



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
**DOUTORADO EM MATEMÁTICA**

**ROSA TAYANE DE VASCONCELOS**

**MAXIMIZANDO O PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE JACOBI**

**FORTALEZA**

**2022**

ROSA TAYANE DE VASCONCELOS

MAXIMIZANDO O PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE JACOBI

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutora em Matemática. Área de Concentração: Análise Geométrica

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

V451m Vasconcelos, Rosa Tayane de.

Maximizando o primeiro autovalor do operador de Jacobi / Rosa Tayane de Vasconcelos. – 2023.  
86 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro..

1. Operador de Jacobi. 2. Primeiro autovalor. 3. Operador laplaciano. 4. Operador de Schrödinger. 5. Funcional de Willmore. I. Título.

CDD 510

---

ROSA TAYANE DE VASCONCELOS

MAXIMIZANDO O PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE JACOBI

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutora em Matemática. Área de Concentração: Análise Geométrica

Aprovada em: 23/02/2022

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Ceará (IFCE)

---

Profa. Dra. Francisca Damiana Vieira  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

---

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho aos meus familiares e amigos.

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me mantido no caminho do bem e por ter me dado tantas oportunidades de vitória.

Aos meus pais por me trazerem à vida.

Aos meus tios Patrícia e Heleno que não pouparam esforços para me ajudar durante todos os momentos que precisei.

À minha doce sobrinha Laura que apesar de muito pequena e pouco falante sempre soube como trazer a mansidão da qual eu precisava ao fim de meus cansativos dias de estudo.

Ao meu orientador Fábio Montenegro pela ajuda em todas as etapas deste trabalho.

Aos membros da banca Prof. Dr. Aldir Chaves Brasil, Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros, Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues, Profa. Dra. Francisca Damiana Vieira, Prof. Dr. Levi Lopes de Lima e Prof. Dr. Tiago Gadelha de Sousa, pela disponibilidade.

A todos os professores que foram cruciais em minha formação matemática, em especial Aníbal de Oliveira, João Luiz, Airton Lima, Eduardo Garcez, Antonio Caminha, Fernanda Camargo, Diego Moreira, Darlan Girão e Alexandre Fernandes.

Aos meus amigos matemáticos Antônio Aguiar, Davi Lopes, Danuso Rocha, Diego Silva, Emanuel Ferreira, Edilson Filho, Felipe Fernandes, Walner Mendonça, Janaine Bezerra, Tiago Gadelha e Valricélio Menezes pelos inúmeros momentos e ensinamentos compartilhados.

Aos professores do IFCE-Quixadá pelo apoio à liberação do meu afastamento para a conclusão desse doutorado.

À Andrea Costa Dantas, secretária da pós-graduação, pela presteza e competência. Que por vezes fez além de suas atribuições no intuito de ajudar nas questões burocráticas que lhe apresentei.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“[...] aprendei de mim, que sou manso e humilde de coração; e encontrareis descanso para as vossas almas.”

(BÍBLIA, 2007, p. 1042)

## RESUMO

Considerando o operador de Jacobi  $L$  definido no espaço de hipersuperfícies orientadas e fechadas imersas no espaço euclidiano que têm o mesmo volume da esfera unitária dado por

$$L = -\Delta - |II|^2,$$

onde  $-\Delta$  é o operador de Laplace-Beltrami definido por  $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$  e  $|II|^2 = \sum_{j=1}^n k_j^2$  é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de  $M$ .

Apresentamos uma generalização para os resultados clássicos do funcional de Willmore para esfera euclidiana e, como consequência, acrescentando uma hipótese topológica provamos que o primeiro autovalor do operador de Jacobi na esfera euclidiana é um máximo global.

**Palavras-chave:** operador de Jacobi; primeiro autovalor; operador laplaciano; operador de Schrödinger; funcional de Willmore; curvatura escalar total.

## ABSTRACT

We consider the Jacobi operator, defined on a closed oriented hypersurfaces immersed in the Euclidean space with the same volume of the unit sphere by

$$L = -\Delta - |II|^2,$$

where  $-\Delta$  is the Laplace-Beltrami operator with  $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$  and  $|II|^2 = \sum_{j=1}^n k_j^2$  is the square of second fundamental form.

We show a generalization for the classical result of the Willmore functional for the Euclidean sphere. As a consequence, by adding a topological hypothesis we prove that the first eigenvalue of the Jacobi operator in the Euclidean sphere is a global maximum.

**Keywords:** Jacobi operator; first eigenvalue; Laplacian operator; Schrödinger operator; Willmore functional; total scalar curvature.

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	9
2	<b>PRELIMINARES</b>	14
2.1	Métrica riemanniana	14
2.2	Operadores diferenciais	15
2.3	Curvaturas	19
2.4	Dois operadores do tipo Schrödinger	24
2.5	Generalização do teorema de Alexandrov e da fórmula de Minkowski	27
3	<b>FUNCIONAL CURVATURA ESCALAR TOTAL</b>	28
3.1	Variações por hipersuperfícies de volume constante	28
3.2	Derivadas de Primeira Ordem	33
3.3	Derivadas de Segunda Ordem	43
3.4	Esféricos Harmônicos	54
3.5	Derivadas de Terceira e Quarta Ordem	57
4	<b>RESULTADOS DE CARACTERIZAÇÃO PARA ESFERA</b>	65
4.1	Teoremas	65
4.2	Uma propriedade máxima de $S^n$	73
4.3	Toros de Clifford	75
5	<b>CONCLUSÃO</b>	83
	<b>REFERÊNCIAS</b>	84

## 1 INTRODUÇÃO

Seja  $M^n$  uma hipersuperfície orientada e fechada imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Considere o operador diferencial

$$L = -\Delta - |II|^2,$$

onde  $-\Delta : H^2(M) \rightarrow L^2(M)$  é o operador de Laplace definido por  $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$  e  $|II|^2 = \sum_{j=1}^n k_j^2$  é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de  $M$ .

Conhecido como operador de Jacobi, esse operador surge naturalmente em problemas geométricos envolvendo estabilidade ( (BARBOSA, J. L.; CARMO, M. D.; ), (BARBOSA, J. L.; CARMO, M. D.; ESCHENBURG, J., )) no cálculo da segunda variação do volume em  $M$ . Podemos também encontrá-lo em trabalhos de (HARRELL II, 1996), (HARRELL II; LOSS, 1998), (PAPANICOLAOU, 1996) ao tratar da prova parcial e total da conjectura de Alikakos-Fusco proposta em (ALIKAKOS; FUSCO, 1993).

**Conjectura 1.0.1** (ALIKAKOS; FUSCO, 1993) *Suponha que  $\Omega$  é uma superfície suave, compacta, simplesmente conexa em  $\mathbb{R}^3$ . O segundo autovalor de*

$$L = -\Delta - \sum_j k_j^2$$

*é maximizado por zero, precisamente quando  $\Omega$  é uma esfera. Em  $\mathbb{R}^2$  suponha que  $\Omega$  é uma curva suave, simples e fechada. O segundo autovalor de*

$$L = -\frac{d^2}{ds^2} - k^2$$

*é maximizado por zero, precisamente quando  $\Omega$  é um círculo.*

Essa conjectura se refere a um problema físico envolvendo estabilidade de superfícies. Os autores perceberam que a instabilidade dessas superfícies estava associada aos autovalores negativos do operador de Laplace-Beltrami  $L$ . Como o primeiro autovalor de  $L$  já é sempre negativo, a atenção foi voltada ao segundo autovalor e assim obtiveram teoremas de estabilidade e de caracterização, conforme apresentado por Harrell e Loss em (HARRELL II; LOSS, 1998), onde a conjectura de Alikakos-Fusco seguiu como caso particular.

**Teorema 1.0.1** (HARRELL II; LOSS, 1998) *Seja  $\Omega$  uma hipersuperfície diferenciável compacta de dimensão  $d$  imersa em  $\mathbb{R}^{d+1}$ ; em particular auto-interseções são permitidas. A métrica na superfície é a métrica euclidiana padrão herdada de  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Então, o segundo autovalor  $\lambda_2$  do operador*

$$\mathcal{L} = -\Delta - \frac{1}{d}\mathbf{H}^2$$

*é estritamente negativo a menos que  $\Omega$  seja uma esfera, neste caso  $\lambda_2$  é igual a zero.*

Durante a elaboração da demonstração, Harrell e Loss perceberam que para trabalhar sua técnica em cenários mais gerais que  $\mathbb{R}^3$  havia a necessidade de modificar o potencial desse operador e assim passou a considerar o operador  $\mathcal{L}$ .

Podemos também ver esse resultado como um teorema de caracterização da esfera redonda e assim investigar se o mesmo ocorre para o primeiro autovalor. Ou seja, podemos investigar dentre todas as hipersuperfícies compactas orientáveis imersas no espaço euclidiano, com o mesmo volume da esfera unitária, qual delas possui o primeiro autovalor mais alto? É razoável esperar que tal hipersuperfície seja uma esfera e é o que ocorre para superfícies (Teorema 5.1 de (VIEIRA, Francisca Damiana, 2019)), mas será que podemos assegurar isso em qualquer dimensão? A resposta é positiva pelo que poderemos ver no teorema a seguir.

**Teorema 1.0.2** *Considere o operador  $\mathcal{L} : H^2(M) \longrightarrow L^2(M)$  definido por*

$$\mathcal{L} := -\Delta - n\mathbf{H}^2 \tag{1.1}$$

*onde  $\Delta$  e  $\mathbf{H}^2$  são, respectivamente, o laplaciano e o quadrado da curvatura média de  $M$ . O primeiro autovalor  $\lambda_1^{0,\mathcal{L}}$  do operador  $\mathcal{L}$  na esfera  $\mathbb{S}^n$  é máximo dentre todos os primeiros autovalores de  $\mathcal{L}$  nas hipersuperfícies  $M$  que podem ser deformadas na esfera.*

Observando que

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\mathcal{L}} &= \inf_{\|u\|=1} \langle \mathcal{L}(u), u \rangle_{L^2(M)} = \langle \mathcal{L}(u^{\mathcal{L}}), u^{\mathcal{L}} \rangle_{L^2(M)} = \int_M -u^{\mathcal{L}} \Delta u^{\mathcal{L}} - n\mathbf{H}^2(u^{\mathcal{L}})^2 \\ &\geq \int_M -u^{\mathcal{L}} \Delta u^{\mathcal{L}} - |\mathbf{H}|^2(u^{\mathcal{L}})^2 = \langle L(u^{\mathcal{L}}), u^{\mathcal{L}} \rangle_{L^2(M)} \geq \inf_{\|u\|=1} \langle L(u), u \rangle_{L^2(M)} = \lambda_1^L \end{aligned}$$

e que pelo teorema acima,  $\lambda_1^{0,\mathcal{L}} \geq \lambda_1^{\mathcal{L}}$  o corolário a seguir segue de imediato.

**Corolário 1.0.1** *Considere o operador de Jacobi  $L : H^2(M) \longrightarrow L^2(M)$  definido por*

$$L := -\Delta - |\mathbf{H}|^2 \tag{1.2}$$

onde  $\Delta$  e  $|\Pi|^2$  são, respectivamente, o laplaciano e o quadrado da norma da segunda forma de  $M$ . O primeiro autovalor  $\lambda_1^{0,L}$  do operador  $L$  na esfera  $\mathbb{S}^n$  é máximo dentre todos os primeiros autovalores de  $L$  nas hipersuperfícies  $M$  que podem ser suavemente deformadas na esfera.

Da mesma forma que Harell e Loss fizeram para obter uma demonstração definitiva para a conjectura de Alikakos-Fusco, iremos usar um terceiro potencial para obter os resultados deste trabalho. Usaremos a curvatura escalar ao invés do quadrado da curvatura média ou da norma da segunda forma.

Para o que segue usaremos o funcional conhecido como curvatura escalar total que associa a toda hipersuperfície compacta  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma quantidade

$$\mathcal{W}_1(M) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M S dM$$

onde  $S$  é a curvatura escalar que pode ser expressa por  $S = n^2 H^2 - |\Pi|^2$ .

Considerando variações de hipersuperfícies imersas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que mantêm o volume constante e igual ao da esfera  $\mathbb{S}^n$ , provamos que esse funcional atinge seu mínimo local na esfera  $\mathbb{S}^n$  para  $n > 2$  e que a esfera é o único ponto crítico desse funcional.

**Teorema 1.0.3** *Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  associamos uma variedade mergulhada  $M_t^n$  com o mesmo volume de  $\mathbb{S}^n$ , obtida pela variação  $X_t$  tal que  $M_0 = \mathbb{S}^n$ . Então para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  temos*

$$\mathcal{W}_1(t) \geq n(n-1),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{n(n-1)} \int_{M_t} S dM_t \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^n).$$

Além disso,  $\mathcal{W}_1(t) = n(n-1)$  se, e somente se,  $M_t$  é uma esfera euclidiana.

A desigualdade do teorema acima bem como seu corolário que segue são a princípio locais, porém, o fato da esfera ser o único crítico do funcional curvatura escalar total nos fará obter dois novos resultados que são globais.

**Corolário 1.0.2** *Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  associamos uma variedade mergulhada  $M_t^n$  com o mesmo volume de  $\mathbb{S}^n$ , obtida pela variação  $X_t$  tal que  $M_0 = M$ . Então para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  temos*

$$\frac{1}{n \text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{M_t} (nH)^2 dM_t \geq n.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $M_t$  é uma esfera euclidiana.

Sobre o corolário acima, podemos encontrá-lo em (VIEIRA, Francisca Damiana, 2019) como Teorema 4.3. É interessante citar esse resultado não só por ele poder ser visto como consequência imediata do Teorema 1.0.3, mas também porque ele nos leva a versão mais geral do problema. O próximo teorema caracteriza os pontos críticos do funcional.

**Teorema 1.0.4** *Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  associamos uma variedade mergulhada  $M_t^n$  com o mesmo volume de  $\mathbb{S}^n$ , obtida pela variação  $X_t$  tal que  $M_0 = M$ . Se  $M$  é ponto crítico do funcional  $\mathcal{W}_1$  ou seja  $\mathcal{W}'_1(0) = 0$ , então  $M = \mathbb{S}^n$ .*

Usando a interpretação correta, o fato acima poderia ser obtido através do resultado de (BESSE, 2007). No capítulo inicial do livro considera-se uma variedade  $M$  e define-se o funcional curvatura escalar total no espaço de métricas de volume unitário e com isso identifica-se como métricas Einstein os pontos críticos do funcional. Pela demonstração ser diferente e para que este trabalho fique o mais autocontido possível achamos relevante não só citar, mas demonstrar esse teorema. O resultado a seguir é fruto dessa identificação única dos pontos críticos.

**Teorema 1.0.5** *Dada uma hipersuperfície compacta  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que pode ser suavemente deformadas na esfera  $\mathbb{S}^n$  com mesmo volume da esfera unitária temos*

$$\mathcal{W}_1(M) \geq n(n-1),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{n(n-1)} \int_M S dM \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^n)$$

Além disso,  $\mathcal{W}_1(t) = n(n-1)$ . se, e somente se,  $M_t$  é uma esfera euclidiana.

O que nos leva à resposta do problema levantado na tese de (VIEIRA, Francisca Damiana, 2019) cujo enunciado foi posto como Conjectura 4.

**Corolário 1.0.3** *Toda hipersuperfície compacta  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pode ser suavemente deformadas na esfera  $\mathbb{S}^n$  e com mesmo volume da esfera unitária, deve satisfazer*

$$\frac{1}{n \text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M (nH)^2 dM \geq n.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $M^n$  é uma esfera euclidiana.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos alguns fatos preliminares que serão usados ao longo do texto. Os capítulos 3 e 4 formam a parte mais técnica do trabalho. No primeiro deles, temos o cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem associadas às variações inicialmente definidas. No segundo, apresentamos o funcional curvatura escalar total e fazemos os últimos cálculos necessários para obtenção de expressões que serão usadas nos teoremas principais. Por fim, no último capítulo, apresentamos e demonstramos com detalhes os teoremas e corolários que foram aqui enunciados.

## 2 PRELIMINARES

### 2.1 Métrica riemanniana

Iniciaremos com a definição de métrica riemanniana e a partir dessa definiremos variedades imersas e imersões isométricas.

**Definição 2.1.1** (*Métrica riemanniana*) Uma métrica riemanniana (ou tensor riemanniano) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .

**Definição 2.1.2** (*Variedade riemanniana*) Uma variedade diferenciável  $M$  com uma métrica  $g$  é chamada variedade riemanniana e podemos denotar simplesmente por  $(M, g)$  a variedade riemanniana cujo tensor riemanniano é  $g$ .

**Definição 2.1.3** (*Isometria*) Sejam  $M$  e  $N$  variedades riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  (isto é,  $f$  é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado de isometria se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_pM. \quad (2.1)$$

Seja  $f : (M^n, g^M) \rightarrow (N^{n+k}, g^N)$  uma imersão, isto é,  $f$  é diferenciável e  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se  $N$  tem uma estrutura riemanniana,  $f$  induz uma estrutura riemanniana em  $M$  por  $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$ ,  $u, v \in T_pM$ , ou seja,  $g^M = f^*g^N$ . Como  $df_p$  é injetiva,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é positivo definido. As demais condições da Definição 2.1.1 seguem naturalmente. A métrica de  $M$  é chamada então a **métrica induzida** por  $f$ , e  $f$  é uma **imersão isométrica**. Além disso, se  $f$  for um difeomorfismo (local) e uma imersão isométrica, dizemos que  $f$  é uma isometria (local).

No caso particular onde a codimensão da imersão é 1, i.e.,  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ ,  $f(M) \subset \overline{M}$  é chamada de hipersuperfície.

## 2.2 Operadores diferenciais

Nesta seção usaremos a derivação covariante de tensores para estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais, como o gradiente, Laplaciano e Hessiano, que serão muito utilizados no decorrer desse trabalho. Apesar de parecer repetitiva essa apresentação acaba por ser essencial por questão de fixação da notação, uma vez que algumas adoções diferentes de orientação/sinal podem ser utilizadas.

**Definição 2.2.1** (*Gradiente*) *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. O gradiente de uma função  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  é o único campo de vetores  $\text{grad } f \in \mathfrak{X}(M)$  que satisfaz a equação*

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = Xf,$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , ou equivalentemente,

$$\langle \text{grad } f, \cdot \rangle = df.$$

Em coordenadas locais,  $\text{grad } f$  tem a expressão

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

**Definição 2.2.2** (*Divergência*) *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores. A divergência de  $X$ ,  $\text{div}(X)$ , é o traço do operador  $Y \mapsto \nabla_Y X$ .*

É fácil verificar que dados  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , vale  $\text{div}(fX) = \langle \text{grad } f, X \rangle + f \text{div} X$ .

**Definição 2.2.3** (*Laplaciano*) *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade riemanniana de dimensão  $n$  (com ou sem bordo). O operador linear*

$$\begin{aligned} \Delta: H^2(M) &\longrightarrow L^2(M) \\ f &\longmapsto \text{div}(\text{grad } f), \end{aligned}$$

é chamado de Laplaciano. Em coordenadas locais  $\Delta f$  tem a expressão

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \quad (2.3)$$

Após algumas manipulações e usando a notação com os símbolos de Christoffel, podemos escrever

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j,k=1}^n g^{jk} \Gamma_{ik}^j \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (2.4)$$

**Definição 2.2.4** (Hessiano) Seja  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . O tensor de ordem 2, denotado por  $\text{Hess } f$ , em  $M$  dado por

$$\text{Hess } f(X, Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f),$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , é chamado de Hessiano de  $f$ .

Em um sistema de coordenadas temos:

$$\text{Hess } f = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) dx^i \otimes dx^j. \quad (2.5)$$

**Observação 1** Segue imediatamente que para cada  $p \in M$  vale

$$\text{tr}\{v \mapsto (\text{Hess } f)_p(v)\} = \text{div}(\text{grad } f)(p) = \Delta f(p),$$

onde  $\text{tr}$  denota o traço do hessiano.

Não é difícil verificar que  $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle$ .

**Definição 2.2.5** (Volume) Definimos o volume  $\text{vol}(R)$  em  $R$  pela integral em  $\mathbb{R}^n$

$$\text{vol}(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n. \quad (2.6)$$

A expressão acima está bem definida. Com efeito, se  $R$  está contido em outra vizinhança coordenada  $\mathbf{y}(V)$  de uma parametrização positiva  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , teremos com as notações acima e pela fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n \\ & \int_{\mathbf{y}^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij})} dy_1 \dots dy_n = \text{vol}(R), \end{aligned}$$

o que mostra que a definição 2.6 não depende do sistema de coordenada escolhido. Agora apresentaremos o teorema principal dessa subseção.

**Teorema 2.2.1** (Teorema da Divergência) Seja  $(M, g)$  um variedade riemanniana orientada com bordo. Dado um campo vetorial suave compactamente suportado  $X$  definido em  $M$ , então

$$\int (\operatorname{div} X) dV_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle_g dV_{\tilde{g}},$$

onde  $N$  é o campo vetorial normal unitário exterior ao longo de  $\partial M$  e  $\tilde{g}$  é a métrica riemanniana induzida em  $\partial M$ .

**Demonstração:** Vide [(LEE, 2003)].

No caso em que  $M$  é variedade riemanniana compacta e, portanto, sem bordo, vale  $\int (\operatorname{div} X) dV = 0$  para todo campo suave  $X$  em  $M$ . Em particular,  $\int_M \Delta f dA = 0$ , para toda função  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

**Teorema 2.2.2** (Fórmulas de Green) *Sejam  $h \in \mathcal{C}^1(M)$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(M)$  com  $h\nabla f$  de suporte compacto, então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle\} dV = 0. \quad (2.7)$$

*Se também assumirmos que  $h \in \mathcal{C}^2(M)$  e ambas  $f, h$  têm suporte compacto, então*

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} dV = 0. \quad (2.8)$$

**Demonstração:** Segue direto do teorema da divergência.

Apresentaremos algumas definições envolvendo os autovalores e autofunções do operador de Laplace, que serão usados posteriormente na demonstração de alguns resultados. Para mais detalhes, vide (CHAVEL, 1984).

**Definição 2.2.6** (Autovalor e autofunção) *Um número real  $\lambda$  é chamado um autovalor de  $-\Delta$  se existe uma função  $u \in \mathcal{C}^2(M)$  não identicamente nula, tal que*

$$-\Delta u = \lambda u. \quad (2.9)$$

*Neste caso,  $u$  é chamada uma **autofunção** correspondente ao autovalor  $\lambda$ . O espaço de soluções da equação acima para um dado autovalor  $\lambda$  é chamado seu **auto-espaço**.*

Existe uma base ortonormal  $\{\phi_j\}_{j \leq 0}$  de  $L^2(M)$  formada por autofunções, ou seja,

$$-\Delta \phi_j = \lambda_j \phi_j \text{ e } \langle \phi_j, \phi_k \rangle_{L^2(M)} := \int_M \phi_j \phi_k dV = \delta_{jk} \quad (2.10)$$

e os autovalores satisfazem

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \uparrow \infty,$$

e se repetem de acordo com sua multiplicidade.

Primeiramente, sabendo que  $\phi$  é uma autofunção de  $-\Delta$ , segue que seu autovalor  $\lambda$  deve ser não-negativo. De fato, fazendo  $f = h = \phi$  e aplicando na Fórmula de Green (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \phi &= -\Delta \phi \\ \Rightarrow \langle -\Delta \phi - \lambda \phi, \phi \rangle_{L^2(M)} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda \int_M \phi^2 dV &= - \int_M \phi \Delta \phi dV \\ \Rightarrow \lambda \|\phi\|_{L^2(M)}^2 &= \int_M |\nabla \phi|^2 dV. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda = \|\phi\|^{-2} \int_M |\nabla \phi|^2 dV \geq 0. \quad (2.11)$$

Além disso, de (2.11), temos que se  $\lambda = 0$ , então  $\phi$  é uma função constante e dessa forma segue que  $\lambda_0 = 0$ . Notamos ainda que a ortogonalidade de auto-espacos distintos é uma consequência direta da Fórmula de Green (2.8). De fato, sejam  $\varphi, \psi$  autofunções dos autovalores  $\lambda, \tau$  respectivamente. Então,

$$0 = \int_M \{\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi\} dV = (\lambda - \tau) \int_M \varphi \psi dV$$

e segue o resultado.

Por fim, se  $\phi_1, \phi_2, \dots$  é uma sequência ortonormal em  $L^2(M)$  de autofunções tal que  $\phi_j$  é uma autofunção de  $\lambda_j$  para cada  $j = 1, 2, 3, \dots$  então  $\phi_1, \phi_2, \dots$  é uma sequência ortonormal completa de  $L^2(M)$ . Em particular, para  $f \in L^2(M)$  temos

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j \quad (2.12)$$

em  $L^2(M)$ , e

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle^2. \quad (2.13)$$

### 2.3 Curvaturas

Tal como anteriormente apresentaremos algumas definições muito mais por fixação de orientação/sinal que por qualquer outro motivo. Dessa forma, uma vez apresentada uma definição já assumiremos todas as propriedades e teoremas clássicos referente a ela. Apresentaremos também curvaturas média de ordem superior que por não serem tão usuais faremos questão de além da definição apresentar os resultados com suas respectivas demonstrações.

**Definição 2.3.1** (*Tensor de curvatura*) Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana. Definimos o tensor de curvatura como a correspondência que associa a cada  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Definição 2.3.2** (*Tensor de Ricci*) Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade riemanniana,  $p \in M$  e  $\{z_1, \dots, z_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ . Então, para quaisquer  $X, Y \in T_p M$  definimos o tensor de Ricci como

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, z_i) Y, z_i \rangle.$$

Além disso, se  $\|X\| = 1$ , então  $\text{Ric}(X, X)$  é chamado de curvatura de Ricci na direção de  $X$ .

Essa definição não depende da escolha da base ortonormal escolhida para  $T_p M$ .

**Definição 2.3.3** (*Curvatura escalar*) Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade riemanniana,  $p \in M$  e  $\{z_1, \dots, z_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ . Definimos a curvatura escalar  $S$  em  $p$  por

$$S(p) = \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j) z_i, z_j \rangle.$$

Uma observação interessante que facilita a fixação das definições é que a curvatura de Ricci foi obtida a partir de uma contração do tensor curvatura e a curvatura escalar é a contração do tensor de Ricci.

Passemos agora à definição de curvatura média de ordem superior. Para o que segue sejam  $\Phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $A$  a segunda forma fundamental de  $\Phi$  com respeito ao campo normal unitário  $N$  que dá a orientação de  $M$  e induz, em cada  $p \in M$ , um operador linear auto-adjunto  $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$ . Para  $1 \leq r \leq n$ , seja  $S_r(p)$  a **r-ésima função simétrica elementar** nos autovalores de  $A_p$ . Dessa forma, obtemos  $n$  funções suaves  $S_r : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que

$$\det(tI - A) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k t^{n-k}, \quad (2.14)$$

onde  $S_0 = 1$  por definição. Quando  $\{e_k\}$  é uma base de  $T_p M$  formada por autovetores de  $A_p$ , com autovalores correspondentes  $\{\lambda_k\}$ , vemos imediatamente que

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (2.15)$$

onde  $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  é o **r-ésimo polinômio simétrico elementar** nas indeterminadas  $X_1, \dots, X_n$ , isto é

$$\sigma_r(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_r}. \quad (2.16)$$

Note que, em particular, vale a relação  $2S_2 + |A|^2 = S_1^2$  onde  $|A|^2 = \langle A, A \rangle = \text{tr}(A^2)$ .

De fato,

$$S_1^2 - 2S_2 = \left( \sum_i \lambda_i \right)^2 - 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \sum_i \lambda_i^2 = |A|^2.$$

**Proposição 2.3.1** *A curvatura escalar  $S$  de uma hipersuperfície  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é dada por*

$$S = S_1^2 - |A|^2.$$

**Demonstração:** Seja  $R$  a curvatura de  $M$ , desde que a curvatura seccional de  $\mathbb{R}^{n+1}$  é zero pela equação de Gauss, temos

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle.$$

Fixado  $p \in M$ , consideremos  $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$  uma base ortonormal de  $T_p M$  formada por autovetores de  $A_p$ . Temos

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j) e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle B(e_i, e_i), B(e_j, e_j) \rangle - \langle B(e_i, e_j), B(e_j, e_i) \rangle \\ &= \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j. \end{aligned}$$

Daí,

$$S = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = S_1^2 - |A|^2.$$

□

Concluimos da proposição acima que no caso em que  $M$  é uma hipersuperfície imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$  vale  $2S_2 = S$ . Apresentaremos agora funções que generalizam o conceito da conhecida curvatura média.

**Definição 2.3.4** (*Curvatura média de ordem superior*) Para  $0 \leq r \leq n$ , definimos a  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  de  $\Phi$  por

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (2.17)$$

Tais funções satisfazem desigualdades algébricas muito úteis, conjuntamente denominadas desigualdades de Newton. A prova do lema e da proposição a seguir foram retiradas de (MUNIZ NETO, Antonio Caminha, 2004).

**Lema 2.3.1** *Se um polinômio  $f \in \mathbb{R}[X]$  possui  $k \geq 1$  raízes reais, então sua derivada  $f'$  possui ao menos  $k - 1$  raízes reais. Em particular, se todas as raízes de  $f$  forem reais então todas as raízes de  $f'$  também serão reais.*

**Demonstração:** Podemos considerar  $k > 1$ . Sejam  $x_1 < \dots < x_r$  raízes reais de  $f$  com multiplicidades respectivamente  $m_1, \dots, m_r$  tais que  $m_1 + \dots + m_r = k$ . Então cada  $x_i$  é raiz de  $f'$ , com multiplicidade  $m_i - 1$ . Por outro lado, entre  $x_i$  e  $x_{i+1}$  há, pelo Teorema de Rôlle, ao menos uma outra raiz de  $f'$ , de modo que contabilizamos ao menos

$$(m_1 - 1) + \dots + (m_r - 1) + (r - 1) = k - 1$$

raízes reais para  $f'$ . O resto é imediato. □

**Proposição 2.3.2** Para  $1 \leq r < n$ , tem-se  $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$ . Ademais, se a igualdade ocorrer para  $r = 1$  ou para algum  $1 < r < n$ , com  $H_{r+1} \neq 0$  neste último caso, então  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .

**Demonstração:** A prova será por indução sobre o número  $n > 1$  de números reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Para  $n = 2$ , temos

$$\begin{aligned} H_1^2 \geq H_0 \cdot H_2 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \geq \lambda_1 \lambda_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - 4\lambda_1 \lambda_2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se,  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Agora, suponha a desigualdade válida para  $(n-1)$  números reais, com igualdade ocorrendo para  $H_{n+1} \neq 0$ , se, e somente se, os  $(n-1)$  números reais forem todos iguais. Dados  $n \geq 3$  reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , seja

$$f(x) = (x + \lambda_1) \dots (x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r}.$$

Então

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (n-r) \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r-1}.$$

Por outro lado, pelo lema anterior, existem  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  tais que

$$\begin{aligned} f'(x) = n(x + \gamma_1) \dots (x + \gamma_{n-1}) &= n \sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i) x^{n-r-1} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n \binom{n-1}{r} H_r(\gamma_i) x^{n-r-1}. \end{aligned}$$

Desde que  $(n-r) \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r}$ , comparando coeficientes obtemos  $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ , para  $0 \leq r \leq n-1$ . Portanto, segue da hipótese de indução que, para  $0 \leq r \leq n-2$ ,

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i) H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\gamma_i) H_{r+1}(\lambda_i).$$

Ademais, se tivermos igualdade para os  $\lambda_i$ , com  $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$ , então também teremos igualdade para os  $\gamma_i$ , como  $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$ . Novamente pela hipótese de indução, segue que  $\gamma_1 = \dots = \gamma_{n-1}$ , e daí  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .

Para terminar, é suficiente provar que  $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i)H_n(\lambda_i)$  com igualdade para  $H_n(\lambda_i) \neq 0$  se e só se todos os  $\lambda_i$  forem iguais. Se algum  $\lambda_i = 0$ , a desigualdade é óbvia. Senão,  $H_n(\lambda_i) \neq 0$  e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n &\Leftrightarrow \left[ \binom{n}{n-1}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{H_n}{\lambda_i} \right]^2 \geq \left[ \binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{\lambda_i \lambda_j} \right] H_n \\ &\Leftrightarrow (n-1) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 \geq 2n \sum_{i<j} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}. \end{aligned}$$

Denotando  $\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}$ , temos a desigualdade acima equivalente a

$$\begin{aligned} &n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - 2n \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \geq 0 \\ \Leftrightarrow &n \left[ \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 - 2 \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \right] - \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

que é verdade pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Também nesse caso, vê-se que ocorre a igualdade se, e somente se, todos os  $\alpha_i$  (e portanto os  $\lambda_i$ ) forem iguais. □

Um outro fato importante sobre essas curvaturas de ordem superior é que toda hipersuperfície compacta isometricamente imersa em uma forma espacial tem um ponto onde todas essas curvaturas têm um mesmo sinal. Para isso, mostraremos que toda imersão isométrica  $\Phi : M^n \rightarrow M_c^{n+1}$  de uma hipersuperfície compacta possui um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas, onde  $M_c^{n+1}$  representa  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  ou um hemisfério aberto de  $\mathbb{S}^{n+1}$  (a depender da escolha da orientação poderíamos ter escolhido mostrar o mesmo trocando positivas por negativas). Para isto, introduziremos algumas notações e relembremos alguns fatos.

Seja  $S_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$  definida por

$$S_c = \begin{cases} \sinh(t), & \text{se } c = -1 \\ t, & \text{se } c = 0 \\ \sen(t), & \text{se } c = 1 \end{cases}$$

e  $d : M_c^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  a função distância para um ponto fixo  $p_0 \in M_c^{n+1}$ , isto é,  $d(p) = d(p, p_0)$ . É sabido que a função distância é suave em  $M_c^{n+1} - \{p_0\}$  e que  $\|\text{grad } d\| = 1$ .

Agora considere uma hipersfera de centro  $p_0$  e raio  $r$ , de  $M_c^{n+1}$ , a saber:

$$S^n(r) = \{p \in M_c^{n+1}; d(p) = r\}.$$

Então o campo unitário normal (interior) a  $S^n(r)$  é  $N = -\text{grad } d$ . Por (JORGE; KOUTROUFIO-TIS, 1981), temos que

$$\langle \bar{\nabla}_v \text{grad } d, w \rangle = \frac{S'_c(d)}{S_c(d)} (\langle v, w \rangle - \langle \text{grad } d, v \rangle \langle \text{grad } d, w \rangle) \quad \forall v, w \in T\bar{M}_c^{n+1}.$$

Tomando  $v, w \in TS^n(r)$  obtemos  $\langle A(v), w \rangle = \langle -\bar{\nabla}_v N, w \rangle = \langle \bar{\nabla}_v \text{grad } d, w \rangle \frac{S'_c(d)}{S_c(d)} \langle v, w \rangle$ . Isto diz que todas as curvaturas principais de  $S^n(r)$  são constantes iguais a  $\frac{S'_c(r)}{S_c(r)}$ .

**Proposição 2.3.3** *Seja  $\Phi : M^n \rightarrow M_c^{n+1}$ , onde  $M_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}$  (hemisfério aberto de  $\mathbb{S}_0^{n+1}$ ), imersão isométrica de uma hipersuperfície compacta, então  $M^n$  possui um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas. Se  $M_c^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}$ , então existe um ponto onde as curvaturas principais são maiores que 1.*

**Demonstração:** Representaremos por  $p_0$  a origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ou o centro do hemisfério aberto  $\mathbb{S}_0^{n+1}$ . Seja  $q \in M^n$  o ponto onde a função  $d(p) = d(p, p_0)$  atinge o máximo. No ponto  $q$ , a hipersuperfície  $M^n$  é mais curvada que a esfera  $S^n(r)$ , então  $\lambda_i \geq \frac{S'_c(r)}{S_c(r)} > 0$ . Para o caso hiperbólico basta observar que  $\frac{S'_{-1}(r)}{S_{-1}(r)} > 1$  (Veja Figura 1.1)

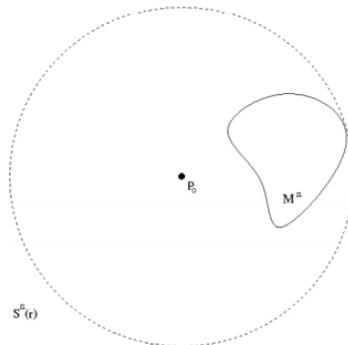


Figura 1.1:

□

## 2.4 Dois operadores do tipo Schrödinger

Usaremos esta seção para apresentar as definições e os resultados mínimos necessários para formalizar a temática sobre os dois principais operadores apresentados aqui.

**Definição 2.4.1 (O operador diferencial  $\mathcal{L}_1$ )** Considere  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta, conexa, sem bordo, imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Definimos o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : H^2(M) &\longrightarrow L^2(M) \\ f &\longmapsto \left(-\Delta - \frac{1}{(n-1)}S\right)(f), \end{aligned}$$

onde  $\Delta$  e  $S$  são, respectivamente, o Laplaciano (Definição 2.2.3) e a curvatura escalar na métrica induzida em  $M$  a partir da métrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Observação 2**  $\mathcal{L}_1$  é um operador do tipo Schrödinger. Esse tipo de operador emergiu da teoria ondulatória da matéria formulada pelo físico austríaco Erwin Schrödinger na terceira década do século XX e é caracterizado por

$$-\Delta + V,$$

onde  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  é o operador multiplicação associado ao potencial  $V = V(x)$  no espaço de Hilbert  $L^2(M)$  e  $-\Delta$  é o operador de Laplace. Em particular, trabalhamos com o operador cujo o potencial é dado por  $V = -\frac{1}{(n-1)}S$ , sendo  $S$  a curvatura escalar da variedade Riemanniana  $M$ .

**Observação 3** Para qualquer função contínua  $V$  em  $M$ , o espectro de  $-\Delta + V$  consiste de uma sequência crescente e ilimitada de autovalores

$$\lambda_1(-\Delta + V) < \lambda_2(-\Delta + V) \leq \lambda_3(-\Delta + V) \leq \dots$$

O primeiro autovalor  $\lambda_1(-\Delta + V)$  é conhecido por ser simples e satisfazer (em virtude do Princípio do Minimax)

$$\lambda_1(-\Delta + V) \leq \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M V dv_g,$$

onde  $\text{Vol}(M)$  e  $dv_g$  são, respectivamente, o volume e o elemento de volume Riemanniano de  $(M, g)$ . Além disso, essa desigualdade é estrita a menos que  $V$  seja constante.

**Definição 2.4.2** Considerando um operador elíptico  $L$ , chamamos  $\lambda_1 > 0$  o autovalor principal de  $L$ .

**Teorema 2.4.1 (Princípio Variacional para o autovalor principal)** .

(i) Temos

$$\lambda_1 = \min\{B[u, u]; u \in H_0^1(U), \|u\|_{L^2} = 1\}. \quad (2.18)$$

(ii) Além disso, o mínimo acima é atingido em uma função  $w_1$ , positiva no interior de  $U$ , que resolve

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{em } U \\ w_1 = 0 & \text{em } \partial U. \end{cases}$$

(iii) Finalmente, se  $u \in H_0^1(U)$  é qualquer solução fraca de

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{em } U \\ w_1 = 0 & \text{em } \partial U, \end{cases}$$

então  $u$  é um múltiplo de  $w_1$ .

**Demonstração:** Vide (EVANS, 2010).

**Observação 4** (i) A afirmação (iii) diz que o autovalor principal  $\lambda_1$  é simples. Em particular,

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

(ii) A expressão (2.18) é a fórmula de Rayleigh e é equivalente a afirmação

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \frac{B[u, u]}{\|u\|_{L^2(U)}^2}.$$

De maneira inteiramente análoga temos os resultados acima para o operador a seguir.

**Definição 2.4.3 (O operador diferencial  $\mathcal{L}$ )** Considere  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta, conexa, sem bordo e imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Definimos o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : H^2(M) &\longrightarrow L^2(M) \\ f &\longmapsto (-\Delta - nH^2)(f), \end{aligned}$$

onde  $\Delta$  e  $H$  são, respectivamente, o Laplaciano (Definição 2.2.3) e a curvatura média normalizada de  $M$ .

## 2.5 Generalização do teorema de Alexandrov e da fórmula de Minkowski

Um resultado de grande relevância no estudo de hipersuperfícies é o teorema atribuído a Alexandrov, que caracteriza a esfera como única hipersuperfície compacta e conexa de curvatura média constante (ALEXANDROV, 1962). Considerando as curvaturas de ordem superior podemos obter um resultado de caracterização análogo.

**Teorema 2.5.1** (*Generalização do teorema de Alexandrov*) *Seja  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano. Se  $H_r$  é constante para algum  $1 \leq r \leq n$ , então  $M^n$  é uma esfera.*

**Demonstração:** Vide (SANTOS, Pedro Jorge Sousa dos, 2015).

□

Há também uma generalização para a conhecida fórmula de Minkowski.

**Teorema 2.5.2** (*Fórmula de Minkowski*) *Seja  $M$  uma hipersuperfície compacta, orientada e  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  sua imersão isométrica. Então vale*

$$\int_M (H_r + H_{r+1} \langle \psi, N \rangle) dM = 0,$$

onde  $N$  é um campo normal unitário e  $H_r$  é a  $r$ -ésima curvatura média de  $M$ .

**Demonstração:** Vide (HSIUNG, 1954).

□

### 3 FUNCIONAL CURVATURA ESCALAR TOTAL

Neste capítulo iniciaremos a parte mais trabalhosa deste trabalho. Primeiramente, consideramos o funcional curvatura escalar total  $\mathcal{W}_1$  que associa a toda hipersuperfície compacta  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a quantidade

$$\mathcal{W}_1(M) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M S dM,$$

onde  $S$  é a curvatura escalar que como vimos na Proposição 2.3.1 pode ser expressa por  $S = n^2 H^2 - |\mathbb{I}|^2$ .

Ao considerar um caminho dentro do espaço das imersões onde o funcional curvatura total está definido, podemos calcular de forma sistematizada cada um dos termos que compõem a fórmula da primeira variação nesse caminho. Apesar de trabalhosos, todos os cálculos que serão apresentados a seguir são de fácil verificação.

#### 3.1 Variações por hipersuperfícies de volume constante

Antes de iniciar as derivações, iniciaremos essa seção explicitando a família de parametrizações e mostraremos uma condição suficiente para que cada elemento preserve o volume.

Considere uma hipersuperfície fechada  $M$  de dimensão  $n$ . Sejam  $\Phi : U \rightarrow M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma parametrização de  $M$  e  $f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves e considere a família de imersões, para  $t$  e  $s$  suficientemente pequenos,

$$X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$X(t, s, x) = \Phi(x) + (t(f_1 \circ \Phi)(x) + s(f_2 \circ \Phi)(x))N(x),$$

onde  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é a aplicação normal de Gauss da imersão  $\Phi$ . Iremos denotar  $f_1(\Phi(x)) = f_1(x)$  e  $f_2(\Phi(x)) = f_2(x)$ . Passemos ao cálculo do volume dessa imersão.

Se  $\mathbf{g}_{ij}(t, s) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle$  e  $X(0, 0, x) = \Phi(x)$ , então

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \left( t \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + s \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) N + (t f_1 + s f_2) \frac{\partial N}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ij}(t, s) &= g_{ij} + 2(t f_1 + s f_2) h_{ij} + t^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + s^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + t s \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + (t f_1 + s f_2)^2 \tau_{ij}, \end{aligned}$$

onde  $h_{ij} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle$  e  $\tau_{ij} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle$  são as entradas da segunda e terceira forma fundamental, respectivamente.

Agora, fazendo  $\mathbf{g}_{ij}(0,0) = g_{ij}$ , temos

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial t}(t,s) = 2f_1 h_{ij} + 2t \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + s \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) + 2(tf_1 + sf_2)f_1 \tau_{ij}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial s}(t,s) = 2f_2 h_{ij} + 2s \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + t \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) + 2(tf_1 + sf_2)f_2 \tau_{ij}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial t}(0,0) = 2f_1 h_{ij} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial s}(0,0) = 2f_2 h_{ij},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t \partial s}(0,0) = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + 2f_1 f_2 \tau_{ij},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t^2}(0,0) = 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + 2f_1^2 \tau_{ij} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial s^2}(0,0) = 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + 2f_2^2 \tau_{ij}.$$

Sabemos que  $\sum_{j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \mathbf{g}_{jk} = \delta_k^i$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \mathbf{g}_{jk} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \mathbf{g}_{jk} + \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \mathbf{g}_{jk} &= - \sum_{j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial t} \\ &= - \sum_{j,r=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{jr}}{\partial t} \right) \mathbf{g}^{ij} \delta_k^r \\ &= - \sum_{j,r,p=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{jr}}{\partial t} \right) \mathbf{g}^{ij} \mathbf{g}^{rp} \mathbf{g}_{pk} \\ &\quad j \leftrightarrow p \\ &= \sum_{j=1}^n \left( - \sum_{r,p=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial t} \right) \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj} \right) \mathbf{g}_{jk}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial s} = - \sum_{r,p=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial s} \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj}. \quad (3.1)$$

Com isso,

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial s}(0,0) = -2f_2 h^{ij}$$

e, de maneira análoga,

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t}(0,0) = -2f_1 h^{ij},$$

onde

$$h^{ij} = \sum_{r,p=1}^n h_{pr} \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj}.$$

Por outro lado, denotando por  $\mathbf{g} = \det(\mathbf{g}_{ij})$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\mathbf{g}(t,s)} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial s} \right) \sqrt{\mathbf{g}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \left[ 2f_2 h_{ij} + 2s \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + t \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(t f_1 + s f_2) f_2 \tau_{ij} \right] \right) \sqrt{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

E para  $t = s = 0$ , temos

$$\frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial s}(0,0) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n g^{ij} (2f_2 h_{ij}) \right) \sqrt{\mathbf{g}} = n f_2 H \sqrt{\mathbf{g}},$$

onde

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} h_{ij}$$

é a função curvatura média. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial s^2} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial s} \right) \sqrt{\mathbf{g}} + \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial s^2} \right) \sqrt{\mathbf{g}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial s} \right) \frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial s}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial s^2}(0,0) &= (-2f_2^2 |\mathbf{\Pi}|^2 + |\text{grad } f_2|^2 + f_2^2 \text{tr } \tau + n^2 f_2^2 \mathbf{H}^2) \sqrt{g} \\ &= (-f_2^2 |\mathbf{\Pi}|^2 + |\text{grad } f_2|^2 + n^2 f_2^2 \mathbf{H}^2) \sqrt{g},\end{aligned}$$

onde

$$|\mathbf{\Pi}|^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} h^{ij} = \text{tr } \tau = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \tau_{ij}$$

é a norma da segunda forma ao quadrado e o traço da terceira forma de  $M$ . Para entender essa equivalência vejamos que  $\|\mathbf{N}\|^2 = 1$  implica que  $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_\alpha}$  não tem componente normal. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} g^{kl} \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_l} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} g^{kl} h_{ik} h_{jl} \\ &= \sum_{i,k} h_{ik} h^{ik}.\end{aligned}$$

De maneira análoga podemos calcular as derivadas de  $\sqrt{g}$  com respeito a  $t$ .

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t}(0,0) = n f_1 \mathbf{H} \sqrt{g}, \quad \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial t^2}(0,0) = (-f_1^2 |\mathbf{\Pi}|^2 + |\text{grad } f_1|^2 + n^2 f_1^2 \mathbf{H}^2) \sqrt{g}.$$

Enquanto o termo misto fica

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial t \partial s}(0,0) = (-f_1 f_2 |\mathbf{\Pi}|^2 + \langle \text{grad } f_1, \text{grad } f_2 \rangle + n^2 f_1 f_2 \mathbf{H}^2) \sqrt{g}$$

O volume da imersão é dado por

$$V(t,s) = \int_U \sqrt{\mathbf{g}(t,s)} dx.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial s} V(t,s) = \int_U \frac{\partial}{\partial s} \left( \sqrt{\mathbf{g}(t,s)} \right) dx.$$

E para  $t = s = 0$ , temos

$$\frac{\partial V}{\partial s}(0,0) = n \int_U f_2 \mathbf{H} \sqrt{g} dx = n \int_M f_2 \mathbf{H}.$$

Até aqui as contas foram feitas para uma  $f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$  qualquer. Tomando  $f_2(x)$  igual a curvatura média em cada ponto de  $M$ , e passando a denotar  $f_1$  simplesmente por  $f$ , temos

$$\frac{\partial V}{\partial s}(0,0) = n \int_M H^2 > 0.$$

Pelo Teorema da função Implícita aplicado à função  $(t,s) \mapsto V(t,s)$ , existe uma vizinhança  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta)$  da origem  $(0,0)$  e uma função  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta, \delta)$  suave com  $\varphi(0) = 0$  satisfazendo

$$V(t, \varphi(t)) = V(0,0), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Logo,

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial V}{\partial s}(t, \varphi(t))\varphi'(t) = 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

$$\varphi'(0) = -\frac{(\partial V / \partial t)(0,0)}{(\partial V / \partial s)(0,0)} = -\frac{\int_M fH}{\int_M H^2} \quad (3.2)$$

e

$$\varphi''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(0,0) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial s}(0,0)\varphi'(0) + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(0,0)\varphi'(0)^2}{\frac{\partial V}{\partial s}(0,0)}.$$

Portanto,

$$\varphi''(0) = -\frac{\int_M [(-|\Pi|^2 + n^2 H^2)(f + \varphi'(0)H)^2 + |\text{grad}(f + \varphi'(0)H)|^2]}{n \int_M H^2}. \quad (3.3)$$

Segue que a variação de  $M$ ,  $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por

$$X(t, x) = \Phi + (tf(x) + \varphi(t)H(x))N(x)$$

preserva volume.

Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  associamos uma imersão  $X_t$  (como definida anteriormente) e, consequentemente, uma hipersuperfície mergulhada  $M_t^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  de mesmo volume que  $S^n$  com  $M = S^n$ . Assim, consideremos o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow \frac{1}{\text{Vol}(S^n)} \int_{M_t} S dM_t, \end{aligned}$$

onde  $S = S(t)$  é a curvatura escalar de  $M_t$  que pode ser expressa, pelo que vimos antes, por  $S = n^2 H^2 - |\mathbb{I}|^2$ .

### 3.2 Derivadas de Primeira Ordem

Nesta seção damos seguimento ao cálculo dos termos que constituem a derivada de primeira ordem do funcional curvatura escalar total. Para isso, consideraremos doravante, salvo menção contrária,  $\Phi : U \rightarrow M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  como uma parametrização de  $M$ ,  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e a família de imersões

$$X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$X(t, x) = \Phi + (tf(x) + \varphi(t)H(x))N(x),$$

onde  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta, \delta)$  é obtida pelo Teorema da Função Implícita de forma que  $\varphi(0) = 0$  e o volume de cada imersão é constante. Assim,

$$X(0, x) = \Phi(x),$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \left( t \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varphi(t) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) N + (tf + \varphi(t)H(x)) \frac{\partial N}{\partial x_i},$$

$$\mathbf{g}_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ij}(t) &= g_{ij} + 2(tf + \varphi(t)H)h_{ij} + t^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \varphi(t)^2 \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \\ &\quad + t\varphi(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + (tf + \varphi(t)H)^2 \tau_{ij}, \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{g}_{ij}(0) = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Observe que  $\det(\mathbf{g}_{ij}(t)) = \det(g_{ij}) + O(t)$ . Consequentemente, para  $t$  suficientemente pequeno  $\mathbf{g}_{ij}(t)$  é uma métrica riemanniana.

Cálculo de  $\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x_i} \Big|_{t=0}$  e  $\frac{\partial^3 X}{\partial t^2 \partial x_i} \Big|_{t=0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \left( t \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varphi(t) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) N + (tf + \varphi(t)H) \frac{\partial N}{\partial x_i} \right) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varphi'(t) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) N + (f + \varphi'(t)H) \frac{\partial N}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x_i} \Big|_{t=0} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varphi'(0) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) N + (f + \varphi'(0)H) \frac{\partial N}{\partial x_i} \quad (3.4)$$

e

$$\frac{\partial^3 X}{\partial t^2 \partial x_i} \Big|_{t=0} = \varphi''(0) \frac{\partial H}{\partial x_i} N + \varphi''(0) H \frac{\partial N}{\partial x_i} \quad (3.5)$$

Cálculo de  $\frac{\partial^3 X}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \Big|_{t=0}$  e  $\frac{\partial^4 X}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} \Big|_{t=0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} + \left( t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right) N + \left( t \frac{\partial f}{\partial x_j} + \varphi(t) \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) \frac{\partial N}{\partial x_i} \\ &\quad + \left( t \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varphi(t) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N}{\partial x_j} + (tf + \varphi(t)H) \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \Big|_{t=0} &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi'(0) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right) N + \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} + \varphi'(0) \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) \frac{\partial N}{\partial x_i} \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varphi'(0) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \frac{\partial N}{\partial x_j} + (f + \varphi'(0)H) \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^4 X}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} \Big|_{t=0} = \varphi''(0) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} N + \varphi''(0) \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial N}{\partial x_i} + \varphi''(0) \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial x_j} + \varphi''(0) H \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Cálculo de  $\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0}$ :

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial t} &= 2(f + \varphi'(t)H)h_{ij} + 2t \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + 2\varphi(t)\varphi'(t) \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \\ &\quad + \varphi(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + t\varphi'(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + 2(tf + \varphi(t)H)(f + \varphi'(t)H)\tau_{ij}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) h_{ij}. \quad (3.6)$$

**Cálculo de  $\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0}$ :**

Vimos que

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} = - \sum_{r,p=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial t} \right) \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj}.$$

Fazendo  $t = 0$ , temos

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \sum_{p,r=1}^n \left[ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) h_{pr} \right] g^{ip} g^{rj}.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} = -2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) h^{ij}. \quad (3.7)$$

**Cálculo de  $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\mathbf{g}} \Big|_{t=0}$ :**

Denotando por  $\mathbf{g} = \det(\mathbf{g}_{ij})$ , temos por um cálculo idêntico já feito, que

$$\frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial t} \right) \sqrt{\mathbf{g}}.$$

Para  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n g^{ij} 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) h_{ij} \right) \sqrt{\mathbf{g}} \\ &= (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left( \sum_{i,j=1}^n g^{ij} h_{ij} \right) \sqrt{\mathbf{g}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\mathbf{g}} \Big|_{t=0} = n(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \mathbf{H} \sqrt{\mathbf{g}} \quad (3.8)$$

**Cálculo de  $\frac{\partial N}{\partial t} \Big|_{t=0}$ :**

De

$$\left\langle N, \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

temos por derivação com respeito a  $t$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x_i} \right\rangle = 0.$$

Ou ainda,

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial t} \Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial x_i} \Big|_{t=0} \right\rangle$$

e por (3.4),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial N}{\partial t} \Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle &= - \left\langle N, \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varphi'(0) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) N + (f + \varphi'(0)H(x)) \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \varphi'(0)H). \end{aligned}$$

Como

$$\left\langle N, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = 0, \quad \text{pois } \|N\|^2 = 1,$$

temos

$$\frac{\partial N}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \varphi'(0)H) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = -\text{grad}(f + \varphi'(0)H). \quad (3.9)$$

**Cálculo de  $\frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0}$ :**

Por definição, os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por  $\mathbf{h}_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle$ , sendo  $\left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, N \right\rangle = 0$ . Derivando com respeito a  $x_j$  deduzimos

$$\mathbf{h}_{ij} = - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, N \right\rangle,$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} = - \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial x_i \partial x_j}, N \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle$$

e em  $t = 0$ , por (3.9) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= - \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \Big|_{t=0}, N \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial N}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\rangle \\ &= - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi'(0) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right) + (f + \varphi'(0)H) \tau_{ij} + \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}, -\text{grad}(f + \varphi'(0)H) \right\rangle \\ &= - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi'(0) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right) + (f + \varphi'(0)H) \tau_{ij} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} + \varphi'(0) \frac{\partial H}{\partial x_k} \right), \end{aligned}$$

$$\text{onde } \Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right\rangle.$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} = (f + \varphi'(0)H) \tau_{ij} + \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} + \varphi'(0) \frac{\partial H}{\partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} = (f + \varphi'(0)H) \tau_{ij} - (\text{Hess}(f + \varphi'(0)H))_{ij}. \quad (3.10)$$

**Cálculo de  $\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0}$ :**

Temos que

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \mathbf{h}_{ij}$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \mathbf{h}_{ij} + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t}$$

Logo, em  $t = 0$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \left( -(f + \varphi'(0)H) |\Pi|^2 - \Delta(f + \varphi'(0)H) \right). \quad (3.11)$$

**Cálculo de  $\frac{\partial}{\partial t} H^2 \Big|_{t=0}$ :**

$$\frac{\partial}{\partial t} H^2 = 2H \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} H^2 \Big|_{t=0} = 2H \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

e por (3.11) e (3.8)

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^2 \right|_{t=0} = 2\mathbf{H} \left( -\frac{1}{n}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{n}\Delta(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \right) \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \int_U \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\mathbf{H}^2 \sqrt{g}) dx &= \int_U \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \mathbf{H}^2 \sqrt{g} dx + \int_U \mathbf{H}^2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\sqrt{g}) dx \\ &= -\frac{2}{n} \int_M \mathbf{H} \Delta(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) - \frac{2}{n} \int_M \mathbf{H}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|\mathbf{H}|^2 + n \int_M (f + \varphi'(0)\mathbf{H})\mathbf{H}^3 \\ &= -\frac{2}{n} \int_M \mathbf{H} \Delta(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) - \frac{2}{n} \int_M (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left( \mathbf{H}|\mathbf{H}|^2 - \frac{n^2}{2}\mathbf{H}^3 \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_U \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\mathbf{H}^2 \sqrt{g}) dx = \frac{2}{n} \int_M (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left( -\Delta\mathbf{H} - \mathbf{H}|\mathbf{H}|^2 + \frac{n^2}{2}\mathbf{H}^3 \right). \quad (3.13)$$

Usando linearidade na relação  $S = n^2\mathbf{H}^2 - |\mathbf{H}|^2$  vemos que para calcular  $\mathscr{W}'_1(0)$  precisamos ainda calcular uma expressão para  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \int_{M_t} |\mathbf{H}|^2$ . Vejamos,

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \int_{M_t} |\mathbf{H}|^2 = \int_U \left. \frac{\partial |\mathbf{H}|^2}{\partial t} \right|_{t=0} \sqrt{g} + \int_U |\mathbf{H}|^2 \left. \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} \right|_{t=0}$$

usando que  $|\mathbf{H}|^2 = \sum_{i,j=1}^n h^{ij} h_{ij}$ , onde  $h^{ij} = \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} g^{jl} h_{kl}$ . Temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial |\mathbf{H}|^2}{\partial t} \right|_{t=0} &= \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} h^{ij} + \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \left. \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i,j=1}^n [(f + \varphi'(0)\mathbf{H})\tau_{ij} h^{ij} - (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij} h^{ij}] + \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \left. \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \left. \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} &= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial t} g^{jl} h_{kl} + \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} g^{jl} \left. \frac{\partial h_{kl}}{\partial t} \right|_{t=0} \\ &= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial t} g^{jl} h_{kl} + \sum_{k,l=1}^n \left( (f + \varphi'(0)\mathbf{H})h^{kl} \tau_{kl} - (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl} h^{kl} \right) \\ &= (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left[ -4 \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{ik} g^{jl} h_{kl} h_{ij} + \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} \right] - \sum_{i,j=1}^n (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij} h^{ij} \\ &= -3(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} - \sum_{i,j=1}^n (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij} h^{ij}, \end{aligned}$$

onde acima usamos (3.10) e (3.7). Para ver que  $\sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} = \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{ik} g^{jl} h_{kl} h_{ij}$  note que

$$\sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} = \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle h^{ij} = \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{ij} g^{kl} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ik} h_{jl} h^{ij} g^{kl}.$$

Portanto,

$$\left. \frac{\partial |\Pi|^2}{\partial t} \right|_{t=0} = -2 \sum_{i,j=1}^n [\tau_{ij} h^{ij} (f + \varphi'(0)H) + (\text{Hess}(f + \varphi'(0)H))_{ij} h^{ij}].$$

Usando a expressão acima com a expressão obtida em (3.8) temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \int_{M_t} |\Pi|^2 &= -2 \sum_{i,j=1}^n \int_M (f + \varphi'(0)H) \tau_{ij} h^{ij} + (\text{Hess}(f + \varphi'(0)H))_{ij} h^{ij} \\ &\quad + n \int_M |\Pi|^2 H(f + \varphi'(0)H) \\ &= -2 \int_M \text{tr}(A^3) (f + \varphi'(0)H) + \text{tr}(A \text{Hess}(f + \varphi'(0)H)) + n \int_M |\Pi|^2 H(f + \varphi'(0)H) \\ &= \int_M (f + \varphi'(0)H) (nH |\Pi|^2 - 2\text{tr}(A^3)) - 2 \int_M \text{tr}(A \text{Hess}(f + \varphi'(0)H)), \end{aligned}$$

onde é o operador de forma que satisfaz  $h_{ij} = \langle A_N(\frac{\partial}{\partial x_i}), \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ . Podemos encontrar as expressões usadas acima vendo que

$$\begin{aligned} \text{tr}(A \text{Hess}(f + \varphi'(0)H)) &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left\langle A \text{Hess}(f + \varphi'(0)H) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left\langle \text{Hess}(f + \varphi'(0)H) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), A \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} \left\langle \text{Hess}(f + \varphi'(0)H) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), g^{kl} h_{jk} \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} g^{kl} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)H))_{il} h_{jk} \\ &= \sum_{i,l} h^{il} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)H))_{il} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{tr}(A^3) &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left\langle A^3 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left\langle A^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), A \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} \left\langle A^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), g^{kl} h_{jk} \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} g^{kl} h_{jk} \left\langle A \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), A \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l,p,r=1}^n g^{ij} g^{kl} h_{jk} \left\langle A \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), g^{pr} h_{lp} \frac{\partial}{\partial x_r} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l,p,r=1}^n g^{ij} g^{kl} g^{pr} h_{jk} h_{lp} h_{ir} = \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \tau_{ij}.
\end{aligned}$$

A fim de simplificar ainda mais a expressão

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \int_{M_t} |\Pi|^2 = \int_M (f + \varphi'(0)H)(nH|\Pi|^2 - 2\text{tr}(A^3)) - 2 \int_M \text{tr}(A \text{Hess}(f + \varphi'(0)H))$$

usaremos o lema a seguir ( $M$  continua nas mesmas condições apresentadas no início deste capítulo).

**Lema 3.2.1** *Seja  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $A$  o operador de forma. Então,*

$$\text{tr}(A \text{Hess } \phi) = \text{div}(A \text{grad } \phi) - n \langle \text{grad} H, \text{grad } \phi \rangle.$$

**Demonstração:** Dado  $p \in M$  podemos considerar um sistema de coordenadas em torno de  $p$  tal que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{1 \leq i \leq n}$  tal que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}(p) = 0$ . Em  $p$  temos

$$\begin{aligned}
\text{div}(A \text{grad } \phi)(p) &= \text{div} \left( A g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \text{div} \left( g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} A \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \left\langle g^{kl} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_l} + g^{kl} g^{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_l}, A \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\
&\quad + g^{ij} g^{kl} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} A \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \\
&= \text{tr}(A \text{Hess } \phi) + g^{ij} g^{kl} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} h_{jl}.
\end{aligned}$$

Usando a equação de Codazzi, como o ambiente é o espaço euclidiano, segue que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} h_{jl} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} h_{kl}. \text{ E, portanto, } g^{kl} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} h_{jl} = n \frac{\partial}{\partial x_k}(H) \text{ e o resultado segue.}$$

□

Tomando  $\phi = (f + \phi'(0)\mathbf{H})$  no lema acima e de posse do teorema da divergência, podemos afirmar que

$$\int_M \text{tr}(A \text{Hess}(f + \phi'(0)\mathbf{H})) = -n \int_M \langle \text{grad}\mathbf{H}, \text{grad}(f + \phi'(0)\mathbf{H}) \rangle = n \int_M (f + \phi'(0)\mathbf{H})\Delta\mathbf{H}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \int_{M_t} |\Pi|^2 = \int_M (f + \phi'(0)\mathbf{H})(n|\Pi|^2\mathbf{H} - 2\text{tr}(A^3) - 2n\Delta\mathbf{H}). \quad (3.14)$$

Com isso, a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional

$$\mathscr{W}_2(M) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M |\Pi|^2 dM$$

será

$$n|\Pi|^2\mathbf{H} - 2\text{tr}(A^3) - 2n\Delta\mathbf{H} = \alpha\mathbf{H} \quad (3.15)$$

Ou seja, os pontos críticos de  $\mathscr{W}_2$  são soluções da equação acima (para uma constante  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

É possível verificar que essa equação não é de solução única. Tanto a esfera como o toro de Clifford são pontos críticos desse funcional.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= -2n \int_M \Delta\mathbf{H}(f + \phi'(0)\mathbf{H}) - 3n \int_M \mathbf{H}(f + \phi'(0)\mathbf{H})|\Pi|^2 \\ &\quad + n^3 \int_M \mathbf{H}^3(f + \phi'(0)\mathbf{H}) + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_M (f + \phi'(0)\mathbf{H})(\tau_{ij}h^{ij}) \\ &\quad + (\text{Hess}(f + \phi'(0)\mathbf{H}))_{ij}h^{ij} \\ &= -3n \int_M \mathbf{H}(f + \phi'(0)\mathbf{H})|\Pi|^2 + \int_M (n^3\mathbf{H}^3 + 2\text{tr}(A^3))(f + \phi'(0)\mathbf{H}) \\ &= \int_M (n^3\mathbf{H}^3 - 3n\mathbf{H}|\Pi|^2 + 2\text{tr}(A^3))(f + \phi'(0)\mathbf{H}). \end{aligned}$$

Para  $n = 2$  vale  $n^3\mathbf{H}^3 - 3n\mathbf{H}|\Pi|^2 + 2\text{tr}(A^3) \equiv 0$ . Isso indicaria que em dimensão 2 o funcional funcional  $\mathscr{W}_1$  tem sempre ponto crítico em  $t = 0$  para qualquer  $M$ . Isso não é tão surpreendente se levarmos em consideração que para  $n = 2$  vale  $S = 2K$ . Então pelo teorema de Gauss-Bonnet e usando que  $M_t$  é orientável e compacta, temos

$$\mathscr{W}_1(t) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{M_t} S dM_t = \frac{2}{4\pi} \int_{M_t} K dM_t = \frac{1}{2\pi} 2\pi\chi(M_t) = 2 - 2g_t,$$

onde  $g_t$  indica o gênero de  $M_t$  que é constante desde que  $|t| < \delta$  para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno. Para dimensões maiores temos o lema a seguir.

**Lema 3.2.2** Para  $n \geq 3$  vale

$$n^3 \mathbf{H}^3 - 3n \mathbf{H} |\mathbf{\Pi}|^2 + 2 \text{tr}(A^3) = 6S_3,$$

onde  $S_3$  é a terceira função simétrica elementar.

**Demonstração:** Considere  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$  base ortonormal formada por autovetores de  $A$  com  $A(e_i) = \lambda_i e_i$ . Façamos por indução em  $n$ .

Para  $n = 3$  temos

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) \\ = & (\lambda_1 + \lambda_2)^3 + 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2)\lambda_3 + 3(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3^2 + \lambda_3^3 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_1 + \lambda_2) \\ & - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3 - 3(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3^2 - 3\lambda_3^3 + 2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) \\ = & \lambda_1^3 + 3\lambda_1^2\lambda_2 + 3\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_2^3 + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^3 - 3(\lambda_1^3 + \lambda_2^3) - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 \\ & + 2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3) - \lambda_3^3 \\ = & 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 6S_3. \end{aligned}$$

Para  $n = 4$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^3 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + 2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3) \\ = & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 + 3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2\lambda_4 + 3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_4^2 + \lambda_4^3 \\ & - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\lambda_4 \\ & - 3\lambda_4^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 3\lambda_4^3 + 2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3) \\ = & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) \\ & + 3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2\lambda_4 + \lambda_4^3 \\ & + 3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_4^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\lambda_4 - 3\lambda_4^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_4^3 \\ = & 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_3)\lambda_4 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\lambda_4 \\ = & 6\sigma_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_4 + 6\lambda_1\lambda_3\lambda_4 = 6\sigma_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 6S_3. \end{aligned}$$

Supondo por indução que o resultado seja válido para  $k \geq 4$ , temos:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1})^3 - 3(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 + \lambda_{k+1}^2)(\lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1}) \\
& + 2(\lambda_1^3 + \dots + \lambda_k^3 + \lambda_{k+1}^3) \\
= & (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^3 + 3(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^2 \lambda_{k+1} + 3(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \lambda_{k+1}^2 + \lambda_{k+1}^3 \\
& - 3(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2) \lambda_{k+1} - 3(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \\
& - 3\lambda_{k+1}^2(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) - 3\lambda_{k+1}^3 + 2(\lambda_1^3 + \dots + \lambda_k^3 + \lambda_{k+1}^3) \\
= & (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^3 - 3(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + 2(\lambda_1^3 + \dots + \lambda_k^3) \\
& + 3(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^2 \lambda_{k+1} + \lambda_{k+1}^3 + 3(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \lambda_{k+1}^2 \\
& - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \lambda_4 - 3\lambda_4^2(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) - \lambda_{k+1}^3 \\
= & 6\sigma_3(\lambda_1 \dots \lambda_k) + 3(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 + 2\sigma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \lambda_{k+1} - 3(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2) \lambda_{k+1} \\
= & 6\sigma_3(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) = 6S_3.
\end{aligned}$$

□

Usando que  $H_3 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} S_3$  podemos escrever

$$n^3 H^3 - 3nH|\Pi|^2 + 2\text{tr}(A^3) = n(n-1)(n-2)H_3.$$

Dessa forma temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \int_{M_t} S = n(n-1)(n-2) \int_M H_3(f + \varphi'(0)H). \quad (3.16)$$

### 3.3 Derivadas de Segunda Ordem

Nesta seção iniciamos o cálculo dos termos que constituem a derivada de segunda ordem do funcional curvatura escalar total.

**Cálculo de  $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t^2} \right|_{t=0}$ :**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t^2} &= 2\varphi''(t)Hh_{ij} + 2\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + 2\varphi'(t)^2 \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} + 2\varphi(t)\varphi''(t) \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \\
&+ 2\varphi'(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + t\varphi''(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + 2(f + \varphi'(t)H)^2 \tau_{ij} \\
&+ 2(tf + \varphi(t)H)\varphi''(t)H\tau_{ij}.
\end{aligned}$$

Fazendo  $t = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= 2\varphi''(0)\mathbf{H}h_{ij} + 2\frac{\partial}{\partial x_i}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})\frac{\partial}{\partial x_j}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \\ &\quad + 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2\tau_{ij}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Cálculo de  $\frac{\partial^2 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} = - \sum_{r,p=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial t} \right) \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj}$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^2} = - \sum_{r,p=1}^n \left[ \left( \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{pr}}{\partial t^2} \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{g}^{ip}}{\partial t} \mathbf{g}^{rj} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{g}^{rj}}{\partial t} \mathbf{g}^{ip} \right) \right].$$

Em  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} - \sum_{r,p=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{pr}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj} &= - \sum_{r,p=1}^n \left[ 2\varphi''(0)\mathbf{H}h_{pr} + 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2\tau_{pr} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_p} + \varphi'(0) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_p} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x_r} + \varphi'(0) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_r} \right) \right] \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj} \\ &= -2\varphi''(0)\mathbf{H}h^{ij} - 2 \sum_{k,l=1}^n (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 g^{ik} g^{jl} \tau_{kl} + \frac{\partial}{\partial x_k}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \frac{\partial}{\partial x_l}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) g^{ik} g^{jl}. \end{aligned}$$

Mas

$$- \sum_{r,p=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial \mathbf{g}^{ip}}{\partial t} \Big|_{t=0} \mathbf{g}^{rj} \right) = 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{r,p=1}^n g^{rj} h_{pr} h^{ip}$$

e

$$- \sum_{r,p=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{pr}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial \mathbf{g}^{rj}}{\partial t} \Big|_{t=0} \mathbf{g}^{ip} \right) = 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{r,p=1}^n g^{ip} h_{pr} h^{rj}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= -2\varphi''(0)\mathbf{H}h^{ij} - 2 \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \frac{\partial}{\partial x_l} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) g^{ik} g^{jl} \\ &\quad - 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{k,l=1}^n g^{ik} g^{jl} \tau_{kl} + 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{k,l=1}^n g^{jl} h_{kl} h^{ik} \\ &\quad + 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{k,l=1}^n g^{ik} h_{kl} h^{jl}. \end{aligned}$$

Cálculo de  $\left. \frac{\partial^2 \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t^2} \right|_{t=0}$ :

Considerando que

$$\frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right) \sqrt{\mathbf{g}},$$

temos

$$\frac{\partial^2 \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \sqrt{\mathbf{g}} + \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} \sqrt{\mathbf{g}} + \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t} \right)$$

Em  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} \sqrt{\mathbf{g}} &= -2(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j=1}^n h^{ij} h_{ij} \sqrt{\mathbf{g}} \\ &= -2(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \sqrt{\mathbf{g}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left. \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} \right|_{t=0} \sqrt{\mathbf{g}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( 2\varphi''(0)\mathbf{H}h_{ij} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \frac{\partial}{\partial x_j} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \right. \\ &\quad \left. + 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \tau_{ij} \right) \sqrt{\mathbf{g}} \\ &= \left( n\varphi''(0)\mathbf{H}^2 + |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 + (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \right) \sqrt{\mathbf{g}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} (2(f + \varphi'(0)\mathbf{H})h_{ij}) (n(f + \varphi'(0)\mathbf{H})\mathbf{H}\sqrt{\mathbf{g}})$$

$$= n(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \mathbf{H} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} h_{ij} \sqrt{g} = n^2 (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \mathbf{H}^2 \sqrt{g}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = & \left[ - (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 |\mathbf{H}|^2 + n\varphi''(0)\mathbf{H}^2 + |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 \right. \\ & \left. + n^2 (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \mathbf{H}^2 \right] \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cálculo de  $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2} \right|_{t=0}$ :

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2}, \mathbf{N} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right\rangle.$$

Por (3.7) vale

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2} \Big|_{t=0}, \mathbf{N} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \Big|_{t=0}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\rangle = - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2.$$

Além disso,

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\langle \mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t \partial x_k} \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}, \frac{\partial^3 \mathbf{X}}{\partial t^2 \partial x_k} \right\rangle.$$

Logo,

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2} \Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle = -2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \Big|_{t=0}, \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t \partial x_k} \Big|_{t=0} \right\rangle - \left\langle \mathbf{N}, \frac{\partial^3 \mathbf{X}}{\partial t^2 \partial x_k} \Big|_{t=0} \right\rangle.$$

Usando (3.4), (3.5) e (3.9) temos

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2} \Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle = 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \right\rangle - \varphi''(0) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_k}.$$

Assim,

$$\left. \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \Big|_{t=0}, N \right\rangle N + \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= -|\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 N - \varphi''(0) \text{grad}H \\ &+ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \frac{\partial N}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Cálculo de**  $\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$ :

Usando que

$$\mathbf{h}_{ij} = - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \mathbf{N} \right\rangle$$

temos

$$\frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} = - \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial x_i \partial x_j}, \mathbf{N} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right\rangle$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^2} = - \left\langle \frac{\partial^4 X}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j}, \mathbf{N} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2} \right\rangle.$$

Em  $t = 0$ ,

$$- \left\langle \frac{\partial^4 X}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} \Big|_{t=0}, \mathbf{N} \right\rangle = -\varphi''(0) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi''(0) H \tau_{ij}$$

e

$$\begin{aligned} -2 \left\langle \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \Big|_{t=0}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\rangle &= 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)), \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)), \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle \\ &+ 2 (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)), \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Enquanto,

$$\begin{aligned} - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \right\rangle &= -|\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 h_{ij} + \varphi''(0) \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial H}{\partial x_k} \\ &- 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial N}{\partial x_k} \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \Gamma_{ij}^k = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= \varphi''(0) \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_k} \right) + \varphi''(0) \mathbf{H} \tau_{ij} - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 h_{ij} \\ &\quad + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle \\ &\quad + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle \\ &\quad + 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial N}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Cálculo de  $\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^2} \mathbf{h}_{ij} + \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^2}$$

Em  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} h_{ij} &= -\frac{2}{n} \varphi''(0) \mathbf{H} |\Pi|^2 + \frac{6}{n} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \frac{\partial}{\partial x_j} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \end{aligned}$$

$$\text{onde usamos que } \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} = \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h^{ik} h_{kl} h_{ij}$$

Por (3.7) e (3.10) segue que

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -\frac{4}{n} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} \\ &\quad + \frac{4}{n} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij} h^{ij} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{n} \varphi''(0) (-\Delta \mathbf{H} + \mathbf{H} |\Pi|^2) - \mathbf{H} |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 \\ &+ \frac{2}{n} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \Delta N \rangle \\ &+ \frac{4}{n} \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_i} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

onde  $\Delta N$  é o vetor de  $\mathbb{R}^{n+1}$  cuja  $i$ -ésima coordenada é o Laplaciano da função coordenada  $N_i$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{n} \varphi''(0) (-\Delta \mathbf{H} - \mathbf{H} |\Pi|^2) - \mathbf{H} |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 \\ &+ \frac{2}{n} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} h^{ij} + \frac{4}{n} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij} h^{ij} \\ &+ \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_i} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_j} \\ &+ \frac{2}{n} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \Delta N \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \int_{M_t} |\Pi|^2 = \int_U \frac{\partial^2 |\Pi|^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \sqrt{g} + 2 \int_U \frac{\partial |\Pi|^2}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} \Big|_{t=0} + \int_U |\Pi|^2 \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial t^2} \Big|_{t=0},$$

vale

$$\frac{\partial^2 |\Pi|^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} h^{ij} + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} + \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \frac{\partial^2 h^{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} h^{ij} &= \sum_{i,j=1}^n \varphi''(0) [\mathbf{H} \tau_{ij} h^{ij} - (\text{Hess } \mathbf{H})_{ij} h^{ij}] - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \\
&+ 4 \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_i} \left\langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle \\
&+ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), (\text{Hess } N)_{ij} \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \varphi''(0) [\mathbf{H} \tau_{ij} h^{ij} - (\text{Hess } \mathbf{H})_{ij} h^{ij}] - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \\
&+ 4 \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_i} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_j} \\
&+ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), (\text{Hess } N)_{ij} \rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -8(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{k,l=1}^n h^{jl} h_{kl} g^{ik} [(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \tau_{ij} - \text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})_{ij}] \\
&+ 2 \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^n \left[ (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \tau_{ij} - \text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})_{ij} \right] g^{ik} g^{jl} \\
&\quad \left[ (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \tau_{kl} - \text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})_{kl} \right].
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} g^{jl} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \tau_{ij} \tau_{kl} \\
&+ 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} g^{jl} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl} \\
&- 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n \tau_{ij} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl} g^{ik} g^{jl} \\
&- 8(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n \tau_{ij} h_{kl} h^{jl} g^{ik} \\
&+ 8 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} h_{kl} h^{jl} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 + 2|\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 \\
&\quad - 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h_{ij} h^{ik} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl} \\
&\quad - 8(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl} \\
&\quad + 8 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} h_{kl} h^{jl} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial h^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -6(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl} + 2|\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 \\
&\quad + 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} h_{kl} h^{jl} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \frac{\partial^2 h^{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \left[ \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} g^{ik} g^{jl} h_{ij} + 4 \frac{\partial h_{kl}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial g^{ik}}{\partial t} \Big|_{t=0} g^{jl} h_{ij} + 2 \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} g^{jl} h_{kl} h_{ij} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial g^{ik}}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial g^{jl}}{\partial t} \Big|_{t=0} h_{kl} h_{ij} \right] \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^n \left\{ \varphi''(0) g^{ik} g^{jl} h_{ij} [(\mathbf{H} \tau_{kl} - \text{Hess } \mathbf{H})_{kl}] - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 g^{ik} g^{jl} h_{kl} h_{ij} \right\} \\
&\quad + 4 \sum_{i,j,k,l,p,r=1}^n g^{pr} g^{ik} g^{jl} h_{ij} h_{rl} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_k} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_p} \\
&\quad + 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} g^{jl} h_{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), (\text{Hess } N)_{kl} \rangle \\
&\quad - 8 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h^{ik} h_{ij} \left[ (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \tau_{kl} - (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl} \right] \\
&\quad - 4 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h_{kl} h_{ij} \left[ \varphi''(0) \mathbf{H} h^{ik} + (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{pr} g^{ip} g^{rk} \tau_{pr} \right] \\
&\quad - 4 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} h_{ik} h^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \frac{\partial}{\partial x_l} (f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \\
&\quad + 16(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl} + 8(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl}.
\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\left. \sum_{i,j=1}^n \mathbf{h}_{ij} \frac{\partial^2 h^{ij}}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= \varphi''(0) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} [\mathbf{H} \tau_{ij} - (\text{Hess } \mathbf{H})_{ij}] - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \\
&+ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), (\text{Hess } N)_{ij} \rangle \\
&- 8 \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{ik} h_{ij} h^{jl} h_{kl} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 + 24(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl} \\
&+ 8(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h^{ik} h_{ij} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl} \\
&- 4\varphi''(0)\mathbf{H} \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h_{kl} h_{ij} h^{ik} - 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{ik} h_{ij} h^{jl} h_{kl} \\
&= -\varphi''(0) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} (\text{Hess } \mathbf{H})_{ij} + 3\mathbf{H} h^{ij} \tau_{ij} - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \\
&+ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), (\text{Hess } N)_{ij} \rangle \\
&+ 12 \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{ik} h_{ij} h^{jl} h_{kl} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 + 8(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h^{ik} h_{ij} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl}.
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 |\mathbf{\Pi}|^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= \sum_{i,j=1}^n \varphi''(0) [(\text{Hess } \mathbf{H})_{ij} h^{ij} + \mathbf{H} \tau_{ij} h^{ij}] - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \\
&+ 4 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{kl} h^{ij} h_{jl} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_i} \frac{\partial(f + \varphi'(0)\mathbf{H})}{\partial x_k} \\
&+ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), (\text{Hess } N)_{ij} \rangle \\
&- 6(f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl} + 2|\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 \\
&+ 4(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} h_{kl} h^{jl} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{ij} \\
&- \varphi''(0) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} (\text{Hess } \mathbf{H})_{ij} + 3\mathbf{H} h^{ij} \tau_{ij} - |\text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H})|^2 |\mathbf{\Pi}|^2 \\
&+ 2(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}), (\text{Hess } N)_{ij} \rangle \\
&+ 12 \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{ik} h_{ij} h^{jl} h_{kl} (f + \varphi'(0)\mathbf{H})^2 \\
&+ 8(f + \varphi'(0)\mathbf{H}) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{jl} h^{ik} h_{ij} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)\mathbf{H}))_{kl}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 |\Pi|^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= -2 \sum_{i,j=1}^n \varphi''(0) [(\text{Hess } H)_{ij} h^{ij} + H \tau_{ij} h^{ij}] - 2 |\text{grad}(f + \varphi'(0)H)|^2 |\Pi|^2 \\
&+ 4 \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{kl} h^{ij} h_{jl} \frac{\partial(f + \varphi'(0)H)}{\partial x_i} \frac{\partial(f + \varphi'(0)H)}{\partial x_k} \\
&+ 4(f + \varphi'(0)H) \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)H), (\text{Hess } N)_{ij} \rangle \\
&+ 6(f + \varphi'(0)H)^2 \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij} h^{ik} h_{kl} h^{jl} + 2 |\text{Hess}(f + \varphi'(0)H)|^2 \\
&+ 12(f + \varphi'(0)H) \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ik} h_{kl} h^{jl} (\text{Hess}(f + \varphi'(0)H))_{ij}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} \int_{M_t} |\Pi|^2 &= \int_M \left. \frac{\partial^2 |\Pi|^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} - 4 \int_M n(f + \varphi'(0)H)^2 H \left( \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \tau_{ij} \right) \\
&- 4 \sum_{i,j=1}^n \int_M n H (f + \varphi'(0)H) \text{Hess}(f + \varphi'(0)H)_{ij} h^{ij} \\
&+ \int_M |\Pi|^2 ((f + \varphi'(0)H)^2 (n^2 H^2 - |\Pi|^2) + n \varphi''(0) H^2 \\
&+ |\text{grad}(f + \varphi'(0)H)|^2).
\end{aligned}$$

Usando os termos calculados anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} \int_{M_t} S &= - \int_M \left. \frac{\partial^2 |\Pi|^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} + 8 \int_M n(f + \varphi'(0)H)^2 H \sum_{i,j=1}^n h^{ij} \tau_{ij} \\
&+ n \varphi''(0) \int_M 2 \left( -\Delta H - H |\Pi|^2 + \frac{n^2}{2} H^3 \right) H - H^2 |\Pi|^2 \\
&+ \int_M (f + \varphi'(0)H)^2 (n^2 H^2 - |\Pi|^2)^2 + 2 \int_M (f + \varphi'(0)H)^2 |\Pi|^4 \\
&+ 4 \int_M (f + \varphi'(0)H) \Delta(f + \varphi'(0)H) |\Pi|^2 \\
&+ 2 \int_M (\Delta(f + \varphi'(0)H))^2 - 4 \int_M n^2 H^2 (f + \varphi'(0)H) \Delta(f + \varphi'(0)H) \\
&- 4n^2 \int_M (f + \varphi'(0)H)^2 H^2 |\Pi|^2 - \int_M |\text{grad}(f + \varphi'(0)H)|^2 (n^2 H^2 + |\Pi|^2) \\
&+ 4n \int_M H (f + \varphi'(0)H) \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)H), \Delta N \rangle \\
&+ 4n \sum_{i,j=1}^n \int_M h^{ij} \frac{\partial(f + \varphi'(0)H)}{\partial x_i} \frac{\partial(f + \varphi'(0)H)}{\partial x_j} H \\
&+ 12n \int_M H (f + \varphi'(0)H) \left( \sum_{i,j=1}^n (\text{Hess}(f + \varphi'(0)H))_{ij} h^{ij} \right).
\end{aligned}$$

No capítulo 4 iremos classificar a esfera como o único ponto crítico do funcional  $\mathcal{W}_1$ . Na classificação do tipo de ponto crítico primeiramente usamos a segunda derivada e chegamos à conclusão que ela é mínima para toda  $f$  que não é autofunção. Para essa excessão, a segunda derivada não tem sinal, e portanto, é necessário derivar mais uma vez, mas a terceira derivada também não tem sinal. Com isso, é necessário derivar mais uma vez chegando assim até a quarta derivada que nos dá um sinal positivo. Mostrando assim, que a esfera é mínima para o funcional. A próxima seção será constituída por algumas propriedades que a média (não normalizada) das autofunções associadas ao autovalor  $n$  têm na esfera.

### 3.4 Esféricos Harmônicos

Conforme foi apresentado no final da última seção faremos um trabalho adicional voltado ao caso particular, onde se tem  $M = \mathbb{S}^n$  e  $f$  uma autofunção. Nos concentraremos, portanto, em estudar as funções na esfera que satisfazem  $\Delta f = -n f$ . Vejamos, nesse contexto, o lema a seguir.

**Lema 3.4.1** *Se  $\Delta(f + \varphi'(0)) = -n(f + \varphi'(0))$ , então*

$$\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^3 = \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0)) |\text{grad} f|^2 = 0, \quad (3.21)$$

$$\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^4 = \frac{3(n+1)}{(n+3)|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2, \quad (3.22)$$

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad} f|^4 = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2 \quad (3.23)$$

e

$$\int_{\mathbb{S}^n} f^2 |\text{grad} f|^2 = \frac{n(n+1)}{(n+3)|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2. \quad (3.24)$$

**Demonstração:** Seja  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma parametrização da esfera euclidiana tal que  $\Phi(U) = \mathbb{S}^n - \{p_0\}$ ,  $p_0 \in \mathbb{S}^n$ . A aplicação  $Y : U \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por  $Y(x, r) = r\Phi(x)$  é uma parametrização de  $\mathbb{R}^{n+1}$  conhecida como coordenadas esféricas. Nesse sistema de coordenadas

o operador de Laplace tem a forma

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^n}.$$

Denotaremos por  $y^i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , as funções coordenadas de  $\mathbb{S}^n$  dadas por

$$y^i(\Phi(x)) = \Phi_i(x), \quad (3.25)$$

essas funções são harmônicas em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por outro lado, podemos considerar que  $y^i(X(x, r)) = r\Phi_i(x)$ . Essas funções são conhecidas como esféricos harmônicos de primeira ordem. Usando agora a expressão para o operador Laplaciano temos

$$0 = \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} y^i = \frac{n}{r} \Phi_i + \frac{1}{r} \Delta_{\mathbb{S}^n} \Phi_i,$$

por (3.25), temos

$$-\Delta_{\mathbb{S}^n} y^i = n y^i.$$

Além disso, o gradiente das funções  $y^i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$\langle \text{grad} y^i, \text{grad} y^j \rangle = \delta_{ij} - y^i y^j. \quad (3.26)$$

Recordemos que os esféricos harmônicos de primeira ordem formam uma base de autofunções associadas ao autovalor  $n$ . Além disso, elas são  $L_2$ -ortogonais duas a duas. Com isso, por (3.26), temos

$$\int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j = -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^i \Delta y^j = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} \langle \text{grad} y^i, \text{grad} y^j \rangle = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} (\delta_{ij} - y^i y^j).$$

Então

$$\int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j = \frac{|\mathbb{S}^n|}{n+1} \delta_{ij}. \quad (3.27)$$

Também vale para índices  $i, j, k = 1, \dots, n+1$

$$\int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k = 0. \quad (3.28)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k &= -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j \Delta y^k = -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} \Delta(y^i y^j) y^k \\ &= -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} \left( (\Delta y^i) y^j y^k + y^i (\Delta y^j) y^k + 2y^k \langle \text{grad} y^i, \text{grad} y^j \rangle \right) \\ &= 2 \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k - \frac{2}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^k (\delta_{ij} - y^i y^j) = \frac{2n+2}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k = 0. \end{aligned}$$

Agora suponha que  $\Delta(f + \varphi'(0)) = -n(f + \varphi'(0))$ , ou seja,

$$(f + \varphi'(0)) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i y^i.$$

Por (3.28), temos

$$\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^3 = \sum_{i=1}^{n+1} a_i a_j a_k \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k = 0,$$

enquanto (3.26) nos dá

$$|\text{grad } f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_i a_j \langle \text{grad } y^i, \text{grad } y^j \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 - (f + \varphi'(0))^2$$

que pode ser expresso, usando (3.27) por

$$|\text{grad } f|^2 = -(f + \varphi'(0))^2 + \frac{(n+1)}{|\mathbb{S}^n|} \int_{\mathbb{S}^n} f^2. \quad (3.29)$$

Então

$$\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0)) |\text{grad } f|^2 = - \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^3 = 0.$$

Para (3.22) consideramos índices  $i, j, k, l = 1, \dots, n+1$  e assim obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k y^l &= -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k \Delta y^l = -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^l \Delta(y^i y^j y^k) \\ &= -\frac{2}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^l (y^i \langle \text{grad } y^j, \text{grad } y^k \rangle + y^j \langle \text{grad } y^i, \text{grad } y^k \rangle + y^k \langle \text{grad } y^i, \text{grad } y^j \rangle) \\ &\quad - \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^l (y^i y^j \Delta y^k + y^i y^k \Delta y^j + y^j y^k \Delta y^i) \\ &= \frac{3n+6}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k y^l - \frac{2\delta_{jk}}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^l - \frac{2\delta_{ik}}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^j y^l - \frac{2\delta_{ij}}{n} \int_{\mathbb{S}^n} y^k y^l. \end{aligned}$$

Usando (3.27) temos,

$$\int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k y^l = \frac{|\mathbb{S}^n|}{(n+1)(n+3)} (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl}). \quad (3.30)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^4 &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n+1} a_i a_j a_k a_l \int_{\mathbb{S}^n} y^i y^j y^k y^l \\ &= \frac{|\mathbb{S}^n|}{(n+1)(n+3)} \sum_{i,j,k,l=1}^{n+1} a_i a_j a_k a_l (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \\ &= \frac{3|\mathbb{S}^n|}{(n+1)(n+3)} \sum_{i,j=1}^{n+1} a_i^2 a_j^2 = \frac{3|\mathbb{S}^n|}{(n+1)(n+3)} \left( \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \right)^2 \\ &= \frac{3|\mathbb{S}^n|}{(n+1)(n+3)} \left( \frac{(n+1)}{|\mathbb{S}^n|} \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2 \\ &= \frac{3(n+1)}{(n+3)|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Agora, para mostrar (3.23), usaremos (3.29) assim

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad} f|^4 = \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^4 + \frac{n^2 - 1}{|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2$$

e por (3.22) temos (3.23).

Por fim, para (3.24) usemos mais uma vez (3.29)

$$\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 |\text{grad} f|^2 = - \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^4 + \frac{n+1}{|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} f^2 \right)^2$$

assim, por (3.22) obtemos (3.24).

□

### 3.5 Derivadas de Terceira e Quarta Ordem

De acordo com o que foi apresentado no final da última seção, será necessário calcular termos de terceira e de quarta ordem. Mas esse trabalho adicional só é necessário em um caso bem particular, onde já se pode supor  $M = \mathbb{S}^n$  e  $f$  uma autofunção. Com isso, nesta seção os termos aqui calculados não poderão ser usados em contextos mais gerais.

Iniciamos com uma variação

$$\begin{aligned} X(t, x) &= \Phi + (tf(x) + \varphi(t)H(x))N(x) \\ &= \Phi(1 + tf(x) + \varphi(t)). \end{aligned}$$

Usando ainda que  $h_{ij} = \tau_{ij} = g_{ij}$  e  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$  as expressões se tornam:

$$\mathbf{g}_{ij}(t) = t^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + (1 + tf(x) + \varphi(t))^2 g_{ij}; \quad \left. \frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} = 2(f + \varphi'(0))g_{ij};$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + 2(f + \varphi'(0))^2 g_{ij} + 2\varphi''(0)g_{ij};$$

$$\left. \frac{\partial^3 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t^3} \right|_{t=0} = [6(f + \varphi'(0))\varphi''(0) + 2\varphi'''(0)]g_{ij};$$

$$\left. \frac{\partial^4 \mathbf{g}_{ij}}{\partial t^4} \right|_{t=0} = [6\varphi''(0)^2 + 8(f + \varphi'(0))\varphi'''(0) + 2\varphi^{(4)}(0)]g_{ij}.$$

Com derivadas de suas inversas dadas por

$$\left. \frac{\partial \mathbf{g}^{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} = -2(f + \varphi'(0))g^{ij};$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = -2 \sum_{p,r} \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial f}{\partial x_r} g^{ip} g^{rj} + 6(f + \varphi'(0))^2 g^{ij} - 2\varphi''(0) g^{ij};$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^3} \right|_{t=0} &= 24(f + \varphi'(0)) \sum_{p,r} \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial f}{\partial x_r} g^{ip} g^{rj} + 18\varphi''(0)(f + \varphi'(0)) g^{ij} \\ &\quad - 2\varphi'''(0) g^{ij} - 24(f + \varphi'(0))^3 g^{ij}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^4 \mathbf{g}^{ij}}{\partial t^4} \right|_{t=0} &= \left[ 18\varphi''(0)^2 - 2\varphi^{(4)}(0) + 24\varphi'''(0)(f + \varphi'(0)) - 144(f + \varphi'(0))^2 \varphi''(0) \right. \\ &\quad \left. + 120(f + \varphi'(0))^4 \right] g^{ij} + 24 \sum_{m,n,p,r} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial f}{\partial x_r} g^{ip} g^{rl} g^{kj} \\ &\quad + \left( 48\varphi''(0) - 240(f + \varphi'(0))^2 \right) \sum_{k,l} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} g^{il} g^{kj} g^{kj}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\left. \frac{\partial \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t} \right|_{t=0} = n(f + \varphi'(0)) \sqrt{\mathbf{g}};$$

$$\left. \frac{\partial^2 \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \left( |\text{grad} f|^2 + \varphi''(0)n + (n^2 - n)(f + \varphi'(0))^2 \right) \sqrt{\mathbf{g}};$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t^3} \right|_{t=0} &= (\varphi'''(0)n + 3(n-1)n\varphi''(0)(f + \varphi'(0)) + 3(n-2)|\text{grad} f|^2(f + \varphi'(0)) \\ &\quad + n(n-1)(n-2)(f + \varphi'(0))^3) \sqrt{\mathbf{g}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^4 \sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t^4} \right|_{t=0} &= ((n^4 + 11n^2 - 6n^3 - 6n)(f + \varphi'(0))^4 - 3|\text{grad} f|^4 + n\varphi^{(4)}(0) \\ &\quad + 4n(n-1)\varphi'''(0)(f + \varphi'(0)) + (6n^3 - 18n^2 + 12n)\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2 \\ &\quad + 6(n-2)\varphi''(0)|\text{grad} f|^2 + (36 - 30n + 6n^2)(f + \varphi'(0))^2 |\text{grad} f|^2 \\ &\quad + 3n(n-1)\varphi''(0)^2) \sqrt{\mathbf{g}}; \end{aligned}$$

Essas expressões nos ajudam a calcular  $\varphi''(0)$ ,  $\varphi'''(0)$  e  $\varphi^{(4)}(0)$ . De fato, como estamos mantendo o volume constante, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} \int_{M_t} \sqrt{\mathbf{g}} \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad} f|^2 + \varphi''(0)n + (n^2 - n)(f + \varphi'(0))^2 \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} \varphi''(0)n + n^2(f + \varphi'(0))^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi''(0) = \frac{-n}{|\mathbb{S}^n|} \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2. \quad (3.31)$$

Vale ainda,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} \Big|_{t=0} \int_{M_t} \sqrt{\mathbf{g}} \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} \varphi'''(0) n + 3(n-1)n \varphi''(0)(f + \varphi'(0)) + 3(n-2)|\text{grad} f|^2 (f + \varphi'(0)) \\ &\quad + n(n-1)(n-2)(f + \varphi'(0))^3 \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} \varphi'''(0) n + 3(n-2)|\text{grad} f|^2 (f + \varphi'(0)) + n(n-1)(n-2)(f + \varphi'(0))^3. \end{aligned}$$

Usando o item (3.21) do Lema (3.4.1) segue que

$$\varphi'''(0) = 0. \quad (3.32)$$

De maneira análoga, podemos calcular  $\varphi^{(4)}(0)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Big|_{t=0} \int_{M_t} \sqrt{\mathbf{g}} \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} (n^4 + 11n^2 - 6n^3 - 6n)(f + \varphi'(0))^4 - 3|\text{grad} f|^4 + n\varphi^{(4)}(0) \\ &\quad + 4n(n-1)\varphi'''(0)(f + \varphi'(0)) + (6n^3 - 18n^2 + 12n)\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2 \\ &\quad + 6(n-2)\varphi''(0)|\text{grad} f|^2 + (36 - 30n + 6n^2)(f + \varphi'(0))^2|\text{grad} f|^2 \\ &\quad + 3n(n-1)\varphi''(0)^2. \end{aligned}$$

Usando as expressões do Lema (3.4.1) temos:

$$\varphi^{(4)}(0) = \frac{9n^3 - 15n^2 - 122n - 12}{|\mathbb{S}^n|^4(n+3)} \left( \int (f + \varphi'(0))^2 \right)^2. \quad (3.33)$$

Vejamos agora como ficam as derivadas de  $h_{ij}$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0} = -(\text{Hess } f)_{ij} + (f + \varphi'(0))h_{ij}; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = (\varphi''(0) - |\text{grad} f|^2) h_{ij} + 4 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{h}_{ij}}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = (\varphi'''(0) + 3(f + \varphi'(0))|\text{grad} f|^2) g^{ij} - 12(f + \varphi'(0)) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + 3|\text{grad} f|^2 (\text{Hess } f)_{ij};$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^4 \mathbf{h}^{ij}}{\partial t^4} \right|_{t=0} &= \varphi^{(4)}(0)h_{ij} - 24(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2(\text{Hess } f)_{ij} - 12(f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2h_{ij} \\ &\quad + 6\varphi''(0)|\text{grad}f|^2h_{ij} - 24|\text{grad}f|^2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + 48(f + \varphi'(0))^2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &\quad + 9|\text{grad}f|^4h_{ij} - 24\varphi''(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}; \end{aligned}$$

Com derivadas de suas inversas dadas por

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}^{ij}}{\partial t} \right|_{t=0} = -3(f + \varphi'(0))g^{ij} - \sum_{k,l} g^{ik}g^{jl}(\text{Hess } f)_{kl};$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{h}^{ij}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = (12(f + \varphi'(0))^2 - 3\varphi''(0) - |\text{grad}f|^2)g^{ij} + 8(f + \varphi'(0))\sum_{k,l} g^{ik}g^{jl}(\text{Hess } f)_{kl};$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 \mathbf{h}^{ij}}{\partial t^3} \right|_{t=0} &= (36(f + \varphi'(0))\varphi''(0) - 60(f + \varphi'(0))^3 + 15(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2 - 3\varphi'''(0))g^{ij} \\ &\quad + \left(12\varphi''(0) + 3|\text{grad}f|^2 - 60(f + \varphi'(0))^2\right)\sum_{k,l} g^{ik}g^{jl}(\text{Hess } f)_{kl} \\ &\quad + 12\sum_{p,r,k,l} g^{ip}g^{rk}g^{jl}(\text{Hess } f)_{kl}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^4 \mathbf{h}^{ij}}{\partial t^4} \right|_{t=0} &= (-3\varphi^{(4)}(0) + 36\varphi''(0)^2 + 48\varphi'''(0)(f + \varphi'(0)) - 360\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2 \\ &\quad + 360(f + \varphi'(0))^4 - 180(f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2 + 30\varphi''(0)|\text{grad}f|^2 + 9|\text{grad}f|^4)g^{ij} \\ &\quad + \left(480(f + \varphi'(0))^3 - 240\varphi''(0)(f + \varphi'(0)) - 72(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2 \right. \\ &\quad \left. + 16\varphi'''(0)\right)\sum_{k,l} g^{ik}g^{jl}(\text{Hess } f)_{kl} - 288(f + \varphi'(0))\sum_{p,r,k,l} g^{ip}g^{rk}g^{jl}(\text{Hess } f)_{kl}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r} \\ &\quad - 24\sum_{p,r,k,l} g^{ip}g^{rl}g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r}; \end{aligned}$$

Uma vez calculados todos esses coeficientes, podemos passar para as funções curvatura média e a segunda forma fundamental ao quadrado. Poderíamos ter feito um esforço maior para simplificar as expressões, porém, ainda passaremos por multiplicação e somatórias que tendem a permitir expressões mais simples. Usaremos também o lema abaixo.

**Lema 3.5.1**

$$|\text{Hess}f|^2 = n(f + \varphi'(0))^2 \quad (3.34)$$

$$\sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} (\text{Hess}f)_{ij} = -(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2 \quad (3.35)$$

$$\sum_{i,j,k,l,p,r} g^{ip}g^{rk}g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial f}{\partial x_r} (\text{Hess}f)_{ij}(\text{Hess}f)_{kl} = (f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2 \quad (3.36)$$

**Demonstração:** Como o lado direito das identidades que pretendemos estabelecer não dependem da parametrização, podemos supor (nas mesmas notações do Lema (3.4.1)) que  $\Phi(x) = (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - |x|^2})$ . Nesse sistema de coordenadas vale  $y^i(\Phi(x)) = \Phi_i(x) = x_i$ , para  $i, j \leq n$  e

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = e_k + \frac{-x_k}{\sqrt{1 - |x|^2}} e_{n+1},$$

onde  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Portanto, para  $i, j \leq n$ ,

$$g_{ij} = \frac{(1 - |x|^2)\delta_{ij} + x_i x_j}{1 - |x|^2} \quad g^{ij} = \delta_{ij} - x_i x_j$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = \left( 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{-x_l}{\sqrt{1 - |x|^2}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \left( 0, \dots, 0, \frac{-\delta_{ij}}{\sqrt{1 - |x|^2}} - \frac{x_i x_j}{(1 - |x|^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\Gamma_{ij}^\alpha = \sum_r g^{\alpha r} \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \right\rangle = \frac{1}{1 - |x|^2} \sum_r x_r g^{\alpha r} g_{ij}$$

Assim,

$$(\text{Hess}y^i)_{kl} = -\Gamma_{kl}^i = \sum_p \frac{g^{ip}g_{kl}y_p}{1 - |y|^2}. \quad (3.37)$$

Com essa expressão é fácil chegar nas identidades que queremos, para a primeira, por exemplo, temos

$$\begin{aligned}
|\text{Hess}f|^2 &= \sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}(\text{Hess}f)_{ij}(\text{Hess}f)_{kl} = \sum_{i,j,k,l,p,r} g^{ik}g^{jl}(\text{Hess}a_p y_p)_{ij}(\text{Hess}a_r y_r)_{kl} \\
&= \sum_{p,r} a_p a_r \sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}(-\Gamma_{ij}^p)(-\Gamma_{kl}^r) = n(f + \varphi'(0))^2.
\end{aligned}$$

De maneira inteiramente análoga obtemos as outras duas identidades. □

Portanto,

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{n} \left( -(f + \varphi'(0))n - \Delta(f + \varphi'(0)) \right) = 0; \quad (3.38)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \frac{(2-n)}{n} |\text{grad}f|^2 - 2(f + \varphi'(0))^2 - \varphi''(0); \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^3 \mathbf{H}}{\partial t^3} \right|_{t=0} &= -\varphi'''(0) + 12(f + \varphi'(0))^3 + \frac{(6n-18)}{n} (f + \varphi'(0)) |\text{grad}f|^2 \\
&\quad + \frac{6}{n} \sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{jl}(\text{Hess}f)_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} \\
&= 12(f + \varphi'(0))^3 + \frac{(6n-24)}{n} (f + \varphi'(0)) |\text{grad}f|^2; \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^4 \mathbf{H}}{\partial t^4} \right|_{t=0} &= -\varphi^{(4)}(0) + 6\varphi''(0)^2 + 36\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2 \\
&\quad + \frac{18n-36}{n} \varphi''(0) |\text{grad}f|^2 + \frac{9n-36}{n} |\text{grad}f|^4 \\
&\quad + \frac{240-24n}{n} (f + \varphi'(0))^2 |\text{grad}f|^2 - 72(f + \varphi'(0))^4 \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^3 (\mathbf{H}^2 \sqrt{g})}{\partial t^3} \right|_{t=0} &= \left[ (n^3 - 3n^2 - 10n + 24)(f + \varphi'(0))^3 + 3(n-3)n\varphi''(0)(f + \varphi'(0)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-3n^2 + 18n - 48}{n} (f + \varphi'(0)) |\text{grad}f|^2 \right] \sqrt{g} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^4 (\mathbf{H}^2 \sqrt{g})}{\partial t^4} \right|_{t=0} &= \left[ (n-2)\varphi^{(4)}(0) + (3n^2 - 15n + 18)\varphi''(0)^2 \right. \\
&\quad + (6n^3 - 30n^2 + 24n + 96)\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2 \\
&\quad + (n^4 - 6n^3 - 13n^2 + 210n - 120)(f + \varphi'(0))^4 \\
&\quad + \frac{-6n^2 + 48n - 96}{n}\varphi''(0)|\text{grad}f|^2 + \frac{9n^2 - 72n + 24}{n^2}|\text{grad}f|^4 \\
&\quad \left. + \frac{-6n^3 + 102n^2 - 372n + 432}{n}(f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2 \right] \sqrt{g} \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Enquanto as derivadas da segunda forma ao quadrado ficam

$$\left. \frac{\partial |\Pi|^2}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 |\Pi|^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= -2n\varphi''(0) + 2(2-n)|\text{grad}f|^2 - 6(f + \varphi'(0))^2n + 2|\text{Hess}f|^2 \\
&= -2n\varphi''(0) + 2(2-n)|\text{grad}f|^2 - 4(f + \varphi'(0))^2n; \quad (3.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^3 |\Pi|^2}{\partial t^3} \right|_{t=0} &= -2\varphi'''(0)n + 12(n-4)(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2 + 48(f + \varphi'(0))^3n \\
&\quad - 24(f + \varphi'(0))|\text{Hess}f|^2 \\
&= 12(n-4)(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2 + 24(f + \varphi'(0))^3n; \quad (3.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^4 |\Pi|^2}{\partial t^4} \right|_{t=0} &= -2\varphi^{(4)}(0)n + 480(f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2 + 18\varphi''(0)^2n + 24(n-3)|\text{grad}f|^4 \\
&\quad + 144\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2n - 360(f + \varphi'(0))^4n + 48(n-2)\varphi''(0)|\text{grad}f|^2 \\
&\quad + |\text{Hess}f|^2 \left( 240(f + \varphi'(0))^2 - 24|\text{grad}f|^2 - 48\varphi''(0) \right) \\
&\quad - 48 \sum_{i,j,k,l,p,r} g^{ip}g^{rk}g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial f}{\partial x_r} (\text{Hess}f)_{ij}(\text{Hess}f)_{kl} \\
&= -2\varphi^{(4)}(0)n + (432 - 24n)(f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2 + 18\varphi''(0)^2n \\
&\quad + 24(n-3)|\text{grad}f|^4 + 96\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2n - 120(f + \varphi'(0))^4n \\
&\quad + 48(n-2)\varphi''(0)|\text{grad}f|^2. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{\partial^3 \left( |\Pi|^2 \sqrt{g} \right)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = \left[ 3n^2(n-3)\varphi''(0)(f + \varphi'(0)) + (-3n^2 + 18n - 48)(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2 + (n^4 - 3n^3 - 10n^2 + 24n)(f + \varphi'(0))^3 \right] \sqrt{g} \quad (3.48)$$

e

$$\frac{\partial^4 \left( |\Pi|^2 \sqrt{g} \right)}{\partial t^4} \Big|_{t=0} = \left[ n(n-2)\varphi^{(4)}(0) + (-6n^3 + 54n^2 - 228n + 432)(f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2 + (3n^3 - 15n^2 + 18n)\varphi''(0)^2 + (6n^4 - 30n^3 + 96n)\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2 + (n^5 - 6n^4 - 13n^3 + 114n^2 - 120n)(f + \varphi'(0))^4 + (9n - 48)|\text{grad}f|^4 + (-6n^2 + 48n - 96)\varphi''(0)|\text{grad}f|^2 \right] \sqrt{g} \quad (3.49)$$

Finalmente, usando que  $S = n^2H^2 - |\Pi|^2$  de (3.42) e (3.48) segue que

$$\frac{\partial^3 \left( S\sqrt{g} \right)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = \left[ (n^5 - 4n^4 - 7n^3 + 34n^2 - 24n)(f + \varphi'(0))^3 + (-3n^3 + 21n^2 - 66n + 48)(f + \varphi'(0))|\text{grad}f|^2 + (3n^4 - 12n^3 + 9n^2)\varphi''(0)(f + \varphi'(0)) \right] \sqrt{g}. \quad (3.50)$$

Por fim, usando (3.43) e (3.49) temos

$$\frac{\partial^4 \left( S\sqrt{g} \right)}{\partial t^4} \Big|_{t=0} = \left[ (n^3 - 3n^2 + 2n)\varphi^{(4)}(0) + (3n^4 - 18n^3 + 33n^2 - 18n)\varphi''(0)^2 + (6n^5 - 36n^4 + 54n^3 + 96n^2 - 96n)\varphi''(0)(f + \varphi'(0))^2 + (n^6 - 7n^5 - 7n^4 + 223n^3 - 234n^2 + 120n)(f + \varphi'(0))^4 + (-6n^3 + 54n^2 - 144n + 96)\varphi''(0)|\text{grad}f|^2 + (9n^2 - 81n + 72)|\text{grad}f|^4 + (-6n^4 + 108n^3 - 426n^2 + 660n - 432)(f + \varphi'(0))^2|\text{grad}f|^2 \right] \sqrt{g} \quad (3.51)$$

## 4 RESULTADOS DE CARACTERIZAÇÃO PARA ESFERA

Este capítulo utiliza todo o material desenvolvido até aqui para finalmente apresentar os resultados novos que obtivemos. Veremos que a esfera aparece como ponto chave em cada um dos resultados.

### 4.1 Teoremas

Iniciaremos com uma estimativa (local) para o funcional.

**Teorema 4.1.1** *Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  associamos uma variedade mergulhada  $M_t^n$  com o mesmo volume de  $\mathbb{S}^n$ , obtida pela variação  $X_t$  tal que  $M_0 = \mathbb{S}^n$ . Então para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  temos*

$$\mathcal{W}_1(t) \geq n(n-1),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{n(n-1)} \int_{M_t} S dM_t \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^n).$$

Além disso,  $\mathcal{W}_1(t) = n(n-1)$  se, e somente se,  $M_t$  é uma esfera euclidiana

**Demonstração:** Provaremos que o funcional  $\mathcal{W}_1$  atinge um mínimo em  $t = 0$ . Aplicando  $h^{ij} = g^{ij}$ ,  $H = H_3 \equiv 1$  e  $|\Pi|^2 = n$  na equação (3.16), temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \int_{M_t} S = n(n-1)(n-2) \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))$$

Usando agora que

$$\varphi'(0) \int_M H^2 = - \int_M fH$$

no caso da esfera, então

$$\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0)) = 0.$$

Concluimos nesse caso que

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \int_{M_t} S = 0$$

e, portanto,

$$\mathcal{W}'_1(0) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S = 0.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 |\mathbb{I}|^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= -2n\varphi''(0) - 2n|\text{grad } f|^2 + 4|\text{grad } f|^2 \\ &\quad + 4(f + \varphi'(0)) \langle \text{grad}(f + \varphi'(0)H), \Delta N \rangle \\ &\quad + 6(f + \varphi'(0))^2 n + 12(f + \varphi'(0))\Delta f + 2|\text{Hess } f|^2 \\ &= -2n\varphi''(0) + 2(2-n)|\text{grad } f|^2 + 6(f + \varphi'(0))^2 n + 12(f + \varphi'(0))\Delta f \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{S}^n} |\text{Hess } f|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= 2n \int_{\mathbb{S}^n} \varphi''(0) + 2(n-2) \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad } f|^2 - 6n \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \\ &\quad - 12 \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))\Delta f - 2 \int_{\mathbb{S}^n} |\text{Hess } f|^2 \\ &\quad + 8n^2 \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 + n\varphi''(0) \int_{\mathbb{S}^n} n(n-3) \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 (n^2 - n)^2 + 2n^2 \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \\ &\quad + 4n \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))\Delta f + 2 \int_{\mathbb{S}^n} (\Delta f)^2 - 4n^2 \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))\Delta f \\ &\quad - 4n^3 \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 - \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad } f|^2 (n^2 + n) \\ &\quad + 4n \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad } f|^2 + 12n \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))\Delta f \\ &= (3n^2 - 11n + 8) \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad } f|^2 + (n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{S}^n} (\Delta f)^2 - 2 \int_{\mathbb{S}^n} |\text{Hess } f|^2 + (n^3 - 3n^2 + 2n) \int_{\mathbb{S}^n} \varphi''(0). \end{aligned}$$

Mas estamos usando uma variação que preserva volume, então pelo que vimos em (3.3)

$$\varphi''(0) = - \frac{\int_M [(-|\mathbb{I}|^2 + n^2 H^2) (f + \varphi'(0)H)^2 + |\text{grad}(f + \varphi'(0)H)|^2]}{n \int_M H^2}.$$

Para  $M = \mathbb{S}^n$  temos

$$-n \int_{\mathbb{S}^n} \varphi''(0) = \int_{\mathbb{S}^n} [(-n + n^2) (f + \varphi'(0))^2 + |\text{grad} f|^2].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= (3n^2 - 11n + 8) \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad} f|^2 + (n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \\ &\quad + (-n^2 + 3n - 2) \int_{\mathbb{S}^n} [(-n + n^2) (f + \varphi'(0))^2 + |\text{grad} f|^2] \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{S}^n} (\Delta f)^2 - 2 \int_{\mathbb{S}^n} |\text{Hess} f|^2 \\ &= (-2n^3 + 6n^2 - 4n) \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 + (2n^2 - 8n + 6) \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad} f|^2 \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{S}^n} (\Delta f)^2 - 2 \int_{\mathbb{S}^n} |\text{Hess} f|^2. \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Bochner temos

$$\begin{aligned} 2|\text{Hess} f|^2 &= \Delta |\text{grad} f|^2 - 2\langle \text{grad}(\Delta f), \text{grad} f \rangle - 2\text{Ric}(\text{grad} f, \text{grad} f) \\ &= \Delta |\text{grad} f|^2 - 2\langle \text{grad}(\Delta f), \text{grad} f \rangle - 2(n-1)\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle. \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathbb{S}^n} |\text{Hess} f|^2 &= 2 \int_{\mathbb{S}^n} \langle \text{grad}(\Delta f), \text{grad} f \rangle + 2(n-1) \int_{\mathbb{S}^n} \langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle \\ &= -2 \int_{\mathbb{S}^n} (\Delta f)^2 + 2(n-1) \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad} f|^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= (-2n^3 + 6n^2 - 4n) \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 + (2n^2 - 6n + 4) \int_{\mathbb{S}^n} |\text{grad} f|^2 \\ &= (-2n^3 + 6n^2 - 4n) \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 - (2n^2 - 6n + 4) \int_{\mathbb{S}^n} f \Delta f. \end{aligned}$$

Agora iremos determinar o sinal de  $\mathcal{W}_1''$ . Para isso, consideraremos uma base ortonormal  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  do espaço  $L^2(\mathbb{S}^n)$  formado pelas autofunções do operador de Laplace da esfera,  $-\Delta \phi_i = \beta_i \phi_i$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = \dots = \beta_{n+1} = n$ ,  $\phi_0$  constante e  $\phi_1, \dots, \phi_{n+1}$  são os esféricos harmônicos de primeira ordem. Como  $\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0)) = 0$  temos que  $(f + \varphi'(0))$  é ortogonal às funções constantes. Assim,

$$(f + \varphi'(0)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= (-2n^3 + 6n^2 - 4n) \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i^2 - (2n^2 - 6n + 4) \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i a_j \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i \Delta \phi_j \\ &= (-2n^3 + 6n^2 - 4n) \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i^2 + (2n^2 - 6n + 4) \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \beta_i \phi_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i^2 [(-2n^3 + 6n^2 - 4n) + (2n^2 - 6n + 4)\beta_i] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i^2 (\beta_i - n)(2n^2 - 6n + 4) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i^2 (\beta_i - n)(n-2)(n-1) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i^2 (\beta_i - n)(n-2)(n-1) + 2 \sum_{i=n+2}^{\infty} a_i^2 \int_{\mathbb{S}^n} \phi_i^2 (\beta_i - n)(n-2)(n-1). \end{aligned}$$

Com isso, se não estivermos no caso em que  $a_i = 0$  para  $i > n + 1$ , a segunda somatória acima é estritamente positiva desde que  $(\beta_i - n) \geq 0$  para  $i \geq 1$ . Assim,  $\mathcal{W}_1''(0) > 0$ . Portanto, ponto de mínimo estrito.

Para analisarmos o último caso, suponha que  $a_i = 0$  para  $i > n + 1$ . Ora, isso equivale à  $(f + \varphi'(0)) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \phi_i$ . Ou seja, esse último caso se trata do caso em que  $n(f + \varphi'(0)) = -\Delta(f + \varphi'(0))$ . Por se tratar de um caso onde a segunda derivada é zero, se faz necessário considerar derivadas de ordem superior do funcional. Pelo que vimos no final da última seção em (3.50):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= \int_{\mathbb{S}^n} (n^5 - 4n^4 - 7n^3 + 34n^2 - 24n)(f + \varphi'(0))^3 \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^n} (-3n^3 + 21n^2 - 66n + 48)(f + \varphi'(0)) |\text{grad} f|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^n} (3n^4 - 12n^3 + 9n^2) \varphi''(0)(f + \varphi'(0)). \end{aligned}$$

Como  $\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0)) = 0$  e, por (3.21) do Lema (3.4.1) temos  $\int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^3 = \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0)) |\text{grad} f|^2 = 0$  segue que  $\mathcal{W}_1'''(0) = 0$ .

Agora, por (3.51) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= \int_{\mathbb{S}^n} (n^3 - 3n^2 + 2n) \varphi^{(4)}(0) + (3n^4 - 18n^3 + 33n^2 - 18n) \varphi''(0)^2 \\
&+ \int_{\mathbb{S}^n} (6n^5 - 36n^4 + 54n^3 + 96n^2 - 96n) \varphi''(0) (f + \varphi'(0))^2 \\
&+ \int_{\mathbb{S}^n} (n^6 - 7n^5 - 7n^4 + 223n^3 - 234n^2 + 120n) (f + \varphi'(0))^4 \\
&+ \int_{\mathbb{S}^n} (-6n^3 + 54n^2 - 144n + 96) \varphi''(0) |\text{grad} f|^2 + (9n^2 - 81n + 72) |\text{grad} f|^4 \\
&+ \int_{\mathbb{S}^n} (-6n^4 + 108n^3 - 426n^2 + 660n - 432) (f + \varphi'(0))^2 |\text{grad} f|^2.
\end{aligned}$$

Mas, pelo que vimos no Lema (3.4.1), (3.31) e em (3.33) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Big|_{t=0} \int_{M_t} S &= \left[ (n^3 - 3n^2 + 2n)(9n^3 - 15n^2 - 12n - 12) \right. \\
&+ (3n^4 - 18n^3 + 33n^2 - 18n)n^2(n+3) \\
&+ (6n^5 - 36n^4 + 54n^3 + 96n^2 - 96n)(-n)(n+3) \\
&+ (n^6 - 7n^5 - 7n^4 + 223n^3 - 234n^2 + 120n)(3n+3) \\
&+ (-6n^3 + 54n^2 - 144n + 96)(-n^2)(n+3) \\
&+ (-6n^4 + 108n^3 - 426n^2 + 660n - 432)n(n+1) \\
&\left. + (9n^2 - 81n + 72)n(n+1)(n+2) \right] \frac{1}{(n+3)|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2 \\
&= \frac{12n(n+2)(2n^3 + 7n^2 - 3n + 2)}{(n+3)|\mathbb{S}^n|} \left( \int_{\mathbb{S}^n} (f + \varphi'(0))^2 \right)^2.
\end{aligned}$$

Como o polinômio  $2n^3 + 7n^2 - 3n + 2 > 0$  para  $n > 0$  segue que  $\mathcal{W}_1^{(4)}(0) \geq 0$  com igualdade se, e somente se,  $f \equiv 0$ . O que termina a prova do teorema nesse último caso.  $\square$

O Teorema 4.3 de (VIEIRA, Francisca Damiana, 2019) pode ser visto como consequência direta do teorema acima.

**Corolário 4.1.1** *Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  associamos uma variedade mergulhada  $M_t^n$  com o mesmo volume de  $\mathbb{S}^n$ , obtida pela variação  $X_t$  tal que  $M_0 = M$ . Então para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  temos*

$$\frac{1}{n \text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{M_t} (nH)^2 dM_t \geq n.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $M_t$  é uma esfera euclidiana.

**Demonstração:** Para uma hipersuperfície  $M$  vale a desigualdade

$$|II|^2 \geq nH^2,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se,  $M$  é totalmente umbílica. Como estamos com hipersuperfícies compactas no espaço euclidiano a igualdade ocorre se e só se  $M$  é a esfera. Com isso, vale  $S = n^2H^2 - |II|^2 \leq n^2H^2 - nH^2 = n(n-1)H^2$ . Então,  $\frac{S}{n(n-1)} \leq H^2$  e a igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é a esfera.

Então para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  vale

$$\int_{M_t} H^2 dM_t \geq \frac{1}{n(n-1)} \int_{M_t} S dM_t \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^n).$$

Além disso, vale a igualdade se e somente se  $M_t$  é uma esfera euclidiana. □

Veremos a seguir um resultado que caracteriza os pontos críticos do funcional.

**Teorema 4.1.2** *Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  associamos uma variedade mergulhada  $M_t^n$  com o mesmo volume de  $\mathbb{S}^n$ , obtida pela variação  $X_t$  tal que  $M_0 = M$ . Se  $M$  é ponto crítico do funcional  $\mathcal{W}_1$  ou seja  $\mathcal{W}'_1(0) = 0$ , então  $M = \mathbb{S}^n$*

**Demonstração:** Pelo que vimos em (3.16),

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \int_{M_t} S = n(n-1)(n-2) \int_M H_3(f + \varphi'(0)H).$$

Assim,  $\mathcal{W}'_1(0) = 0$  se, e somente se  $\int_M H_3(f + \varphi'(0)H) = 0$  para toda  $f \in L^2(M)$ .

Mas isso equivale à  $H_3 = \lambda H$  (aqui excluimos variações constantes e tratamos dos casos não-triviais). Para nos certificarmos dessa última afirmação, recordemos a expressão 3.2

$$\varphi'(0) = -\frac{\int_M fH}{\int_M H^2}.$$

Claro que se  $H_3 = \lambda H$  para uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos  $\int_M H_3(f + \varphi'(0)H) = \int_M \lambda H(f + \varphi'(0)H) = \lambda \int_M fH - \lambda \int_M fH = 0$  para toda  $f \in L^2(M)$ . Reciprocamente, se  $\int_M H_3(f + \varphi'(0)H) = 0$  para toda  $f \in L^2(M)$ , podemos tomar  $f = H_3$  e assim,  $\int_M H_3(H_3 + \varphi'(0)H) = 0 \Rightarrow \int_M H^2 \int_M H_3^2 = (\int_M H_3 H)^2$ , que pela condição de igualdade da desigualdade de

Cauchy-Schwarz nos dá  $H = \lambda H_3$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De posse dessa equivalência, vejamos primeiramente que por  $M$  ser compacta existe ao menos um ponto  $p$  onde todos os autovalores da segunda forma são positivos (ou negativos a depender da escolha do vetor normal) com isso, podemos em  $p$  as funções  $H$  e  $H_3$  têm mesmo sinal. Como  $\lambda$  é constante temos que  $\lambda > 0$ . Agora usando a generalização do teorema de Minkowski 2.5.2

$$\int_M H_r = - \int_M H_{r+1} \langle \Phi, N \rangle$$

temos

$$\int_M H_2 - \lambda = \int_M H_2 - \lambda H_0 = - \int_M (H_3 - \lambda H) \langle \Phi, N \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\int_M H_2 = \lambda \text{Vol}(M) > 0.$$

Usando a desigualdade  $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$  com  $r = 1$ , temos  $H^2 \geq H_2$  e aplicando a mesma desigualdade agora para  $r = 2$  temos  $H_2^2 \geq HH_3 = \lambda H^2$ . Portanto,  $H_2^2 \geq \lambda H_2$ . Mostraremos a seguir que  $H_2$  não se anula. Suponha, por absurdo, que exista um  $q \in M$  tal que  $H_2(q) = 0$ . Sendo  $U = \{x \in M; H_2(x) > 0\}$  e  $V = \{x \in M; H_2(x) < 0\}$  da continuidade de  $H_2$  temos que  $U$  e  $V$  são abertos e como  $\emptyset \neq M \setminus U \ni q$  sendo  $M$  conexa, segue que  $\partial M \neq \emptyset$ . Com isso, existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  com  $H_2(x_n) > 0$  e  $\lim H_2(x_n) = 0$ . Agora pela desigualdade

$$H_2^2(x_n) \geq \lambda H_2(x_n)$$

temos

$$H_2(x_n) \geq \lambda$$

e aplicando o limite resultamos em

$$0 \geq \lambda,$$

o que contradiz com  $\lambda > 0$ . Já que  $H_2$  não muda de sinal a desigualdade  $H_2^2 \geq \lambda H_2$  nos dá  $H_2 \geq \lambda$  em  $M$  ou  $H_2 \leq \lambda$  em  $M$ . Usando uma dessas desigualdades com

$$\int_M H_2 - \lambda = 0,$$

obtemos o mesmo resultado, isto é,  $H_2 = \lambda$ . Sendo  $H_2$  constante podemos usar a generalização do teorema de Alexandrov 2.5.1 e assim concluímos que  $M = \mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ , mas a variação preserva o volume da esfera de raio 1, portanto,  $M = \mathbb{S}^n$ .

□

Esses dois teoremas nos permitem enunciar um resultado global para o Teorema 4.1.1. Pelo que vimos, o único ponto crítico do funcional  $\mathcal{W}_1$  encontra-se na esfera e a esfera é um mínimo local do funcional. Então a desigualdade obtida no Teorema 4.1.1 vale não só para toda hipersuperfície  $M_t$  para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e sim para toda hipersuperfície que pode ser suavemente deformada na esfera.

**Teorema 4.1.3** *Dada uma hipersuperfície compacta  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que pode ser suavemente deformada suavemente na esfera  $\mathbb{S}^n$  de mesmo volume da esfera unitária temos*

$$\mathcal{W}_1(M) \geq n(n-1),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{n(n-1)} \int_M S dM \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^n).$$

Além disso,  $\mathcal{W}_1(t) = n(n-1)$  se, e somente se,  $M_t$  é uma esfera euclidiana

Através desse teorema conseguimos demonstrar o problema proposto em (VIEIRA, Francisca Damiana, 2019).

**Corolário 4.1.2** *Toda hipersuperfície compacta  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pode ser suavemente deformada na esfera  $\mathbb{S}^n$  e com mesmo volume da esfera unitária, deve satisfazer*

$$\frac{1}{n \text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M (nH)^2 dM \geq n$$

**Demonstração:** Da desigualdade  $\frac{S}{n(n-1)} \leq H^2$  cuja igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é a esfera vista no corolário anterior temos

$$\int_M H^2 dM \geq \frac{1}{n(n-1)} \int_M S dM \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^n).$$

Além disso, a igualdade ocorre se e somente se  $M$  é uma esfera euclidiana.

□

## 4.2 Uma propriedade máxima de $\mathbb{S}^n$

Nesta seção apresentaremos três resultados de máximo para o primeiro autovalor na esfera.

**Definição 4.2.1** *Seja  $\mathcal{F}$  o espaço de todos os mergulhos suaves  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\text{Vol}(h(S)) = \text{Vol}(\mathbb{S}^n)$ . Então, definimos o funcional*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 : \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ h &\rightarrow \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{h(M)} S dM. \end{aligned}$$

**Teorema 4.2.1** *Considere o operador  $\mathcal{L} : H^2(M) \rightarrow L^2(M)$  definido por*

$$\mathcal{L} := -\Delta - nH^2 \tag{4.1}$$

onde  $\Delta$  e  $H^2$  são, respectivamente, o laplaciano e o quadrado da curvatura média de  $M$ . O primeiro autovalor  $\lambda_1^{0,\mathcal{L}}$  do operador  $\mathcal{L}$  na esfera  $\mathbb{S}^n$  é máximo dentre todos os primeiros autovalores de  $\mathcal{L}$  nas hipersuperfícies  $M$  que podem ser suavemente deformadas na esfera.

**Demonstração:** Sejam  $\lambda_1$  o primeiro autovalor de  $\mathcal{L}$  e  $u \in H^2(M)$  uma autofunção relacionada, ou seja,

$$\mathcal{L}(u) = \lambda_1 u = -\Delta u - nH^2 u.$$

Pelo Princípio Variacional para o autovalor principal e considerando  $u > 0$ , segue que

$$\lambda_1 = -\frac{\Delta u}{u} - nH^2$$

Integrando sobre  $h(M)$ , com  $h \in \mathcal{F}$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{h(M)} \lambda_1 dM &= - \int_{h(M)} \frac{\Delta u}{u} dM - n \int_{h(M)} H^2 dM \\ &= - \int_{h(M)} \Delta(\ln u) dM - \int_{h(M)} \frac{|\text{grad } u|^2}{u^2} dM - n \int_{h(M)} H^2 dM. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda_1 \text{Vol}(h(M)) = - \int_{h(M)} \frac{|\text{grad } u|^2}{u^2} dM - n \int_{h(M)} H^2 dM.$$

Como  $\text{Vol}(h(M)) = \text{Vol}(\mathbb{S}^n)$ , segue que

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{h(M)} \frac{|\text{grad } u|^2}{u^2} dM - \frac{n}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{h(M)} \mathbf{H}^2 dM.$$

Assim

$$\lambda_1 \leq -\frac{n}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{h(M)} \mathbf{H}^2 dM \leq -n,$$

onde na última desigualdade usamos o Corolário 4.1.2. Temos que  $\lambda_1 \leq -n = \lambda_1^0$ . E a igualdade ocorre se, e somente se

$$\int_{h(S)} \frac{|\text{grad } u|^2}{u^2} dS = 0 \iff |\text{grad } u|^2 = 0,$$

que equivale a  $u$  ser constante. Então,  $\lambda_1 = -n\mathbf{H}$  e, portanto,  $\mathbf{H} = \text{cte}$ . Usando o Teorema de (ALEXANDROV, 1962) temos  $M = \mathbb{S}^n$ .

□

**Observação 5** Como no teorema anterior, seja  $\lambda_1^{0,\mathcal{L}}$  o primeiro autovalor do operador  $\mathcal{L}$  na esfera  $\mathbb{S}^n$ . É claro que como para  $\mathbb{S}^n$  vale  $\frac{1}{n-1}S = |II|^2 = n\mathbf{H}^2$  temos  $\lambda_1^0 = \lambda_1^{0,\mathcal{L}} = \lambda_1^{0,\mathcal{L}_1} = \lambda_1^{0,L}$ . Onde  $\mathcal{L} := -\Delta - n\mathbf{H}^2$ ,  $\mathcal{L}_1 = -\Delta - \frac{1}{n-1}S$  e  $L = -\Delta - |II|^2$ . Seja  $\lambda_1^\alpha$  o primeiro autovalor do operador  $\alpha = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}, L\}$ . Valem

$$\lambda_1^0 = \lambda_1^{0,\mathcal{L}} \geq \lambda_1^{\mathcal{L}} \geq \lambda_1^L \quad (4.2)$$

$$\lambda_1^0 = \lambda_1^{0,\mathcal{L}} \geq \lambda_1^{\mathcal{L}} \geq \lambda_1^{\mathcal{L}_1} \quad (4.3)$$

**Demonstração:** Para  $\lambda_1^{\mathcal{L}} \geq \lambda_1^L$  consideremos  $u_{\mathcal{L}} \in H^2(M)$  uma autofunção relacionada ao primeiro autovalor  $\lambda_1^{\mathcal{L}}$ , então

$$\mathcal{L}(u^{\mathcal{L}}) = \lambda_1^{\mathcal{L}} u^{\mathcal{L}} = -\Delta u^{\mathcal{L}} - n\mathbf{H}^2 u^{\mathcal{L}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\mathcal{L}} &= \inf_{\|u\|=1} \langle \mathcal{L}(u), u \rangle = \langle \mathcal{L}(u_{\mathcal{L}}), u_{\mathcal{L}} \rangle \\ &= \int_M -u^{\mathcal{L}} \Delta u^{\mathcal{L}} - n\mathbf{H}^2 (u^{\mathcal{L}})^2 \\ &\geq \int_M -u^{\mathcal{L}} \Delta u^{\mathcal{L}} - |II|^2 (u^{\mathcal{L}})^2 \\ &= \langle L(u_{\mathcal{L}}), u_{\mathcal{L}} \rangle \\ &\geq \inf_{\|u\|=1} \langle L(u), u \rangle = \lambda_1^L. \end{aligned}$$

Para  $\lambda_1^{\mathcal{L}} \geq \lambda_1^{\mathcal{L}_1}$ , usamos o mesmo argumento, mas dessa vez usamos a desigualdade  $\frac{1}{n(n-1)}S \geq H^2$ .

□

Da observação acima e do teorema anterior obtemos os dois resultados a seguir.

**Teorema 4.2.2** *Considere o operador  $\mathcal{L}_1 : H^2(M) \longrightarrow L^2(M)$  definido por*

$$\mathcal{L}_1 := -\Delta - \frac{1}{n-1}S, \quad (4.4)$$

onde  $\Delta$  e  $S$  são, respectivamente, o laplaciano e a curvatura escalar de  $M$ . O primeiro autovalor  $\lambda_1^0$  do operador  $\mathcal{L}_1$  na esfera  $\mathbb{S}^n$  é máximo dentre todos os primeiros autovalores de  $\mathcal{L}_1$  nas hipersuperfícies  $M$  que podem ser suavemente deformadas na esfera.

**Teorema 4.2.3** *Considere o operador de Jacobi  $L : H^2(M) \longrightarrow L^2(M)$  definido por*

$$L := -\Delta - |II|^2, \quad (4.5)$$

onde  $\Delta$  e  $|II|^2$  são, respectivamente, o laplaciano e o quadrado da norma da segunda forma de  $M$ . O primeiro autovalor  $\lambda_1^{0,L}$  do operador  $L$  na esfera  $\mathbb{S}^n$  é máximo dentre todos os primeiros autovalores de  $L$  nas hipersuperfícies  $M$  que podem ser suavemente deformadas na esfera.

### 4.3 Toros de Clifford

Nesta seção apresentaremos uma família de toros que servirão para mostrar que retirando a hipótese topológica o Teorema 4.1.1 pode deixar de ser válido.

Inicialmente, consideremos o caso 4-dimensional. Veremos  $\mathbb{S}^3(a) \times \mathbb{S}^1(b)$ ,  $b > a$  imerso em  $\mathbb{R}^5$  como hipersuperfície de revolução similarmente ao que se faz para  $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$  como toro em  $\mathbb{R}^3$ . Para tanto, consideremos  $p : U \rightarrow \mathbb{S}^3(a)$  uma parametrização de  $\mathbb{S}^3(a) \subset \mathbb{R}^4$  onde  $p(u, v, w) = (p_1(u, v, w), p_2(u, v, w), p_3(u, v, w), p_4(u, v, w))$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$  é um aberto e  $q(\theta) = (b \cos \theta, b \sin \theta)$  é uma parametrização de  $\mathbb{S}^1(b)$ .

Seja  $\varphi$  a parametrização dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^3(a) \times \mathbb{S}^1(b) &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (p, q) &\longrightarrow ((p_1 + b) \cos \theta, p_2, p_3, p_4, (p_1 + b) \sin \theta). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \left( \frac{\partial p_1}{\partial u} \cos \theta, \frac{\partial p_2}{\partial u}, \frac{\partial p_3}{\partial u}, \frac{\partial p_4}{\partial u}, \frac{\partial p_1}{\partial u} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \left( \frac{\partial p_1}{\partial v} \cos \theta, \frac{\partial p_2}{\partial v}, \frac{\partial p_3}{\partial v}, \frac{\partial p_4}{\partial v}, \frac{\partial p_1}{\partial v} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial w} &= \left( \frac{\partial p_1}{\partial w} \cos \theta, \frac{\partial p_2}{\partial w}, \frac{\partial p_3}{\partial w}, \frac{\partial p_4}{\partial w}, \frac{\partial p_1}{\partial w} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= (-(p_1 + b) \sin \theta, 0, 0, 0, (p_1 + b) \cos \theta) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial u^2} \cos \theta, \frac{\partial^2 p_2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 p_3}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 p_4}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 p_1}{\partial u^2} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial v^2} \cos \theta, \frac{\partial^2 p_2}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 p_3}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 p_4}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 p_1}{\partial v^2} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} &= \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial w^2} \cos \theta, \frac{\partial^2 p_2}{\partial w^2}, \frac{\partial^2 p_3}{\partial w^2}, \frac{\partial^2 p_4}{\partial w^2}, \frac{\partial^2 p_1}{\partial w^2} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= (-(p_1 + b) \cos \theta, 0, 0, 0, -(p_1 + b) \sin \theta) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial u \partial v} \cos \theta, \frac{\partial^2 p_2}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 p_3}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 p_4}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 p_1}{\partial u \partial v} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} &= \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial u \partial w} \cos \theta, \frac{\partial^2 p_2}{\partial u \partial w}, \frac{\partial^2 p_3}{\partial u \partial w}, \frac{\partial^2 p_4}{\partial u \partial w}, \frac{\partial^2 p_1}{\partial u \partial w} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} &= \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial v \partial w} \cos \theta, \frac{\partial^2 p_2}{\partial v \partial w}, \frac{\partial^2 p_3}{\partial v \partial w}, \frac{\partial^2 p_4}{\partial v \partial w}, \frac{\partial^2 p_1}{\partial v \partial w} \sin \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial \theta} &= \left( -\frac{\partial p_1}{\partial u} \sin \theta, 0, 0, 0, \frac{\partial p_1}{\partial u} \cos \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial \theta} &= \left( -\frac{\partial p_1}{\partial v} \sin \theta, 0, 0, 0, \frac{\partial p_1}{\partial v} \cos \theta \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial \theta} &= \left( -\frac{\partial p_1}{\partial w} \sin \theta, 0, 0, 0, \frac{\partial p_1}{\partial w} \cos \theta \right).
\end{aligned}$$

Os coeficientes da métrica associados a essa parametrização de  $\mathbb{T}_{ab}^4$  são

$$\mathbf{g}_{uu} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial u} \right\rangle = g_{11}^a$$

$$\mathbf{g}_{vv} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p}{\partial v}, \frac{\partial p}{\partial v} \right\rangle = g_{22}^a$$

$$\mathbf{g}_{ww} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial w}, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p}{\partial w}, \frac{\partial p}{\partial w} \right\rangle = g_{33}^a$$

$$\mathbf{g}_{uv} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v} \right\rangle = g_{12}^a$$

$$\mathbf{g}_{uw} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial w} \right\rangle = g_{13}^a$$

$$\mathbf{g}_{vw} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p}{\partial v}, \frac{\partial p}{\partial w} \right\rangle = g_{23}^a$$

$$\mathbf{g}_{\theta\theta} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\rangle = (p_1 + b)^2$$

$$\mathbf{g}_{u\theta} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

$$\mathbf{g}_{v\theta} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

$$\mathbf{g}_{w\theta} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial w}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

e

$$\mathbf{g} = \det \begin{pmatrix} g_{11}^a & g_{12}^a & g_{13}^a & 0 \\ g_{21}^a & g_{22}^a & g_{23}^a & 0 \\ g_{31}^a & g_{32}^a & g_{33}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (p_1 + b)^2 \end{pmatrix} = (p_1 + b)^2 g_a,$$

onde  $g_a = \det(g_{ij}^a)$  e  $g_{ij}^a$  são os coeficientes da métrica de  $\mathbb{S}^3(a)$  relativo à parametrização  $p : U \rightarrow \mathbb{S}^3(a) \subset \mathbb{R}^4$ . Como  $|p_1| \leq a < b$ , temos que o determinante  $\mathbf{g}$  é diferente de zero.

Assim, o volume desse toro será

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbb{T}_{ab}^4) &= \int_0^{2\pi} \int_U \sqrt{\mathbf{g}} \, dudvdwd\theta = 2\pi \int_U (p_1(u, v, w) + b) \sqrt{g} \, dudvdw \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{S}^3(a)} (p_1 + b) = 2\pi b \, \text{vol}(\mathbb{S}^3(a)) = \text{vol}(\mathbb{S}^3(a)) \, \text{vol}(\mathbb{S}^1(b)) = 4\pi^3 a^3 b. \end{aligned}$$

Aqui usamos que  $p_1$  é uma autofunção do operador de Laplace em  $\mathbb{S}^3(a)$ , de forma que

$$\int_{\mathbb{S}^3(a)} p_1 = -\frac{a^2}{3} \int_{\mathbb{S}^3(a)} \Delta_{\mathbb{S}^3(a)} p_1 = 0.$$

A matriz inversa da métrica é

$$\begin{pmatrix} g_a^{11} & g_a^{12} & g_a^{13} & 0 \\ g_a^{21} & g_a^{22} & g_a^{23} & 0 \\ g_a^{31} & g_a^{32} & g_a^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (p_1 + b)^{-2} \end{pmatrix}.$$

Enquanto o campo normal a ser considerado será

$$-\eta = \frac{1}{a}(p_1 \cos \theta, p_2, p_3, p_4, p_1 \sin \theta)$$

Os coeficientes da segunda forma são

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{uu} &= - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \eta \right\rangle = \frac{p_1}{a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u^2} + \frac{p_2}{a} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u^2} + \frac{p_3}{a} \frac{\partial^2 p_3}{\partial u^2} + \frac{p_4}{a} \frac{\partial^2 p_4}{\partial u^2} \\ &= - \left\langle \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}, -\frac{1}{a}(p_1, p_2, p_3, p_4) \right\rangle = h_{11}^a. \end{aligned}$$

Analogamente,  $\mathbf{h}_{vv} = h_{22}^a$ ,  $\mathbf{h}_{ww} = h_{33}^a$ ,  $\mathbf{h}_{uv} = h_{12}^a$ ,  $\mathbf{h}_{uw} = h_{13}^a$  e  $\mathbf{h}_{vw} = h_{23}^a$ . Temos ainda

$$\mathbf{h}_{\theta\theta} = - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \eta \right\rangle = -(p_1 + b) \frac{p_1}{a}$$

e  $\mathbf{h}_{u\theta} = \mathbf{h}_{v\theta} = \mathbf{h}_{w\theta} = 0$ .

O cálculo de

$$\mathbf{h}^{ij} = \sum_{p,r} \mathbf{h}_{pr} \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj}.$$

Temos

$$\mathbf{h}^{uu} = h_{11}^a (g_a^{11})^2 + 2h_{12}^a g_a^{11} g_a^{12} + h_{22}^a (g_a^{12})^2 = h_a^{11}.$$

Analogamente,  $\mathbf{h}^{vv} = h_a^{22}$ ,  $\mathbf{h}^{ww} = h_a^{33}$ ,  $\mathbf{h}^{uv} = h_a^{12}$ ,  $\mathbf{h}^{uw} = h_a^{13}$ ,  $\mathbf{h}^{vw} = h_a^{23}$ ,  $\mathbf{h}^{u\theta} = \mathbf{h}^{v\theta} = \mathbf{h}^{w\theta} = 0$  e  $\mathbf{h}^{\theta\theta} = \mathbf{h}_{\theta\theta} (g^{\theta\theta})^2$ .

A curvatura média

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{4} \left( g^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + \sum_{i,j=1}^3 g_a^{ij} h_{ij}^a \right) = \frac{1}{4} \left( g^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + 3H(a) \right) \\ &= -\frac{3}{4a} - \frac{p_1}{4a(p_1 + b)} = -\frac{3}{4a} - \frac{(p_1 + b) - b}{4a(p_1 + b)} = -\frac{3}{4a} - \frac{1}{4a} + \frac{b}{4a(p_1 + b)} \\ &= -\frac{1}{a} + \frac{b}{4a(p_1 + b)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{b}{4a(p_1 + b)} = \mathbf{H} + \frac{1}{a}. \quad (4.6)$$

A norma da segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} |\mathbf{II}|^2 &= \sum_{i,j,k,l}^4 \mathbf{g}^{ij} \mathbf{g}^{kl} \mathbf{h}_{ik} \mathbf{h}_{jl} = \sum_{i,j,k,l}^3 g_a^{ij} g_a^{kl} h_{ik}^a h_{jl}^a + (\mathbf{g}^{\theta\theta})^2 (\mathbf{h}_{\theta\theta})^2 \\ &= |II(a)|^2 + (\mathbf{g}^{\theta\theta})^2 (\mathbf{h}_{\theta\theta})^2 = \frac{3}{a^2} + \frac{p_1^2}{a^2(p_1 + b)^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\mathbf{II}|^2 = \frac{12}{a^2} + \frac{24}{a} \mathbf{H} + 16\mathbf{H}^2.$$

Para o caso geral,  $\mathbb{S}^n(a) \times \mathbb{S}^1(b)$  (com  $b > a$ ) imerso em  $\mathbb{R}^{n+2}$  como hipersuperfície de revolução semelhante ao que fizemos antes consideremos  $p : U \rightarrow \mathbb{S}^n(a)$  uma parametrização de  $\mathbb{S}^n(a) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $p(u_1, \dots, u_n) = (p_1(u_1, \dots, u_n), \dots, p_{n+1}(u_1, \dots, u_n))$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto e  $q(\theta) = (b \cos \theta, b \sin \theta)$  parametrização de  $\mathbb{S}^1(b)$ .

Assumindo agora que  $\varphi$  é a parametrização dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^n(a) \times \mathbb{S}^1(b) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \\ (p, q) &\longrightarrow ((p_1 + b) \cos \theta, p_2, \dots, p_{n+1}, (p_1 + b) \sin \theta). \end{aligned}$$

Seja  $\mathbf{g} = \det(\mathbf{g}_{ij})$  o determinante relativo a parametrização  $\varphi$ , então

$$\mathbf{g} = \det \begin{pmatrix} g_{11}^a & \cdots & g_{1n}^a & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n1}^a & \cdots & g_{nn}^a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (p_1 + b)^2 \end{pmatrix} = (p_1 + b)^2 g_a,$$

onde  $g_a = \det(g_{ij}^a)$  e  $g_{ij}^a$  são os coeficientes da métrica de  $\mathbb{S}^n(a)$  relativo à parametrização  $p : U \rightarrow \mathbb{S}^n(a) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Como  $|p_1| \leq a < b$ , temos que o determinante  $\mathbf{g}$  é diferente de zero.

O volume do toro  $\mathbb{T}_{ab}^{n+1}$  será dado por

$$\text{vol}(\mathbb{T}_{ab}^{n+1}) = \int_0^{2\pi} \int_U \sqrt{\mathbf{g}} du_1 \dots du_n d\theta = 2\pi \int_U (p_1(u_1, \dots, u_n) + b) \sqrt{g} du_1 \dots du_n$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{S}^n(a)} (p_1 + b) = 2\pi b \text{vol}(\mathbb{S}^n(a)) = \text{vol}(\mathbb{S}^n(a)) \text{vol}(\mathbb{S}^1(b)).$$

Aqui usamos que  $p_1$  é uma autofunção do operador de Laplace em  $\mathbb{S}^n(a)$ , de forma que

$$\int_{\mathbb{S}^n(a)} p_1 = -\frac{a^2}{n} \int_{\mathbb{S}^n(a)} \Delta_{\mathbb{S}^n(a)} p_1 = 0.$$

A matriz inversa da métrica é

$$\begin{pmatrix} g_a^{11} & \cdots & g_a^{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_a^{n1} & \cdots & g_a^{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (p_1 + b)^{-2} \end{pmatrix}.$$

O campo normal a ser considerado será

$$-\eta = \frac{1}{a} (p_1 \cos \theta, p_2, \dots, p_{n+1}, p_1 \sin \theta).$$

Os coeficientes da segunda forma

$$\mathbf{h}_{11} = -\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}, \eta \right\rangle = \frac{p_1}{a} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u^2} + \cdots + \frac{p_{n+1}}{a} \frac{\partial^2 p_{n+1}}{\partial u_1^2} = -\left\langle \frac{\partial^2 p}{\partial u_1^2}, -\frac{1}{a} (p_1, \dots, p_{n+1}) \right\rangle = h_{11}^a.$$

Analogamente,  $\mathbf{h}_{ij} = h_{ij}^a$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Temos ainda

$$\mathbf{h}_{\theta\theta} = -\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \eta \right\rangle = -(p_1 + b) \frac{p_1}{a}$$

e  $\mathbf{h}_{i\theta} = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .

O cálculo de

$$\mathbf{h}^{ij} = \sum_{p,r} \mathbf{h}_{pr} \mathbf{g}^{ip} \mathbf{g}^{rj}$$

Com isso,  $\mathbf{h}^{ij} = h_a^{ij}$  para  $i, j = 1, \dots, n$  e  $\mathbf{h}^{i\theta} = 0$  para  $i = 1, \dots, n$  com  $\mathbf{h}^{\theta\theta} = \mathbf{h}_{\theta\theta} (\mathbf{g}^{\theta\theta})^2$ .

A curvatura média

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{n+1} \left( g^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + \sum_{i,j=1}^n g_a^{ij} h_{ij}^a \right) = \frac{1}{n+1} \left( g^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + nH(a) \right) \\ &= -\frac{n}{(n+1)a} - \frac{p_1}{(n+1)(p_1+b)a} = -\frac{n}{(n+1)a} - \frac{(p_1+b) - b}{(n+1)(p_1+b)a} \\ &= -\frac{n}{(n+1)a} - \frac{1}{(n+1)a} + \frac{b}{(n+1)(p_1+b)a} \\ &= -\frac{1}{a} + \frac{b}{(n+1)(p_1+b)a}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{b}{a(n+1)(p_1+b)} = \mathbf{H} + \frac{1}{a}. \quad (4.7)$$

A norma da segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} |\mathbf{II}|^2 &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n+1} \mathbf{g}^{ij} \mathbf{g}^{kl} \mathbf{h}_{ik} \mathbf{h}_{jl} = \sum_{i,j,k,l=1}^n g_a^{ij} g_a^{kl} h_{ik}^a h_{jl}^a + (\mathbf{g}^{\theta\theta})^2 (\mathbf{h}_{\theta\theta})^2 \\ &= |II(a)|^2 + (\mathbf{g}^{\theta\theta})^2 (\mathbf{h}_{\theta\theta})^2 = \frac{n}{a^2} + \frac{p_1^2}{a^2(p_1+b)^2}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|\mathbf{II}|^2 = \frac{n^2}{a^2} + \frac{2n(n+1)}{a} \mathbf{H} + (n+1)^2 \mathbf{H}^2.$$

Portanto,

$$-S = |\mathbf{II}|^2 - (n+1)^2 \mathbf{H}^2 = \frac{n^2}{a^2} + \frac{2n(n+1)}{a} \mathbf{H}$$

e

$$-\int_{\mathbb{T}_{ab}^{n+1}} S = \text{Vol}(\mathbb{T}_{ab}^{n+1}) \frac{n^2}{a^2} + \frac{2n(n+1)}{a} \int_{\mathbb{T}_{ab}^{n+1}} \mathbf{H}.$$

Usando 4.7, temos

$$-\int_{\mathbb{T}_{ab}^{n+1}} S = \text{Vol}(\mathbb{T}_{ab}^{n+1}) \left( \frac{n^2}{a^2} - \frac{1}{a} \right) + \frac{2n(n+1)}{a} \frac{b}{a(n+1)} \int_{\mathbb{T}_{ab}^{n+1}} \frac{1}{p_1+b}$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_{ab}^{n+1}} \frac{1}{p_1+b} &= \int_0^{2\pi} \int_U \frac{1}{p_1(u_1, \dots, u_n) + b} \sqrt{\mathbf{g}} du d\theta \\ &= 2\pi \int_U \sqrt{\mathbf{g}} du_1 \dots du_n = \frac{1}{b} \text{vol}(\mathbb{S}^n(a)) \text{vol}(\mathbb{S}^1(b)). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{T}_{ab}^{n+1}} S &= \text{Vol}(\mathbb{T}_{ab}^{n+1}) \left( \frac{n^2}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{2n}{a^2} \right) \\ &= \text{Vol}(\mathbb{T}_{ab}^{n+1}) \frac{n(n+2) - a}{a^2}. \end{aligned}$$

Portanto, impondo  $\text{Vol}(\mathbb{T}_{ab}^{n+1}) = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n+1})$ , temos

$$\mathcal{W}_1(\mathbb{T}_{ab}^{n+1}) = \frac{a - n(n+2)}{a^2}. \quad (4.8)$$

Para  $n = 3$  a imposição de que  $\text{Vol}(\mathbb{T}_{ab}^4) = \text{Vol}(\mathbb{S}^4)$  equivale a  $\text{Vol}(\mathbb{S}^3(a))\text{Vol}(\mathbb{S}^1(b)) = \text{Vol}(\mathbb{S}^4)$ . Substituindo temos

$$2\pi^2 a^3 2\pi b = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a^2(ab) = \frac{2}{3\pi}.$$

Por simplicidade, podemos considerar a classe de toros em que  $ab = 1$ . Assim,

$$\mathcal{W}_1(\mathbb{T}_{ab}^4) = \frac{3\pi}{2} \left( \sqrt{\frac{2}{3\pi}} - 15 \right) < 0 < 12 = \mathcal{W}_1(\mathbb{S}^4).$$

Essa família nos dá uma infinidade de exemplos. O caso apresentado acima apenas retrata um caso particular.

## 5 CONCLUSÃO

Nesta tese, mostramos alguns resultados de caracterização para a esfera a partir dos primeiros autovalores de operadores do tipo Schrodinger, cujos potenciais são dados pela curvatura escalar e pelo quadrado da curvatura média. Garantimos que o primeiro autovalor desse operador, no espaço das hipersuperfícies de que podem ser suavemente deformadas na esfera, atingem seus máximos na esfera  $\mathbb{S}^n$ . Para demonstrar esses resultados, fez-se necessário generalizar o teorema de caracterização da esfera proposto por Willmore. No final vemos que o resultado não é válido ao removermos a hipótese topológica, mas ao menos para a família de exemplos apresentada ainda há chances de encontrarmos limitações. Em busca de mais problemas podemos pensar nesses casos, onde a topologia é diferente da esfera.

## REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; COLARES, A. G. Integral formulas for the  $r$ -mean curvature linearized operator of a hypersurface. **Annals of Global Analysis and Geometry**, Netherlands, v. 16, p. 203–220, 1998.
- ALEXANDROV, A. D. A characteristic property of spheres. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Italy, v. 58, n. 1, p. 303–315, 1962.
- ALIKAKOS, N. D.; FUSCO, G. The spectrum of the cahn-hilliard operator for generic interface in higher space dimensions. **Indiana University mathematics journal**, United States, v. 42, n. 2, p. 637–674, 1993.
- BARBOSA, J. L.; CARMO, M. D.; Stability of hypersurfaces with constant mean curvature *In*: CARMO, Manfredo P. do. **Selected Papers [S.l.]**: Springer, 2012, p. 221–235.
- BARBOSA, J. L.; CARMO, M. D.; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds *In*: CARMO, Manfredo P. do. **Selected Papers [S.l.]**: Springer, 2012, p. 291–306.
- BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant  $r$ -mean curvature. **Annals of Global Analysis and Geometry**, Netherlands, v. 15, n. 3, p. 277–297, 1997.
- BESSE, A. L. Einstein manifolds and topology *In*: Einstein Manifolds. **Selected Papers [S.l.]**: Springer, 1987, p. 154–176.
- BESSE, A. L. **Einstein manifolds** New York: Springer. 2007.
- CHANG, J.-W.; HWANG, S.-S.; YUN, G.-J. Critical point metrics of the total scalar curvature. **Bulletin of the Korean Mathematical Society**, Korea, v. 49, n. 3, p. 655–667, 2012.
- CHAVEL, I. **Eigenvalues in Riemannian geometry** Cambridge: Academic press. 1984.
- EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Providence: Graduate Studies in Mathematics. 2010.
- HARRELL II, E. M. On the second eigenvalue of the laplace operator penalized by curvature. **Differential Geometry and its Applications**, Netherlands, v. 6, n. 4, p. 397–400, 1996.
- HARRELL II, E. M.; LOSS, M. On the laplace operator penalized by mean curvature. **Communications in mathematical physics**, United States, v. 195, n. 3, p. 643–650, 1998.
- HSIUNG, C.-C. Some integral formulas for closed hypersurfaces. **Mathematica Scandinavica**, Denmark, p. 286–294, 1954.
- JORGE, L.; KOUTROFIOTIS, D. An estimate for the curvature of bounded submanifolds. **American Journal of Mathematics**, United States, v. 103, n. 4, p. 711–725, 1981.
- LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds** New York: Springer. 2003.
- MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante**. 2004. 67 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2004.

PAPANICOLAOU, V. G. The second periodic eigenvalue and the alikakos–fusco conjecture. **Journal of differential equations**, United States, v. 130, n. 2, p. 321–332, 1996.

PINTO, Victor Gomes. **Caracterizações da esfera em formas espaciais**. 2017. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

SANTOS, Pedro Jorge Sousa dos. **Hipersuperfícies compactas: o teorema de Alexandrov para curvatura média de ordem superior**. 2015. 51 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Piauí, Teresina,, 2015.

VIEIRA, Francisca Damiana. **Primeiro autovalor do operador de Laplace penalizado pela curvatura média e o funcional de Willmore**. 2019. 67 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

YUN, G.; CHANG, J.; HWANG, S. Total scalar curvature and harmonic curvature. **Taiwanese Journal of mathematics**, China, v. 18, n. 5, p. 1439–1458, 2014.