2)$.

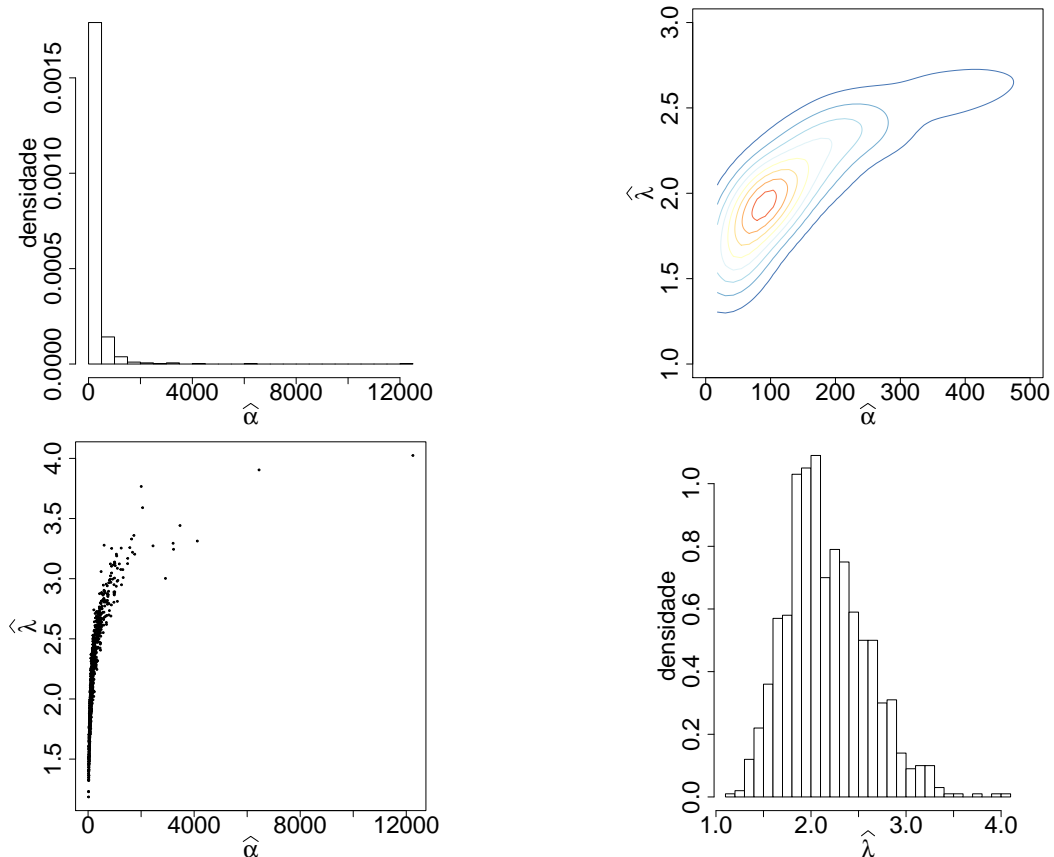


Figura 7 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha = 100, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 20$.

Na diagonal principal histograma de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$, na diagonal inferior gráfico de dispersão dos pares $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ e na diagonal superior a curva de nível, na região de maior probabilidade, dos mesmos pares.

Das Figuras 7 e 8 percebe-se que as estimativas dos parâmetros α e λ , $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$, possuem uma relação positiva, sendo a relação apresentada na Figura 8 mais linear. Tem-se ainda que, da Figura 7, o histograma da estimativas do parâmetro de forma, α , $\hat{\alpha}$, possui comportamento assimétrico a esquerda, enquanto o do parâmetro de localização, λ , $\hat{\lambda}$, possui comportamento aproximadamente simétrico em ambas as figuras. Da Figura 8 vê-se que, cada histograma possui comportamento unimodal e aproximadamente simétrico, seguindo características de um modelo aproximadamente normal e que a curva de nível também evidência um comportamento característico de um modelo normal bivariado com correlação positiva. Atende que o comportamento apresentado é esperado assintoticamente. Mais informações sobre teoria assintótica ver, por exemplo, Cordeiro (1999).

A Tabela 2 exhibe cada uma das divergências, Kullback-Leibler, (3.1) e Jeffreys, (3.2),

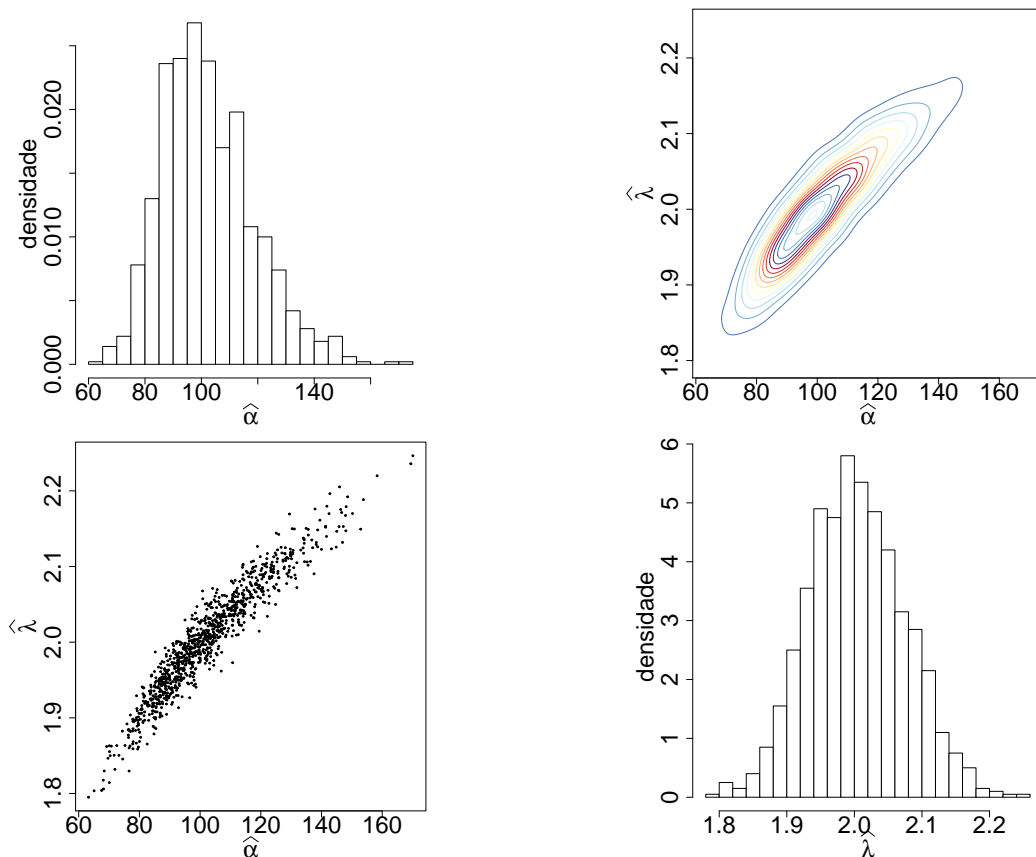


Figura 8 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha = 100, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 500$.

Na diagonal principal histograma de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$, na diagonal inferior gráfico de dispersão dos pares $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ e na diagonal superior a curva de nível dos mesmos pares.

além da distância L_1 , (3.3), avaliada pela expressão (4.6) quando $\alpha \geq 1$ e numericamente para $\alpha < 1$, com suas respectivas medidas: $Viés$, $Viés_R$, quantis 0,05 e 0,95 e intervalo interquântico ao nível de 90% ($IIQ_{0,90}$). Para valores de α igual a um, $\alpha = 1$, não foi possível avaliar o viés relativo, $Viés_R$, haja vista que o denominador da expressão (5.6) fica igual a zero.

Analisando a Tabela 2, que mede o quão distante é o modelo Exponencial, $E(\lambda = 2)$, do modelo Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$, percebe-se que a medida que o parâmetro de forma, α , aumenta, os valores das divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e da distância L_1 também aumentam, bem como o $Viés$ e o $IIQ_{0,90}$, os quais vão diminuindo a medida que o tamanho amostral, n , aumenta. Das medidas analisadas, a distância L_1 apresentou o menor $Viés_R$, enquanto a divergência de Kullback-Leibler apresentou o maior valor. Tem-se ainda que, para todos os valores de α e n estudados, a divergência de Kullback-Leibler apresentou valores menores, quando comparado a divergência de Jeffreys, tanto nas estimativas quanto nos quantis

Tabela 2 – Simulação das divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α , via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Divergência de Kullback-Leibler						Divergência de Jeffreys						Distância L_1								
		D_{kull}	\widehat{D}_{kull}	$\widehat{Vi\acute{e}s}$	$\widehat{Vi\acute{e}s}_R$	0,05	0,95	$IIQ_{0,90}$	J	\widehat{J}	$\widehat{Vi\acute{e}s}$	$\widehat{Vi\acute{e}s}_R$	0,05	0,95	$IIQ_{0,90}$	L_1	\widehat{L}_1	$\widehat{Vi\acute{e}s}$	$\widehat{Vi\acute{e}s}_R$	0,05	0,95	$IIQ_{0,90}$
0,5	20		0,18	-0,01	-6,25	0,01	0,40	0,38		0,49	-0,01	-1,68	0,03	1,19	1,17		0,23	-0,02	-9,98	0,06	0,37	0,31
	50		0,19	-0,01	-3,32	0,06	0,33	0,26		0,49	-0,01	-1,15	0,14	0,94	0,79		0,24	-0,01	-4,34	0,14	0,33	0,19
	100	0,19	0,19	-0,01	-3,22	0,09	0,28	0,19	0,50	0,49	-0,01	-2,40	0,22	0,77	0,56	0,25	0,24	-0,01	-2,92	0,17	0,30	0,14
	200		0,19	-0,00	-0,78	0,13	0,27	0,14		0,50	-0,00	-0,19	0,31	0,73	0,42		0,25	-0,00	-1,02	0,20	0,30	0,10
	500		0,19	0,00	0,27	0,15	0,24	0,08		0,50	0,00	0,59	0,38	0,64	0,25		0,25	-0,00	-0,08	0,22	0,28	0,06
1	20		0,07	0,07	-	0,00	0,27	0,27		0,12	0,12	-	0,00	0,47	0,47		0,10	0,10	-	0,01	0,24	0,23
	50		0,02	0,02	-	0,00	0,08	0,08		0,04	0,04	-	0,00	0,15	0,15		0,06	0,06	-	0,01	0,14	0,13
	100	0,00	0,01	0,01	-	0,00	0,04	0,04	0,00	0,02	0,02	-	0,00	0,07	0,07	0,00	0,04	0,04	-	0,00	0,10	0,09
	200		0,00	0,00	-	0,00	0,02	0,02		0,01	0,01	-	0,00	0,03	0,03		0,03	0,03	-	0,00	0,07	0,06
	500		0,00	0,00	-	0,00	0,01	0,01		0,00	0,00	-	0,00	0,01	0,01		0,02	0,02	-	0,00	0,04	0,04
2	20		0,65	0,35	113,08	0,05	1,95	1,90		0,95	0,45	90,23	0,08	2,66	2,58		0,29	0,04	17,07	0,10	0,50	0,40
	50		0,41	0,10	33,45	0,10	0,94	0,84		0,64	0,14	27,79	0,18	1,38	1,21		0,27	0,02	6,29	0,15	0,39	0,24
	100	0,31	0,35	0,04	13,41	0,14	0,66	0,52	0,50	0,56	0,06	11,20	0,24	1,00	0,76	0,25	0,26	0,01	2,48	0,18	0,34	0,16
	200		0,33	0,03	8,54	0,18	0,54	0,36		0,54	0,04	7,24	0,30	0,84	0,54		0,25	0,00	1,84	0,20	0,32	0,12
	500		0,32	0,01	2,73	0,22	0,44	0,22		0,51	0,01	2,28	0,36	0,70	0,33		0,25	0,00	0,49	0,22	0,29	0,08
4	20		2,68	1,06	65,93	0,61	7,53	6,92		3,45	1,20	53,27	0,93	9,01	8,08		0,50	0,03	6,88	0,33	0,71	0,38
	50		1,97	0,36	22,21	0,83	3,95	3,13		2,67	0,42	18,51	1,23	5,03	3,80		0,49	0,02	3,39	0,37	0,62	0,24
	100	1,61	1,76	0,15	9,19	0,96	2,97	2,00	2,25	2,42	0,17	7,61	1,41	3,88	2,47	0,47	0,48	0,01	1,20	0,39	0,57	0,18
	200		1,69	0,08	4,67	1,13	2,43	1,30		2,34	0,09	3,90	1,63	3,24	1,62		0,48	0,00	0,68	0,42	0,54	0,12
	500		1,64	0,02	1,36	1,30	2,04	0,74		2,28	0,03	1,12	1,85	2,77	0,92		0,47	0,00	0,16	0,44	0,51	0,07
10	20		10,26	3,56	53,12	2,82	24,26	21,44		11,82	3,72	45,98	3,71	26,65	22,94		0,72	0,02	2,90	0,56	0,85	0,29
	50		7,99	1,29	19,31	3,82	14,70	10,88		9,47	1,37	16,88	4,88	16,68	11,80		0,71	0,01	1,49	0,61	0,80	0,19
	100	6,70	7,30	0,61	9,07	4,42	10,98	6,56	8,10	8,75	0,65	7,96	5,56	12,74	7,18	0,70	0,70	0,01	0,79	0,63	0,77	0,13
	200		7,02	0,32	4,85	4,97	9,97	5,00		8,45	0,35	4,27	6,19	11,65	5,47		0,70	0,00	0,43	0,65	0,75	0,10
	500		6,87	0,17	2,52	5,61	8,44	2,83		8,28	0,18	2,23	6,89	10,00	3,11		0,70	0,00	0,32	0,67	0,73	0,06
20	20		30,02	14,02	87,60	6,95	71,05	64,10		32,29	14,24	78,87	8,37	74,40	66,02		0,82	0,01	1,64	0,70	0,93	0,23
	50		19,41	3,41	21,30	8,94	37,75	28,81		21,54	3,49	19,36	10,54	40,52	29,98		0,82	0,01	0,74	0,74	0,89	0,15
	100	16,00	17,66	1,66	10,36	10,51	28,38	17,88	18,05	19,75	1,70	9,44	12,23	30,91	18,68	0,81	0,81	0,00	0,43	0,76	0,87	0,11
	200		17,09	1,09	6,81	11,78	24,22	12,44		19,18	1,13	6,24	13,59	26,60	13,02		0,81	0,00	0,43	0,77	0,85	0,08
	500		16,21	0,21	1,28	12,71	20,18	7,47		18,26	0,21	1,16	14,58	22,42	7,84		0,81	-0,00	-0,01	0,78	0,84	0,05
50	20		126,42	81,33	180,38	18,47	300,82	282,35		129,69	81,67	170,07	20,63	305,55	284,92		0,91	0,01	1,04	0,83	0,98	0,15
	50		56,49	11,40	25,28	23,41	118,97	95,56		59,51	11,49	23,92	25,77	122,80	97,04		0,91	0,00	0,13	0,85	0,95	0,10
	100	45,09	50,50	5,41	12,01	27,91	86,31	58,40	48,02	53,49	5,47	11,39	30,42	89,84	59,42	0,91	0,91	0,00	0,15	0,87	0,94	0,07
	200		47,27	2,18	4,84	31,05	68,84	37,79		50,22	2,20	4,58	33,65	72,16	38,51		0,90	0,00	0,01	0,88	0,93	0,05
	500		46,45	1,36	3,01	36,04	59,68	23,64		49,40	1,38	2,87	38,77	62,87	24,10		0,91	0,00	0,08	0,89	0,92	0,03
100	20		253,03	158,64	168,06	32,79	840,95	808,16		257,02	159,01	162,24	35,44	846,70	811,26		0,95	0,00	0,35	0,88	0,99	0,11
	50		127,37	32,98	34,93	46,24	281,25	235,01		131,12	33,11	33,78	49,19	285,92	236,73		0,95	0,00	0,13	0,91	0,98	0,07
	100	94,40	108,66	14,27	15,11	55,88	189,68	133,80	98,10	112,35	14,34	14,63	59,01	193,97	134,96	0,95	0,95	0,00	0,11	0,92	0,97	0,05
	200		100,89	6,50	6,88	64,08	155,76	91,68		104,54	6,53	6,66	67,34	159,85	92,52		0,95	0,00	0,02	0,93	0,96	0,04
	500		96,84	2,45	2,59	74,13	126,02	51,90		100,47	2,46	2,51	77,52	129,91	52,40		0,95	0,00	0,01	0,93	0,96	0,02

0,05 e 0,95, bem como um menor $IIQ_{0,90}$, estando assim, de acordo com a teoria apresentada na Subsecção 3.4.

As Figuras 9, 10 e 11 evidenciam os resultados dos quantis 0,05 e 0,95 das medidas de divergência de Kullback-Leibler, (3.1), e Jeffreys, (3.2) e da distância L_1 , (3.3), nesta ordem, tendo os valores reportados na Tabela 2. Note que, em cada uma das Figuras 9, 10 e 11, a linha sólida preta descreve os verdadeiros valores da medida, enquanto os valores abaixo representam os quantis 0,05 e os acima os quantis 0,95. Tem-se ainda que para valores de α menor que um, $\alpha < 1$, a função possui um comportamento decrescente, ao passo que para valores maiores que um, $\alpha > 1$, a função possui comportamento antagônico, crescente. Desse modo, para que o comportamento descrito, anteriormente, seja percebido, em cada uma das figuras, a Figura (b) funciona como um “zoom” para os valores pequenos de α , $0,5 < \alpha \leq 4$, da Figura (a).

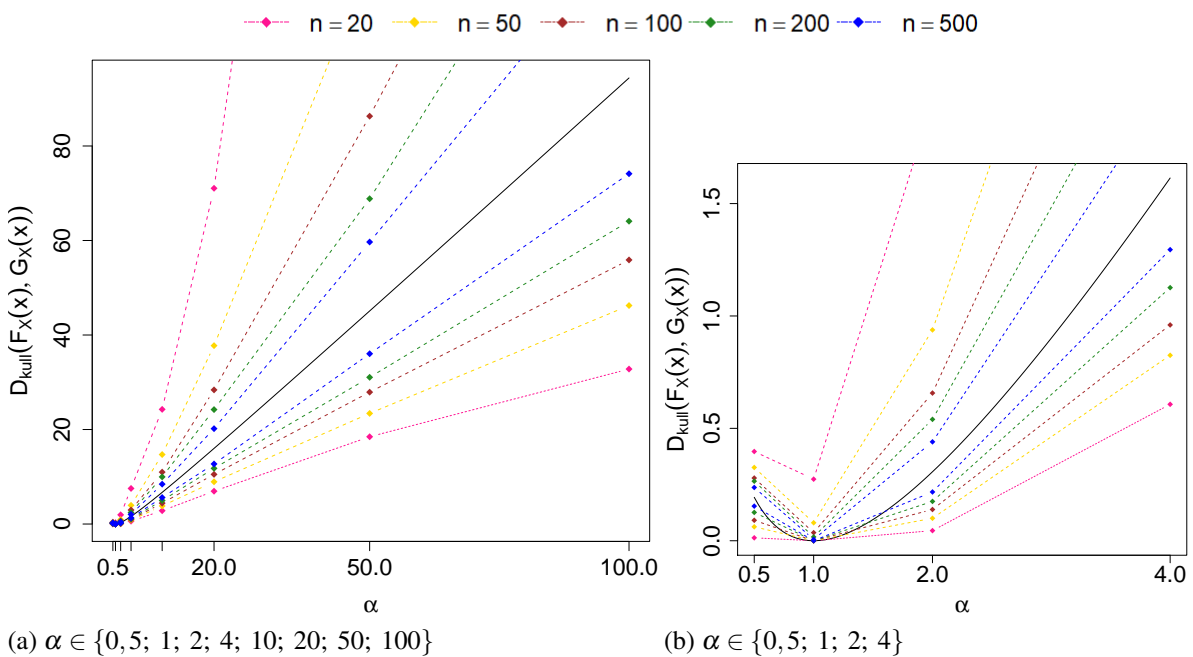


Figura 9 – Simulação da divergência de Kullback-Leibler entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n .

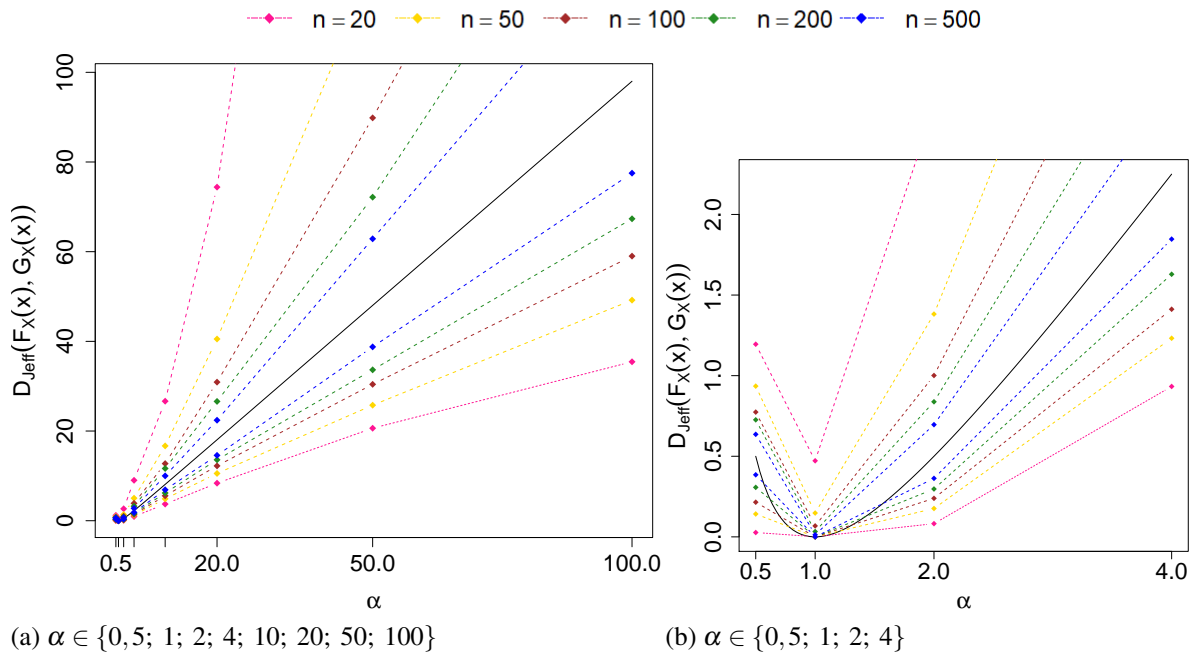


Figura 10 – Simulação da divergência de Jeffreys entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n .

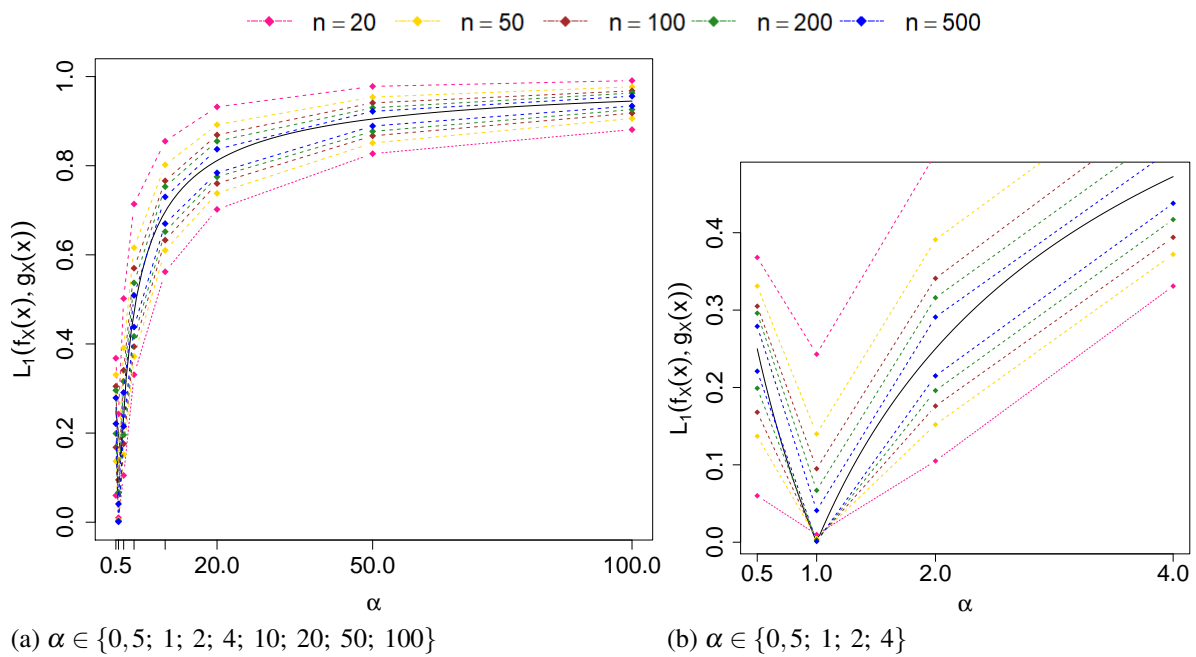


Figura 11 – Simulação da distância L_1 entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 2)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n .

5.2 Modelo Weibull Exponencializada

As estimativas do modelo Weibull Exponencializado, $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, e $\hat{\lambda}$, através do método de máxima verossimilhança são calculadas utilizando o método numérico “BFGS”. O método “BFGS” pode ser encontrado, por exemplo, no *Software R*, implementado dentro do pacote *stats*, função *optim*. Mais informações sobre este e outros métodos de otimização podem ser vistas, por exemplo, em Kelley (1999).

As Tabelas 3 e 4 apresentam, respectivamente, as estimativas dos parâmetros obtidas pelo método de máxima verossimilhança apresentado na Subsecção 2.2.2.1 e as medidas de divergência de Kullback-Leibler, (3.1) e Jeffreys, (3.2), e da distância L_1 , (3.3), avaliada pela expressão (4.6) quando $\alpha \geq 1$ e numericamente para $\alpha < 1$. Foram fixados os valores de γ e λ iguais a dois, $\gamma = 2$ e $\lambda = 2$, e os valores de α variam no intervalo paramétrico de 0,5 a 100, $\alpha \in \{0,5; 1; 2; 4; 10; 20; 50; 100\}$. Outros valores para os parâmetros de forma, γ , e localização, λ , foram considerados, $\gamma = 25$ e $\lambda = 25$: $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 2)$; $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 25)$ e $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 25)$. Os resultados das simulações são apresentados no Apêndice B e possuem um comportamento similar ao apresentado considerando $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$.

Na Tabela 3 percebe-se que o *Viés* aumenta para valores de α de 0,5 a 20, $\alpha \in \{0,5; 1; 2; 4; 10; 20\}$ e $\gamma = 2$, o *EQM* e o *EP* aumentam a medida que os valores de α aumentam, com exceção do valor do *EP* quando $\alpha = 2$. Atente-se ainda ao fato de que, como os parâmetros de α e γ são parâmetro de forma, a presença de valores grandes para α afeta a estimação de todos os parâmetros do modelo, ao passo que os parâmetros α e λ são subestimados. Note ainda que todas as questões abordadas são corrigidas a medida que o tamanho amostral, n , aumenta. Por outro lado, a função de verossimilhança cresce a medida que α aumenta, porém a taxa de crescimento diminui conforme α aumenta. Conclusões análogas são tiradas dos estudos de simulação feitos considerando outros valores de γ e λ , $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 2)$; $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 25)$ e $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 25)$, estes são encontrados no Apêndice B, Tabelas 7, 9 e 11, respectivamente.

As Figuras 12 e 13 apresentam, graficamente, na forma de histograma $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\lambda}$ na diagonal principal, na forma de gráfico de dispersão os pares $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$, $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ e $(\hat{\gamma}, \hat{\lambda})$ e na forma de curva de nível, também os pares, $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$, $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ e $(\hat{\gamma}, \hat{\lambda})$, cada um, um conjunto de estimativas apresentado na Tabela 3 considerando $n = 20$ e $n = 500$, respectivamente, gerado via mil réplicas de Monte Carlo, a partir de um modelo Weibull Exponencializado, $WE(\alpha = 100, \gamma = 2, \lambda = 2)$.

Tabela 3 – Estimativa dos parâmetros do modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 2$ e $\lambda = 2$, via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Estimativas para α				Estimativas para γ				Estimativas para λ				Estimativas para $l(\alpha, \lambda, \gamma, x)$				
		$\hat{\alpha}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\gamma}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\lambda}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$l(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	$l(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	\widehat{EQM}
0,5	20	1,56	1,06	29,98	5,37	3,93	1,93	14,33	3,26	5,56	3,56	455,60	21,06	4,39	6,08	-1,68	-15,05	4,46
	50	0,62	0,12	0,38	0,60	2,65	0,65	3,01	1,61	2,34	0,34	2,67	1,60	10,87	12,48	-1,61	-19,36	4,19
	100	0,53	0,03	0,10	0,32	2,29	0,29	0,87	0,88	2,09	0,09	0,40	0,63	21,50	23,06	-1,56	-7,26	4,13
	200	0,51	0,01	0,03	0,17	2,12	0,12	0,26	0,49	2,03	0,03	0,10	0,32	41,71	43,20	-1,49	-4,05	3,73
	500	0,50	0,00	0,01	0,09	2,04	0,04	0,07	0,27	2,01	0,01	0,03	0,18	105,63	107,14	-1,51	-1,50	3,79
1	20	6,58	5,58	674,99	25,39	4,25	2,25	28,10	4,80	6,50	4,50	472,19	21,27	1,76	3,48	-1,72	-1.223,32	4,80
	50	1,51	0,51	8,65	2,90	2,55	0,55	3,07	1,66	2,43	0,43	5,68	2,35	4,70	6,26	-1,57	-26,18	3,99
	100	1,21	0,21	1,72	1,29	2,15	0,15	0,56	0,73	2,18	0,18	1,27	1,12	9,53	11,12	-1,59	-6,45	4,24
	200	1,04	0,04	0,14	0,37	2,08	0,08	0,19	0,43	2,04	0,04	0,11	0,33	19,23	20,68	-1,45	-6,05	3,48
	500	1,02	0,02	0,05	0,21	2,02	0,02	0,07	0,25	2,02	0,02	0,04	0,20	48,71	50,24	-1,53	-3,99	3,90
2	20	10,97	8,97	627,36	23,40	3,96	1,96	34,49	5,54	4,04	2,04	59,15	7,42	2,66	4,27	-1,61	25,13	4,30
	50	4,36	2,36	94,71	9,45	2,40	0,40	2,43	1,51	2,56	0,56	4,69	2,09	6,95	8,49	-1,53	-13,72	3,86
	100	2,52	0,52	3,73	1,86	2,12	0,12	0,50	0,70	2,17	0,17	0,47	0,66	13,87	15,36	-1,49	-11,36	3,71
	200	2,22	0,22	1,16	1,05	2,06	0,06	0,17	0,41	2,08	0,08	0,17	0,41	27,71	29,24	-1,52	-6,74	3,81
	500	2,07	0,07	0,27	0,52	2,02	0,02	0,06	0,25	2,03	0,03	0,05	0,21	68,90	70,39	-1,50	-2,43	3,76
4	20	22,05	18,05	1.779,18	38,14	4,39	2,39	57,28	7,18	3,28	1,28	9,47	2,80	4,60	6,24	-1,65	-45,39	4,38
	50	12,85	8,85	766,90	26,26	2,29	0,29	3,69	1,90	2,80	0,80	5,68	2,25	11,05	12,59	-1,54	-16,64	3,82
	100	6,42	2,42	139,18	11,55	2,15	0,15	0,46	0,66	2,24	0,24	1,37	1,14	22,72	24,26	-1,54	-10,73	3,88
	200	5,05	1,05	16,92	3,98	2,03	0,03	0,18	0,43	2,14	0,14	0,33	0,56	45,58	47,04	-1,46	-3,56	3,54
	500	4,35	0,35	2,73	1,61	2,01	0,01	0,07	0,27	2,05	0,05	0,08	0,29	112,64	114,17	-1,53	-1,40	4,01
10	20	42,65	32,65	4.657,91	59,96	4,14	2,14	61,34	7,54	2,70	0,70	3,57	1,75	7,08	8,60	-1,52	1,86	3,93
	50	30,62	20,62	3.159,45	52,32	2,31	0,31	1,30	1,10	2,52	0,52	2,50	1,50	17,80	19,36	-1,56	-9,46	4,02
	100	21,68	11,68	1.219,06	32,92	2,10	0,10	0,48	0,69	2,35	0,35	1,26	1,06	35,78	37,24	-1,46	-4,39	3,45
	200	13,84	3,84	242,69	15,11	2,07	0,07	0,22	0,46	2,13	0,13	0,41	0,63	70,49	72,00	-1,51	-2,28	3,89
	500	11,38	1,38	38,67	6,07	2,02	0,02	0,08	0,29	2,06	0,06	0,12	0,34	176,48	177,98	-1,50	-0,86	3,81
20	20	65,31	45,31	8.048,20	77,47	4,08	2,08	69,50	8,08	2,42	0,42	1,83	1,29	8,93	10,45	-1,52	-12,51	4,05
	50	51,91	31,91	5.631,33	67,96	2,32	0,32	1,51	1,19	2,35	0,35	1,27	1,07	22,27	23,70	-1,43	-11,65	3,32
	100	40,71	20,71	3.044,98	51,17	2,16	0,16	0,54	0,72	2,25	0,25	0,87	0,90	44,61	46,10	-1,49	-3,59	3,64
	200	33,02	13,02	1.651,24	38,51	2,07	0,07	0,25	0,49	2,17	0,17	0,52	0,70	89,50	91,03	-1,53	-1,77	3,93
	500	24,36	4,36	267,53	15,77	2,02	0,02	0,08	0,29	2,07	0,07	0,15	0,38	222,89	224,38	-1,49	-0,68	3,81
50	20	84,58	34,58	12.145,64	104,69	4,73	2,73	107,23	9,99	1,91	-0,09	0,74	0,85	11,37	12,81	-1,44	-19,86	3,55
	50	75,75	25,75	7.160,04	80,64	2,46	0,46	1,46	1,12	2,02	0,02	0,51	0,71	27,26	28,63	-1,37	-5,66	3,18
	100	80,69	30,69	7.760,45	82,62	2,26	0,26	0,65	0,76	2,07	0,07	0,43	0,66	55,90	57,39	-1,48	-2,71	3,78
	200	73,22	23,22	5.603,94	71,20	2,11	0,11	0,25	0,49	2,08	0,08	0,31	0,55	110,41	111,86	-1,45	-1,33	3,54
	500	60,19	10,19	2.202,34	45,83	2,06	0,06	0,10	0,31	2,02	0,02	0,15	0,39	275,41	276,89	-1,48	-0,55	3,65
100	20	98,01	-1,99	11.400,15	106,81	4,88	2,88	123,75	10,75	1,72	-0,28	0,52	0,66	12,39	13,79	-1,40	-13,35	3,45
	50	101,98	1,98	9.981,64	99,94	2,62	0,62	1,87	1,22	1,81	-0,19	0,31	0,52	31,08	32,45	-1,36	-4,69	3,27
	100	107,71	7,71	10.030,20	99,90	2,37	0,37	0,70	0,75	1,87	-0,13	0,26	0,50	62,49	63,87	-1,39	-2,26	3,34
	200	105,85	5,85	7.178,50	84,57	2,20	0,20	0,24	0,45	1,92	-0,08	0,17	0,41	124,68	126,04	-1,35	-1,10	3,08
	500	101,47	1,47	4.563,54	67,57	2,11	0,11	0,10	0,29	1,94	-0,06	0,10	0,31	311,96	313,39	-1,43	-0,46	3,37

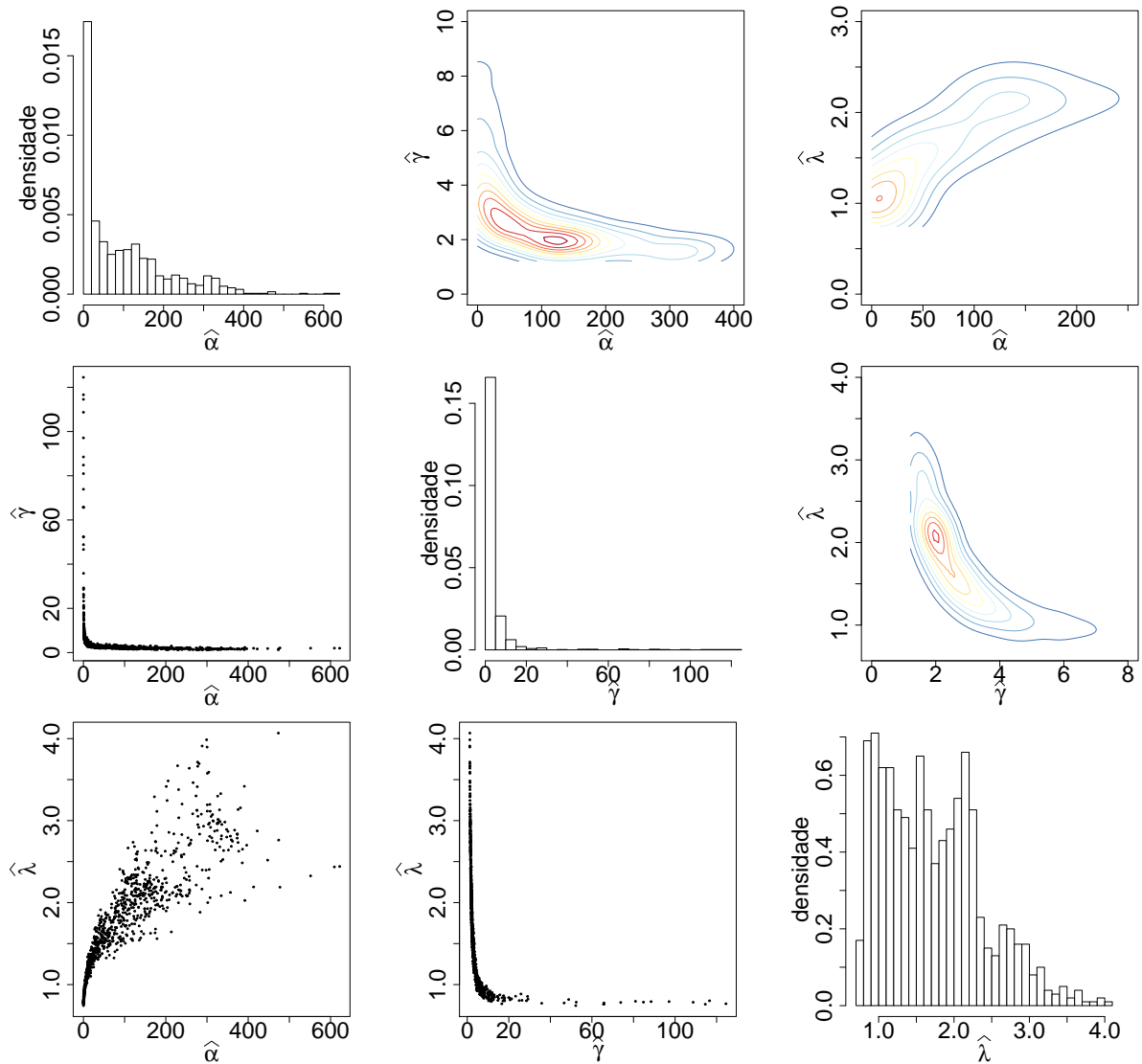


Figura 12 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Weibull Exponencializado, $WE(\alpha = 100, \gamma = 2, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 20$.

Na diagonal principal histograma de $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\lambda}$, na diagonal inferior gráfico de dispersão dos pares $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$, $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ e $(\hat{\lambda}, \hat{\gamma})$, e na diagonal superior a curva de nível, na região de maior probabilidade, dos mesmos pares.

A Figura 12 apresenta na diagonal principal um histograma das estimativas dos parâmetros α , γ e λ , note que os histogramas de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$, ambos parâmetros de forma, possuem comportamento assimétrico a esquerda enquanto que as estimativas do parâmetro de localização, $\hat{\lambda}$, apresenta comportamento similar a bimodalidade. A Figura 13, que considera um tamanho amostral, n , vinte e cinco vezes maior que o apresentado na Figura 12, $n = 500$, possui, os mesmos histogramas, com uma amplitude menor, principalmente o das estimativas de γ , $\hat{\gamma}$, que possui um comportamento característico do modelo normal, enquanto as estimativas de α , $\hat{\alpha}$ e λ , $\hat{\lambda}$ carecem de um n ainda maior para apresentar tal comportamento. Os gráficos de dispersão

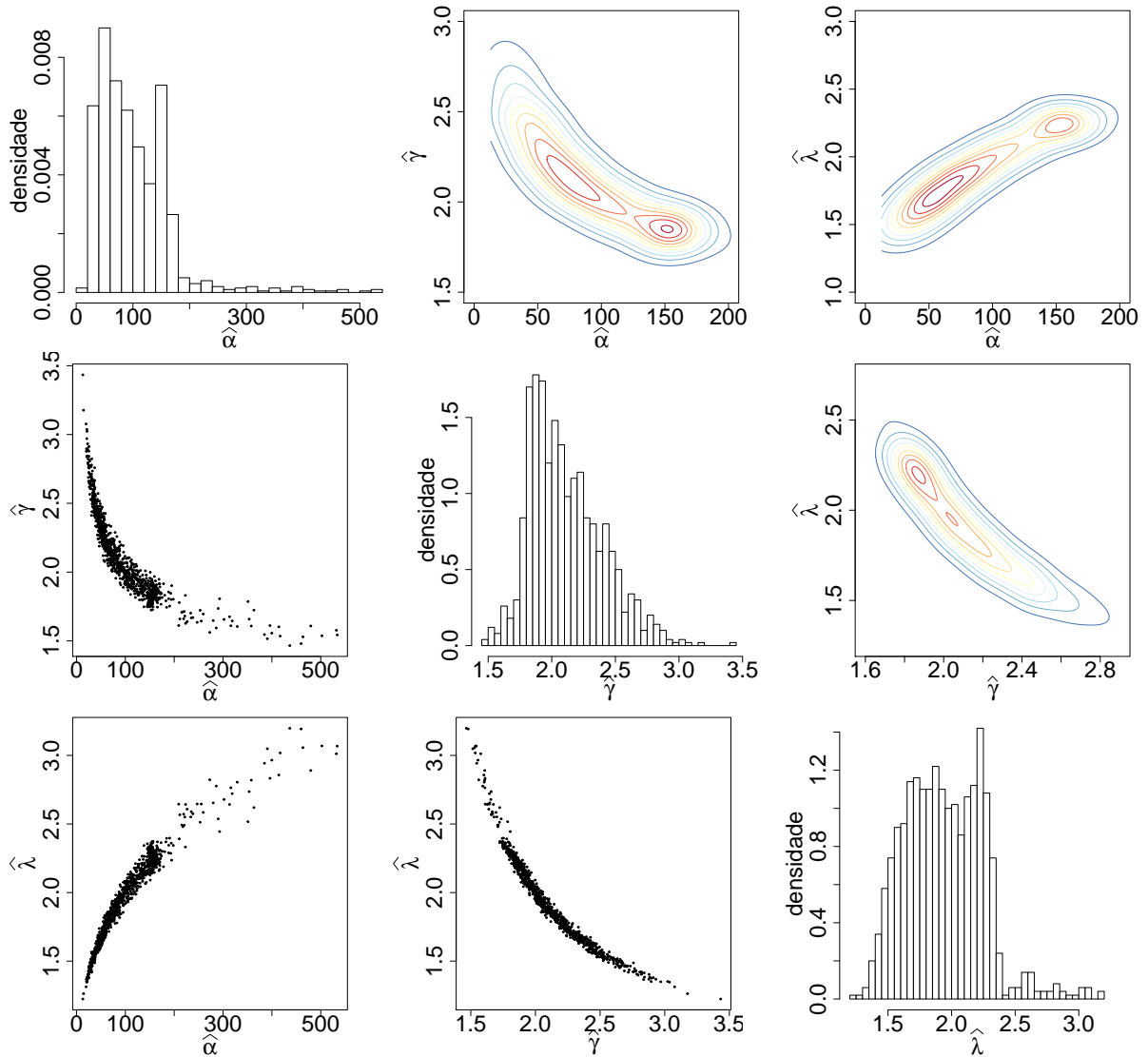


Figura 13 – Estimativas de máxima verossimilhança via mil réplicas de Monte Carlo do modelo Weibull Exponencializado, $WE(\alpha = 100, \gamma = 2, \lambda = 2)$, de tamanho amostral, $n = 500$.

Na diagonal principal histograma de $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\lambda}$, na diagonal inferior gráfico de dispersão dos pares $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$, $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ e $(\hat{\lambda}, \hat{\gamma})$, e na diagonal superior a curva de nível, na região de maior probabilidade, dos mesmos pares.

2×2 , em ambas as figuras, apresentam relação positiva apenas para o par $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$, enquanto os pares $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ e $(\hat{\gamma}, \hat{\lambda})$ apresentam relação negativo, mesma conclusão pode ser tomada dos gráficos de curva de nível, note que estes estão definidos apenas na região de maior probabilidade, havendo ressalva apenas ao fato de que para $n = 500$ as relações, discutidas, apresentam menor dispersão quando comparadas a $n = 20$.

A Tabela 4 exhibe cada uma das divergências, Kullback-Leibler, (3.1) e Jeffreys, (3.2), além da distância L_1 , (3.3), avaliada pela expressão (4.6) quando $\alpha \geq 1$ e numericamente para $\alpha < 1$, com suas respectivas medidas: $Viés$, $Viés_R$, quantis 0,05 e 0,95 e intervalo interquartilico

Tabela 4 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α , via mil réplicas de Monte Carlo.

α	n	Divergência de Kullback-Leibler						Divergência de Jeffreys						Distância L_1									
		D_{kull}	\widehat{D}_{kull}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	$IIQ_{0,90}$	J	\widehat{J}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	$IIQ_{0,90}$	L_1	\widehat{L}_1	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	$IIQ_{0,90}$	
0,5	20		1,40	1,21	625,72	0,01	3,02	3,01		3,95	3,45	690,16	0,02	10,84	10,81		0,43	0,18	73,37	0,06	0,74		0,69
	50		0,39	0,20	102,63	0,01	1,21	1,20		1,43	0,93	186,08	0,01	5,81	5,80		0,31	0,06	23,16	0,04	0,64		0,60
	100	0,19	0,28	0,08	42,63	0,00	0,79	0,78	0,50	0,89	0,39	77,36	0,01	3,06	3,05	0,25	0,27	0,02	6,97	0,03	0,53		0,49
	200		0,23	0,04	19,55	0,03	0,52	0,49		0,67	0,17	33,72	0,06	1,70	1,65		0,26	0,01	2,86	0,09	0,42		0,34
	500		0,21	0,01	7,43	0,07	0,37	0,30		0,56	0,06	12,13	0,17	1,09	0,92		0,25	0,00	1,27	0,15	0,35		0,20
1	20		5,56	5,56	-	0,00	18,85	18,84		7,27	7,27	-	0,01	21,03	21,02		0,40	0,40	-	0,03	0,83		0,80
	50		0,56	0,56	-	0,00	1,76	1,76		0,97	0,97	-	0,00	4,10	4,10		0,22	0,22	-	0,01	0,58		0,57
	100	0,00	0,19	0,19	-	0,00	0,60	0,60	0,00	0,33	0,33	-	0,00	1,28	1,28	0,00	0,14	0,14	-	0,01	0,38		0,37
	200		0,06	0,06	-	0,00	0,21	0,21		0,11	0,11	-	0,00	0,45	0,45		0,09	0,09	-	0,01	0,24		0,23
	500		0,02	0,02	-	0,00	0,08	0,08		0,04	0,04	-	0,00	0,16	0,16		0,06	0,06	-	0,01	0,14		0,14
2	20		9,08	8,77	2.859,14	0,00	54,76	54,76		10,46	9,96	1.992,27	0,01	57,87	57,86		0,44	0,19	76,71	0,04	0,92		0,88
	50		2,58	2,27	740,67	0,00	10,17	10,16		3,07	2,57	513,38	0,01	11,86	11,86		0,31	0,06	24,61	0,03	0,76		0,73
	100	0,31	0,78	0,48	155,35	0,00	3,13	3,12	0,50	1,09	0,59	117,09	0,01	4,07	4,07	0,25	0,27	0,02	8,71	0,03	0,58		0,55
	200		0,51	0,20	65,06	0,01	1,71	1,70		0,75	0,25	49,40	0,02	2,37	2,35		0,25	0,00	1,45	0,06	0,48		0,43
	500		0,37	0,07	21,69	0,05	0,94	0,88		0,58	0,08	16,84	0,10	1,38	1,28		0,25	0,00	0,21	0,12	0,39		0,28
4	20		19,49	17,88	1.107,91	0,01	102,09	102,08		21,13	18,88	839,19	0,02	105,78	105,76		0,53	0,06	12,93	0,05	0,95		0,90
	50		10,21	8,60	532,84	0,02	50,50	50,48		11,22	8,97	398,49	0,04	53,54	53,50		0,49	0,02	4,04	0,07	0,91		0,84
	100	1,61	3,98	2,37	146,83	0,09	12,86	12,77	2,25	4,73	2,48	110,15	0,16	14,74	14,58	0,47	0,46	-0,01	-2,43	0,15	0,79		0,64
	200		2,60	0,98	60,82	0,35	7,90	7,55		3,32	1,07	47,40	0,56	9,42	8,86		0,48	0,01	1,53	0,26	0,72		0,46
	500		1,94	0,33	20,19	0,61	4,31	3,70		2,61	0,36	15,98	0,94	5,43	4,49		0,48	0,00	0,62	0,33	0,63		0,30
10	20		39,28	32,58	486,44	0,02	168,60	168,58		41,27	33,17	409,49	0,04	172,77	172,73		0,64	-0,06	-8,52	0,07	0,97		0,89
	50		27,14	20,44	305,22	0,16	144,54	144,39		28,79	20,69	255,45	0,27	148,56	148,29		0,66	-0,04	-5,73	0,19	0,96		0,77
	100	6,70	18,19	11,50	171,65	0,82	78,66	77,83	8,10	19,80	11,70	144,50	1,23	82,10	80,87	0,70	0,69	-0,01	-1,49	0,37	0,94		0,56
	200		10,49	3,80	56,68	1,46	32,18	30,72		11,96	3,86	47,63	2,06	34,82	32,76		0,68	-0,01	-1,91	0,46	0,88		0,42
	500		8,05	1,35	20,19	2,65	17,67	15,02		9,48	1,38	17,09	3,51	19,80	16,29		0,69	-0,00	-0,59	0,55	0,82		0,27
20	20		61,33	45,33	283,22	0,07	213,41	213,35		63,74	45,69	253,13	0,13	217,81	217,68		0,72	-0,09	-11,39	0,13	0,97		0,84
	50		47,78	31,78	198,56	0,65	202,69	202,05		50,01	31,96	177,06	0,99	207,04	206,05		0,76	-0,05	-6,31	0,34	0,97		0,63
	100	16,00	36,62	20,62	128,83	1,84	153,82	151,98	18,05	38,78	20,73	114,87	2,53	157,91	155,37	0,81	0,78	-0,03	-4,17	0,49	0,96		0,47
	200		28,94	12,93	80,80	3,39	96,67	93,28		31,09	13,04	72,23	4,37	100,31	95,93		0,80	-0,01	-1,81	0,59	0,95		0,35
	500		20,32	4,31	26,95	6,39	48,87	42,47		22,41	4,36	24,18	7,76	51,87	44,11		0,81	-0,00	-0,53	0,69	0,91		0,22
50	20		80,34	35,25	78,18	0,12	316,99	316,87		82,94	34,92	72,72	0,22	321,77	321,56		0,75	-0,16	-17,33	0,17	0,98		0,81
	50		71,10	26,01	57,69	1,52	241,07	239,55		73,82	25,80	53,72	2,13	245,59	243,45		0,83	-0,08	-8,42	0,46	0,97		0,51
	100	45,09	75,87	30,78	68,26	3,70	264,89	261,19	48,02	78,73	30,71	63,96	4,74	269,50	264,76	0,91	0,86	-0,04	-4,89	0,61	0,98		0,37
	200		68,31	23,23	51,51	8,26	218,91	210,66		71,25	23,23	48,37	9,80	223,34	213,53		0,88	-0,02	-2,43	0,73	0,97		0,24
	500		55,31	10,22	22,68	12,80	136,73	123,93		58,21	10,19	21,22	14,67	140,70	126,03		0,89	-0,01	-1,54	0,78	0,96		0,17
100	20		93,45	-0,94	-1,00	0,18	318,20	318,03		96,31	-1,70	-1,74	0,30	322,99	322,69		0,79	-0,15	-16,08	0,20	0,98		0,78
	50		96,97	2,58	2,73	2,61	283,22	280,61		100,02	2,01	2,06	3,46	287,89	284,43		0,86	-0,08	-8,59	0,55	0,98		0,43
	100	94,40	102,52	8,12	8,61	6,72	318,76	312,04	98,10	105,74	7,73	7,88	8,12	323,55	315,43	0,95	0,89	-0,05	-5,42	0,70	0,98		0,28
	200		100,51	6,11	6,48	14,35	241,85	227,50		103,87	5,86	5,98	16,31	246,37	230,06		0,92	-0,03	-2,96	0,80	0,97		0,18
	500		96,04	1,64	1,74	26,27	182,64	156,37		99,49	1,48	1,51	28,72	186,89	158,16		0,93	-0,02	-1,61	0,86	0,97		0,11

ao nível de 90% ($IIQ_{0,90}$).

Da Tabela 4 pode-se ter conclusões análogas as já analisadas na Tabela 2, o que é esperado, haja vista que como apresentado nos Corolários 4.1.1, 4.1.3 e 4.1.4 a distância entre a distribuição de base, $f_X(x)$, e a distribuição gerada a partir da base, $g_X(x)$, gerado a partir de (2.1), somente depende do parâmetro de forma, α , acrescentado. É notório, ainda, que as medidas apresentadas na Tabela 4 são superiores as medidas da Tabela 2, porém este comportamento pode ser explicado pela estimação do parâmetro α , que depende da estimação dos demais parâmetros do modelo. Na Tabela 4 para valores grandes de α , $\alpha = 100$, as medidas estudadas possuem comportamento diferente dos demais, tendo em conta a dificuldade associada a estimação dos parâmetros do modelo, apresentado na Tabela 3, quando considerado α grande. O comportamento das medidas de Kullback-Leibler, (3.1), Jeffreys, (3.2) e L_1 , (3.3), para os demais valores de γ e λ , apresentados no Apêndice B, são análogos aos aqui discutidos.

As Figuras 14, 15 e 16 evidenciam os resultados exibidos na Tabela 4 das medidas de divergência de Kullback-Leibler e Jeffreys e da distância L_1 , nesta ordem.

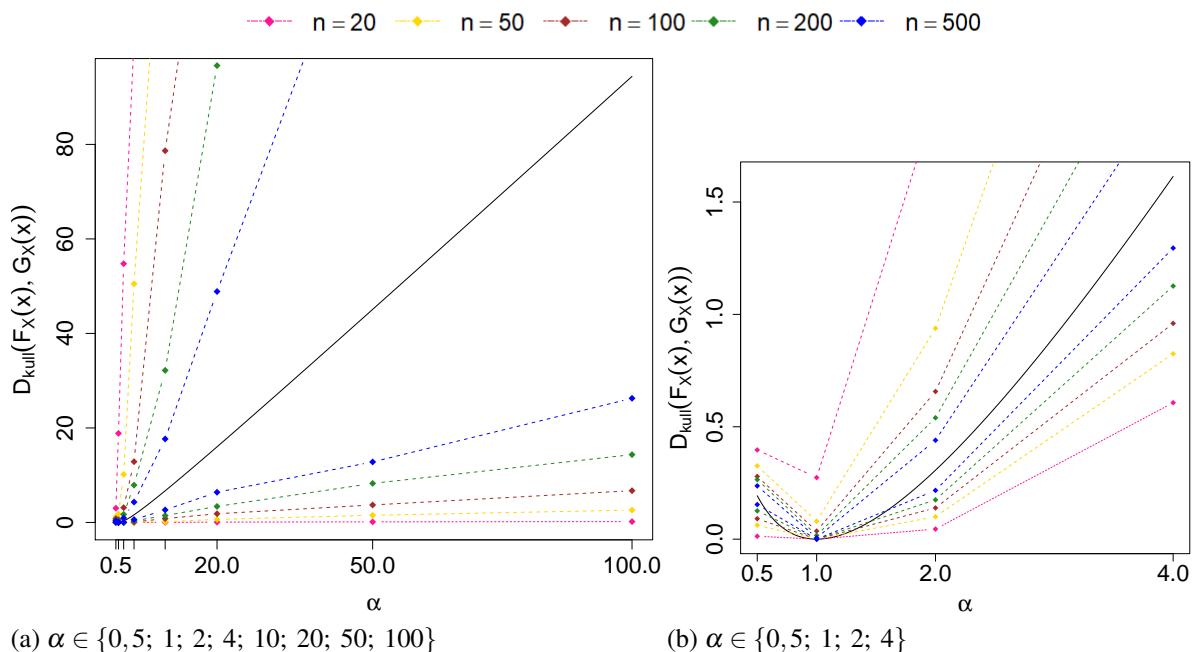


Figura 14 – Simulação da divergência de Kullback-Leibler entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n .

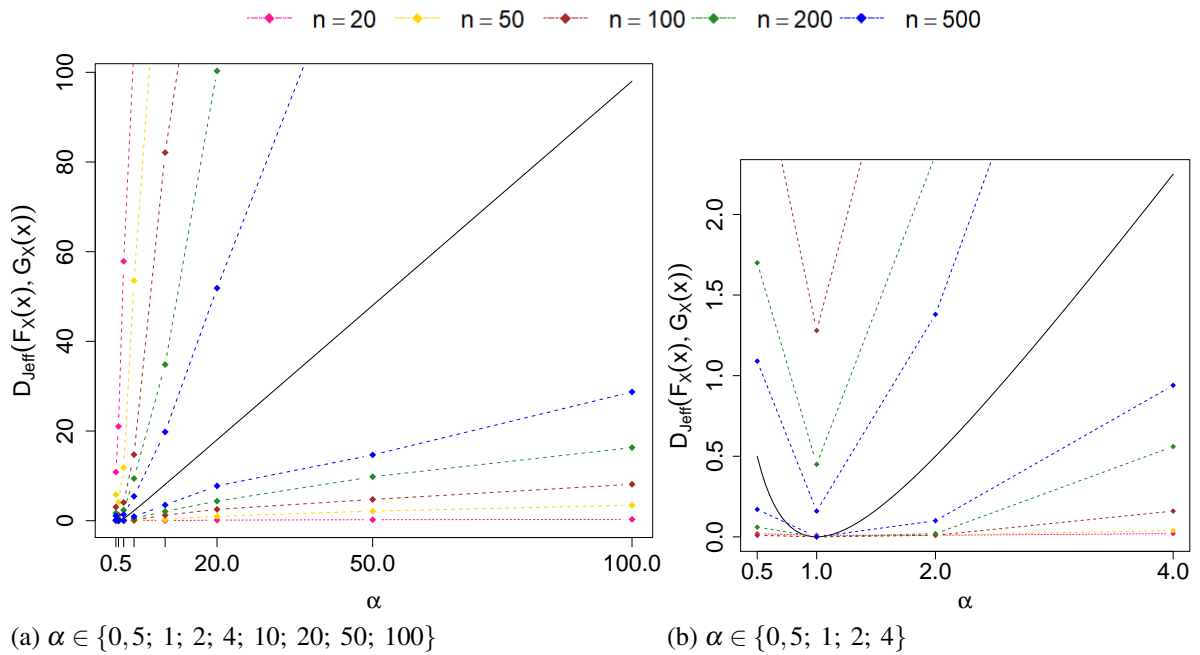


Figura 15 – Simulação da divergência de Jeffreys entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n .

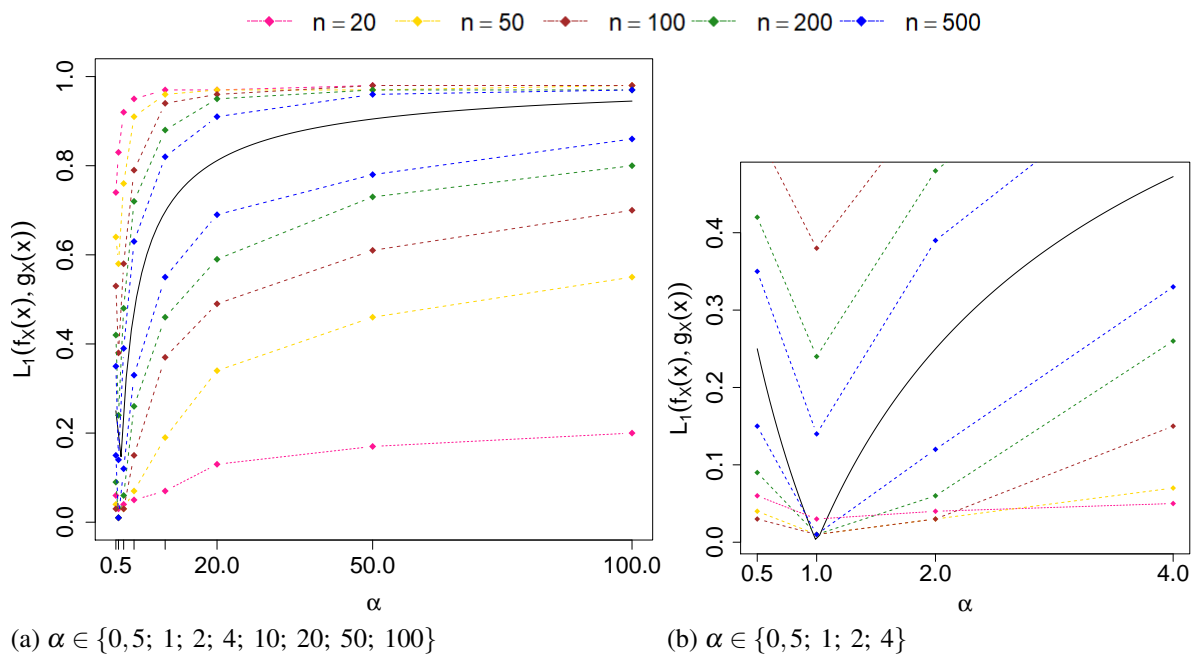


Figura 16 – Simulação da distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e tamanhos amostrais, n .

Note que em todas as Figuras, 14, 15 e 16, a medida que o parâmetro de forma, α , aumenta, os intervalos interquânticos ao nível de 90%, $IIQ_{0,90}$, aumentam, estando assim alinhado com os dados apresentados e discutidos na Tabela 4. Atente a Figura 14 que para tamanho amostral, n , igual a cinquenta, $n = 50$, e valor de α igual a um, $\alpha = 1$, a divergência de Kullback-Leibler, (3.1), logo cresce, apresentando um comportamento não esperado. Atente ainda a Figura 16, que quando o tamanho amostral, n , é pequeno, $n = 20$, e o parâmetro de forma, α , é inferior ou igual a dois, $\alpha \leq 2$, o quantil 0,05 tende a apresentar valores maiores que os demais valores de n , $n \in \{50, 100, 200, 500\}$, mas tal comportamento é corrigido a medida que α aumenta, $\alpha > 2$.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foi avaliada a flexibilidade dos modelos exponencializados, por meio das divergências de Kullback-Leibler, (3.1) e de Jeffreys (3.2) além da distância L_1 , (3.3), entre os modelos de base, $f_X(x)$, e exponencializado, $g_X(x)$. Foram realizados, ainda, estudos de simulação com os modelos Exponencial Exponencializado e Weibull Exponencializado, como casos particulares, afim de avaliar o comportamento das medidas de divergência e de distância e consequentemente dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.

Na Secção 4, foram obtidas expressões explícitas para todas as medidas estudadas, Kullback-Leibler, (3.1), Jeffreys (3.2) e distância L_1 , (3.3), esta definida apenas para $\alpha > 1$, entre o modelo de base, $f_X(x)$ e o modelo exponencializado, $g_X(x)$, bem como, uma comparação entre elas. Estas medidas, ainda, resultaram ser funções unicamente do parâmetro adicional, α , dessa forma foram obtidas expressões para toda a família exponencializada.

Na Secção 5 é apresentado um estudo de simulação com os modelos Exponencial Exponencializado e Weibull Exponencializado e vê-se que a medida que o valor do parâmetro de forma, α , aumenta, é necessário maiores valores para o tamanho amostral, n , para controlar as medidas de *Viés*, *EQM* e *EP*. Tem-se ainda o comportamento de cada uma das medidas abordadas, Kullback-Leibler, (3.1), Jeffreys (3.2) e distância L_1 , (3.3), e vê-se, também, que estas medidas são afetadas na presença de grandes valores de α , ao ponto que, requerem tamanhos amostrais cada vez maiores para que estejam bem definidas.

Com o crescente aumento de modelos estatísticos, dados principalmente pelas inúmeras formas de gerar novas distribuições, faz-se necessário avaliar esses modelos generalizados afim de ver o quão flexíveis são esses novos modelos. Dado isso, futuramente, pode-se estender as medidas de divergência estudadas a outras funções geradoras de distribuições para avaliar a flexibilidade desses novos modelos.

REFERÊNCIAS

- ADHIKARI, B.; JOSHI, D. Distance, discrimination et résumé exhaustif. **Publ. Inst. Statist. University Paris**, v. 5, p. 55–74, 1956.
- AHUJA, J.; NASH, S. W. The generalized gompertz-verhulst family of distributions. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A**, JSTOR, p. 141–156, 1967.
- AL-HUSSAINI, E. K.; AHSANULLAH, M. **Exponentiated distributions**. 1. ed. Paris: Atlantis Press, 2015. v. 21.
- ALENCAR, F. H. C. d. **Diagnóstico de influência para uma família de modelos de regressão para dados de taxas e proporções**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, 2016.
- ALEXANDER, C.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M.; SARABIA, J. M. Generalized beta-generated distributions. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 1880–1897, 2012.
- ALI, S. M.; SILVEY, S. D. A general class of coefficients of divergence of one distribution from another. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, v. 28, p. 131–142, 1966.
- ALIZADEH, M.; BAGHERI, S.; JAMKHANEH, E. B.; NADARAJAH, S. Estimates of the pdf and the cdf of the exponentiated weibull distribution. **Brazilian Journal of Probability and Statistics**, v. 29, p. 695–716, 2015.
- ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **Metron**, v. 71, p. 63–79, 2013.
- AZZALINI, A. A class of distributions which includes the normal ones. **Scandinavian journal of statistics**, v. 12, p. 171–178, 1985.
- BARROS, A. A. D. A. **Distribuições exponencializadas e estendidas: uma abordagem clássica e bayesiana**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008.
- BARROS, P. S. N.; BRITO, C. C. R. de; RÊGO, L. C.; OLIVEIRA, W. R.; GOMES-SILVA, F. S. Uma nova classe de distribuições weibull generalizada. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 35, p. 319–347, 2017.
- BASSEVILLE, M. Divergence measures for statistical data processing—an annotated bibliography. **Signal Processing**, v. 93, p. 621–633, 2013.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à inferência estatística**. 2. ed. Brasil: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
- BRITO, E. d. **Algumas novas distribuições: desenvolvimento e aplicações**. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2014.
- BROOKS, S. P.; DELLAPORTAS, P.; ROBERTS, G. O. An approach to diagnosing total variation convergence of mcmc algorithms. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v. 6, p. 251–265, 1997.

- CAGLAR, U.; KOLESNIKOV, A. V.; WERNER, E. M. Pinsker inequalities and related monge-ampère equations for log concave functions. **arXiv preprint arXiv:2005.07055**, p. 1–36, 2020.
- CHERNOFF, H. *et al.* A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 23, p. 493–507, 1952.
- CHOUDHURY, A. A simple derivation of moments of the exponentiated weibull distribution. **Metrika**, v. 62, p. 17–22, 2005.
- CORDEIRO, G. M. **Introdução a teoria assintótica**. Rio de Janeiro: IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999.
- CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. de. A new family of generalized distributions. **Journal of statistical computation and simulation**, v. 81, p. 883–898, 2011.
- CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M.; CUNHA, D. C. da. The exponentiated generalized class of distributions. **Journal of Data Science**, v. 11, p. 1–27, 2013.
- CSISZÁR, I. Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observation. **studia scientiarum Mathematicarum Hungarica**, v. 2, p. 229–318, 1967.
- EGUCHI, S. A differential geometric approach to statistical inference on the basis of contrast functionals. **Hiroshima mathematical journal**, v. 15, p. 341–391, 1985.
- EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics-Theory and methods**, v. 31, p. 497–512, 2002.
- FEDOTOV, A.; HARREMOËS, P.; TOPSOE, F. Best pinsker bound equals taylor polynomial of degree 49. **Vychislitel'nye Tekhnologii**, v. 8, p. 3–13, 2003.
- FEDOTOV, A. A.; HARREMOËS, P.; TOPSOE, F. Refinements of pinsker's inequality. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 49, p. 1491–1498, 2003.
- GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, v. 115, p. 513–583, 1825.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. [S. l.]: Academic press, 2014.
- GUPTA, R. C.; GUPTA, P. L.; GUPTA, R. D. Modeling failure time data by lehman alternatives. **Communications in Statistics-Theory and methods**, Taylor & Francis, v. 27, n. 4, p. 887–904, 1998.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Theory & methods: Generalized exponential distributions. **Australian & New Zealand Journal of Statistics**, v. 41, p. 173–188, 1999.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and weibull distributions. **Biometrical Journal: Journal of Mathematical Methods in Biosciences**, v. 43, p. 117–130, 2001.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distribution: different method of estimations. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 69, n. 4, p. 315–337, 2001.

- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Closeness of gamma and generalized exponential distribution. **Communications in statistics-theory and methods**, v. 32, p. 705–721, 2003.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distribution: Existing results and some recent developments. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 137, p. 3537–3547, 2007.
- JEFFREYS, H. An invariant form for the prior probability in estimation problems. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 186, p. 453–461, 1946.
- JIANG, R.; MURTHY, D. The exponentiated weibull family: a graphical approach. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 48, p. 68–72, 1999.
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous univariate distributions**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 1995. v. 1.
- JONES, M. Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. **Statistical Methodology**, v. 6, p. 70–81, 2009.
- KELLEY, C. T. **Iterative methods for optimization**. Philadelphia: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- KOLMOGOROV, A. On the approximation of distributions of sums of independent summands by infinitely divisible distributions. **Sankhya: The Indian Journal of Statistics**, v. 25, p. 159–174, 1963.
- KULLBACK, S. **Information theory and statistics**. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 1959.
- KULLBACK, S.; LEIBLER, R. A. On information and sufficiency. **The annals of mathematical statistics**, v. 22, p. 79–86, 1951.
- LEHMANN, E. L. The power of rank tests. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 24, p. 23–43, 1953.
- MAHALANOBIS, P. C. On the generalized distance in statistics. **National Institute of Science of India**, v. 2, p. 49–55, 1936.
- MCLACHLAN, G. J. Mahalanobis distance. **Resonance**, v. 4, p. 20–26, 1999.
- MUDHOLKAR, G. S.; HUTSON, A. D. The exponentiated weibull family: some properties and a flood data application. **Communications in Statistics–Theory and Methods**, v. 25, p. 3059–3083, 1996.
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. **IEEE transactions on reliability**, v. 42, p. 299–302, 1993.
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; KOLLIA, G. D. A generalization of the weibull distribution with application to the analysis of survival data. **Journal of the American Statistical Association**, v. 91, p. 1575–1583, 1996.
- NADARAJAH, S. The exponentiated exponential distribution: a survey. **AStA Adv Stat Anal**, v. 95, p. 219–251, 2011.

- NADARAJAH, S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. The exponentiated weibull distribution: a survey. **Statistical Papers**, v. 54, p. 839–877, 2013.
- NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. On the moments of the exponentiated weibull distribution. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 34, p. 253–256, 2005.
- NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. The exponentiated gamma distribution with application to drought data. **Calcutta Statistical Association Bulletin**, v. 59, p. 29–54, 2007.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The exponentiated fréchet distribution. **Interstat Electronic Journal**, v. 14, p. 01–07, 2003.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The exponentiated type distributions. **Acta Applicandae Mathematica**, v. 92, p. 97–111, 2006.
- NASSAR, M. M.; EISSA, F. H. On the exponentiated weibull distribution. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 32, p. 1317–1336, 2003.
- PAL, M.; ALI, M. M.; WOO, J. Exponentiated weibull distribution. **Statistica**, v. 66, p. 139–147, 2006.
- PARDO, L. **Statistical inference based on divergence measures**. 1. ed. London: Chapman and Hall/CRC, 2005.
- PARDO, L.; SALICRÚ, M.; MENÉNDEZ, M.; MORALES, D. Divergence measures based on entropy functions and statistical inference. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B**, v. 57, p. 315–337, 1995.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- RAO, C. R. On the distance between two populations. **Sankhya: The Indian Journal of Statistics**, v. 9, p. 246–248, 1949.
- RAO, C. R. On the use and interpretation of distance functions in statistics. **Bulletin of the International Statistical Institute**, v. 34, p. 90–97, 1954.
- SANTOS, R. G. d. **Uma nova classe de distribuições e um novo modelo para tempo de vida: propriedades e aplicações**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, 2016.
- SURLES, J.; PADGETT, W. Inference for reliability and stress-strength for a scaled burr type x distribution. **Lifetime data analysis**, Springer, v. 7, n. 2, p. 187–200, 2001.
- TANEJA, I. J.; KUMAR, P. Relative information of type s, csiszár’s f-divergence, and information inequalities. **Information Sciences**, v. 166, p. 105–125, 2003.
- VERHULST, P. La loi d’accroissement de la population. **Nouveaux Memories de l’Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles**, v. 18, p. 14–54, 1845.
- VERHULST, P. Deuxième mémoire sur la loi d’accroissement de la population. **Mémoires de l’académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique**, v. 20, p. 1–32, 1847.

VERHULST, P.-F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. **Corresp. Math. Phys.**, v. 10, p. 113–126, 1838.

VIDAL, I.; IGLESIAS, P.; BRANCO, M.; ARELLANO-VALLE, R. Bayesian sensitivity analysis and model comparison for skew elliptical models. **Journal of statistical planning and inference**, v. 136, p. 3435–3457, 2006.

APÊNDICE A – DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS

A.1 Exponencial

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição Exponencial, com $\lambda > 0$, se sua função distribuição de probabilidade e sua função distribuição acumulada são dadas por

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

e

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

respectivamente, em que λ é um parâmetro de localização.

Desse modo, a esperança e a variância do modelo Exponencial, com $\lambda > 0$, $X \sim E(\lambda)$, são dadas por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

nesta ordem.

A.2 Weibull

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição Weibull, com $\gamma > 0$ e $\lambda > 0$, se sua função distribuição de probabilidade e sua função distribuição acumulada são dadas por

$$f_X(x) = \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma}, \quad x > 0$$

e

$$F_X(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}, \quad x > 0,$$

respectivamente, em que γ é um parâmetro de forma e λ um parâmetro de localização.

Desse modo, a esperança e a variância do modelo Weibull, com $\gamma > 0$ e $\lambda > 0$, $X \sim W(\gamma, \lambda)$, são dadas por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \left[\Gamma\left(\frac{2}{\gamma} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)^2 \right],$$

nesta ordem.

A.3 Rayleigh

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição Rayleigh, com $\lambda > 0$, se sua função distribuição de probabilidade e sua função distribuição acumulada são dadas por

$$f_X(x) = 2\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2}, \quad x > 0$$

e

$$F_X(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^2}, \quad x > 0,$$

respectivamente, em que λ um parâmetro de localização.

Desse modo, a esperança e a variância do modelo Rayleigh, com $\lambda > 0$, $X \sim Ray(\lambda)$, são dadas por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - \frac{4}{\pi}}{\lambda^2},$$

nesta ordem.

A.4 Rayleigh Exponencializado e Burr tipo-X

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição Rayleigh Exponencializada, ou Burr tipo-X, com $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, se sua função distribuição de probabilidade e sua função distribuição acumulada são dadas por

$$f_X(x) = 2\alpha\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2} \left(1 - e^{-(\lambda x)^2}\right)^{\alpha-1}, \quad x > 0$$

e

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-(\lambda x)^2}\right)^\alpha, \quad x > 0,$$

respectivamente, em que α é um parâmetro de forma e λ um parâmetro de localização.

Surles e Padgett (2001) atentam que a distribuições Rayleigh Exponencializado e Burr tipo-X, já apresentadas, são idênticas, porém introduzidas na literatura estatística de formas distintas. Enquanto o modelo Rayleigh Exponencializado é gerado por meio do gerador exponencializado, (2.1), o modelo Burr tipo-X foi proposto por Burr em 1942, junto com onze outras possíveis formas de função de distribuição acumulada, úteis na análise de tempo de vida.

Sendo X uma variável aleatória contínua do modelo Rayleigh Exponencializada, $X \sim RayE(\alpha, \lambda)$, ou Burr tipo-X, $X \sim BurrX(\alpha, \lambda)$, a função de momentos ordinários, $\mathbb{E}(X^k)$, pode ser dada por

$$\mathbb{E}(X^k) = \alpha \lambda^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \sum_{k=0}^{M(\alpha)} \binom{\alpha - 1}{k} (k + 1)^{-k/2+1} (-1)^k$$

$$\text{em que } M(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1, & \alpha \in \mathbb{N}, \\ \infty, & \text{demais casos.} \end{cases}$$

APÊNDICE B – EXEMPLOS

B.1 Modelo Exponencial Exponencializado

B.1.1 Divergência de Kullback-Leibler

A medida de divergência de Kullback-Leiber, (3.1), calculada entre o modelo Exponencial, distribuição de base, e o modelo Exponencial Exponencializada, (2.7), é dada por

$$\begin{aligned}
 D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{(-\lambda x)} \log \left(\frac{\lambda e^{(-\lambda x)}}{\alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}} \right) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda e^{(-\lambda x)} \log \left(\frac{1}{\alpha (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}} \right) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda e^{(-\lambda x)} \left[\log(1) - \log(\alpha (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}) \right] dx \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda e^{(-\lambda x)} \left[-\log(\alpha) - (\alpha - 1) \log(1 - e^{(-\lambda x)}) \right] dx \\
 &= \int_0^{\infty} -\log(\alpha) \lambda e^{(-\lambda x)} - (\alpha - 1) \lambda e^{(-\lambda x)} \log(1 - e^{(-\lambda x)}) dx \\
 &= -\log(\alpha) \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda e^{(-\lambda x)} dx}_{\text{I}} - (\alpha - 1) \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda e^{(-\lambda x)} \log(1 - e^{(-\lambda x)}) dx}_{\text{II}}.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

A integral correspondente a (I), da equação (B.1), tem como resultado 1, uma vez que compreende a distribuição Exponencial, $f_X(x)$, avaliada em todo o suporte. Para a resolução de (II), da equação (B.1), será empregue primeiro a técnica de substituição seguida de integração por partes, processo análogo ao já realizado em (II), da equação (4.1), desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= -\log(\alpha) - (\alpha - 1)(-1) \\
 &= (\alpha - 1) - \log(\alpha)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

B.1.2 Divergência de Jeffreys

Para o cálculo da medida de divergência de Jeffreys, (3.2), entre o modelo Exponencial e o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7), é preciso primeiro realizar o cálculo da medida de divergência de Kullback-Leibler, (3.1), entre o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7), e o modelo Exponencial, uma vez que a divergência de Jeffreys, (3.2), pode ser vista como uma soma das divergências de Kullback-Leibler, (3.1). Desse modo, temos que a divergência de Kullback-Leibler, (3.1), entre o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7), e o modelo

Exponencial é dada por

$$\begin{aligned}
D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) &= \int_0^{\infty} \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \log \left(\frac{\alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}}{\lambda e^{(-\lambda x)}} \right) dx \\
&= \int_0^{\infty} \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \log(\alpha (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}) dx \\
&= \int_0^{\infty} \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} [\log(\alpha) + (\alpha - 1) \log(1 - e^{(-\lambda x)})] dx \\
&= \int_0^{\infty} \log(\alpha) \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} + \\
&\quad (\alpha - 1) \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \log(1 - e^{(-\lambda x)}) dx \\
&= \log(\alpha) \underbrace{\int_0^{\infty} \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} dx}_{\text{I}} + \\
&\quad (\alpha - 1) \underbrace{\int_0^{\infty} \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \log(1 - e^{(-\lambda x)}) dx}_{\text{II}}. \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

A integral correspondente a (I), da equação (B.3), tem como resultado 1, uma vez que compreende a função densidade da distribuição Exponencial Exponencializada, $g_X(x)$, avaliada em todo o suporte. Para a resolução de (II), da equação (B.3), será empregue primeiro a técnica de substituição seguida de integração por partes, processo análogo ao já realizado em (II), da equação (4.3), assim:

$$\begin{aligned}
D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) &= \log(\alpha) + (\alpha - 1) \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \log(\alpha) - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

Em posse dos resultados (B.2) e (B.4) o cálculo da medida de divergência de Jeffreys, (3.2), entre o modelo Exponencial, distribuição de base, e o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7) é dado por

$$\begin{aligned}
J(F_X(x), G_X(x)) &= D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) + D_{Kull}(G_X(x), F_X(x)) \\
&= ((\alpha - 1) - \log(\alpha)) + \left(\log(\alpha) - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) \\
&= \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

B.1.3 Distância L_1

A medida de distância L_1 , (3.3), calculada entre o modelo Exponencial, distribuição de base, e o modelo Exponencial Exponencializado, (2.7), é dada por

$$\begin{aligned} L_1(f_X(x), g_X(x)) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |\lambda e^{(-\lambda x)} - \alpha \lambda e^{(-\lambda x)} (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda e^{(-\lambda x)} |1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}| dx \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

em que a função modulo, $|1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}|$, é definida como

$$|1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}| = \begin{cases} 1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}, & \text{se } 1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \geq 0, \quad (\text{i}) \\ -(1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1}), & \text{se } 1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} < 0, \quad (\text{ii}) \end{cases}$$

em que (i) e (ii) são, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} 1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \geq 0 & 1 - \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} < 0 \\ \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \leq 1 & \alpha(1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} > 1 \\ (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\alpha} & (1 - e^{(-\lambda x)})^{\alpha-1} > \frac{1}{\alpha} \\ 1 - e^{(-\lambda x)} \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & 1 - e^{(-\lambda x)} > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ e^{(-\lambda x)} \geq 1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & e^{(-\lambda x)} < 1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ -\lambda x \geq \log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) & -\lambda x < \log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \\ x \leq -\frac{\log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}{\lambda} & x > -\frac{\log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}{\lambda} \end{array}$$

de posse dos resultados (i) e (ii), pode-se reescrever (B.5) como sendo

$$\begin{aligned} L_1(f_X(x), g_X(x)) &= F\left(\frac{\log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}{\lambda}\right) - G\left(\frac{\log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}{\lambda}\right) \\ &= \left[1 - e\left(-\lambda \frac{-\log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}{\lambda}\right)\right] - \left[1 - e\left(-\lambda \frac{-\log \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}{\lambda}\right)\right]^\alpha \\ &= \left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)\right] - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)\right]^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

B.2 Modelo Weibull Exponencializado

B.2.1 Divergência de Kullback-Leibler

A medida de divergência de Kullback-Leibler, (3.1), calculada entre o modelo Weibull, distribuição de base, e o modelo Weibull Exponencializada, (2.24), é dada por

$$\begin{aligned}
 D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= \int_0^\infty \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \log \left(\frac{\gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma}}{\alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}} \right) dx \\
 &= \int_0^\infty \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \log \left(\frac{1}{\alpha (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}} \right) dx \\
 &= \int_0^\infty \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \left[\log(1) - \log(\alpha (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}) \right] dx \\
 &= \int_0^\infty \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \left[-\log(\alpha) - (\alpha - 1) \log(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}) \right] dx \\
 &= \int_0^\infty -\log(\alpha) \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} - \\
 &\quad (\alpha - 1) \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \log(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}) dx \\
 &= -\log(\alpha) \underbrace{\int_0^\infty \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} dx}_I - \\
 &\quad (\alpha - 1) \underbrace{\int_0^\infty \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \log(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}) dx}_II
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

A integral correspondente a (I), da equação (B.6), tem como resultado 1, uma vez que compreende a distribuição Weibull, $f_X(x)$, avaliada em todo o suporte. Para o solução de (II), da equação (B.6), será empregue primeiro a técnica de substituição seguida de integração por partes, processo análogo ao já realizado em (II), da equação (4.1), desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= -\log(\alpha) - (\alpha - 1)(-1) \\
 &= (\alpha - 1) - \log(\alpha).
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.2.2 Divergência de Jeffreys

Para o cálculo da medida de divergência de Jeffreys, (3.2), entre o modelo Weibull e o modelo Weibull Exponencializado, (2.24), é preciso primeiro realizar o cálculo da medida de divergência de Kullback-Leibler, (3.1), entre o modelo Weibull Exponencializado, (2.24), e o modelo Weibull, uma vez que a divergência de Jeffreys, (3.2), pode ser vista como uma soma das divergências de Kullback-Leibler, (3.1). Desse modo, temos que a divergência de

Kullback-Leibler, (3.1), entre o modelo Weibull Exponencializado, (2.24), e o modelo Weibull é dada por

$$\begin{aligned}
D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= \int_0^\infty \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \\
&\quad \times \log \left(\frac{\alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}}{\gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma}} \right) dx \\
&= \int_0^\infty \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \\
&\quad \times \log (\alpha (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}) dx \\
&= \int_0^\infty \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \\
&\quad \times \left[\log (\alpha) + (\alpha - 1) \log (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}) \right] dx \\
&= \int_0^\infty \log (\alpha) \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} + (\alpha - 1) \\
&\quad \times \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \log (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}) dx \\
&= \log (\alpha) \underbrace{\int_0^\infty \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} dx}_I + (\alpha - 1) \\
&\quad \times \underbrace{\int_0^\infty \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \log (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma}) dx}_II. \quad (B.8)
\end{aligned}$$

A integral correspondente a (I), da equação (B.8), tem como resultado 1, uma vez que compreende a função de densidade da distribuição Weibull Exponencializada, $g_X(x)$, avaliada em todo o suporte. Para o cálculo de (II), da equação (B.8), será empregue primeiro a técnica de substituição seguida de integração por partes, processo análogo ao já realizado em (II), da equação (4.3), assim:

$$\begin{aligned}
D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) &= \log (\alpha) + (\alpha - 1) \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \log (\alpha) - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (B.9)
\end{aligned}$$

Em posse dos resultados (B.7) e (B.9) o cálculo da medida de divergência de Jeffreys (3.2), entre o modelo Weibull, distribuição de base, e o modelo Weibull Exponencializado, (2.24), é dado por

$$\begin{aligned}
J(F_X(x), G_X(x)) &= D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) + D_{Kull}(F_X(x), G_X(x)) \\
&= ((\alpha - 1) - \log (\alpha)) + \left(\log (\alpha) - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) \\
&= \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \quad (B.10)
\end{aligned}$$

B.2.3 Distância L_1

A medida de distância L_1 , (3.3), calculada entre o modelo Weibull, distribuição de base, e o modelo Weibull Exponencializado, (2.24), é dada por

$$\begin{aligned} L_1(f_X(x), g_X(x)) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty |\gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} - \alpha \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} |1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}| dx \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

em que a função modulo, $|1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}|$ pode ser definida como

$$|1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}| = \begin{cases} -(1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}), & \text{se } 1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} < 0, \quad (\text{i}) \\ 1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1}, & \text{se } 1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \geq 0, \quad (\text{ii}) \end{cases}$$

em que (i) e (ii) são, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} 1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \geq 0 & 1 - \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} < 0 \\ \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \leq 1 & \alpha(1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} > 1 \\ (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\alpha} & (1 - e^{-(\lambda x)^\gamma})^{\alpha-1} > \frac{1}{\alpha} \\ 1 - e^{-(\lambda x)^\gamma} \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & 1 - e^{-(\lambda x)^\gamma} > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ e^{-(\lambda x)^\gamma} \geq 1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & e^{-(\lambda x)^\gamma} < 1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ -(\lambda x)^\gamma \geq \log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) & -(\lambda x)^\gamma < \log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \\ x \leq \frac{\sqrt[\gamma]{-\log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}}{\lambda} & x > \frac{\sqrt[\gamma]{-\log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}}{\lambda} \end{array}$$

de pose dos resultados (i) e (ii), pode-se reescrever (B.11) como sendo

$$\begin{aligned} L_1(f_X(x), g_X(x)) &= F\left(\frac{\sqrt[\gamma]{-\log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}}{\lambda}\right) - G\left(\frac{\sqrt[\gamma]{-\log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}}{\lambda}\right) \\ &= \left[1 - e\left(-\left(\lambda \frac{\sqrt[\gamma]{-\log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}}{\lambda}\right)^\gamma\right)\right] - \\ &\quad \left[1 - e\left(-\left(\lambda \frac{\sqrt[\gamma]{-\log\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}}{\lambda}\right)^\gamma\right)\right]^\alpha \\ &= \left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)\right] - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)\right]^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

APÊNDICE C – TABELAS

Neste Apêndice são apresentados os estudos de simulação referentes aos modelos Exponencial Exponencializado, (2.7), e Weibull Exponencializado, (2.24), com suas respectivas Tabelas de distâncias. A ordem das Tabelas apresentadas são dos modelos $EE(\alpha, \lambda)$, $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 2)$, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 25)$, $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 25)$, cada um seguido da sua Tabela de medidas de divergência Kullback-Leibler, (3.1), Jeffreys, (3.2), e distância L_1 , (3.3) simulada.

Tabela 5 – Estimativa dos parâmetros do modelo Exponencial Exponencializada para diferentes valores de α e $\lambda = 25$, via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Estimativas para α				Estimativas para λ				Estimativas para $l(\alpha, \lambda; x)$				
		$\hat{\alpha}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\lambda}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\widehat{l(\alpha, \lambda)}$	$\widehat{l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})}$	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	\widehat{EQM}
0.5	20	0,56	0,06	0,03	0,01	29,84	4,84	177,41	0,39	58,31	59,37	-1,06	-1,89	2,33
	50	0,52	0,02	0,01	0,00	26,90	1,90	43,17	0,20	146,02	147,03	-1,01	-0,70	2,01
	100	0,51	0,01	0,00	0,00	25,89	0,89	19,89	0,14	291,26	292,32	-1,06	-0,37	2,24
	200	0,50	0,00	0,00	0,00	25,49	0,49	8,93	0,09	583,36	584,39	-1,03	-0,18	2,06
	500	0,50	0,00	0,00	0,00	25,23	0,23	3,35	0,06	1.456,61	1.457,60	-0,99	-0,07	1,97
1	20	1,17	0,17	0,20	0,01	28,48	3,48	88,77	0,28	44,46	45,48	-1,02	-2,32	1,98
	50	1,07	0,07	0,05	0,01	26,32	1,32	26,85	0,16	110,83	111,84	-1,01	-0,92	1,96
	100	1,03	0,03	0,02	0,00	25,68	0,68	11,81	0,11	222,09	223,10	-1,01	-0,45	2,07
	200	1,02	0,02	0,01	0,00	25,34	0,34	5,55	0,07	443,63	444,66	-1,03	-0,23	2,07
	500	1,01	0,01	0,00	0,00	25,13	0,13	2,05	0,05	1.109,26	1.110,26	-1,00	-0,09	2,06
2	20	2,49	0,49	1,56	0,04	27,90	2,90	61,32	0,23	38,36	39,41	-1,05	-2,80	2,18
	50	2,14	0,14	0,27	0,02	25,94	0,94	17,75	0,13	95,58	96,61	-1,03	-1,09	2,12
	100	2,07	0,07	0,10	0,01	25,49	0,49	8,19	0,09	191,21	192,17	-0,96	-0,50	1,82
	200	2,03	0,03	0,05	0,01	25,16	0,16	3,86	0,06	382,02	382,99	-0,97	-0,25	1,91
	500	2,02	0,02	0,02	0,00	25,14	0,14	1,64	0,04	956,62	957,62	-1,01	-0,11	2,01
4	20	4,99	0,99	6,69	0,08	26,95	1,95	40,89	0,19	35,30	36,29	-0,98	-2,86	1,83
	50	4,40	0,40	1,73	0,04	25,81	0,81	14,13	0,12	88,54	89,52	-0,98	-1,11	1,95
	100	4,19	0,19	0,66	0,02	25,39	0,39	6,78	0,08	177,10	178,10	-1,00	-0,56	1,99
	200	4,11	0,11	0,29	0,02	25,26	0,26	3,22	0,06	354,65	355,67	-1,01	-0,29	2,00
	500	4,05	0,05	0,10	0,01	25,17	0,17	1,24	0,03	887,31	888,31	-1,00	-0,11	1,96
10	20	14,22	4,22	123,64	0,33	26,92	1,92	35,51	0,18	33,79	34,84	-1,05	-3,19	2,14
	50	11,54	1,54	23,08	0,14	25,80	0,80	12,47	0,11	84,61	85,68	-1,07	-1,27	2,21
	100	10,86	0,86	6,84	0,08	25,53	0,53	5,14	0,07	169,76	170,76	-0,99	-0,59	1,92
	200	10,30	0,30	2,75	0,05	25,19	0,19	2,68	0,05	338,47	339,48	-1,02	-0,30	2,06
	500	10,12	0,12	0,90	0,03	25,06	0,06	0,95	0,03	845,93	846,87	-0,95	-0,11	1,74
20	20	32,30	12,30	920,30	0,88	26,93	1,93	31,11	0,17	33,40	34,42	-1,02	-3,12	1,97
	50	23,71	3,71	140,70	0,36	25,71	0,71	9,89	0,10	83,37	84,33	-0,95	-1,15	1,87
	100	21,94	1,94	41,94	0,20	25,38	0,38	4,95	0,07	166,73	167,69	-0,97	-0,58	1,87
	200	20,95	0,95	18,20	0,13	25,21	0,21	2,56	0,05	333,46	334,48	-1,03	-0,31	2,18
	500	20,26	0,26	5,04	0,07	25,06	0,06	0,81	0,03	833,26	834,21	-0,95	-0,11	1,92
50	20	101,51	51,51	15.289,81	3,56	27,20	2,20	31,87	0,16	33,21	34,26	-1,06	-3,29	2,20
	50	62,40	12,40	1.073,87	0,96	25,80	0,80	9,36	0,09	82,77	83,74	-0,97	-1,18	1,74
	100	54,88	4,88	359,70	0,58	25,29	0,29	4,19	0,06	165,10	166,05	-0,96	-0,58	1,81
	200	52,48	2,48	153,03	0,38	25,12	0,12	2,19	0,05	329,91	330,93	-1,02	-0,31	1,96
	500	51,23	1,23	53,36	0,23	25,10	0,10	0,83	0,03	826,37	827,39	-1,01	-0,12	2,08
100	20	670,22	570,22	185.923.759,43	431,03	26,85	1,85	29,92	0,16	32,93	33,95	-1,03	-3,18	2,05
	50	137,19	37,19	10.003,92	2,94	25,86	0,86	9,59	0,09	82,59	83,63	-1,04	-1,26	2,14
	100	112,08	12,08	2.132,56	1,41	25,24	0,24	4,18	0,06	164,18	165,19	-1,01	-0,62	1,98
	200	105,35	5,35	814,71	0,89	25,11	0,11	2,10	0,05	328,85	329,93	-1,07	-0,33	2,37
	500	101,88	1,88	261,23	0,51	25,04	0,04	0,75	0,03	822,87	823,82	-0,96	-0,12	1,80

Tabela 6 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Exponencial, $E(\lambda = 25)$, e Exponencial Exponencializado, $EE(\alpha, \lambda = 25)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Divergência de Kullback-Leibler							Divergência de Jeffreys						Distância L_1							
		D_{kull}	\widehat{D}_{kull}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	J	\widehat{J}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	L_1	\widehat{L}_1	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}
0,5	20		0,18	-0,01	-7,21	0,01	0,40	0,38		0,49	-0,01	-2,49	0,03	1,20	1,17		0,22	-0,03	-10,26	0,06	0,37	0,31
	50		0,19	-0,01	-3,44	0,06	0,32	0,26		0,49	-0,01	-1,39	0,14	0,91	0,78		0,24	-0,01	-4,38	0,13	0,33	0,19
	100	0,19	0,19	-0,00	-1,95	0,09	0,29	0,20	0,50	0,50	-0,00	-0,73	0,22	0,82	0,61	0,25	0,24	-0,01	-2,41	0,17	0,31	0,15
	200		0,19	-0,00	-0,61	0,13	0,26	0,14		0,50	0,00	0,01	0,31	0,72	0,41		0,25	-0,00	-0,92	0,20	0,29	0,09
	500		0,19	-0,00	-0,64	0,15	0,23	0,09		0,50	-0,00	-0,47	0,37	0,63	0,26		0,25	-0,00	-0,57	0,22	0,28	0,06
1	20		0,07	0,07	-	0,00	0,30	0,30		0,11	0,11	-	0,00	0,48	0,48		0,09	0,09	-	0,01	0,25	0,24
	50		0,02	0,02	-	0,00	0,08	0,08		0,04	0,04	-	0,00	0,14	0,14		0,06	0,06	-	0,00	0,14	0,13
	100	0,00	0,01	0,01	-	0,00	0,04	0,04	0,00	0,02	0,02	-	0,00	0,07	0,07	0,00	0,04	0,04	-	0,00	0,10	0,10
	200		0,00	0,00	-	0,00	0,02	0,02		0,01	0,01	-	0,00	0,04	0,04		0,03	0,03	-	0,00	0,07	0,07
	500		0,00	0,00	-	0,00	0,01	0,01		0,00	0,00	-	0,00	0,01	0,01		0,02	0,02	-	0,00	0,04	0,04
2	20		0,65	0,35	113,12	0,04	1,92	1,88		0,95	0,45	90,32	0,08	2,63	2,55		0,29	0,04	17,08	0,10	0,50	0,40
	50		0,41	0,10	32,39	0,09	0,92	0,83		0,63	0,13	26,73	0,16	1,36	1,20		0,26	0,01	5,48	0,15	0,39	0,24
	100	0,31	0,35	0,05	15,53	0,14	0,66	0,52	0,50	0,57	0,07	13,05	0,24	1,00	0,76	0,25	0,26	0,01	3,12	0,18	0,34	0,16
	200		0,33	0,02	6,10	0,17	0,53	0,36		0,53	0,03	5,05	0,29	0,82	0,53		0,25	0,00	0,93	0,20	0,31	0,12
	500		0,32	0,01	3,77	0,22	0,44	0,22		0,52	0,02	3,23	0,36	0,69	0,33		0,25	0,00	0,90	0,21	0,29	0,08
4	20		2,47	0,86	53,15	0,55	6,14	5,59		3,23	0,98	43,38	0,85	7,48	6,63		0,50	0,03	6,15	0,32	0,68	0,37
	50		1,95	0,34	21,12	0,87	3,83	2,96		2,64	0,39	17,53	1,29	4,88	3,59		0,49	0,01	3,01	0,38	0,61	0,23
	100	1,61	1,77	0,16	9,92	0,98	2,91	1,93	2,25	2,44	0,19	8,28	1,44	3,81	2,38	0,47	0,48	0,01	1,47	0,40	0,57	0,17
	200		1,70	0,09	5,41	1,14	2,44	1,29		2,35	0,10	4,57	1,65	3,26	1,60		0,48	0,00	0,95	0,42	0,54	0,12
	500		1,65	0,04	2,52	1,30	2,09	0,79		2,30	0,05	2,16	1,85	2,83	0,98		0,47	0,00	0,51	0,44	0,51	0,07
10	20		10,73	4,04	60,28	2,80	25,51	22,71		12,32	4,22	52,07	3,69	27,94	24,25		0,72	0,02	3,10	0,56	0,86	0,30
	50		8,16	1,46	21,76	3,71	15,39	11,68		9,64	1,54	18,98	4,75	17,41	12,66		0,71	0,01	1,51	0,61	0,81	0,20
	100	6,70	7,50	0,80	11,97	4,54	11,52	6,98	8,10	8,96	0,86	10,57	5,70	13,31	7,62	0,70	0,71	0,01	1,30	0,64	0,77	0,13
	200		6,98	0,28	4,25	4,80	9,58	4,78		8,40	0,30	3,72	5,99	11,24	5,25		0,70	0,00	0,32	0,65	0,75	0,10
	500		6,81	0,11	1,63	5,46	8,30	2,85		8,22	0,12	1,43	6,73	9,85	3,13		0,70	0,00	0,15	0,67	0,73	0,06
20	20		28,05	12,04	75,24	7,08	71,68	64,60		30,35	12,30	68,12	8,52	75,03	66,52		0,83	0,02	2,28	0,70	0,93	0,23
	50		19,62	3,62	22,60	9,19	38,13	28,94		21,76	3,71	20,53	10,82	40,91	30,10		0,82	0,01	0,80	0,74	0,89	0,15
	100	16,00	17,89	1,88	11,78	10,46	28,62	18,17	18,05	19,99	1,94	10,75	12,17	31,16	18,98	0,81	0,82	0,01	0,62	0,76	0,87	0,11
	200		16,92	0,92	5,75	11,74	24,03	12,30		19,00	0,95	5,25	13,54	26,42	12,88		0,81	0,00	0,29	0,77	0,85	0,08
	500		16,26	0,25	1,57	13,07	20,04	6,97		18,31	0,26	1,43	14,95	22,26	7,31		0,81	0,00	0,05	0,79	0,84	0,05
50	20		96,25	51,16	113,47	18,81	306,31	287,50		99,53	51,51	107,26	20,98	311,06	290,08		0,91	0,01	1,09	0,83	0,98	0,15
	50		57,37	12,28	27,23	24,34	109,84	85,51		60,42	12,40	25,82	26,73	113,60	86,87		0,91	0,00	0,43	0,85	0,95	0,10
	100	45,09	9,92	4,83	10,72	28,86	83,97	55,11	48,02	52,90	4,88	10,16	31,40	87,47	56,08	0,90	0,91	0,00	0,11	0,87	0,94	0,07
	200		47,54	2,45	5,44	31,73	69,51	37,78		50,50	2,48	5,16	34,35	72,84	38,49		0,91	0,00	0,05	0,88	0,93	0,05
	500		46,31	1,22	2,70	35,82	58,17	22,34		49,25	1,23	2,57	38,55	61,33	22,78		0,91	0,00	0,07	0,89	0,92	0,03
100	20		664,26	569,87	603,71	33,96	751,20	717,24		668,23	570,22	581,79	36,64	756,84	720,20		0,95	0,00	0,36	0,88	0,99	0,11
	50		131,43	37,03	39,23	47,71	283,06	235,35		135,20	37,19	37,94	50,69	287,73	237,04		0,95	0,00	0,26	0,91	0,98	0,07
	100	94,39	106,43	12,03	12,74	55,97	190,29	134,32	98,01	110,09	12,08	12,32	59,10	194,58	135,48	0,95	0,94	-0,00	-0,00	0,92	0,97	0,05
	200		99,73	5,34	5,65	62,33	152,35	90,02		103,36	5,35	5,46	65,56	156,42	90,86		0,94	-0,00	-0,03	0,92	0,96	0,04
	500		96,27	1,88	1,99	73,18	126,11	52,93		99,89	1,88	1,92	76,56	130,00	53,44		0,94	-0,00	-0,01	0,93	0,96	0,02

Tabela 7 – Estimativa dos parâmetros da modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 25$ e $\lambda = 2$, via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Estimativas para α				Estimativas para γ				Estimativas para λ				Estimativas para $l(\alpha, \gamma, \lambda; x)$				
		$\hat{\alpha}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\gamma}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\lambda}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$l(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	$l(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	\widehat{EQM}
0,5	20	2,05	1,55	76,46	8,61	43,43	18,43	1470,39	33,64	2,05	0,05	0,04	0,19	38,81	40,49	-1,68	-4,40	4,64
	50	0,64	0,14	0,60	0,76	32,44	7,44	412,75	18,92	2,01	0,01	0,00	0,07	96,81	98,48	-1,68	-1,74	4,63
	100	0,52	0,02	0,06	0,24	28,48	3,48	112,28	10,01	2,00	0,00	0,00	0,03	193,92	195,42	-1,50	-0,78	3,92
	200	0,51	0,01	0,03	0,17	26,58	1,58	42,42	6,32	2,00	0,00	0,00	0,02	387,51	389,02	-1,51	-0,39	3,88
	500	0,51	0,01	0,01	0,10	25,51	0,51	13,03	3,58	2,00	0,00	0,00	0,01	969,82	971,35	-1,52	-0,16	3,90
1	20	5,97	4,97	423,70	19,99	44,56	19,56	2.321,02	44,05	2,05	0,05	0,03	0,16	47,08	48,76	-1,68	-3,59	4,62
	50	1,47	0,47	4,94	2,17	31,13	6,13	402,95	19,12	2,01	0,01	0,00	0,07	118,01	119,62	-1,61	-1,37	4,34
	100	1,15	0,15	0,50	0,69	26,99	1,99	80,23	8,74	2,01	0,01	0,00	0,04	235,95	237,40	-1,45	-0,62	3,47
	200	1,04	0,04	0,16	0,39	26,12	1,12	30,97	5,45	2,00	0,00	0,00	0,02	470,92	472,40	-1,48	-0,31	3,68
	500	1,01	0,01	0,04	0,21	25,49	0,49	10,79	3,25	2,00	0,00	0,00	0,01	1179,94	1181,38	-1,44	-0,12	3,47
2	20	11,58	9,58	828,14	27,15	44,34	19,34	2995,69	51,23	2,05	0,05	0,02	0,14	54,21	55,81	-1,60	-2,97	4,16
	50	4,19	2,19	98,35	9,68	29,06	4,06	264,78	15,77	2,02	0,02	0,01	0,08	136,03	137,53	-1,50	-1,11	3,67
	100	2,58	0,58	5,72	2,32	26,60	1,60	65,85	7,96	2,01	0,01	0,00	0,04	272,04	273,52	-1,48	-0,54	3,62
	200	2,22	0,22	1,08	1,02	25,72	0,72	26,99	5,15	2,00	0,00	0,00	0,03	543,63	545,14	-1,51	-0,28	3,77
	500	2,09	0,09	0,32	0,55	25,24	0,24	9,56	3,08	2,00	0,00	0,00	0,02	1359,39	1360,92	-1,53	-0,11	3,86
4	20	20,01	16,01	1.852,58	39,97	44,70	19,70	3281,62	53,82	2,03	0,03	0,01	0,12	60,23	61,91	-1,68	-2,81	4,61
	50	9,63	5,63	371,95	18,45	28,74	3,74	192,27	13,36	2,02	0,02	0,01	0,08	150,86	152,38	-1,51	-1,00	3,85
	100	6,09	2,09	69,23	8,06	26,26	1,26	63,19	7,85	2,01	0,01	0,00	0,05	301,11	302,61	-1,49	-0,50	3,75
	200	4,74	0,74	9,87	3,06	25,76	0,76	26,85	5,13	2,00	0,00	0,00	0,03	603,65	605,13	-1,48	-0,25	3,60
	500	4,22	0,22	2,05	1,42	25,37	0,37	11,05	3,31	2,00	0,00	0,00	0,02	1507,56	1509,02	-1,46	-0,10	3,66
10	20	26,69	16,69	2.524,00	47,41	46,64	21,64	3.167,90	51,98	2,00	0,00	0,01	0,09	66,90	68,37	-1,47	-2,21	3,58
	50	24,42	14,42	1.245,24	32,22	29,11	4,11	321,30	17,46	2,01	0,01	0,01	0,07	166,84	168,34	-1,50	-0,90	3,91
	100	16,43	6,43	453,07	20,30	26,96	1,96	72,51	8,29	2,01	0,01	0,00	0,05	334,00	335,44	-1,44	-0,43	3,41
	200	13,34	3,34	190,05	13,38	25,81	0,81	31,18	5,53	2,00	0,00	0,00	0,04	666,86	668,33	-1,46	-0,22	3,72
	500	11,13	1,13	32,09	5,55	25,42	0,42	12,54	3,52	2,00	0,00	0,00	0,02	1.668,26	1.669,73	-1,48	-0,09	3,70
20	20	25,45	5,45	2.278,95	47,45	47,78	22,78	3.008,64	49,92	1,97	-0,03	0,01	0,07	70,57	71,92	-1,34	-1,91	3,33
	50	34,46	14,46	1.818,24	40,14	31,39	6,39	293,44	15,90	2,00	-0,00	0,00	0,06	176,84	178,24	-1,39	-0,79	4,76
	100	28,16	8,16	895,19	28,80	27,83	2,83	79,03	8,43	2,00	-0,00	0,00	0,05	353,10	354,45	-1,35	-0,38	3,00
	200	27,13	7,13	607,46	23,60	26,21	1,21	39,03	6,13	2,00	0,00	0,00	0,04	706,87	708,33	-1,45	-0,21	3,74
	500	22,10	2,10	184,13	13,41	25,91	0,91	16,75	3,99	2,00	-0,00	0,00	0,03	1.767,30	1.768,72	-1,42	-0,08	3,69
50	20	20,35	-29,65	1.547,64	25,86	54,93	29,93	2.965,18	45,51	1,94	-0,06	0,01	0,04	75,28	76,47	-1,19	-1,58	2,89
	50	55,25	5,25	4.774,97	68,94	34,20	9,20	342,33	16,06	1,98	-0,02	0,00	0,05	187,70	188,99	-1,30	-0,69	3,75
	100	57,44	7,44	2.634,07	50,81	29,41	4,41	111,32	9,59	1,99	-0,01	0,00	0,04	375,24	376,54	-1,30	-0,35	5,06
	200	53,04	3,04	1.891,91	43,41	27,56	2,56	42,10	5,96	1,99	-0,01	0,00	0,03	750,38	751,73	-1,35	-0,18	3,12
	500	52,02	2,02	1.191,36	34,47	27,03	2,03	73,36	8,32	1,99	-0,01	0,00	0,03	1.876,60	1.877,11	-0,52	-0,03	82,73
100	20	25,11	-74,89	6.729,48	33,49	61,97	36,97	4.044,98	51,78	1,93	-0,07	0,01	0,04	77,63	78,66	-1,03	-1,34	2,94
	50	60,68	-39,32	8.098,30	80,98	38,80	13,80	584,40	19,86	1,96	-0,04	0,00	0,05	194,71	195,81	-1,11	-0,57	3,79
	100	66,13	-33,87	4.092,02	54,29	35,36	10,36	600,94	22,23	1,97	-0,03	0,00	0,04	389,68	389,97	-0,29	-0,08	30,94
	200	68,07	-31,93	2.953,87	44,00	29,49	4,49	60,16	6,33	1,98	-0,02	0,00	0,03	778,63	779,76	-1,13	-0,14	3,37
	500	78,21	-21,79	2.618,42	46,32	27,81	2,81	25,72	4,22	1,98	-0,02	0,00	0,02	1.946,27	1.947,38	-1,11	-0,06	4,62

Tabela 8 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 25, \lambda = 2)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 2)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Divergência de Kullback-Leibler							Divergência de Jeffreys						Distância L_1							
		D_{kull}	\widehat{D}_{kull}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	J	\widehat{J}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	L_1	\widehat{L}_1	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}
0,5	20		1,77	1,58	818,64	0,01	3,28	3,27		3,77	3,27	653,44	0,01	9,48	9,47		0,41	0,16	62,64	0,04	0,72	0,68
	50		0,40	0,20	104,85	0,00	1,15	1,15		1,40	0,90	179,59	0,01	5,33	5,32		0,30	0,05	20,20	0,03	0,63	0,59
	100	0,19	0,28	0,08	42,39	0,01	0,73	0,72	0,50	0,88	0,38	75,30	0,02	2,76	2,74	0,25	0,27	0,02	8,92	0,05	0,51	0,46
	200		0,23	0,04	20,98	0,02	0,52	0,50		0,68	0,18	35,64	0,05	1,72	1,67		0,26	0,01	3,58	0,08	0,43	0,35
	500		0,21	0,01	6,33	0,07	0,38	0,31		0,56	0,06	11,22	0,16	1,13	0,96		0,25	0,00	0,37	0,15	0,36	0,21
1	20		4,84	4,84	-	0,00	22,43	22,42		6,14	6,14	-	0,00	24,75	24,74		0,38	0,38	-	0,03	0,85	0,82
	50		0,48	0,48	-	0,00	1,55	1,55		0,85	0,85	-	0,00	3,69	3,69		0,22	0,22	-	0,01	0,56	0,55
	100	0,00	0,14	0,14	-	0,00	0,58	0,58	0,00	0,27	0,27	-	0,00	1,06	1,06	0,00	0,14	0,14	-	0,01	0,35	0,34
	200		0,06	0,06	-	0,00	0,22	0,22		0,12	0,12	-	0,00	0,47	0,47		0,10	0,10	-	0,01	0,24	0,24
	500		0,02	0,02	-	0,00	0,08	0,08		0,04	0,04	-	0,00	0,16	0,16		0,06	0,06	-	0,00	0,15	0,14
2	20		9,71	9,40	3.063,93	0,00	59,23	59,23		10,86	10,36	2.071,54	0,01	62,41	62,40		0,42	0,17	67,73	0,03	0,92	0,89
	50		2,40	2,10	683,72	0,00	8,59	8,59		2,85	2,35	470,54	0,00	10,16	10,16		0,30	0,05	21,49	0,02	0,73	0,71
	100	0,31	0,84	0,54	174,40	0,00	3,61	3,61	0,50	1,14	0,64	128,43	0,01	4,64	4,63	0,25	0,27	0,02	6,77	0,03	0,60	0,57
	200		0,50	0,20	64,44	0,01	1,57	1,56		0,75	0,25	49,38	0,02	2,19	2,17		0,26	0,01	2,28	0,05	0,47	0,42
	500		0,39	0,08	26,01	0,06	0,99	0,93		0,60	0,10	20,41	0,11	1,45	1,34		0,25	0,00	1,32	0,12	0,40	0,28
4	20		17,51	15,90	985,22	0,00	98,02	98,02		18,80	16,55	735,77	0,01	101,67	101,66		0,50	0,02	5,02	0,04	0,95	0,91
	50		7,13	5,52	341,83	0,02	37,44	37,43		7,99	5,74	254,98	0,04	40,21	40,17		0,46	-0,01	-1,97	0,07	0,89	0,82
	100	1,61	3,62	2,01	124,54	0,10	13,03	12,93	2,25	4,38	2,13	94,79	0,18	14,91	14,73	0,47	0,47	-0,00	-0,47	0,15	0,79	0,63
	200		2,32	0,70	43,59	0,30	6,49	6,19		3,01	0,76	33,62	0,48	7,87	7,38		0,47	-0,00	-0,49	0,25	0,69	0,45
	500		1,83	0,22	13,59	0,53	4,08	3,54		2,48	0,23	10,43	0,83	5,17	4,34		0,47	-0,00	-0,74	0,31	0,62	0,31
10	20		23,62	16,92	252,70	0,01	118,27	118,26		25,16	17,06	210,59	0,01	122,10	122,09		0,59	-0,11	-15,67	0,04	0,95	0,92
	50		20,97	14,27	213,13	0,20	96,68	96,47		22,60	14,50	178,95	0,34	100,32	99,97		0,66	-0,04	-5,44	0,21	0,95	0,74
	100	6,70	13,07	6,38	95,22	0,79	49,09	48,30	8,10	14,57	6,47	79,82	1,18	52,10	50,92	0,70	0,67	-0,03	-3,65	0,37	0,91	0,54
	200		10,00	3,31	49,35	1,56	27,40	25,83		11,46	3,36	41,49	2,19	29,89	27,70		0,68	-0,01	-1,86	0,47	0,87	0,40
	500		7,82	1,12	16,76	2,65	17,55	14,90		9,24	1,14	14,07	3,51	19,67	16,17		0,69	-0,01	-1,00	0,55	0,82	0,27
20	20		22,20	6,19	38,70	0,01	100,36	100,35		23,78	5,73	31,73	0,02	104,03	104,02		0,63	-0,18	-22,72	0,05	0,95	0,90
	50		30,61	14,61	91,27	0,35	106,06	105,71		32,58	14,53	80,52	0,56	109,78	109,22		0,73	-0,09	-10,62	0,26	0,95	0,69
	100	16,00	24,25	8,25	51,54	1,62	83,99	82,37	18,05	26,24	8,19	45,37	2,26	87,49	85,24	0,81	0,76	-0,05	-5,98	0,47	0,94	0,47
	200		23,13	7,13	44,52	3,25	66,27	63,02		25,20	7,15	39,61	4,21	69,56	65,34		0,79	-0,02	-2,68	0,58	0,93	0,34
	500		18,15	2,15	13,42	5,25	44,32	39,07		20,16	2,11	11,67	6,49	47,24	40,75		0,79	-0,02	-2,29	0,66	0,90	0,24
50	20		17,02	-28,07	-62,25	0,01	52,49	52,48		18,61	-29,41	-61,24	0,02	55,56	55,54		0,64	-0,26	-29,03	0,05	0,91	0,87
	50		50,95	5,87	13,01	1,08	200,40	199,32		53,33	5,31	11,05	1,57	204,73	203,17		0,79	-0,11	-12,63	0,41	0,97	0,56
	100	45,09	52,85	7,76	17,21	3,41	153,83	150,42	48,02	55,49	7,47	15,55	4,40	157,91	153,51	0,90	0,84	-0,06	-6,78	0,59	0,96	0,37
	200		48,37	3,28	7,28	6,98	142,49	135,51		51,08	3,06	6,36	8,41	146,50	138,09		0,87	-0,04	-4,21	0,70	0,96	0,26
	500		47,29	2,20	4,88	11,37	117,14	105,77		50,06	2,04	4,25	13,15	120,96	107,81		0,88	-0,03	-3,15	0,77	0,95	0,18
100	20		21,67	-72,73	-77,05	0,01	75,28	75,27		23,37	-74,64	-76,15	0,02	78,68	78,66		0,65	-0,29	-30,89	0,05	0,93	0,88
	50		56,30	-38,09	-40,35	1,14	239,69	238,55		58,76	-39,25	-40,05	1,65	244,20	242,55		0,80	-0,14	-14,89	0,42	0,97	0,55
	100	94,39	61,41	-32,98	-34,94	2,42	153,24	150,82	98,01	64,21	-33,80	-34,48	3,23	157,32	154,08	0,95	0,85	-0,09	-10,03	0,54	0,96	0,43
	200		63,08	-31,32	-33,18	10,75	146,22	135,47		66,09	-31,92	-32,56	12,49	150,25	137,77		0,90	-0,05	-5,15	0,76	0,96	0,20
	500		73,03	-21,37	-22,64	18,46	161,34	142,88		76,22	-21,79	-22,23	20,62	165,47	144,85		0,91	-0,03	-3,35	0,83	0,96	0,14

Tabela 9 – Estimativa dos parâmetros do modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 2$ e $\lambda = 25$, via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Estimativas para α				Estimativas para γ				Estimativas para λ				Estimativas para $l(\alpha, \gamma, \lambda; x)$				
		$\hat{\alpha}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\gamma}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\lambda}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$l(\alpha, \gamma, \lambda)$	$l(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	\widehat{EQM}
0,5	20	0,97	0,47	2,66	1,56	3,91	1,91	14,66	3,32	39,52	14,52	1.910,39	41,25	54,72	56,42	-1,71	-3,13	4,57
	50	0,60	0,10	0,28	0,52	2,63	0,63	3,00	1,61	28,11	3,11	190,07	13,44	136,77	138,31	-1,55	-1,14	3,97
	100	0,54	0,04	0,07	0,27	2,26	0,26	0,89	0,91	26,33	1,33	47,05	6,73	273,35	274,91	-1,56	-0,57	3,89
	200	0,51	0,01	0,03	0,17	2,12	0,12	0,28	0,51	25,55	0,55	17,38	4,14	547,80	549,34	-1,53	-0,28	3,83
	500	0,51	0,01	0,01	0,10	2,04	0,04	0,08	0,28	25,19	0,19	6,10	2,46	1.368,33	1.369,89	-1,56	-0,11	4,22
1	20	2,22	1,22	11,32	3,14	4,25	2,25	27,51	4,74	36,44	11,44	980,11	29,15	52,50	54,14	-1,64	-3,13	4,16
	50	1,42	0,42	2,78	1,61	2,54	0,54	3,04	1,66	29,31	4,31	285,33	16,34	131,27	132,88	-1,61	-1,23	4,20
	100	1,14	0,14	0,45	0,66	2,20	0,20	0,79	0,86	26,61	1,61	55,24	7,26	262,71	264,28	-1,57	-0,60	4,17
	200	1,06	0,06	0,19	0,44	2,08	0,08	0,18	0,41	25,60	0,60	22,10	4,67	524,64	526,19	-1,55	-0,30	4,01
	500	1,01	0,01	0,04	0,21	2,04	0,04	0,06	0,25	25,16	0,16	5,56	2,35	1.311,93	1.313,43	-1,50	-0,11	3,65
2	20	5,38	3,38	206,03	13,96	4,46	2,46	42,12	6,01	33,30	8,30	711,71	25,37	53,41	54,96	-1,55	-2,91	3,91
	50	3,60	1,60	23,71	4,60	2,44	0,44	3,23	1,74	30,70	5,70	329,32	17,24	132,76	134,34	-1,58	-1,20	4,07
	100	2,51	0,51	5,95	2,39	2,16	0,16	0,45	0,66	26,93	1,93	99,29	9,78	266,12	267,67	-1,55	-0,58	4,06
	200	2,14	0,14	1,00	0,99	2,10	0,10	0,20	0,44	25,54	0,54	24,31	4,90	533,03	534,54	-1,51	-0,28	3,70
	500	2,09	0,09	0,32	0,56	2,02	0,02	0,07	0,26	25,36	0,36	8,27	2,85	1.331,83	1.333,30	-1,47	-0,11	3,69
4	20	11,55	7,55	517,44	21,47	3,94	1,94	39,88	6,01	31,87	6,87	511,45	21,56	54,86	56,44	-1,58	-2,89	4,31
	50	8,62	4,62	247,01	15,03	2,34	0,34	3,07	1,72	30,51	5,51	297,93	16,37	137,55	139,16	-1,61	-1,17	4,16
	100	5,71	1,71	32,01	5,40	2,15	0,15	1,16	1,07	27,60	2,60	101,67	9,75	275,08	276,57	-1,49	-0,54	3,72
	200	4,75	0,75	9,16	2,93	2,04	0,04	0,17	0,42	26,19	1,19	32,81	5,61	550,22	551,69	-1,47	-0,27	3,56
	500	4,26	0,26	2,07	1,42	2,02	0,02	0,07	0,25	25,45	0,45	10,51	3,21	1.375,87	1.377,39	-1,52	-0,11	3,86
10	20	19,53	9,53	742,05	25,53	4,53	2,53	76,18	8,36	27,27	2,27	181,36	13,28	57,48	58,99	-1,51	-2,65	3,83
	50	20,02	10,02	494,74	19,87	2,34	0,34	1,64	1,24	28,81	3,81	142,80	11,33	144,40	145,92	-1,52	-1,05	3,77
	100	15,46	5,46	214,45	13,60	2,12	0,12	0,43	0,65	27,25	2,25	71,56	8,16	288,27	289,73	-1,46	-0,51	3,43
	200	13,94	3,94	166,16	12,28	2,07	0,07	0,22	0,47	26,72	1,72	56,46	7,32	576,32	577,91	-1,59	-0,28	4,08
	500	11,17	1,17	30,62	5,41	2,03	0,03	0,08	0,28	25,55	0,55	16,79	4,06	1.439,65	1.441,16	-1,51	-0,11	3,90
20	20	23,79	3,79	543,40	23,01	4,23	2,23	65,14	7,76	23,14	-1,86	68,28	8,06	59,45	60,81	-1,36	-2,29	3,13
	50	28,99	8,99	840,81	27,58	2,48	0,48	3,13	1,70	25,49	0,49	71,27	8,43	148,57	149,97	-1,41	-0,95	3,36
	100	28,03	8,03	871,64	28,43	2,22	0,22	0,53	0,69	25,77	0,77	58,65	7,62	297,31	298,79	-1,48	-0,50	3,69
	200	27,44	7,44	616,12	23,69	2,08	0,08	0,20	0,44	26,15	1,15	44,98	6,61	594,71	596,16	-1,44	-0,24	3,27
	500	23,14	3,14	175,17	12,86	2,03	0,03	0,08	0,29	25,62	0,62	18,72	4,28	1.484,82	1.486,24	-1,42	-0,10	3,36
50	20	39,68	-10,32	1.397,12	35,94	4,72	2,72	100,15	9,64	20,68	-4,32	57,06	6,20	61,47	62,85	-1,38	-2,25	3,41
	50	55,97	5,97	2.531,97	49,99	2,59	0,59	1,80	1,21	23,38	-1,62	49,65	6,86	153,94	155,30	-1,36	-0,89	3,34
	100	52,31	2,31	2.189,80	46,76	2,32	0,32	0,55	0,67	23,72	-1,28	36,00	5,86	307,77	309,15	-1,38	-0,45	3,38
	200	54,59	4,59	1.576,81	39,46	2,17	0,17	0,24	0,45	24,46	-0,54	26,21	5,09	615,49	616,89	-1,40	-0,23	3,34
	500	54,05	4,05	936,50	30,35	2,08	0,08	0,09	0,29	24,86	-0,14	15,83	3,98	1.539,01	1.540,45	-1,44	-0,09	3,40
100	20	52,08	-47,92	4.261,12	44,35	5,30	3,30	153,39	11,94	18,94	-6,06	63,04	5,13	63,03	64,36	-1,33	-2,12	3,41
	50	69,40	-30,60	4.367,11	58,60	2,72	0,72	1,86	1,16	21,10	-3,90	44,93	5,46	157,12	158,43	-1,31	-0,84	3,17
	100	66,03	-33,97	3.742,12	50,90	2,50	0,50	0,77	0,72	21,28	-3,72	32,98	4,38	314,77	316,09	-1,32	-0,42	3,23
	200	76,99	-23,01	2.901,82	48,73	2,29	0,29	0,27	0,43	22,44	-2,56	21,44	3,86	629,78	631,10	-1,32	-0,21	3,07
	500	84,24	-15,76	2.252,75	44,79	2,16	0,16	0,10	0,27	23,35	-1,65	13,15	3,23	1.573,76	1.575,09	-1,33	-0,08	3,19

Tabela 10 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 2, \lambda = 25)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 2, \lambda = 25)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Divergência de Kullback-Leibler						Divergência de Jeffreys						Distância L_1								
		D_{kull}	\widehat{D}_{kull}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	J	\widehat{J}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	L_1	\widehat{L}_1	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}
0,5	20		0,82	0,62	323,26	0,01	1,78	1,77		3,23	2,73	546,25	0,01	10,07	10,06		0,41	0,16	64,10	0,04	0,73	0,69
	50		0,37	0,18	92,37	0,00	1,20	1,19		1,39	0,89	177,88	0,01	5,92	5,92		0,30	0,05	18,97	0,03	0,64	0,61
	100	0,19	0,27	0,07	38,28	0,00	0,73	0,72	0,50	0,87	0,37	73,57	0,01	2,73	2,72	0,25	0,26	0,01	4,60	0,03	0,51	0,47
	200		0,23	0,04	19,61	0,02	0,53	0,51		0,67	0,17	34,32	0,04	1,75	1,71		0,26	0,01	2,54	0,07	0,43	0,36
	500		0,21	0,01	7,04	0,06	0,38	0,32		0,56	0,06	12,07	0,14	1,13	0,99		0,25	0,00	0,69	0,14	0,36	0,22
1	20		1,31	1,31	-	0,00	6,35	6,34		2,88	2,88	-	0,01	9,98	9,97		0,37	0,37	-	0,03	0,73	0,70
	50		0,44	0,44	-	0,00	1,78	1,78		0,83	0,83	-	0,00	3,53	3,53		0,22	0,22	-	0,02	0,55	0,54
	100	0,00	0,15	0,15	-	0,00	0,62	0,62	0,00	0,30	0,30	-	0,00	1,15	1,14	0,00	0,14	0,14	-	0,01	0,36	0,35
	200		0,06	0,06	-	0,00	0,22	0,22		0,12	0,12	-	0,00	0,43	0,43		0,10	0,10	-	0,01	0,23	0,23
	500		0,02	0,02	-	0,00	0,08	0,08		0,04	0,04	-	0,00	0,16	0,16		0,06	0,06	-	0,01	0,14	0,14
2	20		3,79	3,48	1.135,05	0,00	13,14	13,13		5,09	4,59	918,86	0,01	15,03	15,02		0,42	0,17	66,35	0,04	0,79	0,75
	50		1,84	1,54	501,01	0,00	11,72	11,71		2,34	1,84	368,90	0,00	13,52	13,51		0,32	0,07	27,42	0,02	0,77	0,75
	100	0,31	0,81	0,50	163,65	0,00	3,03	3,02	0,50	1,10	0,60	119,17	0,01	3,95	3,95	0,25	0,26	0,01	4,03	0,03	0,57	0,55
	200		0,47	0,16	52,34	0,01	1,58	1,57		0,69	0,19	38,73	0,01	2,20	2,19		0,24	-0,01	-3,06	0,04	0,47	0,43
	500		0,38	0,08	25,17	0,05	0,98	0,92		0,60	0,10	19,61	0,10	1,43	1,34		0,25	0,00	0,67	0,11	0,40	0,28
4	20		9,17	7,56	468,48	0,01	38,28	38,27		10,48	8,23	365,61	0,02	41,07	41,05		0,50	0,03	6,52	0,05	0,89	0,84
	50		6,09	4,48	277,69	0,03	25,19	25,16		7,00	4,75	210,97	0,05	27,61	27,56		0,48	0,01	1,74	0,08	0,86	0,77
	100	1,61	3,26	1,65	102,25	0,08	13,61	13,53	2,25	4,01	1,76	78,41	0,15	15,53	15,38	0,47	0,47	-0,01	-1,32	0,14	0,79	0,65
	200		2,32	0,71	43,76	0,29	6,16	5,87		3,02	0,77	34,08	0,48	7,51	7,03		0,47	0,00	0,29	0,25	0,68	0,44
	500		1,86	0,25	15,21	0,59	4,02	3,42		2,52	0,27	11,89	0,91	5,10	4,19		0,47	-0,00	-0,07	0,33	0,62	0,29
10	20		16,49	9,79	146,16	0,03	55,38	55,36		18,24	10,14	125,18	0,05	58,50	58,45		0,62	-0,07	-10,51	0,08	0,92	0,84
	50		16,61	9,91	147,93	0,13	52,46	52,34		18,20	10,10	124,64	0,23	55,53	55,30		0,66	-0,04	-5,30	0,17	0,91	0,74
	100	6,70	12,06	5,37	80,14	0,86	38,04	37,18	8,10	13,59	5,49	67,75	1,27	40,82	39,55	0,70	0,68	-0,01	-2,14	0,38	0,89	0,52
	200		10,58	3,88	57,90	1,54	32,21	30,67		12,06	3,96	48,90	2,16	34,84	32,69		0,69	-0,01	-1,40	0,47	0,88	0,41
	500		7,85	1,15	17,22	2,68	18,52	15,84		9,27	1,17	14,51	3,55	20,68	17,13		0,69	-0,01	-0,85	0,55	0,83	0,27
20	20		20,39	4,38	27,39	0,08	59,95	59,87		22,23	4,18	23,15	0,15	63,14	63,00		0,67	-0,14	-17,30	0,14	0,92	0,78
	50		25,17	9,16	57,26	0,62	76,39	75,77		27,11	9,06	50,20	0,94	79,80	78,86		0,73	-0,08	-9,55	0,33	0,94	0,60
	100	16,00	24,10	8,09	50,58	1,73	61,23	59,49	18,05	26,11	8,06	44,64	2,40	64,44	62,04	0,81	0,77	-0,04	-5,41	0,48	0,92	0,44
	200		23,42	7,42	46,35	3,71	75,27	71,56		25,51	7,46	41,31	4,75	78,67	73,93		0,79	-0,02	-2,22	0,61	0,93	0,33
	500		19,13	3,13	19,54	6,06	43,21	37,16		21,20	3,15	17,45	7,39	46,11	38,72		0,80	-0,01	-0,91	0,68	0,90	0,22
50	20		35,77	-9,32	-20,67	0,12	98,48	98,36		38,03	-9,99	-20,80	0,21	102,14	101,92		0,74	-0,16	-18,12	0,17	0,95	0,78
	50		51,51	6,42	14,25	1,31	141,72	140,41		54,04	6,02	12,55	1,87	145,72	143,85		0,81	-0,09	-10,08	0,44	0,96	0,52
	100	45,09	47,72	2,63	5,83	4,37	123,75	119,38	48,02	50,35	2,33	4,86	5,50	127,62	122,12	0,90	0,85	-0,05	-5,96	0,63	0,96	0,32
	200		49,85	4,76	10,56	8,20	130,27	122,07		52,62	4,60	9,58	9,74	134,19	124,45		0,87	-0,03	-3,37	0,73	0,96	0,23
	500		49,21	4,13	9,15	14,54	105,26	90,72		52,08	4,06	8,45	16,51	108,98	92,46		0,89	-0,01	-1,58	0,80	0,95	0,15
100	20		47,86	-46,53	-49,29	0,31	119,95	119,63		50,43	-47,58	-48,55	0,61	123,79	123,17		0,78	-0,16	-17,05	0,27	0,95	0,68
	50		64,66	-29,74	-31,50	2,10	181,32	179,23		67,46	-30,55	-31,17	2,85	185,56	182,72		0,85	-0,10	-10,13	0,51	0,97	0,45
	100	94,39	61,16	-33,24	-35,21	5,34	128,20	122,86	98,01	64,06	-33,95	-34,64	6,59	132,11	125,51	0,95	0,88	-0,07	-7,16	0,66	0,96	0,29
	200		71,88	-22,52	-23,86	13,73	165,79	152,06		75,02	-22,99	-23,46	15,66	169,94	154,29		0,91	-0,04	-4,11	0,79	0,96	0,17
	500		78,94	-15,45	-16,37	24,11	163,60	139,49		82,25	-15,76	-16,08	26,50	167,74	141,25		0,92	-0,02	-2,32	0,85	0,96	0,11

Tabela 11 – Estimativa dos parâmetros do modelo Weibull Exponencializada para diferentes valores de α , $\gamma = 25$ e $\lambda = 25$, via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Estimativas para α				Estimativas para γ				Estimativas para λ				Estimativas para $l(\alpha, \gamma, \lambda; x)$				
		$\hat{\alpha}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\gamma}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$\hat{\lambda}$	$\widehat{Viés}$	\widehat{EQM}	\widehat{EP}	$l(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	$l(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	\widehat{EQM}
0,5	20	2,12	1,62	63,16	7,78	43,92	18,92	1.547,70	34,51	25,70	0,70	5,61	2,26	89,13	90,85	-1,72	-1,94	4,58
	50	0,61	0,11	0,37	0,60	32,48	7,48	380,23	18,02	25,11	0,11	0,59	0,76	223,19	224,76	-1,57	-0,71	4,11
	100	0,52	0,02	0,08	0,28	29,13	4,13	133,10	10,78	25,01	0,01	0,21	0,46	446,60	448,12	-1,52	-0,34	3,83
	200	0,51	0,01	0,02	0,15	26,25	1,25	36,85	5,94	25,02	0,02	0,08	0,29	892,81	894,24	-1,43	-0,16	3,49
	500	0,50	0,00	0,01	0,10	25,66	0,66	12,72	3,51	25,00	0,00	0,04	0,19	2.233,32	2.234,86	-1,55	-0,07	4,05
1	20	5,68	4,68	338,03	17,79	46,40	21,40	2.509,03	45,31	25,66	0,66	4,72	2,07	97,58	99,30	-1,72	-1,77	4,71
	50	1,51	0,51	6,20	2,44	30,60	5,60	354,64	17,99	25,17	0,17	0,75	0,85	243,93	245,49	-1,57	-0,64	4,18
	100	1,14	0,14	0,65	0,79	27,40	2,40	88,36	9,09	25,05	0,05	0,25	0,49	488,49	490,07	-1,58	-0,32	3,99
	200	1,06	0,06	0,15	0,38	25,87	0,87	29,06	5,32	25,03	0,03	0,10	0,31	976,79	978,31	-1,52	-0,16	3,81
	500	1,02	0,02	0,04	0,21	25,32	0,32	9,19	3,02	25,01	0,01	0,04	0,19	2.442,24	2.443,72	-1,49	-0,06	3,60
2	20	10,63	8,63	604,44	23,03	42,79	17,79	2.582,26	47,62	25,59	0,59	3,18	1,68	104,87	106,52	-1,66	-1,58	4,39
	50	3,86	1,86	51,73	6,95	29,31	4,31	256,47	15,43	25,21	0,21	0,91	0,93	262,15	263,69	-1,54	-0,59	3,77
	100	2,68	0,68	6,85	2,53	26,35	1,35	66,43	8,04	25,12	0,12	0,35	0,58	524,21	525,73	-1,52	-0,29	3,72
	200	2,22	0,22	1,06	1,01	25,73	0,73	29,55	5,39	25,04	0,04	0,13	0,36	1.047,99	1.049,54	-1,55	-0,15	3,90
	500	2,07	0,07	0,27	0,52	25,32	0,32	10,05	3,15	25,01	0,01	0,05	0,21	2.620,81	2.622,31	-1,50	-0,06	3,54
4	20	19,16	15,16	1.598,97	37,02	41,86	16,86	1.893,39	40,13	25,34	0,34	2,12	1,42	110,85	112,48	-1,62	-1,47	4,35
	50	9,52	5,52	325,28	17,18	29,79	4,79	266,22	15,60	25,19	0,19	1,00	0,98	277,02	278,57	-1,55	-0,56	4,05
	100	6,12	2,12	56,24	7,20	26,41	1,41	68,16	8,14	25,12	0,12	0,43	0,64	553,93	555,47	-1,55	-0,28	3,98
	200	5,01	1,01	13,75	3,57	25,50	0,50	30,46	5,50	25,08	0,08	0,20	0,44	1.108,05	1.109,63	-1,58	-0,14	4,17
	500	4,19	0,19	1,76	1,31	25,39	0,39	10,53	3,22	25,01	0,01	0,06	0,24	2.770,46	2.771,92	-1,46	-0,05	3,46
10	20	30,80	20,80	2.813,40	48,82	41,10	16,10	1.594,53	36,56	25,11	0,11	1,30	1,14	117,32	118,89	-1,57	-1,34	4,06
	50	22,91	12,91	1.176,81	31,80	30,22	5,22	276,96	15,81	25,11	0,11	0,78	0,88	293,03	294,59	-1,56	-0,53	3,96
	100	16,90	6,90	506,65	21,44	26,74	1,74	70,54	8,22	25,09	0,09	0,43	0,65	586,06	587,59	-1,53	-0,26	3,88
	200	12,74	2,74	109,39	10,10	26,15	1,15	35,20	5,82	25,03	0,03	0,22	0,46	1.172,83	1.174,36	-1,53	-0,13	3,91
	500	11,25	1,25	31,48	5,47	25,25	0,25	11,60	3,40	25,03	0,03	0,09	0,30	2.930,18	2.931,61	-1,43	-0,05	3,31
20	20	26,38	6,38	1.715,72	40,95	44,39	19,39	1.692,35	36,30	24,72	-0,28	0,80	0,85	121,11	122,55	-1,44	-1,19	3,48
	50	36,09	16,09	1.915,24	40,72	31,47	6,47	344,03	17,39	24,99	-0,01	0,60	0,78	303,04	304,61	-1,57	-0,52	4,08
	100	31,07	11,07	1.212,27	33,03	27,60	2,60	86,64	8,94	25,02	0,02	0,39	0,62	605,94	607,40	-1,46	-0,24	3,46
	200	26,53	6,53	600,62	23,63	26,28	1,28	34,01	5,69	25,02	0,02	0,23	0,48	1.212,32	1.213,86	-1,54	-0,13	3,87
	500	22,97	2,97	185,23	13,29	25,55	0,55	13,77	3,67	25,01	0,01	0,11	0,33	3.031,44	3.032,86	-1,42	-0,05	3,36
50	20	21,48	-28,52	1.662,23	29,15	50,25	25,25	2.080,70	38,01	24,30	-0,70	0,80	0,55	125,59	126,82	-1,23	-0,98	3,11
	50	53,69	3,69	3.521,84	59,26	33,19	8,19	269,49	14,24	24,73	-0,27	0,45	0,62	314,20	315,59	-1,40	-0,44	3,35
	100	53,66	3,66	2.461,13	49,50	29,70	4,70	101,80	8,94	24,81	-0,19	0,31	0,53	627,91	629,29	-1,38	-0,22	3,23
	200	51,70	1,70	1.619,52	40,23	27,64	2,64	42,73	5,98	24,88	-0,12	0,19	0,42	1.255,87	1.257,27	-1,40	-0,11	3,24
	500	49,36	-0,64	944,47	30,74	26,59	1,59	16,82	3,78	24,91	-0,09	0,11	0,32	3.139,62	3.140,96	-1,34	-0,04	3,32
100	20	23,26	-76,74	6.758,20	29,49	56,03	31,03	2.763,08	42,45	24,09	-0,91	1,03	0,45	128,38	129,57	-1,19	-0,92	2,99
	50	58,07	-41,93	6.403,58	68,19	36,78	11,78	338,48	14,14	24,46	-0,54	0,60	0,56	320,83	322,04	-1,21	-0,38	2,81
	100	73,11	-26,89	4.027,81	57,52	30,96	5,96	107,29	8,47	24,67	-0,33	0,30	0,44	642,38	643,66	-1,28	-0,20	2,87
	200	67,75	-32,25	2.800,70	41,98	29,28	4,28	47,07	5,36	24,71	-0,29	0,20	0,33	1.284,16	1.285,39	-1,23	-0,10	2,93
	500	78,88	-21,12	2.374,91	43,94	27,88	2,88	56,30	6,93	24,80	-0,20	0,13	0,29	3.210,16	3.211,10	-0,94	-0,03	31,28

Tabela 12 – Simulação das Divergências de Kullback-Leibler e Jeffreys e Distância L_1 entre os modelos Weibull, $W(\gamma = 25, \lambda = 25)$, e Weibull Exponencializado, $WE(\alpha, \gamma = 25, \lambda = 25)$ para diferentes valores de α e via mil replicas de Monte Carlo.

α	n	Divergência de Kullback-Leibler						Divergência de Jeffreys						Distância L_1								
		D_{kull}	\widehat{D}_{kull}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	J	\widehat{J}	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}	L_1	\widehat{L}_1	$\widehat{Viés}$	$\widehat{Viés}_R$	0,05	0,95	IIQ _{0,90}
0,5	20		1,84	1,64	851,31	0,01	4,02	4,01		3,91	3,41	682,44	0,01	9,13	9,12		0,41	0,16	65,67	0,04	0,72	0,68
	50		0,38	0,19	99,22	0,00	1,14	1,13		1,37	0,87	173,36	0,01	5,35	5,35		0,30	0,05	21,80	0,03	0,63	0,60
	100	0,19	0,29	0,10	50,58	0,01	0,76	0,75	0,50	0,94	0,44	87,61	0,02	2,88	2,86	0,25	0,28	0,03	11,88	0,05	0,52	0,47
	200		0,22	0,03	15,80	0,02	0,52	0,49		0,64	0,14	28,47	0,05	1,68	1,63		0,25	0,00	1,37	0,08	0,42	0,34
	500		0,21	0,02	7,99	0,07	0,38	0,32		0,57	0,07	13,02	0,16	1,15	0,99		0,25	0,00	1,33	0,14	0,36	0,22
1	20		4,61	4,61	-	0,00	25,67	25,66		5,93	5,93	-	0,01	28,10	28,10		0,38	0,38	-	0,03	0,86	0,83
	50		0,51	0,51	-	0,00	1,65	1,64		0,86	0,86	-	0,00	3,60	3,60		0,21	0,21	-	0,01	0,56	0,54
	100	0,00	0,15	0,15	-	0,00	0,56	0,56	0,00	0,29	0,29	-	0,00	1,15	1,15	0,00	0,14	0,14	-	0,01	0,36	0,35
	200		0,06	0,06	-	0,00	0,23	0,23		0,11	0,11	-	0,00	0,44	0,44		0,09	0,09	-	0,01	0,24	0,23
	500		0,02	0,02	-	0,00	0,08	0,08		0,04	0,04	-	0,00	0,16	0,16		0,06	0,06	-	0,00	0,14	0,14
2	20		8,71	8,41	2.739,76	0,00	53,51	53,51		9,85	9,35	1.869,16	0,01	56,60	56,59		0,43	0,18	73,03	0,03	0,92	0,89
	50		2,08	1,78	579,03	0,00	8,12	8,12		2,53	2,03	406,84	0,00	9,66	9,66		0,31	0,06	22,31	0,02	0,72	0,70
	100	0,31	0,92	0,62	200,66	0,00	3,77	3,76	0,50	1,24	0,74	147,17	0,00	4,81	4,81	0,25	0,27	0,02	8,67	0,02	0,61	0,59
	200		0,51	0,20	66,74	0,01	1,63	1,62		0,76	0,26	51,20	0,01	2,27	2,26		0,25	0,00	1,74	0,04	0,47	0,44
	500		0,37	0,06	20,80	0,06	0,90	0,84		0,58	0,08	16,01	0,11	1,32	1,22		0,25	-0,00	-0,31	0,12	0,38	0,27
4	20		16,68	15,07	933,74	0,00	105,49	105,48		17,86	15,61	693,86	0,01	109,21	109,20		0,48	0,01	2,01	0,03	0,95	0,92
	50		7,06	5,44	337,32	0,01	35,75	35,74		7,92	5,67	251,88	0,02	38,48	38,46		0,46	-0,02	-3,51	0,05	0,89	0,84
	100	1,61	3,65	2,04	126,28	0,08	13,95	13,87	2,25	4,42	2,17	96,23	0,15	15,89	15,74	0,47	0,47	-0,00	-0,47	0,14	0,80	0,66
	200		2,57	0,95	58,98	0,29	8,26	7,97		3,28	1,03	45,88	0,47	9,80	9,33		0,48	0,00	0,87	0,24	0,73	0,48
	500		1,80	0,19	11,82	0,55	3,77	3,21		2,45	0,20	9,00	0,86	4,81	3,96		0,47	-0,00	-0,92	0,32	0,61	0,29
10	20		27,57	20,88	311,71	0,00	124,87	124,86		29,17	21,07	260,17	0,01	128,75	128,74		0,60	-0,10	-13,91	0,04	0,96	0,92
	50		19,56	12,87	192,11	0,09	84,52	84,42		21,11	13,01	160,59	0,17	88,03	87,86		0,64	-0,06	-8,59	0,15	0,94	0,79
	100	6,70	13,53	6,83	102,00	0,78	49,35	48,57	8,10	15,03	6,93	85,61	1,17	52,36	51,19	0,70	0,67	-0,02	-3,36	0,36	0,91	0,55
	200		9,42	2,72	40,60	1,37	27,65	26,28		10,86	2,76	34,02	1,95	30,15	28,20		0,68	-0,02	-2,42	0,45	0,87	0,42
	500		7,93	1,23	18,33	2,81	18,43	15,62		9,36	1,26	15,52	3,70	20,59	16,89		0,69	-0,00	-0,57	0,56	0,83	0,27
20	20		23,03	7,03	43,91	0,01	103,36	103,35		24,66	6,61	36,63	0,03	107,06	107,04		0,64	-0,17	-21,37	0,06	0,95	0,89
	50		32,21	16,21	101,28	0,42	119,16	118,73		34,21	16,16	89,55	0,68	122,99	122,31		0,73	-0,08	-10,38	0,29	0,95	0,67
	100	16,00	27,10	11,09	69,32	1,77	94,37	92,60	18,05	29,15	11,10	61,48	2,44	97,98	95,54	0,81	0,77	-0,04	-5,19	0,49	0,94	0,46
	200		22,54	6,54	40,85	3,72	67,61	63,89		24,60	6,55	36,28	4,76	70,91	66,15		0,79	-0,02	-2,73	0,61	0,93	0,32
	500		18,97	2,96	18,52	6,17	43,07	36,90		21,03	2,98	16,48	7,51	45,96	38,44		0,80	-0,01	-1,14	0,68	0,90	0,22
50	20		18,04	-27,05	-59,98	0,05	51,40	51,35		19,69	-28,33	-58,99	0,10	54,45	54,35		0,67	-0,24	-26,04	0,11	0,91	0,80
	50		49,32	4,24	9,39	1,30	173,96	172,65		51,76	3,74	7,79	1,86	178,16	176,30		0,80	-0,10	-11,16	0,44	0,97	0,53
	100	45,09	49,13	4,04	8,96	3,36	150,36	147,00	48,02	51,71	3,69	7,69	4,34	154,42	150,08	0,90	0,84	-0,07	-7,25	0,59	0,96	0,37
	200		47,03	1,94	4,31	7,47	124,90	117,43		49,73	1,71	3,57	8,95	128,78	119,84		0,87	-0,04	-4,15	0,71	0,96	0,24
	500		44,63	-0,45	-1,01	12,36	108,85	96,49		47,39	-0,63	-1,31	14,20	112,60	98,40		0,88	-0,02	-2,68	0,78	0,95	0,17
50	20		19,71	-74,69	-79,12	0,01	54,84	54,83		21,45	-76,56	-78,12	0,02	57,95	57,93		0,69	-0,26	-27,37	0,05	0,92	0,87
	100		53,64	-40,76	-43,18	2,14	192,98	190,84		56,13	-41,88	-42,73	2,90	197,28	194,38		0,82	-0,13	-13,32	0,52	0,97	0,45
	100	94,39	68,18	-26,21	-27,77	7,04	175,51	168,47	98,01	71,14	-26,87	-27,41	8,47	179,71	171,24	0,95	0,88	-0,06	-6,64	0,70	0,97	0,26
	200		62,74	-31,66	-33,54	13,10	139,51	126,41		65,77	-32,24	-32,89	14,99	143,50	128,51		0,90	-0,05	-4,81	0,79	0,96	0,17
	500		73,67	-20,72	-21,95	22,97	155,60	132,63		76,90	-21,11	-21,54	25,32	159,69	134,38		0,92	-0,03	-3,12	0,85	0,96	0,11