



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA INDUSTRIAL

MARIA ALINE FREITAS BARRETO

**UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE DE EFICIÊNCIAS USANDO ANÁLISE
ENVOLTÓRIA DE DADOS SOB AMBIENTE DIFUSO**

FORTALEZA

2020

MARIA ALINE FREITAS BARRETO

UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE DE EFICIÊNCIAS USANDO ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE
DADOS SOB AMBIENTE DIFUSO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Matemática Industrial
do Centro de Ciências da Universidade Federal
do Ceará, como requisito final à obtenção do
grau de bacharel em Matemática Industrial.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Coelho
Silva

Coorientador: Prof. Dr. Júlio Francisco
Barros Neto

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B263e Barreto, Maria Aline Freitas.
UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE DE EFICIÊNCIAS USANDO ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS
SOB AMBIENTE DIFUSO / Maria Aline Freitas Barreto. – 2020.
67 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Matemática Industrial, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Coelho Silva.
Coorientação: Prof. Dr. Júlio Francisco Barros Neto.

1. DEA. 2. Fuzzy DEA. 3. Análise de Eficiência. I. Título.

CDD 510

MARIA ALINE FREITAS BARRETO

UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE DE EFICIÊNCIAS USANDO ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE
DADOS SOB AMBIENTE DIFUSO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Matemática Industrial
do Centro de Ciências da Universidade Federal
do Ceará, como requisito final à obtenção do
grau de bacharel em Matemática Industrial.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Coelho Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Júlio Francisco Barros Neto (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jesus Ossian da Cunha
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Bráz Farias Azevedo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus e minha família. À Alexandre Moreira e aos meus amigos Lucas, Samuel, Gabriel, Nilton, Mateus, Felipe e Endy.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me concedido a força necessária para a superação dos inúmeros obstáculos, pois sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais, José Oliveira e Maria Zenaide, por todo amor, apoio, comprometimento e por sempre me incentivarem e investiram na minha educação. A vocês, dedico o meu maior agradecimento.

Agradeço aos meus orientadores Prof. Dr. Ricardo Coelho Silva e Prof. Dr. Júlio Francisco Barros Neto, por todo o suporte, paciência e interesse pelo meu aprendizado desde o começo do curso, transmitindo conhecimentos necessários para que esta monografia fosse possível. Agradeço por serem meus orientadores e pela confiança em meu potencial.

Agradeço à Universidade Federal do Ceará e ao corpo docente do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada por me oferecer um ambiente para o meu desenvolvimento intelectual e social durante minha formação. Agradeço também aos professores Prof. Dr. Jesus Ossian da Cunha e Prof. Dr. Rafael Bráz Farias Azevedo, por aceitarem o convite para serem avaliadores da minha monografia e ao Prof. Dr. Luis Gustavo Bastos Pinho pelas dicas valiosas sobre a escrita de um trabalho científico.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Agradeço à Alexandre Moreira, que se manteve sempre presente e confiante ao meu lado em toda a graduação, além do seu carinho e positividade em acreditar no meu êxito.

E por fim, agradeço aos meus amigos e colegas de turma que adquiri durante a graduação e que contribuíram de alguma forma, direta ou indiretamente, para este trabalho. Em especial, agradeço aos meus amigos e companheiros de curso, Samuel Maciel, Gabriel Hellen, Lucas Braga, Nilton Cláudio, Mateus Pereira, Felipe Albuquerque e Endy Gomes, que me proporcionaram inúmeras contribuições para a evolução do meu conhecimento e aprovações em várias disciplinas fundamentais ao longo do curso. Agradeço, também, aos meus amigos Augusto, João, Gabriel, Thiago e Rodrigo pela amizade e apoio.

“O propósito da vida é encontrar o maior fardo
que você pode carregar e carregá-lo.”

(Jordan B. Peterson)

RESUMO

Entre as técnicas utilizadas para medir eficiência produtiva, Análise Envoltória de Dados - *Data Envelopment Analysis* (DEA) é uma abordagem amplamente utilizada tanto na literatura como em aplicações reais. Desse modo, um estudo mais aprofundado de DEA torna-se crucial a fim de auxiliar Unidades Tomadoras de Decisão, *Decision Making Units*(DMUs), a alcançarem eficiência de produção. Os métodos DEA clássicos permitem mensurar a eficiência, dado o conjunto analisado, e classificar as DMUs entre eficientes e ineficientes e, também, verificar quais seriam eficientes que servem de referência para as ineficientes. Os modelos DEA clássicos foram desenvolvidos para utilizar medições precisas de ambos os insumos (*input*) e produtos (*outputs*). No entanto, os valores observados de *input* e *outputs* em problemas do mundo real são, frequentemente, imprecisos, aproximados ou vagos. Este estudo tem como um dos objetivos aprofundar o conhecimento dos métodos DEA clássicos e Análise Envoltória de Dados Difusos, *Fuzzy Data Envelopment Analysis* (FDEA). E, possivelmente, efetuar uma comparação entre aplicações dos métodos DEA clássicos e de métodos FDEA. Através da aplicação dos métodos em um conjunto de portos da região nordeste do Brasil. Após a análise dos resultados obtidos com a aplicação dos métodos, concluiu-se que nem sempre os portos classificados como eficientes para os métodos de DEA clássicos, inclusive portos que servem de referência dentro do conjunto, também são classificados como eficientes para os métodos de FDEA.

Palavras-chave: DEA. Fuzzy DEA. Análise de Eficiência.

ABSTRACT

Among the methodologies used to measure productive efficiency, Data Envelopment Analysis (DEA) is one of the most commonly used not only in the literature but also in real world applications. Therefore, a deeper study of this methodology becomes a crucial part in helping Decision Making Unit (DMUs) to achieve productive efficiency. Classical DEA methods allow us to measure efficiency, for the set being analysed, and classify the DMUs as either efficient or as inefficient, while also allowing us to verify which efficient cases can be used as reference for the inefficient cases. The use of Classic DEA models require precise data for both input and output values. However, input and output values in the real world are usually imprecise, approximate, or vague. One of the objectives of this work is to obtain a deeper knowledge of the classical DEA methods and Fuzzy Data Envelopment Analysis (FDEA). Another objective is to report a comparative study between the classic DEA methods and the FDEA methods by applying them to a set containing data from Brazil's Northeast ports. Our results showed that ports classified as efficient by classical DEA methods, including the ones used as reference within the set, are not always classified as efficient by FDEA methods.

Palavras-chave: DEA. Fuzzy DEA. Efficiency Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Retorno Crescente de Escala	19
Figura 2 – Retorno Constante de Escala	19
Figura 3 – Retorno Decrescente de Escala	20
Figura 4 – CCR orientado a <i>inputs</i> (Multiplicadores).	23
Figura 5 – CCR orientado a <i>outputs</i> (Multiplicadores)	23
Figura 6 – BCC orientado a <i>input</i> (Multiplicadores).	25
Figura 7 – BCC orientado a <i>output</i> (Multiplicadores)	25
Figura 8 – $\tilde{Z}_1 \lesssim \tilde{Z}_2$	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – DMUs com um único <i>input fuzzy</i> e um único <i>output fuzzy</i>	34
Tabela 2 – Eficiências <i>fuzzy</i> de DMUs com diferentes valores de α	34
Tabela 3 – Valores de θ com diferentes valores de α	35
Tabela 4 – Portos da região Nordeste que operam carga geral (2006).	40
Tabela 5 – Portos da região Nordeste que operam carga geral(2016).	41
Tabela 6 – Eficiência relativa dos portos que operaram carga geral da Região Nordeste (método CCR), no ano de 2006	42
Tabela 7 – <i>Benchmarks</i> dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método CCR), no ano de 2006	42
Tabela 8 – Eficiência relativa dos portos que operaram carga geral da Região Nordeste (método CCR), no ano de 2016	44
Tabela 9 – <i>Benchmark</i> dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método CCR), no ano de 2016	44
Tabela 10 – Eficiência relativa dos portos que operaram com movimentação de carga geral da Região Nordeste (método BCC), no ano de 2006.	45
Tabela 11 – <i>Benchmark</i> dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método BCC), no ano de 2006	46
Tabela 12 – Eficiência relativa dos portos que operaram com movimentação de carga geral da Região Nordeste (método BCC), no ano de 2016	46
Tabela 13 – <i>Benchmarks</i> dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método BCC), no ano de 2016	47
Tabela 14 – Portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, com medidas mistas (<i>fuzzy</i> e clássicas), no ano de 2006.	48
Tabela 15 – Portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, com medidas mistas, no ano de 2016.	48
Tabela 16 – Eficiências <i>fuzzy</i> dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.	49
Tabela 17 – Valores de θ para diferentes valores de α , dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.	50
Tabela 18 – Eficiências <i>fuzzy</i> dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.	50

Tabela 19 – Valores de θ para diferentes valores de α , dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.	51
Tabela 20 – Nível α para os <i>input</i> e <i>output</i> dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.	52
Tabela 21 – Cenários pessimistas e otimistas para portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.	52
Tabela 22 – Nível α para os <i>input</i> e <i>output</i> dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.	53
Tabela 23 – Cenários pessimistas e otimistas para portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.	53

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BCC	<i>Banker, Charnes, Cooper</i>
CCR	<i>Charnes, Cooper e Rhodes</i>
CRS	Retornos Constantes de Escala - <i>Constant Returns to Scale</i>
DEA	Análise Envoltória de Dados - <i>Data Envelopment Analysis</i>
DMU	Unidade de Tomada de Decisão - <i>Decision Making Unit</i>
FDEA	Análise Envoltória de Dados Difusos - <i>Fuzzy Data Envelopment Analysis</i>
PD DMU	DMU eficiente D α -possibilística - <i>α-possibilistic D efficient DMU</i>
PDI DMU	DMU ineficiente D α -possibilística - <i>α-possibilistic D inefficient DMU</i>
PPL	Problema de Programação Linear
VRS	Retornos Variáveis de Escala - <i>Variable Return to Scale</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivações	16
1.2	Estruturação da Monografia	17
2	REVISÃO CONCEITUAL	18
2.1	Análise de Eficiência Relativa e Curvas de Produção	18
2.2	Análise Envoltória de Dados	21
2.2.1	<i>Análise Envoltória de Dados com Retornos Constante de Escala</i>	21
2.2.2	<i>Análise Envoltória de Dados com Retornos Variáveis de Escala</i>	24
3	MODELOS FDEA	27
3.1	Análise Envoltória de Dados Difusos	27
3.1.1	<i>Abordagem de classificação fuzzy</i>	28
3.1.2	<i>Abordagem por nível α</i>	35
4	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E RESULTADOS	39
4.1	Análise de Eficiência de Portos da Região Nordeste do Brasil	39
4.1.1	<i>Eficiência dos Portos da região Nordeste usando métodos de DEA clássicos</i>	40
4.1.1.1	<i>CCR</i>	41
4.1.1.2	<i>BCC</i>	45
4.1.2	<i>Eficiência dos Portos da região Nordeste usando métodos de FDEA</i>	47
4.1.2.1	<i>FDEA com abordagem de classificação fuzzy</i>	49
4.1.2.2	<i>FDEA com abordagem em nível α</i>	51
4.2	Resultados	54
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	56
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICES	59
	APÊNDICE A – Teoria de Conjuntos Difusos	59
A.1	Subconjuntos Fuzzy	59
A.2	Operações com Conjuntos Fuzzy	60
A.3	Aritmética de Intervalos	62
A.4	Número Fuzzy Triangular	63
A.5	Conjunto de nível α	63

ANEXOS	64
ANEXO A – DEA clássicos usando linguagem de programação R	65
ANEXO B – FDEA usando linguagem de programação R	67

1 INTRODUÇÃO

Em busca de operar de forma eficiente, as unidades produtoras buscam técnicas ou procedimentos que proporcionem melhorias em suas atividades ou seus serviços. Entre as técnicas utilizadas para medir eficiência produtiva a Análise Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* - DEA) é uma das técnicas utilizadas, que avalia a eficiência relativa de uma unidade produtora, que é classificada como Unidade de Tomada de Decisão - *Decision Making Unit* (DMU).

A análise de eficiência é feita a partir de um conjunto de DMUs com características similares. A DEA é uma técnica não paramétrica de análise de eficiência para comparar unidades em relação a seus insumos (*input*) e produtos (*output*). Matematicamente, é um Problema de Programação Linear (PPL) que permite avaliar a eficiência relativa de um conjunto de DMUs com múltiplos *input* e *output*. Para determinar a eficiência das DMUs, DEA compara um subconjunto de DMUs que atuam em um mesmo ramo de atividade e diferenciam-se nas quantidades de *inputs* que consomem dado os *outputs* resultantes. O conjunto de DMUs utilizados em uma DEA deve ter em comum a utilização dos mesmos *input* e *outputs*, ser homogêneo e ter autonomia na tomada de decisões.

Os métodos de DEA clássicos permitem mensurar a eficiência, dado o conjunto analisado e classificar as DMUs entre eficientes e ineficientes. Esses modelos também permitem verificar se existem *benchmarks*, ou seja, DMUs que operam de modo eficientes e que podem servir de referencia para que DMUs ineficientes possam tornar-se eficientes.

Uma limitação dos modelos de DEA clássicos é que eles requerem medições precisas de ambos os *input* e *outputs*. No entanto, os valores observados de *input* e *outputs* em problemas do mundo real são, com frequência, imprecisos ou vagos. A incerteza de informação na base de conhecimento pode acarretar em uma incerteza na conclusão, ou seja, o tratamento da incerteza tem um papel particularmente importante. Para lidar com essa realidade, pesquisadores desenvolveram modelos de Análise Envoltória de Dados Difusos - *Fuzzy Data Envelopment Analysis* (FDEA), que procuram adaptar o modelo de DEA clássicos com dados vagos ou incertos, utilizando Teoria dos Conjuntos Difusos (*Fuzzy*).

Os modelos de DEA são empregados rotineiramente em áreas que variam da avaliação de setores públicos (hospitais, sistemas de transporte, escolas e universidades) para setores privados (bancos e instituições financeiras). Uma das vantagens da aplicação de DEA é acomodar múltiplos *input* e *outputs* para medir as eficiências relativas das DMUs.

1.1 Motivações

A fim de auxiliar DMUs a alcançarem a eficiência de produção um estudo mais aprofundado de DEA torna-se crucial. Desse modo, os objetivos principais a serem alcançados com este estudo são:

- Aprofundar o conhecimento dos métodos de DEA clássicos e FDEA.
- Analisar se as DMUs que operam de modo eficiente conforme os métodos de DEA convencionais também são eficientes pelos métodos de FDEA, quando suas medidas de *input* e *output* são incertas.

Como objetivo secundário tem-se:

- Observar se empresas que servem de *benchmarks* pela aplicação dos métodos de DEA clássicos, em relação a um conjunto analisado, são eficientes pela abordagem FDEA.

Os objetivos principais e secundários do estudo foram escolhidos a fim de obter mais informações em relação as classificações de eficiências, dado um conjunto de DMUs.

1.2 Estruturação da Monografia

No capítulo Revisão Conceitual, é descrita a fundamentação teórica dos métodos de DEA clássicos mais amplamente abordados na literatura, bem como a análise de comportamento em relação aos retornos de escala de seus respectivos modelos, que permitem mensurar a eficiência dado um conjunto de DMUs e observar, também, quais DMUs operam de modo eficiente e verificar quais delas servem de parâmetros para as ineficientes atingirem a eficiência. No capítulo Modelos FDEA, é descrita uma abordagem conceitual e teórica dos métodos de FDEA com abordagem de classificação *fuzzy* e abordagem baseada em nível α , ou α - corte. Em seguida, no capítulo Experimentos Numéricos e Resultados, é feita uma aplicação numérica para um conjunto de portos da região nordeste do Brasil utilizando os métodos de DEA clássicos para mensurar a eficiência e verificar quais servem de *benchmarks* dentro do conjunto. Fora a aplicação dos métodos clássicos é feita uma aplicação usando métodos de FDEA com *inputs* e *outputs* difusos. Por fim, no capítulo Conclusão e Trabalhos Futuros, verificar que conclusões podem ser obtidas após concluídas as etapas anteriores e trabalhos futuros.

2 REVISÃO CONCEITUAL

Neste capítulo será apresentado a fundamentação teórica sobre DEA, e os modelos clássicos: modelo *Charnes, Cooper e Rhodes* (CCR) formulado por Charnes *et al.* (1979) e o modelo *Banker, Charnes, Cooper* (BCC) formulado por Banker *et al.* (1984), que são os modelos mais utilizados na literatura. Além disso, será observado o comportamento das curvas de produção para os modelos CCR e BCC, conforme as orientações a *input* e a *output*, para a análise de eficiência das unidades analisadas.

2.1 Análise de Eficiência Relativa e Curvas de Produção

Certas expressões estão internamente relacionadas ao desempenho das DMUs, entre elas estão: produtividade, eficácia e eficiência. A produtividade pode ser definida como sendo a relação entre o produto resultante e o insumo necessário, dado pela razão entre produto (*output*) e insumo (*input*), de acordo com Coelli *et al.* (1988).

$$\text{produtividade} = \frac{\text{output}}{\text{input}} \quad (2.1)$$

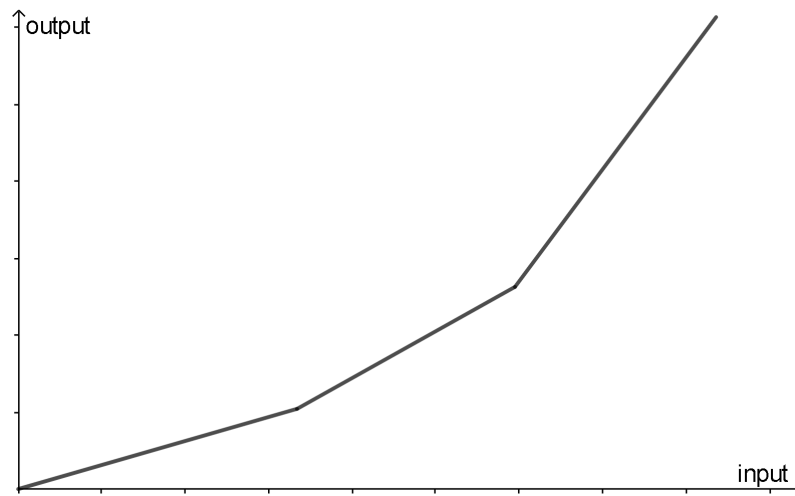
A análise da eficácia de uma DMU pode ser observada através da relação entre os resultados que são obtidos e os resultados que são almejados, sem levar em consideração os insumos que são utilizados.

A análise de eficiência de uma DMU tem semelhanças com a análise de produtividade, quanto ao uso das medidas *input* e *output*. Contudo, a eficiência busca expressar uma relação ótima entre os resultados obtidos e os insumos que são utilizados.

As considerações em torno das curvas de produção almejam definir relações entre *inputs* e *outputs*. Nesse estudo, o entendimento do seu conceito torna-se essencial para a análise de eficiência.

As hipóteses consideradas para a relação entre *inputs* e *outputs* determinam que haverá:

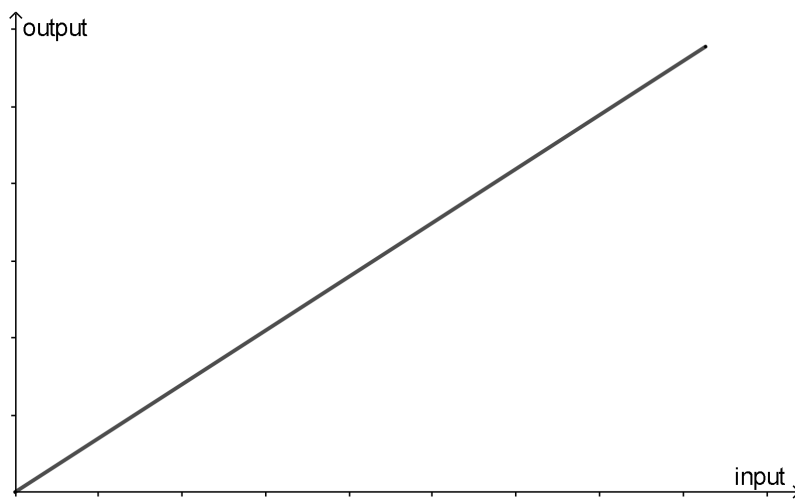
Figura 1 – Retorno Crescente de Escala



Fonte: Autora

- **Retorno Crescente de Escala** - aumentos no consumo de *inputs* geram um aumento maior que o proporcional na quantidade de *outputs* obtidos, como descrito na Figura 1.

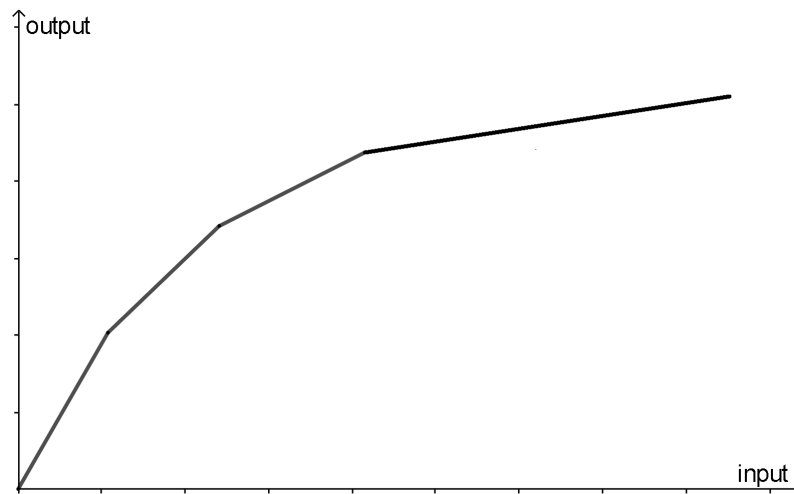
Figura 2 – Retorno Constante de Escala



Fonte: Autora

- **Retorno Constante de Escala** - aumentos no consumo de *inputs* geram um aumento proporcional na quantidade de *outputs* obtidos, como descrito na Figura 2.

Figura 3 – Retorno Decrescente de Escala



Fonte: Autora

- **Retorno Decrescente de Escala** - aumentos no consumo de *inputs* geram um aumento menor que o proporcional na quantidade de *outputs* obtidos, como descrito na Figura 3.

Uma abordagem analítica mais rigorosa aplicada à medida de eficiência na produção teve origem com os trabalhos de Koopmans (1951) e Debreu (1951). A definição de Pareto-Koopmans, para a eficiência técnica, é um vetor *input-output* que é tecnicamente eficiente se, e somente se:

1. Nenhum *output* possa ser aumentado sem que algum *inputs* seja aumentado, ou que algum outro *output* seja reduzido;
2. Nenhum *input* possa ser reduzido sem que algum outro *input* seja aumentado, ou algum *output* seja reduzido.

Debreu (1951) introduziu uma medida radial de eficiência técnica que é o coeficiente de utilização de recursos. Esta medida radial pode buscar a máxima redução equiproporcional de todos os *inputs* ou a máxima expansão equiproporcional de todos os *outputs*. A grande vantagem do uso deste coeficiente é que ele independe da unidade de medida de cada variável. Já a grande desvantagem é que um vetor *input-output* eficiente com base na medida radial de Debreu (1951) pode não ser eficiente com base na definição de Pareto-Koopmans.

Farrel (1957) propôs um modelo empírico para o cálculo da eficiência relativa com o estudo de medidas de eficiência baseada em técnicas não paramétricas, mas foi considerado apenas um único *input* e um único *output* nessas análises iniciais.

2.2 Análise Envoltória de Dados

O método de DEA tem a finalidade de medir a eficiência de unidades produtivas. É um método não paramétrico para avaliação da eficiência comparativa de DMUs, que realizam operações similares com múltiplos dados de *inputs* e/ou *outputs*.

2.2.1 Análise Envoltória de Dados com Retornos Constante de Escala

A análise de eficiência é um fator crucial para verificar se DMUs possuem uma relação ótima entre seus *inputs* e *outputs*. Este método foi formulado e desenvolvido por Charnes *et al.* (1979), baseado em programação matemática em que a medida de eficiência é obtida pela razão da soma ponderada dos dados de *outputs* pela soma ponderada dos *inputs*. Essa abordagem resultou na formulação do Modelo CCR, abreviatura dos sobrenomes dos autores desse modelo.

De acordo com Coelli *et al.* (1988), o cálculo da eficiência baseada em DEA segue dois tipos de orientação: a orientação a *inputs* e a orientação a *outputs*. A orientação a *inputs* tem como objetivo produzir a mesma quantidade de produtos minimizando a utilização dos recursos. Em contrapartida, a orientação a *outputs* visa maximizar a produção, mantendo constante a quantidade de recursos consumidos.

O modelo CCR clássico pode ser formulado como um Problema de Programação Linear (PPL) com orientação a *input* e a *output*, respectivamente, da seguinte forma:

Orientado a *Inputs* - Primal (Multiplicadores)

$$\begin{aligned}
 \max E_r = & \sum_{j=1}^s u_j y_{jr} \\
 \text{s.a} & \sum_{i=1}^m v_i x_{ir} = 1 \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \leq 0, \quad (k = 1, \dots, n) \\
 & u_j \geq 0, v_j \geq 0 \quad \forall j, i
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Orientado a *Outputs* - Primal (Multiplicadores)

$$\begin{aligned}
 \min E_r = & \sum_{i=1}^m v_i x_{ir} \\
 \text{s.a} : & \sum_{j=1}^s u_j y_{jr} = 1 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} \leq 0, \quad (k = 1, \dots, n) \\
 & u_j \geq 0, v_i \geq 0 \quad \forall j, i
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

No qual v_i e u_j são os pesos de cada *output* e *input*, respectivamente; y_{jr} , e x_{ir} , são os *outputs* e *inputs* da r -ésima DMU; y_{jk} e x_{ik} , com $k = 1, \dots, n$, representam, respectivamente, os *outputs* e *inputs* de todas as k DMUs do conjunto; E_r é o valor da medida de eficiência da r -ésima DMU. A formulação deste problema é conhecida como o problema dos multiplicadores, como também são chamados os pesos u_j , v_i .

A partir da formulação primal é possível desenvolver a dual, conhecido como Modelo Envelope que, pelo teorema da dualidade forte, apresentará o mesmo valor ótimo para a função objetivo, quando esse existir (LUENBERGER E YE (2016)). Uma formulação dual para os modelos (2.2) e (2.3), respectivamente, pode ser expressa como:

Orientado a *Inputs* - Dual (Envelope)

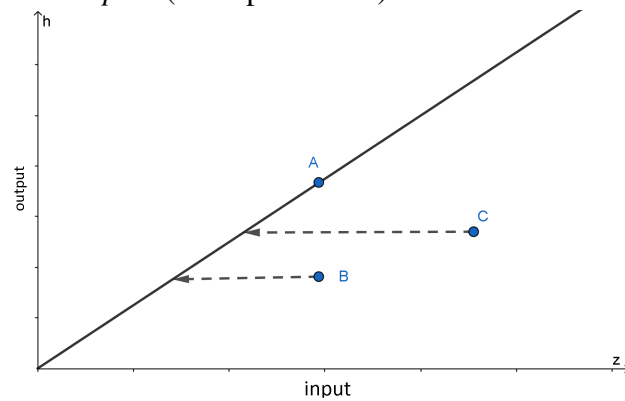
$$\begin{aligned}
 & \min && h_r \\
 & s.a : && h_r x_{ir} - \sum_{i=1}^n \lambda_k x_{ik} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, m) \\
 & && y_{jr} + \sum_{i=1}^n \lambda_k y_{jk} \leq 0, \quad (j = 1, \dots, s) \\
 & && \lambda_k \geq 0 \forall k
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Orientado a *Outputs* - Dual (Envelope)

$$\begin{aligned}
 & \max && h_r \\
 & s.a : && h_r y_{jr} - \sum_{j=1}^n \lambda_k y_{jk} \leq 0, \quad (j = 1, \dots, s) \\
 & && x_{ir} - \sum_{i=1}^n \lambda_k x_{ik} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, m) \\
 & && \lambda_k \geq 0 \forall k
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

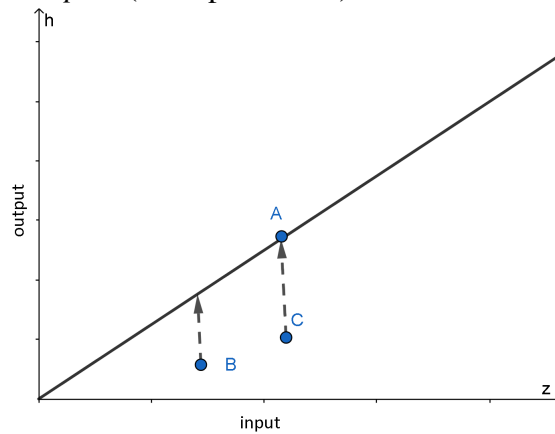
Os modelos duais diferenciam-se dos modelos primais devido a variável h_r , medida de eficiência, e λ_k , a k -ésima coordenada da r -ésima DMU, em uma base formada pelas outras DMUs de referência. O modelo dual busca os valores para λ_k que minimizam h_r , sendo λ_k a contribuição da k -ésima DMU na formação do alvo da r -ésima DMU. As DMUs com λ não nulo são os *benchmarks* da r -ésima DMU, conforme Guerreiro (2006).

Figura 4 – CCR orientado a *inputs* (Multiplicadores).



Fonte: Autora

Figura 5 – CCR orientado a *outputs* (Multiplicadores)



Fonte: Autora

Graficamente, o modelo CCR determina uma fronteira de Retornos Constantes de Escala - *Constant Returns to Scale* (CRS), ou seja, crescimentos proporcionais nos *inputs* geram um crescimento proporcional nos *outputs*. Exemplos do comportamento podem ser observados nas Figuras 4 e 5, com orientação a *inputs* e a *outputs*, respectivamente, usando o modelo dos multiplicadores.

Observa-se que, em ambas as orientações, de acordo com as Figuras 4 e 5, a inclinação mais alta é alcançada pela linha que vai da origem e passa pelo ponto A. Essa linha é denominada "fronteira eficiente". Essa fronteira é definida por um segmento unindo a origem e o ponto mais à esquerda e acima em relação aos demais pontos, que não podem estar acima desse segmento. O nome Análise Envoltória de Dados (DEA), vem dessa propriedade, porque, em linguagem matemática, diz-se que essa fronteira "envolve" esses pontos (COOPER W. W.; SEIFORD (2006)).

Na forma dos multiplicadores é possível obter um peso relacionado a cada *input* e *output*. Enquanto que para a forma de envelope é possível determinar as metas para que as DMUs ineficientes atinjam a eficiência.

2.2.2 Análise Envoltória de Dados com Retornos Variáveis de Escala

Banker *et al.* (1984) criaram um novo modelo que permite distinguir entre ineficiências técnica e de escala, ao mesmo tempo que identifica se estão presentes ganhos de escala constantes ou variáveis. Esse modelo passou a ser identificado como modelo BCC, em homenagem aos autores, ou Retornos Variáveis de Escala - *Variable Return to Scale* (VRS). O modelo BCC permite identificar se o retorno de escala é constante (escala de produção não influi), crescente (aumento de escala garante aumento de produtividade) ou decrescente (aumento de escala provoca decréscimo na produtividade).

O modelo BCC clássico pode ser formulado como um PPL com orientação a *input* e a *output*, respectivamente, da seguinte forma:

Orientado a *Inputs* - Primal (Multiplicadores)

$$\begin{aligned}
 \max E_r = & \quad \sum_{j=1}^s u_j y_{jr} - w_1 \\
 \text{s.a :} & \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ir} = 1 \\
 & \quad \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - w_1 \leq 0, \quad (k = 1, \dots, n) \\
 & \quad u_j \geq 0, v_i \geq 0 \quad \forall j, i \\
 & \quad w_1 \text{ livre}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

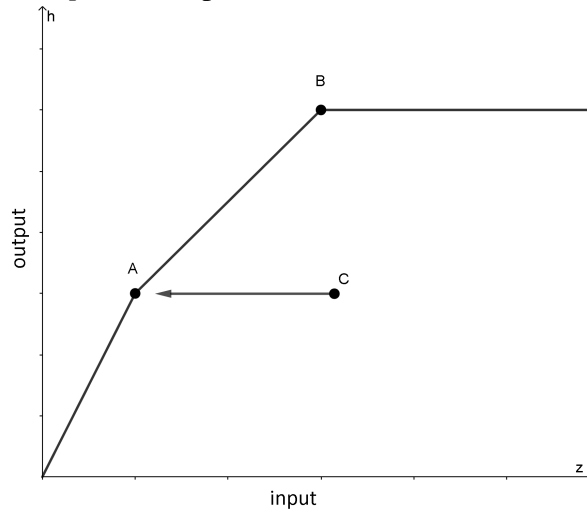
Orientado a *Outputs* - Primal (Multiplicadores)

$$\begin{aligned}
 \min E_r = & \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ir} - w_2 \\
 \text{s.a :} & \quad \sum_{j=1}^s u_j y_{jr} = 1 \\
 & \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - w_2 \leq 0, \quad (k = 1, \dots, n) \\
 & \quad u_j \geq 0, v_i \geq 0 \quad \forall j, i \\
 & \quad w_2 \text{ livre}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Variáveis similares das utilizadas nos modelos CCR, diferenciando-se pelo uso das variáveis w_1 , para orientação a *input*, e w_2 , para orientação a *output*, que representam os fatores de escala. Vale destacar que a variável pode ser negativa (indica retornos crescentes de escala), positiva (indica retornos decrescentes de escala) e nula (indica retornos constantes de escala).

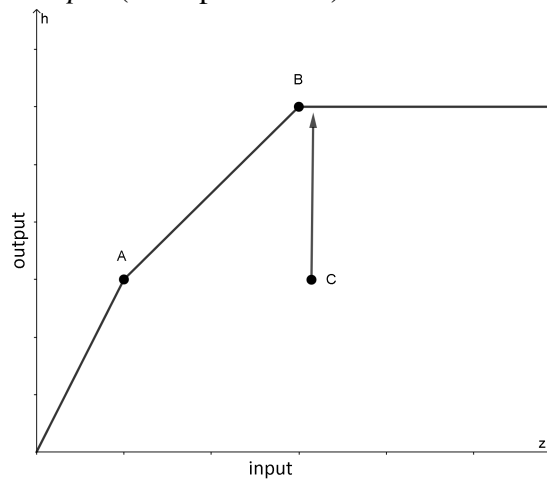
Graficamente o modelo BCC determina uma fronteira VRS por considerar rendimentos variáveis de escala. As Figuras 6 e 7 mostram o comportamento, com orientação a *input* e a *output* respectivamente, utilizando o método dos multiplicadores.

Figura 6 – BCC orientado a *input* (Multiplicadores).



Fonte: Autora

Figura 7 – BCC orientado a *output* (Multiplicadores)



Fonte: Autora

A partir do modelo primal é possível desenvolver o dual que, pelo teorema da dualidade forte, apresentará o mesmo valor ótimo para a função objetivo, quando esse existir (Luenberger e Ye (2016)). Uma formulação dual para os modelos 2.6 e 2.7, respectivamente, é dada a seguir:

Orientado a *Inputs* - Dual (Envelope)

$$\begin{aligned}
 & \min && h_r \\
 \text{s.a:} & && h_r x_{ir} - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, m) \\
 & && -y_{jr} + \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, s) \\
 & && \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \\
 & && \lambda_k \geq 0, \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Orientado a *Outputs* - Dual (Envelope)

$$\begin{aligned}
 & \max && h_r \\
 \text{s.a:} & && -h_r y_{jr} + \sum_{k=1}^n \lambda_k y_{jk} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, s) \\
 & && x_{ir} - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, m) \\
 & && \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \\
 & && \lambda_k \geq 0, \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Variáveis e restrições similares as do modelo dual CCR, diferenciando-se pela restrição $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ que representa uma função convexa para os λ_k de cada DMU.

Um índice de eficiência é convencionalmente definido como a combinação linear dos *outputs* dividida pela combinação linear dos *inputs* de determinada DMU. Também é convencional que todos os índices devem ser menores ou iguais a 1, ou seja, em ambos os modelos (CCR ou BCC) a medida de eficiência de cada DMU varia no intervalo (0, 1].

Além de identificar as DMUs eficientes, os modelos de DEA permitem mensurar e localizar a ineficiência, e estimar uma função de produção linear por partes, que fornece o *benchmark* para as DMUs ineficientes. Esse *benchmark* é determinado pela projeção das DMUs que operam de modo ineficientes na fronteira de eficiência.

3 MODELOS FDEA

Neste capítulo será apresentada a abordagem dos modelos de Análise Envoltória de Dados Difusos (*Fuzzy Data Envelopment Analysis-FDEA*) com abordagem de classificação difusa (*fuzzy*), tendo como base o modelo clássico CCR, proposto por Guo e Tanaka (2001) e com abordagem de nível α , com base no modelo BCC, proposto por Kao e Liu (2000).

3.1 Análise Envoltória de Dados Difusos

Os métodos de DEA clássicos requerem medições precisas tanto para as entradas como para as saídas. Contudo, os valores observados nos dados de *inputs* e *outputs* em problemas reais às vezes são imprecisos, incertos ou faltantes. O tratamento da incerteza tem um papel particularmente importante, dado que a incerteza de informação na base de conhecimento pode acarretar em uma incerteza na conclusão. Para lidar com essa realidade pesquisadores procuraram adaptar o modelo de DEA com dados vagos ou incertos, utilizando Teoria dos Conjuntos Difusos (*Fuzzy*) (ZADEH (1965) e ZADEH (1999)) e desenvolveram os modelos de FDEA. Mais informações sobre Teoria de Conjuntos Difusos usadas neste trabalho podem ser observadas no Apêndice A.

Os métodos de FDEA serão abordados com o intuito de definir que práticas devem ser aplicadas, tendo como base os métodos de DEA clássicos, para mensurar as eficiências das DMUs, e o tratamento de dados incertos de *inputs* e *outputs* clássicos. Uma vez que há incerteza nos dados de *inputs* e *outputs* utilizados, gerando incerteza na análise das eficiências resultantes. Logo, é preciso definir técnicas que proporcionem condições de mensuração e análises para que as medidas de eficiências sejam obtidas.

De acordo com Hatami-Marbini *et al.* (2011), as aplicações da Teoria dos Conjuntos Difusos em DEA são geralmente classificadas em quatro grupos: a abordagem de tolerância; a abordagem baseada em α - cortes; a abordagem de classificação difusa e a abordagem da teoria de possibilidade. Sendo a abordagem baseada em α -corte a aplicação FDEA mais utilizada na literatura.

Segundo Lertworasirikul *et al.* (2003), todas as abordagens possuem vantagens e desvantagens: a abordagem baseada em α -corte, ou nível α , fornece as eficiências *fuzzy*, mas não classifica as DMUs através de métodos de classificação de conjuntos *fuzzy*; a abordagem de classificação *fuzzy* fornece a classificação, contudo ignora a amplitude da eficiência *fuzzy* a um determinado nível α ; na abordagem de tolerância a incerteza é incorporada nos modelos de DEA definindo níveis de tolerância em violações de restrição, distorcendo a desigualdade ou sinais de igualdade, sem tratar diretamente com coeficientes difusos. Já a abordagem baseada na teoria de possibilidades, embora forneça a classificação e incorpore a incerteza por meio das medidas de possibilidade, não avança no sentido de reunir as medidas de eficiência em todos os níveis de possibilidade em uma única medida de eficiência não *fuzzy* para cada DMU.

Com exceção da abordagem de tolerância, todas as abordagens de FDEA mencionadas por Hatami-Marbini *et al.* (2011) usam direta ou indiretamente nível α em sua formulação. O diferencial entre essas abordagens é o modo como os resultados são interpretados ao analisar a eficiência de uma DMU em relação às demais. Dentre as técnicas mencionadas, serão abordadas nesse estudo duas técnicas FDEA que fazem uso de nível α para sua resolução. Serão elas as técnicas FDEA com abordagens de classificação *fuzzy* e de nível α .

3.1.1 Abordagem de classificação *fuzzy*

A abordagem de classificação *fuzzy* é uma técnica popular que atraiu muita atenção entre os modelos de FDEA da literatura, conforme Hatami-Marbini *et al.* (2011). Nesta abordagem, o foco principal é encontrar as pontuações de eficiência *fuzzy* das DMUs, usando PPL.

A abordagem de classificação *fuzzy* das medidas de eficiência foi desenvolvida inicialmente por Guo e Tanaka (2001), que propuseram um modelo *fuzzy*, com base no modelo CCR, no qual restrições difusas (incluindo igualdades e desigualdades *fuzzy*) foram convertidas em restrições clássicas, predefinindo um nível de confiabilidade e usando a regra de comparação para números difusos (HATAMI-MARBINI *et al.*, 2011).

A análise de eficiência *fuzzy* para o modelo de FDEA com abordagem de classificação *fuzzy* será abordada, com base nos estudos de alguns pesquisadores (GUO E TANAKA (2001), ENTANI *et al.* (2002), AZADEH *et al.* (2008) e LERTWORASIRIKUL *et al.* (2002)).

O modelo CCR clássico, com orientação a *input*, definido em (2.2) pode ser reformulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \max_{u,v} &= u^t y_r \\
 \text{s.a :} & v^t x_r = 1 \\
 & u^t y_k \leq v^t x_k, \quad (k = 1, \dots, n) \\
 & u \geq 0, v \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Em que v e u são os vetores de pesos de cada *output* e *input*, respectivamente; y_r , s -dimensional, e x_r , m -dimensional, os vetores de *output* e *input* da r -ésima DMU; y_k e x_k , com $k = 1, \dots, n$, os vetores de *output* e *input* da k -ésima DMU, respectivamente.

Considere os dados de *input* e *output fuzzy*, o modelo CCR (3.1) pode ser estendido para o seguinte modelo FDEA:

$$\begin{aligned}
 \max_{u,v} & u^t \tilde{Y}_r \\
 \text{s.a :} & v^t \tilde{X}_r \cong \tilde{1}, \\
 & u^t \tilde{Y}_k \lesssim \tilde{X}_k \quad (k = 1, \dots, n) \\
 & v \geq 0 \\
 & u \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

No qual \tilde{X}_j e \tilde{Y}_j são vetores de *input fuzzy*, m -dimensional, e *output fuzzy*, s -dimensional, da k -ésima DMU, respectivamente, que substituem os vetores de *input* e *output* no modelo CCR clássico. É introduzido também conceitos de "aproximadamente igual", "quase menor que" e "maximizar uma variável *fuzzy*" no modelo em substituição a "igual", "menor que" e "maximizar o *output* clássico", respectivamente. Além disso, o número 1 do modelo clássico é substituído pelo número *fuzzy* triangular simétrico $\tilde{1} = (1, e)$, com $e < 1$ que é o espalhamento bilateral predefinido de $\tilde{1}$. Sendo, também, $x_k - c_k > 0$ e $y_k - d_k > 0$, (em que c_k e d_k representam os espalhamentos de x_k e y_k , respectivamente), considerando apenas *input* e *output* positivos.

Mais informações sobre a definição de Conjuntos Difusos podem ser observadas no Apêndice A.

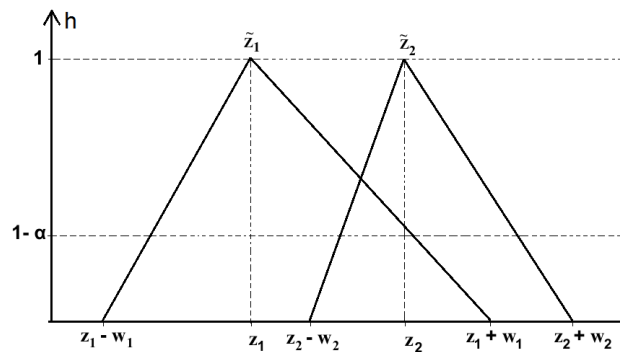
Definição 3.1.1. Dadas duas variáveis fuzzy triangulares simétricas $\tilde{Z}_1 = (z_1, w_1)$ e $\tilde{Z}_2 = (z_2, w_2)$, a relação $\tilde{Z}_1 \lesssim \tilde{Z}_2$ é definida pelas seguintes desigualdades:

$$z_1 - (1 - \alpha)w_1 \leq z_2 - (1 - \alpha)w_2 \quad (3.3)$$

$$z_1 + (1 - \alpha)w_1 \leq z_2 + (1 - \alpha)w_2 \quad (3.4)$$

sendo $0 \leq \alpha \leq 1$ um nível de pertinência predefinido. Pode ser observado na Figura 8 que o sinal de " \lesssim " é definido pela comparação dos limites do intervalo dos conjuntos difusos \tilde{Z}_1 e \tilde{Z}_2 , de nível α . É visto que se as inequações em (3.3) e (3.4) se mantiverem no nível de pertinência α , eles permanecerão em qualquer nível de pertinência h com $\alpha \leq h \leq 1$.

Figura 8 – $\tilde{Z}_1 \lesssim \tilde{Z}_2$



Fonte: Autora

Para a maximizar uma variável triangular simétrica fuzzy $\tilde{Z} = (z, w)$, fazendo uso da Definição 3.1.1, pode ser explanada como a maximização simultânea de $z - (1 - \alpha)w$ e $z + (1 - \alpha)w$. Com a introdução de uma função ponderada para a obtenção de uma solução de compromisso, torna-se $\lambda_1(z - (1 - \alpha)w) + \lambda_2(z + (1 - \alpha)w)$ em que $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$ são os pesos dos pontos de extremidade esquerda e direita do conjunto de nível α de \tilde{Z} , respectivamente, de modo que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Para $\lambda_1 = 1$ é considerado uma opinião pessimista de maximizar \tilde{Z} , pois o pior cenário é considerado, enquanto que para λ_2 é considerado uma opinião otimista porque está relacionado ao melhor cenário. Usando $\lambda_1 = 1$ têm-se que

$$\max z - (1 - \alpha)w \quad (3.5)$$

Para a relação $v^t \tilde{X}_r \cong \tilde{I}$ em (3.2), que desempenha o mesmo papel de $v^t x_r = 1$ em (3.1), o vetor x_r de *input* clássico no modelo CCR torna-se um vetor *fuzzy* de modo que $v^t x_r = 1$ é estendido para $v^t \tilde{X}_r \cong \tilde{I}$, com $\tilde{I} = (1, e)$ uma unidade *fuzzy* predeterminada.

Para o caso clássico, ou seja, $v^t x_r = 1$ o vetor v pode ser encontrado para satisfazer essa igualdade, para o caso *fuzzy*, ou seja, $v^t \tilde{X}_r$ para encontrar v que a satisfaça é preciso encontrar um v que aproxima $v^t \tilde{X}_r$ tanto quanto possível de \tilde{I} . Pela Definição 3.1.1, $v^t x_r$ que satisfaz $v^t \tilde{X}_r \cong \tilde{I}$ pode ser considerado como um limite superior sujeito a $v^t x_r = \tilde{I}$, ou seja, $Z = (v^t x_r, v^t c_r) \cong \tilde{I}$, em que c_r é o espalhamento de x_r , é convertido, usando caracterização de função de pertinência e princípio da extensão de Zadeh, no problema de otimização a seguir:

$$\begin{aligned} \max_v \quad & v^t c_r \\ \text{s.a. :} \quad & v^t x_r - (1 - \alpha)v^t c_r \leq 1 - (1 - \alpha)e \\ & v^t x_r + (1 - \alpha)v^t c_r \leq 1 + (1 - \alpha)e \\ & v \geq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

É possível observar que o problema de otimização (3.6) é usado para descobrir $Z = v^t \tilde{X}_r$ restringido por $v^t \tilde{X}_r \geq \tilde{I}$ com o melhor espalhamento $v^t c_r$ e o respectivo ponto final esquerdo do número nebuloso \tilde{I} nos conjuntos de nível 1. O vetor obtido pela resolução de (3.6) é chamado de v^* .

De acordo com a Definição 3.1.1 e as equações 3.5 e 3.6, o problema de otimização *fuzzy* (3.1) pode ser formulado no PPL em dois níveis a seguir, com uma função objetivo primária e uma função objetivo secundária:

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \quad & u^t y_r - (1 - \alpha)u^t d_r \\ \text{s.a. :} \quad & \max_v \quad v^t c_r \\ & \text{s.a. :} \quad v^t x_r - (1 - \alpha)v^t c_r = 1 - (1 - \alpha)e, \\ & \quad v^t x_r + (1 - \alpha)v^t c_r \leq 1 + (1 - \alpha)e, \\ & \quad v \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} u^t y_k + (1 - \alpha)u^t d_k &\leq v^t x_k + (1 - \alpha)v^t c_k, \\ u^t y_k - (1 - \alpha)u^t d_k &\leq v^t x_k - (1 - \alpha)v^t c_k \quad (k = 1, \dots, n), \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

Nota-se que o problema de otimização (3.6) é incorporado no PPL (3.7) para a obtenção de v que satisfaça $v^t \tilde{X}_r \cong \tilde{I}$. Quando $c_i = d_i = e = 0$ o FDEA torna-se o modelo CCR

clássico. Isso significa que o modelo (3.7) permite avaliar as eficiências das DMUs de um modo mais geral, tal qual as entradas e saídas clássicas, *fuzzy* e híbridas possam ser tratadas de maneira homogênea.

Os Teoremas (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) e suas demonstrações foram extraídos de Guo e Tanaka (2001), e podem ser observados a seguir:

Teorema 3.1.1. *Se existe solução ótima em (3.6) existe solução ótima em (3.7)*

Demonstração. Considerando as suposições $x_k - c_k > 0$ e $y_k - d_k > 0$ e seja $v^* \geq 0$ a notação para a solução ótima de (3.6). Seja u de modo que $[0, \dots, u_h, \dots, 0]^t$ com

$$u_h = \min_{k=1, \dots, n} \left\{ \frac{(v^* x_k + (1 - \alpha) v^{*t} c_k)}{(y_{kh} + (1 - \alpha) d_{kh})} \wedge \frac{(v^* x_k - (1 - \alpha) v^{*t} c_k)}{(y_{kh} - (1 - \alpha) d_{kh})} \right\} > 0$$

Para $\alpha \in [0, 1]$, u e v^* satisfazem todas as restrições de (3.7). Como as restrições de (3.7) formam um conjunto fechado e limitado (conjunto compacto), então existe uma solução ótima em (3.7). . □

Teorema 3.1.2. *Se $\max[c_{r1}/x_{r1}, \dots, c_{rs}/x_{rs}] \leq e$ em (3.6), uma solução ótima para v sempre existirá em (3.6).*

Demonstração. Para $v[0, \dots, 0, v_h, 0, \dots, 0]^t$ com $v_h = (1 - (1 - \alpha)e)/x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh} > 0$. Esse v satisfaz a restrição $v^t x_r - (1 - \alpha)v^t c_r = 1 - (1 - \alpha)e$. Além disso,

$$\begin{aligned} & v^t x_r + (1 - \alpha)v^t c_r - 1 - (1 - \alpha)e \\ = & \frac{x_{rh} + (1 - \alpha)c_{rh}}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} (1 - (1 - \alpha)e) - 1 - (1 - \alpha)e \\ = & \frac{x_{rh} + (1 - \alpha)c_{rh}}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} - \frac{x_{rh} + (1 - \alpha)c_{rh}}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} (1 - \alpha)e - 1 - (1 - \alpha)e \\ = & \frac{x_{rh} + (1 - \alpha)c_{rh}}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} - 1 - \left(\frac{x_{rh} + (1 - \alpha)c_{rh}}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} + 1 \right) (1 - \alpha)e \\ = & \frac{2(1 - \alpha)c_{rh}}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} - \frac{2x_{rh}(1 - \alpha)e}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} \\ = & \frac{2((1 - \alpha)(c_{rh} - x_{rh}e))}{x_{rh} - (1 - \alpha)c_{rh}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\max[c_{r1}/x_{r1}, \dots, c_{rs}/x_{rs}] \leq e$, $c_{rh}/x_{rh} \leq e$ é válido. Logo, o valor de (3.8) não é maior que zero. Como resultado, v é uma solução viável de (3.6). Como as restrições de (3.6) formam um conjunto fechado limitado (conjunto compacto), existe uma solução ótima em (3.6). □

Seja e definido como o espalhamento de \tilde{I} . Para n DMUs e é definido como $e = \max_{k=1, \dots, n} (\max_{i=1, \dots, s} c_{ki}/x_{ki})$ no modelo (3.7). Definindo, também, g_r como o valor ótimo da função objetivo de (3.6), o modelo (3.7) pode ser reformulado como o PPL a seguir

$$\begin{aligned}
& \max_{u,v} && u^t y_r - (1 - \alpha) u^t d_r \\
& \text{s.a :} && v^t c_r \geq g_r \\
& && v^t x_r - (1 - \alpha) v^t c_r = 1 - (1 - \alpha) e, \\
& && v^t x_r + (1 - \alpha) v^t c_r \leq 1 + (1 - \alpha) e, \\
& && u^t y_k + (1 - \alpha) u^t d_k \leq v^t x_k + (1 - \alpha) v^t c_k, \\
& && u^t y_k - (1 - \alpha) u^t d_k \leq v^t x_k - (1 - \alpha) v^t c_k \quad (k = 1, \dots, n), \\
& && u \geq 0, v \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Definição 3.1.2. A eficiência fuzzy da DMU r , avaliada com os vetores de input fuzzy e output fuzzy triangulares simétricos $\tilde{X}_r = (x_r, c_r)$ e $\tilde{Y}_r = (y_r, d_r)$, respectivamente, é definida como um número fuzzy triangular não simétrico $\tilde{E}_r(w_l, \eta, w_r)$ dada por:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{u^{*t} y_r}{v^{*t} x_r}, \\
w_l &= \eta - \frac{u^{*t} y_r - d_r (1 - \alpha)}{v^{*t} x_r + c_r (1 - \alpha)}, \\
w_r &= \frac{u^{*t} y_r + d_r (1 - \alpha)}{v^{*t} x_r - c_r (1 - \alpha)} - \eta,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

sendo que v^* e u^* são os vetores de coeficientes obtidos de (3.9) e w_l , w_r e η são, respectivamente, os espalhamentos a esquerda, direita e o centro da eficiência fuzzy \tilde{E}_r . Dado que há incerteza nos valores de *input* e *output* de uma DMU, por serem números fuzzy, essa incerteza é transferida para o valor da eficiência avaliada.

Definição 3.1.3. A DMU com $\eta + w_r \geq 1$ para o nível de possibilidade α é dita DMU eficiente D α -possibilística - α -possibilistic D efficient DMU (PD DMU). Caso contrário, a DMU com $\eta + w_r \leq 1$ para um nível de possibilidade α é dita DMU ineficiente D α -possibilística - α -possibilistic D inefficient DMU (PDI DMU). O conjunto de todas as PD DMU é chamado de conjunto não dominado α -possibilístico e denotado por S_α .

Para $\alpha = 1$ os conjuntos de PD DMU e PDI DMU são dados, respectivamente, pelas convencionais DMUs eficientes e DMUs ineficientes do modelo CCR clássico.

Teorema 3.1.3. O centro da eficiência fuzzy de qualquer DMU obtida de (3.9) não é maior que 1.

Demonstração. Sejam u^r e v^r obtidos de (3.9) para uma DMU r do conjunto analisado. Logo, são válidas as seguintes desigualdades:

$$u^{rt}y_k + (1 - \alpha)u^{rt}d_k \leq v^{rt}x_k + (1 - \alpha)v^{rt}c_k \quad (3.11)$$

$$u^{rt}y_k - (1 - \alpha)u^{rt}d_k \leq v^{rt}x_k - (1 - \alpha)v^{rt}c_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

Pela soma de (3.11) e (3.12) obtêm-se a seguinte desigualdade:

$$u^{rt}y_k \leq v^{rt}x_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.13)$$

Portanto,

$$\eta = \frac{u^{rt}y_k}{v^{rt}x_k} \leq 1 \quad (3.14)$$

□

Pela equação (3.14) verifica-se que a avaliação das eficiências *fuzzy* das DMUs pelo modelo (3.9) é similar ao modelo CCR clássico.

Conforme um exemplo adaptado de Guo e Tanaka (2001) apresentados na Tabela 1, com DMUs de único *input* e único *output*, representadas por um número difuso triangular, será aplicado o método de FDEA, usando o modelo (3.7) para encontrar as medidas de eficiência *fuzzy*.

Tabela 1 – DMUs com um único *input fuzzy* e um único *output fuzzy*.

DMU	A	B	C	D	E
<i>Input</i>	(2,0; 0,5)	(3,0; 0,5)	(3,0; 0,6)	(5,0; 1,0)	(5,0; 0,5)
<i>Output</i>	(1,0; 0,3)	(3,0; 0,7)	(2,0; 0,4)	(4,0; 1,0)	(2,0; 0,2)

Fonte: Guo e Tanaka (2001)

Os resultados obtidos, conforme os dados da Tabela 1 ao aplicar o método de FDEA do modelo (3.7) para diferentes valores de nível α , podem ser observados na Tabela 2.

Tabela 2 – Eficiências *fuzzy* de DMUs com diferentes valores de α .

α	A	B	C	D	E
0	(0,21; 0,47; 0,35)	(0,32; 0,95; 0,45)	(0,21; 0,63; 0,32)	(0,28; 0,76; 0,43)	(0,07; 0,38; 0,08)
0,25	(0,17; 0,48; 0,24)	(0,26; 0,96; 0,33)	(0,17; 0,64; 0,23)	(0,22; 0,77; 0,30)	(0,05; 0,38; 0,06)
0,5	(0,12; 0,49; 0,15)	(0,18; 0,97; 0,21)	(0,12; 0,65; 0,14)	(0,16; 0,78; 0,19)	(0,04; 0,39; 0,04)
0,75	(0,06; 0,49; 0,07)	(0,09; 0,98; 0,10)	(0,06; 0,66; 0,07)	(0,08; 0,79; 0,09)	(0,02; 0,39; 0,02)
1	(0,00; 0,50; 0,00)	(0,00; 1,00; 0,00)	(0,00; 0,67; 0,00)	(0,00; 0,80; 0,00)	(0,00; 0,40; 0,00)

Fonte: Autora

Conforme as DMUs analisadas, $e = \max_{i=1, \dots, 5} (c_i/x_i) = 0.25$. De acordo com a Tabela 2 é possível verificar que, à medida que o valor de α aumenta, o centro da eficiência *fuzzy* torna-se

maior e o espalhamento da eficiência *fuzzy* torna-se menor. No caso de $\alpha = 1$, as eficiências *fuzzy* das DMUs tornam-se valores clássicos, iguais aos obtidos do modelo CCR clássico.

Segundo as medidas de eficiência *fuzzy* das DMUs (A, B, C, D, E) é possível efetuar uma classificação. Seja $\theta = \eta + w_r$, ou seja, a soma da medida central com a medida do espalhamento a esquerda, da eficiência *fuzzy* de uma DMU. Os valores de θ para as DMUs do conjunto, conforme a Tabela 2, podem ser observados na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores de θ com diferentes valores de α .

α	θ				
	A	B	C	D	E
0	0,82	1,4	0,95	1,19	0,46
0,25	0,72	0,72	0,87	1,07	0,44
0,5	0,64	1,18	0,79	0,97	0,43
0,75	0,56	1,08	0,73	0,88	0,41
1	0,5	1	0,67	0,8	0,4

Fonte: Autora

De acordo com a Tabela 3, têm-se que $S_1 = S_{0.75} = S_{0.5} = B$ e $S_0 = B, D$. Isso significa que há mais oportunidades para as PD DMUs neste exemplo quando o valor de α diminui. Pode ser visto a partir da simulação resultante que a imprecisão inerente dos dados de entrada e saída foi refletida por eficiências *fuzzy*.

Dado um nível de pertinência α observa-se que para um nível alto de α -corte implica considerar uma faixa relativamente estreita de *input* e *output* em que todos os dados tem valores altos de pertinência. Por outro lado, para um nível baixo de α -corte implica analisar dados de *input* e *output* em uma faixa relativamente ampla.

3.1.2 Abordagem por nível α

Na abordagem baseada em nível α , ou α -corte, um das formas de aplicação pode ser dada através da transformação de um modelo de FDEA em uma família de modelos de DEA clássicos. Assim, são formulados dois problemas lineares paramétricos para descrever essa família de modelos e com base neles são derivadas as funções de pertinência das medidas de eficiência. Para um aprofundamento na abordagem de nível α , os estudos de alguns pesquisadores foram usados como base (KAO E LIU (2000), KAO E LIU (2011) e HATAMI-MARBINI *et al.* (2011)).

Para um conjunto de DMUs com *inputs* \tilde{X}_{ik} e \tilde{Y}_{jk} aproximadamente conhecidas e possam ser representadas, respectivamente, por conjuntos *fuzzy* com funções de pertinência $\mu_{\tilde{X}_{ik}}$ e $\mu_{\tilde{Y}_{jk}}$. Uma formulação para o modelo de FDEA, em reflexo ao modelo BCC, pode ser observada em (3.15).

$$\begin{aligned}
\max E_r = & \quad \sum_{j=1}^s u_j \tilde{Y}_{jr} + c_0 \\
s.a : & \quad \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ir} = 1 \\
& \quad \sum_{j=1}^s u_j \tilde{Y}_{jk} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ik} + c_0 \leq 0, \quad k = 1, \dots, n \\
& \quad u_j \geq 0, v_i \geq 0 \quad \forall j, i \\
& \quad c_0 \text{ livre}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Seja, $S(\tilde{X}_{ik})$ e $S(\tilde{Y}_{jk})$ os cenários de \tilde{X}_{ik} e de \tilde{Y}_{jk} , seus níveis α podem ser, então, definidos como:

$$(X_{ik})_\alpha = \left\{ x \in S(\tilde{X}_{ik}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ik}}(x) \geq \alpha \right\} \tag{3.16}$$

$$(Y_{jk})_\alpha = \left\{ y \in S(\tilde{Y}_{jk}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{jk}}(y) \geq \alpha \right\} \tag{3.17}$$

Como $(X_{ik})_\alpha$ e $(Y_{jk})_\alpha$ são conjuntos clássicos, fazendo uso dos níveis α , o modelo de FDEA é transformado em uma família de modelos determinísticos para diferentes níveis de α , para $\alpha \in (0, 1]$. No momento que um nível de corte α é aplicado em um número difuso(*fuzzy*), obtêm-se um intervalo clássico, como observado no Apêndice A. Então, as equações (3.16) e (3.17) são conjuntos clássicos, e podem ser expressos da seguinte forma,

$$(X_{ik})_\alpha = \left[\min_x \left\{ x \in S(\tilde{X}_{ik}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ik}}(x) \geq \alpha \right\}, \max_x \left\{ x \in S(\tilde{X}_{ik}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ik}}(x) \geq \alpha \right\} \right] \tag{3.18}$$

$$(Y_{jk})_\alpha = \left[\min_y \left\{ y \in S(\tilde{Y}_{jk}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{jk}}(y) \geq \alpha \right\}, \max_y \left\{ y \in S(\tilde{Y}_{jk}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{jk}}(y) \geq \alpha \right\} \right] \tag{3.19}$$

Com base no princípio da extensão de Zadeh, a função de pertinência da eficiência da DMU r , pode ser definida por:

$$\mu_{E_r}(z) = \sup \min_{x,y} = \left\{ \mu_{\tilde{X}_{ik}}(x), \mu_{\tilde{Y}_{jk}}(y) \mid z = E_r(x, y) \right\}, \tag{3.20}$$

sendo que $E_r(x, y)$ representa a medida de eficiência para um modelo BCC clássico de uma DMU em análise. Será utilizada a abordagem baseada em nível α para a construção da função de pertinência da r -ésima DMU, dada por $\mu_{\tilde{E}_r}$. De acordo com equação (3.20), $\mu_{\tilde{E}_r}$ é o mínimo de $\mu_{\tilde{X}_{ik}}(x)$ e $\mu_{\tilde{Y}_{jk}}(y)$, $\forall i, j, k$. Para satisfazer $\mu_{\tilde{E}_r}(z) = \alpha$, tal que $z = E_r$, é preciso que $\mu_{\tilde{X}_{ik}}(x) \geq \alpha$, $\mu_{\tilde{Y}_{jk}}(y) \geq \alpha$ e pelo menos $\mu_{\tilde{Y}_{jk}}(y) = \alpha$ ou $\mu_{\tilde{X}_{ik}}(x) = \alpha$.

De acordo com Kao e Liu (2000), para encontrar a função de pertinência $\mu_{\tilde{E}_r}$ basta encontrar os limites inferiores e superiores dos níveis α de $\mu_{\tilde{E}_r}$, que podem ser resolvidos, respectivamente, pelos modelos (3.21) e (3.22).

$$\begin{aligned} (E_r)_\alpha^L &= \min E_r(x, y) \\ \text{s.a : } & (X_{ik})_\alpha^L \leq x_{ik} \leq (X_{ik})_\alpha^U \\ & (Y_{jk})_\alpha^L \leq y_{jk} \leq (Y_{jk})_\alpha^U \quad (\forall i, j, k) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} (E_r)_\alpha^U &= \max E_r(x, y) \\ \text{s.a : } & (X_{ik})_\alpha^L \leq x_{ik} \leq (X_{ik})_\alpha^U \\ & (Y_{jk})_\alpha^L \leq y_{jk} \leq (Y_{jk})_\alpha^U \quad (\forall i, j, k) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Uma forma de encontrar a menor eficiência relativa, ou seja, um cenário pessimista, de uma DMU frente às demais, seria comparando o limite inferior de seus *outputs* e superior de seus *inputs* com os limites inferiores dos *inputs* e superiores dos *outputs* das demais DMUs. Caso contrário, para encontrar a maior eficiência relativa, ou seja, o cenário otimista, de uma DMU, compara-se o limite superior de seus *outputs* e inferior de seus *inputs* com os limites superiores dos *inputs* e inferiores dos *outputs* das demais DMUs. Logo, os cenários pessimista e otimista, ao incorporar essa análise, podem ser reformulados para os modelos (3.23) e (3.24), respectivamente.

$$\begin{aligned} (E_r)_\alpha^L &= \max \sum_{j=1}^s u_j (Y_{jr})_\alpha^L + c_0 \\ \text{s.a : } & \sum_{i=1}^m v_i (X_{ir})_\alpha^U = 1, \\ & \sum_{j=1}^s u_j (Y_{jr})_\alpha^L - \sum_{i=1}^m v_i (X_{ir})_\alpha^U + c_0 \leq 0, \\ & \sum_{j=1}^s u_j (Y_{jk})_\alpha^U - \sum_{i=1}^m v_i (X_{ik})_\alpha^L + c_0 \leq 0, \quad \forall k, k \neq r \\ & u_j \geq 0, v_i \geq 0 \quad \forall j, i \\ & c_0 \text{ livre} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
(E_r)_\alpha^U = & \quad \max \sum_{j=1}^s u_j (Y_{jr})_\alpha^U + c_0 \\
s.a : & \quad \sum_{i=1}^m v_i (X_{ir})_\alpha^L = 1, \\
& \quad \sum_{j=1}^s u_j (Y_{jr})_\alpha^U - \sum_{i=1}^m v_i (X_{ir})_\alpha^L + c_0 \leq 0, \\
& \quad \sum_{j=1}^s u_j (Y_{jk})_\alpha^L - \sum_{i=1}^m v_i (X_{ik})_\alpha^U + c_0 \leq 0, \quad \forall k, k \neq r \\
& \quad u_j \geq 0, v_i \geq 0 \quad \forall j, i \\
& \quad c_0 \text{ livre}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Esses modelos matemáticos envolvem o estudo sistemático de como as soluções ideais mudam conforme $(X_{ik})_\alpha^L$, $(X_{ik})_\alpha^U$, $(Y_{jk})_\alpha^L$ e $(Y_{jk})_\alpha^U$ variam ao longo do nível $\alpha \in (0, 1]$. Se ambos $(E_r)_\alpha^L$ e $(E_r)_\alpha^U$ forem invertíveis em relação a α , então as funções de contorno esquerdo $L(z) = [(E_r)_\alpha^L]^{-1}$ e contorno direito $R(z) = [(E_r)_\alpha^U]^{-1}$ podem ser encontradas e, a partir delas, a função de pertinência $\mu_{\tilde{E}_r}$ pode ser moldada:

$$\mu_{\tilde{E}_r}(z) = \begin{cases} L(z), & \text{se } z_1 \leq z \leq z_2 \\ 1, & \text{se } z_2 \leq z \leq z_3 \\ R(z), & \text{se } z_3 \leq z \leq z_4 \end{cases} \tag{3.25}$$

Caso não sejam invertíveis, o conjunto de intervalos $[(E_r)_\alpha^L, (E_r)_\alpha^U]$, com $\alpha \in (0, 1]$, ainda tem a forma de $\mu_{\tilde{E}_r}$, embora sua função analítica não seja conhecida explicitamente.

Ao aplicar a abordagem de nível α a faixa de pontuação de eficiência de DMUs em diferentes níveis de possibilidade podem ser obtidos. Após calculadas todas as pontuações de eficiência, as DMUs podem ser ordenadas, ou classificadas.

4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E RESULTADOS

Neste capítulo serão feitas aplicações numéricas dos modelos de DEA clássico e de FDEA. A base de aplicação será dada pela análise de eficiência de portos da Região Nordeste do Brasil, em relação a estrutura. A aplicação será feita para os anos de 2006 e, para fins de comparação, 2016.

4.1 Análise de Eficiência de Portos da Região Nordeste do Brasil

Consideradas as diversas características do mundo globalizado, a prática que prioriza a agilidade nas conexões que transportam bens ou serviços, tangíveis e/ou intangíveis torna-se vital. Os portos são elementos cruciais para a interligação com outras nações, sendo ferramentas indispensáveis para o desenvolvimento do comércio em geral, dado que movimentam grande quantidade de cargas por viagem.

O Brasil apresenta características que o destacam no setor marítimo por possuir em torno de 7.408 km de fronteira com o Oceano Atlântico (principal porta de entrada e saída de cargas para o mundo), o modal marítimo brasileiro representa a maior quantidade de carga escoada do país para o exterior (JUNIOR *et al.*, 2009). A análise de eficiência da região Nordeste do Brasil é essencial para o desenvolvimento da Região. Portanto, as ineficiências apresentadas no setor portuário podem vir a tornar-se um impedimento para o desenvolvimento do Nordeste brasileiro. Para analisar as eficiências dos principais portos do Nordeste será feito uso dos métodos de DEA clássicos e de FDEA.

O conjunto de DMUs utilizados em uma análise DEA deve ter em comum a utilização dos mesmos *inputs* e *outputs*, ser homogêneo e ter autonomia na tomada de decisões. Além disso, conforme (BANKER *et al.*, 1984), a soma das variáveis (*inputs* e *outputs*) deve ser menor ou igual ao número de DMUs dividido por 3. Logo, é preciso satisfazer a seguinte inequação:

$$INPUTS + OUTPUTS \leq \frac{nDMU}{3} \quad (4.1)$$

A utilização dos métodos de DEA clássicos, para analisar e avaliar os portos, é devido a possibilidade de comparação das eficiências do conjunto de unidades contidas no mesmo setor de atividades. De modo análogo, é feita a utilização do método de FDEA, que possibilita o uso de dados incertos para *inputs* e *outputs*.

A seguir será analisada a eficiência dos portos da Região Nordeste do Brasil através dos métodos de DEA clássicos orientados a *input* e através dos métodos de FDEA, método com abordagens de classificação *fuzzy* e método com abordagem em nível α . A base de dados para os métodos clássicos será a mesma. Porém, com diferentes perspectivas, uma vez que o método CCR resulta na análise de eficiência resultante da proporção de *inputs* e *outputs* e o método BCC permite a análise de eficiência com retornos de escala variáveis.

Similarmente, será avaliado o comportamento dos métodos de FDEA, no qual a base de dados para a aplicação dos modelos será dado por variáveis clássicas e *fuzzy*, de modo que, os números *fuzzy* serão formulados conforme os dados utilizados para aplicação do método clássico.

4.1.1 Eficiência dos Portos da região Nordeste usando métodos de DEA clássicos

O uso das variáveis e DMUs a seguir já foram aplicadas em outro estudo por (JUNIOR *et al.*, 2009) a fim de mensurar a eficiência, dada a infra-estrutura, dos portos da região nordeste. A utilização da escolha desses *inputs* se deu devido ao fato de que o tamanho do berço e o calado máximo admissível são variáveis que definem as características dos navios que o porto pode receber. Já o *output* adotado é pelo fato de que um dos principais produtos gerados no porto é sua movimentação.

Tabela 4 – Portos da região Nordeste que operam carga geral (2006).

Portos	<i>Inputs</i>		<i>Output</i>
	Berço(m)	Calado(m)	Quantidade(t)
Fortaleza	426,0	7,0	38.113
Suape	386,0	13,4	116.007
Natal	340,0	10,0	116.569
Itaqui	710,4	11,5	228.960
Cabedelo	110,0	9,4	65.201
Pecém	700,0	15,0	351.965
Salvador	1.243,6	10,0	317.668
Maceió	400,0	10,5	243.558
Recife	944,7	9,6	282.795

Fonte: (JUNIOR *et al.*, 2009)

A análise de eficiência, dados os *inputs* e *outputs* utilizados, diz respeito à infra-estrutura, se pode ser movimentada uma maior quantidade de carga com o mesmo nível de berço e de calado ou se é necessário ampliar a infra-estrutura para ampliar a capacidade.

Tabela 5 – Portos da região Nordeste que operam carga geral(2016).

Portos	<i>Inputs</i>		<i>Output</i>
	Berço(m)	Calado(m)	Quantidade(t)
Fortaleza	1.586,0	10,8	64.465
Suape	3.195,0	14,5	251.952
Natal	567,0	11,5	2.334
Itaqui	1.796,0	18,5	1.489.207
Cabedelo	602,0	9,14	850
Pecém	1.800,0	15,5	1.203.349
Salvador	2.023,0	13,9	260.479
Maceió	1.794,0	10,5	20.555
Recife	1.826,1	10,7	420.123

Fonte: (ANTAQ, 2016)

Conforme a tabela 4, a movimentação de carga geral no Nordeste é realizada por nove portos. Aplicando a inequação 4.1 a soma do número de *inputs* mais o número de *outputs* deve ser no máximo 3. Foram selecionados dois *inputs* (tamanho do berço e calado máximo admissível, ambos em metros) e um *output* (quantidade de carga geral movimentada (em toneladas)). Logo, a inequação é satisfeita. De modo análogo, para fins comparativos, as mesmas análises serão feitas para o ano de 2016, que está descrita na tabela 5.

4.1.1.1 CCR

Na Tabela 6 é dada a eficiência dos portos obtida pela aplicação do método CCR, usando multiplicadores. No qual, pode ser observado que três portos, dos nove analisados, operam de modo eficiente, com 100% de eficiência, em relação aos demais, foram eles os portos de Salvador, Maceió e Recife. Os portos de Itaqui, Cabedelo e Pecém apresentaram eficiência superior a 70%. Já o Porto de Fortaleza apresentou a menor eficiência, 21,3%. Podendo ser reflexo, principalmente, do menor calado e da menor quantidade de carga movimentada, em relação aos demais portos em análise.

Os valores na Tabela 6 mostram o que é necessário para trazer cada porto para a fronteira eficiente. Por exemplo, o valor da eficiência de Fortaleza é dada por $E_{\text{Fortaleza}} = 21,30\%$. Ou seja, as medidas de *input* ótimas, fixando o valor de *output*, para que o porto de Fortaleza fosse classificado como eficiente são dadas a seguir:

$$\text{Berço(m)}_{\text{Fortaleza}}^* = 21,30\% \times 426 = 90,738 (\text{reduzido } 78,7\%)$$

$$\text{Calado(m)}_{\text{Fortaleza}}^* = 21,30\% \times 7,0 = 1,491 (\text{reduzido } 78,7\%)$$

Tabela 6 – Eficiência relativa dos portos que operaram carga geral da Região Nordeste (método CCR), no ano de 2006

Portos	<i>Inputs</i>		<i>Output</i>	Eficiência Comparativa
	Berço(m)	Calado(m)	Quantidade(t)	
Fortaleza	426	7,0	38.113	21,30%
Suape	386	13,4	116.007	49,36%
Natal	340	10,0	116.569	56,31%
Itaqui	710,4	11,5	228.960	77,61%
Cabedelo	110	9,4	65.201	97,35%
Pecém	700	15,0	351.965	97,42%
Salvador	1.243,6	10,0	317.668	100,00%
Maceió	400	10,5	243.558	100,00%
Recife	944,7	9,6	282.795	100,00%

Fonte: (JUNIOR *et al.*, 2009)

Os *benchmarks*, com a aplicação do método CCR, são obtidos pelos valores de λ não nulos do modelo (2.4), conforme os dados da Tabela 4. Caso a DMU analisada opere de modo eficiente, ela tem $\lambda = 1$ referente a ela mesma e $\lambda = 0$ para as demais. No caso em que a DMU opere de modo ineficiente, pode incorrer de ter um, ou mais, λ não nulo que representa a DMU eficiente que serve de referencia para que a DMU ineficiente, em questão, atinja a fronteira eficiente.

Os *benchmarks* para o modelo adotado de carga geral, podem ser observados na Tabela 7. O porto de Salvador, apesar de ser eficiente, não serve de parâmetro para os demais portos da região Nordeste. Isso se deve, provavelmente, ao fato de que o porto de Salvador possui características operacionais bastante distintas dos demais portos nordestinos que operam carga geral (JUNIOR *et al.*, 2009).

Tabela 7 – *Benchmarks* dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método CCR), no ano de 2006

Portos	<i>Benchmarks</i>	
	Maceió	Recife
Fortaleza	0,08845	0,0586
Suape	0,4763	0
Natal	0,47861	0
Itaqui	0,51703	0,3649
Cabedelo	0,2677	0
Pecém	1,19404	0,21622

Fonte: (JUNIOR *et al.*, 2009)

O porto de Maceió serve de referência para que os portos de Suape, Natal e Cabedelo alcancem a fronteira de eficiência. Já para Pecém, Fortaleza e Itaqui, tanto Maceió como Recife podem ser tomados como parâmetro.

Utilizando como exemplo o porto de Fortaleza, para entender como a análise de *benchmark* para um dos portos é feita, verifica-se que os λ s não nulos $\lambda_M = 0,08845$ e $\lambda_R = 0,0586$ mostram as proporções contribuídas, respectivamente, pelos portos de Maceió e Recife para avaliar a eficiência do porto de Fortaleza. Com base neles, podemos expressar os valores de *input* necessários para colocar o porto de Fortaleza na fronteira eficiente, através da Equação (4.2), conforme Cooper e Seiford (2000).

$$E_{\text{Fortaleza}}^x(\text{input de Fortaleza}) = \lambda_M x(\text{input de Maceió}) + \lambda_R x(\text{input de Recife}) \quad (4.2)$$

- Berço(m)

$$0,213 \times 426 = 0,08845 \times 400 + 0,0586 \times 944,7$$

- Calado(m)

$$0,213 \times 7,0 = 0,0884 \times 10,5 + 0,0586 \times 9,6$$

Para a medida do Berço(m) $_{\text{Fortaleza}}^*$ o porto de Maceió apresenta uma maior amplitude para que o *input* Berço (m) atinja um valor ótimo. Já para a medida de Calado(m) $_{\text{Fortaleza}}^*$, o porto de Recife apresenta maior amplitude, ou seja, tem uma maior influência na medida ótima do *input* Calado (m). Logo, conforme os valores de $\lambda_M = 0,08845$ e $\lambda_R = 0,0586$, os portos de Maceió e Recife servem de parâmetro para que o porto de Fortaleza atinja a fronteira de eficiência.

Similarmente, a mesma análise foi feita para o ano de 2016. Os dados podem ser observados na Tabela 8. Verifica-se que apenas o porto de Itaqui apresenta eficiência 100%, ou seja, é o único porto que opera de modo eficiente, em relação aos demais. O porto do Pecém continuou operando com eficiência superior a 70%. Os demais portos, inclusive os portos de Maceió, Salvador e Recife, antes eficientes, operam com eficiência inferior a 50%.

O porto de Cabedelo, com eficiência superior a 70% em 2006, apresentou a menor eficiência com 0,17%. Tal nível de eficiência se deve, possivelmente, ao fato de ter o menor calado e a menor quantidade de carga movimentada, em relação aos demais portos em análise.

Tabela 8 – Eficiência relativa dos portos que operaram carga geral da Região Nordeste (método CCR), no ano de 2016

Portos	<i>Inputs</i>		<i>Output</i>	Eficiência Comparativa
	Berço(m)	Calado(m)	Quantidade(t)	
Fortaleza	1.586	10,8	64.465	7,42%
Suape	3.195	14,5	251.952	21,59%
Natal	567	11,5	2.334	0,50%
Itaqui	1.796	18,5	1.489.207	100,00%
Cabedelo	602	9,14	850	0,17%
Pecém	1.800	15,5	1.203.349	96,44%
Salvador	2.023	13,9	260.479	23,28%
Maceió	1.794	10,5	20.555	2,43%
Recife	1.826,1	10,7	420.123	48,78%

Fonte: Autora

O porto de Fortaleza, mesmo não sendo a menor eficiência do conjunto, teve uma medida de eficiência baixa com 7,42%, inferior a do ano de 2006.

Tabela 9 – *Benchmark* dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método CCR), no ano de 2016

Portos	<i>Benchmark</i>
	Itaqui
Fortaleza	0,04329
Suape	0,16919
Natal	0,00157
Cabedelo	0,00057
Pecém	0,80805
Salvador	0,17491
Maceió	0,0138
Recife	0,28211

Fonte: Autora

Os *benchmarks* para as DMUs ineficientes, dado a Tabela 5, são os valores de λ não nulos ao aplicar o modelo (2.4). A Tabela 9 apresenta os resultados para a análise de *benchmarks*, do ano de 2016. No qual, é possível observar que, o porto de Itaqui além de eficiente serve de parâmetro para todos os demais portos alcançarem a fronteira de eficiência. Isso se deve, provavelmente, ao fato de que o porto de Itaqui possui características estruturais e/ou operacionais similares aos demais portos.

4.1.1.2 BCC

A análise de eficiência dos portos da Região Nordeste pelo do método BCC permite distinguir entre ineficiências técnica e de escala, estimando a eficiência técnica pura, dada as escala de operações, e identificando se estão presentes ganhos de escala constantes ou variáveis.

O modelo BCC permite identificar se o retorno de escala é constante (escala de produção não influi), crescente (aumento de escala garante aumento de produtividade) ou decrescente (aumento de escala provoca decréscimo na produtividade).

A mensuração das eficiências pelo modelo BCC, orientado a *input*, com base nos dados da Tabela 4, para o ano de 2006 pode ser observada na Tabela 10. No qual, seis dos portos que movimentam carga geral apresentam eficiência de 100%. Os portos do Pecém, Cabedelo e Fortaleza operam com eficiência total. Além deles, os portos de Salvador, Maceió e Recife, antes 100% eficientes pelo método CCR, permanecem eficientes com o método BCC. Verifica-se também que todos os portos do conjunto analisado operam com eficiência superior a 60%.

O porto de Fortaleza pelo método CCR, no mesmo ano, apresentou a menor medida de eficiência e pelo método BCC opera de modo eficiente. O que implica que o porto possui ineficiências de escala, ou seja, o aumento de escala, possivelmente, garante aumento da produtividade.

Tabela 10 – Eficiência relativa dos portos que operaram com movimentação de carga geral da Região Nordeste (método BCC), no ano de 2006.

Portos	<i>Inputs</i>		<i>Output</i>	Eficiência Comparativa
	Berço(m)	Calado(m)	Quantidade(t)	
Fortaleza	426	7,0	38.113	100,00%
Suape	386	13,4	116.007	69,06%
Natal	340	10,0	116.569	90,16%
Itaqui	710,4	11,5	228.960	84,26%
Cabedelo	110	9,4	65.201	100,00%
Pecém	700	15,0	351.965	100,00%
Salvador	1.243,6	10,0	317.668	100,00%
Maceió	400	10,5	243.558	100,00%
Recife	944,7	9,6	282.795	100,00%

Fonte: Autora

Os *benchmarks* para as DMUs ineficientes pela aplicação do método BCC, dado a Tabela 4, são os valores de λ não nulos ao aplicar o modelo (2.8).

Na análise de *benchmarks* para o método BCC constata-se que apesar dos portos de Salvador e Pecém serem eficientes, eles não servem de referência para os demais portos.

Devido, possivelmente, ao fato de operarem com características bastantes distintas dos demais portos que operam com movimentação de carga geral. Já os portos de Fortaleza e Maceió servem de parâmetros para todos os demais portos que não atingiram 100% de eficiência. O porto de Cabedelo é referência para os portos de Suape e Natal, enquanto Recife é referência para que o porto de Itaqui atinja a fronteira de eficiência, conforme ilustrado na Tabela 11.

Tabela 11 – *Benchmark* dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método BCC), no ano de 2006

Portos	<i>Benchmarks</i>			
	Fortaleza	Cabedelo	Maceió	Recife
Suape	0,2055	0,4785	0,3161	0
Natal	0,3139	0,3504	0,3357	0
Itaqui	0,1394	0	0,5027	0,3579

Fonte: Autora

Tabela 12 – Eficiência relativa dos portos que operaram com movimentação de carga geral da Região Nordeste (método BCC), no ano de 2016

Portos	<i>Inputs</i>		<i>Output</i>	Eficiência Comparativa
	Berço(m)	Calado(m)	Quantidade(t)	
Fortaleza	1.586,0	10,8	64.465	86,82%
Suape	3.195,0	14,5	251.952	69,48%
Natal	567,0	11,5	2.334	100,00%
Itaqui	1.796,0	18,5	1.489.207	100,00%
Cabedelo	602,0	9,14	850	100,00%
Pecém	1.800,0	15,5	1.203.349	100,00%
Salvador	2.023,0	13,9	260.479	72,71%
Maceió	1.794,0	10,5	20.555	87,75%
Recife	1.826,1	10,7	420.123	100,00%

Fonte: Autora

De modo análogo foram feitas as análises para o ano de 2016. Constata-se pela Tabela 12 que todos os portos da região nordeste continuaram a operar com eficiência superior a 60%. Entre eles, cinco portos, dos nove analisados, operaram com eficiência de 100%, foram eles os portos de Natal, Itaqui, Cabedelo, Recife e Pecém. Em contraste com as eficiências do método CCR para o mesmo ano, no qual apenas o porto de Itaqui operou de modo eficiente, em relação aos demais. Observa-se que apenas Cabedelo e Pecém permanecem operando de modo eficiente, baseado nas eficiências para o BCC no ano de 2006.

Tabela 13 – *Benchmarks* dos portos que movimentam carga geral da região Nordeste (método BCC), no ano de 2016

Portos	<i>Benchmarks</i>	
	Cabedelo	Recife
Fortaleza	0,848273	0,151727
Suape	0,401101	0,598899
Salvador	0,380764	0,619236
Maceió	0,953002	0,046998

Fonte: Autora

Conforme a Tabela 13 os portos de Cabedelo e Recife servem de parâmetro para que os portos de Fortaleza (*benchmark* em 2006 para os portos de Suape, Natal e Itaqui), Suape, Salvador e Maceió tornem-se eficientes. Os portos de Natal, Itaqui e Pecém mesmo operando de modo eficiente não se aplicam como referência para que os portos ineficientes atinjam a fronteira de eficiência.

Os resultados das medidas de eficiência e dos valores de λ não nulos, com as aplicações dos métodos de DEA clássicos, foram obtidos através da linguagem de programação R((R CORE TEAM, 2019)), utilizando o pacote *Benchmarking*, conforme Bogetoft e Otto (2018).

4.1.2 Eficiência dos Portos da região Nordeste usando métodos de FDEA

A FDEA avalia a eficiência de cada DMU, possibilitando o uso de dados incertos para *inputs* e *outputs*, em relação a um conjunto de possibilidades de produção, determinada por todas as DMUs. Dado as aplicações anteriores para os métodos de DEA clássicos verificou-se que os valores de *inputs* e *outputs* clássicos tem uma forte influência nos resultados obtidos. Para o estudo, a fim de verificar o comportamento das eficiências das DMUs ao ocorrerem perturbações nos dados de seus *inputs* e *outputs* clássicos, serão utilizadas *inputs* e *outputs fuzzy* triangulares simétricas, no qual os centros serão os próprios valores clássicos dos *inputs* e *outputs* das DMUs e o espalhamento será dado por 10% do valor dos respectivos centros. Optou-se por um baixo valor de espalhamento uma vez que medidas muito dispersas dos valores clássicos podem retornar análises altamente discrepantes em relação aos casos reais.

Para as análises de eficiências dos portos nordestinos que operam com movimentação de carga geral, o *inputs* e *outputs* que foram transformados em variáveis *fuzzy* foram, respectivamente, o berço(em metros) e quantidade (em toneladas) movimentada. Para a medida do calado (em metros), referente à profundidade a que se encontra o ponto mais baixo da quilha de uma embarcação, optou-se por permanecer como variável clássica. Uma vez que levam-se anos, mesmo com a aplicação de métodos de dragagens, para que haja um pequeno aumento da profundidade das vias de acesso aos portos.

Conforme as transformações do *inputs* e *outputs* feitas para os anos de 2006, dados na Tabela 4, e 2016, dados na Tabela 5, obtêm-se respectivamente as Tabelas 14 e 15.

Tabela 14 – Portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, com medidas mistas (*fuzzy* e clássicas), no ano de 2006.

Portos	Inputs		Output
	Berço(m)	Calado(m)	Quantidade(t)
Fortaleza	(426,0; 42,60)	7,0	(38.113; 3.811,3)
Suape	(386,0; 38,60)	13,4	(116.007; 11.600,7)
Natal	(340,0; 34,00)	10,0	(116.569; 11.656,9)
Itaqui	(710,4; 71,04)	11,5	(228.960; 22.896,0)
Cabedelo	(110,0; 11,00)	9,4	(65.201; 6.520,1)
Pecém	(700,0; 70,00)	15,0	(351.965; 35.196,5)
Salvador	(1.243,6; 124,36)	10,0	(317.668; 31.766,8)
Maceió	(400,0; 40,00)	10,5	(243.558; 24.355,8)
Recife	(944,7; 94,47)	9,6	(282.795; 28.279,5)

Fonte: Autora

Tabela 15 – Portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, com medidas mistas, no ano de 2016.

Portos	Inputs		Output
	Berço (m)	Calado(m)	Quantidade(t)
Fortaleza	(1.586; 158,6)	10,8	(64.465; 6.446,5)
Suape	(3.195; 319,5)	14,5	(251.952; 25.195,2)
Natal	(567; 56,7)	11,5	(2.334; 233,4)
Itaqui	(1.796; 179,6)	18,5	(1.489.207; 148.920,7)
Cabedelo	(602; 60,2)	9,14	(850; 85)
Pecém	(1.800; 180)	15,5	(1.203.349; 120.334,9)
Salvador	(2.023; 202,3)	13,9	(260.479; 26.047,9)
Maceió	(1.794; 179,4)	10,5	(20.555; 2.055,5)
Recife	(1.826,1; 182,6)	10,7	(420.123; 42.012,3)

Fonte: Autora

A fim de verificar o comportamento das medidas de eficiência, dadas as variações nas medidas de *inputs* e *outputs* clássicos, serão aplicados métodos de FDEA pois permitem as análises de eficiências de DMUs com variáveis *fuzzy*.

4.1.2.1 FDEA com abordagem de classificação *fuzzy*

Para mensuração das eficiências *fuzzy*, através de retornos constantes de escala, será utilizada a abordagem de classificação *fuzzy*, descrita na Seção 3.1.1. Assim, dado um nível de pertinência α permite-se encontrar as pontuações de eficiência *fuzzy* das DMUs e, com base nelas, efetuar uma possível classificação.

É fácil ver que, dado o espalhamento dos centros ser definido em 10% para a formulação dos números *fuzzy*, os valores para $e = \max_{k=1,\dots,9} (\max_{i=1,2} c_{ki}/x_{ki})$ será sempre igual a 0,1. As eficiências *fuzzy* para os portos analisados na Tabela 14, para diferentes valores de α , aplicando o modelo (3.9) para o ano de 2006, podem ser observados na Tabela 16.

As medidas de eficiências *fuzzy*, com a aplicação do método (3.9) utilizando os dados da Tabela 4 podem ser observadas na Tabela 14.

De acordo com as eficiências *fuzzy* das DMUs, é possível efetuar uma classificação. Seja $\theta = \eta + w_r$, ou seja, a soma da medida central com a medida do espalhamento a esquerda, da eficiência *fuzzy* de uma DMU. Os valores de θ para os portos do conjunto, conforme a Tabela 16, podem ser observados na Tabela 17.

Tabela 16 – Eficiências *fuzzy* dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.

Portos	Nível α				
	0	0,25	0,5	0,75	1
Fortaleza	(0,03; 0,15; 0,03)	(0,02; 0,15; 0,02)	(0,01; 0,15; 0,02)	(0,01; 0,15; 0,01)	(0,00; 0,21; 0,00)
Suape	(0,09; 0,49; 0,11)	(0,07; 0,49; 0,08)	(0,05; 0,49; 0,05)	(0,02; 0,49; 0,03)	(0,00; 0,49; 0,00)
Natal	(0,01; 0,56; 0,13)	(0,08; 0,56; 0,09)	(0,05; 0,56; 0,06)	(0,03; 0,56; 0,03)	(0,00; 0,56; 0,00)
Itaqui	(0,01; 0,53; 0,13)	(0,07; 0,53; 0,09)	(0,05; 0,53; 0,06)	(0,03; 0,53; 0,03)	(0,00; 0,78; 0,00)
Cabedelo	(0,18; 0,97; 0,22)	(0,14; 0,97; 0,16)	(0,09; 0,97; 0,10)	(0,05; 0,97; 0,05)	(0,00; 0,97; 0,00)
Pecém	(0,15; 0,83; 0,18)	(0,12; 0,83; 0,13)	(0,08; 0,83; 0,09)	(0,04; 0,83; 0,04)	(0,00; 0,97; 0,00)
Salvador	(0,08; 0,42; 0,09)	(0,06; 0,42; 0,07)	(0,04; 0,42; 0,04)	(0,02; 0,42; 0,02)	(0,00; 1,00; 0,00)
Maceió	(0,18; 1,00; 0,22)	(0,14; 1,00; 0,16)	(0,10; 1,00; 0,11)	(0,05; 1,00; 0,05)	(0,00; 1,00; 0,00)
Recife	(0,09; 0,49; 0,11)	(0,07; 0,49; 0,08)	(0,05; 0,49; 0,05)	(0,02; 0,49; 0,03)	(0,00; 1,00; 0,00)

Fonte: Autora

Tabela 17 – Valores de θ para diferentes valores de α , dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.

Portos	$\theta \backslash \alpha$				
	0	0,25	0,5	0,75	1
Fortaleza	0,18	0,17	0,17	0,16	0,21
Suape	0,6	0,57	0,54	0,52	0,49
Natal	0,69	0,65	0,62	0,59	0,56
Itaqui	0,66	0,62	0,59	0,56	0,78
Cabedelo	1,19	1,13	1,07	1,02	0,97
Pecém	1,01	0,96	0,92	0,87	0,97
Salvador	0,51	0,49	0,46	0,44	1
Maceió	1,22	1,16	1,11	1,05	1
Recife	0,6	0,57	0,54	0,52	1

Fonte: Autora

Com a aplicação da abordagem de classificação *fuzzy*, dados os valores de θ da Tabela 17, obtêm-se os seguintes resultados: $S_0 =$ Maceió, Pecém e Cabedelo; $S_{0,25} = S_{0,5} = S_{0,75} =$ Cabedelo e Maceió; $S_1 =$ Salvador, Recife e Maceió.

Os portos classificados como eficientes para o método CCR clássico continuam classificados como eficientes para o nível $\alpha = 1$. O porto de Maceió, além de eficiente e servir de *benchmark* para outros portos com a aplicação do método CCR no mesmo ano, é classificado como eficiente para todos os níveis abordados. Já o porto de Recife, também eficiente e *benchmark* com a aplicação do método CCR clássico, observa-se que para um $\alpha < 0,75$ já deixa de ser classificado como PD DMU, ou seja, DMU eficiente.

Similarmente, a mesma análise foi feita para o ano de 2016, de acordo com os dados da Tabela 15. As medidas de eficiência *fuzzy* dos portos analisados podem ser observados na Tabela 18.

Tabela 18 – Eficiências fuzzy dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.

Portos	Nível α				
	0	0,25	0,5	0,75	1
Fortaleza	(0,01; 0,05; 0,01)	(0,01; 0,05; 0,01)	(0,00; 0,05; 0,01)	(0,00; 0,05; 0,00)	(0,00; 0,07; 0,00)
Suape	(0,02; 0,10; 0,02)	(0,01; 0,10; 0,02)	(0,01; 0,10; 0,01)	(0,00; 0,10; 0,00)	(0,00; 0,22; 0,00)
Natal	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)
Itaqui	(0,18; 1,00; 0,22)	(0,14; 1,00; 0,16)	(0,10; 1,00; 0,11)	(0,05; 1,00; 0,05)	(0,00; 1,00; 0,00)
Cabedelo	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)	(0,00; 0,00; 0,00)
Pecém	(0,15; 0,81; 0,18)	(0,11; 0,81; 0,11)	(0,18; 0,81; 0,08)	(0,04; 0,81; 0,04)	(0,04; 0,96; 0,00)
Salvador	(0,03; 0,16; 0,03)	(0,02; 0,16; 0,03)	(0,01; 0,16; 0,02)	(0,01; 0,16; 0,01)	(0,00; 0,23; 0,00)
Maceió	(0,00; 0,01; 0,00)	(0,00; 0,01; 0,00)	(0,00; 0,01; 0,00)	(0,00; 0,01; 0,00)	(0,00; 0,02; 0,00)
Recife	(0,05; 0,28; 0,06)	(0,04; 0,28; 0,04)	(0,04; 0,28; 0,03)	(0,01; 0,28; 0,01)	(0,00; 0,49; 0,00)

Fonte: Autora

Tabela 19 – Valores de θ para diferentes valores de α , dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.

Portos	$\theta^* \setminus \alpha$				
	0	0,25	0,5	0,75	1
Fortaleza	0,06	0,06	0,06	0,05	0,07
Suaape	0,12	0,12	0,11	0,10	0,22
Natal	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Itaqui	1,22	1,16	1,11	1,05	1,00
Cabedelo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Pecém	0,99	0,92	0,89	0,85	0,96
Salvador	0,19	0,19	0,18	0,17	0,23
Maceió	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02
Recife	0,34	0,32	0,31	0,29	0,49

Fonte: Autora

Segundo os valores de θ da Tabela 19, a classificação de eficiência dos portos da região Nordeste que movimentam carga geral, para os níveis α abordados, é dada por $S_0 = S_{0.25} = S_{0.75} = S_1 = \text{Itaqui}$. O porto de Itaqui é classificado como PD DMU para todos os níveis α observados. Similar aos resultados da aplicação do método CCR clássico para o mesmo ano. No qual, o mesmo porto além de único eficiente serviu de *benchmark* para os demais. Dos portos ineficientes apenas o porto do Pecém ficou mais próximo de ser classificado como PD DMU, com $\alpha = 0$ obteve medida classificatória igual 0,99 (sendo 1 necessária para a classificação).

4.1.2.2 FDEA com abordagem em nível α

Na abordagem baseada em nível α , descrita na Seção 3.1.2, é possível mensurar a eficiência das DMUs, permitindo avalia-las através de retornos variáveis de escalas, pela resolução de dois programas lineares paramétricos. Esses dois programas representam os cenários pessimistas e otimistas do conjunto de níveis α das funções de pertinência das medidas de eficiência. Em um dado nível de pertinência α específico os cenários podem ser obtidos pela resolução dos modelos (3.23) e (3.24), que representam os cenários Pessimista e Otimista, respectivamente.

A faixa, ou valor clássico, conforme os *inputs* e *output* da Tabela 14, dado um nível de possibilidade α pode ser observada na Tabela 20.

Tabela 20 – Nível α para os *input* e *output* dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.

Portos	Nível α		
	Input		Output
	Berço (m)	Calado (m)	Quantidade(t)
Fortaleza	[383,4 + 42,6 α ; 468,6 - 42,0 α]	[7,0; 7,0]	[34.301,7 + 3.811,3 α ; 41.924,3 - 3.811,3 α]
Suape	[347,4 + 38,6 α ; 424,6 - 38,6 α]	[13,4; 13,4]	[104.406,3 + 11.600,7 α ; 127.607,7 - 11.600,7 α]
Natal	[306,0 + 34,0 α ; 374,0 - 34,0 α]	[10,0; 10,0]	[104.912,1 + 11.656,9 α ; 128.225,9 - 11.656,9 α]
Itaqui	[639,4 + 71,0 α ; 781,4 - 71,0 α]	[11,5; 11,5]	[206.064,0 + 22.896,0 α ; 251.856,0 - 22.896,0 α]
Cabedelo	[99,0 + 11,0 α ; 121,0 - 11,0 α]	[9,4; 9,4]	[58.680,9 + 6.520,1 α ; 71.721,1 - 6.520,1 α]
Pecém	[630,0 + 70,0 α ; 770,0 - 70,0 α]	[15,0; 15,0]	[316.768,5 + 35.196,5 α ; 387.161,5 - 35.196,5 α]
Salvador	[1.119,2 + 124,4 α ; 1.367,9 - 124,4 α]	[10,0; 10,0]	[285.901,2 + 31.766,8 α ; 349.434,8 - 31.766,8 α]
Maceió	[360,0 + 40,0 α ; 440,0 - 40,0 α]	[10,5; 10,5]	[219.202,2 + 34.355,8 α ; 267.913,8 - 34.355,8 α]
Recife	[850,0 + 94,5 α ; 1.039,2 - 94,5 α]	[9,6; 9,6]	[254.515,5 + 28.279,5 α ; 311.074,5 - 28.279,5 α]

Fonte: Autora

Tabela 21 – Cenários pessimistas e otimistas para portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2006.

Portos	níveis α				
	$[(E)_0^L, (E)_0^U]$	$[(E)_{0,25}^L, (E)_{0,25}^U]$	$[(E)_{0,5}^L, (E)_{0,5}^U]$	$[(E)_{0,75}^L, (E)_{0,75}^U]$	$[(E)_1^L, (E)_1^U]$
Fortaleza	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Suape	(0,65; 0,74)	(0,66; 0,73)	(0,67; 0,71)	(0,69; 0,69)	(0,69; 0,69)
Natal	(0,84; 0,97)	(0,86; 0,95)	(0,87; 0,93)	(0,90; 0,90)	(0,90; 0,90)
Itaqui	(0,77; 1,00)	(0,78; 0,94)	(0,80; 0,88)	(0,84; 0,84)	(0,84; 0,84)
Cabedelo	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Pecém	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Salvador	(0,94; 1,00)	(0,95; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Maceió	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Recife	(0,95; 1,00)	(0,96; 1,00)	(0,98; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)

Fonte: Autora

Os cenários pessimistas e otimistas para os portos da região Nordeste, dada a Tabela 20, para diferentes valores de α podem ser observados na Tabela 21. Verifica-se que para os portos de Fortaleza, Cabedelo, Pecém e Maceió em todos os níveis de possibilidade a eficiência é sempre igual a 1 para ambos os cenários. Ou seja, dado um espalhamento de 10% das suas medidas de *input*, conforme os respectivos níveis α do *output*, permanecem operando de modo eficiente em ambos os cenários. Para os demais portos, as funções analíticas que representam as medidas de eficiência *fuzzy* não puderam ser formuladas explicitamente. Logo, não foi possível efetuar uma classificação.

De modo análogo, a mesma análise foi feita para o ano de 2016. Conforme um nível α , as medidas para a faixa, ou valor clássico, dadas as medidas de *inputs* e *output* da Tabela 15, podem ser observados na Tabela 22.

Tabela 22 – Nível α para os *input* e *output* dos portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.

Portos	α - corte		
	<i>Input</i>		<i>Output</i>
	Berço (m)	Calado(m)	Quantidade(t)
Fortaleza	[1.427,4 + 158,6 α ; 1.744,6 - 158,6 α]	[10,8; 10,8]	[58.018,5 + 6.446,5 α ; 70.911,5 - 6.446,5 α]
Suape	[2.875,5 + 319,5 α ; 3.514,5 - 319,5 α]	[14,5; 14,5]	[226.756,8 + 25.195,2 α ; 277.147,2 - 25.195,2 α]
Natal	[510,3 + 56,7 α ; 623,7 - 56,7 α]	[11,5; 11,5]	[2.100,6 + 233,4 α ; 2.567,4 - 233,4 α]
Itaqui	[1.616,4 + 179,6 α ; 1.975,6 - 179,6 α]	[18,5; 18,5]	[1.340.286,3 + 148.920,7 α ; 1.638.127,7 - 148.920,7 α]
Cabedelo	[541,8 + 60,2 α ; 1.980 - 60,2 α]	[9,14; 9,14]	[765,0 + 85,0 α ; 935,0 - 85,0 α]
Pecém	[1.620,0 + 180,0 α ; 1.980,0 - 180,0 α]	[15,5; 15,5]	[1.083.014,1 + 120.334,9 α ; 1.323.683,9 - 120.334,9 α]
Salvador	[1.820,7 + 202,3 α ; 2.225,3 - 202,3 α]	[13,9; 13,9]	[234431,1 + 26.047,9 α ; 286.526,9 - 26.047,9 α]
Maceió	[1.614,6 + 179,4 α ; 1.973,4 - 179,4 α]	[10,5; 10,5]	[18.499,5 + 2.055,5 α ; 22.610,5 - 2.055,5 α]
Recife	[1.643,5 + 182,6 α ; 2.008,7 - 182,6 α]	[10,7; 10,7]	[378.110,7 + 42.012,3 α ; 462.135,3 - 42.012,3 α]

Fonte: Autora

Tabela 23 – Cenários pessimistas e otimistas para portos da região Nordeste que operaram com movimentação de carga geral, ano de 2016.

Portos	nível α				
	$[(E)_0^L, (E)_0^U]$	$[(E)_{0,25}^L, (E)_{0,25}^U]$	$[(E)_{0,5}^L, (E)_{0,5}^U]$	$[(E)_{0,75}^L, (E)_{0,75}^U]$	$[(E)_1^L, (E)_1^U]$
Fortaleza	(0,86; 0,87)	(0,87; 0,87)	(0,87; 0,87)	(0,87; 0,87)	(0,87; 0,87)
Suape	(0,68; 0,71)	(0,69; 0,71)	(0,69; 0,70)	(0,69; 0,70)	(0,70; 0,70)
Natal	(0,87; 1,00)	(0,92; 1,00)	(0,96; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Itaqui	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Cabedelo	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Pecém	(0,96; 1,00)	(0,98; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)
Salvador	(0,71; 0,76)	(0,72; 0,75)	(0,72; 0,74)	(0,72; 0,74)	(0,73; 0,73)
Maceió	(0,88; 0,88)	(0,88; 0,88)	(0,88; 0,88)	(0,88; 0,88)	(0,87; 0,88)
Recife	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)	(1,00; 1,00)

Fonte: Autora

De acordo com a Tabela 23, dado um espalhamento de 10% das suas medidas de *input*, conforme os respectivos níveis α do *output*, os portos de Itaqui, Cabedelo e Recife permanecem operando de modo eficiente em ambos os cenários. Ou seja, possuem medidas de eficiência igual a 1 em todos os níveis de possibilidades α observados para ambos os cenários. Para os demais portos, as funções analíticas que representam as medidas de eficiência *fuzzy* não puderam ser formuladas explicitamente. Logo, não foi possível efetuar uma classificação.

Os resultados das medidas de eficiência *fuzzy* para a abordagem de classificação *fuzzy* e das medidas de eficiência para os cenários pessimistas e otimistas pela abordagem de nível α , com as aplicações dos métodos FDEA, foram obtidos através da linguagem de programação R, utilizando o pacote *deaR*, conforme Coll-Serrano *et al.* (2019).

4.2 Resultados

Com a aplicação do método CCR clássico para o ano de 2006 os portos de Salvador, Recife e Maceió operaram com 100% de eficiência, os demais foram classificados como ineficientes. Conforme os portos eficientes, os portos de Maceió e Recife serviam de *benchmarks* entre os portos ineficientes.

Para o método de FDEA, no ano de 2006, com abordagem de classificação *fuzzy*, verificou-se que em pelo menos uma das classificações os portos de Pecém, Cabedelo, Maceió, Recife e Salvador são eficientes. Vale ressaltar que os portos de Pecém e Cabedelo são ineficientes pelo método CCR clássico, e portos como Salvador e Recife, *benchmarks* no modelo CCR clássico, foram classificados como eficientes apenas para o nível $\alpha = 1$. Já o porto de Maceió, além de eficiente e servir de *benchmarks* para outros portos com a aplicação do método CCR clássico, é classificado como eficiente para todos os níveis de possibilidade α abordados.

De modo análogo, observando o comportamento das eficiências para o ano de 2016. Com a aplicação do método CCR o porto de Itaqui, ineficiente pelo mesmo método para o ano de 2006, foi o único porto que operou com 100% de eficiência e servia de *benchmarks* para todos os demais.

Similarmente, com a abordagem de classificação *fuzzy* o porto de Itaqui, para o ano de 2016, foi o único classificado como eficiente em todos os níveis de corte utilizados. Dos portos classificados como ineficientes o porto do Pecém foi o mais próximo de ser classificado como eficiente, com $\alpha = 0$ obteve medida classificatória igual 0,99. Análogo ao resultado apresentado pela aplicação do método CCR clássico no mesmo ano, no qual o mesmo obteve a segunda melhor medida de eficiência.

Devido não ter sido possível definir uma função analítica explícita para as medidas de eficiência *fuzzy* de todos os portos analisados com a abordagem de nível α , serão abordados para a comparação com o método BCC apenas os portos que obtiveram eficiência igual a 1 em ambos os cenários, para todos os níveis α observados e, em particular, os eficientes para $\alpha = 1$, para os anos de 2006 e 2016.

Pela aplicação do método BCC, para o ano de 2006, os portos de Fortaleza, Cabedelo, Pecém, Salvador, Maceió e Recife operaram de modo eficiente e entre eles os portos de Fortaleza, Cabedelo, Maceió e Recife serviam de *benchmarks* entre os portos ineficientes.

Para o método de FDEA, no ano de 2006, com abordagem de nível α , verificou-se que para $\alpha = 1$ os portos eficientes são os mesmos que operam de modo eficiente pela aplicação do método BCC clássico e apenas os portos de Fortaleza, Cabedelo, Pecém e Maceió operam de modo eficiente em todos os níveis corte utilizados, para ambos os cenários. O porto de Recife, *benchmarks* para o porto de Itaqui pelo método BCC, sempre tem eficiência igual a 1 para o cenário otimista. Mas, para o cenário pessimista, a medida que o nível α diminui o valor de eficiência se afasta de 1. Ou seja, quanto menor o valor de α maior é a faixa em que a medida de eficiência do porto de Recife se encontra.

Para o ano de 2016, ao aplicar o método BCC, constatou-se que os portos de Natal, Itaqui, Cabedelo e Pecém operaram de modo eficiente. Em comparação ao ano de 2006, apenas os portos de Cabedelo e Pecém mantiveram-se eficientes. Conforme os portos eficientes, os portos de Cabedelo e Recife serviam de *benchmarks* entre os portos ineficientes. Já pelo método FDEA, no ano de 2016, com abordagem de nível α , exceto pelo porto do Pecém, os portos eficientes mantiveram-se eficientes em todos os níveis de possibilidades α abordados (inclusive os portos que serviram de *benchmarks* pelo método BCC para o mesmo ano). Para $\alpha = 1$ os portos eficientes foram os mesmos obtidos pela aplicação do método BCC.

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste estudo foram abordados os métodos de DEA clássicos e métodos de FDEA. Foram feitas, também, aplicações dos métodos de DEA clássicos e de FDEA para obtenção das medidas de eficiência clássica e eficiência *fuzzy*, de portos da região nordeste do Brasil nos anos de 2006 e 2016.

Através da análise dos resultados obtidos concluiu-se que para os métodos de FDEA, a medida que o nível α diminui, ou seja, a medida que o espalhamento bilateral nas medidas de *inputs* e de *outputs* aumentam, nem sempre os portos classificados como eficientes para os níveis α observados também são eficientes pelos métodos de DEA clássicos, inclusive portos que servem de *benchmark* dentro do conjunto com a aplicação dos métodos clássicos. Verificou-se que portos classificados como eficientes pelo método CCR clássico também são eficientes para $\alpha = 1$ pelo método de FDEA com abordagem de classificação *fuzzy*. De modo análogo, portos classificados como eficientes pelo método BCC clássico também são eficientes para $\alpha = 1$ pelo método de FDEA com abordagem de nível α .

O estudo teve limitações pela falta de publicações com estudos similares de aplicações de métodos de FDEA para a análise de eficiência de portos, no geral, impossibilitando efetuar comparações quanto a eficácia da análise feita no estudo.

Este estudo pode ser aplicado com o intuito de analisar em quais intervalos uma DMU pode, possivelmente, ter variações em suas medidas de *input* e *output* e operar, ou continuar operando, de modo eficiente. Como uma análise mais sucinta dessas variações nas medidas de *input* e de *output*, as DMUs poderiam, possivelmente, ter um maior controle de sua produtividade em relação as faixas a qual suas medidas de *input* e *outputs* devem permanecer para que possam operar, ou continuar operando, de modo eficiente, dado um conjunto de DMUs analisados.

Como trabalhos futuros, há pelo menos três direções para pesquisa. A primeira compreende um estudo de classificação de instituições de ensino superior brasileiras, baseada em FDEA. Uma segunda linha de pesquisa envolveria a aplicação da abordagem de tolerância e de teoria da possibilidade para medir a eficiência da portos da região Nordeste do Brasil. A terceira, e última, linha de pesquisa consistiria na abordagem dos métodos de DEA clássicos (CCR ou BCC) com análises de fronteiras difusas, proposto por Mello (2005). Tal estudo teria como intuito, observar se é possível fazer uso dos resultados obtidos, com a aplicação do modelo, na criação de técnicas de melhorias em relação a eficiência produtiva das DMUs.

REFERÊNCIAS

- ANTAQ. Agência Nacional de Transportes Aquaviários. *Anuário Estatístico Indicadores de Desempenho Portuário*. 2016.
- AZADEH, A.; GHADERI, S.; JAVAHERI, Z.; SABERI, M. A fuzzy mathematical programming approach to dea models. **American Journal of Applied Sciences**, v. 5, 10 2008.
- BANKER, R.; A.W., C.; COOPER, W. Some models for estimating technical and scale efficiency in data envelopment analysis. **Management Science**, v. 30, p. 1078–1092, 09 1984.
- BOGETOFT, P.; OTTO, L. **Benchmarking with DEA and SFA**. [S.l.], 2018. R package version 0.27.
- CHARNES, A.; COOPER, W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, p. 429–444, 07 1979.
- COELLI, T.; RAO, D.; BATTESE, G. An introduction to efficiency and productivity analysis. **Kluwer Academic Publishers**, 1988.
- COLL-SERRANO, V.; BOLOS, V.; SUAREZ, R. B. **deaR: Conventional and Fuzzy Data Envelopment Analysis**. [S.l.], 2019. R package version 1.2.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=deaR>>.
- COOPER W. W.; SEIFORD, L. M. T. K. **Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses: With dea-solver software and references**. [S.l.: s.n.], 2006.
- DEBREU, G. The coefficient of resource utilization. **Econometrica**, v. 19, 07 1951.
- ENTANI, T.; MAEDA, Y.; TANAKA, H. Dual models of interval dea and its extension to interval data. **European Journal of Operational Research**, v. 136, p. 32–45, 01 2002.
- FARREL, M. J. A mensurement of productive efficiency. **Journal of The Royal Statistical Society**, 1957.
- GOMIDE, F. A. C.; GUDWIN, R. R.; TANSCHHEIT, R. Conceitos fundamentais da teoria de conjuntos fuzzy, lógica fuzzy e aplicações. 2018.
- GUERREIRO, A. S. Análise da eficiência de empresas de comércio eletrônico usando técnicas da análise envoltória de dados. **Tese**, 2006.
- GUO, P.; TANAKA, H. Fuzzy dea: A perceptual evaluation method. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 119, p. 149–160, 04 2001.
- HATAMI-MARBINI, A.; EMROUZNEJAD, A.; TAVANA, M. A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. **European Journal of Operational Research**, v. 214, p. 457–472, 11 2011.
- JUNIOR, N.; JÚNIOR, E. N.; PRATA, B. Análise da eficiência dos portos da região nordeste do brasil baseada em análise envoltória de dados. **Sistemas Gestão**, v. 3, 05 2009.
- KAO, C.; LIU, S.-T. Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 113, p. 427–437, 08 2000.

KAO, C.; LIU, S.-T. Liu, s.t.: Efficiencies of two-stage systems with fuzzy data. *fuzzy set. syst.* 176, 20-35. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 176, p. 20–35, 08 2011.

KOOPMANS, T. An analysis of production as an efficient combination of activities-activity analysis, production and allocation, cowles commission for research in economics. **Monograph**, v. 13, p. 33–97, 01 1951.

LERTWORASIRIKUL, S.; FANG, S.; NUTTLE, H.; JOINES, J. Fuzzy data envelopment analysis. **Proceedings of the 9th Bellman Continuum**, 01 2002.

LERTWORASIRIKUL, S.; FANG, S.-C.; JOINES, J.; NUTTLE, H. Fuzzy data envelopment analysis (dea): A possibility approach. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 139, p. 379–394, 10 2003.

LUENBERGER, D.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. [S.l.: s.n.], 2016. v. 228.

MELLO, J. Soares de. Fronteiras dea difusas. **Investigação Operacional**, v. 25, p. 85–103, 06 2005.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2019. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

ZADEH, L. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, p. 338–353, 06 1965.

ZADEH, L. Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 1, p. 9–34, 12 1999.

APÊNDICE A – TEORIA DE CONJUNTOS DIFUSOS

As seções a seguir abordam os seguintes tópicos: Funções de pertinência de um número *fuzzy*, operações com conjuntos *fuzzy* (União, Interseção e Complementar), aritmética intervalar (Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão, Inversa e Multiplicação por um escalar), número *fuzzy* triangular e operações de conjunto de nível α , também chamado de α – corte.

A Teoria dos Conjuntos Difusos, foi introduzida por Zadeh (1965) com a principal intenção de dar um tratamento matemático a termos linguísticos subjetivos, como “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outros. Para obter a formalização matemática de um conjunto *fuzzy*, (ZADEH, 1999) se embasou no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função: sua função característica.

Definição A.0.1. *Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por*

$$\mathbb{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Seja \mathbb{X}_A uma função de domínio U e a imagem contida no conjunto $\{0, 1\}$, com $\mathbb{X}_A(x) = 1$, indicando que x é elemento de A , caso contrário, quando $\mathbb{X}_A(x) = 0$ indica que x não é elemento de A . Assim, a função característica representa completamente o conjunto A já que deste modo tal função indica quais elementos do conjunto universo indica quais elementos do conjunto universo U também são elementos de A . Contudo, existem casos em que a pertinência entre elementos e conjuntos não é precisa, ou seja, não é possível saber se um elemento pertence, ou não, efetivamente a um conjunto.

A.1 Subconjuntos Fuzzy

Ampliando-se o contra-domínio da função característica que é o conjunto $\{0, 1\}$ para o intervalo $[0, 1]$ permiti-se um "relaxamento" no conjunto imagem da função característica de um conjunto. Uma formalização matemática de imprecisões, usando subconjuntos *fuzzy* é dada a seguir, sugerida por (ZADEH, 1965).

Definição A.1.1. *Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função pré-definida, chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy F*

$$\varphi_F : U \implies [0, 1], \quad (\text{A.2})$$

O índice F na função de pertinência é usado de modo análogo à função característica de subconjunto clássico, conforme Definição A.1.1.

O valor $\varphi_F(x) \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de U pertence ao conjunto fuzzy F ; $\varphi_F = 1$ e $\varphi_F = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência completa e a não pertinência de x ao conjunto fuzzy F .

A.2 Operações com Conjuntos Fuzzy

Sejam A e B dois subconjuntos fuzzy de U com funções de pertinência indicadas respectivamente por φ_A e φ_B . Seja A um subconjunto fuzzy de B , será denotado por $A \subset B$ e $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \quad x \in U$.

Para a função de pertinência do conjunto vazio (\emptyset) é dada por $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$, enquanto o conjunto universo (U) tem função de pertinência $\varphi_U(x) = 1, \forall x \in U$. Assim, é possível verificar que $\emptyset \subset A$ e $A \subset U \quad \forall A$.

Definição A.2.1. *A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U. \quad (\text{A.3})$$

Definição A.2.2. *A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U. \quad (\text{A.4})$$

Definição A.2.3. *O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U. \quad (\text{A.5})$$

Definição A.2.4. *Os subconjuntos fuzzy A e B de U são iguais se suas funções de pertinência são iguais, ou seja, $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) \quad \forall x \in U$.*

As operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:

- Comutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Associativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Idempotência

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- Distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Conjunto Vazio

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

- Conjunto Universo

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

- Involução

$$(A')' = A$$

- Leis de DeMorgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

A demonstração de cada propriedade é uma aplicação imediata das propriedades de máximo e mínimo entre funções, ou seja,

$$\begin{aligned} \max[\varphi(x), \psi(x)] &= \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) + |\varphi(x) - \psi(x)|] \\ \min[\varphi(x), \psi(x)] &= \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|] \end{aligned}$$

No qual φ e ψ são funções com imagens em \mathbb{R} . Maiores informações sobre as demonstrações podem ser vistas em Gomide *et al.* (2018).

A.3 Aritmética de Intervalos

Operações aritméticas de números *fuzzy* podem ser generalizadas a partir de operações de intervalos clássicos. Definições de operações intervalares, considerando os números A e B expressos como intervalos, são dadas a seguir:

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2]$$

1. *Adição:*

$$A + B = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (\text{A.6})$$

2. *Subtração:*

$$A - B = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \quad (\text{A.7})$$

3. *Multiplificação:*

$$A * B = [a_1, a_2] * [b_1, b_2]$$

$$A * B = [\min\{a_1 * b_1, a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2\}, \max\{a_1 * b_1, a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2\}] \quad (\text{A.8})$$

4. *Divisão:*

$$A/B = [a_1, a_2]/[b_1, b_2]$$

$$A/B = [\min\{a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2\}, \max\{a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2\}] \quad (\text{A.9})$$

exceto o caso de $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$.

5. *Inversa de um intervalo:*

$$A^{-1} = \frac{1}{A} = [a_1, a_2]^{-1}$$

$$A^{-1} = \left[\min \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \max \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right] \quad (\text{A.10})$$

exceto o caso de $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$.

6. *Multiplificação de um intervalo por um escalar:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \lambda A = \lambda A[a_1, a_2] = [\lambda a_1, \lambda a_2], & \text{se } \lambda > 0 \\ \lambda A = \lambda A[a_1, a_2] = [\lambda a_2, \lambda a_1], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

A.4 Número Fuzzy Triangular

Dentre as formas de número *fuzzy*, há o número *fuzzy* triangular. É representado por três pontos e expresso por $F = (f_1, f_2, f_3)$. Pode ser interpretado como funções de pertinência como a seguir:

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < f_1 \\ \frac{x-f_1}{f_2-f_1}, & \text{se } f_1 \leq x \leq f_2 \\ \frac{f_3-x}{f_3-f_2}, & \text{se } f_2 \leq x \leq f_3 \\ 0, & \text{se } x > f_3 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Para um número *fuzzy* A triangular simétrico, A pode ser definida da forma $A = (x - k, x, x + k)$ ou, para maior comodidade, $A = (x, k)$, sendo k um espalhamento em relação ao centro x .

A.5 Conjunto de nível α

Para todo α do intervalo $[0, 1]$ é definido o α -*corde* (ou corte no nível α) de um conjunto *fuzzy* A de U como o subconjunto:

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_\alpha(x) \geq \alpha\} \quad (\text{A.13})$$

O α -corde pode ser interpretado como o conjunto *fuzzy* que apresenta uma restrição imposta ao domínio do conjunto baseado no valor de α . Assim, o conjunto resultante contém todos os elementos do domínio que possuem um grau de pertinência, $\mu(x) \leq \alpha$.

Sejam os conjuntos *fuzzy* A e B , possuem as seguintes propriedades:

- $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$
- $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$
- $A = B \Leftrightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$
- $[A \subseteq B]^\alpha = [A]^\alpha \subseteq [B]^\alpha$

Utilizando-se matemática intervalar, dado o α -corde para os números *fuzzy* A e B , são válidas as seguintes operações:

- *Adição*

$$A + B = [A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha$$

- *Subtração*

$$A - B = [A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha$$

- *Multiplicação*

$$[A * B]^\alpha = [A]^\alpha * [B]^\alpha$$

- *Divisão*

$$[A/B]^\alpha = [A]^\alpha / [B]^\alpha, \text{ se } 0 \notin [B]^\alpha$$

ANEXO A – DEA CLÁSSICOS USANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO R

Funções do R utilizadas para resolução dos modelos DEA clássicos, orientados a input. Conforme o pacote (BOGETOFT; OTTO, 2018).

```
# biblioteca do R para ler tabelas do Excel
library(readxl)
#leituras dos dados:DMUS, input, output.
dados<- read_excel("C:/Diretório/dados.xlsx")
# Vetor de inputs
x <-data.frame(dados[,c(2,3)])
# Vetor de outputs
y <-data.frame(dados[,4])
# Pacote do R para resolver os métodos DEA
library(Benchmarking)
# Resolver pelo método do CCR
t<- dea(x,y,RTS = "crs")
# Resolver pelo método BCC
a<- dea(x,y,RTS = "vrs")
# Eficiências CCR
eff(t)
# Eficiências BCC
eff(a)
# Dual CCR
et <- dea.dual(x,y,RTS="crs")
# Dual BCC
ea <- dea.dual(x,y,RTS="crs")
# Medidas de eficiências para o CCR
eficiências1 <-eff(t)
# Salvar em uma tabela as eficiências do método DEA CCR.
write.csv2(eficiências1, "C:/Diretório/eficienciaCCR.csv")
# Medidas de eficiências para o BCC
eficiências2 <-eff(a)
# Salvar em uma tabela as eficiências do método DEA BCC.
```

```
write.csv2(eficiências2, "C:/Diretório/eficiênciaBCC.csv")
# Valores de lambdas, usados para calcular benchmarks
# lambas para CCR
lambdaCCR <-lambda(t)
# Salvar em uma tabela os lambas não nulos, do método CCR.
write.csv2(lambdaCCR, "C:/Diretório/lambasCCR.csv")
#lambas para BCC
lambdaBCC <-lambda(a)
# Salvar em uma tabela os lambas não nulos, do método BCC.
write.csv2(lambdaBCC, "C:/Diretório/lambdasBCC.csv")
```

ANEXO B – FDEA USANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO R

Funções do R utilizadas para resolução dos modelos FDEA, orientados a input.

Conforme o pacote (COLL-SERRANO *et al.*, 2019).

```
# Biblioteca do R para ler tabelas do Excel
```

```
library(readxl)
```

```
# Leituras dos dados:DMUS, input, output e os respectivos espalhamentos
```

```
FDEA <- read_excel("C:/Diretório/dadosFDEA")
```

```
# Pacote do R para resolver os métodos FDEA
```

```
library(deaR)
```

```
# Leitura dos dados como variáveis fuzzy
```

```
simétricas(.ml=centro,.dl=espalhamento) data_example <- read_data_fuzzy(FDEA, inputs.mL =  
2:3, inputs.dL = 4:5, outputs.mL = 6, outputs.dL = 7)
```

```
# Resolução por classificação fuzzy, conforme (GUO; TANAKA, 2001)
```

```
result <- modelfuzzy_guotanaka(data_example, h = seq(0,1,by=0.25), orientation="io")
```

```
# Resultados as medidas de eficiência fuzzy por classificação fuzzy.
```

```
efficiencies(result)
```

```
# Salvar em uma tabela as eficiências fuzzy.
```

```
tabela <-efficiencies(result)
```

```
write.csv2(tabela, "C:/Diretório/eficiênciasFDEAGuo_Tanaka.csv")
```

```
#Resolução por nível  $\alpha$ , conforme (KAO; LIU, 2000)
```

```
result <- modelfuzzy_kaoliu(data_example, kaoliu_modelname = "basic", alpha = seq(0, 1, by =  
0.25), orientation = "io", rts = "vrs")
```

```
# Resultados dos cenários pessimistas e otimistas
```

```
efficiencies(result)
```

```
# Salvar em uma tabela as eficiências dos cenários.
```

```
tabela3 <-efficiencies(result)
```

```
write.csv2(tabela3, "C:/Diretório/CenáriosKao_Liu.csv")
```