



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOÃO NUNES DE ARAUJO NETO

**SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DO \mathbb{R}^2 NO \mathbb{R}^2 E O
TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HAEFLIGER**

FORTALEZA
2013

JOÃO NUNES DE ARAUJO NETO

SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DO \mathbb{R}^2 NO \mathbb{R}^2 E O
TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HAEFLIGER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

FORTALEZA
2013

JOÃO NUNES DE ARAUJO NETO

SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DO \mathbb{R}^2 NO \mathbb{R}^2 E O
TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HAEFLIGER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Aprovada em: ____/____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Darlan Rabelo Girão
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Nicolas Dutertre
Aix-Marseille Université (AMU)

Dedico este trabalho a meu ao meu bebê que
ainda é do tamanho de um grãozinho de ger-
gelim.

Lança o teu pão sobre as águas, porque depois de muitos dias o acharás.

Eclesiastes 11.1.

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu verdadeiro amigo, porto seguro, consolo e salvação.

A minha mãe e pai Francisca Nunes de Araújo, por todo amor e conselhos preciosos que fizeram de mim o que sou hoje.

A minha esposa, Alexandra Fernandes Mendes por todo apoio, carinho e paciência.

Aos meus irmãos, minha sogra, meu sogro e cunhados que estiveram sempre na torcida.

Ao meu orientador pelo auxílio, amizade e paciência durante toda a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos Anderson, Breno Rafael, Chaves, Edson Sampaio, Edvalter da Silva, Diego Eloi, Elaine Sampaio, Fabiana Alves, Francisco de Assis, Gilson Granja, Henrique Branco, João Vitor, João Luiz, José Eduardo, José Loester, Joserlan Perote, Leo Ivo, Leonardo, Marlon, Neilha, Rafael Diógenes, Renan da Silva, Renivaldo Senna, Robério Coelho, Roger Oliveira, Rui Eduardo, Selene, Wanderley de Oliveira, Wesley Marinho.

A coordenação da Pós-Graduação em matemática, especialmente a Andrea, pela disponibilidade e presteza.

A FUNCAP pelo apoio financeiro.

RESUMO

Baseados nos trabalhos de Hassler Whitney e André Haefliger, buscamos saber sobre que condições uma aplicação suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ de uma superfície compacta no espaço \mathbb{R}^2 pode ser estudada como composição de uma imersão $g : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ com a projeção natural $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Palavras-chave: Singularidades. Imersão. Núcleo.

ABSTRACT

Based on work of Hassler Whitney and André Haefliger, we seek to know under what conditions smooth application $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ of a compact surface in space \mathbb{R}^2 can be studied as a composition of an immersion $g : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ with the natural projection $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Key words: Singularities. Immersion. Kernel.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 7 |
| 2 | PRELIMINARES | 9 |
| 2.1 | Aplicações de Classe C^∞ | 9 |
| 2.2 | Jatos | 10 |
| 2.3 | Germes em \mathcal{E}_n | 10 |
| 2.4 | Singularidades | 11 |
| 3 | TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE WHITNEY | 13 |
| 3.0.1 | Pontos Regulares | 17 |
| 3.0.2 | Dobras | 17 |
| 3.0.3 | Cúspides | 18 |
| 3.1 | PROVA DO TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE WHITNEY | 20 |
| 4 | TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HAEFLIGER | 23 |
| 4.0.1 | Espaço Nulo | 23 |
| 4.1 | TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HAEFLIGER | 24 |
| | REFERÊNCIAS | 28 |

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Seja f uma aplicação diferenciável de uma superfície V em uma superfície W ambas munidas com uma estrutura diferenciável. Dizemos que z é ponto regular de f se $\text{RankDf}(z) = 2$ e z é singular $\text{RankDf}(z) < 2$. Na vizinhança de um ponto regular f é um difeomorfismo. H. Whitney publicou em *Annals of Math* [1] que toda aplicação de V em W pode ser aproximada por uma aplicação excelente, a qual apresenta dois tipos de pontos singulares que descrevemos a seguir. Escolhendo sistemas de coordenadas convenientes (x, y) para V e (X, Y) para W , onde as coordenadas de z são $(0, 0)$, f é expressa localmente da seguinte forma ;

$$X = y, Y = y^2 \tag{1.1}$$

$$X = y, Y = xy - y^3 \tag{1.2}$$

os pontos singulares do tipo 1.1 e 1.2 formam uma curva C em V , chamada *dobra geral* de f , os pontos do tipo 1.2 são as cúspides de f , estes pontos são isolados em C e o posto da restrição de $D_z f$ a C é zero, a curva C é definida pela aplicação $x = 3y^2$.

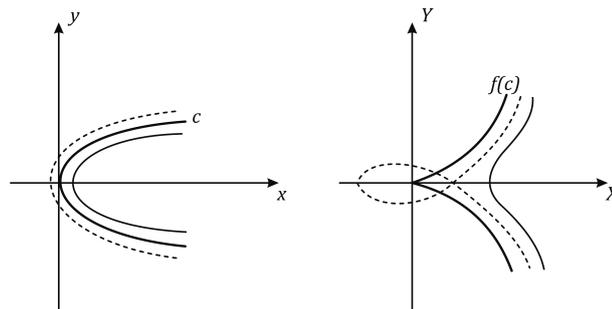


Figura 1.1: Tipos de Singularidades

Diremos que $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser fatorada se existir $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão tal que $f = \pi \circ g$ onde π é a projeção natural de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 . Uma pergunta natural é em que condições uma aplicação excelente de uma superfície compacta V no plano \mathbb{R}^2 pode ser fatorada. Tal questão foi respondida por André Haefliger em [3].

Uma aplicação excelente f de uma superfície V compacta no plano \mathbb{R}^2 pode ser fatorada por uma imersão g em \mathbb{R}^3 se e somente se em cada componente conexa C_i da dobra geral C de f , tivermos o número de cúspides par e C_i admitindo uma vizinhança orientável ou o número de cúspides ímpar e uma vizinhança não orientável.

No capítulo 1 daremos ênfase ao Teorema de Whitney para aplicação suaves do plano no plano, onde usaremos o Teorema de Thom e o Teorema de Preparação de Malgrange-Mather para exibir uma prova do referido teorema. No capítulo 2 provaremos o Teorema de Fatoração de Haefliger para aplicações excelentes.

Capítulo 2

PRELIMINARES

2.1 Aplicações de Classe C^∞

Consideraremos U e V subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p , respectivamente.

Definição 1. Dada uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, dizemos que $x \in U$ é um **ponto singular** se matriz jacobiana

$$Df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$$

não possui o rank máximo possível em $x \in \mathbb{R}^n$. Caso contrário, dizemos que x é regular.

Definição 2. Dizemos que uma bijeção $\varphi : U \rightarrow V$, é um **difeomorfismo** se φ e φ^{-1} são C^∞ . Uma aplicação C^∞ $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, é um **difeomorfismo local** no ponto $x \in U$ se existe uma vizinhança aberta V de x em U , tal que, $\varphi(V)$ é aberto em \mathbb{R}^n e $V \rightarrow \varphi(V)$, $x \mapsto \varphi(x)$, é um difeomorfismo.

Teorema 1 (Teorema da Função Inversa). Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação de classe C^∞ . Se a aplicação derivada de f , denotada por $df(x)$, é um isomorfismo para todo $x \in U$, então existem vizinhança U' e V' de x e de $f(x)$ respectivamente tal que $f_{U'} : U' \rightarrow V'$ é um difeomorfismo (local) e neste caso $n=p$.

Definição 3. Seja $x \in U$. Dizemos que uma aplicação de classe C^∞ $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é **imersão** em x se $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ for injetora (note que necessariamente $n \leq p$). Dizemos que f é **submersão** em x se $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ for sobrejetora ($p \leq n$).

Proposição 1 (Forma Local das Submersões). Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação tal que $f(0) = 0$ e f é uma submersão em 0 . Então existe um difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$, V, W vizinhanças de 0 em \mathbb{R}^n , tal que, $\varphi(0) = 0$ e

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$$

Proposição 2 (Forma Local das Imersões). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ tal que $f(0) = 0$ e f é uma imersão em 0 . Então existe um difeomorfismo $\psi : V \rightarrow W$, V, W vizinhanças de 0 em \mathbb{R}^p , tal que, $\psi(0) = 0$ e*

$$(\psi \circ f)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

2.2 Jatos

Definição 4. *O espaço dos k-jatos $J^k(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ é o espaço vetorial real das aplicações polinomiais g de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p de grau $\leq k$ com $g(0) = 0$.*

Definição 5. *Para cada aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ e cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, definimos aplicação $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ por: $j^k f(\mathbf{a}) = 0$ polinômio de Taylor de $f(x + \mathbf{a}) - f(\mathbf{a})$ de ordem k na origem. A aplicação $j^k f$ é de classe C^∞ e $j^k f(\mathbf{a})$ é chamado de k-jato de f em \mathbf{a} .*

Exemplo 1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ então $j^k f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})x + \frac{f''(\mathbf{a})}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(\mathbf{a})}{k!}x^k$*

2.3 Germes em ε_n

Com o objetivo de estudar o comportamento local das funções, vamos definir *germe* de uma aplicação.

Definição 6. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $f : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações C^∞ definidas em vizinhanças abertas U_1 e U_2 de x . Dizemos que f e g são equivalentes, e escrevemos $f \sim g$, se existir uma vizinhança $U \ni x$ em \mathbb{R}^n , $U \subset U_1 \cap U_2$ tal que $f|_U = g|_U$, ou seja, se f e g coincidem em uma vizinhança U de x . Esta é uma relação de equivalência.*

Definição 7. *As classes de equivalência sob esta relação são chamadas **germes de aplicações C^∞ de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p em x** . Os elementos de uma classe são chamados *representantes do germe*.*

O germe de uma aplicação em $\alpha \in \mathbb{R}^n$, é denotado por

$$f : (\mathbb{R}^n, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Considerando $\alpha = 0 \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de todos os germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ é representado por

$$\varepsilon_{n,p} = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p\}$$

Quando $P = 1$ este conjunto é denotado por ε_n

Observações:

- (a) ε_n é anel local cujo ideal maximal é $\mathfrak{m}_n = \{f \in \varepsilon_n : f(0) = 0\}$
- (b) $\varepsilon_{n,p}$ é um ε_n -módulo livre de dimensão p .
- (c) \mathfrak{m}_n é o ideal gerado por $\{x_1, \dots, x_n\}$.
- (d) $\mathfrak{m}_n^k = \{f \in \varepsilon_n : j^{k-1}f(0) = 0\}$

Lema 1 (Lema de Nakayama). *Seja ε um anel comutativo com elemento unidade 1 e \mathfrak{m} um ideal de ε com a propriedade que $1 + x$ é invertível em ε para todo $x \in \mathfrak{m}$. Sejam M um ε -módulo e A e B ε -submódulo com A finitamente gerado. Se $A \subseteq B + \mathfrak{m}A$, então $A \subseteq B$.*

2.4 Singularidades

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função suave. Dizemos que f é regular em \mathbf{p} se $\nabla_v f(\mathbf{p}) \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq 0$, caso contrário, f é singular em \mathbf{p} . Com sistemas de coordenadas (x, y) em U e (\mathbf{u}, \mathbf{v}) em \mathbb{R}^2 o Jacobiano é

$$J = u_x v_y - u_y v_x$$

Decorre que \mathbf{p} é ponto regular ou singular se $J(\mathbf{p}) \neq 0$ ou $J(\mathbf{p}) = 0$, respectivamente. Seja f um aplicação C^2 , dizemos que \mathbf{p} é *ponto bom* se $J(\mathbf{p}) \neq 0$ ou $\nabla J(\mathbf{p}) \neq 0$. f é dita *boa* quando todos os pontos são bons.

Lema 2. *Seja f boa em U . Então para cada ponto $\mathbf{p} \in U$ o espaço imagem $H(\mathbf{p})$ de $\nabla f(\mathbf{p})$ tem dimensão 2 ou 1, de acordo se \mathbf{p} é regular ou não.*

Demonstração. Suponhamos que \mathbf{p} é regular, logo $\nabla f(\mathbf{p})$ é isomorfismo e $\dim(H(\mathbf{p})) = 2$. caso contrário $\dim(H(\mathbf{p})) \leq 1$.

digamos que $\dim(H(\mathbf{p})) = 0$ decorre que $d_{\mathbf{p}}f = 0$ donde $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ em \mathbf{p} , derivando $J = u_x v_y - u_y v_x$ temos $J_x(\mathbf{p}) = J_y(\mathbf{p}) = 0$ uma contradição, pois f é uma função boa. □

Lema 3. *Seja f boa em U . Então os pontos singulares de f formam uma curva suave em U .*

Demonstração. Seja \mathbf{p} um ponto singular de f , portanto $J(\mathbf{p}) = 0$ e $\nabla J(\mathbf{p}) \neq 0$. Veja que J é regular nos pontos singulares de f . Pelo teorema da função implícita existe um aberto $I_0 \times I_1$ contendo $\mathbf{p} = (x_0, y_1)$, $J^{-1}(0) \cap (I_0 \times I_1)$ é gráfico de uma função suave $\phi : I_0 \rightarrow I_1$ tal que $\phi(x_0) = y_1$ e $J(x_0, \phi(x_0)) = 0$. Portanto as soluções de $J = 0$ estão em uma curva suave. □

Observação 1. *Seja ϕ uma parametrização da dobra \mathbf{c} , com $\phi(0) = \mathbf{p}$, quando*

$$\left. \frac{d}{dt}(f\phi)(t) \right|_{t=0} \neq 0$$

dizemos que \mathbf{p} é ponto de dobra. \mathbf{p} é dito ponto cúspide quando

$$\left. \frac{d}{dt}(f\phi)(t) \right|_{t=0} = 0$$

e

$$\left. \frac{d^2}{dt^2}(f\phi)(t) \right|_{t=0} \neq 0$$

Dizemos que \mathbf{p} é *ponto excelente* de f (assumida boa) se é regular, dobra ou cúspide e f é *excelente* se cada ponto de \mathbf{U} é excelente.

Capítulo 3

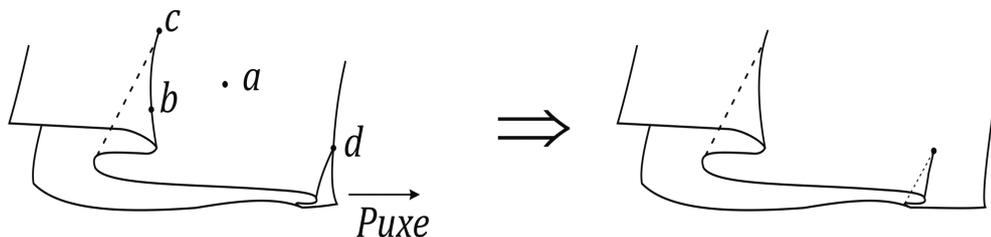
TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE WHITNEY

Neste capítulo demonstraremos alguns resultados devidos a Whitney, que permitem conhecer o conjunto dos pontos singulares de aplicações diferenciáveis $f_0 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, os quais respondem à problemas como a classificação das singularidades e sua topologia.

Considere um pedaço de tecido. Amasse-o e jogue sobre uma superfície plana. Quais as formas o tecido pode assumir nas proximidades de um ponto? Em geral ocorre uma das três possibilidades:

- (a) Não ocorrem dobras numa vizinhança desse ponto;
- (b) o ponto aparece sobre um reta que limita uma dobra do tecido.
- (c) Uma prega se inicia no ponto.

Com um pouco mais de insistência é possível que apareçam outras formas, por exemplo, o tipo (d) na figura acima. Contudo, perturbações arbitrariamente pequenas no tecido podem eliminar pontos que não um dos três tipos acima.



A posição de um início de prega ou uma dobra pode ser afetada por pequenas perturbações no tecido, mas não a existência deles.

Pontos do tipo (a) são os mais comuns e também os mais simples. Esses são chamados pontos regulares todos os outros são chamados pontos singulares.

Esse é um enunciado informal do seguinte teorema provado por H. Whitney, publicado em Annals de Math (62), 1995.

Teorema 2. *Existe $\Omega \subset C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ residual, com a seguinte propriedade: Dada $f \in \Omega$, para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ é possível escolher coordenadas (\mathbf{x}, \mathbf{y}) em \mathbb{R}^2 com origem em \mathbf{p} e coordenadas (X, Y) em \mathbb{R}^2 com origem em $f(\mathbf{p})$ tais que f nessas coordenadas é dada por:*

(a) (Ponto Regular)

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \end{aligned}$$

(b) (Dobra)

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y^2 \end{aligned}$$

(c) (Cúspide)

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= -xy + y^3 \end{aligned}$$

Aqui apresentamos uma demonstração diferente da original, feita por Whitney em [1]. Nesta demonstração utilizamos dois resultados clássicos, o teorema de Preparação de Malgrange e o teorema de transversalidade de Thom.

Teorema 3 (Preparação C^∞ , Malgrange-Mather). *Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave com $\varphi(0) = 0$. Seja M um ε_m – módulo finito, \mathcal{M} é um ε_n – módulo finito (via φ^*) se, e somente se, o \mathbb{R} – espaço vetorial $M/\varphi^*\mathcal{M}_n \cdot M$ é finito.*

Demonstração. provaremos primeiro para $m = n + 1$ e $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\varphi^* : \varepsilon_m \rightarrow \varepsilon_{n+1}$$

é dado por: $\varphi^*f(x_1, \dots, x_n, y) = f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n, y) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Então, seja M um ε_{n+1} – módulo finito; $M/\varphi^*\mathcal{M}_n \cdot M$ é um \mathbb{R} – espaço vetorial finito. Logo, temos $m_1, \dots, m_s \in M$;

$$M = \varphi^*\varepsilon_n m_1 + \dots + \varphi^*\varepsilon_n m_s + \varphi^*m_n \cdot M$$

Como $\varphi^*\mathfrak{M}_n \leq \mathfrak{M}_{n+1}$, temos

$$\mathfrak{M} = \varepsilon_{n+1}\mathfrak{m}_1 + \dots + \varepsilon_m\mathfrak{m}_s + \mathfrak{M}_m\mathfrak{M}.$$

Por Nakayama temos

$$\mathfrak{M} = \varepsilon_{m+1} + \dots + \varepsilon_{n+1}\mathfrak{m}_s.$$

Portanto

$$\mathbf{y}\mathfrak{m}_i = (\mathbf{c}_{i1} + \mathbf{b}_{i1})\mathfrak{m}_1 + \dots + (\mathbf{c}_{is} + \mathbf{b}_{is})\mathfrak{m}_s. \quad (3.1)$$

Existem $\mathbf{c}_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{h}_{ij} \in \varphi^*\mathfrak{m}_n$ ($\mathbf{h}_{ij}(0, \dots, 0, \mathbf{y}) = 0$), com $1 \leq i \leq s$ e $1 \leq j \leq s$. Seja Δ o determinante do sistema homogêneo associado ao sistema (2.1), isto é,

$$\Delta(x_1, \dots, x_n, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{y}\delta_{ij} - \mathbf{c}_{ij} - \mathbf{h}_{ij}(x_1, \dots, x_n, \mathbf{y})).$$

$$\begin{aligned} \Delta(0, \mathbf{y}) &= \det(\mathbf{y}\delta_{ij} - \mathbf{c}_{ij}) \\ &= \mathbf{y}^s + \sum_{k=1}^s \mathbf{c}_k^* \mathbf{y}^{s-k} \in \mathbb{R}[\mathbf{y}]. \end{aligned}$$

Seja \mathbf{p} a multiplicidade de $\mathbf{y}_0 = 0$ como raiz de $\Delta(0, \mathbf{y})$. Logo, $\mathbf{p} \leq s$. Portanto, pelo Teorema da Divisão, para cada $f \in \varepsilon_{n+1}$, existem $\mathbf{q} \in \varepsilon_{n+1}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \varepsilon_n$;

$$f = \mathbf{q}\Delta + \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{y}^{p-k}.$$

Finalmente, dado $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$, temos $f_1, \dots, f_s \in \varepsilon_{n+1}$ tais que $\mathfrak{m} = f_1\mathfrak{m}_1 + \dots + f_s\mathfrak{m}_s$. Para cada f_i , temos $\mathbf{q}_i \in \varepsilon_{n+1}$ e $\lambda_{ij} \in \varepsilon_n$ $1 \leq j \leq \mathbf{p}$;

$$f_i = \mathbf{q}_i\Delta + \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} \mathbf{y}^{p-j}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \sum_{i=1}^s \left(\mathbf{q}_i\Delta + \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} \mathbf{y}^{p-j} \right) \mathfrak{m}_i \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} \mathbf{y}^{p-j} \mathfrak{m}_i \in \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^p \varphi^*(\xi_n) \mathbf{y}^{p-j} \mathfrak{m}_i \end{aligned}$$

Logo, M é um ε – módulo finito (via φ^*) com geradores $\mathbf{y}^{p-j}\mathbf{m}$.

Agora, sejam $\mathbf{m} = \mathbf{n} + 2$ e $\varphi : (\mathbb{R}^{\mathbf{n}+2}, \mathcal{O}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathcal{O})$ dada por $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) = (x_1, \dots, x_n)$. Portanto

$$(\mathbb{R}^{\mathbf{n}+2}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\pi_2} (\mathbb{R}^{\mathbf{n}+1}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\pi_1} (\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathcal{O})$$

φ

tal que $\pi_2(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) = (x_1, \dots, x_n, y_1)$ e $\pi_1(x_1, \dots, x_n, y_1) = (x_1, \dots, x_n)$, portanto

$$\varepsilon_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\pi_1^*} \varepsilon_{\mathbf{n}+1} \xrightarrow{\pi_2^*} \varepsilon_{\mathbf{n}+2}$$

φ^*

Seja M um $\varepsilon_{\mathbf{n}+2}$ – módulo finito tal que

$$M = \varphi^*(\varepsilon_{\mathbf{n}}).m_1 + \dots + \varphi^*(\varepsilon_{\mathbf{n}}).m_k + \varphi^*(\mathfrak{M}_{\mathbf{n}})M \quad (3.2)$$

Queremos mostrar que M é um $\varepsilon_{\mathbf{n}}$ – módulo finito (via φ^*).

$$M = \pi_2^*(\pi_1^*(\varepsilon_{\mathbf{n}})).m_1 + \dots + \pi_2^*(\pi_1^*(\varepsilon_{\mathbf{n}})).m_k + \pi_2^*(\pi_1^*(\mathfrak{M}_{\mathbf{n}}))M \subseteq$$

$$\pi_2^*(\varepsilon_{\mathbf{n}+1}).m_1 + \dots + \pi_2^*(\varepsilon_{\mathbf{n}}).m_k + \pi_2^*(\mathfrak{M}_{\mathbf{n}+1})M \subseteq M$$

donde $M = \pi_2^*(\varepsilon_{\mathbf{n}+1}).m_1 + \dots + \pi_2^*(\varepsilon_{\mathbf{n}+1}).m_k + \pi_2^*(\mathfrak{M}_{\mathbf{n}+1})M$ e conseqüentemente M é um $\varepsilon_{\mathbf{n}+1}$ – módulo finito (via π_2^*). Por (3.2), temos $M = \pi_1^*(\varepsilon_{\mathbf{n}}).m_1 + \dots + \pi_1^*(\varepsilon_{\mathbf{n}}).m_k + \pi_1^*(\mathfrak{M}_{\mathbf{n}})M$ sob uma ação de π_2^* , logo M é um $\varepsilon_{\mathbf{n}}$ – módulo finito (via π_1^*) donde concluímos que M é um $\varepsilon_{\mathbf{n}}$ – módulo finito (via $\varphi^* = \pi_2^* \circ \pi_1^*$).

Por indução, prova-se que o resultado vale para $\pi : (\mathbb{R}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}, \mathcal{O}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathcal{O})$ dado por

$$\pi(x_1, \dots, x_{\mathbf{m}}, y_1, \dots, y_{\mathbf{n}}) = (y_1, \dots, y_{\mathbf{n}})$$

Agora, consideremos $\varphi : (\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \mathcal{O}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathcal{O})$ suave. Seja $\Phi : (\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \mathcal{O}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}, \mathcal{O})$ dada por $\Phi(x) = (x, \phi(x))$

$$(\mathbb{R}^{\mathbf{m}}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\Phi} (\mathbb{R}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathcal{O})$$

φ

portanto

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_{\mathbf{n}} & \xrightarrow{\pi^*} & \varepsilon_{\mathbf{m}+\mathbf{n}} \\ & \searrow \varphi^* & \downarrow \Phi^* \\ & & \varepsilon_{\mathbf{m}} \end{array}$$

M é um ε_m -módulo finito tal que $M = \varphi^*(\varepsilon_n).m_1 + \dots + \varphi^*(\varepsilon_n).m_k + \varphi^*(\mathfrak{M}_n)M$. Como Φ^* é sobrejetora, teremos M um ε_{m+n} -módulo finito (via Φ^*) e da outra equação, temos

$$M = \pi^*(\varepsilon_n).m_1 + \dots + \pi^*(\varepsilon_n).m_k + \pi^*(\mathfrak{M}_n)M$$

portanto M é ε_n -módulo finito (via $\Phi^* \circ \pi^*$). □

Definição 8. *Sejam $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}^2$ e*

$$F, G : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{p}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathfrak{q})$$

germes de aplicações suaves. Dizemos que F, G são isomorfas se existem difeomorfismos suaves $\phi : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{p}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathfrak{p})$, $\psi : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{q}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathfrak{q})$ tais que $F = \psi \circ G \circ \phi^{-1}$.

Para $F : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{p}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathfrak{q})$, claramente F é isomorfo a um germe da aplicação suave $F : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$. Sejam (x, y) um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^2 com origem em \mathfrak{p} e (X, Y) um sistema coordenadas em \mathbb{R}^2 com origem em \mathfrak{q} . Nessas coordenadas F é dada por

$$\begin{aligned} X &= X(x, y) \\ Y &= Y(x, y) \end{aligned} \quad .$$

Trabalharemos com essa notação.

3.0.1 Pontos Regulares

Seja $F : (\mathbb{R}^2, \mathfrak{p}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathfrak{q})$ suave. Se o posto de $dF_{\mathfrak{p}}$ vale 2, pelo Teorema da Função Inversa F é isomorfo a

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \end{aligned} \quad .$$

Dadas $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação suave e $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^2$. Dizemos que (F, \mathfrak{p}) é regular se $dF_{\mathfrak{p}}$ tem posto 2.

3.0.2 Dobras

Suponhamos que posto $(dF_{\mathfrak{p}_0}) = 1$. Pelo Teorema da Função Inversa, (F, \mathfrak{P}_0) é isomorfo a

$$\begin{aligned} X &= x && ; f(0, 0) = 0 \\ Y &= f(x, y) && ; f_y(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Daqui por diante trabalharemos supondo que F é dada pela forma acima. Seja

$$S^1(F) = \{\mathfrak{p} : \text{postod}F_{\mathfrak{p}} = 1\}.$$

$S^1(F)$ é dada por $f_y(\mathfrak{p}) = 0$

Hipótese 1. $S^1(F)$ é curva regular.

Diante da Hipótese, temos que $\text{grad}f_y(\mathbf{p}_0) \neq 0$, isto é, $f_{xy} \neq 0$ ou $f_{yy} \neq 0$. Agora, a reta tangente $T_p S^1(F)$ é definida por

$$\{(v_1, v_2) : f_{xy}(\mathbf{p})v_1 + f_{yy}(\mathbf{p})v_2 = 0\}.$$

$$\text{Ker}(dF_p) = \{(v_1, v_2) : v_1 = 0\}$$

Seja F como acima. (F, \mathbf{p}_0) é uma dobra se $\text{Ker}(dF_p)$ é diferente da reta tangente a $S^1(F)$ em \mathbf{p}_0 . De acordo com as coordenadas acima isso significa que $f_{yy}(\mathbf{p}_0) \neq 0$.

3.0.3 Cúspides

Suponha que $\mathbf{p} \in S^1(F)$ e $\text{Ker}(d_p F) = T_p S^1(F)$ isto significa $f_{yy}(0) = 0$ portanto diante da hipótese $f_{xy}(0) \neq 0$, teremos que $F|_{S^1(F)}$ tem posto zero. As equações $f_y(\mathbf{p}) = 0$ e $f_{yy}(\mathbf{p}) = 0$ representam:

$$\begin{array}{l} \text{Ker}(d_p F) = T_p S^1(F) \\ \mathbf{p} \in S^1(F) \quad \mathbf{p} \in S^{1,1}(F) \end{array}$$

Hipótese 2. $S^{1,1}(F)$ é subvariedade de \mathbb{R}^2 regular de codimensão 2, $S^{1,1}(F)$ é conjunto finito.

As funções f_{xy} e f_{yy} devem ser independentes na origem, i.e

$$\det \begin{pmatrix} f_{xy}(0) & f_{yy}(0) \\ f_{xxy}(0) & f_{yyy}(0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Definição 9. Se o germe (F, \mathbf{p}) satisfaz hipótese 2 e $\mathbf{p} \in S^1(F)$ com $\text{Ker}(d_p F) = T_p S^1(F)$ dizemos que (F, \mathbf{p}) é uma cúspide .

Teorema 4 (Whitney). *Seja (X, Y) e (x, y) sistemas de coordenadas.*

(1) *Toda dobra é isomorfa a*

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y^2 \end{cases} .$$

(2) *Toda cúspide é isomorfa a*

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -xy + y^3 \end{cases} .$$

Demonstração. (1) Seja (F, \mathfrak{p}) um germe de aplicação suave tal que $\text{Posto}(d_{\mathfrak{p}}F) = 1$, teremos que (F, \mathfrak{p}) é isomorfo a

$$\begin{aligned} X &= x & ; f(0, 0) &= 0 \\ Y &= f(x, y) & ; f_y(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

portanto $f(x, y) = xg(x, y) + y^2h(x, y)$, Se (F, \mathfrak{p}) é uma dobra, então $f_{yy}(0, 0) \neq 0$ portanto $h(0, 0) \neq 0$ logo $h \in \varepsilon_2$ é unidade, assim

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 / \langle x, f(x, y) \rangle \cdot \varepsilon_2 &= \varepsilon_2 / \langle x, xg(x, y) + y^2h(x, y) \rangle \cdot \varepsilon_2 \\ &= \varepsilon_2 / \langle x, y^2h \rangle \cdot \varepsilon_2 \\ &= \varepsilon_2 / \langle x, y^2 \rangle \end{aligned}$$

Portanto $1, y$ se projeta em um sistema de geradores do \mathbb{R} -Espaço vetorial

$$\varepsilon_2 / \langle x, f(x, y) \rangle \cdot \varepsilon_2$$

Em particular existem $\phi(x, y), \psi(x, y) \in \varepsilon_2$, tal que

$$y^2 = \phi(x, f(x, y)) \cdot 1 + 2\psi(x, f(x, y)) \cdot y$$

Vê-se que $\phi_y(0, 0) \neq 0$ e $\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x. \\ \tilde{y} &= y - \psi(x, y) \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial(x, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\psi_x(0, 0) & 1 - \psi_y(0, 0) \end{pmatrix}$$

teremos

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\psi_x(0, 0) & 1 - \psi_y(0, 0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Considere agora

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= x. \\ \tilde{Y} &= \phi(X, Y) + \psi(X, Y)^2 \end{aligned}$$

daí

$$\frac{\partial(\tilde{X}, \tilde{Y})}{\partial(X, Y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \phi_y(0, 0) \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \phi_y(0,0) \end{pmatrix} = \phi_y(0,0) \neq 0$$

temos assim mudanças de coordenadas. Portanto as coordenadas de F podem ser representadas por

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \tilde{x}. \\ \tilde{Y} &= \phi(X, Y) + \psi(X, Y)^2 \\ &= \phi(x, f(x, y)) + \psi(x, f(x, y))^2 \\ &= y^2 - 2\psi(x, f(x, y))y + \psi(x, f(x, y))^2 \\ &= [y - \psi(x, f(x, y))]^2 \\ &= \tilde{y}^2. \end{aligned}$$

o item (1) decorre de modo análogo basta fazer as mudanças de coordenadas adequadas. \square

3.1 PROVA DO TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE WHITNEY

Seja \mathcal{J}^2 o espaço dos 2-jatos de aplicações suaves de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, um jato em \mathcal{J}^2 é denotado por (A, B) tal que $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é aplicação linear e $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é aplicação quadrática.

Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação suave, para $p \in \mathbb{R}^2$ devemos ter

$$F(X) - F(p) = A(\xi) + B(\xi) + R(\xi)$$

tal que $\xi = X - p$, com A linear, B quadrática e

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \frac{R(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0$$

dessa forma $A = d_p F$, $B = \frac{1}{2} d_p^2 F$, portanto

$$j^2 F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{J}^2$$

suave, tal que $j^2 F(p) = (A, B)$ e

$$\mathcal{J}^2 = \tilde{S}^0 \cup \tilde{S}^1 \cup \tilde{S}^2$$

com

$$\tilde{S}^i = \{(A, B); \dim \text{Ker}(A) = i\}$$

Seja $\pi : \mathcal{J}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que $(A, B) \rightarrow A$ a projeção do espaço dos 2-jatos no espaço das transformações lineares $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Desta forma $\tilde{S}^i = \pi^{-1}(S^i)$ tal que $S^i = \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2); \dim \text{Ker}(A) = i\}$, como $\text{codim } S^i = i^2$, temos $\text{codim } \tilde{S}^i = i^2$

Proposição 3. *Seja $S^{1,1} \subset \tilde{S}^1$ dado por $S^1 = \{(A, B); A \in S^1, B(Ker(A) \subset Im(A))\}$, Então $S^{1,1}$ é uma subvariedade de \mathcal{J}^2 de codimensão 2.*

Demonstração. Considere inicialmente

$$A = \begin{cases} ax + by \\ a'x + b'y \end{cases}$$

e

$$B = \begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \\ \alpha' x^2 + 2\beta' xy + \gamma' y^2 \end{cases}$$

$(A, B) \in S^{1,1} \Leftrightarrow A \in S^1$, isto é, $ab' = a'b$ portanto $b' = \frac{a'}{a}b$, $B(Ker(A)) \subset Im(A)$, como $(b, -a)$ gera $Ker(A)$ temos $(a, a') \rightarrow A$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a^2 + 2\beta ab + \gamma b^2 & a \\ \alpha' a^2 + 2\beta' ab + \gamma' b^2 & a' \end{pmatrix} = 0$$

$a \neq 0$ obtemos $\gamma' = \gamma'(a, b, a', b', \alpha, \dots)$ □

Escólio 1. $S^{1,0} = \tilde{S}^1 - S^{1,1}$ é uma subvariedade de \mathcal{J}^2 de codimensão 1.

Proposição 4. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação suave e $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $Posto(d_p F) = 1$, então*

1) $j^2 F(p) \in S^{1,0} \Leftrightarrow (F, p)$ é dobra;

2) $j^2 F(p) \in S^{1,1}$ e $j^2 F(p) \pitchfork S^{1,1} \Leftrightarrow (F, p)$ é cuspide.

Demonstração. Temos (F, p) isomorfo a

$$\begin{aligned} X &= x & ; f(0, 0) &= 0 \\ Y &= f(x, y) & ; f_y(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $j^2 F(0, 0) = (A, B)$, onde

$$A = \begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ f_x(0) \cdot x + f_y(0) \cdot y \end{cases}$$

e

$$B = \begin{cases} 0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot xy + 0 \cdot y^2 \\ \frac{1}{2} f_{xx}(0) \cdot x^2 + 2 f_{xy}(0) xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0) y^2 \end{cases}$$

1) Portanto $j^2 F(p) \in S^{1,0} \Leftrightarrow (b' = \frac{a'}{a}b), f_x(0) = \frac{f_x(0)}{1} = 0, f_{yy} \neq 0$ além disso

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a^2 + 2\beta ab + \gamma b^2 & a \\ \alpha' a^2 + 2\beta' ab + \gamma' b^2 & a' \end{pmatrix} = 0$$

isto é,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_{yy}(0) & f_x(0) \end{pmatrix} \neq 0$$

2) $j^2F(p) \in S^{1,1} \iff f_y(0) = 0, f_{yy}(0) = 0$. Agora $j^2F(p) \notin S^{1,1}$ significa que f_y, f_{yy} são independentes, portanto cúspide. □

Teorema 5 (Teorema de Transversalidade para Jatos). *Sejam M e N variedades diferenciáveis com W uma subvariedade de $J^k(M, N)$. Seja $T_W = \{f \in C^\infty(M, N); d^k f \pitchfork W\}$. Então T_W é um conjunto residual de $C^\infty(M, N)$, além disso se W é compacta, então T_W é aberto.*

Prova do Teorema Principal - Whitney. Pelo teorema da transversalidade para jatos de Thom

$$\Omega = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2); j^2 f \pitchfork \tilde{S}^0, S^{1,0}, S^{1,1}, \tilde{S}^2\}$$

é residual ($\{f; \text{posto} f \geq 1\}$ é aberto e denso). Seja $F \in \Omega$ a codimensão de \tilde{S}^2 é $4 > \dim \mathbb{R}^2$, portanto $j^2 f \pitchfork \tilde{S}^2 \iff \exists p \in \mathbb{R}^2$ tal que $j^2 f(p) \in \tilde{S}^2$ isto é $\text{posto}(d_p f) \geq 1$ e $p \in \mathbb{R}^2$.

Se o $\text{posto}(d_p f) = 2$ temos (F, p) regular, (F, p) é isomorfo a

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \end{cases} \cdot$$

Supondo que o $\text{posto}(d_p F) = 1$ teremos

$$\begin{cases} \text{a) } j^2 F(p) \in S^{1,0} \\ \text{b) } j^2 F(p) \notin S^{1,0} \end{cases} \cdot$$

Ocorrendo a), pela proposição anterior (F, p) é uma dobra e consequentemente (F, p) é isomorfo a

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y^2 \end{cases} \cdot$$

Caso ocorra b), temos $j^2 F(p) \in S^{1,1}$. Como $f \in \Omega$, $j^2 f \pitchfork S^{1,1}$ portanto pela proposição anterior (F, p) é uma cúspide, decorre que (F, p) é isomorfo a

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -xy + y^3 \end{cases} \cdot$$

□

Capítulo 4

TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HAEFLIGER

Neste capítulo, provaremos o Teorema de Haefliger, que nos dá condições de verificar se uma aplicação de uma superfície compacta V em \mathbb{R}^2 , $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ dita excelente, pode ser vista como $f = \pi \circ g$ onde $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão e $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção natural.

4.0.1 Espaço Nulo

O espaço nulo $N(p)$ de f é o conjunto de todos os vetores v mapeados no 0 por $d_p f$, considere $f(x, y) = (x, xy - y^3)$ (1.2) decorre que:

$$d_p f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x - 3y^2 \end{pmatrix}$$

para $p \in C$ teremos $d_p f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ donde $N(p) = \{(0, \beta); \beta \in \mathbb{R}\}$

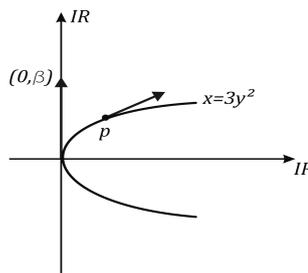


Figura 4.1: Espaço Nulo

onde $\gamma(t) = (t, 3t^2)$ é a dobra de f , para todo $\mathbf{p} \in \mathbf{C}$ teremos $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ transversal a γ' , exceto no ponto $\mathbf{p} = (0, 0)$, uma cúspide, onde temos tangência (2.0.3).

Definição 10. $\mathbf{N}_i = \text{Ker}(\text{df}(\mathbf{p}))$ é orientável se existe um campo \mathcal{V} contínuo ao longo de \mathbf{c}_i tal que:

- (1) $\mathcal{V} \neq 0$ em todo ponto de \mathbf{c}_i
- (2) $\mathcal{V} \in \text{Kerdf}|_{\mathbf{c}_i}$ em todo ponto.

4.1 TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HAEFLIGER

Teorema 6. Uma aplicação excelente f de uma superfície V compacta no plano \mathbb{R}^2 pode ser fatorada por uma imersão g em \mathbb{R}^3 se e somente se em cada componente conexa \mathbf{C}_i da dobra geral \mathbf{C} de f , tivermos o número de cúspides par e \mathbf{C}_i admitindo uma vizinhança orientável ou o número de cúspides ímpar e uma vizinhança não orientável.

Demonstrar o Teorema acima equivale a provar os dois lemas seguintes:

Lema 4. O número de cúspides em uma componente conexa \mathbf{C}_0 da dobra de f é par se uma vizinhança suficientemente pequena de \mathbf{C}_0 e o campo $\mathbf{N}_0 = \text{Ker}(\text{df}|_{\mathbf{C}_0})$ ao longo de \mathbf{C}_0 são ambos orientáveis ou ambos não orientáveis, ímpar se um é orientável e outro não.

Lema 5. Uma aplicação excelente f de V em \mathbb{R}^2 pode ser fatorada por uma imersão g em \mathbb{R}^3 se e somente se o campo \mathbf{N} do núcleo de $\text{df}|_{\mathbf{C}_0}$ é orientável.

Demonstração. (Lema 4) Seja U uma vizinhança de \mathbf{C}_0 , difeomorfa a faixa $[0, 1] \times \mathbb{R}$, tal faixa pode ser obtida pelo quociente do plano \mathbb{R}^2 pela relação de equivalência associada a ação do grupo G gerado pelas aplicações $x' = x + 1$, $y' = y$ ou $y' = -y$.

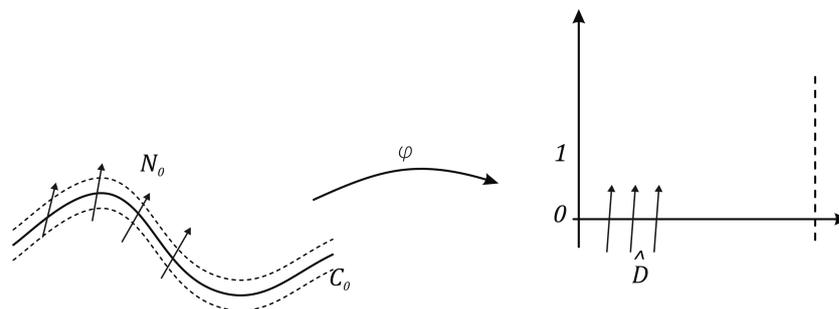


Figura 4.2: Campo transversal

A curva C_0 é difeomorfa ao segmento de reta \mathbf{d} ($\mathbf{y} = 0$), N_0 é um subespaço de dimensão 1, define um campo de direções ao longo de \mathbf{c}_0 , uma componente conexa do conjunto dos pontos singulares de f , que é uma curva suave em V . N_0 é levado via isomorfismo em um campo de direções D em \mathbb{R}^2 ao longo da reta $\mathbf{d}(\mathbf{y} = 0)$. Escolhendo uma orientação para D teremos um campo de vetores \hat{D} orientado ao longo de \mathbf{d} .

Seja $n_2(x)$ a projeção no eixo $x = 0$ dos vetores unitários que definem a direção do campo orientado \hat{D} no ponto $(x, 0)$. Nos pontos $(x, 0)$ de \mathbf{d} onde \hat{D} é tangente a \mathbf{d} teremos $n_2(x) = 0$, o qual corresponde a um ponto de cúspide em C_0 por (4.0.1).

Quando U e N_0 são ambos orientáveis teremos $n_2(1) = n_2(0)$ o campo de vetores \hat{D} pode se comportar da seguinte forma

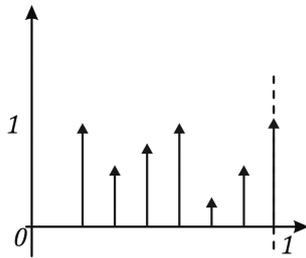


Figura 4.3: Sem Cúspides

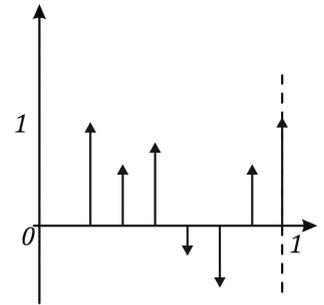


Figura 4.4: Dois pontos Cúspides

Sendo assim percebemos que o número de cúspides coincide com o número de zeros de $n_2(x)$ por (4.0.1), Portanto o número de cúspides é par se $n_2(1) = n_2(0)$ e impar quando $n_2(1) = -n_2(0)$.

□

Demonstração. (Lema 5) Suponhamos que existe $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão tal que o diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ g \downarrow & \nearrow \pi & \\ \mathbb{R}^3 & & \end{array}$$

onde π é a projeção natural do espaço \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 , $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$. Seja C a dobra geral de f e $w : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função coordenada tal que

$$\text{Ker}(dw_z) \cap \text{ker}(df_z) = \{\vec{0}\}$$

para $z \in C$.

Uma consequência imediata da afirmação acima é que w é regular nos pontos singulares de f , ou seja $\dim(\text{Im}dw_z) = 1$ para $z \in \mathbb{C}$. Se $\dim[\ker(dw_z)] = 2$ então $\dim[\text{Im}(dw_z)] = 0$ donde $\text{Ker}(dw_z) = T_zV$, como $\dim[\ker(df_z)] = 1$, teremos

$$\text{Ker}(dw_z) \cap \ker(df_z) \neq \{\vec{0}\}$$

logo devemos ter $\dim(\text{Im}dw_z) = 1$. Outro fato é que os vetores tangentes as curvas de nível de w são transversais ao $\ker(df_z)$, pois se \vec{u} é tangente a curva de nível w em $z \in \mathbb{C}$ então $\vec{u} \in \ker(dw_z)$. Para todo ponto $z \in \mathbb{C}$ o gradiente de w não é ortogonal a $\text{Ker}(df_z)$, de fato

$$\langle \nabla w, \mathbf{u} \rangle = dw(z) \cdot \mathbf{u}$$

para todo $\mathbf{u} \in T_zV$. Considere $\mathbf{u} \in \text{Ker}(df_z)$ e suponhamos que

$$\langle \nabla w, \mathbf{u} \rangle = 0$$

decorre que $\mathbf{u} \in \ker(dw_z)$ contradizendo a hipótese sobre w em que

$$\text{Ker}(dw_z) \cap \ker(df_z) = \{\vec{0}\}$$

Portanto a projeção do gradiente de w sobre o $\ker(df_z)$ define um campo de vetores não nulo, donde temos uma orientação no espaço nulo de f .

Suponhamos que o $\text{Ker}(df_z)$ é orientável, vamos usar parte da técnica da demonstração do **Lema 4**, defina $\mathbf{n}_1(x)$ como sendo a projeção dos vetores unitários que definem um campo de direções orientado \hat{D} no ponto $(x, 0)$. Como $\text{Ker}(df_z)$ é orientado, $\mathbf{n}_1(x)$ é uma função período 1. Podemos definir uma aproximação $\tilde{\mathbf{n}}(x)$ de período 1 para $\mathbf{n}_1(x)$, com um número finito de zeros no intervalo $[0, 1[$. Como o $\text{Ker}(df_z)$ é orientável $\tilde{\mathbf{n}}(x)$ tem um número par zeros neste intervalo, além disso os vetores $(\mathbf{n}_1(x), \mathbf{n}_2(x))$ e $(\tilde{\mathbf{n}}(x), \mathbf{n}_2(x))$ não são ortogonais. considere uma função $\mathbf{r}(x)$ de período 1 tal que

$$\frac{d}{dx} \mathbf{r}(x) = \mathbf{a}(x) \tilde{\mathbf{n}}(x)$$

onde $\mathbf{a}(x)$ é função diferenciável não nula.

O gradiente da aplicação $\mathbf{h}(x, \mathbf{y}) = \mathbf{a}(x) \mathbf{n}_2(x) \mathbf{y} + \mathbf{r}(x)$ não é ortogonal a $\hat{D} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ para $\mathbf{y} = 0$, façamos $\mathbf{a}(x) = 1$, decorre que

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{h} &= \left(\frac{d}{dx} \mathbf{n}_2(x) \mathbf{y} + \frac{d}{dx} \mathbf{r}(x), \mathbf{n}_2(x) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \mathbf{n}_2(x) \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{n}}(x), \mathbf{n}_2(x) \right) \end{aligned}$$

Temos assim por passagem ao quociente uma função w_0 definida na vizinhança U de \mathbf{c}_0 , cujas curvas de nível são transversais ao campo N_0 em todo ponto. Repetindo essa construção para cada componente conexa \mathbf{c}_i de \mathbb{C} e utilizando o teorema de extensão podemos

construir uma função $W : V \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide com as funções w_i na vizinhança c_i . Agora podemos construir uma aplicação $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(p) = (f_1(p), f_2(p), W(p))$ onde $p \in V$, f_1 e f_2 são funções coordenadas de f , desta forma $\pi \circ g = f$, basta mostrar que dg é injetiva.

$$dg(p) = df(p) \oplus dW(p)$$

temos dois casos para analisar

(a) $p \notin C$

(b) $p \in C$

No caso (b) g é imersão, pois $df(p)$ tem posto 2. No caso (a) $p \in C$ portanto $p \in c_i$ para algum i . Digamos que $dg(p)$ não seja injetiva em c_i , então o núcleo de $dg(p)$ não é trivial, logo existe $\xi \in \text{Ker}(dg(p))$; $\xi \neq \vec{0}$, decorre que $dg(p) \cdot \xi = \vec{0}$ acarretando que $\xi \in \text{ker}(df(p))$ e $dW(p) = \vec{0}$ conseqüentemente $\nabla W \perp \xi$ contrariando o fato que o gradiente de W não é ortogonal ao campo $N_i = \text{Ker}(df|_{c_i})$, portanto g é imersão.

□

REFERÊNCIAS

- [1] WHITNEY, H. On Singularities of Mappings of Spaces, I, Mappings of the plane into the plane, *Annals of Math*, v. 62, p. 374-410, 1955.
- [2] WHITNEY, H. Singularities of mappings of euclidean spaces. *In: SYMPOSIUM Internacional de Topologia Algebraica*. Mexico : La Universidad Nacional Autónoma de México, 1958. p. 285-301.
- [3] HAEFLIGER, A. Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, v. 10, p. 47-60, 1960.
- [4] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable mappings and their singularities*. Berlin : Springer Verlag, 1976.
- [5] LIMA, E. L. *Álgebra linear*. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária)
- [6] CALLARAM, J. *Singularities and Plane Maps*. Department of Mathematics Smith College, 1974. p. 211-240.