UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

RAMON RAMIRES TABOSA VIANA

O PRODUTO ALEATÓRIO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

FORTALEZA
2022

RAMON RAMIRES TABOSA VIANA

O PRODUTO ALEATÓRIO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. João Maurício Araújo Mota

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V668p Viana, Ramon.
O PRODUTO ALEATÓRIO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS / Ramon Viana. – 2022.
42 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Estatística, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. João Maurício Araújo Mota.

1. Probabilidade. 2. Álgebra. 3. Produto Aleatório. I. Título.

CDD 519.5

RAMON RAMIRES TABOSA VIANA

O PRODUTO ALEATÓRIO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Estatística.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Maurício Araújo Mota (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gualberto Segundo Agamez Montalvo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luis Gustavo Bastos Pinho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família e amigos, pela capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em todos os momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada. Amo vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e à morte por sua iminência e aleatoriedade. Agradeço à minha mãe, Gedalva, que me ensinou a amar, resistir e persistir. Ao meu pai, Júnior, que me ensinou a ser sensível, forte, amável e íntegro. Sem vocês nada seria possível e eu não estaria aqui. Obrigado por suas existências em cada segundo, minuto e hora. Por suas presenças em cada noite de sono e cada amanhecer. Sempre os amarei. Sempre estarei aqui.

Agradeço aos meus avós: Saturno, pelo dom da arte, poesia e criatividade; Marlucia, pela bondade, pela força de lutar e pelo servir ao outro. Obrigado por me suportar e me amar sem medidas. À minha vó Lô que, embora ainda muito brevemente, deixou uma semente em meu coração chamada amor e cuidado. Uma mulher a frente de seu tempo e até do meu tempo. Você não me viu formar mas sigo lhe honrando em cada letra que escrevo e cada palavra que pronuncio. Agradeço meus primos, primas, tios e tias. Agradeço pela Isabella, que trouxe um frescor de vida à uma alma que, embora jovem, já estava começando a aparentar desgastes. Seu sorriso é mais belo do que qualquer amanhecer. Felipe, meu irmão, você me inspira e me faz querer ser sempre melhor. Você tem um caminho brilhante. Trilhe.

Agradeço a minha amada Mariana, que me impulsiona e me inspira. Obrigado por cada palavra, abraço e carinho. Por toda a compreensão e amor. Você é única e tenho muita sorte de tê-la ao meu lado. Sem você, este trabalho não seria possível. Amo você mais que demais.

Agradeço aos meus vários e incríveis amigos nessa longa e incrível caminhada. De "A" de Áurea até "Y" de Yohana. Não não irei citá-los porque são muitos e não caberiam nessas páginas. Mas, dentre todos, Lindembergson (Berg, para os íntimos), obrigado por toda força, paciência, suporte, amor e compreensão. Obrigado por nunca me deixar desistir e sempre me ajudar a entender essa loucura e beleza que é a Estatística. Pelas madrugadas fazendo trabalhos ou pelas tardes de sorrisos e brincadeiras na Gauss. Amo você e sempre estarei aqui. Sena, obrigado por sua amizade ao longo de mais de uma década. O tempo corre, mas nós não temos pressa. Cada encontro e risada é como se fosse a primeira. Você é especial e sempre que precisar, estarei aqui. Amo você. Matheus Teixeira, obrigado por sua amizade, a mais longa que possuo. Crescemos juntos e ainda iremos crescer muito mais. Sempre que necessitar estou à um abraço de distância. Obrigado meu amigo, amo você.

Agradeço a todos os professores e funcionários do DEMA. Todos. Desde o cafezinho até as sessões de aconselhamento com professores. Meu muito obrigado. Nunca parem. Nunca. Em especial, destaco o professor Gualberto por sua dedicação sobre-humana e amor para com seus alunos e profissão. Agradeço ao professor Juvêncio por cada puxão de orelha, aprendizado e oportunidade. Seu zelo para com a profissão é notável e sua tentativa de nos impulsionar sempre é admirável. Agradeço ao professor João Maurício, que tanto me suportou, compreendeu, ajudou e melhorou. Obrigado por sua humanidade, por seu cuidado e amor. Sem você eu não estaria aqui e esse trabalho não seria possível. Você me tratou como um filho e isso é indescritível. Obrigado pessoal, vocês mudaram uma vida.

Por fim, agradeço a existência do acaso no universo. Essa força intangível e incompreensível que nos abraça e nos assombra. Que nos governa e nos experiencia. Sem acaso, eu não teria errado e acertado tanto. Sem acaso eu não teria uma belíssima e apaixonante profissão.

“Le rire, c’est le soleil; il chasse l’hiver du visage humain.”

(Victor Hugo)

RESUMO

No decorrer da história, muito se estudou sobre a álgebra de variáveis aleatórias. Desde soma à divisão, existem inúmeros textos que analisam, elucidam e descrevem descobertas que ajudam no avanço da ciência. Dentre estes assuntos, o produto de variáveis aleatórias sempre ficou abaixo no quesito número de publicações. Até a metade do século XX, ainda não haviam encontrado um método geral de obtenção da função de densidade de probabilidade (f.d.p.) do produto de n variáveis aleatórias, embora, até este momento na história, alguns autores já tenham feito excelentes descobertas que influenciaram todos os pesquisadores que vieram após.

Com isto, o objetivo deste trabalho é analisar e compreender as características que regem o produto aleatório de variáveis aleatórias, desde uma revisão histórica sobre o produto até uma aplicação dos resultados obtidos sobre o produto aleatório de variáveis aleatórias, sendo sua esperança, variância e $f.d.p.$ Portanto, o mesmo se destina a contribuir um pouco mais ao campo científico e começar a desbravar uma área que se mostra muito interessante e promissora.

Palavras-chave: Probabilidade. Álgebra. Produto Aleatório.

ABSTRACT

Throughout history, much has been studied about the algebra of random variables. From addition to division, there are countless texts that analyze, elucidate and describe discoveries that are very important for the advancement of science. Among these subjects, the product of random variables was always lower in the number of publications item. Until the mid-twentieth century, still unpublished findings of formulas about this type of problem, although some authors have already made discoveries that lead all researchers who sent after.

With this, the objective of the work is analyzed and understood as characteristics that vary according to the variables, from a historical review on the product to a review of the results obtained on the random product, being its probability and variance. Therefore, it is intended to contribute a little more to the scientific field and start to break new ground in an area that is very interesting and promising.

Keywords: Probability. Algebra. Random Product.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será abordado o contexto histórico do produto de variáveis aleatórias, assim como apresentados os objetivos gerais e específicos do presente trabalho.

1.1 Contexto Histórico

O produto de variáveis aleatórias sempre foi um assunto pertinente, mas pouco estudado na literatura no decorrer da história se comparado com a soma e a diferença de variáveis aleatórias, por exemplo. Marinho (1980),[1] na sua dissertação de mestrado sobre a *distribuição exata do produto de variáveis aleatórias independentes qui*, cita alguns autores que considera serem os primeiros pesquisadores a trabalharem com esse tipo de problemática: Craig (1936) e Huntington (1939). Outro autor muito importante para o desenvolvimento do produto de variáveis aleatórias, segundo Springer (1979), foi Epstein (1948). Na primeira linha do artigo escrito por Craig (1936), o autor faz a seguinte indagação:

> *"Dada a função de distribuição de X e Y, o que se pode dizer da distribuição do produto XY?"*

Com isso, o mesmo, no decorrer do texto, ressalta a baixa quantidade de literatura de matemática estatística referente a essa questão e considera até este momento, especificamente, duas variáveis normalmente distribuídas em seu estudo. Por outra perspectiva, Huntington (1939), define um teorema que trata do produto de variáveis aleatórias independentes. O autor escreve:

Teorema 1.1. [2] *Suponha que a variável X é distribuída de acordo com a lei de probabilidade $\int_0^\infty f(x)dx = 1$; e a variável y de acordo com a lei de probabilidade $\int_0^\infty g(y)dy = 1$, x e y são independentemente distribuídas. Então, o produto $u = xy$ será distribuído de acordo com a lei $\int_0^\infty P(u)du = 1$, em que $P(u) = \int_0^\infty f(u/y)g(y)(1/y)dy$.*

Anos depois, este método seria fundamental para a técnica que leva à Transformada de Mellin em consideração. Por falar em Transformada de Mellin, Epstein (1948),

[1] Emerson Luís Lemos Marinho foi discente de graduação em Estatística pela Universidade Federal do Ceará(1975), possui mestrado em Estatística pela Universidade Estadual de Campinas(1980) e doutorado em Economia pela Fundação Getúlio Vargas(1990). Atualmente é professor titular da Universidade Federal do Ceará no CAEN.

[2] Este texto foi adaptado com algumas modificações nas notações utilizadas.

por sua vez, introduziu este conceito como uma ferramenta viável no estudo do produto e quociente de variáveis aleatórias. Ele conseguiu obter, com facilidade, a *Função de Densidade de Probabilidade* (f.d.p.) do produto de duas normais padronizadas, por exemplo. No entanto, seu trabalho ficou limitado apenas à duas variáveis aleatórias. Não obstante, em 1959, Schulz-Arenstorf e Morelock (1959) determinaram a f.d.p. do produto de n variáveis aleatórias uniformes.

Durante um bom tempo, essa área de estudo se mostrou sem grandes avanços e com uma lacuna muito considerável referente à uma forma generalizada de obtenção das f.d.p. do produto de mais de duas variáveis aleatórias. No entanto, Springer e Thompson (1966) apresentaram uma forma geral de obter uma f.d.p. de n variáveis aleatórias sem que as mesmas fossem, necessariamente, não-negativas e identicamente distribuídas utilizando a generalização da ideia da Transformada de Mellin proposta por Epstein (1948).

No âmbito computacional, Glen *et al.* (2004), utilizando o software MAPLE, conseguiram desenvolver um algoritmo que computa a f.d.p. do produto de duas variáveis aleatórias. Em seu artigo, os autores consideraram os casos em que as variáveis são independentes e podem ter as f.d.p definidas por partes.

Em suma, todos os autores citados foram e permanecem essenciais para o estudo do produto de variáveis aleatórias e, com toda certeza, influenciaram muitos pesquisadores e estudiosos no decorrer das décadas. Ainda, pode-se notar uma característica em comum durante todos esses anos de estudo: os números de termos dos produtos não são aleatórios. Dito isto, o objetivo geral do presente trabalho é investigar o cenário em que o número de termos que regem os produtos de variáveis aleatórias são, necessariamente, aleatórios. O objetivo específico é desenvolver um meio de obter a esperança, variância e f.d.p do produto aleatório de variáveis aleatórias independentes.

Portanto, no Capítulo 1, foi descrito um pouco do contexto histórico, analisando como o pensamento foi amadurecendo ao longo dos anos e se tornando mais complexo e amplo. Nos Capítulos 2 e 3 são descritas as técnicas utilizadas no produto de 2 variáveis aleatórias, até casos mais complexos, considerando n variáveis aleatórias. O Capítulo 4 é dedicado à análise da esperança, variância e f.d.p do produto aleatório de variáveis aleatórias. E finalmente, no Capítulo 5, são feitas as considerações finais e descritos possíveis projetos futuros referentes ao tema estudado.

2 A DENSIDADE DE PROBABILIDADE DO PRODUTO DE U = XY

Quando analisamos o produto de duas variáveis aleatórias contínuas, sejam elas independentes ou não, notamos que existe, na literatura, uma forma que sintetiza a resultante deste produto. De acordo com Mood (1974), sendo X e Y variáveis aleatórias dependentes com função de densidade de probabilidade conjunta *f.d.p.c.* $f_{X,Y}(x,y)$, e ainda, sendo U uma variável aleatória que denota o produto de X e Y, isto é, $U = XY$, com f.d.p $f_U(u)$, a densidade de probabilidade de U pode ser compreendida como:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{u}{x}\right) dx, \qquad x \neq 0. \tag{2.1}$$

A equação anterior pode ser obtida considerando o conceito de variáveis auxiliares, de tal modo que, sendo A uma variável auxiliar, tal que, $A = X$, então

$$x = a = w_1(u,a) \quad \text{e} \quad y = \frac{u}{a} = w_2(u,a), \qquad a \neq 0. \tag{2.2}$$

O *Jacobiano* da transformação é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} = 0 & \dfrac{\partial x}{\partial a} = 1 \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{1}{a} & \dfrac{\partial y}{\partial a} = \dfrac{-u}{a^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}, \tag{2.3}$$

em que a não seja nulo. Com isso

$$|J| = \frac{1}{|a|}. \tag{2.4}$$

Assim, a densidade de $U = h_1(X,Y) = XY$ e $A = h_2(X,Y) = X$, com suporte em B, é dada por:

$$\begin{aligned} g(u,a) &= f(w_1(u,a), w_2(u,a))\ |J|\ I_B(u,a) \\ &= \frac{1}{|a|} f\left(a, \frac{u}{a}\right) I_B(u,a). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, a densidade de U é dada por

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} f\left(a, \frac{u}{a}\right) da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{u}{x}\right) dx, \quad \text{em que } a = x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para o caso em que X e Y forem independentes, temos que a função de densidade de probablidade de $U = XY$ é dada por:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x)\ f_Y\left(\frac{u}{x}\right) dx. \tag{2.7}$$

2.1 Exemplos de aplicação

Nesta seção, vamos analisar alguns exemplos de produtos de duas variáveis aleatórias contínuas levando em consideração às técnicas apresentadas anteriormente.

2.1.1 Exemplo 01: O produto de duas variáveis uniformemente distribuídas

Para iniciar nosso primeiro exemplo, consideremos X e Y variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição uniforme no intervalo (0,1). Então,

$$f_X(x) = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x) \ \text{ e } \ f_Y(y) = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(y),$$

e, ainda,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x)\ \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(y).$$

Agora, Sendo U a variável aleatória que denota o produto de X e Y, isto é, $U = XY$, então $Y = \frac{U}{X}$. Logo, se

$$0 < x < 1 \ \text{ e } \ 0 < y < 1$$

então

$$0 < xy < 1,$$

o que implica que

$$0 < U < 1. \tag{2.8}$$

Portanto, pela Equação 2.7,

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{u}{x}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x) \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}\left(\frac{u}{x}\right) dx \\
&= \int_u^1 \frac{1}{x} dx = \ln(x)\Big|_u^1 = \ln(1) - \ln(u) \\
&= -\ln(u) \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(u)
\end{aligned}$$

2.1.2 Exemplo 02: O produto de duas variáveis exponencialmente distribuídas

Para o nosso segundo exemplo, desta vez, consideremos X e Y variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição exponencial com $\lambda = 1$. Então,

$$f_X(x) = e^{-x}\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}(x) \;\text{ e }\; f_Y(y) = e^{-y}\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}(y),$$

e, ainda,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-(x+y)}\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}(x)\;\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}(y).$$

Agora, sendo U a variável aleatória que denota o produto de X e Y, isto é, $U = XY$, então $Y = \dfrac{U}{X}$. Logo,

$$0 < x < \infty \;\text{ e }\; 0 < y < \infty$$

o que implica que,

$$0 < u < \infty. \tag{2.9}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{u}{x}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} e^{-(x+\frac{u}{x})}\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}(x)\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}\left(\frac{u}{x}\right) \\ &= \left[\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-(x+\frac{u}{x})} dx\right]\;\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}(u) \end{aligned}$$

Logo, a f.d.p de U, por este método, não apresenta forma fechada. No entanto, ainda assim, podemos obter sua esperança, que por definição é tal que:

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^{\infty} u\; f_U(u) du$$

O que implica que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \int_0^{\infty} u \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-(x+\frac{u}{x})} dx\; du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \int_0^{\infty} u\; \frac{1}{x}\; e^{-\frac{u}{x}} du\; dx. \end{aligned}$$

Como $Y = \dfrac{U}{X}$, então

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^{\infty} e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{u}{x}\, e^{-\frac{u}{x}} du\, dx = \int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx.$$

Podemos notar que $\int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx$ caracteriza a integral da gama generalizada (I.G.G)[1] com $a = 2, b = 1,$ e $c = 1$, logo, com isso, temos que

$$\mathbb{E}(U) = \Gamma(2) = 1.$$

2.1.3 Exemplo 03: O produto de duas variáveis aleatórias dependentes

Agora, neste exemplo, vamos considerar o caso em que as variáveis são dependentes. Logo, a fórmula utilizada é diferente da usada nos exemplos anteriores. Sejam X e Y variáveis aleatórias dependentes, tais que

$$f(x, y) = 2\, \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x)\, \underset{(x,1)}{\mathbb{I}}(y)$$

e, ainda,

$$U = XY.$$

Analisando os suportes de $f(x, y)$, temos que

$$0 < x < 1 \quad \text{e} \quad x < y < 1,$$

então

$$0 < xy < 1 \rightarrow 0 < u < 1$$

De acordo com a Equação 2.1, temos que

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|}\, f\left(x, \frac{u}{x}\right)\, dx, \qquad x \neq 0.$$

Mas,

$$f\left(x, \frac{u}{x}\right) = 2\, \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x)\, \underset{(x,1)}{\mathbb{I}}\left(\frac{u}{x}\right)$$

Analisando os suportes de $f\left(x, \dfrac{u}{x}\right)$, podemos observar que

$$0 < x < 1 \quad \text{e} \quad x < \frac{u}{x} < 1,$$

[1] Ver Seção A.1 no Apêndice A.

então,

$$x < \frac{u}{x} \;\; \rightarrow \;\; x^2 < u \;\; \rightarrow \;\; x < \sqrt{u}$$

e, ainda,

$$\frac{u}{x} < 1 \;\; \rightarrow \;\; u < x,$$

portanto,

$$u < x < \sqrt{u}.$$

Com isso, temos que,

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_u^{\sqrt{u}} \frac{2}{x}\, dx = 2\, ln(x)\Big|_u^{\sqrt{u}} \\
&= 2\, [ln(\sqrt{u}) - ln(u)] \\
&= 2\, \left[\frac{1}{2} ln(u) - ln(u)\right] \\
f_U(u) &= -ln(u)\, \underset{(0,1)}{\mathbb{I}(u)}
\end{aligned}$$

2.1.4 Exemplo 04: O problema da chapa retangular de metal

Meyer (1983), define um problema referente ao produto de variáveis aleatórias:

> (**Exercício 6.7**) *Suponha que as dimensões, X e Y, de uma chapa retangular de metal, possam ser consideradas variáveis aleatórias contínuas independentes, com as seguintes distribuições:*
>
> $$X : f_X(x) = (x-1)I_{(1,2]}(x) + (3-x)I_{(2,3)}(x) \quad e \quad Y \sim U(2,4)$$
>
> *Ache a f.d.p da área da chapa de $U = XY$.*

Na resolução deste problema, para a obtenção da densidade conjunta de X e Y, podemos fazer o produto das funções $f_X(x)$ e $F_Y(y)$, visto que são independentes, mas temos que nos atentar para seus respectivos intervalos. Logo, se

$$f_X(x) = \begin{cases} x-1, & 1 < x \leq 2 \\ \\ 3-x, & 2 < x < 3 \\ \\ 0, & \text{se outro caso,} \end{cases} \quad e \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2 < y < 4 \\ \\ 0, & \text{se outro caso.} \end{cases}$$

então,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & 1 < x \leq 2, \ 2 < y < 4 \\ \\ \frac{3-x}{2}, & 2 < x < 3, \ 2 < y < 4 \\ \\ 0, & \text{se outro caso,} \end{cases}$$

Para a construção da função de distribuição acumulada de U, temos que dividir a função em subintervalos, tais que:

Intervalo considerado: (-∞, 2)

Como se trata da $f.d.a$ de U, então, $F_U(u) = 0$.

Intervalo considerado: [2, 4)

Temos que:

$$F_U(u) = \int_1^{u/2} \int_2^{u/x} \frac{x-1}{2} dydx = \int_1^{u/2} \frac{x-1}{2} \left(\frac{u}{x} - 2 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{4} - u \times ln\left(\frac{u}{2}\right) - 1 \right]$$

Intervalo considerado: [4, 6)

Temos que:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_1^{u/4} \int_2^4 \frac{x-1}{2} dydx + \int_{u/4}^2 \int_2^{u/x} \frac{x-1}{2} dydx + \int_2^{u/2} \int_2^{u/x} \frac{3-x}{2} dydx \\ &= \left(\frac{u^2}{32} - \frac{u}{4} + \frac{1}{2} \right) + \left[-\frac{3u^2}{32} + \frac{3u}{4} - \frac{u}{2} ln(2) + \frac{u}{2} ln\left(\frac{u}{4}\right) \right] \\ &+ \left[4 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} - \frac{3u}{2} ln(2) + \frac{3u}{2} ln\left(\frac{u}{2}\right) \right] \\ &= \frac{9}{2} - \frac{3u^2}{16} - \frac{9u}{2} ln(2) + 2uln(u) \end{aligned}$$

Intervalo considerado: [6, 8)

Temos que:

$$
\begin{aligned}
F_U(u) &= \int_1^{u/4}\int_2^4 \frac{x-1}{2}dydx + \int_{u/4}^{2}\int_2^{u/x} \frac{x-1}{2}dydx + \int_2^3\int_2^{u/x} \frac{3-x}{2}dydx \\
&= \left(\frac{u^2}{32} - \frac{u}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left[-\frac{3u^2}{32} + \frac{3u}{4} - \frac{u}{2}ln(2) + \frac{u}{2}ln\left(\frac{u}{4}\right)\right] \\
&+ \left[\frac{3u}{2}ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{u}{2}\right] \\
&= \frac{u}{2}ln\left(\frac{u}{4}\right) + \frac{3u}{2}ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{u}{2}ln(2) - \frac{u^2}{16}
\end{aligned}
$$

Intervalo considerado: [8, 12)

Temos que:

$$
\begin{aligned}
F_U(u) &= \int_1^{2}\int_2^4 \frac{x-1}{2}dydx + \int_{2}^{u/4}\int_2^{4} \frac{x-3}{2}dydx + \int_{u/4}^3\int_2^{u/x} \frac{3-x}{2}dydx \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3u^2}{4} - \frac{u^2}{32} - 4\right) + \left[\frac{3u}{2}ln(3) + \frac{3u}{2}ln\left(\frac{u}{4}\right) - \frac{3u}{4} - \frac{9}{2} + \frac{3u^2}{32}\right] \\
&= \frac{u^2}{16} - 8 + \frac{3u}{2}ln(3) - \frac{3u}{2}ln\left(\frac{u}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Intervalo considerado: [12, ∞)

Como se trata da $f.d.a$ de U, então, $F_U(u) = 1$.

Finalmente, derivando cada parte de $F_U(u)$ e, considerando seus respectivos intervalos, temos que:

$$
f_U(u) = \begin{cases}
\frac{1}{2}\left[\frac{u}{2} - ln\left(\frac{u}{2}\right) - 1\right], & 2 \leq u < 4 \\
2 - \frac{3u}{8} + ln\left(\frac{u^2}{16\sqrt{2}}\right), & 4 \leq u < 6 \\
ln\left(\frac{3\sqrt{3u}}{8}\right) + \frac{1}{2} - \frac{u}{8}, & 6 \leq u < 8 \\
\frac{u}{8} + \frac{1}{2}\left[3ln(3) - -3\left(ln\left(\frac{u}{4}\right) + 1\right)\right], & 8 \leq u < 12 \\
0, & \text{se outro caso.}
\end{cases}
$$

No próximo Capítulo, iremos generalizar o número de termos no produto de variáveis aleatórias independentes. Primeiro iremos considerar $n = 3$ e, depois, para qualquer n.

3 O PRODUTO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, isto é, espaço de probabilidade, em que Ω é o espaço amostral, $\mathcal{F}$ é uma sigma-álgebra e $\mathcal{P}$ é uma função de probabilidade associada, com média $\mathbb{E}(X) = \mu$ e variância $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$. Agora, segundo Magalhaes (2015), seja U_n o produto destas n variáveis aleatórias, de tal modo que:

$$U_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 X_2 \ldots X_n. \tag{3.1}$$

Propriedade 3.0.1. $\mathbb{E}(U_n) = \mu^n$

Demonstração. Aplicando a esperança em U_n, temos que:

$$\mathbb{E}(U_n) = \mathbb{E}(X_1 X_2 \ldots X_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right).$$

Como as variáveis são independentes, temos que:

$$\mathbb{E}(U_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Considerando o fato das variáveis serem identicamente distribuídas:

$$\mathbb{E}(U_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X) = [\mathbb{E}(X)]^n = \mu^n. \tag{3.2}$$

■

Propriedade 3.0.2. $\mathbb{E}(U_n^2) = (\sigma^2 + \mu^2)^n$

Demonstração. Aplicando a esperança em U_n^2, temos que:

$$\mathbb{E}(U_n^2) = \mathbb{E}(X_1^2 X_2^2 \ldots X_n^2) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^2\right) \overset{\text{iid}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X^2),$$

no entanto,

$$\mathbb{E}(U_n^2) = \mathbb{V}(U_n) + \mathbb{E}^2(U_n), \tag{3.3}$$

portanto, aplicando a igualdade da Equação 3.3 :

$$\mathbb{E}(U_n^2) = \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}^2(X))$$
$$\mathbb{E}(U_n^2) = \prod_{i=1}^{n} (\sigma^2 + \mu^2) = (\sigma^2 + \mu^2)^n.$$

■

Propriedade 3.0.3. $\mathbb{V}(U_n) = (\sigma^2 + \mu^2)^n - \mu^{2n}$

Demonstração. Podemos reescrever a variância de U_n em função das esperanças de U_n de tal modo que:

$$\mathbb{V}(U_n) = \mathbb{E}(U_n^2) - \mathbb{E}^2(U_n). \tag{3.4}$$

E, ainda, aplicando as Propriedades 3.0.1 e 3.0.2, temos que:

$$\mathbb{E}^2(U_n) = [\mu^n]^2 = \mu^{2n}.$$

Logo,

$$\mathbb{V}(U_n) = \mathbb{E}(U_n^2) - \mathbb{E}^2(U_n) = (\sigma^2 + \mu^2)^n - \mu^{2n}. \tag{3.5}$$

■

3.1 O produto de 3 variáveis uniformemente distribuídas

Para iniciarmos as sessões de exemplos deste capítulo vamos considerar $n = 3$, tal que, sendo X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias contínuas uniformemente distribuídas no intervalo (0,1), temos que:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x_1)\ \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x_2)\ \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x_3).$$

Agora, utilizando as variáveis auxiliares que denotam os produtos entre X_1, X_2 e X_3, tais que

$$U_1 = X_1,$$
$$U_2 = X_1 X_2,$$
$$U_3 = X_1 X_2 X_3,$$

temos as seguintes relações:

$$u_1 = x_1 \to x_1 = u_1 = w_1(u_1, u_2, u_3)$$
$$u_2 = u_1 x_2 \to x_2 = \frac{u_2}{u_1} = w_2(u_1, u_2, u_3)$$
$$u_3 = u_2 x_3 \to x_3 = \frac{u_3}{u_2} = w_2(u_1, u_2, u_3)$$

O Jacobiano da transformação, assim como definido na Equação 2.3, é dado por

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{u_2}{u_1^2} & \dfrac{1}{u_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{u_3}{u_2^2} & \dfrac{1}{u_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{u_1 u_2},$$

portanto,

$$g(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{u_1 u_2} \underset{(0<u_3<u_2<u_1<1)}{\mathbb{I}(u_1, u_2, u_3)} .$$

E, ainda,

$$g(u_1, u_2) = \int_0^{u_2} \frac{1}{u_1 u_2}\, du_3 = \frac{1}{u_1} \underset{(0<u_2<u_1<1)}{\mathbb{I}(u_1, u_2)} .$$

Finalmente,

$$g_{U_1}(u_1) = \int_0^{u_1} \frac{1}{u_1}\, du_2 = \frac{u_1}{u_1} = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}(u_1)}.$$

3.2 O produto de n variáveis uniformemente distribuídas

Agora, generalizando para n variáveis aleatórias, seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, uniformemente distribuídas no intervalo (0,1). Ainda, seja

$$U_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

de tal modo que U_n e X_i são independentes.

3.2.1 A função de densidade de probabilidade de U_n

Para encontrar a f.d.p de U_n, temos que

$$\ln(U_n) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i),$$

mas, como $X_i \sim U(0,1)$, então

$$-2\ln(X_i) \sim \chi^2(2)^1.$$

[1] Ver Seção A.2 no Apêndice A.

Portanto,

$$-2\ln(U_n) = -2\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) = \sum_{i=1}^{n} -2\ln(X_i).$$

Considerando $Z_i = -2\ln(X_i)$, então,

$$-2\ln(U_n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i. \tag{3.6}$$

Analisando a função de distribuição acumulada (f.d.a) de Z, temos que

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) \\ &= \mathbb{P}[-2\ln(X_i) \leq z] \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq e^{-\frac{z}{2}}\right) \\ &= S_X\left(e^{-\frac{z}{2}}\right) = 1 - F_X\left(e^{-\frac{z}{2}}\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

em que $S_X(e^{-\frac{z}{2}})$ é a função de sobrevivência de X no ponto $e^{-\frac{z}{2}}$.

Derivando a Equação 3.7, temos que

$$f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}\underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}(z)}. \tag{3.8}$$

Logo, se de acordo com a Equação 3.8,

$$Z \sim \chi^2(2),$$

então,

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \sim \chi^2(2n).$$

Com isso, considerando $V = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, então

$$\begin{aligned} -2\ln(U_n) &= V \\ U_n &= e^{-\frac{V}{2}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= \mathbb{P}(U_n \leq u) \\ &= \mathbb{P}(e^{-\frac{V}{2}} \leq u) \\ &= \mathbb{P}[V \geq -2\ln(u)] \\ &= S_V[-2\ln(u)] = 1 - F_V[-2\ln(u)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Derivando a Equação 3.10, temos

$$\begin{aligned}
f_{U_n}(u) &= \frac{\partial F_{U_n}(u)}{\partial u} \\
&= \frac{2}{u} f_V(-2\ln(u)) \\
&= \frac{2}{u}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n [-2\ln(u)]^{n-1}}{\Gamma(n)}\, e^{\frac{2\ln(u)}{2}} \\
&= \frac{\frac{2}{2^n}[-2\ln(u)]^{n-1}}{\Gamma(n)} \\
&= \frac{\frac{1}{2^{n-1}}[-2\ln(u)]^{n-1}}{\Gamma(n)} \\
&= \frac{\left[\frac{-2\ln(u)}{2}\right]^{n-1}}{\Gamma(n)} \\
&= \frac{[-\ln(u)]^{n-1}}{\Gamma(n)} \underset{B}{\mathbb{I}(u)}. && (3.11)
\end{aligned}$$

Para obter B, temos que analisar o suporte de V, de tal forma que

$$\begin{aligned}
&0 < v < +\infty \\
&0 < \frac{v}{2} < +\infty \\
&0 < e^{-\frac{v}{2}} < 1 \\
&0 < u < 1. && (3.12)
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando a Equação 3.12 na Equação 3.11, temos, finalmente,

$$f_{U_n}(u) = \frac{[-\ln(u)]^{n-1}}{\Gamma(n)} \underset{(0,1)}{\mathbb{I}(u)}. \tag{3.13}$$

3.2.2 A esperança de U_n

Por definição,

$$\mathbb{E}(U_n) = \int_0^1 \frac{-u[\ln(u)]^{n-1}}{\Gamma(n)} du = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 -u[\ln(u)]^{n-1} du.$$

E considerando $k = -\ln(u)$, então $e^{-k} = u$. Logo, $dk = -u^{-1}du$ e $du = -udk = -e^{-k}dk$. Ainda, analisando o limites de integração, temos que

$$\begin{cases}
\text{Se} \quad u \to 0, \quad \text{então} \quad k = \lim_{u \to 0}[-\ln(u)] = +\infty \\
\\
\text{Se} \quad u \to 1, \quad \text{então} \qquad k = [-\ln(1)] = 0,
\end{cases}$$

logo, portanto,

$$\mathbb{E}(U_n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} k^{n-1}\ e^{-k}\ e^{-k}\ dk = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} k^{n-1}\ e^{-2k}\ dk. \tag{3.14}$$

Podemos notar que a Equação 3.14 caracteriza a integral da gama generalizada (I.G.G) com $a = n, b = 2,$ e $c = 1$, logo, com isso

$$\mathbb{E}(U_n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n)}{2^n} = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}. \tag{3.15}$$

Agora, se observarmos a Equação 3.2

$$\mathbb{E}(U_n) = [\mathbb{E}(X)]^n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}.$$

O que reafirma a teoria vista no começo do capítulo.

3.2.3 A variância de U_n

De forma similar à esperança, para a obtenção da variância de U_n, temos que encontrar $\mathbb{E}(U_n^2)$, tal que

$$\mathbb{E}(U_n^2) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 -u^2[\ln(u)]^{n-1} du = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} k^{n-1}\ e^{-3k}\ dk = \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}.$$

Logo,

$$\mathbb{V}(U_n) = \mathbb{E}(U_n^2) - \mathbb{E}^2(U_n) = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^{2n}}.$$

O que vai de concordância com a Equação 3.5, de tal modo que se

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

então,

$$\mathbb{V}(U_n) = \mathbb{E}(X^2)^n - \mathbb{E}(X)^{2n} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2^2}\right)^n - \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^{2n}}. \tag{3.16}$$

Logo, as igualdades referentes à variância, assim como à esperança, estão de acordo com as calculadas.

3.3 O produto de n variáveis lognormais

Um fato sobre a família de distribuição lognormal é que a mesma é fechada para o produto de variáveis aleatórias. Isto é, dado que as variáveis seguem a distribuição lognormal, a resultante do produto destas variáveis será uma variável aleatória que segue a distribuição lognormal. Com o objetivo de investigar essa característica, vamos considerar que

$$X_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Com isso, consideremos ainda,

$$U_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Como $X_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2)$, então, denotando $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, temos que

$$X_i = e^{Y_i},$$

e, portanto,

$$U_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} e^{Y_i} = exp\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = exp\left(S_n\right).$$

No entanto,

$$S_n \sim N\left(\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

E, com isso,

$$U_n = \prod_{i=1}^{n} X_i \sim LN\left(\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right). \tag{3.17}$$

Se considerarmos $\mu_i = \mu$ e $\sigma_i^2 = \sigma^2$, temos finalmente que

$$U_n \sim LN(n\mu, n\sigma^2). \tag{3.18}$$

Os resultados obtidos nesta seção serão úteis no próximo Capítulo quando formos investigar o que acontece com este produtório quando o número de termos é aleatório. Isto é, N passa a ser uma variável aleatória que segue alguma distribuição.

4 O PRODUTO ALEATÓRIO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Muitas vezes torna-se dificultoso trabalhar apenas com as funções de probabilidade, sejam elas de densidade (no caso contínuo) ou de massa (no caso discreto). Principalmente se tratando de álgebra de variáveis aleatórias, como, por exemplo, a soma, a diferença, a razão e o produto. A fim de amenizar essas dificuldades, existem, na literatura, as funções geradoras que conseguem caracterizar as variáveis aleatórias e, muitas vezes, simplificar a álgebra inerente a estas.

4.1 A Função Geradora de Probabilidade

De acordo com Wilf (1994), uma função geradora é um varal no qual penduramos uma sequência de números para exibição. Por exemplo, se $a_0, a_1, a_2, \ldots$ é uma sequência de números reais e

$$A(t) = \sum_{i \geq 0} t^i a_i$$

converge em algum intervalo, então $A(s)$ é uma função geradora da sequência a_i.

Para o nosso caso de produto aleatório de variáveis aleatórias, existe uma função geradora bastante útil que irá nos dar suporte para os futuros cálculos e resultados: *a função geradora de probabilidade* (f.g.p). Segundo Johnson *et al.* (2005), seja N uma variável aleatória inteira (não-negativa) com função de massa de probabilidade (f.m.p) $\mathbb{P}[N = n]$ e seja A seu suporte, então sua função f.g.p no ponto t é dada por:

$$G_N(t) = \mathbb{E}(t^N) = \sum_{A} t^n \, \mathbb{P}[N = n]. \tag{4.1}$$

4.2 Propriedades da função geradora de probabilidade

Iremos agora analisar algumas propriedades da *f.g.p* bastante úteis para a análise do produto aleatório de variáveis aleatórias. De acordo com Johnson *et al.* (2005), a f.g.p. é definida pelas probabilidades. Com isso, temos que

$$\mathbb{P}_j = \left[\frac{1}{j!} \frac{\partial^j G_N(t)}{\partial t^j} \right]_{t=0}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

As propriedades a seguir são referentes à esperança, variância, assim como o r-ésimo momento fatorial.

Propriedade 5.1. $\mathbb{E}(N) = \dfrac{\partial G_N(1)}{\partial t}$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
G_N(t) &= \mathbb{E}(t^N) \\
\frac{\partial G_N(t)}{\partial t} &= \mathbb{E}(N\ t^{N-1}) \\
\frac{\partial G_N(1)}{\partial t} &= \mathbb{E}(N\ 1^{N-1}) = \mathbb{E}(N)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

■

Propriedade 5.2. $\mathbb{E}(N^2) = \dfrac{\partial^2 G_N(1)}{\partial^2 t} + \dfrac{\partial G_N(1)}{\partial t}$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_N(t)}{\partial t} &= \mathbb{E}(N\ t^{N-1}) \\
\frac{\partial^2 G_N(t)}{\partial^2 t} &= \mathbb{E}(N(N-1)\ t^{N-2}) \\
\frac{\partial^2 G_N(1)}{\partial^2 t} &= \mathbb{E}(N(N-1)\ 1^{N-2}) = \mathbb{E}(N(N-1)) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N).
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
\mathbb{E}(N) = \frac{\partial G_N(1)}{\partial t},
$$

portanto,

$$
\frac{\partial^2 G_N(1)}{\partial^2 t} + \frac{\partial G_N(1)}{\partial t} = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(N^2) \tag{4.3}
$$

■

Propriedade 5.3. $Var(N) = \dfrac{\partial^2 G_N(1)}{\partial^2 t} + \dfrac{\partial G_N(1)}{\partial t}$ - $\left[\dfrac{\partial G_N(1)}{\partial t}\right]^2$

Demonstração.

$$
\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2.
$$

Mas, de acordo com as Equações 4.2 e 4.3, temos que

$$
Var(N) = \frac{\partial^2 G_N(1)}{\partial^2 t} + \frac{\partial G_N(1)}{\partial t} - \left[\frac{\partial G_N(1)}{\partial t}\right]^2. \tag{4.4}
$$

■

Propriedade 5.4. $G_N(1) = 1$, seja qual for a distribuição de N.

Demonstração.

$$G_N(t) = \mathbb{E}(t^N)$$
$$G_N(1) = \mathbb{E}(1^N) = \mathbb{E}(1) = 1$$

■

Generalizando os resultados obtidos para o r-ésimo momento fatorial, caso ele exista, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_N(t)}{\partial t} &= \mathbb{E}(N\ t^{N-1}) \\
\frac{\partial^2 G_N(t)}{\partial^2 t} &= \mathbb{E}(N(N-1)\ t^{N-2}) \\
\frac{\partial^3 G_N(t)}{\partial^3 t} &= \mathbb{E}(N(N-1)(N-2)\ t^{N-3}) \\
&\vdots \\
\frac{\partial^r G_N(t)}{\partial^r t} &= \mathbb{E}(N(N-1)(N-2)\dots(N-r-1)\ t^{N-r})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^r G_N(1)}{\partial^r t} = \mathbb{E}(N(N-1)(N-2)\dots(N-r-1)),$$

é dito como r-ésimo momento fatorial.

4.3 O Produto Aleatório de Variáveis Aleatórias

Até o momento, todos os produtos que estudamos nesse trabalho tiveram suas parcelas fixadas, isto é, o número de termos era constante. No entanto, agora, iremos investigar um cenário diferente: o número de termos é aleatório. Isto faz com que não saibamos, antes do experimento, quantas variáveis serão multiplicadas, tornando o problema um tanto mais complexo.

4.3.1 A esperança do produto aleatório

Uma das primeiras características que podemos analisar é a esperança do produto aleatório. Para tal, iremos aplicar o mesmo raciocínio desenvolvido no Capítulo 3, quando estávamos tratando de um n fixo. Partindo dessa igualdade e usando algumas propriedades da esperança condicional, podemos generalizar para um N aleatório.

Portanto, sendo $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas,

$$U_N = \prod_{i=1}^{N} X_i,$$

a variável aleatória que denota o produto aleatório destas variáveis, e ainda, sendo N uma variável aleatória não-negativa independente de $X_1, X_2, \ldots, X_N$, então temos que, quando n é fixo,

$$\mathbb{E}(U_N|N = n) = \mathbb{E}(X)^n.$$

Mas, aplicando a propriedade da esperança condicional[1], temos que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(U_N|N = n)] = \mathbb{E}(U_N),$$

ou seja,

$$\mathbb{E}(U_N) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X)^n].$$

Logo, sem perda de generalização, considerando que a estrutura que rege o produtório é aleatória, podemos entender que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(U_N|N)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X)^N].$$

[1] Ver Seção A.3 no Apêndice A.

E, ainda, de acordo com a Equação 4.1, a esperança condicional anterior caracteriza a função geradora de probabilidade de N no ponto $\mathbb{E}(X)$ e pode ser expressa como

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(U_N|N)] = G_N[\mathbb{E}(X)].$$

Portanto, finalmente, temos que

$$\mathbb{E}(U_N) = G_N[\mathbb{E}(X)]. \tag{4.5}$$

4.3.2 A variância do produto aleatório

De forma análoga à seção anterior, iremos utilizar os resultados obtidos quando o número de parcelas é fixo e, depois, generalizar para um N aleatório. Dito isto, temos que, de acordo com a Equação 3.5,

$$\mathbb{V}(U_N|N=n) = \left[\mathbb{E}(X^2)\right]^n - \mathbb{E}(X)^{2n},$$

e, sem perda de generalidade, podemos definir

$$\mathbb{V}(U_N|N) = \left[\mathbb{E}(X^2)\right]^N - \mathbb{E}(X)^{2N}. \tag{4.6}$$

No entanto, teremos que utilizar a propriedade da variância condicional[2] para obter a variância de U_N quando o número de termos é aleatório. Logo, podemos compreender tal variância sendo

$$\mathbb{V}(U_N) = \mathbb{V}[\mathbb{E}(U_N|N)] + \mathbb{E}[\mathbb{V}(U_N|N)] \tag{4.7}$$

Logo, aplicando os resultados das Equações 4.5 e 4.6 na Equação 4.7, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(U_N) &= \mathbb{V}[\mathbb{E}(U_N|N)] + \mathbb{E}[\mathbb{V}(U_N|N)] \\
&= \mathbb{V}\left[\mathbb{E}(X)^N\right] + \mathbb{E}\left\{\left[\mathbb{E}(X^2)\right]^N - \mathbb{E}(X)^{2N}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[\mathbb{E}(X)^N\right]^2\right\} - \mathbb{E}^2\left[\mathbb{E}(X)^N\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X)^{2N}\right] + \mathbb{E}\left\{\left[\mathbb{E}(X^2)\right]^N\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[\mathbb{E}(X^2)\right]^N\right\} - \left\{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X)^N\right] \times \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X)^N\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Mas, de acordo com a Equação 4.1,

$$\mathbb{E}\left\{\left[\mathbb{E}(X^2)\right]^N\right\} = G_N\left[\mathbb{E}(X^2)\right] \quad \text{e} \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X)^N\right] = G_N\left[\mathbb{E}(X)\right],$$

portanto, finalmente,

$$\mathbb{V}(U_N) = G_N\left[\mathbb{E}(X^2)\right] - G_N^2\left[\mathbb{E}(X)\right] \tag{4.8}$$

[2] Ver Seção A.4 no Apêndice A.

4.4 O experimento do dado e da moeda

Com o intuito de ilustrar os resultados obtidos neste capítulo, vamos analisar um experimento que, embora simples, consegue sintetizar o raciocínio e aplicação das igualdades obtidas. Portanto, consideremos o seguinte experimento: *Uma pessoa têm em suas mãos um dado e uma moeda, ambos honestos. Primeiro, a pessoa joga a moeda para cima. Se o resultado for cara ($N = 1$), significa que ela irá jogar o dado uma vez e anotar a sua face. Se o resultado for coroa ($N = 2$), a pessoa irá jogar o dado duas vezes e anotar o produto resultante das faces obtidas.*

O experimento enunciado caracteriza um produto aleatório, visto que não conseguimos prever o número de termos em cada rodada. Logo, considerando X a face do dado obtida em cada jogada, N a face da moeda obtida em cada jogada,

$$U_N = \prod_{i=1}^{N} X_i,$$

e ainda, sendo X e N independentes, podemos supor que

$$N \sim U(2),$$
$$X \sim U(6).$$

Isto é, N e X seguem uma distribuição uniforme discreta de parâmetros 2 e 6, respectivamente.

Com isso, temos que as funções de massa de probabilidade de N e X são dadas por

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2} \underset{\{1,2\}}{\mathbb{I}(n)} \text{ e} \tag{4.9}$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{6} \underset{\{1,2,3,4,5,6\}}{\mathbb{I}(x)}, \tag{4.10}$$

respectivamente.

Na Tabela 1, podemos observar a probabilidade de cada possível resultado de U_N. Podemos notar uma maior frequência para os menores números, assim como consequência uma maior probabilidade para os mesmos de acordo com a Figura 1. Isso se dá devido à natureza do experimento que parte de dois cenários: o resultado cara ou coroa da moeda. Logo, se o resultado for cara, teremos 6 possibilidades para U_N. No entanto, se o resultado for coroa, teremos 36 resultados para U_N, incluindo os obtidos quando o

U_N	Probabilidade	U_N	Probabilidade
1	0,0972	12	0,0556
2	0,1111	15	0,0278
3	0,1111	16	0,0139
4	0,1250	18	0,0278
5	0,1111	20	0,0278
6	0,1389	24	0,0278
8	0,0278	25	0,0139
9	0,0139	30	0,0278
10	0,0278	36	0,0139

Tabela 1 – Tabela de Probabilidades de U_N

resultado foi cara. A questão é: será que, mesmo sem conhecer a lei de U_N, podemos obter sua média e variância? Observando os resultados deste capítulo, de acordo com a Equação 4.5, temos que

$$\mathbb{E}(U_N) = G_N[\mathbb{E}(X)].$$

Mas, como $X \sim U(6)$, então sua esperança [1], por definição é tal que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{6+1}{2} = 3,5, \tag{4.11}$$

sua variância[2] é

$$\mathbb{V}(X) = \frac{6^2-1}{12} = 2,9167. \tag{4.12}$$

E, ainda,

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 2,9167 + 3,5^2 = 15,1667 \tag{4.13}$$

Como $N \sim U(2)$, então sua *f.g.p*[3] pode ser expressa como

$$G_N(t) = \frac{t(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{t(1+t)(1-t)}{2(1-t)} = \frac{t(1+t)}{2}. \tag{4.14}$$

[1] Ver Subseção A.5.1 no Apêndice A.
[2] Ver Subseção A.5.2 no Apêndice A.
[3] Ver Subseção A.5.3 no Apêndice A.

Logo, considerando as Equações 4.11 e 4.14, temos que

$$\mathbb{E}(U_N) = G_N[\mathbb{E}(X)] = \frac{\mathbb{E}(X)[1+\mathbb{E}(X)]}{2} = \frac{3,5[1+3,5]}{2} = 7,875.$$

E para variância de U_N, de acordo com as Equações 4.8, 4.11 e 4.13, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(U_N) &= G_N\left[\mathbb{E}(X^2)\right] - G_N^2\left[\mathbb{E}(X)\right] \\
&= \frac{\mathbb{E}(X^2)[1+\mathbb{E}(X^2)]}{2} - \left\{\frac{\mathbb{E}(X)[1+\mathbb{E}(X)]}{2}\right\}^2 \\
&= \frac{15,1667[1+15,1667]}{2} - \left\{\frac{3,5[1+3,5]}{2}\right\}^2 \\
&= 122,5977 - 62,01562 = 60,58212.
\end{aligned}$$

De forma ilustrativa, a fim de confrontar os resultados teóricos com os computacionais, foi realizado uma simulação. Utilizando o Software R Core Team (2021), 100.000 repetições do experimento foram simuladas. O pacote *purrr*, Henry e Wickham (2020), foi utilizado para gerar aleatoriamente amostras da distribuição uniforme com os parâmetros antes discutidos.

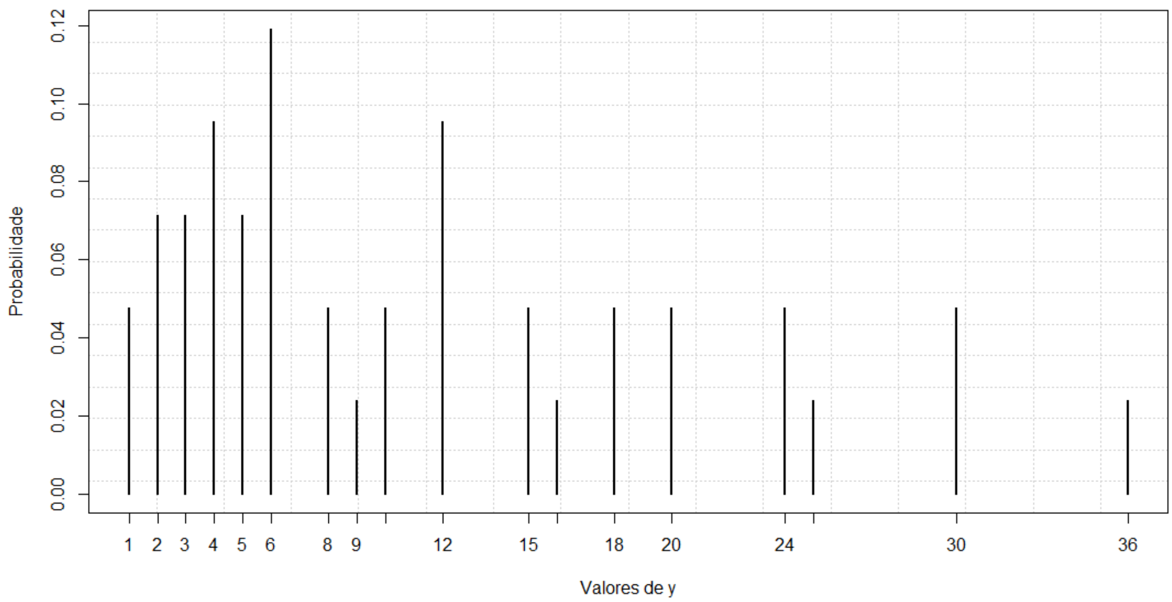

Figura 1 – Probabilidades de cada resultado de U_N.

Na Tabela 2 podemos observar os resultados obtidos. Com isso, podemos calcular a esperança e variância. Depois, comparar com os resultados discutidos neste capítulo com os calculados. Portanto, temos que por definição, a esperança pode ser obtida de tal forma que

$$\bar{U}_N = (1 \times 0,09914) + (2 \times 0,11067) + \ldots + (36 \times 0,01385) = 7,85. \tag{4.15}$$

A variância de U_N é tal que

U_N	Frequência	$\mathbb{P}(U_N = u)$	U_N	Frequência	$\mathbb{P}(U_N = u)$
1	9914	0,09914	12	5470	0,05470
2	11067	0,11067	15	2758	0,02758
3	11030	0,11030	16	1410	0,01410
4	12478	0,12478	18	2838	0,02838
5	11010	0,11010	20	2844	0,02844
6	13970	0,13970	24	2786	0,02786
8	2822	0,02822	25	1399	0,01399
9	1431	0,01431	30	2620	0,02620
10	2768	0,02768	36	1385	0,01385

Tabela 2 – Tabela de frequências e probabilidades das simulações do experimento

$$\sigma^2_{U_N} = 60,0247. \tag{4.16}$$

Portanto, como podemos observar nos resultados anteriores, a teoria desenvolvida no Capítulo 5, consegue, de forma satisfatória, se aproximar da esperança e variância calculados computacionalmente. Logo, mesmo não conhecendo a lei de Y, conseguimos obter estas quantidades de forma funcional.

Ademais, também é interessante observar o comportamento da média e variância com números diferentes de simulações.

Número da Simulação	Número de jogadas	Média	Variância
1	100	7,35	53,3475
2	1.000	7,68	56,667
3	10.000	7,79	59,7639
4	50.000	7,89	60,6579
5	100.000	7,85	60,0247
6	200.000	7,84	60,1769
7	500.000	7,87	60,4475

Tabela 3 – Tabela de médias e variâncias de diferentes simulações

Podemos observar que conforme o número de jogadas vai crescendo, os valores, tanto da média quanto da variância, vão tendendo para os obtidos com as Equações 4.5 e 4.8, assim também como representado na Figura 2. Isso significa que as igualdades encontradas, da esperança e variância, para o produto aleatório, neste caso, funcionam de forma consistente.

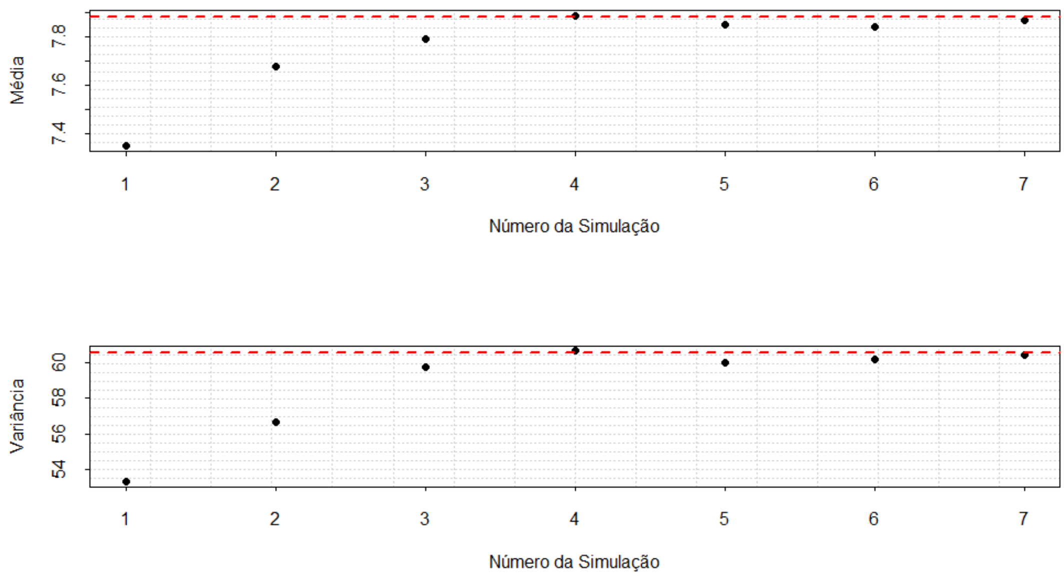

Figura 2 – Médias e variâncias das simulações.

4.5 O produto aleatório de variáveis uniformes contínuas

A fim de tornar o experimento anterior um tanto mais complexo, vamos considerar que $X \sim U(0,1)$, isto é, agora a distribuição de X é contínua e não mais discreta. Ainda, iremos considerar o mesmo N do experimento anterior, logo, seus resultados e sua relação de independência com X_1 e X_2 serão preservados.

4.5.1 Esperança e variância de U_N

Neste caso, temos que, por definição,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} = 0,5, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{12} \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3} \tag{4.17}$$

Portanto, o valor esperado de U_N, neste caso é dado por:

$$\mathbb{E}(U_N) = G_N[\mathbb{E}(X)] = G_N(0,5) = \frac{0,5(0,5+1)}{2} = \frac{3}{8} = 0,375. \tag{4.18}$$

O valor esperado de U_N^2, é dado por:

$$\mathbb{E}(U_N^2) = G_N[\mathbb{E}(X^2)] = G_N\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{2} = \frac{2}{9}. \tag{4.19}$$

E, finalmente, a variância de U_N, é tal que:

$$\mathbb{V}(U_N) = \mathbb{E}(U_N^2) - \mathbb{E}(U_N)^2 = \frac{2}{9} - \frac{9}{64} = \frac{47}{576} \tag{4.20}$$

4.5.2 A função de densidade de probabilidade de U_N

Para obter sua *f.d.p.*, iremos considerar $H_{U_N}(u) = H(u)$ sua função de distribuição acumulada. Ainda, o suporte de U_N é o intervalo (0,1). Para $0 < u < 1$ temos que:

$$\begin{aligned} H(u) = \mathbb{P}(U_N \leq u) &= \mathbb{P}(N=1, U_N \leq u) + \mathbb{P}(N=2, U_N \leq u) \\ &= \mathbb{P}(N=1) \times \mathbb{P}(U_N \leq u | N=1) + \mathbb{P}(N=2) \times \mathbb{P}(U_N \leq u | N=2) \\ &= \mathbb{P}(N=1) \times \mathbb{P}(X_1 \leq u | N=1) + \mathbb{P}(N=2) \times \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq u | N=2). \end{aligned}$$

Como N, X_1 e X_2 são independentes, temos que

$$
\begin{aligned}
H(u) &= \mathbb{P}(N=1)\times\mathbb{P}(X_1\leq u)+\mathbb{P}(N=2)\times\mathbb{P}(X_1X_2\leq u)\\
&= \mathbb{P}(N=1)\times\mathbb{P}(X_1\leq u)+\mathbb{P}(N=2)\times\mathbb{P}(X_1X_2\leq u)\\
&= \mathbb{P}(N=1)\times\mathbb{P}(X_1\leq u)+\mathbb{P}(N=2)\times\mathbb{P}[ln(X_1X_2)\leq ln(u)]\\
&= \mathbb{P}(N=1)\times\mathbb{P}(X_1\leq u)+\mathbb{P}(N=2)\times\mathbb{P}[-ln(X_1X_2)\geq -ln(u)]\\
&= \mathbb{P}(N=1)\times\mathbb{P}(X_1\leq u)+\mathbb{P}(N=2)\times\mathbb{P}[-ln(X_1)-ln(X_2)\geq -ln(u)]\\
&= \frac{1}{2}\times F_{X_1}(u)+\frac{1}{2}\times\mathbb{P}[K\geq -ln(u)]\\
H(u) &= \frac{F_{X_1}(u)+S_K[-ln(u)]}{2}, \quad \text{em que } \ K=-ln(X_1)-ln(X_2). \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Por definição, se $K=-ln(X_1)-ln(X_2)$, então

$$K\sim Gama(2,1).$$

E ainda, considerando $Y_1=-ln(X_1)$ e $Y_2=-ln(X_2)$, então

$$Y_1\sim Exp(1)\ \ e\ \ Y_2\sim Exp(1),\ \ independentes.$$

A *f.d.p.* de K é dada por

$$f_K(k)=ke^{-k}\underset{0,\infty}{\mathbb{I}}(k),$$

e sua função de sobrevivência para $k>0$ é tal que

$$S_K(k)=(k+1)e^{-k}.$$

Logo,

$$S_K[ln(u)]=[-ln(u)+1]e^{ln(u)}=[1-ln(u)]\ u. \qquad (4.22)$$

Em relação a X_1, temos que sua função acumulada é dada por:

$$F_{X_1}(x)=x. \qquad (4.23)$$

Portanto, Aplicando os resultados das Equações 4.22 e 4.23 na Equação 4.21, temos que

$$H(u)=\frac{F_{X_1}(u)+S_K[-ln(u)]}{2}=\frac{u+[1-ln(u)]\ u}{2}=\frac{u[2-ln(u)]}{2}.$$

Derivando $H(u)$, finalmente, temos que

$$h_{U_N}(u) = \frac{2 - ln(u) - 1}{2} = \frac{1 - ln(u)}{2} \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(u) \tag{4.24}$$

Para demonstrarmos que a Equação 4.24 se trata de uma legítima *f.d.p*, temos que, primeiro analisando seu suporte:

Demonstração.

$$\begin{aligned} 0 < u &< 1 \\ -\infty < ln(u) &< 0 \\ 0 < -ln(u) &< \infty \\ 1 < 1 - ln(u) &< \infty \end{aligned}$$

Isso implica que o numerador de $h_{U_N}(u)$ é sempre positivo no suporte. Agora, temos que

$$I = \int_0^1 \frac{1 - ln(u)}{2} du = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 du + \int_0^1 -ln(u)du\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \int_0^1 -ln(u)du\right]$$

Logo, fazendo a mudança de variável tal que

$$v = -ln(u), \quad u = e^{-v}, \quad du = -e^{-v}dv,$$

temos que

$$\int_0^1 -ln(u)du = \int_{-\infty}^0 ve^{-v}(-1)du = \int_0^\infty ve^{-v}du = \Gamma(2) = 1.$$

Portanto,

$$I = \frac{1}{2}\left[1 + \int_0^1 -ln(u)du\right] = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1.$$

O que caracteriza $h_{U_N}(u)$ como uma legítima *f.d.p*. ∎

4.6 O produto aleatório de variáveis lognormais

Como já comentado no Capítulo 3, a família lognormal é fechada para o produto de variáveis aleatórias. Anteriormente investigamos o caso em que o produto de variáveis lognormais possui um N fixo, mas agora, iremos analisar o fenômeno em que N é aleatório. Para tal, vamos supor que N segue uma distribuição geométrica com probabilidade p. A variável aleatória X, neste caso, irá seguir uma distribuição lognormal com média μ e variância σ^2.

Portanto, se $N \sim Geo(p)$, então

$$\mathbb{P}(N = n) = pq^{n-1} \underset{\{1,2,3,...\}}{\mathbb{I}(n)}$$

Ainda,

$$U_N = \prod_{i=1}^{N} X_i$$

Com isso temos que, a $f.g.p$[1] de N é dada por:

$$G_N(t) = \frac{pt}{1-qt}, \quad |t| < \frac{1}{q}. \tag{4.25}$$

Por definição, a esperança de X pode ser definida como

$$\mathbb{E}(X) = exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right), \tag{4.26}$$

e, com isso,

$$\mathbb{E}(X^2) = exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right). \tag{4.27}$$

Como já vimos, de acordo na Equação 4.5, a esperança de U_N pode ser obtida de tal forma que

$$\mathbb{E}(U_N) = G_N[\mathbb{E}(X)] = G_N\left[exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right].$$

A condição de existência de $\mathbb{E}(U_N)$ é dada por:

$$|t| = exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) < \frac{1}{q} \quad \rightarrow \quad \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) < -log(q).$$

Logo,

$$\mathbb{E}(U_N) = \frac{p\ exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{1 - q\ exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}, \tag{4.28}$$

De maneira análoga,

$$\mathbb{E}(U_N^2) = G_N[\mathbb{E}(X^2)] = G_N[exp(2\mu + 2\sigma^2)]$$

A condição de existência de $\mathbb{E}(U_N^2)$ é dada por:

$$|t| = exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) < \frac{1}{q} \quad \rightarrow \quad \mu + \sigma^2 < -log(2q).$$

[1] Ver Tabela 4 no Apêndice B.

Portanto,

$$\mathbb{E}(U_N^2) = \frac{p\ exp\,(2\mu + 2\sigma^2)}{1 - q\ exp\,(2\mu + 2\sigma^2)} \tag{4.29}$$

Finalmente, para obtermos a variância de U_N, temos que:

$$\mathbb{V}(U_N) = \mathbb{E}(U_N^2) - \mathbb{E}(U_N)^2 = \frac{p\ exp\,(2\mu + 2\sigma^2)}{1 - q\ exp\,(2\mu + 2\sigma^2)} - \left[\frac{p\ exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{1 - q\ exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}\right]^2 \tag{4.30}$$

Para calcularmos a $f.d.p$ de U_N, vamos considerar $H(u)$ como a função de distribuição acumulada de U_N e $F(u)$ como a função de distribuição acumulada de U_n, tais que

$$\begin{aligned} H_{U_N}(u) &= \mathbb{P}(U_N \leq u) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n, U_N \leq u) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\ \mathbb{P}(U_n \leq u) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\ F_{U_n}(u) \\ H_{U_N}(u) &= \sum_{i=1}^{\infty} pq^{n-1}\ F_{U_n}(u). \end{aligned}$$

Derivando H_{U_N}, temos que

$$h_{U_N}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} pq^{n-1}\ f_{U_n}(u),$$

mas, como vimos no Capítulo 3, de acordo com a Equação 3.18,

$$U_n \sim LN(n\mu^2, n\sigma^2),$$

portanto, temos que

$$h_{U_N}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} pq^{n-1} \frac{1}{u\sqrt{2\pi n}} exp\left(-\frac{[log(u) - n\mu]^2}{2n\sigma^2}\right) \underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}(u)}. \tag{4.31}$$

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

No decorrer desde trabalho, investigamos um pouco da história do produto de variáveis aleatórias, com teoremas e alguns exemplos que ilustram as ideias dos pesquisadores da época. Na parte final do trabalho, percebemos que existe uma forma de calcular os produtos aleatórios de variáveis aleatórias, bem como suas características (média e variância). Também podemos observar que a seguinte ideia somente funciona com variáveis aleatórias positivas e não foram estudadas formas não paramétricas, visto que este ponto, pode ser estudado em trabalhos futuros com intuito de generalizar ainda mais as ideias aqui desenvolvidas.

Conseguimos, no presente trabalho, obter a *f.d.p.* do produto aleatório de variáveis aleatórias lognormais. Outro ponto interessante a ser estudado é uma forma de obtenção genérica de uma *f.d.p* dos produtos aleatórios. Para este fim, um estudo ainda mais aprofundado é necessários sobre transformações, funções e álgebra de variáveis aleatórias.

A simulação utilizada apresenta resultados satisfatórios que impulsionam a pesquisa futura deste tema. Exemplos práticos são necessários para observar como estas fórmulas obtidas se comportam com dados reais que respeitem as suposições apontadas. Algumas áreas como, biologia celular, análise de crédito financeiro e probabilidade estocástica, podem apresentar problemas úteis levando em consideração o produto aleatório de variáveis aleatórias. Infelizmente, até a data do presente trabalho, nenhum problema real deste tipo foi obtido para ser incluído aqui.

No mais, podemos convir que as ideias aqui desenvolvidas e os resultados obtidos podem servir de suporte e passo inicial para futuros pesquisadores que tenham interesse em trabalhar nesta área ou problemas em que as fórmulas aqui desenvolvidas se configurem necessárias.

REFERÊNCIAS

CRAIG, C. C. On the frequency function of xy. **Annals of Mathematical Statistics**, n. 7, p. 1–15, 1936.

EPSTEIN, B. Some applications of the mellin transform in statistics. **Annals of Mathematical Statistics**, n. 19, p. 370–379, 1948.

GLEN, A. G.; LEEMIS, L. M.; DREW, J. H. Computing the distribution of the product of two continuous random variables. **Computational Statistics & Data Analysis**, n. 44, p. 451–464, 2004.

HENRY, L.; WICKHAM, H. **purrr: Functional Programming Tools**. [S.l.], 2020. R package version 0.3.4. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=purrr>.

HUNTINGTON, E. V. Frequency distributions of products and quotients. **Annals of Mathematical Statistics**, n. 10, p. 195–198, 1939.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; KEMP, A. W. **Univariate Discrete Distributions**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005.

MAGALHAES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. [S.l.]: edusp, 2015.

MARINHO, E. L. L. **Distribuição exata do produto de variáveis aleatórias independentes qui**. [S.l.]: Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Campinas, SP, 1980.

MEYER, P. L. **Probabilidade - Aplicações à Estatística**. 2. ed. [S.l.]: Ltc, 1983.

MOOD, A. M. **Introduction to the theory of statistics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1974.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2021. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.

SCHULZ-ARENSTORF, R.; MORELOCK, J. C. The probability distribution of the product of n (uniform) random variables. **American Mathematical Monthly**, n. 66, p. 95–99, 1959.

SPRINGER, M. D. **The Algebra of Random Variables**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1979.

SPRINGER, M. D.; THOMPSON, W. E. The distribution of products of independent random variables. **SIAM Journal of Applied Mathematics**, n. 14, p. 511–526, 1966.

WILF, H. S. **generatingfunctionology**. [S.l.]: Academic Press, Inc., 1994.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES

A.1 Integral da gama generalizada

Por definição, segundo Magalhaes (2015), a *integral da gama* é tal que:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \tag{A.1}$$

Podemos ainda reescrevê-la, sem perda de generalidade, de tal forma que

$$I.G.G\ (a,b,c) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-bx^c}dx, \tag{A.2}$$

em que $a, b, c > 0$. Logo, considerando

$$u = bx^c, \qquad du = cbx^{c-1}dx \qquad \text{e} \qquad dx = \frac{1}{cb^{\frac{1}{c}}u^{\frac{c-1}{c}}}du$$

têm-se que

$$x = \frac{u^{\frac{1}{c}}}{b^{\frac{1}{c}}}, \qquad du = cu^{\frac{c-1}{c}}b^{\frac{1}{c}}dx \qquad \text{e} \qquad dx = \frac{u^{\frac{1}{c}-1}}{cb^{\frac{1}{c}}}du.$$

Aplicando a técnica de integração por substituição:

$$\begin{aligned} I.G.G(a,b,c) &= \int_0^\infty \left(\frac{u^{\frac{1}{c}}}{b^{\frac{1}{c}}}\right)^{a-1} e^{-u}\frac{u^{\frac{1}{c}-1}}{cb^{\frac{1}{c}}}du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{\frac{a-1}{c}}}{b^{\frac{a-1}{c}}}\frac{u^{\frac{1}{c}-1}}{cb^{\frac{1}{c}}}e^{-u}du \\ &= \frac{1}{cb^{\frac{a}{c}}}\int_0^\infty u^{\frac{a}{c}-1}e^{-u}du. \end{aligned}$$

Então, por (A.1), temos que

$$I.G.G(a,b,c) = \frac{1}{cb^{\frac{a}{c}}}\left[\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)\right]$$

e, finalmente,

$$I.G.G(a,b,c) = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)}{cb^{\frac{a}{c}}}$$

em que $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

A.2 A transformação da distribuição uniforme para a distribuição qui-quadrado

Se X é uma *v.a.* uniformemente distribuída no intervalo (0,1), então sua *f.d.p.* é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\underset{(a,b)}{\mathbb{I}(x)} = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}(x)}. \tag{A.3}$$

Agora, considerando $Y = -2\ln(X)$, temos que

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-2\ln(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq e^{-\frac{y}{2}}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(X \leq e^{-\frac{y}{2}}\right) = 1 - F_X\left(e^{-\frac{y}{2}}\right). \end{aligned}$$

Derivando $G_Y(y)$ em relação a y, obtemos $g_Y(y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_Y(y)}{\partial y} &= -\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}} f_X(e^{-\frac{1}{2}}) \\ g_Y(y) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \underset{A}{\mathbb{I}}(y) \end{aligned}$$

Para encontrarmos o suporte A de $g_Y(y)$, temos que analisar o suporte de X, de tal modo que

$$\begin{aligned} 0 < x &< 1 \\ -\infty < \ln(x) &< 0 \\ 0 < -2\ln(x) &< \infty \\ 0 < y &< \infty. \end{aligned}$$

Logo, $A = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < \infty\}$. Portanto,

$$g_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \underset{(0,\infty)}{\mathbb{I}}(y). \tag{A.4}$$

Podemos perceber que $g_Y(y) \sim \chi^2(2)$.

A.3 Esperança condicional

Seja X e Y variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta dada por $f(x, y)$ e marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Sabemos que $\mathbb{E}(Y|X) = h(X)$. Então, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(Y|X) f_X(x)\; dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y\; f(y|x)\; f_X(x)\; dy\; dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y\; f(x,y)\; dy\; dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\; dx \right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y\; f_Y(y)\; dy \\
&= \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}
$$

A.4 Variância condicional

Vamos mostrar que $\mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] = \mathbb{V}(Y) - \mathbb{V}[\mathbb{E}(Y|X)]$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y^2|X) - \mathbb{E}^2(Y|X)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y^2|X)] - \mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)] \\
&= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)] \\
&= \mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}^2(Y) - \mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)] \\
&= \mathbb{V}(Y) - \{\mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)] - \mathbb{E}^2(Y)\} \\
&= \mathbb{V}(Y) - \{\mathbb{E}[\mathbb{E}^2(Y|X)] - \mathbb{E}^2[\mathbb{E}(Y|X)]\} \\
&= \mathbb{V}(Y) - \mathbb{V}[\mathbb{E}(Y|X)].
\end{aligned}
$$

Ou seja, se

$$\mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] = \mathbb{V}(Y) - \mathbb{V}[\mathbb{E}(Y|X)],$$

então,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(Y|X)].$$

A.5 Características da distribuição uniforme discreta

Para as próximas subseções, iremos considerar que $X \sim U(N)$, isto é, X segue uma distribuição uniforme discreta com parâmetro N constante. Logo, sua $f.m.p$ é expressa como

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{N} \underset{\{1,2,\ldots,N\}}{\mathbb{I}(x)}$$

A.5.1 Esperança da distribuição uniforme discreta

A esperança de X pode ser demonstrada partindo da definição:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{N} x\,\mathbb{P}(X=x) = \sum_{i=1}^{N} x\,\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x = \frac{1}{N}\,\frac{N(N+1)}{2}\\ \mathbb{E}(X) &= \frac{N+1}{2} \qquad \text{(A.5)}\end{aligned}$$

A.5.2 Variância da distribuição uniforme discreta

A variância de X pode ser demonstrada partindo do segundo momento central:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X),$$

mas,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{N} x^2\,\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\\ \mathbb{E}(X^2) &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6}.\end{aligned}$$

Então,

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left[\frac{N+1}{2}\right]^2 = \frac{2(N+1)(2N+1)}{12} - \frac{3(N+1)^2}{12}.$$

Colocando $(N+1)$ em evidência, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{(N+1)(4N+2-3N-3)}{12} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}\\ \mathbb{V}(X) &= \frac{N^2-1}{12} \qquad \text{(A.6)}\end{aligned}$$

A.5.3 f.g.p da distribuição uniforme discreta

Partindo da definição de $f.g.p$ temos que

$$\begin{aligned}G_X(t) &= \mathbb{E}(t^X) = \sum_{i=1}^{N} t^x\mathbb{P}(X=x) = \sum_{i=1}^{N} t^x\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t^x = \frac{1}{N}\frac{t-t^{N+1}}{(1-t)}\\ G_X(t) &= \frac{t(1-t^N)}{N(1-t)}, \quad t\neq 1 \qquad \text{(A.7)}\end{aligned}$$

APÊNDICE B – TABELA DE DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Distribuição	Função de Massa de Probabilidade *(f.m.p)*	Função Geradora de Probabilidade *(f.g.p)*
Uniforme Discreta	$f(x) = \frac{1}{N} \underset{\{1,2,\ldots,N\}}{\mathbb{I}(x)}$	$G_X = \dfrac{t(1-t^N)}{N(1-t)}, \quad t \neq 1$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} \underset{\{0,1\}}{\mathbb{I}(x)}$	$G_X = q + pt$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \underset{\{0,1,\ldots,n\}}{\mathbb{I}(x)}$	$G_X = (q+pt)^n$
Hipergeométrica	$f(x) = \dfrac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \underset{\{0,1,\ldots,n\}}{\mathbb{I}(x)}$	Não utilizada.
Poisson	$f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \underset{\{0,1,\ldots\}}{\mathbb{I}(x)}$	$G_X = e^{\lambda(t-1)}$
Geométrica	$f(x) = pq^x \underset{\{0,1,\ldots\}}{\mathbb{I}(x)}$	$G_X = \dfrac{p}{1-qt}, \quad \lvert t\rvert < \dfrac{1}{q}$
Binomial Negativa	$f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \underset{\{0,1,\ldots\}}{\mathbb{I}(x)}$	$G_X = \left(\dfrac{p}{1-qt}\right)^r, \quad \lvert t\rvert < \dfrac{1}{q}$

Tabela 4 – Tabela de distribuições discretas e suas respectivas funções geradoras de probabilidades.