UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NEILHA MARCIA PINHEIRO

# RIGIDEZ DA ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Fortaleza
2013

**NEILHA MARCIA PINHEIRO**

# RIGIDEZ DA ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Programade Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Gervásio Colares.
Coordenador: Prof. Dr. Eduardo vasconcelos Oliveira Teixeira.

Fortaleza
2013

Pinheiro, N. Marcia

XXXXX Rigidez da Esfera no Espaço Euclidiano

Neilha Marcia Pinheiro. - 2013.

41 f.

Dissertação - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Geometria .

Orientação: Prof. Dr. Antônio Gervásio Colares.

1. Rigidez da Esfera. 2. Tensor de Umbilicidade. 3. Curvaturas Médias de Ordens Superiores.

CDD XXX.XX

Neilha Marcia Pinheiro

# Rigidez da esfera no espaço euclidiano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovado em: ____/____/________.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Gervásio Colares (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gregório Pacelli-Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida
Universidade Federal do Ceará (CAEN-UFC)

*Ao meu amigo José Leandro Pinheiro.*

## AGRADECIMENTO

A Deus, pois tudo o que acontece em minha vida é devido a Ele. Sempre tive dificuldades, mas graças a Deus tive força para lutar e contornar-las.

Aos meus pais, José Henrique Pinheiro e Ilânia Maria Pinheiro, as minhas irmãs Vera, Lidiane, Rafaela, Lara e a meu irmão Kayo por todo o apoio.

À minha prima, Antônia Jocivânia Pinheiro, pela confiança e pelo estímulo. Ademais, foi um exemplo de superação e força de vontade na busca de alcaçar seus objetivos.

Ao meu orientador, Antônio Gervásio Colares, por toda a paciência que teve comigo e pelo apoio que me deu ao longo dessa jornada.

Aos Professores Afonso, Alexandre, Fábio, Fernanda, Robério Rogério, Luquésio e Oton por me ajudarem em diversos momentos da minha formação.

Aos professores de graduação Fabrício, Joserlan, Denise, Jonatan, Loester e aos amigos Shirley, Kiara e Michel que deram grandes contribuições para minha formação matemática.

Aos colegas do mestrado, Anderson, Breno, José Eduardo, Roger, Gilson, Diego Eloi, Wanderley, Selene, Rui Brasileiro, João Nunes , Yure do Santos, João Victor, Nículas, Marlon, Henrique Blanco e Edso Gama e, aos colegas do doutorado, Adriano, Rondinelle, Cleiton, Rafael Diogenes, Renivaldo, Assis, Edson Sampaio, Fabiana e João Vitor pela amizade e troca de experiências. Que Deus abençoe a todos!

Aos colegas da baia Rodrigo Mattos, Itamar, Renan dos Santos, Renan Braz, João Luiz, Adenilson Arcanjo, Hudson Lima e Rafael Alves, pelos bons momentos , pelo companheirismo e pela elucidação de eventuais dúvidas.

À Andreia, Gésica, Elizeuda, Júnior, Erivan , Fernanda e Rosilda pela paciência que tiveram comigo.

À CAPES , pelo apoio financeiro e à UFC.

# RESUMO

Neste trabalho, provamos novos resutados de rigidez para hipersuperfícies quase-Einsteins no espaço euclidiano, baseado-se nos resultados pinching do autovalor. Então, nós deduzimos alguns resultados análogos para hipersuperfícies quase-umbílicas e uma nova caracterização de esferas geodésicas.



**Palavras-chave:** Rigidez da Esfera. Tensor de Umbilicidade. Curvaturas Médias de Ordens Superiores.

## ABSTRACT

In this work, we prove new rigidity results for almost-Einstein hypersurfaces of the Euclidean space, based on previous eigenvalue pinching results. Then, we deduce some comparable result for almost-umbilic hypersurfaces and new characterizations of geodesic spheres.



**Keywords:** Sphere Rigidity. Umbilicity Tensor. Higher Order Mean Curvatures.

**SUMÁRIO**

# Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

Sabemos pelo teorema de Alexandrov que hipersuperfícies mergulhadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante são esferas geodésicas. Porém, este resultado não é sempre verdade para hipersuperfícies imersas, um exemplo é o toro de Wente, o qual é um exemplo de surperfície compacta com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$, mas não é uma esfera geodésica. Para este resultado valer para hipersuperfícies imersas de curvatura média constante uma hipótese adcional é necessária. Uma condição é dada pelo teorema de Hopf [7], a qual diz que esferas imersas com curvaturas médias constantes em $\mathbb{R}^{n+1}$ são esferas geodésicas.

Neste trabalho, apresentaremos um novo teorema de rigidez para esferas, demonstrado por Julian Roth [12], onde é substituida a suposição topólogica (mergulho) pela suposição métrica (curvatura escalar). Precisamente, é fácil ver que hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$ compactas com curvatura média constante e curvatura escalar constante são esferas geodésicas. Este resultado vem do fato que hipersuperfícies de curvatura média constante e curvatura escalar constante são totalmente umbílicas. Aqui, apresentaremos um novo resultado de rigidez com uma hipótese mais fraca sobre a curvatura escalar. Mostraremos:

**Teorema 1.1 ([12], Teorema principal)**
*Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada sem bordo isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $h > 0$ $\theta \in ]0, 1[$. Então existe $\epsilon(n, h, \theta) > 0$ de modo que se:*

1. $H = h$
2. $|Scal - s| \leq \epsilon,$

*para alguma constante $s$, então $M$ é a esfera $S^n\left(\frac{1}{h}\right)$ com sua métrica padrão.*

Provaremos também um novo teorema de rigidez para hipersuperfícies quase-Einstein, deduziremos deste teorema algumas aplicações para hipersuperfícies quase-umbílicas, obteremos resultados para curvatura escalar quase constante e curvatura média quase constante, e então concluiremos o teorema principal.

Seguiremos o artigo de Julien Roth "Sphere Rigidity in the Euclidian Space"([12]).

# Capítulo 2

# PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e definições que serão necessários para o estudo que será feito nos capítulos subsequentes.

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe $C^\infty$ em $M$ e por $D(M)$ o anel das funções reais de classe $C^\infty$ definidas em $M$.

**Definição 2.1** *Uma conexão afim $\nabla$ em uma variedade diferenciável $M$ é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

*que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:*

*(i)*$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
*(ii)*$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
*(iii)*$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$
*para cada $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.*

**Definição 2.2** *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Se $X, Y$ são campos locais em $M$,*

$$\overline{B}(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

*é um campo local em $\mathbb{R}^{n+1}$ normal a $M$.*

**Definição 2.3** *Uma conexão afim $\nabla$ em uma variedade difereciável $M$ é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \; \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

.

Indicaremo por $\mathcal{X}(U)$ o conjunto dos campos de vetores de classe $C^\infty$ em $U$ aberto de $M$ e por $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em $U$ de vetores normais a $f(U) \approx U$.

**Proposição 2.4** *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $\overline{B} : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por:*

$$\overline{B}(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

**Demonstração:**

Primero provaremos que $\overline{B}$ é bilinear,isto é,

1. $\overline{B}(fX_1 + gX_2, Y_1) = f\overline{B}(X_1, Y_1) + g\overline{B}(X_2, Y_1)$
2. $\overline{B}(X_1, fY_1 + gY_2) = f\overline{B}(X_1, Y_1) + g\overline{B}(X_1, Y_2)$
3. $\overline{B}(fX_1, Y_1) = f\overline{B}(X_1, Y_1)$
4. $\overline{B}(X_1, fY_1) = f\overline{B}(X_1, Y_1)$

$f, g \in \mathcal{D}(U)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(U)$.

Prova de (1)

Observe que,

$$\overline{B}(fX_1 + gX_2, Y_1) = \overline{\nabla}_{f\overline{X_1}+g\overline{X_2}}\overline{Y_1} - \nabla_{fX_1+gX_2}Y_1.$$

Pela propriedade $(i)$ da definição de conexão afim (C.A), temos:

$$\begin{aligned}\overline{B}(fX_1 + gX_2, Y_1) &= f\overline{\nabla}_{\overline{X_1}}\overline{Y_1} + g\nabla_{\overline{X_2}}\overline{Y_1} - f\nabla_{X_1}Y_1 - g\nabla_{X_2}Y_1 \\ &= f\overline{B}(X_1, Y_1) + g\overline{B}(X_2, Y_1).\end{aligned}$$

Por um cálculo análogo, temos:

$$\overline{B}(X_1, fY_1 + gY_2) = f\overline{B}(X_1, Y_1) + g\overline{B}(X_1, Y_2).$$

Agora, provaremos (2),

$$\overline{B}(fX_1, Y_1) = \overline{\nabla}_{f\overline{X_1}}\overline{Y_1} - \nabla_{fX_1}Y_1 = f\overline{B}(X, Y)$$

Finalmente, provaremos (3). Indicando por $\overline{f}$ uma extensão de $f$ a $\overline{U}$ aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$, teremos:

$$\overline{B}(X_1, fY_1) = \overline{\nabla}_{\overline{X_1}}(\overline{fY_1}) - \nabla_{X_1}(fY_1).$$

Pela propriedade $(iii)$ da definição 1.1 temos

$$\nabla_{X_1}(fY_1) = f\nabla_{X_1}Y_1 + X_1(fY_1).$$

Daí,

$$\overline{\nabla}_{\overline{X_1}}(\overline{fY_1}) - \nabla_{X_1}(fY_1) = \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X_1}}\overline{Y_1} - f\nabla_{X_1}Y_1 + \overline{X_1}(\overline{f})\overline{Y_1} - X_1(f)Y_1.$$

Como em $M$, $f = \overline{f}$ e $\overline{X_1}$ $(\overline{f}) = X_1(f)$, concluimos que as duas últimas pacelas se anulam, donde $\overline{B}(X_1, f(Y_1)) = f\overline{B}(X_1, Y_1)$. Logo $\overline{B}$ é bilinear.

Agora, mostraremos que $\overline{B}$ é simétrica. Utilizando a simetria da conexão Riemanniana, obtemos:

$$\overline{B}(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Pela definição 3, temos

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = [\overline{X}, \overline{Y}] + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}$$

$$\nabla_X Y = [X, Y] + \nabla_Y X.$$

Logo,

$$\overline{B}(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Como em $M$, $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$, concluímos que $\overline{B}(X, Y) = \overline{B}(Y, X)$. Portanto, $\overline{B}$ é simétrica. ∎

**Definição 2.5** *Seja $S_\nu : T_pM \longrightarrow T_pM$ uma aplicação linear auto-adjunta dada por:*

$$\langle S_\nu X, Y\rangle = \langle \overline{B}(x, y), \nu\rangle.$$

**Proposição 2.6** *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\nu \in (T_pM)^\perp$. Seja $N$ uma extensão local de $\nu$ normal a $M$. Então*

$$S_\nu(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

**Demonstração:**

Seja $y \in T_\nu M$ e $X, Y$ extensões locais de $x, y$, respectivamente, e tangente a $M$. Então $\langle N, Y\rangle = 0$ em $M$, e portanto

$$X\langle Y, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle = 0.$$

Como, $\langle -(\overline{\nabla}_X Y)^T, N\rangle = 0$. Temos,

$$\langle \overline{\nabla}_X Y - (\overline{\nabla}_X Y)^T, N\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle$$

em $p \in M$ $\langle \overline{B}(x, y), \nu\rangle = -\langle \overline{\nabla}_x N(p), y\rangle$. Como $\overline{\nabla}_x N(p)$ não é necessariamente tangente tome $(\overline{\nabla}_x N(p))^T$. Logo,

$$\langle \overline{B}(x, y), \nu\rangle = -\langle (\overline{\nabla}_x N(p))^T, y\rangle$$

Portanto,

$$S_\nu(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

∎

**Definição 2.7** $\nabla^\perp$ *é chamada conexão normal da imersão,onde:*

$$\overline{\nabla}^\perp_X \nu = (\overline{\nabla}_X \nu)^N = \overline{\nabla}_X \nu - (\overline{\nabla}_X \nu)^T = \overline{\nabla}_X \nu + S_\nu(X).$$

**Definição 2.8** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em um espaço euclidiano $(n+1)$-dimensional. A segunda forma fundamental $B$ da imersão é a forma bilinear simétrica definida por:*

$$B(Y, Z) = -g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z)$$

*onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\nu$ é o campo vetorial unitário normal sobre $M$.*

Agora, mostraremos que $B(Y, Z) = -g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z)$ é bilinear e simétrica. Observe que,

$$\overline{B}(Y, Z, \nu) = \langle \overline{B}(Y, Z), \nu \rangle = B(Y, Z) = -g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z).$$

Pois pela equação da definição (2.7), temos:

$$\overline{\nabla}_Y \nu = \nabla_Y^{\perp} \nu + (\overline{\nabla}_Y \nu)^T.$$

Aplicando $-g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z)$. Temos,

$$\begin{aligned} -g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z) &= -g(\nabla_Y^{\perp} \nu, Z) - g((\overline{\nabla}_Y V)^T, Z) \\ -g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z) &= g(-(\overline{\nabla}_Y \nu)^T, Z). \end{aligned}$$

Como $S_\nu(Y) = -(\nabla_Y \nu)^T$, temos:

$$-g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z) = g(S_\nu(Y), Z) = g(\overline{B}(Y, Z), \nu) = B(Y, Z).$$

Como $\overline{B}$ é bilinear e simétrica. Daí,

$$B(Y, Z) = -g(\overline{\nabla}_Y \nu, Z)$$

é bilinear e simétrica.

A partir da definição de $B$, podemos definir a curvatura média,

$$H = \frac{1}{n} tr(B),$$

e de forma mais geral as curvaturas médias de ordem maior,

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sigma_r(k_1, ..., k_n).$$

Onde $\sigma_r$ é o r-ésimo polinómio simétrico e $k_1, ..., k_n$ são as curvaturas principais da imersão. Convencionamos ainda $H_0 = 1$. Note que $H_1 = H$ e da equação de Gauss

$$H_2 = \frac{1}{n(n+1)} Scal.$$

Para facilitar os cálculos daremos uma definição equivalente para r-ésima curvatura média.

**Definição 2.9** *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma imersão isométrica e* $k_i$ *com* $i = 1, 2, ..., n$ *as curvaturas principais em um ponto arbitrário de* $M$. *A r-ésima curvatura média* $H_r$ *de* $f$ *é definida pela identidade:*

$$P_n(t) = (1 + tk_1)...(1 + tk_n) = 1 + \binom{n}{1} H_1 t + ... + \binom{n}{n} H_n t^n. \tag{2.1}$$

*para todo* $t$ *real.*

Observe que,

$$\sigma_r = \binom{n}{r} H_r.$$

**Definição 2.10** *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície imersa, orientável. Nós denotamos por* $\Delta$ *o laplaciano da métrica induzida sobre* $M$.

**Proposição 2.11** *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *é uma imersão isométrica,* $\nu$ *é um campo normal unitário globalmente definido, então*

$$\nabla |f|^2 = 2f^\top$$

*e*

$$\Delta |f|^2 = 2n(1 + H\langle f, \nu \rangle)$$

**Demonstração:**

Seja $e_1, ..., e_n$ um referencial móvel em um aberto de $M$. Note primeiro que

$$\nabla |f|^2 = e_k \langle f, f \rangle e_k = 2\langle \overline{\nabla}_{e_k} f, f \rangle e_k = 2\langle e_k, f \rangle e_k = 2f^\top,$$

onde $f^\top = f - \langle f, \nu \rangle \nu$ é a componente tangente de $f$ sobre $M$ e $\overline{\nabla}$ é conexão riemanniana. Portanto, temos em $p$ que

$$\begin{aligned}
\Delta |f|^2 &= \langle \nabla_{e_k} (\nabla |f|^2), e_k \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_k} (\nabla |f|^2), e_k \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{e_k} (f^\top), e_k \rangle \\
&= 2\langle \overline{\nabla}_{e_k} (f - \langle f, \nu \rangle \nu), e_k \rangle \\
&= 2\langle e_k - e_k \langle f, \nu \rangle \nu - \langle f, \nu \rangle \overline{\nabla}_{e_k} \nu, e_k \rangle \\
&= 2(n + \langle f, \nu \rangle \langle -\overline{\nabla}_{e_k} \nu, e_k \rangle) \\
&= 2n(1 + H\langle f, \nu \rangle)
\end{aligned}$$

■

**Corolário 2.12** *Nas hípoteses da proposição* (2.11), *se* $M$ *é compacta então*

$$\int_M (1 + H\langle f, \nu \rangle) dv_g = 0. \tag{2.2}$$

**Demonstração:**

Integrando a última equação da proposição anterior e utilizando o Teorema da Divergência obtemos

$$\int_M (1 + H\langle f, \nu\rangle)dv_g = 0.$$

$\blacksquare$

**Definição 2.13** *Seja $t$ um número real suficientemente pequeno, a hipersuperfície paralela $f_t$ é dada por:*

$$f_t(p) = exp_{f(p)}(-t\nu(p)) = f(p) - tN(p).$$

Agora, se $e_1, ..., e_n$ são direções principais em um ponto de $M$, temos:

$$(f_t)_*(e_i) = (1 + tk_i)e_i; i = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

De (2.3), concluímos que $\nu$ é um campo normal unitário da imersão $f_t$. Seja $B_t$ a segunda forma fundamental de $f_t$ com respeito a $\nu$, $H(t)$ sua curvatura média e $dv_g$ a métrica induzida em $M$ de $f_t$. Usando (2.3), vem:

$$dv_{g_t} = (1 + tk_1)...(1 + tk_n)dv_g = P_n(t)dv_g. \tag{2.4}$$

Além disso, $B_t$ é dada por:

$$B_t((f_t)_*(v), (f_t)_*(w)) = -\langle \nu_*(v), (f_t)_*(w)\rangle$$

Com $v, w$ tangentes a $M$. Como $e_1, ..., e_n$ são direções principais de $f_t$ e suas correspondentes curvaturas principais são dadas por:

$$k_i(t) = \frac{k_i}{1 + tk_i}$$

Portanto, a curvatura média $H(t)$ da imersão $f_t$ é:

$$H(t) = \frac{1}{n}\frac{P_n'(t)}{P_n(t)} = \frac{\binom{n}{1}H_1 + 2\binom{n}{2}H_2 t + ... + n\binom{n}{n}H_n t^{n-1}}{nP_n(t)}. \tag{2.5}$$

**Definição 2.14** ($L^1 - norma$) *O funcional $\|.\| : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|f\| = \int |f|$ é chamada a norma $L^1(\mathbb{R})$ ou a $L^1 - norma$.*

**Definição 2.15** $L^p(\mathbb{R})$ *Para um real $p \geq 0$, nós denotamos por $L^p(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções $f$ de valores complexos localmente integrável tal que $|f|^p \in L^1(\mathbb{R})$, onde $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$*

**Teorema 2.16** *Seja $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p\mathbb{R}$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$. Então $fg \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$*

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

que varia diferenciavelmente com $p$. Mais precisamente, isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente $T\overline{M}$ que se projeta sobre $M$ se decompõe em um fibrado tangente $TM$ e em um fibrado normal $TM^{\perp}$. Ademais, usaremos as letras latinas $X, Y, Z$, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas $\xi, \eta, \zeta$ etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais. A componente normal de $\overline{\nabla}_X\eta$, que será chamada a conexão normal $\nabla^{\perp}$ da imersão. Verifica-se facilmente que a conexão normal $\nabla^{\perp}$ possui as propriedades usuais de uma conexão. No fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada curvatura normal $R^{\perp}$ da imersão e definida por:

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \nabla^{\perp}_y\nabla^{\perp}_X\eta - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\eta + \nabla^{\perp}_{[X,Y]\eta}.$$

Com isso, temos a seguinte preposição:

**Proposição 2.17** *Dada uma imersão isométrica* $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ *com* $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $\eta, \zeta \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$ *e* $R^{\perp}$ *o operador de curvatura normal da imersão. Então se verifica:*

**(a)** *Equação de Gauss*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.$$

**(b)** *Equação de Ricci*

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [S_\eta, S_\zeta]X,Y\rangle,$$

*onde* $[S_\eta, S_\zeta]$ *indica o operador* $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$ .

As equações da proposição anterior são conhecidas como as equações fundamentais de uma imersão isometrica.

Denotando:

$$B(X,Y,\eta) = \langle B(X,Y),\eta\rangle.$$

**Proposição 2.18** *(Equação de Codazzi). Com a notação acima,*

$$\langle \overline{R}(X,Y),Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

**Proposição 2.19 ([17], Proposição 7.4)** *Suponha* $f : M \to N$ *é uma imersão injetiva. Se* $M$ *é compacto, então* $f$ *é mergulho diferenciável.*

**Definição 2.20** *Seja* $M$ *uma hipersuperfície do* $\mathbb{R}^{n+1}$, *dizemos que* $M$ *é uma hipersuperfície umbílica se todo ponto* $p \in M$ *for um ponto umbílico.*

**Proposição 2.21** *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrca umbílica de uma variedade Riemanniana conexa $M^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, $f(M)$ é um subconjunto aberto de um hiperplano afim ou de uma esfera.*

**Demonstração:**
Escolha um ponto $x \in M$ e um campo vetorial normal unitário $\nu$ definido em alguma vizinhança $U$ de $x$. Desde que $f$ é umbílica, existe uma função $\lambda : U \to \mathbb{R}$ tal que $S_\nu = \lambda I$ em $U$, onde $I$ é o tensor identidade. em particular; $\lambda = \frac{1}{n} tr(S_\nu)$ é difereciável. Dados os campos vetoriais $X, Y \in TU$, segue das equações de Codazzi que,

$$X(\lambda)Y = Y(\lambda)X.$$

Tomando $X$ e $Y$ linearmente independentes, nós concluimos que $\lambda$ é constante sobre $U$.

Se $\lambda = 0$, a fórmula de Weingten mostra que $\overline{\nabla}_X \nu = 0$ para todo campo vetorial $X \in TM|U$. Portanto, $\nu$ é constante em $\mathbb{R}^{n+1}$. Agora, dado qualquer $\overline{x} \in U$, e qualquer curva diferenciável $\gamma : [0,1] \to U$ ligando $x$ à $\overline{x}$, nós temos:

$$\frac{d}{dt}\langle (fo\gamma)(t), \nu(\gamma(t))\rangle = \langle df\gamma'(t), \nu\rangle = 0$$

Isto mostra que $\langle (fo\gamma)(t), \nu\rangle$ é constante. Portanto, $f(U)$ está contido no hiperplano passando por $f(x)$ e normal à $\nu$.

Se $\lambda \neq 0$ em $U$, nós temos:

$$\overline{\nabla}_X (f + \lambda^{-1}\nu) = df(X) - \lambda^{-1} S_\nu(X) = X - X = 0,$$

para todo campo vetorial $X \in TU$. Então, existe um ponto $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(y) + \lambda^{-1}\nu_y = c$ para todo $y \in U$. Em outras palavras, $f(U)$ está contido na esfera com centro $c$ e raio $|\lambda|^{-1}$. ∎

No caso, da hipersuperfície ser compacta, temos que a hipersuperfície é a esfera.

# Capítulo 3

# FATOS BÁSICOS

Neste capítulo, provaremos alguns resultados que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas de rigidez do capítulo 4. Nas demonstrações dos resultados deste capítulo, nós recoreremos as definições e resultados apresentados no capítulo anterior.

**Lema 3.1 (Fórmulas de Minkowski)** *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície compacta, orientável imersa no espaço euclidiano. Então, para* $1 \leq r \leq n$,

$$\int_M (H_{r-1} - H_r\langle(f,\nu)\rangle)dv_g = 0.$$

.

**Demonstração:**

Sabemos que (2.2) é válida para qualquer hipersuperfície, então para $|t| < \epsilon$

$$\int_M (1 + H(t)\langle f_t, \nu\rangle)dv_{g_t} = 0.$$

Observe que por (2.4), temos:

$$\int_M (1+H(t)\langle f_t, \nu\rangle)dv_{g_t} = \int_M (1+H(t)\langle f_t, \nu\rangle)P_n(t)dv_g = \int_M (P_n(t)+H(t)P_n(t)\langle f_t, \nu\rangle)dv_g.$$

Agora, por (2.5), temos $H(t)P_n(t) = \frac{1}{n}P_n^{'}(t)$. Daí

$$\int_M (P_n(t) + H(t)P_n(t)\langle f_t, \nu\rangle)dv_g = \int_M (P_n(t) + \frac{1}{n}P_n^{'}(t)\langle f_t, \nu\rangle)dv_g = 0.$$

Pela definição (2.13), temos:

$$\int_M (P_n(t) + H(t)P_n(t)\langle f_t, \nu\rangle)dv_g = \int_M (nP_n(t) + P_n{}'(t)\langle f - t\nu, \nu\rangle)dv_g$$

$$= \int_M (nP_n(t) - tP_n'(t)\langle \nu, \nu\rangle + P_n'(t)\langle f, \nu\rangle)dv_g.$$

Veja que temos:

$$\int_M (nP_n(t) - tP_n'(t) + P_n'(t)\langle f, \nu\rangle)dv_g = 0. \tag{3.1}$$

Vamos provar que isto é um polinômio em $t$ cujos coeficientes são as integrais de Minkoswki, logo são nulos o que determina a demonstração.

Temos,

$$P_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r t^r$$

$$nP_n(t) = \sum_{r=0}^{n} n\binom{n}{r} H_r t^r$$

$$P_n'(t) = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} rH_r t^{r-1}$$

$$tP_n'(t) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} rH_r t^r = \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} rH_r t^r$$

$$= n\sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} H_r t^r.$$

Daí,

$$nP_n(t) - tP_n'(t) = \sum_{r=0}^{n} n\binom{n}{r} H_r t^r - \sum_{r=1}^{n} n\binom{n-1}{r-1} H_r t^r$$

$$= n + \sum_{r=1}^{n} n\left[\binom{n}{r} - \binom{n-1}{r-1}\right] H_r t^r.$$

Logo,

$$\int_M (nP_n(t) - tP_n'(t) + {P_n}'(t)\langle f, \nu\rangle)dv_g =$$

$$\int_M \left(n + \sum_{r=1}^{n} n\left[\binom{n}{r} - \binom{n-1}{r-1}\right] H_r t^r\right) dv_g + \int_M \left(\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} rH_r t^{r-1}\langle f, \nu\rangle\right) dv_g.$$

Observe que,

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}.$$

Daí,

$$= \int_M \left(\sum_{r=1}^{n} n\left[\binom{n}{r} - \binom{n-1}{r-1}\right] H_r t^r + n\right) dv_g + \int_M \left(\sum_{r=1}^{n} n\binom{n-1}{r-1} H_r t^{r-1}\right)\langle f, \nu\rangle dv_g$$

$$= n\int_M (1+H_1\langle f,\nu\rangle)dv_g + \int_M \left(\sum_{r=1}^{n} n\left[\binom{n}{r}-\binom{n-1}{r-1}\right]H_r t^r\right)dv_g +$$

$$\sum_{r=1}^{n-1}\left(\int_M n\binom{n-1}{r}H_{r+1}\langle f,\nu\rangle dv_g\right)t^r$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\left(\int_M n\left[\binom{n}{r}-\binom{n-1}{r-1}\right]H_r dv_g\right)t^r +$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\int_M n\binom{n-1}{r}H_{r+1}\langle f,\nu\rangle dv_g\right)t^r.$$

Portanto,

$$0 = \int_M (nP_n(t) - tP_n^{'}(t) + P_n^{'}(t)\langle f,\nu\rangle)dv_g$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\left(\int_M n\left[\binom{n}{r}-\binom{n-1}{r-1}\right]H_r dv_g\right)t^r +$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\int_M n\binom{n-1}{r}H_{r+1}\langle f,\nu\rangle dv_g\right)t^r.$$

O que mostra que temos um polinômio em $t$ cujos os coeficientes são nulos e dados por:

$$0 = \sum_{r=1}^{n}\left(\int_M n\left[\binom{n}{r}-\binom{n-1}{r-1}\right]H_r dv_g\right) +$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\int_M n\binom{n-1}{r}H_{r+1}\langle f,\nu\rangle dv_g\right)$$

$$= n\int_M \left(\left[\binom{n}{r}-\binom{n-1}{r-1}\right]H_r + \binom{n-1}{r}H_{r+1}\langle f,\nu\rangle\right)dv_g$$

$$= \int_M \left[\binom{n-1}{r}H_r + \binom{n-1}{r}H_{r+1}\langle f,\nu\rangle\right]dv_g$$

$$= \int_M (H_r + H_{r+1}\langle f,\nu\rangle)dv_g; r = 1,...,n-1.$$

■

Fatos importantes,

$$nH_1 + \sum_{r=2}^{n} n\binom{n-1}{r-1}H_r t^{r-1} = \sum_{r=1}^{n-1} n\binom{n-1}{r}H_{r+1} + nH_1$$

e

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

**Teorema 3.2** *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante e curvatura escalar constante. Então $M$ é uma esfera geodésica.*

**Demonstração:** Sabemos que pelo lema (3.1), para $0 \leq r \leq n$

$$\int_M (H_{r-1} - H_r\langle (f,\nu)\rangle)dv_g = 0.$$

Daí, temos:

$$\int_M (H_0 - H_1\langle (f,\nu)\rangle)dv_g = 0$$

e

$$\int_M (H_1 - H_2\langle (f,\nu)\rangle)dv_g = 0.$$

Como $H_2 = \frac{1}{n(n-1)}Scal$ e $H_1 = H$, temos que $H_1$ e $H_2$ são constantes. Assim,

$$\int_M (H_0 - H_1\langle (f,\nu)\rangle)dv_g = Vol(M) - H_1\int_M \langle (f,\nu)\rangle dv_g = H_2 - H_1H_2\int_M \langle (f,\nu)\rangle dv_g \tag{3.2}$$

e

$$\int_M (H_1 - H_2\langle (f,\nu)\rangle)dv_g = H_1Vol(M) - H_2\int_M \langle (f,\nu)\rangle dv_g = H_1H_1 - H_1H_2\int_M \langle (f,\nu)\rangle dv_g. \tag{3.3}$$

Subtraindo (1) de (2), temos;

$$H_2 - H_1^2 = 0$$
$$H_1^2 = H_2$$
$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \frac{2}{n-1}\sum_{i>j} k_ik_j.$$

Observe que,

$$\sum_{i>j}(k_i - k_j)^2 = \sum_{i>j}(k_i^2 + k_j^2 - 2k_ik_j)$$
$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} K_i^2 - 2\sum_{i>j} k_ik_j = 0.$$

Então,

$$k_i - k_j = 0 \Rightarrow k_i = k_j \forall i,j; i > j.$$

Logo, $M$ é umbílica e por hipótese temos que $M$ é compacta. Portanto, $M$ é uma esfera geodésica. ■

**Lema 3.3** *Se $r \in 1,...,n$ e $H_r$ é uma função positiva, então*

$$H_r^{\frac{1}{r}} \leq H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}} \leq ... \leq H_2^{\frac{1}{2}} \leq H.$$

**Lema 3.4** *Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão tal que $\int_M f dv_g = 0$,então:*

$$n\frac{1}{vol(M)} \geq \int_M |f|^2 dv_g. \tag{3.4}$$

**Lema 3.5** *Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $r$ é qualquer inteiro, $0 \leq r \leq n$, então:*

$$n.\frac{1}{Vol(M)}\int_M H_r^2 dv_g \geq \lambda_1(M)\left(\int_M H_{r-1} dv_g\right)^2. \tag{3.5}$$

*Nós obteremos a igualdade para algum $r$, $0 \leq r \leq n$, se $f$ imerge $M$ como uma hiperesfera em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

**Demonstração:** Denotaremos $\overline{P}$ e $-\overline{P}$ respectivamente por: $\overline{P} := \langle f, \nu\rangle$ e $H_{-1} := -\overline{P}$, onde $f$ é imersão isométrica e $\nu$ o campo unitário normal a $M$. Inicialmente observe que (3.5) não depende da escolha da origem dado que, a única expressão que se relaciona com a escolha da origem é $\int_M \overline{P} dv_g$, a qual aparece em (3.5) para $r = 0$ (recorde que $H_{-1} = -\overline{P}$). De fato, $\int_M \overline{P} dv_g$ não depende da escolha da origem, pois se transladarmos $f$ por um vetor constante C, então obteremos uma nova função:

$$\overline{P}' = \langle f + C, \nu\rangle = \langle f, \nu\rangle + \langle C, \nu\rangle = \overline{P} + \langle C, \nu\rangle.$$

Como para hipersuperfícies compactas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\int_M \nu dv_g = 0$, temos:

$$\int_M \overline{P}' = \int_M \overline{P} dv_g.$$

Pela observação feita acima, segue que $f$ independe da escolha da origem. Dai, podemos assumir sem perda de generalidade que o centro da gravidade de $f$ está localizado na origem. Com isso,$\int_M f dv_g = 0$. Assim, podemos aplicar o lema (3.4), ou seja, (3.4) ocorre para $1 \leq r \leq n$. Daí,

$$n\frac{1}{Vol(M)} \geq \lambda_1(M)\int_M |f|^2 dv_g.$$

Multiplicando cada lado de (3.4) por $(\int_M H_r^2 dv_g)$, temos:

$$n\frac{1}{Vol(M)}\int_M H_r^2 dv_g \geq \lambda_1\left(\int_M |f|^2 dv_g\right)\left(\int_M H_r^2 dv_g\right) \geq \lambda_1\left(\int_M |f||H_r||\nu| dv_g\right)^2 \geq \lambda_1\left(\int_M \langle f, \nu\rangle dv_g\right. \tag{3.6}$$

Observe que a última desigualdade em (3.6),foi obitida da inequeção de Couchy-Schwartz. Agora, pela a fórmula de Hsiung-Minkowski, temos:

$$\lambda_1(M)\left(\int_M \langle f, H_r\nu\rangle dv_g\right)^2 = \lambda_1(M)\left(\int_M H_{r-1} dv_g\right)^2.$$

Então,

$$n\frac{1}{Vol(M)}\int_M H_r^2 dv_g \geq \lambda_1(M)\left(\int_M H_{r-1}dv_g\right)^2.$$

Potanto, obtemos (3.5).

Agora, observe que para $r = 0$ tem-se

$$|f|H_0 = |f|.1 = |f|.|\nu| \leq |\langle f, \nu\rangle| = |\overline{P}|.$$

Daí,

$$n\frac{1}{Vol(M)}\int_M H_0 dv_g \leq \lambda_1\left(\int_M |f|^2 dv_g\right)\left(\int_M 1^2 dvg\right) \leq \lambda_1\left(\int_M |\overline{P}|dv_g\right)^2 = \lambda_1(M)\left(\int_1 H_{-1}dv_g\right)^2.$$

Além disso, observe que quando ocorre a igualdade em (3.5), temos:

$$n\frac{1}{Vol(M)}\int_M H_r^2 dv_g = \lambda_1(M)\left(\int_M |f|^2 dv_g\right)\left(\int_M |H_r|^2 dv_g\right)$$

$$= \lambda_1(M)\left(\int_M |f||H|_r|\nu|dv_g\right)^2 = \lambda_1(M)\left(\langle f, H_r\nu\rangle\right)^2.$$

Daí, por Couchy-Schwarz temos que $H_r = cf$, onde c é uma constante qualquer. Como, por hipótese $H_r \neq 0$, temos que $c \neq 0$. Assim, por $H_r$ está relacionado com o vetor normal, $f$ é sempre normal à $M$. Logo,

$$d|f|^2 = 2\langle f, df\rangle = 0,$$

de onde concluimos que $|f|$ é constante. Portanto $f$ aplica $M$ em uma hiperesfera de $\mathbb{R}^{n+1}$. ∎

Calcularemos a constante $k_{p,r}$ que será utilizada durante algunhas demonstrações dos teoremas de rigidez que serão apresentados no próximo capítulo. Para calcularmos $k_{p,r}$, isolamos $\lambda_1(M)$ na equação do lema (3.4), temos:

$$\lambda_1(M) \leq \frac{1}{(\int_M H_{r-1}dv_g)^2}.\frac{n}{Vol(M)}.\int_M {H_r}^2 dv_g.$$

Agora, observe que:

$$\int_M 1.{H_r}^2 dv_g \leq (\int_M (H_r^2)^p)^{1/p}(\int_M (1)^q)^{1/q} = (\int_M H_r^{2p})^{2/2p}(Vol(M))^{1/q}.$$

Mas, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Daí,

$$\int_M {H_r}^2 dv_g \leq \|H_r\|_{2p}^2.Vol(M)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Logo,

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n\|H_r\|_{2p}^2.Vol(M)^{-1/p}}{(\int_M H_{r-1}dv_g)^2} = k_{p,r}.$$

Agora, apresentaremos mais alguns resultados importantes.

**Definição 3.6** *Dizemos que $M$ é $\theta$-quasi-isométrica para $S^n\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$ se existe um difeomorfismo local $F$ de $M$ em $S^n\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$ tal que, para qualquer $x \in M$ e para qualquer vetor unitário $u \in T_xM$, nós temos:*

$$||d_xF(u)|^2 - 1| \leq \theta,$$

*onde $\theta \in ]0,1[$.*

**Teorema 3.7 ([13], Teorema 2)** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assuma que $Vol(M) = 1$ e seja $r \in \{1, ..., n\}$ tal que $H_r > 0$. Então para qualquer $p \geq 2$ e qualquer $\theta \in ]0,1[$, existe uma constante $K_\theta$ dependendo somente de $n, \|H\|_\infty, \|H_r\|_{2p}$ e $\theta$ tal que se a condição pinching,*

$$(P_{K_\theta})\ 0 \geq \lambda_1(M)\left(\int_M H_{r-1}dv_g\right)^2 - \frac{n}{Vol(M)^{1/p}}\|H_r\|_{2p}^2 > -K_\theta$$

*é satisfeita, então $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1}}\right)$.*

**Teorema 3.8 ([13], Corolário 2)** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}, n \geq 3$.Seja $\theta \in\ ]0,1[$. Se $(M^n, g)$ é quase-einstein,isto é, $\|Ric - (n-1)kg\|_\infty \leq \epsilon$ para uma constante positiva $k$, com $\epsilon$ suficientemente pequeno dependendo de $n, k, \|H\|_\infty$ e $\theta$, então $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica para $S^n\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$.*

**Teorema 3.9 ([2], Teorema 1.6)** *Para qualquer $q > \frac{n}{2}$, existe $C(q,n)$ tal que se $(M^n, g)$ é variedade completa com $\int_M (Ric - (n-1))^q < \frac{Vol(M)}{C(q,n)}$, então $M$ é compacta, tem grupo fundamental finito e satisfaz,*

$$\lambda_1(M) \geq n\left[1 - C(q,n)\left(\frac{\rho_q}{Vol(M)}\right)^{1/q}\right]$$

*onde $\rho_q = \int_M (Ric - (n-1))^q$.*

**Definição 3.10** *O tensor de umbilicidade é definido por:*

$$\tau = B - HId,$$

*Veja que $M$ é umbílica se $\tau = 0$ e se $M$ é compacta, então $M$ é esfera geodésica.*

**Teorema 3.11 ([3], Teorema 1.2)** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade Riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa por $f$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assuma que $V(M) = 1$ e seja $x_0$ o centro de massa de $M$. Então para qualquer $p \geq 2$ e para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon$ dependendo somente de $n, \epsilon > 0$ e da $L_\infty$-norma de $H$ tal que se*

$$(P_{C_\epsilon}) \qquad n\|H\|_2^2 p - C_\epsilon < \lambda_1(M),$$

*então,*

1. $f(M) \subset B\left(x_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \epsilon\right) / B\left(x_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \epsilon\right)$

2. $\forall x \in S\left(x_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right), B(x, \epsilon) \cap f(M) \neq \emptyset.$

**Lema 3.12 ([3], Lema 1.1)** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade Riemanniana $(n \geq 2)$ compacta, conexa, orientada, sem bordo isometricamente imersa por $f$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assuma que o $V(M) = 1$. Então existe constante $c_n$ e $d_n$ dependendo somente de $n$ tal que se para qualquer $p \geq 2$,se $(P_C)$ é verdade com $C < c_n$, então:*

$$\frac{n}{\lambda_1(M)} \leq d_n.$$

**Lema 3.13 ([3], Lema 4.1)** *Para $p \geq 2$ e para qualquer $\eta > 0$, existe $K_\eta(n, \|B\|_\infty)$ tal que se $(P_{k_\eta})$ é verdadeira, então $\|\psi\|_\infty \leq \eta$. Além disso, $K_\eta \to 0$ quando $\|B\|_\infty \to \infty$ ou $\eta \to 0$.*

**Teorema 3.14** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional $(n \geq 2)$ compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa por $f$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assuma que $V(M) = 1$ . Então para qualquer $p \geq 2$ , existe uma constante $C$ dependendo somente de $n$ e da $L_\infty$-norma da segunda forma fundamental $B$ tal que se*

$$(P_C) \qquad n\|H\|_2^2 p - C < \lambda_1(M),$$

*então $M$ é difeomorfa para $S^n\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$.*

**Demonstração:** Primeiro tome

$$\epsilon < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\|B\|_\infty}} \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}. \tag{3.7}$$

Com esta escolha de $\epsilon$ nós temos que se a condição pinching é verdadeira, então $|X_x|$ nunca se anula, pois se $P_{C_\epsilon}$ é válida na demonstração do teorema (3.11) que está provado na referência [3], foi provado que vale:

$$||X_x| - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}| \leq \epsilon \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \epsilon \leq |X| \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \epsilon. \tag{3.8}$$

De (3.7) temos,

$$\epsilon < \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \Rightarrow -\epsilon > -\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}.$$

Daí da equação (3.8) temos,

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} < |X_x| < 2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$$

$$0 < |X_x| < 2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}.$$

Logo, $|X_x|$ nunca se anula.
Com isso podemos considerar a aplicação diferenciável $F$ dada por:

$$F : M \to S\left(0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$$

$$x \to \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\frac{X_x}{|X_x|}.$$

A qual iremos provar que é uma quasi isometria. De fato, nós iremos mostrar que para qualquer $0 < \theta < 1$, nós podemos escolher uma constante $\epsilon(n, \|B\|_\infty, \theta)$ tal que para qualquer $x \in M$ e qualquer vetor unitário $u \in T_xM$, a condição pinching $P_{C_\epsilon(n,\|B\|_\infty,\theta)}$ implica,

$$||dF_x(u)|^2 - 1| \leq \theta$$

Primeiramente, iremos calcular $|dF_x(u)|^2$. Observe que,
$dF_x(u) = \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\nabla^0_u\left(\frac{X}{|X|}\right)_x$, onde $\nabla^0$ é conexão Riemanniana do $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim

$$dF_x(u) = \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\nabla^0_u\left(\frac{X}{|X|}\right)_x$$

$$dF_x(u) = \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\left(u\left(\frac{1}{|X|}\right)X + \frac{1}{|X|}\nabla^0_u X\right)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\left(\frac{-1}{2}\frac{u(|X|^2)}{|X|^3}X + \frac{1}{|X|}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\left(\frac{1}{|X|^3}\langle\nabla^0_u X, X\rangle X + \frac{1}{|X|}.u\right)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\frac{1}{|X|}\left(-\frac{1}{|X|^2}\langle u, X\rangle X + u\right)$$

Daí,

$$|dF_x(u)|^2 = \frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2}\left(1 - \frac{\langle u, X\rangle^2}{|X|^2}\right).$$

Com isso temos:

$$||d_x(u)|^2-1| = |\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2}\left(1-\frac{\langle u, X\rangle^2}{|X|^2}-1\right)| \leq |\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2}-1|+\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^4}\langle u, X\rangle. \tag{3.9}$$

Agora, note que

$$|\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2}-1| = \frac{1}{|X|^2}|\frac{n}{\lambda_1(M)}-|X|^2|$$

$$\frac{1}{|X|^2}|\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}-|X|\right)||\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}+|X|\right)|$$

por sabemos que,

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}-\epsilon \leq |X| \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}+\epsilon.$$

Daí,

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}- \leq \epsilon.$$

Então,

$$|\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2}-1| \leq \frac{\epsilon|\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}+|X|\right)|}{|X|^2}$$

ainda de iremos obter

$$\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}+|X|\right) \leq 2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}+\epsilon$$

e

$$\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}-\epsilon\right)^2 \leq |X|^2.$$

Logo,

$$|\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2}-1| \leq \frac{\epsilon|\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}+|X|\right)|}{|X|^2}$$

$$\leq \epsilon\frac{2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}+\epsilon}{\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}-\epsilon\right)^2}.$$

Do lema (3.12), temos $\frac{n}{d_n} \leq \lambda_1(M) \leq \|B\|_\infty^2$. Como nós assumimos $\epsilon < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\|B\|_\infty}}$, o lado direito é limitado acima pela constante dependendo somente de $n$ e de $\|B\|_\infty$. Logo, teremos:

$$|\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2} - 1| \leq \epsilon\gamma(n, \|B\|_\infty). \tag{3.10}$$

Por outro lado, desde que $C_\epsilon(n, \|B\|_\infty) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, existe $\epsilon(n, \|B\|_\infty, \eta)$ tal que $C_{\epsilon(n,\|B\|_\infty,\eta)} \leq K_{\eta(n,\|B\|_\infty)}$ (onde $K_\eta$ é a constante do lema (3.13)) e então pelo lema (3.13), $\|\psi\|_\infty^2 \leq \eta^2$. Assim, existe uma constante $\delta$ dependendo somente de $n$ e $\|B\|_\infty$ tal que,

$$\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^4}\langle u, X\rangle^2 \leq \frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^4}\|\psi_\infty^2\| \leq \eta^2\delta(n, \|B\|_\infty). \tag{3.11}$$

Então, de (3.9), (3.10) e (3.11) nós deduzimos que a condição $P_{C_\epsilon(n,\|B\|_\infty,\eta)}$ implica

$$||dF_x(u)|^2 - 1| \leq \epsilon\gamma(n, \|B\|_\infty) + \eta^2\delta(n, \|B\|_\infty).$$

Agora, nós escolhemos $\eta = \left(\frac{\theta}{2\delta}\right)^{1/2}$. Então, não podemos assumir que $\epsilon(n, \|B\|_\infty, \eta)$ é suficiente pequeno na ordem para ter $\epsilon(n, \|B\|_\infty, \eta)\gamma(n, \|B\|_\infty) \leq \frac{\theta}{2}$. Neste caso nós temos:

$$||dF_x(u)|^2 - 1| \leq \theta.$$

Agora, nós fixamos $\theta$, $0 < \theta < 1$. Segue que $F$ é um difeomorfismo local de $M$ para $S^n\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$. Desde que $S^n\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$ é simplesmente conexa para $n \geq 2$, $F$ é um difeomorfismo global. ∎

**Teorema 3.15 ([11], Teorema 2)** *Seja $M^n$ uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $H_r$ é constante para algum $r = 1, ..., n$, então $M^n$ é uma esfera.*

# Capítulo 4

# TEOREMAS DE RIGIDEZ

Neste capítulo, apresentaremos um teorema de rigidez para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ na classe das hipersuperfícies quase-Einstein que generaliza o teorema (3.8) enunciado no capítulo 3. Como aplicações destes teoremas, provaremos resultados similares para a classe das hipersuperfícies quase-umbílicas, que posibilita gerar ferramentas, como o teorema (4.5), que serão utilizadas na demonstração do teorema principal. Encceraremos este capítulo com a prova do teorema principal e um corolário.

## 4.1 Hipersuperfícies quase-Einstein

O resultado abaixo, foi enunciado no capítulo anterior, porém com a norma $\|.\|_\infty$, e provado na referência [13]. Neste trabalho, consideramos heipersuperfícies quase-Einstein de $\mathbb{R}^{n+1}$ em um sentido fraco, isto é, satifazendo a desigualdade $\|Ric-(n-1)k_{p,r}g\|_q \leq \epsilon$ para alguma constante positiva $k$ e para $\epsilon$ suficientemente pequeno. Precisamente, provamos o seguinte:

**Teorema 4.1** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$.Seja $\theta \in ]0,1[$. Se $(M^n, g)$ é quase-einstein, isto é, $\|Ric-(n-1)k_{p,r}g\|_q \leq \epsilon$ para algum $\epsilon$ suficientemente pequeno dependendo de $n, k, \|H\|_\infty$ e $\theta$, então $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica para $S^n\left(\sqrt{\frac{1}{k_{p,r}}}\right)$.*

**Demonstração:**

Sabemos que se $\|Ric-(n-1kg)\|_q \leq \lambda(n,q,k)$ para uma constante positiva, $k$ com $q > \frac{n}{2}$ e $\epsilon$ suficientemente pequeno, temos que pelo teorema (3.9) $\lambda_1(M)$ satisfaz,

$$\lambda_1(M) \geq nk(1-C_\epsilon),$$

onde $C_\epsilon$ é uma constante tal que $C_\epsilon \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

Agora, tome $k = k_{p,r}$. Nós obtemos;

$$\lambda_1(M) \geq nk_{p,r}(1-C_\epsilon),$$

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n^2\|H_r\|_{2p}^2 Vol(M)^{-1/p}}{\left(\int_M H_{r-1}dv_g\right)^2}(1-C_\epsilon)$$

$$\lambda_1(M)\left(\int_M H_{r-1}dv_g\right)^2 - \frac{n\|H_r\|_{2p}^2}{Vol(M)^{1/p}} > -\frac{n\|H_r\|_{2p}^2}{Vol(M)^{1/p}}C_\epsilon,$$

tome $K_\epsilon = \frac{n\|H_r\|_{2p}^2}{Vol(M)^{1/p}}C_\epsilon$. Daí,

$$\lambda_1(M)\left(\int_M H_{r-1}dv_g\right)^2 - \frac{n\|H_r\|_{2p}^2}{Vol(M)^{1/p}} > -K_\epsilon.$$

Logo, para $\theta \in ]0,1[$, escolhemos $\epsilon(n,q,k,\theta)$ suficientemente pequeno tal que $K_\epsilon$ é suficientemente pequeno, então do teorema (3.7) obtemos que $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica para $S^n\left(\sqrt{\frac{1}{k_{p,r}}}\right)$. ∎

Do teorema (4.1), nós deduziremos algumas aplicações para hipersuperfícies quase-umbílicas do $\mathbb{R}^{n+1}$.

## 4.2 Hipersuperfícies quase-Umbílicas

Primeiro, apresentaremos o seguinte teorema o qual é uma aplicação direta do Teorema (3.8).

**Teorema 4.2** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\theta \in ]0,1[$. Se $(M^n, g)$ é quase-umbílica, isto é, $\|B - kg\|_\infty \leq \epsilon$ para uma constante positiva $k$, com $\epsilon$ suficientemente pequeno dependendo de $n, k$ e $\theta$, então $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{k}\right)$.*

**Demonstração:**

Para mostrar que $M$ é difeomorfica e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{k}\right)$, mostraremos que $(M^n, g)$ com as hipóteses do teorema (4.2) é quase-einstein, daí pelo teorema (3.8) determina-se a demontração.

Primeiro, note que;

$$Ric(Y,Y) = nH\langle B(Y), Y\rangle - \langle B(Y), B(Y)\rangle \tag{4.1}$$

vale para uma base $\{e_i\}$ ortonormal de $T_pM$.

De fato,

Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão, então dado $p \in M$ e $\nu \in (T_pM)^\perp$, $|\nu| = 1$. Como $S_\nu : T_pM \longrightarrow T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, ..., e_n\}$ de $T_pM$ com valores próprios reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, i.e, $S_\nu(e_i) = \lambda_i e_i$; $1 \leq i \leq n$. Pela equação de Gauss, temos que:

$$\langle R(e_i, e_k)e_i, e_k\rangle = \langle B(e_k, e_k), B(e_i, e_i)\rangle - \langle B(e_i, e_k), B(e_k, e_i)\rangle.$$

Aplicando o somatório em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\sum_k \langle R(e_i,e_k)e_i,e_k\rangle = \sum_k \langle B(e_k,e_k),B(e_i,e_i)\rangle - \sum_k \langle B(e_i,e_k),B(e_k,e_i)\rangle$$

$$Ric(e_i,e_i) = \sum_k \langle B(e_k,e_k),B(e_i,e_i)\rangle - \sum_k \langle B(e_i,e_k),B(e_k,e_i)\rangle.$$

Analisaremos separadamente os dois somatórios:
**1°** $\sum_k \langle B(e_k,e_k),B(e_i,e_i)\rangle$.
Observe que $B(x,y) = \langle B(x),y\rangle \Rightarrow B(x) = \overline{\nabla}_x\nu = S_\nu(x)$. Além disso,

$$\langle B(e_k,e_k),B(e_i,e_i)\rangle = \langle S_{B(e_i,e_i)}(e_k),e_k\rangle$$

$$= \langle B(e_i,e_i,\nu\rangle\langle S_\nu(e_k),e_k\rangle.$$

Então,

$$\sum_k \langle B(e_k,e_k),B(e_i,e_i)\rangle = \langle B(e_i,e_i),\nu\rangle \sum_k \langle S_\nu(e_k),e_k\rangle$$

$$= \langle B(e_i,e_i),\nu\rangle nH = \langle S_\nu(e_i),e_i\rangle nH = \langle B(e_i),e_i\rangle nH.$$

**2°** $\sum_k \langle B(e_i,e_k),B(e_k,e_i)\rangle$.

$$\langle B(e_i,e_k),B(e_k,e_i)\rangle = \langle B(e_k,e_i),\nu\rangle\langle S\nu(e_i),e_k\rangle$$

$$= \langle S_\nu(e_k),e_i\rangle\langle S_\nu(e_i),e_k\rangle$$

$$= \langle \lambda_k e_k,e_i\rangle\langle \lambda_i e_i,e_k\rangle$$

$$= \lambda_k\lambda_i\delta_{ki}^2.$$

Logo,

$$\sum_k \langle B(e_i,e_k),B(e_k,e_i)\rangle = \lambda_i \sum_k \lambda_k\delta_{ki}^2 = \lambda_i\lambda_i$$

$$= \lambda_i\lambda_i\langle e_i,e_i\rangle = \langle \lambda_i e_i,\lambda_i e_i\rangle$$

$$= \langle S_\nu(e_i),S_\nu(e_i)\rangle = \langle B(e_i),B(e_i)\rangle.$$

Daí,

$$Ric(e_i,e_i) = nH\langle B(e_i),e_i\rangle - \langle B(e_i),B(e_i)\rangle.$$

■

Logo,

$$Ric(Y,Y) = nH\langle B(Y),Y\rangle - \langle B(Y),B(Y)\rangle.$$

para um campo vetorial tangente $Y$. Como $\|B - kg\|_\infty \leq \epsilon$, deduzimos que tomando a base diagonal $\{BE_i = \lambda_i E_i\}$ onde,

$$\|B - kg\| = \sqrt{\sum(\lambda_j - k)^2}$$

$$|\lambda_j - k| \leq \|B - kg\| \leq \epsilon; \lambda_j \in [k-\epsilon, k+\epsilon].$$

Logo,

$$k - \epsilon \leq \lambda_j \leq k + \epsilon \forall j = 1, ..., n,$$

então,

$$k - \epsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_j \leq k + \epsilon k - \epsilon \leq H \leq k + \epsilon. \tag{4.2}$$

Além disso,

$$BY = \sum_{j=1}^{n} \lambda Y_j E_j.$$

Logo,

$$(k-\epsilon)\|Y\|^2 \leq \sqrt{\sum \epsilon_j^2 Y_j^2} \leq (k+\epsilon)\|Y\|^2. \tag{4.3}$$

Agora de (4.1), (4.2) e (4.3), temos:

$$Ric(Y,Y) = nH\langle B(Y),Y\rangle - \langle B(Y),B(Y)\rangle.$$

$$\geq n(k-\epsilon)^2\|Y\|^2 - (k+\epsilon)^2\|Y\|^2$$

$$= \|Y\|^2[n(k-\epsilon)^2 - (k+\epsilon^2)]$$

$$= (n-1)(k-\epsilon)^2 - 4\epsilon k\|Y\|^2$$

$$= (n-1)k^2\|Y\|^2 - 2k\epsilon(n-1)\|Y\|^2 + \epsilon^2(n-1)\|Y\|^2 - 4\epsilon k\|Y\|^2.$$

Daí,

$$Ric(Y,Y) \geq (n-1)k^2\|Y\|^2 - \alpha_n(\epsilon)\|Y\|^2,$$

Onde $\alpha_n$ é uma função positiva tal que $\alpha_n(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Similarmente, nós obtemos:

$$Ric(Y,Y) \leq (n-1)k^2\|Y\|^2 + \alpha_n(\epsilon)\|Y\|^2.$$

Então,

$$\|Ric - (n-1)k^2\|Y\|^2\|_\infty \leq \alpha_n(\epsilon).$$

Logo, $(M^n, g)$ é quase-Einstein, daí do teorema (3.8) para $\epsilon$ suficientemente pequeno $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrico à $S^n\left(\frac{1}{k}\right)$. ■

Agora, do teorema (3.8), é possível obter, em alguns casos particulares, resultados análogos para hipersuperfícies quase-umbílicas em um sentido $L^q$. Provamos o seguinte resultado de rigidez para hipersuperfícies quase-umbílicas.

**Teorema 4.3** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $q > \frac{n}{2}$ para qualquer $\theta \in ]0,1[$ existem duas constantes $\epsilon_i(\theta, n, \|H\|_\infty), i = 1, 2$ tal que se;*

1. $\|\tau\|_{2q} \leq \epsilon_1$,
2. $\|H^2 - k_{p,r}\|_q \leq \epsilon_2$, *para $p \geq 4$ e $1 \leq r \leq n$, então $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{k_{p,r}}}\right)$.*

**Demonstração:**

Pelas contas feitas anteriormente na demonstração do teorema (4.2), vimos que a fórmula de Gauss para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ é dada por:

$$Ric = nHB - B^2.$$

Subtraindo $(n-1)H^2 g$ em cada lado da igualdade, obtemos:

$$Ric - (n-1)H^2 g = nHB - B^2 - (n-1)H^2 g$$

$$= nHB - B^2 - nH^2 g + H^2 g$$

$$= nHB - B^2 - nH^2 + H^2$$

$$= nH^2B - nH^2 - 2HB + 2H^2 - B^2 + 2HB - H^2$$

$$= nH(B-H) - 2H(B-H) - [B^2 - 2BH + H^2]$$

$$= (n-2)H(B-H) - (B-H)^2$$

$$= (n-2)H\tau - \tau^2,$$

a qual implica

$$\|Ric - (n-1)k_{p,r}g\|_q = \|Ric - (n-1)H^2 g + (n-1)H^2 g - (n-1)k_{p,r}g\|_q$$

$$\leq \|Ric - (n-1)H^2\|_q + (n-1)\sqrt{n}\|H^2 - k_{p,r}\|_q$$

$$= \|(n-2)H\tau - \tau^2\|_q + (n-1)\sqrt{n}\|H^2 - k_{p,r}\|_q$$

$$\leq (n-2)\|H^2\|_\infty \|\tau\|_{2q} + \|\tau\|_{2q}^2 + (n-1)\sqrt{n}\|H^2 - k_{p,r}\|_q.$$

Utilizando 1 e 2, temos:

$$\|Ric - (n-1)k_{p,r}g\|_q \leq (n-2)\|H^2\|_\infty \epsilon_1^2 + \epsilon^2 + (n-1)\sqrt{n}\epsilon_2.$$

Logo, tomando $\epsilon_1$ e $\epsilon_2$ suficientemente pequenos dependendo de $n, \|H\|_\infty$ e $\theta$ e aplicando o teorema (4.1), nós obtemos que $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{k_{p,r}}}\right)$. ∎

Então, deduzimos o seguinte corolário, o qual é análogo ao teorema (4.2).

**Corolário 4.4** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada sem bordo isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\theta \in ]0,1[$. Se $(M^n, g)$ é quase-umbílica,isto é,$\|B - \sqrt{k_{p,r}}g\|_{2q} \leq \epsilon$ para $q > \frac{n}{2}$, com $\epsilon$ suficientemente pequeno dependendo de $n, \|H\|_\infty$ e $\theta$, então $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{k_{p,r}}}\right)$.*

**Demonstração:**

Analisaremos dois casos:

**1° Caso:** $\|B - \sqrt{k_{p,r}}g\|_{2q} = 0$

$$\|B - \sqrt{k_{p,r}}g\|_{2q} = 0 \Rightarrow B = \sqrt{k_{p,r}}g \Rightarrow H^2 = k_{p,r} \Rightarrow \|H^2 - k_{p,r}\|_{2q} = 0.$$

Portanto, $||H^2 - k_{p,r}||_q = 0$

Além disso, se $\|B - \sqrt{k_{p,r}}g\|_{2q} = 0$, então:

$$\|B - \sqrt{k_{p,r}}g\|_{2q} = 0 \Rightarrow \|H^2 - k_{p,r}\|_{2q} = 0.$$

Daí,

$$H = \sqrt{k_{p,r}}$$

e

$$B = \sqrt{k_{p,r}g} \Rightarrow B = Hg$$

Logo,

$\tau = B - Hg = 0$ e $\|\tau\|_{2q} = 0$.

**2° Caso:** $\|B - \sqrt{k_{p,r}}g\|_{2q} > 0$

Nesta situação, então existe constantes $\alpha_1$ e $\alpha_2$ dependendo de $n$ e $\|H\|_\infty$ tais que,

$$||H^2 - k_{p,r}|| \leq \|H^2 - k_{p,r}\|_{2q} \leq \alpha_1 \|B - \sqrt{k_{p,r}} g\|_{2q}$$

e

$$\|\tau\|_{2q} \leq \alpha_2 \|B - \sqrt{k_{p,r}} g\|_{2q},$$

Como por hipótese temos $\|B - \sqrt{k_{p,r}} g\|_{2q} \leq \epsilon$, nós obtemos:

1. $\|H^2 - k_{p,r}\|_{2q} \leq \alpha_1 \epsilon$
2. $\|\tau_{2q}\| \leq \alpha_2 \epsilon$.

Para $\epsilon$ suficientemente pequeno. As hipóteses do teorema (4.3) são satisfeitas e daí concluimos que $M$ é difeomorfica e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{k_{p,r}}}\right)$. ■

Esse corolário é mais forte que o teorema (4.2), porém é válido apenas para algumas constantes $k_{p,r}$ e não para quaisquer positivas como se tinha.

## 4.3 Prova do Teorema Principal

Nesta secção, iremos provar o teorema Principal. Primeiro, usando o corolário (4.4), mostraremos que hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média e curvatura escalar quase constantes são esferas geodésicas. Precisamente, mostraremos o seguinte;

**Teorema 4.5** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $h > 0$ $\theta \in ]0,1[$. Então existe $\epsilon(n, h, \theta) > 0$ de modo que se:*

1. *$|H - h| \leq \epsilon$*
2. *$|Scal - s| \leq \epsilon$,*

*para alguma constante $s$, então $|s - n(n-1)h^2| \leq A(n,h)\epsilon$ e $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{h}\right)$.*

Para a prova deste teorema será necessário o seguinte lema;

**Lema 4.6** *As duas constantes $h$ e $s$ satisfaz,*

$$h = \frac{1}{n(n-1)} s + A\epsilon,$$

*onde $A$ é constante dependendo somente de $n$ e $h$.*

**Demonstração:**

Sabemos que a segunda fórmula de Hsiung-Minkowski é dada por:

$$\int_M (H_1 - H_2 \langle X, \nu \rangle) dv_g = 0.$$

Como, $H_1 = H$ e $H_2 = \frac{1}{n(n-1)} Scal\langle X, \nu\rangle$ e substituindo na segunda fórmula de Hisung-Minkowski, obtemos:

$$\int_M \left( H - \frac{1}{n(n-1)} Scal\langle X, \nu\rangle \right) dv_g = 0. \tag{4.4}$$

Por hipótese, nós temos $H(x) = h + f_1(x)\epsilon$ e $Scal(x) = s + f_2(x)\epsilon$, com $f_1$ e $f_2$ duas funções satisfazendo $|f_1(x) \leq 1|$ e $|f_2(x)| \leq 1$. Agora, por (4.4), nós temos:

$$0 = \int_M \left( h + \epsilon f_1(x) - \frac{1}{n(n-1)} (s + \epsilon f_2(x)) \langle X, \nu\rangle \right) dv_g$$

$$= \int_M h + \epsilon \int_M f_1(x) dv_g - \frac{1}{n(n-1)} \int_M s\langle X, \nu\rangle dv_g - \frac{\epsilon}{n(n-1)} \int_M f_2 \langle X, \nu\rangle dv_g$$

$$= hVolM + \epsilon \int_M f_1(x) dv_g - \frac{1}{n(n-1)} \int_M s\langle X, \nu\rangle dv_g - \frac{\epsilon}{n(n-1)} \int_M f_2(x) \langle X, \nu\rangle dv_g.$$

Tome $A_1 = \epsilon \int_M f_1(x) dv_g - \frac{\epsilon}{n(n-1)} \int_M f_2(x)\langle X, \nu\rangle dv_g$.

Daí, obtemos:

$$0 = A_1\epsilon + hVol(M) - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M h\langle X, \nu\rangle dv_g.$$

Sabemos, que $h = H(x) - f_1(x)\epsilon$. Logo,

$$0 = A_1\epsilon + hVol(M) - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M h\langle X, \nu\rangle dv_g$$

$$= A_1\epsilon + hVol(M) - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M (H(x) - \epsilon f_1(x)) \langle X, \nu\rangle dv_g$$

$$= A_1\epsilon + hVol(M) + \frac{\epsilon s}{n(n-1)h} \int_M f_1(x) \langle X, \nu\rangle dv_g - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M H(x) \langle X, \nu\rangle dv_g.$$

Tome $A_2 = A_1 + \frac{s}{n(n-1)h} \int_M f_1(x)\langle X, \nu\rangle dv_g$.

Portanto,

$$0 = A_2\epsilon + hVol(M) - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M H\langle X, \nu\rangle dv_g.$$

Como, $\int_M (H_0 - H\langle X, \nu\rangle) dv_g = 0$, então:

$$\int_M H\langle X, \nu\rangle dv_g = Vol(M) = 1.$$

Daí,

$$0 = A_2\epsilon + hVol(M) - \frac{s}{n(n-1)h} Vol(M)$$

$$0 = A_2\epsilon + h - \frac{s}{n(n-1)h}Vol(M).$$

Então,

$$\frac{s}{n(n-1)h} = A_2\epsilon + h \Rightarrow s = A_2(n-1)nh\epsilon + h^2n(n-1),$$

tome, $A = A_2(n-1)nh\epsilon$. Daí,
$s = A\epsilon + h^2n(n-1)$, onde $A$ é uma constante dependendo somente de $n$ e $h$. ■
**Demonstração do Teorema 3.5**
Primeiro, observe que do lema (4.6), temos:

$$s = A\epsilon + h^2n(n-1).$$

Daí,

$$|s - n(n-1)h^2 = A(n,h)\epsilon|.$$

Portanto,

$$|s - n(n-1)h^2| \leq A(n,h)\epsilon.$$

Na demonstração do teorema (4.3), vimos que:

$$Ric - (n-1)H^2g = (n-2)H\tau - \tau^2.$$

Daí,

$$\tau^2 = -Ric + (n-1)H^2g + (n-2)H\tau$$

$$\tau^2 = -Ric + (n-1)H^2g + (n-2)H(B - HId)$$

$$\tau^2 = -Ric + (n-1)H^2g - (n-2)H^2Id + (n-2)HB$$

$$tr\tau^2 = -trRic + tr(n-1)H^2g + (n-2)HnH - (n-2)H^2n$$

$$|\tau|^2 = -Scal + (n-1)H^2trg + (n-2)HnH - (n-2)H^2n$$

$$|\tau|^2 = -Scal + (n-1)H^2.$$

Logo,

$$|\tau|^2 \leq -Scal + (n-1)H^2.$$

$$\leq n(n-1)(h + \epsilon f_1(x))^2 - (s + \epsilon f_2(x))$$

$$\leq n(n-1)[h^2 + 2\epsilon h f_1(x) + \epsilon^2 f_1(x)^2] - s - \epsilon f_2(x)$$

$$\leq n(n-1)h^2 - s + \epsilon\overline{h}(x) \leq A'\epsilon.$$

Então, da definição de $k_{p,r}$ e das hipóteses do teorema, nós podemos ver que $|H^2 - k_{p,2}| < A''\epsilon$. Logo, as hipóteses do corolário (4.4) são satisfeitas. Portanto, podemos concluir que $M$ é difeomorfa e $\theta$-quasi-isométrica à $S^n\left(\frac{1}{h}\right)$ se escolhermos $\epsilon$ suficientemente pequeno dependendo somente de $n, \theta$ e $h$.

■

Agora utilizando o teorema (4.5), provaremos o teorema principal.

**Teorema 4.7 (Teorema principal)** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada, sem bordo, isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $h > 0$ $\theta \in ]0,1[$. Então existe $\epsilon(n, h, \theta) > 0$ de modo que se:*

1. $H = h$

2. $|Scal - s| \leq \epsilon$,

*para alguma constante $s$, então $M$ é a esfera $S^n\left(\frac{1}{h}\right)$ com sua métrica padrão.*

**Demonstração:**
Primeiramente, note que pelo teorema (4.5) $M$ é difeomorfa à $S^n\left(\frac{1}{h}\right)$. Então existe um difeomorfismo de $M$ em $S^n\left(\frac{1}{h}\right)$, além disso, pelo teorema (3.14) este difeomorfismo no espaço euclidiano é expresso por:

$$F(x) = \frac{1}{h}\frac{f(x)}{|f(x)|},$$

onde $f$ é a imersão de $M$ no $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como $F$ é difeomorfismo, temos que $F$ é injetiva, então $f$ é imersão injetiva definida no compacto $M$, logo pela proposição (2.18) $f$ é mergulho. Como $M$ é uma hipersuperfície mergulhada com curvatura média constante, temos pelo teorema de Alexandrov que $M$ é uma esfera geodésica.

■

**Corolário 4.8** *Seja $(M^n, g)$ uma variedade riemanniana compacta, conexa, orientada sem bordo isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $s$ uma constante positiva. Então existe $\epsilon > 0$ de modo que se:*

1. $Scal = s$

2. $|H - h| \leq \epsilon$,

*para alguma constante $h$, então $M$ é a esfera $S^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{s}}\right)$.*

**Demonstração:** Novamente, note que pelo teorema (4.5) $M$ é difeomorfa à $S^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{s}}\right)$. Então existe um difeomorfismo de $M$ em $S^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{s}}\right)$, além disso, pelo teorema (3.14) este difeomorfismo no espaço euclidiano é expresso por:

$$F(x) = \sqrt{\frac{n(n-1)}{s}}\frac{f(x)}{|f(x)|},$$

onde $f$ é a imersão de $M$ no $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como $F$ é difeomorfismo, temos que $F$ é injetiva, então $f$ é imersão injetiva definida no compacto $M$, logo pela proposição (2.18) $f$ é mergulho. Como $M$ é uma hipersuperfície mergulhada com curvatura escalar contante, temos que $H_2 = \frac{1}{n(n-1)}Scal$ é contante. Portanto, pelo teorema (3.15) temos que $M$ é a esfera $S^n\left(\sqrt{\frac{n(n-1)}{s}}\right)$. ■

# REFERÊNCIAS


[1] Alexandrov, A.D. *Uniqueness theorems for the surfaces in the large I*,Vesnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5-17.

[2] Aubry, E.Aubry, *Diameter pinching in almost positive Ricci curvature*, Comm.Math.Helv.,v.8,(2009), p.223-233.

[3] Colbois, B. and Grosjean, J.F. *A pinching theorem for the first eigenvalue of the Laplacian on hypersurfaces of the Euclidean space*, Comment. Math. Helv. **82** (2007), 175-195.

[4] Fialkow, A. *Hypersurfaces of a space of constante curvature*, Ann. of Math. **39** (1938), 762-783.

[5] Grosjean, J.F. *Eigenvalue pinching and application to the stability and the almost umbilicity of hypersurfaces*, math. DG/0709.0831.

[6] Grosjean, J.F. *Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact manifolds*, Pac. J. Math. **206** (2002), no. 1, 93-111.

[7] Hopf, H. *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, Springer-Verlag, Berlin,1983.

[8] Jleli, M. and Pacard,F.*An end-to-end construction for compact constant mean curvature surfaces*, Pac. J. Math. **221** (2005), no. 1, 81-108.

[9] Montial, S. and Ros, A. *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvature*, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. **52** (1991), 279-296, in honor of M.P. Do Carmo; edited by B.Lawson and K. Tenenblat.

[10] Reilly, R.C. *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolbs of Euclidean space*, Comment.Math. Helv. **52** (1977), 525-533.

[11] Ros, A. *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Revista Mat. Iberoamer. **3** (1987), 477-483.

[12] Roth, J. Sphere Rigidity in the Euclidian Space, ArXiv:0710.5041v1[math.DG ]26Oct 2007.

[13] Roth, J. *Pinching of the first eigenvalue of the Laplacian and almost-Einstein hypersufaces of Euclidian space*Ann. Gl. Anal. and Geom., v. 33, ( 2008 ), p.293-306.

[14] Thomas, T.Y. *On closed space of constant mean curvature*, Amer. J. Math. **58** (1936), 702-704.

[15] Wente, H.*Counterexanple to a conjecture of H. Hopf*, Pac. J. Math **121** (1986), no. 1, 193-243.

[16] Do Carmo, M. P, *Geometria Riemanniana,* 3° ed. Rio de Janeiro. IMPA, Projeto Euclides, 2005.

[17] Lee, J. M, *Introduction to Smooth Manifolds,* New York. Springer, 2003.