UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

ALLEN ROOSSIM PASSOS IBIAPINA

B-COLORAÇÕES E COLORAÇÕES DE NASH EM GRAFOS DE CINTURA ALTA

FORTALEZA
2019

ALLEN ROOSSIM PASSOS IBIAPINA

B-COLORAÇÕES E COLORAÇÕES DE NASH EM GRAFOS DE CINTURA ALTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva.

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

I21b Ibiapina, Allen Roossim Passos.
b-colorações e colorações de Nash em grafos de cintura / Allen Roossim Passos Ibiapina. – 2019.
37 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2019.
Orientação: Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva.

1. Coloração de grafos. 2. Coloração de Nash. 3. Cintura alta. I. Título.
CDD 510

ALLEN ROOSSIM PASSOS IBIAPINA

B-COLORAÇÕES E COLORAÇÕES DE NASH EM GRAFOS DE CINTURA ALTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 01/03/2019

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Victor Almeida Campos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Leonardo Sampaio Rocha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que desempenharam um papel importante na realização desta dissertação de mestrado. Sem o apoio, orientação e incentivo de vocês, este trabalho não teria sido concluído.

Primeiramente, agradeço à minha orientadora, Ana Shirley, pela excelente orientação ao longo deste processo. Sua expertise, dedicação e suporte foram essenciais para o desenvolvimento deste estudo. Sou imensamente grato pela paciência e pelos valiosos insights compartilhados.

Também quero agradecer aos membros da banca examinadora, professores Fabricio Benevides, Victor Campos e Leonardo Rocha. Agradeço por dedicarem seu tempo e expertise para avaliar este trabalho e por suas contribuições valiosas.

Aos meus amigos, agradeço pelos momentos de descontração que tornaram a jornada no mestrado mais leve. Suas conversas e o apoio mútuo foram enriquecedores e fundamentais para minha jornada acadêmica.

Expresso minha gratidão aos professores que ministraram as disciplinas do mestrado, pois através de seu conhecimento e dedicação, pude ampliar meus horizontes acadêmicos e aprofundar minha compreensão na área de estudo.

À equipe da Matemática, incluindo secretárias, coordenadores e bibliotecários, gostaria de agradecer pela disponibilidade e presteza com que sempre me auxiliaram. Sua assistência e apoio foram fundamentais durante o processo de elaboração desta dissertação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Por fim, meu agradecimento especial vai para minha família. Agradeço do fundo do meu coração pelo amor, encorajamento e apoio incondicional que me deram ao longo dessa jornada. Seu amor e suporte foram minha força motriz e fonte de inspiração para superar os desafios e alcançar meus objetivos acadêmicos.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho, meu mais profundo agradecimento. Vocês tornaram esta jornada mais significativa e enriquecedora.

RESUMO

Nessa dissertação estudamos duas variações de coloração de grafos, as b-colorações e as colorações de Nash. Uma *b-coloração com k cores* de um grafo G é uma coloração $f\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ tal que para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$ existe um vértice $v \in V(G)$ tal que $f(N[v]) = \{1,\ldots,k\}$. Já uma coloração de Nash é uma coloração $f\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ tal que todo vértice em $f^{-1}(i)$ tem um vizinho em $f^{-1}(j)$ para quaisquer i,j tais que $|f^{-1}(j)| \geq |f^{-1}(i)|$. O *número b-cromático* (respectivamente *número de Nash*), denotado por $b(G)$ (respectivamente $Nn(G)$) é o maior inteiro k tal que o grafo tem um b-coloração (respectivamente coloração de Nash) com k cores. O *b-espectro*(respectivamente *espectro de Nash*) de um grafo é o conjunto de inteiros k tais que tal grafo tem uma b-coloração (respectivamente coloração de Nash) com k cores. Um grafo é *b-contínuo* (respectivamente *Nash contínuo*) quando seu b-espectro (respectivamente *espectro de Nash*) é o conjunto $[\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}$(respectivamente $[\chi(G), Nn(G)] \cap \mathbb{Z}$). Uma coloração $f\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ é dita *gulosa* quando para quaisquer $i,j \in \{1,\ldots,k\}$ com $j < i$ vale que todo vértice em $f^{-1}(i)$ tem um vizinho em $f^{-1}(j)$. O maior inteiro k tal que G tem uma coloração gulosa com k cores é o *número de Grundy de G*; tal inteiro é denotado por $\Gamma(G)$.
No que diz respeito a b-coloração, melhoramos o resultado conhecido na literatura que diz que todo grafo com cintura pelo menos 10 é b-contínuo. Mostramos a mesma tese para grafos com cintura pelo menos 8. Também demonstramos que para todo grafo G com cintura pelo menos 7 vale que o b-espectro de tal grafo contém o conjunto $[2\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}$.
Concernindo as colorações de Nash, demonstramos várias pequenas propriedades dessa coloração, sendo algumas destas propriedades semelhantes a propriedades satisfeitas pelas b-colorações. Além disso, mostramos relações entre colorações gulosas e colorações de Nash, assim como exibimos grafos que não são Nash contínuos. Finalmente, provamos que toda árvore, T, tem um número de Nash pelo menos $\Gamma(T) - 1$ e que toda árvore é b-contínua.

Palavras-chave: b-coloração; coloração de Nash; cintura alta.

ABSTRACT

In this dissertation we study two variations in the coloring of graphs, b-colorings and Nash colorings. A b-coloring of a graph G is a coloring $f\colon V(G) \to \{1,\dots,k\}$ such that for each $i \in \{1,\dots,k\}$ there is a vertex $v \in V(G)$ such that $f(N[v]) = \{1,\dots,k\}$. A Nash coloring is a coloring $f\colon V(G) \to \{1,\dots,k\}$ such that every vertex $v \in f^{-1}(i)$ has a neighboor in $f^{-1}(j)$ for any i, j such that $|f^{-1}(j)| \geq |f^{-1}(i)|$. The b-chromatic number(Nash number), denoted by $b(G)(Nn(G))$, of a graph is the largest integer such that the graph has a b-coloring(Nash coloring) with such integer of colors. The b-spectrum(Nash spectrum) of a graph is the set of integers k such that the graph has a b-coloring(Nash coloring) using k colors. A graph G is b-continuous(Nash continuous) when its b-spectrum(Nash spectrum) is the set $[\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}([\chi(G), Nn(G)] \cap \mathbb{Z})$. We started with b-colorings. Where we improove the previus result in literature that states that every graph with girth at least 10 is b-continuous. We show the same thesis holds when the graph has girht at least 8. Moreover we show that if a graph G has girth at least 7, then its b-spectrum contains the set $[2\chi(G), b(G)]$.

Regarding the Nash colorings, we demonstrate many properties of this coloring and its resemblance with the b-coloring. We show graphs that are not Nash continuous. Moreover, we prove that every tree, T, has the Nash number at least $\Gamma(T) - 1$ and that every tree is Nash continuous.

Keywords: b-coloring; Nash coloring; high girth.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma *coloração* desse grafo é uma função $f : V \to \mathbb{N}$; se f é tal que $f(u) \neq f(v)$ sempre que $uv \in E$, dizemos que f é *coloração própria*. Dizemos que f é uma coloração com $|f(V)|$ cores; além disso, se $|f(V)| = k$, também nos referimos a f como *k-coloração*. O *número cromático*, denotado por $\chi(G)$ é o menor inteiro k tal que G tem uma coloração própria com k cores. Muitos problemas práticos podem se modelados usando colorações próprias, por exemplo o problema de atribuição de frequências, como mostrado por (AARDAL *et al.*, 2007) e o de escalonamento de tarefas, por (WERRA, 1985). Sendo assim, o problema é bastante estudado do ponto de vista teórico, como pode-se ver em (JENSEN; TOFT, 1995), havendo desta maneira, inúmeras variações do problema.

É bem conhecido que achar uma coloração própria que usa o número cromático de cores de um grafo é NP-difícil; de fato, se trata de um dos 21 Problemas NP-difíceis de (KARP, 1972). Além disso, o problema continua NP-completo mesmo para k fixo pelo menos 3, como demonstrado por (HOLYER, 1981), e não admite um algoritmo aproximativo com fator de aproximação sublinear, a menos que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, por (HASTAD, 1996; ZUCKERMAN, 2007). Devido a isso, é natural que sejam aplicadas heurísticas sobre o problema. Neste trabalho, estudamos aspectos teóricos acerca de variações do problema de coloração que podem ser pensados como os piores casos de heurísticas aplicadas ao problema tradicional.

O número b-cromático foi introduzido por (IRVING; MANLOVE, 1999). Desde então há um grande interesse nesse invariante por parte da comunidade; o artigo de (JAKOVAC; PETERIN, 2018) faz uma revisão bibliográfica sobre os muitos resultados já obtidos. Para entender tal parâmetro, considere a seguinte heurística. Seja $G = (V, E)$ um grafo e suponha que, para alguma cor $i \in f(V)$, todo vértice v colorido com i é tal que v não vê todas as cores, isto é, existe $c \notin f(N[v])$. Podemos obter uma coloração própria f' a partir de f pela recoloração de cada um dos vértices de cor i. Note que f' usa menos cores que f. Esse processo de obter uma coloração própria com cores a menos chama-se *b-heurística*. Uma coloração onde não se consegue diminuir a quantidade de cores usando essa heurística é uma *b-coloração*. E o maior inteiro k tal que G possui uma b-coloração com k cores é o *número b-cromático*, tal inteiro é denotado por $b(G)$.

O problema de decidir, dado um grafo G e um inteiro k, se $b(G) \geq k$ é NP-completo como observado por (IRVING; MANLOVE, 1999), mesmo que G seja bipartido, (KRATOCHVÍL *et al.*, 2002), cordal por, (HAVET *et al.*, 2012) ou linha, (CAMPOS *et al.*, 2015a). Desta forma, investiga-se a complexidade do problema restrito a certas classes de grafos.

Considerando uma b-coloração com $b(G)$ cores, cada b-vértice claramente tem grau maior ou igual $b(G)-1$. Assim, definindo $m(G)$ como o maior inteiro k tal que G possui k vértices de grau maior ou igual $k-1$, segue que $m(G) \geq b(G)$. Um aspecto interessante evidenciado na literatura é que grafos com cintura alta possuem número b-cromático próximo a esse limite superior. Como exemplo, citamos o resultado de (JAKOVAC; PETERIN, 2018) que todo grafo d-regular com cintura pelo menos 6 possui número b-cromático igual a $m(G) = d+1$; além disso, que (IRVING; MANLOVE, 1999) observaram que para toda árvore T vale a desigualdade $b(G) \geq m(G)-1$; e todo grafo com cintura ao menos 7 é tal que $b(G) \geq m(G)-1$, onde (CAMPOS *et al.*, 2015b) generalizam o resultado de (IRVING; MANLOVE, 1999). Ademais, o valor correto de $b(G)$ pode ser achado em tempo polinomial para todas as classes citadas. Desta forma, é natural perguntar se grafos com cintura alta também são o que é chamado de b-contínuo.

Irving e Manlove observaram que o cubo tem b-coloração com 2 cores e com 4 cores, mas não possui b-coloração com 3 cores. Desta forma, faz sentido definir o *b-espectro* de um grafo como sendo o conjunto de inteiros k tais que o grafo tem uma b-coloração com k cores. O grafo é dito *b-contínuo* quando o seu espectro é o conjunto de inteiros entre seu número cromático e seu número b-cromático. (KRATOCHVÍL *et al.*, 2002) mostram que para $n \geq 4$ inteiro, o grafo obtido de $K_{n,n}$ pela remoção de arestas de um emparelhamento perfeito possui b-colorações usando 2 e n cores, mas não com uma quantidade de cores estritamente entre esses dois números. Além disso, (BARTH *et al.*, 2007) provam que, para qualquer subconjunto dos naturais que não contenha 1, existe um grafo cujo o b-espectro é exatamente tal conjunto e que o problema de decidir se um grafo G é b-contínuo é NP-completo mesmo se são dadas b-colorações com $\chi(G)$ e $b(G)$ cores. Então, como é feito com o número b-cromático, é natural que se procure famílias de grafos que sejam b-contínuas. (BALAKARISHNAN; KAVASKAR, 2012) demonstram que grafos regulares com cintura pelo menos 6 sem ciclos de tamanho 7 são b-contínuos. Mais recentemente, abandonando a restrição de regularidade do grafo, (SALES; SILVA, 2017) provaram que grafos com cintura pelo menos 10 são b-contínuos. As autoras também propõem duas questões. A primeira é achar o menor inteiro G tal que todo grafo com cintura pelo menos esse inteiro é b-contínuo. A segunda é uma versão da mesma pergunta quando restrita à classe dos grafos bipartidos. Neste trabalho, damos uma resposta parcial a ambas perguntas provando que todo grafo com cintura ao menos 8 é b-contínuo.

Uma outra variação do problema de coloração investigada nesta dissertação foi introduzida por (PANAGOPOULOU; SPIRAKIS, 2008) com base no seguinte jogo de coloração em um grafo G. Cada vértice é um jogador que tem que escolher deterministicamente uma cor entre $|V(G)|$ cores. A *pontuação* de um jogador é 0 se ele tem algum vizinho com a mesma cor que ele, caso contrário é a quantidade de vértices com a mesma cor que ele (com ele incluso). Um *equilíbrio de Nash* é um estado *sustentável* desse jogo, isto é, um estado onde nenhum jogador aumenta a sua pontuação ao mudar de cor. Todo equilíbrio de Nash é uma coloração própria pois se um jogador tem um vizinho da mesma cor que ele, este poderia aumentar sua pontuação mudando para alguma cor não usada. Uma coloração dada por um equilíbrio de Nash é uma *coloração de Nash*. (PANAGOPOULOU; SPIRAKIS, 2008) também observaram que todo grafo G tem uma coloração de Nash com $\chi(G)$ cores. Assim, define-se o *número de Nash* de G, denotado por $Nn(G)$, como o maior inteiro k tal que G tem uma coloração com k cores. E, analogamente ao que é feito com b-colorações, dizemos que G é *Nash contínuo* quando, para todo inteiro $i \in \{\chi(G), \dots, Nn(G)\}$, G tem uma coloração de Nash com i cores. O *número de Grundy* de um grafo G, denotado por $\Gamma(G)$, é o maior inteiro k tal que G tem uma coloração própria com k cores $f\colon V(G) \to \{1, \dots, k\}$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $j \in \{1, \dots, i-1\}$, todo vértice em $f^{-1}(i)$ tem vizinho em $f^{-1}(j)$. Até onde sabemos, o artigo previamente citado é o único publicado até então que estuda este problema da mesma perspectiva que é estudada nesta dissertação, o que indica que ainda existem ainda muitas perguntas em aberto para o problema. Devido a isso, provamos inicialmente uma série de resultados básicos, sendo os principais: que $\Gamma(G)$ é limite superior para o número de Nash; que o número de Nash não é um parâmetro monótono; e que colorações de Nash, assim como as b-colorações, também não são contínuas. Em seguida, estudamos o problema restrito a uma das classes de grafos mais básicas, as àrvores, que também são vistas como grafos conexos com cintura infinita. Provamos que o número de Nash de uma árvore T é alto, no sentido de estar à distância no máximo 1 de $\Gamma(T)$, que é um limite superior, e que árvores são Nash contínuas; isto é, que para todo inteiro, k, entre $\chi(G)$ e $Nn(G)$ existe uma coloração de Nash de G usando k cores.

Esta dissertação está organizada como segue. No Capítulo 2, apresentamos quase todas as definições as definições que usaremos ao longo do texto, além de provar alguns resultados que servirão em capítulos posteriores ou que ajudam a entender melhor os parâmetros definidos; nos Capítulo 3 e 4, apresentamos nossos principais resultados acerca das b-colorações e das colorações de Nash, respectivamente; e no Capítulo 5 apresentamos as principais questões em aberto relacionadas ao presente trabalho.

2 CONCEITOS E RESULTADOS BÁSICOS

Mencionamos que os resultados relativos à coloração de Nash foram obtidos em colaboração com Frédéric Havet e Leonardo Sampaio, durante um estágio de mestrado feito ao INRIA - Sophia-Antipolis, França, nos meses de novembro e dezembro de 2018.

Neste capítulo, apresentamos os principais conceitos, assim como alguns resultados simples que serão usados em capítulos posteriores. Na Seção 2.1, fornecemos as definições básicas de Teoria dos Grafos; na Seção 2.2 são dadas as definições de coloração, b-coloração e coloração de Nash e são provados alguns resultados que usaremos nos outros capítulos; na Seção 2.3 provamos vários resultados básicos sobre a monotonicidade do número de Nash; finalmente na Seção 2.4 apresentamos as definições de espectro e continuidade além de exibirmos grafos que não são Nash contínuos.

2.1 Conceitos de Teoria dos Grafos

Um *grafo simples*, doravante chamado apenas de grafo, é um par (V,E) onde V é um conjunto finito e não vazio, chamado de *conjunto vértices* do grafo, e E, o conjunto de *arestas*, é um conjunto de subconjuntos de tamanho 2 de V. Por simplicidade, denotamos os elementos $\{u,v\} \in E$ simplesmente por uv. Dizemos que u e v são as *extremidades* da aresta uv; dizemos também que u e v são *adjacentes*. Dado um grafo G, denotamos por $V(G)$ o conjunto de vértices de G e $E(G)$ o seu conjunto de arestas. Um grafo H é *subgrafo* de G se H é grafo, $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se pra toda aresta $uv \in E(G)$ tal que $u,v \in V(H)$ vale que $uv \in E(H)$ dizemos que H é subgrafo de G *induzido* por $V(H)$. Neste caso escrevemos $H = G[V(H)]$. Dado um vértice $u \in V$, denotamos por $G-u$ o subgrafo $G[V \setminus \{u\}]$; também dizemos que $G-u$ é obtido de G pela *deleção* de u. E dado um subconjunto de arestas de G, digamos M, chamamos de *grafo obtido de G pela deleção das arestas de M* o subgrafo $(V, E \setminus M)$. Dado um vértice $v \in V(G)$, a *vizinhança* de v, denotada por $N(v)$ é o conjunto $\{u \in V(G) : vu \in E(G)\}$; também dizemos que u é *vizinho* de v. O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d(v)$ é o inteiro $|N(v)|$; o *grau máximo de G* é o valor $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$. Dois vértices u e v são *gêmeos* quando $N(u) = N(v)$. Note que da definição temos $uv \notin E(G)$. Alguns autores chamam estes vértices de *gêmeos falsos*.

Um *emparelhamento* de G é um subconjunto de arestas M tais que $e \cap f = \emptyset$ sempre que $e, f \in M$ com $e \neq f$, isto é, duas arestas em M não compartilham extremidades. Dizemos que um emparelhamento M é *perfeito* se para todo vértice $v \in V(G)$, existe aresta $e \in M$ tal que $v \in e$. Um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é *independente* se $uv \notin E$ para quaisquer $u, v \in S$. Se existe partição (A,B) de $V(G)$ tal que A e B são conjuntos independentes, dizemos que G é *bipartido*; da mesma forma quando falamos que G é (A,B) bipartido, quer dizer que (A,B) é partição de $V(G)$ com A e B conjuntos independentes. Dados a e b inteiros positivos, o grafo $K_{a,b}$, chamado de *bipartido completo*, é o grafo (A,B) bipartido tal que $|A| = a$, $|B| = b$ e uv é aresta sempre que $u \in A$ e $v \in B$. Um *passeio* em G é uma sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Se $v_i \neq v_j$ sempre que $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ com $i \neq j$, então a sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ é dita um *caminho* (de tamanho k) que *começa* em v_1 e *termina* em v_k; se além disso $v_1 v_k$ é aresta a sequência $(v_1, \ldots, v_k, v_1)$ é um *ciclo* (de tamanho $k-1$). A *cintura* de G, que denotamos por $g(G)$, é o tamanho do menor ciclo de G. A *distância* entre dois vértices u e v em G é o tamanho do menor caminho que começa em u e termina em v. O *diâmetro* é o máximo das distâncias entre dois vértices de G.

Um grafo G é *conexo* se, para quaisquer par de vértices $u, v \in V(G)$, existe um caminho que começa em u e termina em v; se G não é conexo dizemos que G é *desconexo*. Um subgrafo maximal conexo de G é chamado de *componente* de G. Uma *árvore* é um grafo minimal em arestas e conexo, isto é, G é árvore se G é conexo e, para qualquer aresta $e \in E(G)$, o grafo obtido de G pela deleção de e é desconexo. Alternativamente, uma árvore também pode ser definida como um grafo conexo acíclico. Dizemos que a cintura de uma árvore é infinita. Dada uma árvore, T, dizemos que $v \in V(T)$ é uma *folha* se v tem grau 1. Uma árvore T é uma *estrela com centro em w* se todos os vértices com exceção de w são folhas.

2.2 b-coloração e coloração de Nash

Dado um grafo $G = (V,E)$, uma *coloração própria*, de agora em diante chamada apenas de coloração, desse grafo é uma função $f\colon V \to \mathbb{N}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ sempre que $uv \in E$. Dizemos que f é uma coloração com $|f(V)|$ cores; além disso, se $|f(V)| = k$, também nos referimos a f como k-coloração. Chamamos os elementos de $f(V)$ de *cores*, e para cada $c \in f(V)$, chamamos o conjunto $f^{-1}(c)$ de *classe de cor c*. Um subconjunto $U \subseteq V$ é *monocromático* se $f(U)$ é unitário. Uma cor $j \in f(V)$ é *viável* para $w \in V$ se $i \in f(V) \setminus f(N[w])$. Por abuso de notação também chamamos de coloração as partições $(S_1, \ldots, S_k)$ de V tais que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, S_i é conjunto independente não vazio. Note que, para cada partição dessa forma, podemos associar a k-coloração f tal que $f(v) = i$ sempre que $v \in S_i$. O *número cromático* de um grafo G é o menor inteiro k tal que G tem coloração com k cores.

Uma coloração de f de G é dita *gulosa* se, para todo vértice w e todo natural $i \in \{1,\ldots,f(w)-1\}$, existe um vizinho de w com a cor i. O *número de Grundy* de G, denotado por $\Gamma(G)$, é o maior inteiro p tal que G tem uma coloração gulosa com p cores.

Seja $G=(V,E)$ um grafo e f uma coloração desse grafo. Um vértice $v \in V$ é dito *b-vértice* se $f(N[v]) = f(V)$, isto é, se todas as cores aparecem na vizinhança de v. Dizemos que f é uma *b-coloração* se para toda cor $i \in f(V)$, vale que $f^{-1}(i)$ contém um b-vértice. Se existe uma cor $i \in f(V)$ tal que $f^{-1}(i)$ não tem b-vértices, podemos construir uma outra coloração f' tal que

$$f'(v) = \begin{cases} f(v) & \text{, se } v \notin f^{-1}(i) \\ \min f(V) \setminus f(N[v]) & \text{, se } v \in f^{-1}(i). \end{cases}$$

Dizemos que f' é a coloração obtida de f pela *limpeza da cor i*; da mesma forma falamos que f' é obtida *limpando a cor i*. O *número b-cromático*, denotado por $b(G)$, é o maior inteiro k tal que G tem uma b-coloração com k cores.

Uma *coloração de Nash (com k cores)* é uma coloração com k cores $(S_1,\ldots,S_k)$, não necessariamente própria, tal que todo vértice em S_i tem um vizinho em S_j, para todo $i \in \{1\ldots,k\}$ e todo $j \in \{1,\ldots,k\} \setminus \{i\}$ tal que $|S_j| > |S_i|$. Agora, denote também por f a coloração $(S_1,\ldots,S_k)$. A *pontuação de* $u \in V$ *em* f é dada por:

$$\psi_f(u) = \begin{cases} |f^{-1}(f(u))| & \text{, se } f(u) \notin f(N(u)) \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, com as definições dadas, podemos formalizar a relação entre os equilíbrios de Nash e as colorações de Nash como na introdução. Fazemos isso atravéz da próxima proposição. Além disso, tal proposição será usada muitas vezes de maneira implícita; ela nos ajuda a demonstrar que uma dada coloração é uma coloração de Nash olhando apenas para as pontuações dos vértices.

Proposição 2.2.1 *Seja $(S_1,\ldots,S_k)$ uma coloração do grafo (V,E) e f a função que representa tal coloração. Temos que $(S_1,\ldots,S_k)$ é uma coloração de Nash, se e somente se, nenhum vértice $v \in V$ pode aumentar sua pontuação. Mais formalmente, $(S_1,\ldots,S_k)$ é coloração de Nash se e* *somente se para todo $v \in V(G)$, se g é uma coloração tal que $g(u) = f(u)$ para todo $u \in V \setminus \{v\}$, então $\psi_g(v) \leq \psi_f(v)$.*

Prova. Suponha que existam cores $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ e vértice $v \in S_i$ tais que v aumenta sua pontuação ao mudar para a cor j. Vale daí que v não tem vizinhos em S_j, caso contrário ao mudar para j sua pontuação iria para 0. Também vale que $|S_j| \geq |S_i|$, caso contrário v não aumentaria sua pontuação mudando para j. A existência de tal vértice implica que $(S_1, \ldots, S_k)$ não é coloração de Nash.

Reciprocamente suponha que nenhum vértice $v \in V$ aumenta sua pontuação ao mudar para uma cor S_j. Seja $i \in \{1, \ldots, k\}$ uma cor qualquer e $v \in S_i$. Suponha que v não tem vizinho em S_j para algum $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$. Note que ao mudarmos a cor de v para j sua pontuação não aumenta, logo $|S_j| + 1 \leq |S_i| - 1$. Em particular $|S_j| < |S_i|$. Logo todo vértice em S_i tem um vizinho em S_j quando $|S_j| \geq |S_i|$ e $(S_1, \ldots, S_k)$ é uma coloração de Nash. ■

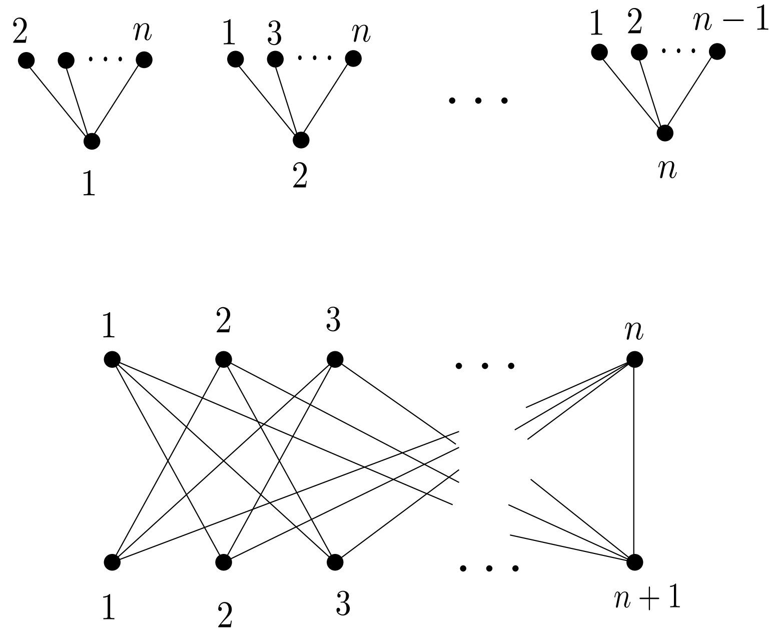
Observe que a proposição implica que toda coloração de Nash é uma coloração própria. Desta forma, a partir de agora, lidaremos somente com colorações próprias.

O *número de Nash*, denotado por $Nn(G)$, é o maior inteiro k tal que G tem uma coloração de Nash com k cores.

Os parâmetros $b(G)$ e $\Gamma(G)$ não se relacionam. Tome por exemplo o grafo $K_{n,n}$ pela deleção das arestas $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um emparelhamento perfeito, chame tal grafo de H_n. Tome também a união disjunta de n estrelas com centros em v_i para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde $d(v_i) = n - 1$, chame de J_n tal grafo. Seja (A, B) bipartição de H_n. Suponha uma coloração de H_5 com mais de 2 cores. Note que a cor do vértice $v \in A \cap e_n$ não aparece em B pois $N(v) = B$, logo nenhum vértice A pode ser b-vértice; usando o mesmo argumento em $B \cap e_n$, temos que nenhum vértice em B pode ser b-vértice. Isso mostra que $b(H_n) \leq 2$. Suponha uma coloração gulosa de J_n, note que os vértices de grau 1 recebem cor no máximo 2, e portanto os centros recebem cor no máximo 3. No entanto todo vértice tem grau 1 ou é centro. Daí $\Gamma(J_n) \leq 2$. Entretanto, fornecemos uma b-coloração de J_n com n cores e uma coloração gulosa de H_n com $n+1$ cores na Figura 1.

Agora, argumentamos que $Nn(G)$ é sempre no máximo $\Gamma(G)$, para todo grafo G. Para isso, seja $(S_1, \ldots, S_k)$ uma coloração de Nash de G e suponha, sem perda de generalidade, que $|S_1| \geq |S_2| \geq \ldots \geq |S_k|$. Mostramos que $(S_1, \ldots, S_k)$ é gulosa. Se para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$ existem $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ e $v \in S_i$ sem vizinhos de cor j, v poderia aumentar sua pontuação ao mudar para a cor j desde que $|S_j| \geq |S_i|$ e v não tem vizinhos em S_j. Então de fato, a coloraçõ

Figura 1 – b-coloração de J_n e coloração gulosa de H_n



Fonte: elaborada pelo autor.

$(S_1,\ldots,S_k)$ é gulosa. Daí temos que toda coloração de Nash é uma coloração gulosa. Além disso, dada uma coloração gulosa com k cores, um vértice v, da classe de cor k tem vizinho em todas as outras cores, daí $d(v) \geq k-1$, de onde segue que $\Gamma(G) \leq \Delta(G)+1$. Logo, obtemos que

$Nn(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G)+1.$

Em contrapartida, nem toda coloração de Grundy é gulosa, caso contrário teríamos que os parâmetros são iguais. Porém, o lema a seguir nos mostra uma condição suficiente em que isso ocorre.

Lema 2.2.1 *Seja G um grafo e $(S_1,\ldots,S_k)$ uma coloração gulosa tal que $|S_1| > |S_2| > \ldots > |S_k|$. Então $(S_1,\ldots,S_k)$ é uma coloração de Nash.*

Prova. Suponha que não, isto é, que existe uma cor i e um vértice $w \in S_i$ que aumenta sua pontuação mudando para alguma cor $\ell \neq i$. Lembre-se que w não aumenta sua pontuação se receber a cor de algum vizinho. Desta forma, como w possui vizinho de cor j para todo $j < i$, concluímos que $\ell > i$. Como $\ell > i$, vale que $|S_\ell| < |S_i|$ ou, de outra forma, $|S_\ell| \leq |S_i|-1$. Neste caso, mesmo que a cor de w mude para ℓ sua pontuação não aumenta, um absurdo.

■

O lema a seguir nos será útil na próxima seção. Apesar do lema nos dizer que vértices gêmeos terão a mesma cor, como veremos na próxima seção não é possível reduzir o problema removendo um destes vértices, pois isso prossivelmente alterará o número de Nash.

Lema 2.2.2 *Seja G um grafo e u, v vértices gêmeos. Se ψ é uma coloração de Nash, então $f(u) = f(v)$.*

Prova. Suponha, por absurdo, que $f(u) \neq f(v)$. Sem perda de generalidade suponha que $|f^{-1}(f(u))| \geq |f^{-1}(f(v))|$. Então v poderia aumentar sua pontuação mudando para a cor $\psi(u)$, o que contradiz o fato de f ser coloração de Nash.

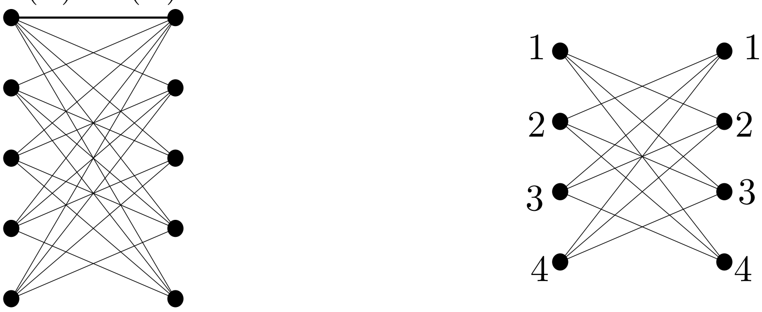
■

2.3 Monotonicidade

Seja γ um paramêtro definido em um grafo. Dizemos que o paramêtro γ é *monótono* quando ou $\gamma(G) \geq \gamma(H)$, para todo G e todo $H \subseteq G$, ou $\gamma(G) \leq \gamma(H)$, para todo G e todo $H \subseteq G$.

Sabe-se que o número b-cromático não é um parâmetro monótono. Considere por exemplo o grafo H_5 obtido de $K_{5,5}$ pela deleção das arestas $e_1, \ldots, e_4$, onde $\{e_1, \ldots, e_5\}$ é um emparelhamento perfeito. Lembramos que $b(H_5) \leq 2$. Agora percebea que o subgrafo obtido de H_5 pela deleção das extremidades de e_5 tem b-coloração com 4 cores, como pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de grafos G e H tais que $H \subseteq G$ e $b(G) < b(H)$.



Fonte: elaborada pelo autor.

No que diz respeito ao número de Nash provamos que o mesmo fenômeno acontece para o número de Nash.

Teorema 2.3.1 *Seja k um inteiro positivo.*

(i) Existe um grafo G e um vértice $v \in V(G)$ tal que $Nn(G - v) \geq Nn(G) + k$.

(ii) Existe um grafo H e um vértice $u \in V(H)$ tal que $Nn(H - u) \leq Nn(G) - k$.

Prova. Seja M_k o grafo obtido do grafo bipartido completo (A,B), com $A = \{u_1,\ldots,u_k\}$ e $B = \{v_1,\ldots,v_k\}$, pela deleção das arestas u_iv_i para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$. Seja G_{k+2} o grafo obtido de M_{k+2} deletando os vértices u_{k+2} e u_{k+1}, e seja $H_{k+1} = M_{k+1} - u_{k+1}$.

Primeiramente mostramos que $Nn(G_{k+2}) = 2$. Seja $(S_1,\ldots,S_p)$ uma coloração de Nash de G_{k+2}. Note que v_{k+2} e v_{k+1} são gêmeos, então pelo Lema 2.2.2, eles são da mesma classe de cor, chame-a S_α. Denote por A' o conjunto $A - \{u_{k+1}, u_{k+2}\}$ e observe que v_{k+1} e v_{k+2} são adjacentes a todo vértice de A'. Agora suponha por contradição que, para algum $\ell \in \{1,\ldots,k\}$ e algum $\beta \neq \alpha$, tem-se $v_\ell \in S_\beta$. Suponha que $S_\beta \cap A' \neq \emptyset$. Como $N(v_\ell) = A' \setminus \{u_\ell\}$ e $N(v_\ell) \cap S_\beta = \emptyset$ concluímos que $S_\beta \cap A' = \{u_\ell\}$. Daí $S_\beta = \{u_\ell, v_\ell\}$ que é uma contradição pois v_ℓ à Proposição 2.2.1, pois v_ℓ pode aumentar sua pontuação mudando para a cor α. Podemos supor então que $S_\beta \subseteq B$, mas como $S_\alpha \subseteq B$, pois $N(v_{k+2}) = A'$, ou os vértices de S_β aumentam sua pontuação mudando para α ou os vértices de S_α aumentam sua pontuação mudando para β. Então não podemos ter duas cores contidas no lado B, ou seja, B é um conjunto monocromático. Note agora que se existem mais de duas classes de cores, então duas delas estão contidas em A', um absurdo pois um vértice de alguma dessas cores aumentaria a pontuação mudando para outra. Logo $p = 2$.

Agora mostramos que $Nn(H_{k+1}) \geq k+1$. Para isso seja $S_i = \{u_i, v_i\}$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$ e $S_{k+1} = \{v_{k+1}\}$. Note que, para quaisquer $i, j \in \{1,\ldots,k\}$, com $i \neq j$, temos que u_i é adjacente a v_j e, portanto, nem u_i nem v_j podem aumentar sua pontuação mudando sua cor. Também vale que os vértices em S_i não aumentam sua pontuação mudando para $k+1$, pois $|S_{k+1}| = 1$, e o vértice em S_{k+1} não aumenta sua pontuação mudando para qualquer outra cor, pois este é adjacente a vértices de todas as cores. Logo pela Proposição 2.2.1, a coloração construída é uma coloração de Nash.

Finalmente, observe que $G_{k+3} - v_{k+3} = H_{k+2}$ e $H_{k+2} - u_{k+1} = G_{k+1}$. Logo, definindo $G = G_{k+3}$ e $v = v_{k+3}$ obtemos o item (i) e definindo $H = H_{k+2}$ e $u = u_{k+1}$ obtemos o item (ii).

■

O número de Nash pode ser influenciado pelo número de componentes conexas.

Proposição 2.3.2 *Para todo grafo G vale que*

$Nn(G) \geq \max\{Nn(C) \ : \ C \text{ componente de } G\}$.

Prova. Seja $k = \max\{Nn(C) : C \text{ componente de } G\}$. Sejam $C_1, \ldots, C_p$ as componentes de G. Sem perda de generalidade suponha que $Nn(C_1) = k$. Seja $(S_1^1, \ldots, S_k^1)$ uma coloração de Nash de C_1 tal que $|S_1^1| \geq \ldots \geq |S_k^1|$ e, para cada $i \in \{2, \ldots, p\}$, seja $(S_1^i, \ldots, S_{\chi(C_i)}^i)$ uma coloração de Nash de C_i tal que $|S_1^i| \geq \ldots \geq |S_{\chi(C_i)}^i|$; defina $S_j^i = \emptyset$ para todo $j > \chi(C_i)$. Finalmente, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, defina $S_j = \bigcup_{i=1}^{p} S_j^i$. Afirmamos que $(S_1, \ldots, S_k)$ é uma coloração de Nash. Primeiro note que, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ e $i \in \{1, \ldots, p\}$ vale que $|S_j^i| \geq |S_{j+1}^i|$. Portanto, para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, a seguinte inequação é válida:

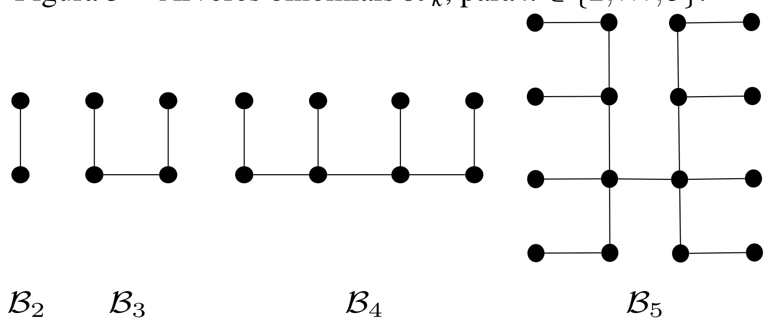
$$|S_j| = \sum_{i=1}^{p} |S_j^i| \geq \sum_{i=1}^{p} |S_{j+1}^i| = |S_{j+1}|. \tag{2.1}$$

Além disso, a igualdade ocorre se e somente se $|S_j^i| = |S_{j+1}^i|$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Por contradição suponha que, para algum $j \in \{1, \ldots, k\}$, existe um vértice $w \in S_j$ que aumenta sua pontuação quando muda pra alguma cor ℓ. Então $|S_\ell| \geq |S_j|$ e w não tem vizinhos em S_ℓ. Seja C_a a componente que contém w. Como $(S_1^a, \ldots, S_{\chi(C_a)}^a)$ é uma coloração gulosa de C_a, tem-se que w tem um vizinho em S_ℓ^a, e então w tem um vizinho em S_ℓ para todo $\ell < j$. Podemos então supor que $\ell > j$. Mas pela Desigualdade 3.1, $|S_j^a| = |S_\ell^a|$. Assim, como $(S_1^a, \ldots, S_{\chi(C_a)}^a)$ é uma coloração de Nash, temos que w tem um vizinho em S_ℓ^a e então w tem um vizinho em S_ℓ, um absurdo.

■

Figura 3 – Árvores binomiais $\mathscr{B}_k$, para $k \in \{2, \ldots, 5\}$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Antes de demonstrarmos a próxima proposição, definimos a árvore binomial de tamanho k. A *árvore binomial de tamanho k*, denotada por $\mathscr{B}_k$, é obtida recursivamente como segue. $\mathscr{B}_1$ é um único vértice. Para $k \geq 1$, $\mathscr{B}_k$ é obtida de duas cópias disjuntas de $\mathscr{B}_{k-1}$ pela adição de uma aresta entre dois vértices de maior grau em cada uma das cópias de $\mathscr{B}_{k-1}$. A título de clareza, na Figura 3 apresentamos as árvores binomiais $\mathscr{B}_i$ para $i \in \{2,3,4,5\}$. Note que $\Delta(\mathscr{B}_k) = k-1$ e que, para $k \geq 2$, existem exatamente dois vértices de grau máximo em $\mathscr{B}_k$, que são vizinhos entre si. Observe também que $|\mathscr{B}_k| = 2^{k-1}$. Mostramos agora uma proposição que nos ajudará muito ao longo do texto.

Proposição 2.3.3 *Seja k um inteiro positivo. Então $\mathscr{B}_k$ tem um coloração gulosa $(S_1,\ldots,S_k)$ tal que $|S_k| = 1$ e, para cada $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, tem-se $|S_i| = 2^{k-1-i}$. Além disso, para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$ e cada $x \in S_i$, tem-se que $N(x)$ é constituída por exatamente um vizinho de cor j, para cada $j \in \{1,\ldots,i-1\}$, e, caso $i < k$, exatamente um vizinho de cor $j > i$.*

Prova. Provamos por indução em k. Para $k = 1$ e $k = 2$, a proposição é de fácil verificação; então suponha $k \geq 3$. Sejam B_1 e B_2 cópias de $\mathscr{B}_{k-1}$ usadas para construir $\mathscr{B}_k$. Sejam $(U_1,\ldots,U_{k-1})$ e $(V_1,\ldots,V_{k-1})$ colorações de B_1 e B_2, respectivamente, que satisfazem as hipóteses. Sejam ainda $v_1 \in U_{k-1}$ e $v_2 \in V_{k-1}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $\mathscr{B}_k$ é obtida pela adição da aresta v_1v_2. Para $i \in \{1,\ldots,k-2\}$, defina $S_i = V_i \cup U_i$, e defina também $S_{k-1} = U_{k-1}$ e $S_k = V_{k-1}$. Observe que, por hipótese de indução, temos que $S_{k-1} = \{v_1\}$ e $S_k = \{v_2\}$. Mostramos que $(S_1,\ldots,S_k)$ é a coloração desejada.

Primeiramente, mostramos que $|S_i| = 2^{k-1-i}$, para $i \in \{1,\ldots,k-1\}$. Então, seja $i \in \{1,\ldots,k-1\}$. Se $i \leq k-2$, então $|S_i| = |U_i| + |V_i|$. Por hipótese de indução, tem-se $|S_i| = 2^{(k-1)-1-i} + 2^{(k-1)-1-i} = 2^{k-1-i}$ e a proposição segue. Caso contrário, tem-se $i = k-1$ e $|S_i| = 1 = 2^{k-1-i} = 2^{k-1-(k-1)} = 2^0$.

Agora mostramos que $(S_1,\ldots,S_k)$ é uma coloração gulosa. Observe que cada S_i é um conjunto independente, já que ou é unitário, ou é a união de conjuntos independentes de B_1 e B_2 que não possuem arestas entre si; logo a coloração é própria. Agora, considere $v \in S_i$ qualquer, com $i \in \{2,\ldots,k\}$; queremos mostrar que $N(v) \cap S_j \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1,\ldots,i-1\}$. Note que se $i \leq k-1$, isto é válido pois a coloração é exatamente igual à coloração de B_h, onde h é tal que $v \in V(B_h)$. De maneira semelhante, vale também para v_2 pois, além do que foi dito, sabemos que $v_1v_2 \in E(\mathscr{B}_k)$; portanto a coloração é gulosa.

Finalmente, para a última parte da prova, note que se $x \neq v_1, v_2$, então vale por hipótese de indução. E para v_1 e v_2, vale por hipótese de indução e pelo fato que $v_1v_2 \in E(\mathscr{B}_k)$. ■

Dado um vértice $v \notin S_1$, isto é, um vértice que não é folha, pelo fato de a coloração ser gulosa, temos que v tem um vizinho em S_1, ou seja, tem um vizinho que é uma folha. Daí, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.3.1 *Todo vértice $v \in \mathscr{B}_k$ que não é folha tem um vizinho que é folha.*

Agora, seja $(S_1, \ldots, S_k)$ a coloração de $\mathscr{B}_k$ dada pela Proposição 2.3.3 e $U = \cup_{i=1}^{k-1} S_i$. Pelo Lema 2.2.1, concluímos que $(S_1, \ldots, S_{k-1})$ é uma coloração de Nash de $\mathscr{B}_k[U]$. Note que isso significa que nenhum vértice de S pode aumentar sua pontuação ao mudar para uma cor em $\{1, \ldots, k-1\}$. Note que o único vértice de S_k também não aumenta sua pontuação, em $(S_1, \ldots, S_k)$, ao mudar sua cor, pois todas as outras cores aparecem na sua vizinhança. Finalmente, como $|S_k| = 1$, nenhum vértice em $\cup_{i=1}^{k-2} S_i$ aumenta sua pontução ao mudar para k e além disso o único vértice de S_{k-1} é vizinho do vértice da cor k. Logo $(S_1, \ldots, S_k)$ é coloração de Nash e concluímos que $Nn(\mathscr{B}_k) \geq k$. Como toda coloração de Nash é coloração gulosa e como $\Gamma(\mathscr{B}_k) = k$ temos $Nn(\mathscr{B}_k) = k$. Na proposição seguinte, vemos que o limite inferior dado na proposição anterior pode ser arbitrariamente ruim.

Proposição 2.3.4 *Para todo inteiro positivo k, existe um grafo G tal que*

- $Nn(G) = k$
- $\max\{Nn(C) \ : \ C \ componente \ de \ G\} = 2.$

Prova. Seja r um inteiro positivo e (X_r, Y_r) uma bipartição de $\mathscr{B}_r$. Seja A_r o grafo obtido de $\mathscr{B}_r$ pela adição de um conjunto U_r de 2^r vértices adicionando todas as arestas entre U_r e Y_r; formalmente, $V(A_r) = V(\mathscr{B}_r) \cup U_r$ e $E(A_r) = E(\mathscr{B}_r) \cup \{uv \ : \ u \in Y_r \text{ e } v \in U_r\}$.

Fato 1 $Nn(A_r) = 2.$

Prova do Fato. Seja $(S_1, \ldots, S_p)$ uma coloração de Nash de A_r tal que $|S_1| \geq \ldots \geq |S_p|$. Pelo Lema 2.2.2, todos os vértices de U_r são da mesma cor, e como $|U_r| > |\mathscr{B}_r|$, necessariamente $U_r \subseteq S_1$. Isto também nos dá que todos os vértices em X_r estão em S_1, caso contrário poderíamos mudar suas cores e aumentar a pontuação deles. Temos então que $U_r \cup X_r = S_1$, pois $N(U_r) = Y_r$. Mas os vértices que não estão em S_1 são os que estão em Y_r, que é um conjunto estável. Desta forma, temos que Y_r deve ser monocromático, caso contrário seria possível aumentar a pontuação de algum vértice. Portanto, $p = 2$. □

Agora, seja G a união disjunta de A_r pra todo $1 \leq r \leq k$. Podemos usar o Fato 1 para obter $\max\{Nn(C) \mid C \text{ é componente de } G\} = 2$. Resta mostrar que $Nn(G) = k$, o que fazemos a seguir.

Para $1 \leq r \leq k$, tome uma coloração gulosa $(S_1^r, \ldots, S_r^r)$ de $\mathscr{B}_r$ tal que o único vértice de S_r^r está em X_r. Pela Proposição 2.3.3, para $1 \leq i \leq r-1$, tem-se $|S_i^r| = 2^{r-i-1}$. Seja

$\phi_r = (S_1^r, \ldots, S_r^r \cup U_r)$; como o único vértice $x_r \in S_r^r$ está em X_r, e como a coloração $(S_1^r, \ldots, S_r^r)$ é gulosa, tem-se que na vizinhança de x_r, que está contida em Y_r, aparecem todas as cores. Então novamente se utilizando do fato de $N(U_r) = Y_r$, temos que ϕ_r é gulosa. Finalmente, para $i \in \{1, \ldots, k\}$, seja $S_i = U_i \cup \bigcup_{r \geq i} S_i^r$. Note que $(S_1, \ldots, S_k)$ é uma coloração gulosa onde $|S_1| > |S_2| > \ldots > |S_r|$. A proposição segue pelo Lema 2.2.1. ■

2.4 Continuidade

Seja G um grafo. O *b-espectro de G* é o conjunto dos inteiros k tais que G tem uma b-coloração com k cores; tal conjunto é denotado por $S_b(G)$. Dizemos que o grafo G é *b-contínuo* se $S_b(G) = [\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}$. Como já mencionado na introdução, em (BARTH *et al.*, 2007) prova-se que para todo subconjunto finito $S \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$, existe G tal que $S_b(G) = S$, e também que o problema de decidir se um dado grafo G é b-contínuo é NP-completo ainda que sejam dadas b-colorações com $\chi(G)$ e $b(G)$ cores.

Podemos, analogamente ao parágrafo anterior, definir o *espectro de Nash* de um grafo G, que denotamos por $S_N(G)$, como o conjunto de inteiros k tais que G tem uma coloração de Nash usando k cores e dizer que um grafo G é *Nash contínuo* se $S_N(G) = [\chi(G), Nn(G)] \cap \mathbb{Z}$. Uma pergunta que surge é se todo grafo é Nash contínuo e a resposta é não. Para $k \geq 2$, definindo M_k como sendo o grafo obtido de $K_{n,n}$ pela deleção das arestas de um emparelhamento perfeito, o mesmo grafo usado para mostrar que existem grafos que não são b-contínuos, provamos que tal grafo também não é Nash contínuo.

Proposição 2.4.1 *Seja $k \geq 2$ um inteiro positivo e M_k o grafo obtido de $K_{k,k}$ pela deleção de um emparelhamento perfeito, então $S_N(M_k) = \{2, k\}$.*

Prova. Seja (A, B) uma coloração com 2 cores de M_k. Como M_k é conexo vemos que essa é uma coloração de Nash e, portanto, tem-se $2 \in S_N(M_k)$. Agora seja $M = \{e_1, \ldots, e_k\}$ o emparelhamento que satisfaz $M_k = K_{k,k} - M$. Afirmamos que $(e_1, \ldots, e_k)$ é uma coloração de Nash com k cores. Para ver isso, é suficiente observar que todos os vértices tem vizinho em todas as outras classes de cor, então nenhum vértice aumentaria sua pontuação mudando sua cor. Daí $\{2, k\} \subseteq S_N(M_k)$.

A fim de mostrar que $S_N(M_k) = \{2, k\}$, suponha por absurdo que $(S_1, \ldots, S_q)$ é uma coloração de Nash de M_k, onde $q \in \{3, 4, \ldots, k-1\}$. Suponha ainda que $|S_1| \geq |S_2| \geq \ldots \geq |S_q|$. Suponha sem perda de generalidade que $S_1 \cap A \neq \emptyset$.

Primeiro, mostramos que $S_1 \cap B \neq \emptyset$. Para isso, suponha o contrário, isto é, $S_1 \subseteq A$. Temos que $A = S_1$, caso contrário um vértice em $A \setminus S_1$ aumentaria sua pontuação mudando para a cor 1. Podemos então assumir que $S_1 \cap A$ e $S_1 \cap B$ são ambos não vazios.

Agora suponha que $|S_1 \cap A| > 1$. Então $N(S_1 \cap A) = B$ e isso é uma contradição pois $S_1 \cap B \neq \emptyset$. Então $|S_1 \cap A| = 1$, e da mesma maneira, $|S_1 \cap B| = 1$ e portanto $|S_1| = 2$. Temos outra contradição pois $2k = |V(M_k)| = |S_1| + \ldots + |S_q| \leq 2q < 2k$.

Finalmente, como já observado, toda coloração de Nash é uma coloração gulosa, e portanto $Nn(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1 = k$, e daí G não tem coloração de Nash com q cores para $q \geq k+1$. Concluímos que $S_N(M_k) = \{2, k\}$, como queríamos.

■

3 B-CONTINUIDADE DE GRAFOS COM CINTURA ALTA

Um dos tópicos que estudamos durante este trabalho foi a relação entre a b-continuidade e a Nash continuidade com a cintura do grafo. Neste capítulo, iremos apresentar os resultados acerca da b-continuidade de grafos de cintura alta, perseguindo principalmente a pergunta de (SALES; SILVA, 2017), que mencionamos na introdução. Os principais resultados obtidos neste tópico foram os seguintes.

Teorema 3.0.1 *Se G é um grafo tal que $g(G) \geq 8$, então G é b-contínuo.*

Teorema 3.0.2 *Se G é um grafo tal que $g(G) \geq 7$, então $S_b(G) \supseteq [2\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}$.*

Para apresentar a principal ferramenta para a prova destes teoremas, precisamos de definições adicionais. Dado um grafo G e um vértice u, dizemos que u é uma *k-íris* se existe $S \subseteq N(u)$ tal que $|S| \geq k-1$ e $d(v) \geq k-1$ para todo $v \in S$. Esta noção foi primeiramente apresentada por (SALES; SILVA, 2017). Seja $f\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ uma coloração. Dizemos que u *realiza* a cor i se $u \in f^{-1}(i)$ e u é um b-vértice. Neste caso, dizemos também que a cor i é *realizada* por u. Nas definições a seguir, uma coloração f de G é implicitamente considerada e sempre será clara pelo contexto. Para $x \in V(G)$ e $i \in \{1,\ldots,k\}$, $N^i(x)$ é o conjunto de vértices da cor i na vizinhança de x , i.e., $N^i(x) = N(x) \cap f^{-1}(i)$. Para um subconjunto $X \subseteq V(G)$, seja $N^i(X) = \bigcup_{x \in X} N^i(X) \setminus X$. Seja $B(f)$ o conjunto dos b-vértices de f e, para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$, seja $B_i = B(f) \cap f^{-1}(i)$ o conjunto de b-vértices na classe de cor i. Para cada $x \in V(G) \setminus B(f)$, denotamos por $U(x)$ o conjunto de cores que dependem de x para terem b-vértices; mais formalmente: $U(x) = \{i \in \{1,\ldots,k\} | N^{f(x)}(x)(B_i) = x\}$.

Dado $x \in V(G) \setminus B(f)$, se $|U(x)| \geq 2$ chamamos x de *útil*; caso contrário, dizemos que x é *inútil*. Para $j \in \{1,\ldots,k\}$, dizemos que $x \in V(G)$ é *j-mutável* se x é inútil e existe uma cor c tal que, mudando a cor de x para c, não criamos b-vértices da cor j; dizemos também que a cor c é *segura* para x. Para cada $j \in \{1,\ldots,k\} \setminus \{f(x)\}$, se x não é j-mutável, dizemos que x é *j-imutável*. Finalmente, dado um conjunto K tal que $K \subseteq f^{-1}(i)$ para algum $i \in \{1,\ldots,k\}$, dizemos que a cor $j \in \{1,\ldots,k\}$ é *dependente* de K se $N^i(B_j) \subseteq K$. Denotamos por $U(K)$ o conjunto de cores dependentes de K. Note que $U(x) = U(\{x\})$.

Lema 3.0.1 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 7. Se G tem uma b-coloração com k cores, então G tem uma b-coloração com $k-1$ cores ou uma k-íris.*

Prova. Suponha que G não tem b-coloração com $k-1$ cores; provamos que $V(G)$ contém uma k-íris. Para isso, seja f uma b-coloração com k cores que minimiza $|B_1|$ e, em segundo lugar, minimiza $|f^{-1}(1)|$. Primeiro provamos que todo vértice $x \in f^{-1}(1) \setminus B_1$ é útil. Suponha o contrário e seja x uma vértice inútil na classe de cor 1. Se $U(x) = \emptyset$, então podemos recolorir x sem perder nenhum b-vértice, uma contradição pois f minimiza $|f^{-1}(1)|$. Já se $|U(x)| = 1$, seja d a cor tal que $U(x) = \{d\}$. Conseguimos obter uma b-coloração com $k-1$ cores recolorindo x para uma cor $c \notin f(N[x])$ (existe pois x não é b-vértice) e limpando d, novamente uma contradição. Portanto a seguinte afirmação é válida:

(i) Todo $x \in f^{-1}(1) \setminus B_1$ é útil.

Agora escolhemos $u \in B_1$ e analisamos a sua vizinhança a fim a íris desejada. Primeiramente provamos as seguintes afirmações.

Fato 2 *Seja $j \in \{2, \ldots, k\}$. Se todo vértice $x \in N^j(u) \setminus B_j$ é 1-mutável, então um dos seguintes itens é válido:*

1 Existe $v \in N(u) \cap B_j$;

2 Existe uma cor $d \in \{2, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ tal que d depende de $N^j(u)$.

Prova do Fato. Suponha que nenhum dos itens é válido e seja f' a coloração obtida de f mudando a cor de cada $x \in N^j(u)$ para uma cor c segura para x. Por definição, nenhum b-vértice de cor 1 é criado. Além disso, pela negação do item 2, nenhuma cor diferente de 1 depende de $N^j(u)$; logo no máximo uma cor perde todos os b-vértices, a saber, a própria cor 1. Entretanto temos que u não é b-vértice em f', pois não tem mais vizinhos de cor j, e como f minimiza $|B_1|$, temos então que f' não é b-coloração e podemos então obter uma b-coloração com $k-1$ cores pela limpeza da cor 1.

$\square$

Fato 3 *Todo $x \in N^j(u) \setminus B_j$ é 1-mutável, para todo $j \in \{2, \ldots, k\}$.*

Prova do Fato. Suponha, sem perda de generalidade, que $d \in \{2, \ldots, k\}$ é tal que $\{d+1, \ldots, k\}$ são exatamente as cores que contém algum vértice 1-imutável. Contaremos o número de cores com b-vértices na vizinhança de u para obter que $d \geq k$. Para cada $j \in \{d+1, \ldots, k\}$, seja $w_i \in N^j(u)$ um vértice 1-imutável. Por definição, isso significa que, para cada $i \in \{d+1, \ldots, k\}$, existe algum vizinho de w_i que se tornaria um b-vértice da cor 1 no caso de mudarmos a cor de

w_i; seja v_i tal vértice. Sabemos que $v_i \in f^{-1}(1) \setminus B_1$, daí por (i) obtemos que $|U(v_i)| \geq 2$. Pela definição de $U(x)$ e o fato que $x \in \{v_{d+1}, \ldots, v_k\}$ é colorido com a cor 1, temos:

$$U(v_i) \cap U(v_j) = \emptyset, \text{ para quaisquer } i, j \in \{d+1, \ldots, k\}, i \neq j. \tag{3.1}$$

Agora investigamos os b-vértices nas cores $\{2, \ldots, d\}$. Pela afirmação, suponha, sem perda de generalidade, que $p \in \{2, \ldots, d\}$ é tal que (1) segue para todas as cores em $\{2, \ldots, p\}$, enquanto que (2) segue para todas as cores em $\{p+1, \ldots, d\}$. Para cada $j \in \{p+1, \ldots, d\}$, seja $c_j \in \{2, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ uma cor dependente de $N^j(u)$. Note que, como G não tem ciclos de tamanho 3, obtemos:

$$\{2, \ldots, p\} \cap \{c_{p+1}, \ldots, c_d\} = \emptyset \tag{3.2}$$

Também, por G não ter ciclos de tamanho 4, obtemos $c_i \neq c_j$ para todo $i \neq j$, i.e.:

$$|\{c_{p+1}, \ldots, c_d\}| = d - p \tag{3.3}$$

Finalmente, como G não tem ciclos de tamanho 5, ganhamos que:

$$\{c_{p+1}, \ldots, c_d\} \cap \bigcup_{j=d+1}^{k} U(v_j) = \emptyset. \tag{3.4}$$

Pela distância entre todos os vértices investigados de u, pode-se ver também que $1 \notin \{c_{p+1}, \ldots, c_d\} \cap \bigcup_{j=d+1^k} U(v_j)$. Daí pela combinação das Equações 3.1 até 3.4, obtemos:

$$\begin{aligned} k-1 &\geq |\{2, \ldots, p\} \cup \{c_{p+1}, \ldots, c_d\} \cup U(v_{d+1}) \cup \ldots \cup U(v_k)| \\ &= d - 1 + \textstyle\sum_{i=d+1}^{k} |U(v_i)| \\ &\geq d - 1 + 2(k-d). \end{aligned}$$

E então $d \geq k$, como queríamos.

$\square$

Os Fatos 2 e 3 nos dizem que (1) ou (2) valem para toda cor $j \in \{2, \ldots, k\}$. Definimos p e $\{c_{p+1}, \ldots, c_k\}$ como anteriormente, isto é, $p \in \{2, \ldots, k\}$ é tal que (1) segue para todas as cores em $\{2,\dots,p\}$, enquanto que (2) segue para todas as cores em $\{p+1,\dots,k\}$. Além disso, para $j \in \{p+1,\dots,k\}$, tomamos $c_j \in \{2,\dots,k\} \setminus \{j\}$ como uma cor dependente de $N^j(u)$. Queremos mostrar que $N(u) \cap B_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{2,\dots,k\}$, isso é, $p = k$. Note que isso finaliza a prova, pois u será a íris desejada. Suponha então que é falso. Note que $k-1 = |\{2,\dots,p\} \cup \{c_{p+1},\dots,c_k\}|$. Portanto $\{c_{p+1},\dots,c_k\} \subseteq \{p+1,\dots,k\}$. Como esses dois conjuntos tem a mesma cadinalidade ganhamos que eles são o mesmo conjunto. Logo $(c_{p+1},\dots,c_k)$ é uma permutação caótica de $(p+1,\dots,k)$, isto é, uma permutação onde $c_i \neq i$ para todo $i \in \{p+1,\dots,k\}$. Como não existe permutação caótica de 1 elemento, vale que $p \leq k-2$.

Afirmamos que, para cada $j \in \{p+1,\dots,k\}$, a cor 1 depende de $N^j(u)$. Caso contrário a cor c_j é a única dependendo de $N^j(u)$. Então poderíamos recolorir $N^j(u)$ e limpar a cor c_j e obter uma b-coloração com $k-1$ cores, contradição.

Agora, suponha que existe $v \in B_1 \setminus \{u\}$. Como a cor 1 depende de $N^{p+1}(u)$ e de $N^k(u)$ (lembre-se que $p \leq k-2$), temos que v deve ter algum vizinho $v_{p+1} \in N^{p+1}(u)$ e algum vizinho $v_k \in N^k(u)$. Isso contradiz o fato que G tem cintura ao menos 7; logo, obtemos que $B_1 = \{u\}$.

Finalmente, seja $z \neq u$ um vértice da cor 1. Sejam i e j tais que $\{c_i, c_j\} \subseteq U(z)$ (existe devido à Equação (i)). Como no parágrafo anterior, é possível obter um ciclo de tamanho 6 usando elementos em $\{z\}, B_{c_i}, N^i(u), \{u\}, N^j(u), B_{c_j}$, absurdo. Temos então que $f^{-1}(1) = \{u\}$ e, como os vértices em B_j com $j > p$ não podem ser vizinhos de u, ocorre que eles não podem existir, isto é, $p = k$ como queríamos demonstrar.

■

Agora, com tal lema provado, usamos o seguinte lema, provado por (BALAKARISHNAN; KAVASKAR, 2012), para obter o Teorema 3.0.1.

Lema 3.0.2 *Seja G uma grafo de cintura pelo menos* 6 *e sem ciclos de tamanho 7. Se G tem uma k-íris onde* $k \geq \chi(G)$*, então G tem uma b-coloração com k cores.*

O Teorema 3.0.1, é corolário do Lema 3.0.1 e do Lema 3.0.2. Já para obter o Teorema 3.0.2, além de usar o Lema 3.0.1, provamos um outro lema que é uma versão do Lema 3.0.2 onde relaxamos a restrição de cintura, porém restringimos o k inteiro na hipótese:

Lema 3.0.3 *Seja G uma grafo de cintura pelo menos* 7*. Se G tem uma k-íris onde* $k \geq 2\chi(G)$*, então G tem uma b-coloração com k cores.*

Prova. Seja $u \in V(G)$ uma k-íris onde $k \geq 2\chi(G)$. Seja $\{u_2, \ldots, u_k\} \subseteq N(u)$ tal que $d(u_i) \geq k-1$. Para cada $i \in \{2, \ldots, k\}$, considere a coloração onde $u_i \in S_i$ e $u \in S_1$. Como $G[\{u\} \cup N(u) \cup N(N(u))]$ é uma árvore, pois a cintura é pelo menos 6, podemos colorir $N(u_i)$ separadamente, de maneira a tornar u_i b-vértice, para todo $i \in \{2, \ldots, k\}$. Nessa coloração parcial de G, note que todas as k cores possuem b-vértices e que todo b-vértice que não é da cor 1 é vizinho de u, que é o b-vértice da cor 1. Seja $(S_1, \ldots, S_k)$ tal coloração parcial. Seja ainda $Z = \bigcup_{i=\chi(G)+1}^{k} S_i$, isto é, Z é o conjunto dos vértices nas classes de cor $\chi(G)+1$ até k. Podemos então dizer que existe uma coloração $(U_1, \ldots, U_{\chi(G)})$ de $G[N(Z)]$, pela monotonicidade do número cromático. Queremos mostrar que a coloração $(S_1 \cup U_1, \ldots, S_{\chi(G)} \cup U_{\chi(G)}, S_{\chi(G)+1}, \ldots, S_k)$ é própria. Para isso, suponha por contradição e sem perda de generalidade qu $xy \in E(G)$ é tal que $x \in S_i$ e $y \in U_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$. Como $x \in S_i$, sabemos que x está a distância no máximo 2 de u; e pelo fato de $y \in U_i$, sabemos que y é vizinho de um vértice em Z, que está a distância no máximo 2 de u. Tomando tais caminhos e, como $xy \in E(G)$, teríamos um ciclo de tamanho no máximo 6, o que contradiz a hipótese. Finalmente, sendo W o conjunto dos vértices não coloridos, temos que $W \cap N(Z) = \emptyset$, pois colorimos $G[N(Z)]$. Então, como $k \geq 2\chi$, podemos supor uma coloração $(W_{\chi(G)+1}, \ldots, W_k)$ de $G[W]$ e obter a seguinte coloração de G: $(S_1 \cup U_1, \ldots, S_{\chi(G)} \cup U_{\chi(G)}, S_{\chi(G)+1} \cup W_{\chi(G+1)}, \ldots, S_k \cup W_k)$. Isto é uma b-coloração com k cores, já que $u, u_2, \ldots, u_k$ são b-vértices.

■

4 COLORAÇÃO DE NASH EM ÁRVORES

Assim como é feito em se tratando de b-coloração, podemos investigar a relação entre colorações de Nash e cintura de um grafo. Nada mais natural, então, do que estudarmos grafos de cintura infinita, ou seja, árvores. Nosso primeiro resultado acerca disso caracteriza árvores com número de Nash 2.

Teorema 4.0.1 *Seja T uma árvore com pelo menos uma aresta. Então, $Nn(T) = 2$ se e somente se T tem diâmetro no máximo 2.*

Prova. Se T tem diâmetro 2, então T é uma estrela com centro v. Então todos os vértices em $V(T) \setminus \{v\}$ são gêmeos, e assim eles tem a mesma cor em uma coloração de Nash de T, usando o Lema 2.2.2. Portanto $Nn(T) = 2$.

Assuma agora que T tem diâmetro 3. Provamos que T tem uma coloração de Nash com 3 cores. Considere um caminho P que satisfaz o diâmetro de T, e sejam a, b, c, d os primeiros vértices no caminho P nessa ordem. Seja $L = N(b) \setminus \{c\}$. Como P satisfaz o diâmetro de T, todos os vértices em L são folhas. Além disso, a árvore $T' = T - (L \cup \{b\})$ tem uma bipartição (C, D) tal que $c \in C$ e $d \in D$.

Se $|D| + |L| > |C|$, então defina $S_1 = D \cup L$, $S_2 = C$, e $S_3 = \{b\}$. Temos $|S_1| > |S_2| \geq |S_3|$. Além disso todo vértice em $S_2 = C$ tem vizinho em D pois T' é uma árvore de ordem pelo menos 2, e b, o vértice em S_3, tem vizinhos em S_1 e S_2, a saber a e c, respectivamente. Então (S_1, S_2, S_3) é uma coloração de Nash de T.

Se $|D| + |L| \leq |C|$, então pelo menos um vizinho de c em T' não é uma folha. Sem perda de generalidade assumiramos que é d. Seja I o conjunto de folhas adjacentes a c, e defina $S_1 = (C \setminus \{c\}) \cup I \cup \{b\}$, $S_2 = (D \cup L) \setminus I$, e $S_3 = \{c\}$. Observe que $|S_1| = |C| + |I| \geq |S_2| + |I|$, e $|S_2| \geq |S_3|$ pois $d \in S_2$. Em particular, $|S_1| \geq |S_2| \geq |S_3|$. Note que $|S_1| > |S_3|$ pois $|T| \geq 4$. Provamos que (S_1, S_2, S_3) é uma coloração de Nash. Primeiro, por definição, os vértices de S_2 tem um vizinho em S_1, e c, o vértice de S_3, tem um vizinho, digamos d, em S_2. Se $|S_2| = |S_3|$, então $S_2 = \{d\}$, e d tem um vizinho, digamos c, em S_3. Se $|S_1| = |S_2|$, então $I = \emptyset$, logo todo vizinho de c em T' não é folha, portanto todo vértice de D tem um vizinho em $C \setminus \{c\} \subseteq S_1$, e todo vértice de L é adjacente a $b \in S_1$. E (S_1, S_2, S_3) é uma coloração de Nash, como queríamos.

■

Uma consequência desse teorema é que conseguimos decidir em tempo polinomial se uma árvore tem número de Nash igual a 2.

Dado uma árvore T, definimos $bin(T)$ como o maior inteiro k tal que T tem um subgrafo isomorfo a $\mathscr{B}_k$, a árvore binomial de tamanho k. Um fato bem conhecido sobre árvores é que $bin(T) = \Gamma(T)$, isto é provado em (BEYER *et al.*, 1982). Já foi mencionado durante esse trabalho que o número de Nash e o número de Grundy tem algumas ligações. Nossos próximos resultados esclarecem mais essa ligação em árvores, aproveitando-se do fato que $bin(T) = \Gamma(T)$.

Proposição 4.0.2 *Para todo $k \geq 4$, existem árvores contendo $\mathscr{B}_k$ tais que o número de Nash é no máximo $k-1$.*

Prova. Seja $k \geq 4$ inteiro. Sejam u_1, u_2 os dois vértices de grau $k-1$ em $\mathscr{B}_k$. Usando a Proposição 2.3.3, seja v o vértice de grau 2 em $N(u_1)$ e, usando o Corolário 2.3.1, seja w o vértice folha vizinho de v. Agora considere a árvore T, obtida de $\mathscr{B}_k$ pela adição de 2^k vértices adjacentes a w. Chamando S esses novos vértices escrevemos mais formalmente, $V(T) = V(\mathscr{B}_k) \cup S$ onde $|S| = 2^k$ e $E(T) = E(\mathscr{B}_k) \cup \{xw : \ x \in S\}$. Por definição, $\mathscr{B}_k$ é uma sub-árvore de T.

Suponha por contradição que T admite uma coloração de Nash com k cores, $(S_1, \ldots, S_k)$ com $|S_1| \geq |S_2| \geq \ldots \geq |S_k|$. Todos os vértices em S são gêmeos, então, pelo Lema 2.2.2, todos eles estão na mesma classe de cor; mas como $|S| > \frac{|V(T)|}{2}$, temos que $S \subseteq S_1$. Todos os vértices em S_i tem um vizinho em S_j para $1 \leq j \leq i-1$. Logo, os vértices de S_i tem grau pelo menos $i-1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Em particular, os vértices de S_k tem grau pelo menos $k-1$. Assim $S_k \subseteq \{u_1, u_2, w\}$. Mas, devido ao grau, o único vizinho de w que pode estar em S_3 é v, e isso somente se w estiver em $S_1 \cup S_2$. Isto nos diz que $w \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ e, como $k \geq 4$, tem-se $S_k \subseteq \{u_1, u_2\}$. Ademais, como u_1 e u_2 são adjacentes, tem-se que ou $S_k = \{u_1\}$ ou $S_k = \{u_2\}$.

Suponha primeiro que $S_k = \{u_1\}$. Como $d(u_1) = k-1$, o vértice u_1 tem exatamente um vizinho em S_i, para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Mas lembre que $S \subseteq S_1$, o que implica que $w \notin S_1$ e, se valendo do fato que a coloração é gulosa, obtemos que $v \in S_1$. Além disso, novamente usando o Corolário 2.3.1, existe uma folha na vizinhança de u_1 e certamente tal vértice também está S_1, um absurdo.

Agora suponha que $S_k = \{u_2\}$. Como a coloração é gulosa, para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ se $x \in S_i \cap N(u_2)$, então $d(x) \geq i$. Como o único vértice de grau pelo menos $k-1$ na vizinhança de u_2 é u_1, temos que $u_1 \in S_{k-1}$. Então u_1 tem exatamente um vizinho em S_i para cada $i \in \{1, \ldots, k-2\} \cup \{k\}$. Novamente obtemos um absurdo procedendo exatamente como no parágrafo anterior. Portanto T não tem coloração de Nash com k cores.

■

O seguinte teorema nos diz que, mesmo assim, conter uma árvore binomial implica em ter o número de Nash alto.

Teorema 4.0.3 *Seja $k \geq 3$ um inteiro e T uma árvore. Se T contém $\mathscr{B}_k$, então T tem uma coloração de Nash com $k-1$ cores.*

Prova. Seja T uma árvore contendo B, com B isomorfa a $\mathscr{B}_k$, e seja $(U_1, \ldots, U_k)$ uma coloração gulosa de B que satisfaz a Proposição 2.3.3. Ou seja, temos que:

$$|U_k| = 1 \text{ e } |U_i| = 2^{k-1-i}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k-1\}. \tag{4.1}$$

Além disso, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ e todo $x \in S_i$, tem-se que:

$$\begin{aligned} &|N(v_i) \cap U_j| = 1, \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, i-1\}; \text{ e} \\ &|N(v_i) \cap U_j| = 1, \text{ para algum } j > i, \text{ se } i < k. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observe que isso implica que $B' = G[U_1 \cup U_2 \cup U_3]$ consiste em uma floresta cujas componentes são isomorfas a $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ ou $\mathscr{B}_3$. Além disso, note que $B'' = B - B'$ é conexo. Queremos colorir $G - B''$ com as cores 1 e 2 de maneira a garantir que os vértices de $U_i \cap V(B'')$ possam receber a cor $i-1$, para todo $i \in \{4, \ldots, k\}$.

Para isso note que, para cada componente C de $T - B''$, existe exatamente uma aresta entre C e B''; se tal aresta é uv onde $v \in V(B'')$, dizemos que *C é ligada em v*. Seja agora $v \in V(B'')$ e sejam $C_1^v, \ldots, C_{\ell_v}^v$ as componentes ligadas a v. Sabemos que a bipartição (X_i^v, Y_i^v) de cada C_i^v é única, a menos de rerotulação; então suponha, sem perda de generalidade, que C_i^v é ligada em v por uma aresta incidente em X_i^v, para todo $i \in \{1, \ldots, \ell_v\}$. Denote por C^v o conjunto $\bigcup_{i=1}^{\ell_v} V(C_i^v)$. Queremos construir uma bipartição (X^v, Y^v) de $G[C^v]$ tal que: (i) $|X^v| \geq |Y^v|$; (ii) v tem ao menos um vizinho em cada parte; e (iii) se $x \in C^v$ é tal que $N(x) = \{v\}$, então $x \in X^v$. Primeiro, observe que $\ell_v \geq 2$, pela Equação 4.2. Analisamos os casos seguintes:

- Existem $p, q \in \{1, \ldots, \ell_v\}$ tais que $|X_q^v| \geq |Y_q^v|$ e $|Y_p^v| > |X_p^v|$: apenas coloque todo X_i^v em X^v tal que $|X_i^v| \geq |Y_i^v|$. Devido à existência de p e q, temos que v possui vizinhos em ambas partes. Além disso, note que (ii) segue pela construção, então considere $x \in V(C_i^v)$ tal que $N(x) = \{v\}$. Neste caso, temos que $X_i^v = \{x\}$ e $Y_i^v = \emptyset$; ou seja, $|X_i^v| > |Y_i^v|$ e portanto $x \in X^v$;

– $|Y_i^v| > |X_i^v|$, para todo $i \in \{1, \ldots, \ell_v\}$: neste caso, suponha, sem perda de generalidade, que $|Y_1^v| - |X_1^v| = \min_{i\in\{1,\ldots,\ell_v\}}(|Y_i^v| - |X_i^v|)$. Fazemos $X^v = X_1^v \cup \bigcup_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}} Y_i^v$. Daí:

$$\begin{aligned} |X^v| - |Y^v| &= |X_1^v| + \textstyle\sum_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}} |Y_i^v| - (|Y_1^v| + \sum_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}} |X_i^v|) \\ &= \textstyle\sum_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}}(|Y_i^v| - |X_i^v|) - (|Y_1^v| - |X_1^v|) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Como $X_1^v \subseteq X^v$ e $X_2^v \subseteq Y^v$, temos que v possui vizinhos em ambas as partes. Ademais, observe que neste caso $Y_i^v \neq \emptyset$ para todo i, o que implica que não existe $x \in C^v$ tal que $N(x) = \{v\}$ e (iii) vale por vacuidade;

– $|X_i^v| \geq |Y_i^v|$, para todo $i \in \{1, \ldots, \ell_v\}$: suponha, sem perda de generalidade, que $p \in \{1, \ldots, \ell_v\}$ é tal que $Y_i^v = \emptyset$ se e somente se $i > p$. Suponha, ainda sem perda de generalidade, que $|X_1^v| - |Y_1^v| = \min_{i\in\{1,\ldots,p\}}(|X_i^v| - |Y_i^v|)$. Fazemos $X^v = Y_1^v \cup \bigcup_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}} X_i^v$. Note que, pela Equação 4.2, tem-se $p \geq 2$. Daí:

$$\begin{aligned} |X^v| - |Y^v| &= |Y_1^v| + \textstyle\sum_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}} |X_i^v| - (|X_1^v| + \sum_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}} |Y_i^v|) \\ &= \textstyle\sum_{i\in\{2,\ldots,\ell_v\}}(|X_i^v| - |Y_i^v|) - (|X_1^v| - |Y_1^v|) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Como $X_1^v \subseteq Y^v$ e $X_2^v \subseteq X^v$, temos que v possui vizinhos em ambas as partes. Finalmente, como X_1^v é o único conjunto contendo vizinhos de v que não está contido em X^v e como $Y_1^v \neq \emptyset$, temos que (iii) segue.

Agora faça $X = \bigcup_{v\in V(B'')} X^v$ e $Y = \bigcup_{v\in V(B'')} Y^v$. Queremos mostrar que $(X, Y, U_4, \ldots, U_k)$ é uma coloração de Nash de G (note que se trata de uma coloração própria). Como (i) vale para todo $v \in V(B'')$ e pela Equação 4.1, segue que:

$$|X| \geq |Y| > |U_4| > \ldots > |U_k|.$$

Agora, seja $v \in U_i$, para algum $i \in \{4, \ldots, k\}$. Pela Equação 4.2, sabemos que v possui vizinhos em U_j, para todo $j \in \{4, \ldots, i-1\}$. Além disso, v possui também vizinhos em X e em Y por (ii). Então, considere $y \in Y$, e seja C a componente de $G - B''$ contendo y; considere o vértice $v \in V(B'')$ com o qual C é ligada. Por (iii), não ocorre de $N(y) = \{v\}$; logo C possui alguma aresta, o que implica que y certamente deve possuir algum vizinho em X^v já que C é conexo. ∎

Observe que se $bin(T) \leq 2$, então T tem diâmetro no máximo 2 e $Nn(T) \leq 2$, pelo Teorema 4.0.1.

Lembramos que $Nn(G) \leq \Gamma(G)$. Além disso, pelo resultado acima e o fato de que $\Gamma(G) = bin(G)$ (), temos que $Nn(G) \geq \Gamma(G) - 1$.

Corolário 4.0.1 *Seja T uma árvore. Então*

$\Gamma(G) - 1 \leq Nn(G) \leq \Gamma(G)$.

Em outras palavras, o número de Nash de grafos com cintura infinita é alto. O teorema acima também pode ser escrito como: se T contém B_k como subgrafo, então $k-1 \in S_N(T)$. Como B_k contém a árvore binomial B_j, para todo $j \leq k$, temos como corolário:

Corolário 4.0.2 *Toda árvore é Nash contínua.*

5 CONCLUSÃO

Como mencionado na introdução, (SALES; SILVA, 2017) mostram que grafos com cintura ao menos 10 são b-contínuos. Isso, além da existência de uma conjectura acerca do número b-cromático de grafos com cintura 6 de (HAVET *et al.*, 2012), levou as autoras a fazerem as seguintes perguntas.

Pergunta 5.0.1 *Qual o menor natural $\hat{g}$ tal que todo grafo com cintura pelo menos $\hat{g}$ é b-contínuo?*

Pergunta 5.0.2 *Qual o menor natural par $\overline{g}$ tal que, para todo grafo bipartido com cintura pelo menos, vale que $\overline{g}$ é b-contínuo?*

Neste trabalho, melhoramos o valor de $\hat{g}$ e $\overline{g}$ de 10 para 8. Além disso, provamos que grafos com cintura ao menos 7 são, de certa forma, quase b-contínuos. Mais especificamente, provamos que se G tem cintura ao menos 7, então $[2\chi(G), b(G)] \subseteq S_b(G)$. Isso aponta na direção de melhora do valor de $\hat{g}$. Ressaltamos também que, para diminuir o valor de $\hat{g}$, seria suficiente aprimorar o Lema 3.0.2, retirando a restrição de ciclos de tamanho 7, uma vez que o Lema 3.0.1 não tem tal restrição.

Já sobre o número de Nash, pouco é conhecido, existindo apenas um artigo publicado sobre o assunto que o estuda da mesma perspectiva que a nossa: (PANAGOPOULOU; SPIRAKIS, 2008). Desta forma, atacamos inicialmente questões mais básicas, a saber: provamos que, assim como as b-colorações, as colorações de Nash não são monotônicas ou contínuas; relacionamos colorações de Nash com colorações gulosas; e mostramos que, sendo G desconexo, o número de Nash de G é pelo menos o número de Nash de uma de suas componentes, mas que esse limite pode ser arbitrariamente ruim. Além disso, investigamos o número de Nash de árvores, mostrando que estas possuem alto número de Nash, o que se assemelha ao resultado em (IRVING; MANLOVE, 1999) para o número b-cromático. Sabe-se que o resultado Irving e Manlove foi generalizado para grafos com cintura ao menos 7 (CAMPOS *et al.*, 2015b). Desta forma, uma boa pergunta é se o mesmo pode ser feito para colorações de Nash.

Pergunta 5.0.3 *Existe uma constante g_n^* tal que $Nn(G) \geq \Gamma(G) - 1$, sempre que G for um grafo com cintura ao menos g_n^*?*

Nossa prova também implica que árvores são Nash contínuas. Assim, vale também perguntar:

Pergunta 5.0.4 *Existe uma constante $\hat{g}_n$ tal que G é Nash contínuo, sempre que G for um grafo com cintura ao menos $\hat{g}_n$?*

Finalmente, relembramos que (BARTH *et al.*, 2007) mostram que, para todo subconjunto $S \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$, existe um grafo G tal que $S_b(G) = S$. Eles mostram também que é NP-completo decidir se um grafo G é b-contínuo, mesmo que sejam conhecidas b-colorações com $\chi(G)$ e $b(G)$ cores. Apesar de termos mostrado que nem todo grafo é Nash contínuo, não sabemos se algo semelhante vale para colorações de Nash. Por isso, perguntamos:

Pergunta 5.0.5 *Existe $S \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $S_N(G) \neq S$ para todo grafo G?*

Pergunta 5.0.6 *Qual a complexidade de decidir se um dado grafo é Nash contínuo?*

Enfim, como já mencionado, pouco se sabe acerca destas colorações e muitas outras perguntas podem ser formuladas. Apresentamos aqui somente aquelas mais relacionadas à pesquisa desenvolvida.

REFERÊNCIAS

AARDAL, K. *et al.* Models and solution techniques for frequency assignment problems. **Annals of Oper. Research**, v. 153, n. 1, p. 79–129, 2007.

BALAKARISHNAN, R.; KAVASKAR, T. b-coloring of kneser graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 160, p. 9–14, 2012.

BARTH, D. *et al.* On the b-continuity property of graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 155, p. 1761–1768, 2007.

BEYER, T. *et al.* A linear algorithm for the grundy number of a tree. **Congr. Numer.**, p. 351–363, 1982.

CAMPOS, V. *et al.* The b-chromatic index of graphs. **Discrete Mathematics**, v. 338, n. 11, p. 2072–2079, 2015.

CAMPOS, V. *et al.* Graphs of girth at least 7 have high b-chromatic number. **European Journal of Combinatorics**, v. 48, p. 154–164, 2015.

HASTAD, J. Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$. **Acta Mathematica**, v. 182, n. 1, p. 627–636, 1996.

HAVET, F. *et al.* b-coloring of tight graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 160, n. 18, p. 2709–2715, 2012.

HOLYER, I. The np-completeness of edge-coloring. **SIAM Journal on Computing**, v. 10, n. 4, p. 718–720, 1981.

IRVING, R. W.; MANLOVE, D. The b-chromatic number of a graph. **Discrete Applied Mathematics**, v. 91, p. 127–141, 1999.

JAKOVAC, M.; PETERIN, I. The b-chromatic number and related topics - a survey. **Discrete Applied Mathematics**, v. 235, p. 184–201, 2018.

JENSEN, T. R.; TOFT, B. **Graph coloring problems**. [*S. l.*]: Wiley-Interscience, 1995.

KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. *In*: MILLER, R. *et al.* (ed.). **Complexity of Computer Computations**. Boston, MA: Springer US, 1972. p. 85–103.

KRATOCHVÍL, J. *et al.* On the b-chromatic number of graphs. *In*: GOOS, G. *et al.* (ed.). **Graph-theoretic concepts in computer ccience**. [*S. l.*]: Springer Berlin Heidelberg, 2002. p. 310–320. ISBN 978-3-540-36379-8.

PANAGOPOULOU, P.; SPIRAKIS, P. A game theoretic approach for efficient graph coloring. *In*: HONG, S.; NAGAMOCHI, H.; FUKUNAGA, T. (ed.). **International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC)**. [*S. l.*]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 183–195.

SALES, C. L.; SILVA, A. The b-continuity of graphs with large girth. **Graphs and Combinatorics**, v. 33, p. 1138–1146, 2017.

WERRA, D. de. An introduction to timetabling. **European J. of Oper. Research**, v. 19, p. 151–161, 1985.

ZUCKERMAN, D. Linear degree extractors and the innaproximability of max clique and chromatic number. **Theory of Computing**, v. 3, n. 6, p. 103–128, 2007.