UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LAERTE GOMES PRADO

TEORIA DOS ESQUEMAS E A INVARIÂNCIA BIRRACIONAL DO GÊNERO GEOMÉTRICO

FORTALEZA
2013

LAERTE GOMES PRADO

TEORIA DOS ESQUEMAS E A INVARIÂNCIA BIRRACIONAL DO GÊNERO GEOMÉTRICO

Dissertacão submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentracão: Geometria Algébrica
Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia

FORTALEZA
2013

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pela dedicação que tiveram para com a educação minha e de meus irmãos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Alberto Duarte, pela orientação, paciência e esclarecimentos durante esse período de aprendizado e aos professores do departamento de matemática pelo conhecimento transmitido.

Aos colegas que acompanharam durante a gradução e pós-graduação, Anderson, Yuri, Ivan, Olavo, Wallyson, José Édson, Ederson, Emanuel, Eurípedes e a todos os demais pela troca de idéias e enriquecimento do aprendizado.

A Daniele pelo apoio durante a etapa final deste trabalho.

Aos funcionários da biblioteca pelos serviços prestados durante esse tempo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A Comathematician is a comachine to turn ffee into cotheorems.

Autor Desconhecido

RESUMO

O objetivo deste trabalho é desenvolver a teoria básica de esquemas e mostrar que duas variedades projetivas birracionalmente equivalentes e não-singulares sobre um corpo algebricamente fechado possuem o mesmo gênero geométrico. Um resultado relacionado permite determinar se uma hipersuperfície não-singular de grau d em um espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ é uma variedade não-racional.

Palavras-Chaves: Teoria dos Esquemas, Gênero Geométrico, Variedades Projetivas

ABSTRACT

This work aims to develop basic scheme theory and show that two projective, non-singular and birationally equivalent varieties over an algebraically closed field have same geometric genus. A related result allows to check whether a non-singular hipersurface of degree d in a projective space $\mathbb{P}^n$ is a non-rational variety.

Keywords: Scheme Theory, Geometric Genus, Projective Variety

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que duas variedades projetivas não-singulares birracionalmente equivalentes sobre um corpo algebricamente fechado k possuem o mesmo gênero geométrico. Para chegar a esse resultado desenvolvemos a teoria básica de esquemas, com um pouco mais de detalhes do que se costuma encontrar nos livros textos. A principal referência utilizada foi o livro do Hartshorne [1].

O presente trabalho encontra-se dividido da seguinte maneira: no primeiro capítulo é feita uma exposição sobre conceitos introdutórios da teoria de feixes como estrutura preliminar para a apresentação da noção de esquema. No segundo capítulo, vemos os critérios de valoração que serão essenciais para a demonstração do resultado principal. O terceiro capítulo trata dos divisores de Weil e de Cartier de um esquema. Sob condições específicas, tais divisores em um esquema coincidem e são chamados simplesmente de divisores. Em seguida, ver-se-á a construção de um feixe associado a um divisor. O quarto capítulo dedica-se ao estudo das diferenciais, donde advém a construção do feixe de diferenciais. No capítulo quinto introduzimos o conceito de variedade não-singular e demonstramos o teorema principal. Vemos em seguida outros resultados relacionados, dentre os quais, apresentaremos um critério que permite dizer se uma hipersuperfície não-singular de grau d em $\mathbb{P}^n$ é uma variedade não-racional.

Capítulo 1

FEIXES E ESQUEMAS

Neste capítulo, apresentaremos a noção de esquema, algumas de suas propriedades e exemplos. Seu conceito tem importância fundamental na geometria algébrica, e sua principal particularidade é permitir um controle e entendimento do ponto de vista local. De maneira similar à construção de uma variedade, um esquema é construído de maneira que localmente possa ser visto como um objeto peculiar, um esquema afim. Iniciaremos este capítulo apresentando a noção de feixes.

1.1 Feixes

Definição 1.1.1 Seja X um espaço topológico. Um pré-feixe $\mathscr{F}$ de grupos abelianos em X consiste dos seguintes dados:

1. Para cada aberto $U \subset X$, associamos um grupo abeliano $\mathscr{F}(U)$.
2. Para cada inclusão $V \subset U$ de abertos em X, associamos um homomorfismo de grupos abelianos $\rho_{VU} \colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$,

satisfazendo as condições:

1. $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$
2. $\rho_{UU} \colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ é a aplicação identidade
3. Se $W \subset V \subset U$ são abertos de X , então $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$

Observação 1.1 *:*

1. Para um dado aberto $U \subset X$, dizemos que os elementos de $\mathscr{F}(U)$ são as seções do

pré-feixe $\mathscr{F}$ sobre U.

2. Dados $V \subset U$ abertos de X, o homomorfismo ρ_{VU} é chamado morfismo de restrição.

3. Para simplificar a notação, a imagem de uma seção $s \in \mathscr{F}(U)$ por meio de ρ_{VU} será denotada por $s_{|_V}$, isto é $s_{|_V} := \rho_{VU}(s)$.

4. De maneira similar podemos definir um pré-feixe de anéis, conjuntos ou objetos em uma determinada categoria $\mathscr{A}$. Em cada caso, os morfismos de restrição $\rho_{VU} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ devem ser transformações naturais entre os objetos da categoria, tais como, homomorfismos de anéis com unidade se a categoria $\mathscr{A}$ for a categoria dos anéis comutativos com unidade , etc.

5. Para fixar idéias, quando falarmos em pré-feixes estaremos nos referindo a pré-feixes de grupos abelianos, a menos que seja especificada uma outra categoria $\mathscr{C}$ e nesse caso diremos que são pré-feixes de objetos de $\mathscr{C}$.

Definição 1.1.2 Seja $\mathscr{F}$ um pré-feixe num espaço topológico X. Diremos que $\mathscr{F}$ é um feixe em X se satisfaz as seguintes condições:

1. Para todo aberto $U \subset X$ e para toda cobertura aberta $\{V_i\}_{i\in I}$ de U, se $s \in \mathscr{F}(U)$ é tal que $s_{|_{V_i}} = 0$ para todo i, então $s = 0$.

2. Se para um aberto U munido de uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i\in I}$ existirem seções $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$ tais que para quaisquer $i, j \in I$ tenhamos $s_{i_{|_{V_i\cap V_j}}} = s_{j_{|_{V_i\cap V_j}}}$, então existe uma seção $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada $i \in I$.

Exemplo 1.1 *Seja U um aberto num espaço topológico X, e $C_X(U)$ o conjunto das funções contínuas definidas em U tomando valores em um corpo k. Definindo para cada $x \in U$ e $f, g \in C_X(U)$, a soma e o produto como*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x)$$

tornamos $C_X(U)$ um anel comutativo cuja unidade é a função constante igual a 1. As funções de restrição $\rho_{V,U}$ serão as aplicações $f \mapsto f|_V$ que restringem o domínio original da função. C_X dessa forma é um feixe de anéis comutativos em X.

Exemplo 1.2 *Se $\mathscr{F}$ é um pré-feixe em um espaço topológico X e $U \subset X$ é um aberto, então $\mathscr{F}$ induz um pré-feixe $\mathscr{F}_{|_U}$ em U (com a topologia induzida). Dado um aberto $V \subset U$, tem-se que V é aberto de X, então definimos $\mathscr{F}_{|_U}(V) := \mathscr{F}(V)$. Os morfismos de restrição de $\mathscr{F}_{|_U}$ são os mesmos de $\mathscr{F}$. Com isso, é fácil ver que se $\mathscr{F}$ for feixe em X então $\mathscr{F}_{|_U}$ é feixe em U.*

Definição 1.1.3 Seja $\mathscr{F}$ um pré-feixe em X, e p um ponto de X. Definimos o talo $\mathscr{F}_p$ de $\mathscr{F}$ em p como sendo $\varinjlim_{U \ni p} \mathscr{F}(U)$. [Veja Apêndice A.1]

Os elementos do talo $\mathscr{F}_p$ podem ser vistos como germes de seções de $\mathscr{F}$ no ponto p. De fato, um elemento de $\varinjlim_{U \ni P} \mathscr{F}(U)$ é uma classe $\overline{(U,s)}$, com $s \in \mathscr{F}(U)$ e $p \in U$, com respeito à relação: $(U,s) \sim (V,t)$ se existir $W \subset V \cap U$ tal que $p \in W$ e $\rho_{WU}(s) = \rho_{WV}(t)$, ou seja, $s|_W = t|_W$.

Note que dois "germes" $\overline{(U,s)}$ e $\overline{(U',s')}$ em $\mathscr{F}_p$ sempre possuem representantes definidos sobre um mesmo aberto contendo p. De fato, tomando $V = U \cap U'$, $t = s|_U$ e $t' = s'|_{U'}$, segue que $\overline{(U,s)} = \overline{(V,t)}$ e $\overline{(U',s')} = \overline{(V,t')}$. Essa observação nos diz que se $\mathscr{F}$ é um pré-feixe de objetos de uma categoria $\mathscr{A}$, então $\mathscr{F}_p$ pode ser considerado como um objeto de $\mathscr{A}$, ou seja, podemos definir em $\mathscr{F}_p$ as mesmas estruturas algébricas que temos em $\mathscr{F}(U)$.

Exemplo 1.3 : O feixe das seções descontínuas de um pré-feixe.

Seja $\mathscr{F}$ um pré-feixe sobre um espaço topológico X. Para cada aberto $U \subset X$ definimos:

$$\mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x.$$

Pela definição de produto cartesiano, para cada $x \in U$ temos uma projeção $p_x^U : \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U) \to \mathscr{F}_x$. Além disso, observamos que dadas $s, t \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$, temos $s = t \Leftrightarrow p_x^U(s) = p_x^U(t), \forall x \in U$. Em outras palavras, um elemento $s \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$ fica totalmente determinado se conhecermos $p_x^U(s)$ para todo $x \in U$. Observamos ainda, que essas projeções são homomorfismos, pois a estrutura em $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$ é definida "coordenada-a-coordenada". Em particular, dado um aberto $V \subset U$ podemos considerar a projeção $p_x^V : \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V) \to \mathscr{F}_x$ para cada $x \in V$. Daí, pela propriedade universal do produto cartesiano que define $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V)$, segue que existe uma única função $\rho_{VU} : \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U) \to \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V)$, tal que $p_x^U = p_x^V \circ \rho_{VU}$, com $x \in V$. Essa última condição garante que ρ_{VU} é um homomorfismo. Além disso, a referida unicidade nos diz que dados abertos $W \subset V \subset U$ vale que $\rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$. De fato, para todo $x \in W$ temos

$$p_x^W \circ (\rho_{WV} \circ \rho_{VU}) = (p_x^W \circ \rho_{WV}) \circ \rho_{VU} = p_x^V \circ \rho_{VU} = p_x^U.$$

Mas, por definição ρ_{WU} é a única função tal que $p_x^W \circ \rho_{WU} = p_x^U$. Com isso vemos que $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}$ é um pré-feixe.

Agora, sejam $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma cobertura aberta de U e $s_\alpha \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V_\alpha)$ uma família de seções, *tais que* $\rho_{V_{\alpha\beta}V_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{V_{\alpha\beta}V_\beta}(s_\beta), \forall\alpha, \beta \in \Gamma$, *onde* $V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta$. *Assim, para todo* $x \in V_{\alpha\beta}$ *temos:*

$$p_x^{V_{\alpha\beta}} \circ \rho_{V_{\alpha\beta}V_\alpha}(s_\alpha) = p_x^{V_{\alpha\beta}} \circ \rho_{V_{\alpha\beta}V_\beta}(s_\beta) \Rightarrow p_x^{V_\alpha}(s_\alpha) = p_x^{V_\beta}(s_\beta).$$

Então definimos $s \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$ *como sendo o único elemento que satisfaz a condição* $p_x^U(s) = p_x^{V_\alpha}(s_\alpha)$, *para* $x \in V_\alpha$. *A condição* $p_x^{V_\alpha}(s_\alpha) = p_x^{V_\beta}(s_\beta), \forall x \in V_{\alpha\beta}$, *garante que não há inconsistência nessa definição e que* s *está bem definida. Por fim,* $p_x^{V_\alpha}(s_\alpha) = p_x^U(s) = p_x^{V_\alpha} \circ \rho_{V_\alpha U}(s), \forall x \in V_\alpha$. *Logo,* $\rho_{V_\alpha U}(s) = s_\alpha$. *Para verificar a outra condição na definição de feixe, temos que se* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *for uma cobertura aberta de* U *em que* $\rho_{V_\alpha U}(s) = 0$ *para* $s \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$, *então para* $x \in U$, x *pertence a um certo* V_α *e daí,*

$$p_x^U(s) = p_x^{V_\alpha} \circ \rho_{V_\alpha U}(s) = 0.$$

Portanto, $s = 0$, *e isso conclui a verificação de que* $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}$ *é de fato um feixe.*

Observação 1.2 *O exemplo acima pode ser reescrito usando diretamente o fato que* $\prod_{x\in U} \mathscr{F}_x = \{s : U \to \bigcup_{x\in U} \mathscr{F}_x;\ s(x) \in \mathscr{F}_x, \forall x \in U\}$. *Nesse sentido, o morfismo de restrição* $\rho_{VU} : \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U) \to \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V)$ *nada mais é do que a restrição usual, isto é,* $\rho_{VU}(s) = s_{|V}$, *onde* $V \subset U$ *e* $s \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$. *Ademais, a projeção* $p_x^U : \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U) \to \mathscr{F}_x$ *é dada por* $p_x^U(s) = s(x)$.

Definição 1.1.4 (Morfismo de pré-feixes) Sejam $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ pré-feixes em X. Um morfismo $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ consiste em se ter para cada aberto $U \subset X$, um homomorfismo de grupos abelianos(ou uma transformação natural entre objetos da categoria em questão) $\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$, tais que para os abertos $V \subset U$, φ_U e φ_V são compatíveis por meio de restrição, ou seja, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{V,U}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\overline{\rho}_{V,U}"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathscr{G}(V)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, onde ρ e $\overline{\rho}$ são os morfismos de restrição associados, respectivamente, aos pré-feixes $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$.

Um morfismo $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é um isomorfismo se existe um outro morfismo $\psi\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$, tal que para cada aberto $U \subset X$ tenhamos $\psi_U \circ \varphi_U = id_{\mathscr{F}(U)}$ e também $\varphi_U \circ \psi_U = id_{\mathscr{G}(U)}$.

Um morfismo de feixes (ou abreviadamente, um morfismo) entre dois feixes $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ é simplesmente um morfismo de pré-feixes entre $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$.

Notação 1 O conjunto dos morfismo de $\mathscr{F}$ em $\mathscr{G}$ será denotado por $\mathcal{M}or_X(\mathscr{F},\mathscr{G})$.

Observação 1.3 Se $\varphi : \mathscr{F} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de pré-feixes em um espaço topológico X, então para cada $x \in X$ temos um homomorfismo induzido $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathcal{G}_x$. A existência desse mapa pode ser garantida pela propriedade universal do limite direto. De outra forma, dado um germe de seção $s_x \in \mathscr{F}_x$, com $s \in \mathscr{F}(U)$ e $x \in U$, definimos $\varphi_x(s_x) := (\varphi_U(s))_x$. A boa definição é consequência do fato de φ ser morfismo de pré-feixes. Com efeito, se $V \subset X$ é um aberto com $x \in V$ e $t \in \mathscr{F}(V)$ é tal que $t_x = s_x$, então existe $W \subset U \cap V$, com $x \in W$, tal que $t_{|W} = s_{|W}$. Portanto,

$$\varphi_V(t)_{|W} = \varphi_W(t_{|W}) = \varphi_W(s_{|W}) = \varphi_U(s)_{|W}.$$

Logo, $(\varphi_V(t))_x = (\varphi_U(s))_x$.

Definição 1.1.5 Um pré-feixe $\mathcal{G}$ será dito um subpré-feixe de um pré-feixe $\mathscr{F}$ se para cada aberto $U \subset X$ tivermos $\mathcal{G}(U) \subset \mathscr{F}(U)$ e além disso, os morfismos de restrição referentes ao pré-feixe $\mathcal{G}$ forem obtidos como restrição dos morfimos de restrição de $\mathscr{F}$. Em outras palavras, exigimos que o seguinte diagrama comute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(U) \arrow[r, "\text{inclusão}"] \arrow[d, "\rho_{V,U}"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\overline{\rho}_{V,U}"] \\
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "\text{inclusão}"'] & \mathscr{F}(V)
\end{tikzcd}$$

Assim, o mapa $\mathcal{I} : \mathcal{G} \to \mathscr{F}$ o qual para cada aberto $U \subset X$, faz corresponder $\mathcal{I}(U) : \mathcal{G}(U) \to \mathscr{F}(U)$, que é a inclusão de $\mathcal{G}(U)$ em $\mathscr{F}(U)$, é de fato um morfismo de pré-feixes. De forma análoga definimos a noção de subfeixe de um feixe.

Exemplo 1.4 : Os pré-feixes núcleo, imagem e co-núcleo

Sejam $\mathscr{F}$ e $\mathcal{G}$ dois pré-feixes sobre um espaço topológico X e seja $\varphi : \mathscr{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes. Para cada aberto $U \subset X$ definimos $\mathcal{K}er_\varphi(U)$, $\mathcal{I}m_\varphi(U)$ e $\mathcal{C}oker_\varphi(U)$ como sendo o núcleo, a imagem e o co-núcleo do homomorfismo $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, respectivamente. Verifica-se facilmente que $\mathcal{K}er_\varphi$ é um subpré-feixe de $\mathscr{F}$ e que $\mathcal{I}m_\varphi$ é um subpré-feixe de $\mathcal{G}$. Além disso, se $\mathscr{F}$ for feixe segue que $\mathcal{K}er_\varphi$ também será. Porém, mesmo que $\mathcal{G}$ seja feixe o mesmo pode não ocorrer com os pré-feixes imagem e co-núcleo. Diremos que um morfismo de pré-feixes $\varphi : \mathscr{F} \to \mathcal{G}$ é injetivo quando $\mathcal{K}er_\varphi$ coincidir com o pré-feixe nulo, isto é, para todo aberto $U \subset X$ temos que φ_U é um homomorfismo injetivo. Diremos que φ é sobrejetivo se o pré-feixe imagem $\mathcal{I}m_\varphi$ coincidir com $\mathcal{G}$. Equivalentemente, o pré-feixe $\mathcal{C}oker_\varphi$ deve coincidir com o pré-feixe nulo.

Exemplo 1.5 : *Seja* $\mathscr{F}$ *um pré-feixe em um espaço topológico* X *e seja* $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}$ *o feixe das seções descontínuas de* $\mathscr{F}$*. Vamos mostrar que existe um morfismo de pré-feixes* $\varphi_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathcal{D}_{\mathscr{F}}$*. Para cada* $U \subset X$ *aberto, considere o homomorfismo* $(\varphi_{\mathscr{F}})_U : \mathscr{F}(U) \to \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$ *que associa a cada seção* $s \in \mathscr{F}(U)$ *sua família de germes* $(s_x)_{x\in U}$*. Também podemos pensar em* $(\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)$ *como uma função em* U*, definida por (veja a* **observação 1.2***)*

$$(\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)(x) = s_x, \forall x \in U.$$

Dado um outro aberto $V \subset U$*, denotemos por* ρ_{VU} *e* $\overline{\rho}_{VU}$ *os morfismos de restrição de* $\mathscr{F}$ *e* $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}$*, respectivamente. Assim, para mostrarmos que* $\varphi_{\mathscr{F}}$ *é de fato um morfismo, precisamos verificar a compatibilidade entre tais morfismos de restrição, ou seja, que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "(\varphi_{\mathscr{F}})_U"] \arrow[d, "\rho_{VU}"'] & \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U) \arrow[d, "\overline{\rho}_{VU}"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "(\varphi_{\mathscr{F}})_V"'] & \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Para cada $x \in V$ *e cada* $s \in \mathscr{F}(U)$*, fazendo* $t = \rho_{VU}(s)$ *e* $r = \overline{\rho}_{VU} \circ (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)$*, temos*

$$p_x^V((\varphi_{\mathscr{F}})_V(t)) = (\varphi_{\mathscr{F}})_V(t)(x) = t_x = s_x = (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)(x) = p_x^U((\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)) =$$

$$(p_x^V \circ \overline{\rho}_{VU}) \circ (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s) = p_x^V(\overline{\rho}_{VU} \circ (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)) = p_x^V(r).$$

Portanto, $r = (\varphi_{\mathscr{F}})_V(t)$ *e consequentemente,* $(\varphi_{\mathscr{F}})_V \circ \rho_{VU} = \overline{\rho}_{VU} \circ (\varphi_{\mathscr{F}})_U$*, confirmando que* $(\varphi_{\mathscr{F}}) : \mathscr{F} \to \mathcal{D}_{\mathscr{F}}$ *é um morfismo de pré-feixes.*

Note que pela **observação 1.3***, temos que para cada* $x \in X$ *o morfismo* $(\varphi_{\mathscr{F}})$ *induz um homomorfismo* $(\varphi_{\mathscr{F}})_x : \mathscr{F}_x \to (\mathcal{D}_{\mathscr{F}})_x$*. Um germe* $t_x \in (\mathcal{D}_{\mathscr{F}})_x$*, de uma seção* $t \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V)$*, com* $x \in V$*, vai pertencer a imagem de* $(\varphi_{\mathscr{F}})_x$ *se e somente se existir um aberto* $U \subset V$*, com* $x \in U$*, e existir* $s \in \mathscr{F}(U)$ *tal que* $t|_U = (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)$*. De fato,* $t_x \in Im((\varphi_{\mathscr{F}})_x)$ *se e só se* $t_x = (\varphi_{\mathscr{F}})_x(s'_x)$ *para algum* $s'_x \in \mathscr{F}_x$*. Equivalentemente, deve-se ter* $t_x = ((\varphi_{\mathscr{F}})_W(s'))_x$*, com* $x \in W$ *e* $s' \in \mathscr{F}(W)$*. Portanto, existe um aberto* $x \in U \subset V \cap W$ *e tal que* $t|_U = (\varphi_{\mathscr{F}})_W(s')|_U = (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s'|_U) = (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)$*, com* $s = s'|_U \in \mathscr{F}(U)$*. Como consequência, para cada* $x \in U$ *temos que* $t(x) = (\varphi_{\mathscr{F}})_U(s)(x) = s_x$*.*

Observação 1.4 Segue das considerações acima que se $\mathscr{F}$ é feixe, então $(\varphi_{\mathscr{F}})$ é um morfismo injetivo. Se além disso, uma seção $t \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(V)$ for tal que para cada $x \in V$ temos que $t_x \in Im((\varphi_{\mathscr{F}})_x)$, então $t \in Im((\varphi_{\mathscr{F}})_V)$. Com efeito, vimos que para cada

$x \in V$ com $t_x \in Im((\varphi_{\mathscr{F}})_x)$, existe um aberto $U_x \subset V$ e existe $s \in \mathscr{F}(U_x)$ tal que $t|_{U_x} = (\varphi_{\mathscr{F}})_{U_x}(s)$, donde $t(y) = s_y, \forall y \in U_x$. Com isso, temos uma cobertura aberta para $V = \bigcup_{x \in V} U_x$ e em cada aberto dessa cobertura existe uma seção $s \in \mathscr{F}(U_x)$, de modo que para $x, x' \in V$ as seções correspondentes $s \in \mathscr{F}(U_x)$ e $s' \in \mathscr{F}(U_{x'})$ são tais que para $y \in U_x \cap U_{x'}$ temos $s_y = t(y) = s'_y$. Isso nos permite concluir que $s|_{U_x \cap U_{x'}} = s'|_{U_x \cap U_{x'}}$. Portanto, existe uma seção $\overline{s} \in \mathscr{F}(V)$ tal que $\overline{s}|_{U_x} = s$. Assim,

$$(\varphi_{\mathscr{F}})_V(\overline{s})(x) = \overline{s}_x = s_x = t(x), \forall x \in V.$$

1.1.1 *O feixe associado a um pré-feixe*

Dado um pré-feixe $\mathscr{F}$ em um espaço topológico X podemos associar a $\mathscr{F}$ um feixe, que tradicionalmente é denotado por $\mathscr{F}^+$. Motivados pelo que foi discutido na observação 1.4, para cada aberto $U \subset X$ definimos

$$\mathscr{F}^+(U) := \{t \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U); t_x \in Im((\varphi_{\mathscr{F}})_x), \forall x \in U\}.$$

Pelo que vimos acima, se $\mathscr{F}$ já for um feixe, então $\mathscr{F}^+(U) = Im((\varphi_{\mathscr{F}})_U)$ e $\mathscr{F}(U) \simeq \mathscr{F}^+(U)$, de onde segue que $\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}^+$. Para o caso geral, vamos mostrar que $\mathscr{F}^+$ é de fato um feixe. Claramente $\mathscr{F}^+$ é um subpré-feixe de $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}$. Portanto, basta verificarmos os axiomas de feixe. Para esse fim, seja $U \subset X$ um aberto e seja $U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$ uma cobertura aberta, tal que temos seções $s_\alpha \in \mathscr{F}^+(U_\alpha)$ satisfazendo a condição $(s_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = (s_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta}, \forall \alpha, \beta \in \Gamma$. Ora, como $\mathcal{D}_{\mathscr{F}}$ é feixe, as informações apresentadas nos permitem concluir que existe uma única seção $s \in \mathcal{D}_{\mathscr{F}}(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma$. Só falta mostrar que $s \in \mathscr{F}^+(U)$. Bem, dado $x \in U$, temos que $x \in U_\alpha$, para algum α. Daí,

$$s_x = (s|_{U_\alpha})_x = (s_\alpha)_x \in Im((\varphi_{\mathscr{F}})_x).$$

Portanto, $s \in \mathscr{F}^+(U)$ e isso conclui a verificação de que $\mathscr{F}^+$ é feixe.

Observação 1.5 Como já observamos, $Im(\varphi_{\mathscr{F}})(U) \subset \mathscr{F}^+(U)$ para todo aberto $U \subset X$. Assim, podemos considerar o morfismo $\varphi^+_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, definido em cada aberto U por $(\varphi^+_{\mathscr{F}})_U = (\varphi_{\mathscr{F}})_U$. Destacamos que o par $(\varphi^+_{\mathscr{F}}, \mathscr{F}^+)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Dado qualquer feixe $\mathcal{G}$ e qualquer morfismo de pré-feixes $\phi : \mathscr{F} \to \mathcal{G}$, existe um único morfismo de feixes $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\psi \circ \varphi^+_{\mathscr{F}} = \phi$. Com efeito, dado um aberto $U \subset X$ e dada uma seção $t \in \mathscr{F}^+(U)$, tomamos uma cobertura aberta $U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$ para a qual temos seções $s_\alpha \in \mathscr{F}(U_\alpha)$ tais que $t|_{U_\alpha} = (\varphi_{\mathscr{F}})_{U_\alpha}(s_\alpha)$. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então para todo $y \in U_\alpha \cap U_\beta$ temos $(s_\alpha)_y = t(y) = (s_\beta)_y$. Daí, a definição de germe nos fornece uma cobertura aberta para $U_\alpha \cap U_\beta = \bigcup_\lambda V_\lambda$ tal que $(s_\alpha)|_{V_\lambda} = (s_\beta)|_{V_\lambda}$. Para concluir, observamos que $\phi_{U_\alpha}(s_\alpha) \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ é uma família de seções sobre os abertos de uma cobertura para U, satisfazendo:

$$\phi_{U_\alpha}(s_\alpha)|_{V_\lambda} = \phi_{V_\lambda}((s_\alpha)|_{V_\lambda}) = \phi_{V_\lambda}((s_\beta)|_{V_\lambda}) = \phi_{U_\beta}(s_\beta)|_{V_\lambda}.$$

Portanto, $\phi_{U_\alpha}(s_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \phi_{U_\alpha}(s_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Daí, como $\mathcal{G}$ é feixe, existe uma única seção $s \in \mathcal{G}(U)$, tal que $s|_{U_\alpha} = \phi_{U_\alpha}(s_\alpha)$. Então definimos $\psi_U(t) = s$. Por fim, é claro que se $t = (\varphi^+_{\mathscr{F}})_U(\overline{s})$, para alguma seção $\overline{s} \in \mathscr{F}(U)$, então a seção $s \in \mathcal{G}(U)$, construida acima é ninguém menos que $\phi_U(\overline{s})$. Logo,

$$\psi_U \circ (\varphi^+_{\mathscr{F}})_U = \phi_U, \text{ para todo aberto } U \subset X.$$

Como consequência da propriedade universal descrita acima, temos que o par $(\varphi^+_{\mathscr{F}}, \mathscr{F}^+)$, com respeito a tal propriedade, é único a menos de isomorfismo.

Exemplo 1.6 : O feixe imagem de um morfismo de feixes.
Se $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes em um espaço topológico X, então já observamos que o pré-feixe imagem $\mathcal{I}m_\varphi$ é um subpré-feixe de $\mathcal{G}$, mas em geral não é feixe. Nesse caso, fazendo $\mathscr{F} = \mathcal{I}m_\varphi$ e considerando o morfismo de inclusão $i : \mathscr{F} \to \mathcal{G}$, temos pela propriedade universal descrita acima, que existe um morfismo $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\psi \circ \varphi^+_{\mathscr{F}} = i$. Analisando a construção de ψ no contexto atual, vemos que dado um aberto $U \subset X$ e dada uma seção $t \in \mathscr{F}^+(U)$, a seção $s := \psi_U(t) \in \mathcal{G}(U)$ é tal que para todo $x \in U$ existe $U_\alpha \subset U$, com $x \in U_\alpha$, $s_{|U_\alpha} \in \mathscr{F}(U_\alpha)$ e $t_{|U_\alpha} = (\varphi_{\mathscr{F}})_{U_\alpha}(s_{|U_\alpha})$. Portanto, t é determinada por s e isso garante que ψ é um morfismo injetivo. O mesmo raciocínio mostra que $\mathscr{F}^+$ se identifica com o menor subfeixe de $\mathcal{G}$ que contém $\mathscr{F} = \mathcal{I}m_\varphi$ como subpré-feixe. O feixe $(\mathcal{I}m_\varphi)^+$ é chamado feixe imagem do morfismo φ. Diremos que φ é sobrejetivo se $(\mathcal{I}m_\varphi)^+ = \mathcal{G}$. Observe que, sob essa definição, se φ é sobrejetivo, as aplicações de seções $\varphi(U)\colon \mathcal{H}(U) \to \mathcal{G}(U)$ não precisam ser sobrejetivas. Contudo, como observado logo no ínicio dessa seção, $(\mathcal{I}m_\varphi)(U) \simeq (\mathcal{I}m_\varphi)^+(U)$ e $(\mathcal{I}m_\varphi)_p \simeq (\mathcal{I}m^+_\varphi)_p$. Com isso, φ é sobre se, e somente, as aplicações induzidas nos talos $\varphi_p\colon \mathcal{H}_p \to \mathcal{G}_p$ são sobrejetivas.

1.1.2 *Imagens direta e inversa de um feixe*

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos. Dado um feixe $\mathscr{F}$ em X, queremos construir em Y um feixe, dito a imagem direta de $\mathscr{F}$, que será denotado por $f_*\mathscr{F}$. Da mesma forma, dado um feixe $\mathscr{G}$ em Y vamos construir um feixe em X, o qual será chamado imagem inversa de $\mathscr{G}$ e será denotado por $f^{-1}\mathscr{G}$.

1 . Imagem direta de $\mathscr{F}$

Dado um aberto $U \subset Y$, definimos $f_*\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}(f^{-1}(U))$. É claro que com essa definição $f_*\mathscr{F}$ é pré-feixe. Se $V \subset U$ é outro aberto de Y, então o morfismo de restrição $\rho^*_{VU} : f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{F}(V)$ é dado por $\rho^*_{VU} = \rho_{V'U'}$, onde $V' = f^{-1}(V)$, $U' = f^{-1}(U)$ e $\rho_{V'U'} : \mathscr{F}(U') \to \mathscr{F}(V')$ é o morfismo de restrição de $\mathscr{F}$.
Para mostrar que $f_*\mathscr{F}$ é feixe, seja $U = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ uma cobertura aberta de um aberto $U \subset Y$ e sejam $s_\alpha \in f_*\mathscr{F}(U_\alpha)$ uma família de seções compatíveis nas interseções, isto é, $s_{\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}} = s_{\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}}, \forall\alpha,\beta \in \Gamma$. Dessa forma, temos que $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} U'_\alpha$, onde $U'_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ é uma cobertura aberta do aberto $f^{-1}(U) \subset X$ e $s_\alpha \in f_*\mathscr{F}(U_\alpha) = \mathscr{F}(f^{-1}(U_\alpha))$ é uma família de seções nos abertos dessa cobertura que são compatíveis nas interseções, pois o morfismo de retrição de $f_*\mathscr{F}$ é o "mesmo" de $\mathscr{F}$, ou seja,

$$s_{\alpha|_{U'_\alpha\cap U'_\beta}} = s_{\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}} = s_{\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}} = s_{\beta|_{U'_\alpha\cap U'_\beta}}.$$

Portanto, sabendo que $\mathscr{F}$ é feixe, concluímos que existe uma única seção $s \in \mathscr{F}(f^{-1}(U))$ tal que $s_{|_{U'_\alpha}} = s_\alpha$. Porém, sendo $\mathscr{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathscr{F}(U)$ e $s_{|_{U'_\alpha}} = s_{|_{U_\alpha}}$, a conclusão anterior diz que $f_*\mathscr{F}$ satisfaz os axiomas de feixe.
Observamos que se $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{J}$ é um morfismo de feixes em X, então temos um morfismo natural $f_*\alpha : f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{J}$. Dado um aberto $U \subset X$, basta definir $(f_*\alpha)_U := \alpha_{f^{-1}(U)}$. Além disso, dado um outro morfismo $\beta : \mathscr{J} \to \mathscr{H}$ temos $f_*(\beta\circ\alpha) = f_*\beta\circ f_*\alpha$. Com efeito, para todo aberto $U \subset Y$ temos:

$$(f_*(\beta\circ\alpha))_U = (\beta\circ\alpha)_{f^{-1}(U)} := \beta_{f^{-1}(U)}\circ\alpha_{f^{-1}(U)} = (f_*\beta)_U\circ(f_*\alpha)_U.$$

Essas propriedades nos permitem dizer que f_* é um funtor covariante da categoria dos feixes sobre X para a categoria dos feixes sobre Y.

2 . Imagem inversa de $\mathscr{G}$

Dado um aberto $V \subset X$, definimos

$$\mathcal{G}(V) = \varinjlim_{U\supset f(V)} \mathscr{G}(U).$$

Vamos verificar que $\mathcal{G}$ é um pré-feixe em X e definiremos $f^{-1}\mathscr{G} := \mathcal{G}^+$. Inicialmente, observe que pela definição de limite direto temos $\mathcal{G}(\emptyset) = \mathscr{G}(\emptyset)$ e para cada $U \supset f(V)$ temos um homomorfismo $\phi^{\mathscr{G}}_{VU} : \mathscr{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$, de modo que para $U \supset U' \supset f(V)$ tem-se

$$\phi^{\mathscr{G}}_{VU'} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U} = \phi^{\mathscr{G}}_{VU},$$

onde $\rho^{\mathscr{G}}_{U'U} : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(U')$ é o morfismo de restrição do feixe $\mathscr{G}$.
Além disso, se $V' \subset V$ segue que $f(V') \subset f(V)$. Portanto, para todo $U \supset f(V)$ tem-se que $U \supset f(V')$. Assim, para cada $U \supset f(V)$ temos um homomorfismo $\phi^{\mathscr{G}}_{V'U} : \mathscr{G}(U) \to \mathcal{G}(V')$, de modo que para $U \supset U'$, com $U' \supset f(V')$, ocorre

$$\phi^{\mathscr{G}}_{V'U'} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U} = \phi^{\mathscr{G}}_{V'U}.$$

Com isso, a propriedade universal do limite direto garante a existência de um homomorfismo único $\rho^{\mathcal{G}}_{V'V} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(V')$, tal que

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V'V} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \phi^{\mathscr{G}}_{V'U}.$$

Resumidamente, para quaisquer abertos $V' \subset V$ e $U' \subset U$, com $U \supset f(V)$ e $U' \supset f(V')$, temos que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\phi^{\mathscr{G}}_{VU}"] \arrow[d, "\rho^{\mathscr{G}}_{U'U}"'] \arrow[dr, "\phi^{\mathscr{G}}_{V'U}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V'V}"] \\
\mathscr{G}(U') \arrow[r, "\phi^{\mathscr{G}}_{V'U'}"'] & \mathcal{G}(V')
\end{tikzcd}$$

Por fim, se $V'' \subset V' \subset V$ são abertos de X, então para todo aberto $U \supset f(V)$, temos um homomorfismo $\phi^{\mathscr{G}}_{V''U} : \mathscr{G}(U) \to \mathcal{G}(V'')$ e também um homomorfismo $\rho^{\mathcal{G}}_{V''V} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(V'')$, que é o único satisfazendo $\rho^{\mathcal{G}}_{V''V} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \phi^{\mathscr{G}}_{V''U}$. Por outro lado,

$$(\rho^{\mathcal{G}}_{V''V'} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{V'V}) \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \rho^{\mathcal{G}}_{V''V'} \circ (\rho^{\mathcal{G}}_{V'V} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU}) = \rho^{\mathcal{G}}_{V''V'} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{V'U} = \phi^{\mathscr{G}}_{V''U} = \rho^{\mathcal{G}}_{V''V} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU}.$$

Assim, concluímos que $\rho^{\mathcal{G}}_{V''V} = \rho^{\mathcal{G}}_{V''V'} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{V'V}$, e isso finda a verificação de que $\mathcal{G}$ é pré-feixe.

Exemplo 1.7 *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação aberta, então dado um feixe $\mathscr{G}$ em Y, podemos construir um feixe $\mathscr{G}'$ em X simplesmente definindo para $V \subset X$ aberto, $\mathscr{G}'(V) := \mathscr{G}(f(V))$ e tomando os morfismos de restrição como os mesmos de $\mathscr{G}$. Nesse caso, afirmamos que $\mathscr{G}' \simeq f^{-1}\mathscr{G}$. De fato, como introduzidas acima, segue que para*

$V \subset X$, aberto e para cada aberto $U \supset f(V)$, podemos considerar o morfismo de restrição

$$\rho^{\mathscr{G}}_{f(V)U} : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(f(V)).$$

Como, para quaisquer $U \supset U' \supset f(V)$ temos $\rho^{\mathscr{G}}_{f(V)U'} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U} = \rho^{\mathscr{G}}_{f(V)U}$, a propriedade universal garante que existe um único homomorfismo

$$\nu_V : \mathcal{G}(V) \to \mathscr{G}(f(V)) = \mathscr{G}'(V)$$

tal que $\nu_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \rho^{\mathscr{G}}_{f(V)U}$, para todo aberto $U \supset f(V)$. Em particular, para $U = f(V)$ segue que

$$\nu_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{Vf(V)} = \rho^{\mathscr{G}}_{f(V)f(V)} = \mathcal{I}d_{\mathscr{G}'(V)}.$$

Por outro lado, o homomorfismo $(\phi^{\mathscr{G}}_{Vf(V)} \circ \nu_V) : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(V)$ é tal que

$$(\phi^{\mathscr{G}}_{Vf(V)} \circ \nu_V) \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \phi^{\mathscr{G}}_{Vf(V)} \circ (\nu_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU}) = \phi^{\mathscr{G}}_{Vf(V)} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{f(V)U} = \phi^{\mathscr{G}}_{VU}, \forall U \supset f(V).$$

Além disso, $\mathcal{I}d_{\mathcal{G}(V)}$ também satisfaz essa condição. Logo, segue da propriedade universal que

$$\phi^{\mathscr{G}}_{Vf(V)} \circ \nu_V = \mathcal{I}d_{\mathcal{G}(V)}.$$

Assim $\mathcal{G} \simeq \mathscr{G}'$. Portanto, $\mathcal{G}$ é feixe pois $\mathscr{G}'$ o é. Consequentemente, temos $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}^+ =: f^{-1}\mathscr{G}$, donde segue que $\mathscr{G}' \simeq f^{-1}\mathscr{G}$.
Como aplicação, vemos que se $\mathscr{G}$ é um feixe sobre um espaço topológico X, $U \subset X$ é um aberto, considerado com a topologia induzida, e $i : U \to X$ é a inclusão, então i é contínua (aberta) e podemos concluir que $i^{-1}\mathscr{G} \simeq \mathscr{G}_{|U}$, onde $\mathscr{G}_{|U}(V) := \mathscr{G}(V), \forall V \subset U$.

Observação 1.6 Como $f^{-1}\mathscr{G} = \mathcal{G}^+$, temos um morfismo de pré-feixes $\varphi^+_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f^{-1}\mathscr{G}$. Assim, para cada aberto $V \subset X$ temos um homomorfismo $(\varphi^+_{\mathcal{G}})_V : \mathcal{G}(V) \to f^{-1}\mathscr{G}(V)$. Por outro lado, como vimos acima, para cada aberto $U \supset f(V)$, temos um homomorfismo $\phi^{\mathscr{G}}_{UV} : \mathscr{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$. Portanto, podemos definir o homomorfismo

$$\psi^{\mathscr{G}}_{VU} := (\varphi^+_{\mathcal{G}})_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} : \mathscr{G}(U) \to f^{-1}\mathscr{G}(V).$$

Agora, se $V' \subset V$ e $U \supset U'$ são abertos, com $U \supset f(V)$ e $U' \supset f(V')$, temos

$$\rho^{\mathcal{G}^+}_{V'V} \circ \psi^{\mathscr{G}}_{VU} = \rho^{\mathcal{G}^+}_{V'V} \circ ((\varphi^+_{\mathcal{G}})_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU}) = (\rho^{\mathcal{G}^+}_{V'V} \circ (\varphi^+_{\mathcal{G}})_V) \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = ((\varphi^+_{\mathcal{G}})_{V'} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{V'V}) \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU}$$

$$= (\varphi^+_{\mathcal{G}})_{V'} \circ (\rho^{\mathcal{G}}_{V'V} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU}) = (\varphi^+_{\mathcal{G}})_{V'} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{V'U} = \psi^{\mathscr{G}}_{V'U}.$$

Da mesma forma, sendo $\rho^{\mathscr{G}}_{U'U}$ a restrição de $\mathscr{G}$, temos

$$\psi^{\mathscr{G}}_{V'U'} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U} = ((\varphi^+_{\mathcal{G}})_{V'} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{V'U'}) \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U} = (\varphi^+_{\mathcal{G}})_{V'} \circ (\phi^{\mathscr{G}}_{V'U'} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U}) =$$

$$(\varphi^+_{\mathcal{G}})_{V'} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{V'U} = \psi^{\mathscr{G}}_{V'U}.$$

Portanto,

$$\rho^{\mathcal{G}^+}_{V'V} \circ \psi^{\mathscr{G}}_{VU} = \psi^{\mathscr{G}}_{V'U} = \psi^{\mathscr{G}}_{V'U'} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U}.$$

Novamente, essas informações podem ser resumidas, dizendo que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\psi^{\mathscr{G}}_{VU}"] \arrow[d, "\rho^{\mathscr{G}}_{U'U}"'] \arrow[dr, "\psi^{\mathscr{G}}_{V'U}"'] & f^{-1}\mathscr{G}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}^+}_{V'V}"] \\
\mathscr{G}(U') \arrow[r, "\psi^{\mathscr{G}}_{V'U'}"'] & f^{-1}\mathscr{G}(V')
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Proposição 1.1.1 *Um morfimo $\mu : \mathscr{G} \to \mathscr{K}$ de feixes em Y induz um morfismo $f^{-1}\mu : f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}\mathscr{K}$. Além disso, se $\mu' : \mathscr{K} \to \mathscr{J}$ é um outro morfismo de feixes em Y, vale $f^{-1}(\mu' \circ \mu) = (f^{-1}\mu') \circ (f^{-1}\mu)$.*

Prova: Inicialmente consideremos os pré-feixes "limites diretos" em X

$$\mathcal{G}(V) = \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathscr{G}(U) \text{ e } \mathcal{K}(V) = \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathscr{K}(U).$$

Vamos mostrar que ν induz um morfismo $\lim \mu : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$. Com efeito, para cada aberto $V \subset X$ vamos construir um homomorfismo

$$(\lim \mu)_V : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{K}(V).$$

Para isso, observamos que para cada aberto $U \supset f(V)$ temos o homomorfismo $\mu_U : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{K}(U)$ e, como vimos, existe um homomorfismo $\phi^{\mathscr{K}}_{VU} : \mathscr{K}(U) \to \mathcal{K}(V)$. Portanto, podemos considerar a composição:

$$\phi^{\mathscr{K}}_{VU} \circ \mu_U : \mathscr{G}(U) \to \mathcal{K}(V).$$

Agora, considerando os abertos $U \supset U' \supset f(V)$, segue que

$$(\phi^{\mathscr{K}}_{VU'} \circ \mu_{U'}) \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U} = \phi^{\mathscr{K}}_{VU'} \circ (\mu_{U'} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U'U}) = \phi^{\mathscr{K}}_{VU'} \circ (\rho^{\mathscr{K}}_{U'U} \circ \mu_U) =$$

$$(\phi^{\mathscr{K}}_{VU'} \circ \rho^{\mathscr{K}}_{U'U}) \circ \mu_U = \phi^{\mathscr{K}}_{VU} \circ \mu_U.$$

Portanto, os homomorfismos $\phi^{\mathscr{K}}_{VU} \circ \mu_U$, com U variando na família abertos de Y que contêm $f(V)$, são compatíveis com as restrições de $\mathscr{G}$. Por conta dessa compatibilidade, a propriedade universal do limite direto ("$\mathcal{G}(V)$") nos permite concluir que existe um único homomorfismo $(\lim \mu)_V : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{K}(V)$, tal que

$$(\lim \mu)_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \phi^{\mathscr{K}}_{VU} \circ \mu_U.$$

Afirmamos que a correspondência $V \mapsto (\lim \mu)_V$ constitui um morfismo

$$\lim \mu : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$$

de pré-feixes em X.

De fato, dados $V' \subset V, U' \subset U$, abertos, com $U \supset f(V)$, $U' \supset f(V')$, consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(U) \arrow[r, "\phi^{\mathscr{G}}_{VU}"] \arrow[d, "\rho^{\mathscr{G}}_{U'U}"'] \arrow[dr, "\phi^{\mathscr{G}}_{V'U}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[r, "(\lim \mu)_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V'V}"] & \mathcal{K}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{K}}_{V'V}"] \\
\mathscr{G}(U') \arrow[r, "\phi^{\mathscr{G}}_{V'U'}"'] & \mathcal{G}(V') \arrow[r, "(\lim \mu)_{V'}"'] & \mathcal{K}(V')
\end{tikzcd}$$

Já sabemos que o quadrilátero da esquerda é comutativo. Vamos mostrar que

$$\rho^{\mathcal{K}}_{V'V} \circ (\lim \mu)_V = (\lim \mu)_{V'} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{V'V}.$$

Para isso, observe que quando U varia na família de abertos de Y contendo $f(V) \supset f(V')$, podemos considerar os homomorfismos

$$\phi^{\mathscr{K}}_{V'U} \circ \mu_U : \mathscr{G}(U) \to \mathcal{K}(V'),$$

os quais são compatíveis com as restrições de $\mathscr{G}$. Assim, pela propriedade universal, existe um único homomorfismo $\zeta_{V'V} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{K}(V')$, tal que

$$\zeta_{V'V} \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \phi^{\mathscr{K}}_{V'U} \circ \mu_U.$$

Para terminar, basta notar que:

$$(\rho^{\mathcal{K}}_{V'V} \circ (\lim \mu)_V) \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = \rho^{\mathcal{K}}_{V'V} \circ ((\lim \mu)_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU}) = \rho^{\mathcal{K}}_{V'V} \circ (\phi^{\mathscr{K}}_{VU} \circ \mu_U) =$$

$$(\rho^{\mathcal{K}}_{V'V} \circ \phi^{\mathscr{K}}_{VU}) \circ \mu_U = \phi^{\mathscr{K}}_{V'U} \circ \mu_U.$$

Da mesma forma, temos:

$$((\lim\mu)_{V'}\circ\rho^{\mathcal{G}}_{V'V})\circ\phi^{\mathscr{G}}_{VU}=(\lim\mu)_{V'}\circ(\rho^{\mathcal{G}}_{V'V}\circ\phi^{\mathscr{G}}_{VU})=(\lim\mu)_{V'}\circ(\phi^{\mathscr{G}}_{V'U'}\circ\rho^{\mathscr{G}}_{U'U})=$$

$$((\lim\mu)_{V'}\circ\phi^{\mathscr{G}}_{V'U'})\circ\rho^{\mathscr{G}}_{U'U}=(\phi^{\mathscr{K}}_{V'U'}\circ\mu_{U'})\circ\rho^{\mathscr{G}}_{U'U}=\phi^{\mathscr{K}}_{V'U'}\circ(\mu_{U'}\circ\rho^{\mathscr{G}}_{U'U})=$$

$$\phi^{\mathscr{K}}_{V'U'}\circ(\rho^{\mathscr{H}}_{U'U}\circ\mu_U)=(\phi^{\mathscr{K}}_{V'U'}\circ\rho^{\mathscr{H}}_{U'U})\circ\mu_U=\phi^{\mathscr{K}}_{V'U}\circ\mu_U.$$

Portanto, pela unicidade de $\zeta_{V'V}$, segue que

$$\rho^{\mathcal{K}}_{V'V}\circ(\lim\mu)_V=\zeta_{V'V}=(\lim\mu)_{V'}\circ\rho^{\mathcal{G}}_{V'V}.$$

Isso conclui a construção do morfismo $\lim\mu:\mathcal{G}\to\mathcal{K}$.

Agora, como $f^{-1}\mathscr{K}$ é o feixe associado ao pré-feixe $\mathcal{K}$, isto é, $f^{-1}\mathscr{K}=\mathcal{K}^+$, podemos considerar o morfismo $\varphi^+_{\mathcal{K}}:\mathcal{K}\to f^{-1}\mathscr{K}$. Assim, compondo com $\lim\mu$ obtemos um morfismo

$$\varphi^+_{\mathcal{K}}\circ\lim\mu:\mathcal{G}\to f^{-1}\mathscr{K}.$$

Por fim, como $f^{-1}\mathscr{G}=\mathcal{G}^+$, a propriedade universal descrita na **observação 1.5** garante que a existência do morfismo $\varphi^+_{\mathcal{K}}\circ\lim\mu:\mathcal{G}\to f^{-1}\mathscr{K}$ implica na existência de um único morfismo $f^{-1}\mu:f^{-1}\mathscr{G}\to f^{-1}\mathscr{K}$ tal que

$$(f^{-1}\mu)\circ\varphi^+_{\mathcal{G}}=\varphi^+_{\mathcal{K}}\circ\lim\mu.$$

Para concluir, vamos mostrar que se $\mu':\mathscr{K}\to\mathscr{J}$ é um outro morfismo de feixes em Y, então

$$\lim(\mu'\circ\mu)=\lim\mu'\circ\lim\mu.$$

Bem, dados $V\subset X$ e $U\supset f(V)$, abertos, temos o seguinte diagrama no qual cada quadrilátero é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "(\lim\mu)_V"] & \mathcal{K}(V) \arrow[r, "(\lim\mu')_V"] & \mathcal{J}(V) \\
\mathscr{G}(U) \arrow[u, "\phi^{\mathscr{G}}_{VU}"] \arrow[r, "\mu_U"] & \mathscr{K}(U) \arrow[u, "\phi^{\mathscr{K}}_{VU}"] \arrow[r, "{\mu'}_U"] & \mathscr{J}(U) \arrow[u, "\phi^{\mathscr{J}}_{VU}"]
\end{tikzcd}$$

Daí, segue facilmente que

$$((\lim\mu')_V\circ(\lim\mu)_V)\circ\phi^{\mathscr{G}}_{VU}=\phi^{\mathscr{J}}_{VU}\circ\mu'_U\circ\mu_U=\phi^{\mathscr{J}}_{VU}\circ(\mu'\circ\mu)_U.$$

Porém, por construção temos que $(\lim(\mu'\circ\mu))_V:\mathcal{G}(V)\to\mathcal{J}(V)$ é o único homomorfismo que satisfaz

$$(\lim(\mu'\circ\mu))_V\circ\phi^{\mathscr{G}}_{VU}=\phi^{\mathscr{J}}_{VU}\circ(\mu'\circ\mu)_U.$$

Portanto, $(\lim(\mu' \circ \mu))_V = (\lim \mu')_V \circ (\lim \mu)_V$. Consequentemente,

$$\lim(\mu' \circ \mu) = \lim \mu' \circ \lim \mu.$$

Com essa igualdade, vemos que

$$((f^{-1}\mu') \circ (f^{-1}\mu)) \circ \varphi^+_{\mathcal{G}} = (f^{-1}\mu') \circ ((f^{-1}\mu) \circ \varphi^+_{\mathcal{G}}) = (f^{-1}\mu') \circ (\varphi^+_{\mathcal{K}} \circ \lim \mu) =$$

$$((f^{-1}\mu') \circ \varphi^+_{\mathcal{K}}) \circ \lim \mu = (\varphi^+_{\mathcal{J}} \circ \lim \mu') \circ \lim \mu = \varphi^+_{\mathcal{J}} \circ (\lim \mu' \circ \lim \mu) =$$

$$\varphi^+_{\mathcal{J}} \circ \lim(\mu' \circ \mu).$$

No entanto, por definição, temos que $f^{-1}(\mu \circ \mu') : f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}\mathscr{J}$ é o único morfismo que satisfaz:

$$f^{-1}(\mu \circ \mu') \circ \varphi^+_{\mathcal{G}} = \varphi^+_{\mathcal{J}} \circ \lim(\mu' \circ \mu).$$

Assim,

$$f^{-1}(\mu \circ \mu') = (f^{-1}\mu') \circ (f^{-1}\mu).$$

Destacamos então o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathscr{G}(V) \arrow[r, "(f^{-1}\mu)_V"] & f^{-1}\mathscr{K}(V) \arrow[r, "(f^{-1}\mu')_V"] & f^{-1}\mathscr{J}(V) \\
\mathcal{G}(V) \arrow[u, "(\varphi^+_{\mathcal{G}})_V"] \arrow[r, "(\lim \mu)_V"] & \mathcal{K}(V) \arrow[u, "(\varphi^+_{\mathcal{K}})_V"] \arrow[r, "(\lim \mu')_V"] & \mathcal{J}(V) \arrow[u, "(\varphi^+_{\mathcal{J}})_V"] \\
\mathscr{G}(U) \arrow[u, "\phi^{\mathscr{G}}_{VU}"] \arrow[r, "\mu_U"] & \mathscr{K}(U) \arrow[u, "\phi^{\mathscr{K}}_{VU}"] \arrow[r, "\mu'_U"] & \mathscr{J}(U) \arrow[u, "\phi^{\mathscr{J}}_{VU}"]
\end{tikzcd}$$

Dizemos que a correspondência

$$(\mathscr{G}, \mu : \mathscr{G} \to \mathscr{K}) \mapsto (f^{-1}\mathscr{G}, f^{-1}\mu : f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}\mathscr{K})$$

é funtorial, ou seja, determina um funtor da categoria dos feixes sobre Y para a categoria dos feixes sobre X.

Na liguagem de teoria da categoria, a seguinte proposição diz que os funtores imagem inversa e imagem direta são "adjuntos". Antes, vamos a um lema que será útil na demonstração da referida proposição.

Lema 1.1 *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos e sejam $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ pré-feixes em X e em Y, respectivamente. Nestas condições temos morfismos* *naturais* $\eta_{\mathscr{F}} : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ *e* $\nu_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$.

Prova: Comecemos com a construção de $\eta_{\mathscr{F}}$. Como $f^{-1}f_*\mathscr{F}$ é o feixe associado ao pré-feixe $\mathcal{F}$, que para cada aberto $V \subset X$ é dado por

$$\mathcal{F}(V) = \varinjlim_{U \supset f(V)} f_*\mathscr{F}(U) = \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathscr{F}(f^{-1}(U)),$$

é suficiente exibirmos um morfismo de $\mathcal{F}$ para $\mathscr{F}$, pois com isso, a existência de $\eta_{\mathscr{F}}$ seguirá pela propriedade universal do par $(\varphi^+_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}^+ = f^{-1}f_*\mathscr{F})$.

Ora, para cada $U \supset f(V)$, temos que $W := f^{-1}(U) \supset V$. Assim, lembrando que $\mathscr{F}(W) = \mathscr{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathscr{F}(U)$, podemos considerar a restrição

$$\rho^{\mathscr{F}}_{VW} : f_*\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V).$$

Além disso, dados $U \supset U' \supset f(V)$, temos que $W \supset W' := f^{-1}(U')$ e vale

$$\rho^{\mathscr{F}}_{VW'} \circ \rho^{\mathscr{F}}_{W'W} = \rho^{\mathscr{F}}_{VW}.$$

Daí, como $\rho^{f_*\mathscr{F}}_{U'U} = \rho^{\mathscr{F}}_{W'W}$, a equação acima nos diz que os homomorfismos $\rho^{\mathscr{F}}_{VW}$ são compatíveis com as restrições de $f_*\mathscr{F}$. Portanto, a propriedade universal do limite direto garante a existência de um único homomorfismo

$$(\eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}})_V : \mathcal{F}(V) \to \mathscr{F}(V),$$

tal que $(\eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}})_V \circ \phi^{f_*\mathscr{F}}_{VU} = \rho^{\mathscr{F}}_{VW}$. Usando argumentos análogos aos aplicados na demonstração da proposição anterior, vemos que para $V' \subset V$, $U' \subset U$ abertos, com $U \supset f(V)$ e $U' \supset f(V')$, o seguinte diagrama comuta (Já sabemos que o qudrilátero da esquerda comuta)

$$\begin{tikzcd}
f_*\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\phi^{f_*\mathscr{F}}_{VU}"] \arrow[d, "\rho^{f_*\mathscr{F}}_{U'U}"'] \arrow[dr, "\phi^{\mathscr{G}}_{V'U}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "(\eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}})_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V'V}"] & \mathscr{F}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathscr{F}}_{V'V}"] \\
f_*\mathscr{F}(U') \arrow[r, "\phi^{f_*\mathscr{F}}_{V'U'}"'] & \mathcal{F}(V') \arrow[r, "(\eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}})_V"'] & \mathscr{F}(V')
\end{tikzcd}$$

Portanto, temos um morfismo de pré-feixes $\eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathscr{F}$. Dessa forma, pela propriedade universal, existe um único morfismo $\eta_{\mathscr{F}} : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ tal que

$$\eta_{\mathscr{F}} \circ \varphi^+_{\mathcal{F}} = \eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}}.$$

Agora passemos à construção de $\nu_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$. Para cada aberto $U \subset Y$ temos

$$f_*f^{-1}\mathscr{G}(U) = f^{-1}\mathscr{G}(f^{-1}(U)).$$

Por outro lado, é claro que para $V = f^{-1}(U)$, tem-se que $U \supset f(V)$. Assim, comos vimos na **observação 1.6**, existe um homomorfismo

$$\psi_{VU}^{\mathscr{G}} : \mathscr{G}(U) \to f^{-1}\mathscr{G}(V) = f_*f^{-1}\mathscr{G}(U).$$

Portanto, para cada aberto $U \subset Y$, definimos

$$(\nu_{\mathscr{G}})_U := \psi_{VU}^{\mathscr{G}}, \text{ onde } V = f^{-1}(U).$$

O diagrama comutativo apresentado na **observação 1.6** nos diz que com essa definição temos um morfismo de feixes $\nu_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$.

Proposição 1.1.2 *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos e sejam $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ pré-feixes em X e em Y, respectivamente. Nestas condições, temos uma bijeção $\mathcal{M}or_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}) \simeq \mathcal{M}or_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F})$.*

Prova: Dado $\varphi \in \mathcal{M}or_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$, vamos construir um morfismo "imagem inversa" $f^*\varphi : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$. Com efeito, pela **proposição 1.1.1**, o morfismo φ induz um morfismo $f^{-1}\varphi : f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}f_*\mathscr{F}$ e pelo **lema 1.1** temos um morfismo $\eta_{\mathscr{F}} : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$. Portanto, basta definir

$$f^*\varphi := \eta_{\mathscr{F}} \circ f^{-1}\varphi.$$

Agora, dado $\theta \in \mathcal{M}or_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F})$, vamos definir um morfismo "imagem direta" $f(\theta) : \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$. Ora, o morfismo θ induz um morfismo

$$f_*\theta : f_*f^{-1}\mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}.$$

Além disso, o **lema 1.1** nos dá um morfismo $\nu_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$. Portanto, podemos definir:

$$f(\theta) := (f_*\theta) \circ \nu_{\mathscr{G}}$$

Por fim, vamos verificar que $f^*(f(\theta)) = \theta, \forall \theta \in \mathcal{M}or_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F})$ e que também vale $f(f^*\varphi) = \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{M}or_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$.

Com efeito, para ver que $f(f^*\varphi) = \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{M}or_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$, tome um aberto $U \subset Y$ e seja $V = f^{-1}(U)$. Assim, pelas definições, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathscr{G}(V) \arrow[r, "(f^{-1}\varphi)_V"] & f^{-1}f_*\mathscr{F}(V) \arrow[r, "(\eta_{\mathscr{F}})_V"] & \mathscr{F}(V) \\
\mathcal{G}(V) \arrow[u, "(\varphi^+_{\mathcal{G}})_V"] \arrow[r, "(\lim \varphi)_V"] & \mathcal{F}(V) \arrow[u, "(\varphi^+_{\mathcal{F}})_V"] \arrow[ur, "(\eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}})_V"] & \\
\mathscr{G}(U) \arrow[u, "\phi^{\mathscr{G}}_{VU}"] \arrow[r, "\varphi_U"] & f_*\mathscr{F}(U) \arrow[u, "\phi^{f_*\mathscr{F}}_{VU}"] \arrow[r, "="] & \mathscr{F}(V) \arrow[uu, "\rho^{\mathscr{F}}_{VV}"']
\end{tikzcd}$$

Daí, segue que

$$(f(f^*\varphi))_U = (f_*(f^*\varphi) \circ \nu_{\mathscr{G}})_U = (f_*(\eta_{\mathscr{F}} \circ f^{-1}\varphi) \circ \nu_{\mathscr{G}})_U =$$

$$(\eta_{\mathscr{F}})_V \circ (f^{-1}\varphi)_V \circ (\nu_{\mathscr{G}})_U = (\eta_{\mathscr{F}})_V \circ (f^{-1}\varphi)_V \circ \psi^{\mathscr{G}}_{VU} =$$

$$(\eta_{\mathscr{F}})_V \circ (f^{-1}\varphi)_V \circ (\varphi^+_{\mathcal{G}})_V \circ \phi^{\mathscr{G}}_{VU} = (\eta_{\mathscr{F}})_V \circ (\varphi^+_{\mathcal{F}})_V \circ \phi^{f_*\mathscr{F}}_{VU} \circ \varphi_U =$$

$$(\eta^{\mathscr{F}}_{\mathcal{F}})_V \circ \phi^{f_*\mathscr{F}}_{VU} \circ \varphi_U = \rho^{\mathscr{F}}_{VV} \circ \varphi_U = \varphi_U.$$

Da mesma forma, analisando o diagrama acima com $\varphi = f(\theta)$ e $V \subset X$, $U \supset f(V)$, abertos, concluímos que

$$(f^*(f(\theta))_V : f^{-1}\mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(V)$$

é o único homomorfismo tal que

$$(f^*(f(\theta)))_V \circ \psi^{\mathscr{G}}_{VU} = \rho^{\mathscr{F}}_{VW} \circ f(\theta)_U,\, W = f^{-1}(U).$$

Porém, nesse caso, temos

$$\rho^{\mathscr{F}}_{VW} \circ (f(\theta))_U = \rho^{\mathscr{F}}_{VW} \circ (f_*(\theta) \circ \nu_{\mathscr{G}})_U = \rho^{\mathscr{F}}_{VW} \circ (f_*(\theta))_U \circ (\nu_{\mathscr{G}})_U = \rho^{\mathscr{F}}_{VW} \circ \theta_W \circ \psi^{\mathscr{G}}_{VU} =$$

$$\theta_V \circ \rho^{\mathcal{G}+}_{VW} \circ \psi^{\mathscr{G}}_{WU} = \theta_V \circ \psi^{\mathscr{G}}_{VU}.$$

Dessa forma, concluímos que $(f^*(f(\theta)))_V = \theta_V$. Isso finda a demonstração.

1.2 Espaços anelados

Introduziremos a seguir o conceito de espaço anelado e logo depois o conceito de espaço localmente anelado, alicerce fundamental para introduzir o conceito de esquema.

Definição 1.2.1 Um espaço anelado é um par $(X, \mathscr{O}_X)$ consistindo de um espaço topológico X e um feixe de anéis $\mathscr{O}_X$ em X. Um morfismo entre dois espaços anelados $(X, \mathscr{O}_X)$ e $(Y, \mathscr{O}_Y)$ consiste de um par $(f, f^\#)$, composto de uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ e um morfismo $f^\#\colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ de feixes de anéis em Y.

Observação 1.7 Dizemos que $\mathscr{O}_X$ é o feixe estrutural de X. Os morfismos de restrição de $\mathscr{O}_X$ serão denotados por ρ^X_{VU}, onde $V \subset U$ são abertos de X. Em se tratando de morfismos de espaços anelados, é comum omitirmos o feixe estrutural e o morfismo de feixes $f^\#$ subjacente, escrevendo por exemplo "seja $f : X \to Y$ um morfismo de espaços anelados."

Proposição 1.2.1 *Se $(f, f^{\#}) : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ é um morfismo de espaços anelados, então para cada $p \in X$ temos um homomorfismo "induzido" $f_p^{\#} : \mathscr{O}_{Y,f(p)} \to \mathscr{O}_{X,p}$.*

Prova: Inicialmente, como vimos na **observação 1.3**, observamos que o morfismo $f^{\#} \colon \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ induz um homomorfismo nos talos sobre o ponto $f(p) \in Y$, denotado por

$$(f^{\#})_{f(p)} \colon \mathscr{O}_{Y,f(p)} \to f_*\mathscr{O}_{X,f(p)}.$$

Por outro lado, sendo

$$f_*\mathscr{O}_{X,f(p)} = \varinjlim_{U \ni f(p)} f_*\mathscr{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni f(p)} \mathscr{O}_X(f^{-1}(U)),$$

a propriedade universal do limite direto nos diz que para obtermos um homomorfismo de $f_*\mathscr{O}_{X,f(p)}$ para $\mathscr{O}_{X,p}$ é suficiente que para cada $U \ni f(p)$ tenhamos homomorfismos de $\rho_{U,p} : \mathscr{O}_X(f^{-1}(U)) \to \mathscr{O}_{X,p}$, compatíveis com restrições. Ora, como $U \ni f(p)$ temos que $f^{-1}(U) \ni p$. Assim, lembrando que $\mathscr{O}_{X,p} = \varinjlim_{V \ni p} \mathscr{O}_X(V)$, a existência dos homomorfismos $\rho_{U,p}$ segue da construção do limite direto. Na verdade, o homomorfismo $\rho_{U,p}$ é o mapa natural que associa a cada seção de $\mathscr{O}_X(f^{-1}(U))$ o seu germe em p. Portanto, existe um único homomorfismo

$$\rho_p : f_*\mathscr{O}_{X,f(p)} \to \mathscr{O}_{X,p}$$

tal que $\rho_p \circ \rho_{U,f(p)} = \rho_{U,p}$, onde $\rho_{U,f(p)} : f_*\mathscr{O}_X(U) \to f_*\mathscr{O}_{X,f(p)}$ é o homomorfismo que a cada seção sobre um aberto contendo $f(p)$, o seu germe no ponto $f(p)$. Daí, definimos:

$$f_p^{\#} := \rho_p \circ f_{f(p)}^{\#}.$$

Explicitamente, se $s_{f(p)}$ é o germe de uma seção $s \in \mathscr{O}_Y(U)$ com $U \ni f(p)$, então $f_p^{\#}(s_{f(p)}) = (f_U^{\#}(s))_p$.

Exemplo 1.8 *Se $(X, \mathscr{O}_X)$ é um espaço e $U \subset X$ é um aberto, então U admite estrutura natural de espaço anelado, basta definir $\mathscr{O}_U := \mathscr{O}_X\big|_U$. Nesse caso, temos um morfismo de espaços anelados $(i, i_{\#}) : (U, \mathscr{O}_U) \to (X, \mathscr{O}_X)$, onde $i : U \to X$ é a inclusão e $i_{\#} : \mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_U$ é o morfismo de restrição, isto é, para cada aberto $V \subset X$, o homomorfismo*

$$(i_{\#})_V : \mathscr{O}_X(V) \to i_*\mathscr{O}_U(V) = \mathscr{O}_U(V \cap U) = \mathscr{O}_X(V \cap U)$$

é dado por $(i_{\#})_V = \rho^X_{WU}$, onde $W = V \cap U$.

Definição 1.2.2 Espaços localmente anelados

Diremos que um espaço anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ é localmente anelado se para todo ponto $p \in X$, o talo $\mathscr{O}_{X,p}$ é um anel local. Um morfismo de espaços localmente anelados é um morfismo $(f, f^{\#})$ de espaços anelados com a condição que para cada ponto $p \in X$, a aplicação induzida entre os talos $f_p^{\#}: \mathscr{O}_{Y,f(p)} \to \mathscr{O}_{X,p}$ seja um homomorfismo local de anéis locais, ou seja, a imagem do ideal maximal de $\mathscr{O}_{Y,f(p)}$ está contida no ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,p}$.

A próxima proposição exibe um fato interessante e de importante uso posterior. Ela estabelece uma conexão entre homomorfismos de anéis e morfismos de espaços localmente anelados. Mais precisamente, temos

Proposição 1.2.1 *Sejam A e B anéis. Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto constituído pelos homomorfismos de anéis $\varphi: A \to B$ e o conjunto representado pelos morfismos de espaços localmente anelados $\psi = (f, f^{\#}): (SpecB, \mathscr{O}_{SpecB}) \to (SpecA, \mathscr{O}_{SpecA})$.*

Prova A partir de um homomorfismo de anéis $\varphi: A \to B$, induziremos a aplicação desejada da seguinte maneira: Para $p \in \text{Spec } B$, determine f de Spec B para Spec A, definindo $f(p) := \varphi^{-1}(p)$. f é uma aplicação contínua na topologia de Zariski. Com efeito, se $V(a)$ é um fechado de Spec A, onde $a \subset A$ é um ideal, então $f^{-1}(V(a)) = V(\varphi(a))$ e portanto $f^{-1}(V(a))$ é fechado. De fato, $q \in f^{-1}(V(a))$ se, e somente se, $f(q) \in V(a)$, ou seja, $\varphi^{-1}(q) \in V(a)$, e daí, $q \in \varphi(V(a))$, o que significa que $q \supset J$, onde J é o ideal gerado por $\varphi(a)$. Logo $q \in V(\varphi(a))$. Além disso, como $\varphi(p) = f^{-1}(p)$, para cada p, temos um homomorfismo natural de anéis locais

$$\begin{aligned} \varphi_p: A_p &\to B_{f^{-1}(p)} \\ \frac{a}{s} &\longmapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \end{aligned}$$

em que $a \in A$, $s \notin p$. Claramente, φ_p é um homomorfismo local, pois $\varphi_p^{-1}(f^{-1}(p)B_{f^{-1}(p)}) = pA_p$. E, por meio desse homomorfismo, obteremos um morfismo de feixes $f^{\#}: \mathscr{O}_{SpecA} \to f_*(\mathscr{O}_{SpecB})$. Para isso, definimos para cada aberto $V \subset \text{Spec } A$ o morfismo

$$\begin{array}{cccc} f_V^{\#}: & \mathscr{O}_{SpecA}(V) & \longrightarrow & f_*(\mathscr{O}_{SpecB})(V) \\ & s & \longmapsto & s': V \longrightarrow \bigcup_{p \in V} B_{f^{-1}(p)} \\ & & & q \longmapsto (\varphi_q \circ s)(q) \end{array}$$

onde s é uma seção de $\mathscr{O}_{SpecA}(V)$. Por conta da definição dos feixes estruturais $\mathscr{O}_{SpecA}$ e $f_*(\mathscr{O}_{SpecB})$, a aplicação $f_V^{\#}$ está bem-definida e para abertos $U \subset V$, naturalmente ocorre a compatibilidade entre os morfismos de restrição $f_V^{\#}$ e $f_U^{\#}$, definindo assim o morfismo $\psi = (f, f^{\#})$.

Por outro lado, seja $\psi = (f, f^{\#})$ um morfismo de espaços localmente anelados Spec B e Spec A. Queremos verificar que ψ é induzido por um determinado homomorfismo de anéis. Para isso, consideremos o morfismo global $\varphi = f_X^{\#} \colon \mathscr{O}_{SpecA}(X) = \Gamma(SpecA, \mathscr{O}_{SpecA}) \to f_*(\mathscr{O}_{SpecB})(X) = \Gamma(SpecB, \mathscr{O}_{SpecB})$. Como $\Gamma(SpecA, \mathscr{O}_{SpecA}) = A$, temos que de fato φ é um homomorfismo de A para B. Esse é o homomorfismo desejado. Com efeito, denote por φ_f a aplicação induzida de Spec B para Spec A por φ definida para cada $p \in$ Spec B como $\varphi_f(p) := \varphi^{-1}(p)$. Precisamos verificar que $\varphi_f = f$. Para cada $p \in$ Spec B, considere o homomorfismo nos talos $f_p^{\#} \colon \mathscr{O}_{SpecA,f(p)} \to (f_*\mathscr{O}_{SpecB})_p$ o qual pode ser visto como um homomorfismo de $A_{f(p)} \to B_p$. Observe que $f_p^{\#}$ e φ junto com os homomorfismos canônicos de localização são compatíveis, ou seja,

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_1"] & B \arrow[d, "i_2"'] \\
A_{f(p)} \arrow[r, "f_p^{\#}"'] & B_p
\end{tikzcd}
$$

Como consequência disso, sendo $f^{\#}$ um homomorfismo local, então $\varphi_f(p) = f^{-1}(p) = i_1^{-1}(f_p^{\#^{-1}}(i_2(p))) = f(p)$, donde $\varphi_f = f$ e com isso obtemos que a aplicação $f^{\#}$ também é induzida a partir de φ e assim segue o resultado. $\square$

Observação 1.8 *:* Se não assumirmos na definição de morfismos de espaços localmente anelados, que as aplicações induzidas nos talos são homomorfismos locais, a proposição anterior será falsa, o que não é desejado. No exemplo a seguir, temos um exemplo de morfismo de espaços anelados que não é induzido por um homomorfismo de anéis da maneira exposta na proposição.

Exemplo 1.9 *Se R um domínio de valoração discreta. Então $T =$ Spec R é um esquema afim, e o espaço topológico Spec R consiste de dois pontos: (0) e (t), onde $t \in R$ é um parâmetro uniformizante de R. Sendo $\{(t)\} = V(t)$, então $\{(0)\} =$Spec $R \setminus V(t)$, donde (0) é um ponto aberto e denso de Spec R e temos que a localização de R em (0) será o corpo quociente de R,que denotaremos por K. O outro ponto $(t) = V(t)$ é um ponto fechado e a localização de R nesse ponto será o próprio anel R. Considere então a aplicação de inclusão $i \colon R \to K$ e o morfismo entre os espaços anelados Spec $K \to$*

Spec R que leva o ponto (0) de Spec K no ponto (t) de Spec R. A aplicação associada $i^{\#}\colon \mathscr{O}_{SpecR} \to f_*(\mathscr{O}_{SpecK})$ não é induzida por qualquer homomorfismo de anéis $R \to K$ haja vista a aplicação induzida de $i^{\#}$ no talo em (t), $i^{\#}_{(t)}\colon \mathscr{O}_{SpecR,i((t))} \to i_*\mathscr{O}_{SpecK\,(t)}$ não ser um homomorfismo local. De fato, $\mathscr{O}_{SpecR,i((t))} \simeq R$ e $i_*\mathscr{O}_{SpecK\,(t)} \simeq K$ e com isso, $i^{\#}_{(t)}$ pode ser vista como uma aplicação de R em K. Como $i^{\#^{-1}}_{(t)}((0)) \neq (t)$, então $i^{\#}_{(t)}$ não é homomorfismo local. Dessa maneira, não temos um morfismo de espaços localmente anelados.

Tendo introduzido a noção de espaços anelados e seus morfismos podemos considerar feixes de módulos que sejam compatíveis com essa estrutura.

1.3 Feixes de $\mathscr{O}_X$-módulos

Definição 1.3.1 Seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço anelado. Diremos que um feixe $\mathscr{F}$ em X é um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos (abreviadamente um $\mathscr{O}_X$-módulo), se para cada aberto $U \subset X$ temos que $\mathscr{F}(U)$ é um $\mathscr{O}_X(U)$-módulo, tal que as operações de módulo sejam compatíveis com restrições, ou seja, para cada inclusão de abertos $V \subset U$ os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \times \mathscr{F}(U) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "(\rho_{VU},\rho_{VU})"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_{VU}"] \\
\mathscr{F}(V) \times \mathscr{F}(V) \arrow[r, "s"] & \mathscr{F}(V)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_X(U) \times \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(\overline{\rho}_{VU},\rho_{VU})"'] & \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_{VU}"] \\
\mathscr{O}_X(V) \times \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\mu"] & \mathscr{F}(V)
\end{tikzcd},$$

Um morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ é um morfismo de feixes $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ com a condição de que $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ seja um homomorfismo de $\mathscr{O}_X(U)$-módulos para todo aberto $U \subset X$.

Observação 1.9 Note que $\mathscr{O}_X \times \mathscr{F}$ e $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$, definidos de forma óbvia, são feixes em X. Assim, a comutatividade dos diagramas nos diz simplesmente que as operações de módulo são morfismos de feixes.

De modo mais explícito, tomando seções $t, t' \in \mathscr{F}(U)$, $a \in \mathscr{O}_X(U)$, sendo $V \subset U$ um outro aberto, e denotando $t + t' = s(t, t')$ e $t \cdot t' = \mu(t, t')$, vale que

$$(t + t')_{|V} = t_{|V} + t'_{|V} \text{ e } (a.t)_{|V} = a_{|V}.t_{|V}.$$

Por conta disso, dizemos que os morfismos de restrição ρ^X_{VU} são morfismos (mistos) do $\mathscr{O}_X(U)$-módulo $\mathscr{F}(U)$ para o $\mathscr{O}_X(V)$-módulo $\mathscr{F}(V)$.

Proposição 1.3.1 *Se $(X, \mathscr{O}_X)$ é um espaço anelado e $\mathscr{F}$ é um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos, então para cada $x \in X$, o talo de $\mathscr{F}$ em x tem estrutura de $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo.*

Prova: Como vimos na **observação 1.3**, um morfismo de feixes induz morfismos nos talos. Daí, como as operações $s : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ e $\mu : \mathscr{O}_X \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ são morfismos de feixes, segue que para todo $x \in X$ temos morfismos $s_x : \mathscr{F}_x \times \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$ e $\mu_x : \mathscr{O}_{X,x} \times \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x$, que definem estrutura de $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo em $\mathscr{F}_x$.

Definição 1.3.2 Seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço anelado e seja $\mathscr{F}$ um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos. Dizemos que $\mathscr{F}$ é gerado por seções globais se existe uma família de seções globais $\{s_i\}$, $s_i \in \Gamma(X, \mathscr{F})$, tal que para cada $x \in X$, as seções s_i vistas como elementos do talo $\mathscr{F}_x$ geram este talo como um $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo.

Observação 1.10 Seja $f : X \to Y$ um morfismo de espaços anelados. Se $\mathscr{F}$ é um $\mathscr{O}_X$-módulo e $\mathscr{G}$ é um $\mathscr{O}_Y$-módulo, então $f_*\mathscr{F}$ é um $\mathscr{O}_Y$-módulo e $f^{-1}\mathscr{G}$ é um $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo. De fato, a operação $\mu : \mathscr{O}_X \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$, que é morfismo, induz um morfismo $f_*\mu : f_*\mathscr{O}_X \times f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{F}$. E por outro lado, temos um morfismo $f^\# : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$. Portanto, podemos considerar o morfismo

$$f_*\mu \circ (f^\#, \mathcal{I}d_{f_*\mathscr{F}}) : \mathscr{O}_Y \times f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{F}.$$

Da mesma forma, a operação de $\mathscr{O}_Y$-módulo em $\mathscr{G}$, que também denotamos por $\mu : \mathscr{O}_Y \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$, induz um morfismo

$$f^{-1}\mu : f^{-1}\mathscr{O}_Y \times f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}\mathscr{G}.$$

Esse morfismo define a estrutura de $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo para $f^{-1}\mathscr{G}$.
Como já havíamos destacado, f_* é um funtor da categoria dos feixes em X para a categoria dos feixes em Y. A observação acima nos diz que no caso de $f : X \to Y$ ser um morfismo de espaços anelados, o funtor f_* leva a categoria dos $\mathscr{O}_X$-módulos na categoria dos $\mathscr{O}_Y$-módulos. No entanto, como $f^{-1}\mathscr{O}_Y$ não tem estrutura (natural) de $\mathscr{O}_X$-módulo, não é claro que para um $\mathscr{O}_Y$-módulo $\mathscr{G}$ sua imagem inversa $f^{-1}\mathscr{G}$ seja um $\mathscr{O}_X$-módulo, ou seja não se espera que o funtor f^{-1} leve $\mathscr{O}_Y$-módulos em $\mathscr{O}_X$-módulos. Para suprir essa deficiência, lembramos que o morfismo $f^\# : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ induz um morfismo $f^{-1}\mathscr{O}_Y \to f^{-1}f_*\mathscr{O}_X$, que compondo com o morfismo natural $f^{-1}f_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ (Veja **Lema 1.1**), nos permite considerar $\mathscr{O}_X$ como um $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo e introduzir a seguinte definição.

Definição 1.3.3 Se $f : X \to Y$ é um morfismo de espaços anelados e $\mathscr{G}$ é um $\mathscr{O}_Y$-módulo, definimos $f^*\mathscr{G}$ como o feixe associado ao pré-feixe:

$$U \mapsto f^{-1}\mathscr{G}(U) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X(U).$$

Com essa definição, fica claro que $f^*\mathscr{G}$ tem estrutura de $\mathscr{O}_X$-módulo. Pode-se verificar que f^* é um funtor da categoria dos $\mathscr{O}_X$-módulos na categoria dos $\mathscr{O}_Y$-módulos. Além disso, f^* e f_* são adjuntos, isto é,

$$\mathcal{M}or_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G},\mathscr{F}) \backsimeq \mathcal{M}or_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

O exemplo a seguir ilustra de maneira concreta o porquê do produto tensorial ser necessário na construção do pull-back de um feixe. Antes disso vejamos uma construção preliminar.

Exemplo 1.10 *Considere $X = \mathbb{P}^1$ e o seu anel de coordenadas homogêneo $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$, onde cada S_d consiste do conjunto dos polinômios homogêneos de grau d. Para cada n, defina $S(n)$ como*

$$S(n) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in S_{(d+n)} \text{ , } g \in S_d;\ \textit{para algum } d \ \geq 0 \text{ , } g \neq 0 \right\}$$

e para qualquer ponto $P \in X$, defina os conjuntos

$$\mathscr{O}_X(n)_P = \left\{ \frac{f}{g} \in S(n) \mid g(P) \neq 0 \right\} \text{ , } \mathscr{O}_X(n)(U) = \bigcap_{P\in X} \mathscr{O}_X(n)_P$$

Com essa construção, $\mathscr{O}_X(n)$ será um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos. Não verificaremos tal fato.

Exemplo 1.11 *Considere o morfismo $f\colon X = \mathbb{P}^1 \to Y = \mathbb{P}^1$ definido como $(s\colon t) \to (s^2\colon t^2)$. Queremos exibir o pull-back $f^*\mathscr{O}_Y(1)$ do feixe $\mathscr{O}_Y(1)$, sobre X. Pelo exemplo anterior, veja que as seções locais $s \in \mathscr{O}_Y(1)(U)$, $U \subset X$ aberto, são da forma $g(s,t)/h(s,t)$, em que g, h são polinômios homogêneos, $h(s,t) \neq 0$ e deg $g(s,t)$ $-$ deg $h(s,t) = 1$. Dessa maneira, $f^{-1}\mathscr{O}_Y(1)(U) = \varinjlim_{V\supset f(U)} \mathscr{O}_Y(1)(V)$ é tal que suas seções locais são da forma $g(s^2,t^2)/h(s^2,t^2)$, com deg $g(s^2,t^2)$ $-$ deg $h(s^2,t^2) = 2$. De fato, um elemento de $f^{-1}\mathscr{O}_Y(1)(U)$, expressa-se como $\overline{(w,W)}$, em que $W \supset f(U)$, e w é um polinômio homogêneo $g(S,T)/h(S,T)$ com deg $g(S,T)$ $-$ deg $h(S,T) = 1$, nas indeterminadas $S = s^2$ e $T = t^2$. Daí, com uma substituição segue que deg $g(s^2,t^2)$ $-$ deg $h(s^2,t^2) = 2$. Agora, note que essas seções não descrevem um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos. Com efeito, considere uma seção t/s de $\mathscr{O}_X$ em um aberto no qual $s \neq 0$ e seja s^2 uma seção de $f^{-1}\mathscr{O}_Y(1)$ nesse mesmo aberto. O produto de tais seções st não é da forma $g(s^2,t^2)/h(s^2,t^2)$. Considerando agora o produto tensorial $f^{-1}\mathscr{O}_Y(1) \otimes \mathscr{O}_X$, temos que as seções de $f^*\mathscr{O}_Y$ são da forma*

$$\frac{g(s^2,t^2)}{h(s^2,t^2)} \otimes \frac{g'(s,t)}{h'(s,t)}$$

com deg $g(s^2,t^2)$ $-$ *deg* $h(s^2,t^2) = 2$ *e deg* $g'(s,t)$ $-$ *deg* $h'(s,t) = 0$. *Obtemos com isso, que tal produto tensorial estabelece todas as expressões da forma* $g(s,t)/h(s,t)$ *com deg* $g(s,t)$ $-$ *deg* $h(s,t) = 2$, *ou seja,*

$$f^*\mathscr{O}_Y(1) = \mathscr{O}_X(2)$$

Usando a mesma construção, é possível mostrar que $f^*\mathscr{O}_Y(n) = \mathscr{O}_X(dn)$, *para qualquer* $n \in \mathbb{Z}$ *e qualquer morfismo* $f\colon X \to Y$ *entre esquemas projetivos cuja imagem seja descrita por meio de polinômios homogêneos de grau* d.

1.4 Esquemas

1.4.1 *O espectro de um anel*

Nessa subseção o objetivo é construir o principal ingrediente necessário à definição de esquema. Vamos associar a cada anel um espaço localmente anelado, que será chamado de "espectro" do anel. Vejamos como se faz isso.
Seja A um anel comutativo com unidade e considere o conjunto Spec A formado pelos ideais primos do anel A. Em símbolos,

$$Spec\ A := \{p; p \text{ é ideal primo de } A\}.$$

Para cada subconjunto $E \subset A$, considere

$$V(E) := \{p \in Spec\ A; p \supset E\}.$$

Isso estabelece uma função do conjunto das partes de A no conjunto das partes de Spec A. No entanto, é fácil ver que se I denota o ideal de A gerado por E, então $V(I) = V(E)$. Por isso, é suficiente concentrar nossa atenção na família de subconjuntos do tipo $V(I)$, quando I varia no conjunto dos ideais de A. Começamos destacando as seguintes propriedades:

1. Spec $A = V((0))$ e $\emptyset = V((1))$, onde (0) denota o ideal nulo e $(1) = A$, é o ideal unitário.

2. $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$, para quaisquer dois ideais $I, J \subset A$.

3. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$, onde $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é qualquer família de ideais de A.

Agora consideramos a família de subconjuntos $U_I :=$ Spec $A - V(I)$, com I variando no conjunto dos ideais de A. As propriedades acima garantem que essa família constitui uma topologia em Spec A, com respeito a qual os conjuntos do tipo $V(I)$ são os fechados. Essa topologia é chamada topologia de Zariski em Spec A.

Observação 1.11 Para cada $f \in A$ denote por $\mathcal{D}(f)$ o aberto, chamado de aberto principal, complementar de $V(f)$. Assim, $\mathcal{D}(f) = \{p \in \text{Spec } A; f \notin p\}$. O fato a ser destacado é que os abertos principais formam uma base para a topologia de Zariski em Spec A. Com efeito, dado um aberto $U \subset$Spec$A$, existe um ideal $I \subset A$ tal que

$$U = Spec\ A - V(I) = Spec\ A - \bigcap_{f \in I} V(f) = \bigcup_{f \in I} \mathcal{D}(f).$$

A seguir, para cada $f \in A$, a notação A_f indica o anel de frações de A com respeito ao conjunto multiplicativo formado pelas potências de f.

Lema 1.2 *Para cada $f \in A$ temos que $\mathcal{D}(f)$ é homeomorfo a Spec A_f.*
Prova: Inicialmente considere o homomorfismo canônico $\varphi : A \to A_f$, dado por $\varphi(a) = \frac{a}{1}, \forall a \in A$. Daí, como pré-imagem de ideal primo é primo, definimos ${}^a\varphi : SpecA_f \to SpecA$, por ${}^a\varphi(p) = \varphi^{-1}(p), \forall p \in SpecA_f$. Para verificar a continuidade, note que para todo fechado $V(I) \subset SpecA$, vale que

$$({}^a\!\varphi)^{-1}(V(I)) = V(IA_f).$$

Como $\varphi({}^a\varphi(p)) \subset p$, segue que $f \notin {}^a\varphi(p)$, pois $\varphi(f)$ é unidade de A_f. Portanto, $Im({}^a\varphi) \subset \mathcal{D}(f)$.
Reciprocamente, dado $q \in \mathcal{D}(f)$ consideremos sua extensão qA_f. Como $f \notin q$, temos que $\overline{f} \neq \overline{0}$ em A/q. Daí, como A/q é domínio, temos que $(A/q)_{\overline{f}}$ também o é, pois se identifica com um subanel não-nulo do corpo de frações de A/q. Agora, observe que $\overline{(\frac{a}{f^n})} \mapsto (\frac{\overline{a}}{\overline{f}^n})$, define um isomorfismo:

$$\frac{A_f}{qA_f} \simeq (A/q)_{\overline{f}}.$$

Portanto, concluímos que qA_f é um ideal primo de A_f.
Por fim, sendo $q' = {}^a\varphi(qA_f)$ é claro que $q \subset q'$. Por outro lado, dado $a \in q'$ temos que $\overline{(\frac{a}{1})} = \overline{0}$ em $\frac{A_f}{qA_f}$. Logo, $\frac{\overline{a}}{\overline{1}} = \overline{0}$ em $(A/q)_{\overline{f}}$. Essa última igualdade implica que $a \in q$. Dessa forma, $q = {}^a\varphi(qA_f)$ e isso mostra que

$$\mathcal{D}(f) = im({}^a\!\varphi).$$

A igualdade $q = {}^a\varphi(qA_f)$ nos permite provar que ${}^a\varphi$ é uma aplicação fechada, pois

$${}^a\varphi(V(J)) = V(\varphi^{-1}(J)).$$

Falta a injetividade de ${}^a\varphi$. Dado $p \in \operatorname{Spec} A_f$, seja $q = {}^a\varphi(p)$. Vamos mostrar que $p = qA_f$. Com efeito, é claro que $qA_f \subset p$. Por outro lado, se $\frac{a}{f^n} \in p$, então $\frac{a}{1} \in p$. Portanto, $a \in \varphi^{-1}(p) = {}^a\varphi(p) = q$. Dessa forma, $\frac{a}{1} \in q$ e consequentemente, $\frac{a}{f^n} \in q$. Logo, $q = p$.
Com isso, vemos que ${}^a\varphi$ é uma bijeção contínua, fechada, de $\operatorname{Spec} A_f$ sobre $\mathcal{D}(f)$ e portanto um homeomorfismo. A inversa é dada por $q \to qA_f$.

Estabelecida uma estrutura de espaço topológico em $X = \operatorname{Spec} A$, precisamos construir um feixe estrutural em $\mathscr{O}_X$ com a condição de que para cada $p \in X$, o talo $\mathscr{O}_{X,p}$ seja um anel local. A idéia é construir $\mathscr{O}_X$ de modo que tenhamos $\mathscr{O}_X(X) = A$ e $\mathscr{O}_{X,p} = A_p$, com A_p sendo a localização do anel A no primo p, para todo $p \in X$. Ora, admita por um instante que tal feixe já tenha sido construido (para todo anel). Daí, como vimos na **seção 1.1.1**, um feixe é isomorfo ao feixe associado a si mesmo, ou seja, se $\mathscr{F}$ é feixe, tem-se $\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}^+$. Assim, o feixe $\mathscr{O}_X$ deve ser isomorfo ao feixe $\mathscr{O}_X^+$. A vantagem é que $\mathscr{O}_{X,p}^+ = \mathscr{O}_{X,p}$ e para cada aberto $U \subset X$ sabemos descrever os elementos de $\mathscr{O}_X^+(U)$ explicitamente. A saber, um elemento de $\mathscr{O}_X^+(U)$ será uma função

$$t : U \to \bigcup_{p \in U} \mathscr{O}_{X,p}^+ = \bigcup_{p \in U} A_p,$$

que satisfaz as seguintes condições:
$a)$ $t(p) \in A_p, \forall p \in U.$
$b)$ Para todo $p \in U,$ existe um aberto $V_p \subset U,$ com $p \in V_p,$ e existe uma seção $s \in \mathscr{O}_X(V_p),$ tal que $t(q) = s_q, \forall q \in V_p.$
Assim, o feixe $\mathscr{O}_X$ é essencialmente (a menos de isomorfismo) o feixe cujas seções sobre U satisfazem as condições "a" e "b". Isso ainda não é uma definição para $\mathscr{O}_X$. A inconsistência se dá por conta da recorrência presente no ítem "b". Precisamos traduzir a essência da condição "b", sem fazer referência a $\mathscr{O}_X$.
Para isso, note que como os abertos principais formam uma base para a topologia de Spec A, para cada $p \in \operatorname{Spec} A$ podemos escolher $f_p \in A$ tal que $\mathcal{D}(f_p) \subset V_p$. Assim, restringindo a $\mathcal{D}(f_p)$, temos uma seção $s' \in \mathscr{O}_X(\mathcal{D}(f_p))$, tal que $t(q) = s'_q, \forall q \in \mathcal{D}(f_p)$.
Agora, seja $U = \operatorname{Spec} A_{f_p}$ e $\mathscr{O}_U$ seu feixe estrutural, que estamos admitindo que já foi construido. Logo, deve-se ter $\mathscr{O}_U(U) = A_{f_p}$. Por fim, como U e $\mathcal{D}(f_p)$ são homeomorfos, é

razoável esperar que $(U, \mathscr{O}_U) \simeq (\mathcal{D}(f_p), \mathscr{O}_X|_{\mathcal{D}(f_p)})$, isomorfos como espaços anelados. Em particular, é esperado que

$$\mathscr{O}_X|_{\mathcal{D}(f_p)}(\mathcal{D}(f_p)) := \mathscr{O}_X(\mathcal{D}(f_p)) \simeq \mathscr{O}_U(U) = A_{f_p}.$$

Dessa forma, a seção $s' \in \mathscr{O}_X(\mathcal{D}(f_p))$ se identifica com um elemento da forma $\frac{a}{f_p^n} \in A_{f_p}$. Ademais, sabemos que A_q é o limite direto dos anéis A_f, com $f \notin q$. Daí, como $f_p \notin q, \forall q \in \mathcal{D}(f_p)$, temos um homomorfismo natural de A_{f_p} para A_q. É razoável esperar que a imagem de $\frac{a}{f_p^n}$ por esse homomorfismo (que continuamos denotando por $\frac{a}{f_p^n}$) coincida com s'_q. Toda essa heurística nos induz a reescrever a condição "b" nos seguintes termos:

b') Para todo $p \in U,$ existe um aberto $V_p \subset U,$ com $p \in V_p,$ e existem elementos $a, g \in A,$ tais que $g \notin q$ e "$t(q) = \frac{a}{g}$" em $A_q, \forall q \in V_p$.

Portanto, para que $\mathscr{O}_X$ satisfaça as propriedades desejadas, para cada aberto $U \subset X$ é natural definir $\mathscr{O}_X(U)$ como sendo formado pelas funções $t : U \to \bigcup_{p \in U} A_p$, que satisfazem as condições "a" e "b'".

Vamos verificar que com essa definição $\mathscr{O}_X$ é feixe de anéis e satisfaz as condições desejadas.

Proposição 1.4.1 *O objeto $\mathscr{O}_X$ apresentado e construído acima é um feixe de anéis comutativos*

Prova Inicialmente, observe que $\mathscr{O}_X(U)$ é um anel para cada aberto U. De fato, dadas $s, t \colon U \to \bigcup_{p \in U} A_p$, para cada $p \in U$, temos $(s+t)(p) \in A_p$ e existe um certo aberto $W \ni p$, tal que $(s+t)(q) = a/f + b/g = (ag+bf)/fg$, com $fg \notin q$ para todo $q \in W$. Temos assim, $(s+t)(q) \in A_q$. Concluímos então que $s+t$ satisfaz as condições a) e b) como discutido na observação anterior. Portanto, $s+t \in \mathscr{O}_X(U)$. De forma semelhante, concluímos que o produto $st \in \mathscr{O}_X(U)$. A aplicação s definida como $s(p) := 1_{A_p}$, para todo $p \in U$ será o elemento identidade de $\mathscr{O}_X(U)$, constituindo $\mathscr{O}_X(U)$, portanto, um anel comutativo com unidade. Para $V \subset U$, o homomorfismo natural $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$, que restringe o domínio de cada seção $s \in \mathscr{O}_X(U)$, satisfaz naturalmente as condições de pré-feixe.

Finalmente, para verificar que $\mathscr{O}_X$ é um feixe, vemos que se $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U e s uma seção de U satisfazendo $s|_{V_i} = 0$, para cada $\{V_i\}$, então $s = 0$ por conta dos homomorfismos de restrição. Da mesma forma, se tivermos funções $s_i \in \mathscr{O}(V_i)$, tais que para i, j, $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, então a função s, que satisfaz para cada i,$s|_{V_i} = s_i$ pertence a $\mathscr{O}_X(U)$, pois localmente satisfaz as condições a) e b'). $\square$

Por fim,

Definição 1.4.1 Seja A um anel comutativo. O espectro de A é definido como sendo um par consistindo do espaço topológico Spec A junto com o feixe estrutural $\mathscr{O}_{SpecA}$.

1.4.2 *Esquemas afins*

Estabelecidos os conceitos de espectro de um certo anel e de feixe estrutural, podemos finalmente introduzir a noção de esquema afim e a partir daí um esquema, um objeto que localmente pode ser visto como um esquema afim.

Definição 1.4.2 Um espaço localmente anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ é dito um esquema afim se ele é isomorfo ao espectro de algum anel. Nesse caso o esquema afim será dito reduzido (resp. inteiro) conforme o anel seja reduzido (resp. um domínio de integridade). Um esquema é um espaço localmente anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ tal que para todo ponto de X existe uma vizinhança aberta U de maneira que $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ é um esquema afim. Um esquema X será dito reduzido, inteiro, se puder ser coberto por esquemas afins com essas propriesdades. Um morfismo de esquemas é simplesmente um morfismo de espaços localmente anelados como já visto anteriormente.

Exemplo 1.12 *Se k é um corpo, Spec k é um esquema afim cujo espaço topológico consiste de um único ponto. Seu feixe estrutural consiste do corpo k. Com efeito, Spec k possui um único elemento que é o ideal primo (0). Temos dessa forma $V(0) =$ Spec k e $V($Spec $k) = \emptyset$. Assim, sendo $\{(0)\}$ o único aberto não-vazio de Spec k, então $\mathscr{O}_X(\{(0)\})$ é determinado pelas funções constantes em k, ou seja, $\mathscr{O}_X(\{(0)\}) \simeq k$, de modo que podemos dizer que o feixe estrutural consiste do corpo k.*

Um esquema que possui a propriedade de poder ser coberto por uma quantidade finita de abertos afins $U_i =$ Spec A_i, onde A_i é um anel noetheriano é dito um esquema noetheriano.

De maneira a simplificar, iremos denotar mais adiante o esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ simplesmente por X deixando seu feixe estrutural subentendido. Veremos a seguir que para um dado esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ é possível estabelecer de maneira natural uma estrutura de subesquema nos abertos do espaço topológico X.

Definição 1.4.3 Um subesquema aberto de um esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ é um esquema $(U, \mathscr{O}_U)$, onde $U \subset X$ é um aberto e o feixe estrutural $\mathscr{O}_U$ é definido de tal maneira que satisfaça $\mathscr{O}_U \simeq \mathscr{O}_X|_U$, sendo $\mathscr{O}_X|_U$ a restrição do feixe estrutural de X a U. Uma imersão aberta corresponde a um morfismo de esquemas $\phi = (f, f^{\#})\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$, em que $f\colon X \to Y$ é um homeomorfismo de X sobre um aberto $V \subset Y$ e a restrição do morfismo $f^{\#}|_V\colon \mathscr{O}_Y|_V \to f_*\mathscr{O}_X|_V$ é um isomorfismo de feixes em Y. Numa imersão aberta, dizemos que $(X, \mathscr{O}_X)$ pode ser identificado com um subesquema aberto $(V, \mathscr{O}_Y|_V)$ de Y.

De maneira similar, é possível definir também uma estrutura de subesquema fechado em um esquema X.

Definição 1.4.4 Seja Y um esquema em que, sob o ponto de vista topológico, Y seja um subespaço fechado de X, ou que Y seja homeomorfo a um fechado de X por meio de um morfismo $i = (\widetilde{i}, i^{\#})$ entre Y e X tal que a aplicação induzida $i^{\#}\colon \mathscr{O}_X \to \widetilde{i}_*\mathscr{O}_Y$ seja um homomorfismo sobrejetivo de feixes. Então o par (Y, i) é dito um subesquema fechado de X. Um morfismo de esquemas $f\colon W \to X$ é dito uma imersão fechada se pode ser fatorado como $f = i \circ \theta$, onde θ é um isomorfismo $\theta\colon W \to Y$. Assim, i é de fato uma imersão fechada.

Observação 1.12 *:* Observe que um subesquema fechado não é determinado unicamente pelo espaço Y. Deve-se levar em consideração também o morfismo de feixes i. No caso em que para dois pares (Y, i) e (Y', i'), existir um isomorfismo $\theta\colon Y' \to Y$ tal que $i' = i \circ \theta$, diremos que (Y, i) e (Y', i') determinam o mesmo subesquema fechado em X.

Exemplo 1.13 : Estrutura de subesquema fechado nos fechados $V(I)$

Seja R um anel comutativo e $V(I)$ o fechado de Spec R obtido a partir de um ideal I de R. Então, temos uma correspondência natural entre os elementos de $V(I)$ e os elementos de Spec R/I, sendo seus espaços homeomorfos. Pela **proposição 1.2.1***, O homomorfismo canônico $R \to R/I$ induz um morfismo de esquemas $f\colon Y =$ Spec $R/I \to X =$ Spec R. E, assim, a aplicação f induz um homeomorfismo entre Spec R/I e o subespaço $V(I)$ de X. Para verificarmos que f é um morfismo sobrejetivo, resta verificarmos que a aplicação $\mathscr{O}_{X,p} \to (f_*\mathscr{O}_Y)_p$ dos talos em um ponto arbitrário p de Spec R é sobrejetiva. Mas, sabemos que os talos $\mathscr{O}_{X,p}$ e $(f_*\mathscr{O}_Y)_p$ em um determinado ponto p podem ser vistos como localizações dos anéis R e R/I respectivamente, no ponto p. Mais precisamente, temos o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{X,p} & \xrightarrow{f_p^{\#}} & (f_*\mathscr{O}_Y)_p \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ R_p & \xrightarrow[sobre]{} & (R/I)_p \end{array}$$

donde, podemos concluir que a aplicação nos talos é sobrejetiva. Portanto, (Y, f) é um subesquema fechado de X. Além disso, f é uma imersão fechada.

Observação 1.13 *:* Mesmo que tenhamos $V(I) = V(J)$ se $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(J)$, não é garantido que Spec R/I seja isomorfo a Spec R/J como esquemas, a menos que seja $I = J$. Como consequência disso, é possível definir diferentes estruturas de subesquema em $V(I)$. Por exemplo, considere o anel polinomial $k[x]$ sobre um corpo k, e o homomorfismo canônico $k[x] \to k[x]/(x^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ junto com a imersão fechada induzida Spec $k[x]/(x^n) \to$ Spec $k[x]$. Note que Spec $k[x]/(x^n)$ consiste de um único ponto cuja imagem pela imersão é a origem da reta afim $\mathbb{A}_k^1 =$ Spec $k[x]$.

Dado um subesquema fechado Y de X, podemos definir a partir de Y o objeto chamado feixe ideal de Y.

Definição 1.4.5 Seja (Y, i) um subesquema fechado de um esquema X. Define-se o feixe ideal de Y denotado por $\mathscr{I}_Y$, como sendo o feixe Ker $i^{\#}$ do morfismo $i^{\#}\colon \mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y$.

Antes de encerrar esta seção, veremos um resultado que será util para a definição de divisores de Weil, por isso vamos destacá-lo. Observamos que pode-se mostrar que um esquema inteiro é necessariamente reduzido e irredutível.

Proposição 1.4.2 *Seja q o ponto genérico de um esquema inteiro X. O anel local $\mathscr{O}_{X,q}$ é um corpo, e para um aberto afim $U =$ Spec A, o corpo quociente de A, $Q(A)$, é isomorfo ao corpo $\mathscr{O}_{X,q}$.*

Prova Por hipótese X é irredutível. Daí, Dois abertos afins quaisquer $U =$ Spec A e $V =$ Spec B sempre se intersectam. Como consequência, o ponto genérico q pertence a U e a V. Sendo X inteiro, então A é um domínio de integridade, e seu ponto genérico é o ideal (0), de modo que $q = (0)$. Logo, o talo $\mathscr{O}_{X,q} \simeq A_{(0)} = Q(A)$. $\square$

Nesse contexto, o anel local $\mathscr{O}_{X,q}$ é dito o corpo de funções $k(X)$ de X.

1.4.3 Colagem de Esquemas

Dada uma coleção de esquemas satisfazendo condições apropriadas, iremos determinar um novo esquema a partir de uma "colagem"desses esquemas. Nas construções a seguir, iremos trabalhar simplesmente com uma família de espaços anelados.

Proposição 1.4.3 *Seja $\{Y_\lambda, \lambda \in \wedge\}$ uma família de espaços anelados e para cada $\lambda \in \wedge$, seja $\{Y_{\lambda\mu}, \mu \in \wedge\}$ uma família de abertos de Y_λ. Suponha que para cada par de índices $\lambda, \mu \in \wedge$ exista um isomorfismo $\zeta_{\mu\lambda} : Y_{\lambda\mu} \to Y_{\mu\lambda}$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. $Y_{\mu\mu} = Y_\mu$ *e* $\zeta_{\mu\mu} = Id_{Y_\mu}$
2. $\zeta_{\lambda\mu} \circ \zeta_{\mu\lambda} = Id_{Y_{\lambda\mu}}$
3. $\zeta_{\mu\lambda}(Y_{\lambda\mu} \cap Y_{\lambda\gamma}) = Y_{\mu\lambda} \cap Y_{\mu\gamma}$ *e* $\zeta_{\gamma\mu} \circ \zeta_{\mu\lambda} = \zeta_{\gamma\lambda}$ *em* $Y_{\lambda\mu} \cap Y_{\lambda\gamma}$

Nestas condições, existe um espaço anelado X munido de uma cobertura aberta $\{X_\lambda, \lambda \in \wedge\}$ para a qual existem isomorfismos $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, tais que

$$\zeta_{\mu\lambda} = f_\mu \circ f_\lambda^{-1}{}_{|Y_{\lambda\mu}}.$$

Prova: Inicialmente, destacamos que

$$\zeta_{\gamma\mu} \circ \zeta_{\mu\lambda}(Y_{\lambda\mu} \cap Y_{\lambda\gamma}) = \zeta_{\gamma\mu}(Y_{\mu\lambda} \cap Y_{\mu\gamma}) = Y_{\gamma\lambda} \cap Y_{\gamma\mu} = \zeta_{\gamma\lambda}(Y_{\lambda\mu} \cap Y_{\lambda\gamma}).$$

Portanto, a hipótese $\zeta_{\gamma\mu} \circ \zeta_{\mu\lambda} = \zeta_{\gamma\lambda}$ em $Y_{\lambda\mu} \cap Y_{\lambda\gamma}$ é consistente, já que a igualdade acima nos diz que essas funções restritas a $Y_{\lambda\mu} \cap Y_{\lambda\gamma}$ tem o mesmo conjunto imagem, a saber, $Y_{\gamma\lambda} \cap Y_{\gamma\mu}$.
Para continuar, considere $\widetilde{X} = \coprod_{\lambda \in \wedge} Y_\lambda$, união disjunta, munido da topologia

$$\Omega = \{V \subset \widetilde{X}; V \cap Y_\lambda \text{ é aberto em } Y_\lambda, \forall \lambda \in \wedge\}.$$

Agora, definimos a relação que para cada par de elementos $x, y \in \widetilde{X}$, com $x \in Y_\lambda$ e $y \in Y_\mu$, estabelece que

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in Y_{\lambda\mu}, y \in Y_{\mu\lambda} \text{ e } y = \zeta_{\mu\lambda}(x).$$

Claramente essa relação é reflexiva e simétrica. Verifiquemos a transitividade. Para isso, sejam $x, y, z \in \widetilde{X}$, com $x \in Y_\lambda$, $y \in Y_\mu$ e $z \in Y_\gamma$, tais que $y \sim x$ e $z \sim y$. Dessa forma, temos que $x \in Y_{\lambda\mu}$, $y \in Y_{\mu\lambda} \cap Y_{\mu\gamma}$, $z \in Y_{\gamma\mu}$ e valem as seguintes igualdades:

$$y = \zeta_{\mu\lambda}(x) \text{ e } z = \zeta_{\gamma\mu}(y).$$

Logo, $z = \zeta_{\gamma\mu} \circ \zeta_{\mu\lambda}(x)$.

Por outro lado, temos que $x = \zeta_{\lambda\mu}(y)$, de onde segue que

$$x \in \zeta_{\lambda\mu}(Y_{\mu\lambda} \cap Y_{\mu\gamma}) = Y_{\lambda\mu} \cap Y_{\lambda\gamma}.$$

Daí, pela hipótese 3 estabelecida sobre a família $\{\zeta_{\mu\lambda}\}$, $z = \zeta_{\gamma\mu} \circ \zeta_{\mu\lambda}(x) = \zeta_{\gamma\lambda}(x)$. Isso prova que $z \sim x$.

O espaço X é definido como o espaço quociente de $\widetilde{X}$ pela relação de equivalência descrita acima. Consideramos X com a topologia quociente, de modo que a projeção canônica $p : \widetilde{X} \to X$ é contínua. Para cada $\lambda \in \wedge$ temos também uma aplicação $p_\lambda : Y_\lambda \to X$, obtida pela composição da inclusão de Y_λ em $\widetilde{X}$ com a projeção canônica, ou seja, $p_\lambda = p_{|Y_\lambda}$. Temos que $U \subset X$ é aberto se e somente se $p_\lambda^{-1}(U)$ é aberto de Y_λ para todo $\lambda \in \wedge$. Além disso, é fácil ver que p_λ é injetiva, de forma que p_λ é um homeomorfismo de Y_λ sobre $X_\lambda := p_\lambda(Y_\lambda) \subset X$. Obviamente, $\{X_\lambda,\ \lambda \in \wedge\}$ é uma cobertura aberta de X. Definimos $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, por $f_\lambda = p_\lambda^{-1}$. Daí, como para todo $x \in Y_{\lambda\mu}$ temos que $\zeta_{\mu\lambda}(x) \sim x$, segue das definições que vale a igualdade $p_\mu \circ \zeta_{\mu\lambda}(x) = p_\lambda(x)$. Portanto,

$$f_\mu \circ f_\lambda^{-1}{}_{|Y_{\lambda\mu}} = p_\mu^{-1} \circ p_{\lambda|Y_{\lambda\mu}} = \zeta_{\mu\lambda},$$

Agora vamos definir o feixe estrutural $\mathscr{O}_X$ de modo que $(X_\lambda, \mathscr{O}_{X_\lambda})$ seja isomorfo a $(Y_\lambda, \mathscr{O}_{Y_\lambda})$, com $\mathscr{O}_{X_\lambda} := (\mathscr{O}_X)_{|X_\lambda}$. Bem, já sabemos que para construir um feixe sobre um espaço topológico é suficiente defini-lo para os abertos de uma base de sua topologia. Assim, consideremos

$$\Omega^* = \{U \subset X; U \text{ é aberto e } U \subset X_\lambda, \text{ para algum } \lambda \in \wedge\}.$$

Certamente, Ω^* é uma base para a topologia de X. Dado $U \in \Omega^*$, escolhemos $\lambda \in \wedge$ tal que $U \subset X_\lambda$ e definimos:

$$\mathscr{O}_X(U) := \mathscr{O}_{Y_\lambda}(p_\lambda^{-1}(U)).$$

Devemos verificar que essa é uma boa definição, no sentido que não depende da escolha feita. De fato, se $\mu \in \wedge$ é tal que $U \subset X_\mu$, então, como $\zeta_{\mu\lambda} : Y_{\lambda\mu} \to Y_{\mu\lambda}$ é um isomorfismo de espaços anelados, temos um isomorfismo de feixes $\zeta_{\mu\lambda}^{\#} : \mathscr{O}_{Y_{\mu\lambda}} \to (\zeta_{\mu\lambda})_* \mathscr{O}_{Y_{\lambda\mu}}$. Em particular, sobre o aberto $p_\mu^{-1}(U)$ temos o seguinte isomorfismo de anéis

$$(\zeta_{\mu\lambda}^{\#})_{p_\mu^{-1}(U)} : \mathscr{O}_{Y_{\mu\lambda}}(p_\mu^{-1}(U)) \to \mathscr{O}_{Y_{\lambda\mu}}(\zeta_{\mu\lambda}^{-1}(p_\mu^{-1}(U))) = \mathscr{O}_{Y_{\lambda\mu}}(p_\lambda^{-1}(U)).$$

Como $\mathscr{O}_{Y_{\lambda\mu}} = \mathscr{O}_{Y_\lambda|Y_{\lambda\mu}}$ e $\mathscr{O}_{Y_{\mu\lambda}} = \mathscr{O}_{Y_\mu|Y_{\mu\lambda}}$, o que temos na linha acima é um isomorfismo entre $\mathscr{O}_{Y_\mu}(p_\mu^{-1}(U))$ e $\mathscr{O}_{Y_\lambda}(p_\lambda^{-1}(U))$. Isso prova a não ambiguidade da definição. Dados

$V \subset U \subset X_\lambda$, o morfismo de restrição é dado por

$$\rho^X_{VU} := \rho^{Y_\lambda}_{p_\lambda^{-1}(V)p_\lambda^{-1}(U)}.$$

A verificação dos axiomas de feixe para os abertos de Ω^* é trivial. Verificaremos apenas o mais importante. Seja $U \in \Omega^*$ e seja $\{V_\alpha \in \Omega^*, \alpha \in \mathscr{I}\}$ uma cobertura de U. Suponha que tenhamos seções $s_\alpha \in \mathscr{O}_X(V_\alpha) = \mathscr{O}_{Y_\lambda}(p_\lambda^{-1}(V_\alpha))$ tais que

$$s_{\alpha|_{V_{\alpha\beta}}} = s_{\beta|_{V_{\alpha\beta}}}, \text{ para todo } V_{\alpha\beta} \in \Omega^* \text{ com } V_{\alpha\beta} \subset V_\alpha \cap V_\beta.$$

Escolha $\lambda \in \wedge$ tal que $U \subset X_\lambda$. Como os abertos $V_{\alpha\beta}$ cobrem $V_\alpha \cap V_\beta$ temos que $p_\lambda^{-1}(V_{\alpha\beta})$ constitui uma cobertura para $p_\lambda^{-1}(V_\alpha) \cap p_\lambda^{-1}(V_\beta)$. As seções s_α e s_β coincidem nos abertos dessa cobertura. Isso nos permite concluir que

$$s_{\alpha}|_{p_\lambda^{-1}(V_\alpha)\cap p_\lambda^{-1}(V_\beta)} = s_{\beta}|_{p_\lambda^{-1}(V_\alpha)\cap p_\lambda^{-1}(V_\beta)}.$$

Portanto, existe uma única seção $s \in \mathscr{O}_{Y_\lambda}(p_\lambda^{-1}(U)) = \mathscr{O}_X(U)$, tal que $s_{|V_\alpha} = s_\alpha$.
Por fim, note que, pela definição, temos $\mathscr{O}_{X_\lambda} := (\mathscr{O}_X)_{|X_\lambda} = (p_\lambda)_*\mathscr{O}_{Y_\lambda}$. Dessa forma, segue que $(p_\lambda, id_{\mathscr{O}_{X_\lambda}}) : (Y_\lambda, \mathscr{O}_{Y_\lambda}) \to (X_\lambda, \mathscr{O}_{X_\lambda})$ é um isomorfismo cujo inverso é dado por $(f_\lambda, id_{\mathscr{O}_{Y_\lambda}}) : (X_\lambda, \mathscr{O}_{X_\lambda}) \to (Y_\lambda, \mathscr{O}_{Y_\lambda})$. Pela naturalidade desses isomorfismos fica claro que se os Y_λ forem esquemas, então X também o será.

Exemplo 1.14 Sejam $Y_1 = \text{Spec } K[X]$ e $Y_2 = \text{Spec } K[Y]$ duas cópias da reta afim $\mathbb{A}^1_K$, sobre o corpo K. Sabemos que os feixes estruturais são dados por $\mathscr{O}_{Y_1} = \widetilde{K[X]}$ e $\mathscr{O}_{Y_2} = \widetilde{K[Y]}$ (Definiremos o feixe $\widetilde{M}$ na seção seguinte). Agora sejam $U \subset Y_1$ e $V \subset Y_2$ os abertos principais $\mathcal{D}(X)$ e $\mathcal{D}(Y)$, respectivamente. Assim,

$$\mathscr{O}_{Y_1}(U) = R[X]_X \simeq K[X, \frac{1}{X}] \text{ e } \mathscr{O}_{Y_2}(V) = K[Y]_Y \simeq R[Y, \frac{1}{Y}].$$

Portanto, como U e V são afins, para exibir um isomorfismo $\zeta_{VU} : U \to V$ é suficiente exibir um isomorfismo $\varphi_{XY} : K[Y, \frac{1}{Y}] \to K[X, \frac{1}{X}]$. Para definir um tal isomorfismo, basta definirmos $\varphi_{XY}(Y)$. Temos duas possibilidades:

1. $\varphi_{XY}(Y) = X$. Nesse caso, temos $\varphi_{XY}(\frac{1}{Y}) = \frac{1}{X}$ e o isomorfismo φ_{XY} é induzido pelo isomorfismo $\varphi : K[Y] \to K[X], Y \mapsto X$. Note que ${}^a\varphi : Y_1 \to Y_2$ é simplesmente uma mudança de coordenadas e $\zeta_{VU} ={}^a\varphi_{|U}$. Dessa forma,a colagem de Y_1 com Y_2 ao longo de U e V por meio de ζ_{VU} é feita colando um ponto de U com sua cópia (ele mesmo, com outras coordenadas) em V. O esquema obtido, é representado como uma reta com duas origens.

——————— : ———————

Figura 1.

2. $\varphi_{XY}(Y) = \frac{1}{X}$. Nesse caso o esquema obtido pela colagem de Y_1 com Y_2 ao longo de U e V por meio de ζ_{VU} é chamado de reta projetiva e denotado por $\mathbb{P}^1_K$.

1.5 O feixe associado a um módulo

Vamos definir um feixe de módulos $\widetilde{M}$ em Spec A associado a um A-módulo M. Lembramos que para cada ideal primo $p \subset A$, a notação M_p indica e localização de M em p.

Definição 1.5.1 Seja A um anel e M um A-módulo. Definimos o feixe $\widetilde{M}$ em Spec A da seguinte maneira. Para cada aberto $U \subset$ Spec A, defina $\widetilde{M}(U)$ como sendo o A-módulo das funções $s\colon U \to \coprod_{p \in U} M_p$ satisfazendo a condição:

- cada $p \in U$ possui uma vizinhança $V_p \subset U$, para a qual existem elementos $m \in M$ e $f \in A$, tais que $f \notin q$ e $s(q) = m/f$ em M_q, para todo $q \in V_p$.

Observe que da definição, temos que $s(p) \in M_p$.
O resultado a seguir desvenda a estrutura do feixe $\widetilde{M}$, sua demonstração segue os mesmo passos trilhados na construção do feixe $\mathscr{O}_{specA}$, veja a **seção 1.4.1**.

Proposição 1.5.1 *Seja A um anel e M um A-módulo. Seja $\widetilde{M}$ o feixe em $X =$ Spec A associado a M. Então:*

1. *$\widetilde{M}$ é um $\mathscr{O}_X$-módulo*

2. *Para cada $p \in X$, o talo $(\widetilde{M})_p$ do feixe $\widetilde{M}$ no ponto p é isomorfo a M_p*

3. *Para cada $f \in A$, o A_f-módulo $\widetilde{M}(D(f))$ é isomorfo a M_f. Em particular, $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$*

A proposição a seguir exibe algumas propriedades do feixe associado.

Proposição 1.5.2 *Seja A, B anéis, $Y =$ Spec A e $X =$ Spec B. Seja também $\varphi\colon A \to B$ um homomorfismo de anéis e $f = (f, f^{\#})\colon$ (Spec $B, \mathscr{O}_{SpecB}) \to$ (Spec $A, \mathscr{O}_{SpecA})$, o morfismo induzido de seus espectros. Então:*

1. *Existe um functor exato,completo e fiel entre as categorias dos A-módulos e a categoria dos $\mathscr{O}_X$-módulos que associa $M \mapsto \widetilde{M}$*

2. *Para M, N A-módulos, temos $(\widetilde{M \otimes_A N}) \simeq \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \widetilde{N}$*

3. *Se $\{M_i\}$ é uma família de A-módulos, então $(\widetilde{\bigoplus M_i}) \simeq \bigoplus \widetilde{(M_i)}$*

4. *Para qualquer B-módulo N, temos $f_*(\widetilde{N}) \simeq \widetilde{N_A}$, em que N_A significa N visto como um A-módulo*

5. *Para qualquer A-módulo M, temos $f^*(\widetilde{M}) \simeq (M \otimes_A B)\tilde{}$*

Prova Provaremos aqui somente os itens 4 e 5.

4. Seja $\mathscr{F} = \widetilde{N}$ o $\mathscr{O}_X$-módulo determinado pelo B-módulo N. Então fixando elementos $h \in A$ e $g = \varphi(h) \in B$, a imagem inversa de um aberto $U = D(h)$ de Y sob f é um aberto $f^{-1}(U) = D(g)$. O homomorfismo

$$f^{\#} \colon \mathscr{O}_Y(U) \to f_*\mathscr{O}_X(U) = \mathscr{O}_X(f^{-1}(U))$$

é precisamente o homomorfismo de anéis $\varphi_h \colon A_h \to B_g$. Denotando por N_A, o B-módulo N visto como um A-módulo por meio de φ, então N_g pode ser visto como um A_h-módulo, que podemos denotar como $(N_g)_{A_h}$. É fácil ver que $(N_g)_{A_h}$ coincide com $(N_A)_h$. Portanto, como $D(h)$ é um aberto básico arbitrário de Y, segue que $f_*\mathscr{F} = f_*\widetilde{N} \simeq \widetilde{N_A}$.

5. O B-módulo $M \otimes_A B$ pode ser visto como A-módulo via homomorfismo φ., que denotamos como $(M \otimes_A B)_A$. Podemos estabelecer um homomorfismo natural $h \colon M \to M \otimes_A B$, $m \mapsto m \otimes 1$, que pode ser visto como um homomorfismo de A-módulos $M \to (M \otimes_A B)_A$. Em seguida, h induz um homomorfismo de $\mathscr{O}_Y$-módulos

$$\widetilde{h} \colon \widetilde{M} \to (\widetilde{M \otimes_A B})_A.$$

Como consequência do item anterior, temos que $f_*(\widetilde{M \otimes_A B}) = (\widetilde{M \otimes_A B})_A$, de modo que $\widetilde{h}$ pode ser escrito como

$$\widetilde{h} \colon \widetilde{M} \to f_*(\widetilde{M \otimes_A B}).$$

Mostramos anteriormente que para feixes $\mathscr{G}$ sobre Y e $\mathscr{F}$ sobre X, temos $Mor_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \simeq Mor_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$, Veja **proposição 1.1.2**. Por meio desse isomorfismo, e denotando $\widetilde{M}$ por $\mathscr{F}$, podemos obter a partir de $\widetilde{h}$, um homomorfismo de $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulos

$$h' \colon f^{-1}\widetilde{M} \to \widetilde{M \otimes_A B}.$$

E sendo $\widetilde{M \otimes_A B}$ um $\mathscr{O}_X$-módulo, h' naturalmente induz um homomorfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\theta\colon f^*\mathscr{F} = f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X \longrightarrow \widetilde{M \otimes_A B}.$$

Por fim, provaremos que θ é um isomorfismo. Com efeito, veremos que θ é um isomorfismo nos talos de cada ponto de X. Seja p um ideal primo de B, e $q = \varphi^{-1}(p)$. Então $f(p) = q$ e utilizando o fato de que

$$(f^*\mathscr{G})_p = (f^{-1}\mathscr{G})_p \otimes_{(f^{-1}\mathscr{O}_Y)_p} \mathscr{O}_{X,p} = \mathscr{G}_{f(p)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,f(p)}} \mathscr{O}_{X,p} \text{ , } p \in X \tag{1.1}$$

segue que

$$(f^*\mathscr{F})_p = \mathscr{F}_q \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \mathscr{O}_{X,p} = M_q \otimes_{A_q} B_p = (M \otimes_A B)_p..$$

Como para um A-módulo M, $\widetilde{M}_p = M_p$, concluímos que $(f^*\mathscr{F})_p = (M \otimes_A B)_p = (\widetilde{M \otimes_A B})_p$. Portanto, θ_p é um isomorfismo e com isso θ será um isomorfismo, donde advém o resultado. $\square$

1.6 Feixes quasi-coerentes

Um feixe quasi-coerente será um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos que localmente tem a forma de uma feixe associado $\widetilde{M}$. Mais precisamente

Definição 1.6.1 Seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um esquema. Um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F}$ é quasi-coerente se existe uma cobertura para X composta por abertos afins tais que para cada i, existe uma A_i-módulo M_i, tal que $\mathscr{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$. $\mathscr{F}$ será dito um feixe coerente se além disso, cada M_i puder ser tomado como um A_i-módulo finitamente gerado.

Proposição 1.6.1 *Seja $\mathscr{F}$ um feixe quasi-coerente sobre $X = Spec\ A$ um esquema afim. Então existe uma cobertura finita de abertos $D(g_i)$, $g_i \in A$, tal que para cada i,$\mathscr{F}_{|_{D(g_i)}} \simeq \widetilde{M_i}$, M_i um A_{g_i}-módulo.*

Prova Com efeito, como $\mathscr{F}$ é quasi-coerente, podemos obter uma cobertura de X com abertos afins $V_j = \text{Spec } B_j$ de X, tais que $\mathscr{F}_{|_{V_j}} \simeq \widetilde{M_j}$, para algum B_j-módulo M_j. Como os abertos da forma $D(g)$, $g \in A$ formam uma base para X, então podemos obter uma cobertura $D(g_i)$, $g_i \in A$ para cada V_j. Como uma inclusão $D(g_i) \subset V_j$ induz um homomorfismo de anéis $B_j \to A_{g_i}$, obtemos, então, que $\mathscr{F}|_{D(g_i)} \simeq (M_j \otimes_{B_j} A_{g_i})^{\sim}$ pela **proposição 1.5.2, item 5**.

Além disso, como X é quasi-compacto, é possível obter uma subcobertura finita dessa cobertura.

□

Proposição 1.6.2 *Sejam $X = Spec\ A$ um esquema afim, $f \in A$ e $D(f) \subset X$ seu aberto correspondente.Seja $\mathscr{F}$ um feixe quasi-coerente sobre X. Então temos que*

1. *Se $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ é uma seção global de $\mathscr{F}$, tal que sua restrição a $D(f)$ é 0, então para algum $n > 0$, $f^n s = 0$*

2. *Dada uma seção $t \in \mathscr{F}(D(f))$, então para algum $n > 0$, $f^n t$ se estende a uma seção global $w \in \mathscr{F}(X)$*

Prova Provemos o item (1).
Suponha $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ com $s_{|_{D(f)}} = 0$. Restringindo, então, s a $D(g_i)$, obtemos $s_i \in \Gamma(D(g_i), \mathscr{F})$, com $\mathscr{F}_{|_{D(g_i)}} \simeq \widetilde{M_i}$, para um certo A_{g_i}-módulo M_i, como acabamos de verificar. Pela **proposição 1.5.1, item 3**, temos $s_i \in \Gamma(D(g_i), \mathscr{F}_{|_{D(g_i)}}) = M_i$. Como $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$, então temos $\mathscr{F}_{|_{D(fg_i)}} = (\mathscr{F}_{|_{D(g_i)}})_{|_{D(fg_i)}}$ e por sua vez, novamente pela **proposição 1.5.1, item 3**, $(\mathscr{F}_{|_{D(g_i)}})_{|_{D(fg_i)}} \simeq \widetilde{(M_i)_{fg_i}} = \widetilde{(M_i)_f}$, tendo em vista que $(M_i)_{fg_i} = (M_i)_f$, pois M_i é um A_{g_i}-módulo. Com isso, como $s_{|_{D(f)}} = 0$, então $s_{|_{D(fg_i)}} = 0 = s_{i_{|_{D(fg_i)}}}$, donde concluímos que $s_i = 0$ em $(M_i)_f$. Pela definição de localização, para algum $n_i > 0$, $f^{n_i} s_i = 0$ em $D(g_i)$. Como podemos tomar uma cobertura finita por abertos $D(g_i)$ para X pela **proposição 1.6.1**, basta tomar n como sendo o maior dos n_i, e como consequência da definição de feixe, as seções colam de modo a obter uma seção $f^n s = 0$ em $\Gamma(X, \mathscr{F})$.
Provemos o item (2).

Dado $t \in \mathscr{F}(D(f))$, restringindo t a $D(fg_i)$, para cada i, obtemos um elemento $t \in \mathscr{F}(D(fg_i)) = (M_i)_f$. Pela definição de localização, para algum $n_i > 0$, existe um elemento $t_i \in M_i = \mathscr{F}(D(g_i))$, o qual se restringe a $f^{n_i} t \in \mathscr{F}(D(fg_i))$. Novamente, tomando n como sendo o máximo dos n_i, temos que cada t_i se restringe a $f^n t \in \mathscr{F}(D(fg_i))$. Agora, sejam t_i, t_j seções pertencentes a $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i g_j)$. Observe que $t_{i_{|_{D(fg_ig_j)}}} = t_{j_{|_{D(fg_ig_j)}}} = f^n t$, donde $t_i - t_j = 0$ em $D(fg_ig_j)$. Pela parte (1), fazendo $X = D(g_ig_j)$, existe $m_{ij} > 0$ tal que $f^{m_{ij}}(t_i - t_j) = 0$ em $D(g_ig_j)$. Tomando m como sendo o maior dos m_{ij}, segue que $f^m(t_i - t_j) = 0$ em $D(g_ig_j)$ para quaisquer i, j.

Agora, considere as seções $f^m t_i \in \mathscr{F}(D(g_i))$. Realizando a colagem dessas seções, obtemos uma seção global s de $\mathscr{F}$. Além disso, $s_{|_{D(f)}} = f^{n+m} t$. Com efeito, os abertos

$D(fg_i)$ formam uma cobertura para $D(f)$, e como $t_{i_{|D(fg_i)}} = f^n t \in D(fg_i)$, a colagem dos t_i determina uma seção $f^n t \in \mathscr{F}(D(f))$. Com isso, para cada i, $s_{|D(fg_i)} = (f^m t_i)_{|D(fg_i)} = f^{n+m}t$. Logo, $s_{|D(f)} = f^{n+m}t$. $\square$

Provaremos a seguir um lema e em seguida uma caracterização para feixes quasi-coerentes.

Lema 1.3 *Seja X =Spec A um esquema afim. Para qualquer A-módulo M, e qualquer feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F}$, existe um isomorfismo natural*

$$Hom_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F})) \cong Hom_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \mathscr{F}).$$

Prova Seja $f\colon \widetilde{M} \to \mathscr{F} \in Hom_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}, \mathscr{F})$. Associe a esse elemento o homomorfismo obtido de f entre suas seções globais $f(X)\colon \widetilde{M}(X) = M \to \mathscr{F}(X) = \Gamma(X, \mathscr{F})$. Por sua vez, se tivermos $g\colon M \to \Gamma(X, \mathscr{F})$, basta definir para cada aberto básico $\mathcal{D}(h)$ o homomorfismo $\widetilde{g}|_{\mathcal{D}(h)}\colon \widetilde{M}_h \to \mathscr{F}(\mathcal{D}(h))$, com $\frac{m}{h^s} \to \frac{g(m)}{h^s}$. Temos $\widetilde{g}(X) = f$. Em virtude da construção, essa aplicação é naturalmente uma bijeção, e portanto segue o resultado. $\square$

Proposição 1.6.3 *Seja X um esquema e $\mathscr{F}$ um $\mathscr{O}_X$-módulo. $\mathscr{F}$ é quasi-coerente se, e somente se, para cada aberto afim U = Spec A de X, existir um A-módulo M tal que $\mathscr{F}|_U \simeq \widetilde{M}$. Se X for um espaço noetheriano, então $\mathscr{F}$ é coerente se, e somente se, a mesma condição for válida e além disso M for um A-módulo finitamente gerado.*

Prova Mostraremos somente a primeira equivalência da proposição. Seja $\mathscr{F}$ um feixe quasi-coerente sobre X, e seja U = Spec A um aberto afim. Pelo **lema 1.6.1**, existe uma base para a topologia consistindo de abertos afins para os quais a restrição de $\mathscr{F}$ a cada um eles é um feixe associado a um certo módulo. Com isso, vemos que $\mathscr{F}|_U$ é quasi-coerente. Para provarmos o enunciado da proposição, basta provarmos que para um aberto afim U qualquer, vale $\mathscr{F}|_U \simeq \widetilde{M}$. Supondo $X = U$, então sendo $M = \Gamma(X, \mathscr{F})$, obtemos do **lema 1.3**, uma aplicação $\alpha\colon \widetilde{M} \to \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ é quasi-coerente, X pode ser coberto por abertos $\mathcal{D}(g_i)$ com $\mathscr{F}|_{\mathcal{D}(g_i)} \cong \widetilde{M}_i$ para algum A_{g_i}-módulo M_i. Novamente **lema 1.6.1** nos garante que $\mathscr{F}(\mathcal{D}(g_i)) \cong M_{g_i}$ e portanto $M_i = M_{g_i}$. Logo, a aplicação $\alpha|_{\mathcal{D}_{g_i}}$ é um isomorfismo e portanto α é um isomorfismo, $\mathscr{F} \cong \widetilde{M}$.
$\square$

Proposição 1.6.4 *Seja X um esquema afim, e seja $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ uma sequência exata de $\mathscr{O}_X$-módulos, e assuma que $\mathscr{F}'$ é quasi-coerente. Então, a sequência $0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}') \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}'') \to 0$ é uma sequência exata.*

Prova Precisamos mostrar apenas que a aplicação $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}'')$ é uma aplicação sobrejetiva, pois Γ é um funtor exato à esquerda. Para isso, seja $s \in \Gamma(X, \mathscr{F}'')$. Pela sobrejetividade de $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$, dado $x \in X$ existe uma vizinhança $D(f)$ de x tal que $s|_{D(f)}$ levanta à seção $t \in \mathscr{F}(D(f))$ através de α, ou seja, $\alpha(t) = s|_{D(f)}$. Provaremos em seguida a seguinte afirmação: para algum $n > 0$, $f^n s$ levanta à uma seção global de $\mathscr{F}$. De fato, podemos cobrir X com um número finito de abertos $D(g_i)$, tais que para cada i, $s|_{D(g_i)}$ levanta a uma seção $t_i \in \mathscr{F}(D(g_i))$. Sobre o aberto $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$, temos duas seções $t, t_i \in \mathscr{F}(D(g_i))$ ambas seções levantadas de s. Portanto, $t - t_i \in \mathscr{F}'(D(fg_i))$. Como $\mathscr{F}'$ é quasi-coerente, pela **proposição 1.6.2, item 2**, para algum $n_i > 0$, $f^{n_i}(t - t_i)$ se estende a uma seção $u_i \in \mathscr{F}'(D(g_i))$. Escolhendo n como sendo o maior desses n_i satisfazendo tal condição, e tomando $t_i' = f^n t_i + u_i$, segue t_i é levantamento de $(f^n s)$ sobre $D(g_i)$, ou seja, $\alpha_{D(g_i)}(t_i) = f^n s|_{D(g_i)}$. Além disso,$t_i'$ e $f^n t$ coincidem em $D(fg_i)$. Agora, sobre $D(g_i g_j)$, temos duas seções t_i' e t_j' de $\mathscr{F}$, ambas levantando $f^n s$, de modo que $t_i' - t_j' \in \mathscr{F}'(D(g_i g_j))$. t_i',t_j' são iguais em $D(fg_i g_j)$, e como consequência da **proposição 1.6.1, item 1**, temos $f^m(t_i' - t_j') = 0$ para algum $m > 0$, o qual podemos escolher independentemente de i e j. Agora, as seções $f^m t_i'$ de $\mathscr{F}$ colam para nos dar uma seção global de t'' de $\mathscr{F}$ sobre X, que é um levantamento de $f^{n+m}s$ atrávés de α, o que prova a afirmação.

Para concluir a prova, agora cubra X com um número finito de abertos $D(f_i)$, $i = 1, \ldots, r$ tais que $s|_{D(f_i)}$ levanta a uma seção s_i de $\mathscr{F}$ sobre $D(f_i)$ para cada i. Então, pela afirmação que acabamos de verificar, podemos encontrar um inteiro n e seções globais $t_i \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ em que cada t_i é um levantamento de $f_i^n s$. Como os abertos $D(f_i)$ cobrem X, então o ideal $(f_1^n, \ldots, f_r^n)$ é o ideal $(1) = A$, de maneira que podemos escrever $\sum_{i=1}^r a_i f_i^n = 1$, $a_i \in A$. Seja então $t = \sum a_i t_i$. t é uma seção global de $\mathscr{F}$ tal que $\alpha(t) = \sum a_i f_i^n s = s \in \Gamma(X, \mathscr{F}'')$.Isto encerra a prova. $\square$

Proposição 1.6.5 *Seja X um esquema e $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ um morfismo de feixes quasi-coerentes sobre X. Os feixes Ker_φ, $Coker_\varphi^+$, e Im_φ^+ são feixes quasi-coerentes.*

Prova Pela **proposição 1.6.3**, podemos supor X afim. Para $M = \Gamma(X, \mathscr{F})$ e $N = \Gamma(X, \mathscr{G})$ e utilizando **proposição 1.5.2, item 1** que diz que temos um funtor $M \to \widetilde{M}$ da categoria dos A-módulos para a categoria dos feixes quasi-coerentes, segue o resultado. $\square$

Proposição 1.6.6

1. Seja U =Spec A um aberto afim de X. A imagem inversa $i^{-1}(U)$ de uma imersão

fechada $i\colon Y \to X$ quando não-vazia é um aberto afim de Y.
2. Se $f\colon X \to Y = Spec\ R$ é um morfismo separável, então dados abertos $U, V \subset X$, $U \cap V$ quando não-vazio também é um aberto afim em X (Veremos mais adiante na **seção 2.2***,página 65, a noção de morfismo separável e morfismo diagonal).*

Prova 1. Pela definição de imersão fechada, temos que $i^{\#}\colon \mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y$ é um morfismo sobrejetivo. Seja $\mathscr{I} = \text{Ker } i^{\#}$. $\mathscr{I}$ é o feixe ideal de $\mathscr{O}_X$. Com isso, temos que para cada aberto de X, e em particular U, $(i_*\mathscr{O}_Y)|_U$ é isomorfo ao feixe $(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})|_U$. Sendo $A = \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ e $I = \Gamma(U, \mathscr{I})$, naturalmente $(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})|_U \simeq \widetilde{A/I}$ e daí $i^{-1}(U)$ é isomorfo a Spec A/I e portanto é afim.
2. Como f é um morfismo separável, então o morfismo diagonal $\Delta_{X/Y}\colon X \to X \times_Y X$ (Veremos o conceito do produto fibrado $X \times_Y X$ adiante na **seção 2.1**, página 60) é uma imersão fechada. Seja $U =$ Spec A e $V =$Spec B. Então os morfismos $f|_U$,$f|_V$ são morfismos de esquemas afins determinados pelos homomorfismos $g_1\colon R \to A$ e $g_2\colon R \to B$. Com isso, obtemos que $U \times_Y V =$ Spec $A \times_R B$ é um aberto afim de $X \times_Y X$ e como $U \cap V = \Delta_{X/Y}^{-1}(U \times_Y V)$, pelo item 1 desta proposição, concluímos que $U \cap V$ é um aberto afim. $\square$

Proposição 1.6.7 *Dado $f\colon X \to Y$ um morfismo de esquemas. Para um feixe $\mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_Y$-módulos quasi-coerente, $f^*\mathscr{G}$ é um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos quasi-coerente. Além disso, se X e Y forem esquemas noetherianos, então $f^*\mathscr{G}$ é coerente.*

Prova Fixado $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, escolha abertos afins $U =$ Spec A de x e $V =$ Spec B de $f(x)$ de modo que $f(U) \subset V$. $f|_U$ então é o morfismo induzido pelo homomorfismo de anéis $\varphi\colon B \to A$. Como $\mathscr{G}$ é um feixe quasi-coerente, através do funtor $M \to \widetilde{M}$, temos que $\mathscr{G}|_V$ é isomorfo ao $\mathscr{O}_X$-módulo determinado pelo feixe associado ao B-módulo $M = \Gamma(V, \mathscr{G})$. Agora, aplicando a **proposição 1.5.2, item 5** podemos concluir que

$$f^*\mathscr{G}|_U = \widetilde{M \otimes_B} A$$

e assim, $f^*\mathscr{G}|_U$ é um $\mathscr{O}_U$-módulo quasi-coerente. Portanto, como $x \in X$ é arbitrário $f^*\mathscr{G}$ é um feixe quasi-coerente. Para a segunda parte da proposição, a prova segue de modo semelhante acrescentado do fato que por serem X,Y esquemas noetherianos, então A e B podem ser escolhidos como anéis noetherianos. Além disso, o B-módulo $M = \Gamma(V, \mathscr{G})$ finitamente gerado, devido a **proposição 1.6.3**. Como consequência, $M \otimes_B A$

é um A-módulo finitamente gerado, e a conclusão é semelhante ao caso anterior, $f^*\mathscr{G}$ é coerente. $\square$

Proposição 1.6.8 *Suponha que ou X é noetheriano, ou $f\colon X \to Y$ é um morfismo quasi-compacto e separável. Então se $\mathscr{F}$ é um feixe quasi-coerente de $\mathscr{O}_X$-módulos, $f_*\mathscr{F}$ será um feixe quasi-coerente de $\mathscr{O}_Y$-módulos.*

Prova Novamente, para provar que o feixe é quasi-coerente, basta provar esse fato numa vizinhança de um ponto qualquer de Y. Portanto, assuma Y como sendo um esquema afim. Além disso, como f é quasi-compacto, então podemos assumir X como tal. A questão é local apenas em Y, de forma que podemos supor apenas Y afim. Então X é quasi-compacto sob qualquer das duas hipóteses. Assim, podemos cobrir X com uma cobertura finita de abertos afins U_i. Agora, no caso em que f é morfismo separável e quasi-compacto, $U_i \cap U_j = U_{ijk}$ é afim pela **proposicao 1.6.6**. No caso noetheriano, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ é pelo menos um aberto quasi-compacto, de modo que podemos cobrí-lo com um número finito de abertos afins U_{ijk}. Agora, para qualquer aberto $V \subset Y$, devido às propriedades de feixes, dar uma seção $s \in \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ é equivalente a dar uma coleção de seções $\{s_i\}$ de $\mathscr{F}$ sobre $f^{-1}(V) \cap U_i$ cujas restrições aos abertos $f^{-1}(V) \cap U_{ijk}$ coincidem com as restrições de s. Assim, construa a seguinte sequência de feixes sobre Y

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \xrightarrow{\quad\varphi\quad} \bigoplus_{i\in I} f_*(\mathscr{F}_{|U_i}) \xrightarrow{\ \phi\ } \bigoplus_{i,j,k} f_*(\mathscr{F}_{|U_{ijk}}) \quad ,$$

em que com um pequeno abuso de notação, denotaremos por f os morfismos induzidos $U_i \to Y$ e $U_{ijk} \to Y$. φ é determinada pelo morfismo de restrição $\rho_{U_i \cap f^{-1}(V), f^{-1}(V)}$ e com isso, o feixe Ker φ é naturalmente nulo. A aplicação ϕ é induzida pelas aplicações $f_*(\mathscr{F}_{|U_i}) \to f_*(\mathscr{F}_{|U_{ijk}})$, $i \in I$, determinada pelo morfismo de restrição $\rho_{U_{ijk}\cap f^{-1}(V), U_i \cap f^{-1}(V)}$ e $f_*(\mathscr{F}_{|U_i}) \to f_*(\mathscr{F}_{|U_{jik}})$ determinada por $-\rho_{U_{jik}\cap f^{-1}(V), U_i \cap f^{-1}(V)}$. Definida assim, observe que Ker ϕ é o feixe $\bigoplus_{i\in I} f_*(\mathscr{F}_{|U_i})$. Portanto a sequência acima construída é exata.
Agora, pela **proposição 1.5.2 , item 4**, aplicada aos morfismos de esquemas afins $f|_{U_i}$,$f|_{U_{ijk}}$, temos que a imagem direta de feixes quasi-coerentes é um feixe quasi-coerente. Assim $f_*(\mathscr{F}_{|U_i})$ e $f_*(\mathscr{F}_{|U_{ijk}})$ são quasi-coerentes e então $\bigoplus_{i\in I} f_*(\mathscr{F}_{|U_i})$ e $\bigoplus_{i,j,k} f_*(\mathscr{F}_{|U_{ijk}})$ são quasi-coerentes. Finalmente, o núcleo de um morfismo de feixes quasi-coerente é quasi-coerente (**proposição 1.6.5**), e como temos $f_*\mathscr{F} \cong$ Ker ϕ, segue que $f_*\mathscr{F}$ é quasi-coerente. $\square$

Proposição 1.6.9 *Seja X um esquema. Para qualquer subesquema fechado Y de X, o feixe ideal correspondente $\mathscr{I}_Y$ é um feixe de ideais quasi-coerente sobre X. Se X é noetheriano, então $\mathscr{I}_Y$ é coerente. Reciprocamente, qualquer feixe de ideais quasi-coerente de X é o feixe de ideais de um subesquema fechado unicamente determinado de X.*

Prova Se Y é um subesquema fechado de X, então o morfismo de inclusão $i\colon Y \to X$ é quasi-compacto e separável (imersões fechadas são morfismos separáveis, veja **seção 2.2**, página 65). Assim, caímos na hipótese da proposição anterior **1.6.8**, que nos diz que $i_*\mathscr{O}_Y$ é quasi-coerente sobre X. Então $\mathscr{I}_Y$, sendo por definição o núcleo do morfismo $i^\#\colon \mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y$ de feixes quasi-coerentes, é também quasi-coerente. Se X é noetheriano, então para qualquer aberto afim $U = \text{Spec } A \subset X$, o anel A é noetheriano, e portanto o ideal $I = \Gamma(U, \mathscr{I}_{Y_{|U}})$, é um ideal finitamente gerado, donde $\mathscr{I}_Y$ é coerente.
Reciprocamente, seja $\mathscr{I}$ um feixe de ideais quasi-coerente sobre um esquema X, e seja Y o suporte do feixe quociente $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$

$$supp(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}) = \{x \in X | (\mathscr{O}_X/\mathscr{I})_x \neq 0\}.$$

Mostremos que Y é de fato um subespaço fechado de X.
Com efeito, considere uma cobertura afim $\{U_j = \text{Spec } A_j\}$,$\{j \in I\}$ de X e seja $I_j = \Gamma(U_j, \mathscr{I})$. Então I_j é um ideal do anel comutativo A_j e $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}|_{U_j} \simeq \widetilde{A_j/I_j}$. Observe que se $p \in \text{Spec } A_j$ é tal que $p \not\supset I_j$, então um elemento de $A_{j,p}$ pode ser escrito como um quociente de um elemento de I_j por um elemento não contido em p, ou seja, $A_{j,p} = I_{j,p}$, donde $(A_j/I_j)_p = 0$. Portanto, $(A_j/I_j)_p \neq 0$ se, e somente se, $p \supset I_j$, o que nos permite concluir que

$$supp(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}) \cap U_j = V(I_j) \subset Spec A_j.$$

Então Y é um subspaço de X, e $(Y, \mathscr{O}_X/\mathscr{I})$ é de fato o único subesquema fechado de X cujo feixe de ideais é $\mathscr{I}$. A unicidade é natural, pois se $(Z, \mathscr{O}_Z)$ for um subesquema fechado cujo feixe ideal é $\mathscr{I}$, então pela definição de subesquema fechado, $i^\#\colon \mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Z$ é sobrejetivo, donde

$$i_*\mathscr{O}_Z \cong \mathscr{O}_X/\text{ Ker } i^\# = \mathscr{O}_X/\mathscr{I} \cong i_*\mathscr{O}_Y.$$

Provemos então que $(Y, \mathscr{O}_X/\mathscr{I})$ é de fato um subesquema fechado. Podemos assumir de antemão que X é afim. Seja , então, $X = \text{Spec } A$. Como $\mathscr{I}$ é quasi-coerente, $\mathscr{I} = \widetilde{J}$, para algum ideal $J \subset A$. Assim, pelo **exemplo 1.13**, $(Y, \mathscr{O}_X/\mathscr{I})$ é o subesquema determinado pelo ideal J. □

1.7 Feixes invertíveis

Seja $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ feixes de grupos aditivos sobre X. Para $U \subset X$, definimos $(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})(U) := \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U)$. $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ assim determinado será um feixe, denominado feixe imagem direta de $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$. De maneira similar, dada uma coleção finita de feixes $\{\mathscr{F}_i\}$, teremos o feixe $\bigoplus \mathscr{F}_i$. Denotaremos por $\mathscr{O}_X^{\oplus n}$ o feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos $\underbrace{\mathscr{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_X}_{n}$.

Definição 1.7.1 Um $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ é um dito um feixe livre de posto n quando $\mathscr{F}$ é isomorfo a $\mathscr{O}_X^{\oplus n}$. $\mathscr{F}$ é dito localmente livre de posto n se existir uma cobertura $\{U_i\}$ de abertos de X tal que $\mathscr{F}|_{U_i}$ é um feixe livre de posto n sobre $\mathscr{O}_X|_{U_i}$. Ao feixe localmente livre de posto 1 dá-se o nome de feixe invertível sobre X.

Exemplo 1.15 *Sejam $\mathscr{F}$,$\mathscr{G}$ feixes de $\mathscr{O}_X$-módulos. Considere então a aplicação que associa a cada aberto U de X um homomorfismo*

$$U \longmapsto Hom_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U).$$

Tal aplicação estabelece um feixe $\underline{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ de $\mathscr{O}_X$-módulos. Com efeito, verifiquemos que as condições necessárias para $\underline{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ ser um feixe são satisfeitas.
Para isso, defina para cada aberto U, $\mathscr{H}(U) = Hom_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$. Os morfismos de restrição serão simplesmente as restrições naturais de um morfismo de feixes $\mathscr{H}(U) \mapsto \mathscr{H}(V)$, o que torna $\mathscr{H}$ um pré-feixe. Agora seja $\{U_i\}$ uma cobertura para U e $\varphi \in \mathscr{H}(U)$, tais que $\varphi_i = \rho_{U_i,U}(\varphi) = 0$. Desejamos mostrar que $\varphi = 0$.
Como $\varphi_i = 0$, então temos que para todo aberto U_i, e $s \in \mathscr{F}(U)$, vale $\varphi_i(\rho^{\mathscr{F}}_{U_i,U}(s)) = 0$.
Sendo φ um homomorfismo de $\mathscr{F}(U)$ e $\mathscr{G}(U)$, e as aplicações de restrição compatíveis com os homomorfismos de $\mathscr{F}(V)$ e $\mathscr{G}(V)$, para $V \subset U$, então

$$\varphi_i(\rho^{\mathscr{F}}_{U_i,U}(s)) = 0 = \rho^{\mathscr{G}}_{U_i,U}(\varphi(s)).$$

Como $\mathscr{G}$ é feixe, e $\varphi(s)|_{U_i} = 0$ para cada aberto U_i, então $\varphi(s) = 0$, para todo $s \in \mathscr{F}(U)$ e, portanto, $\varphi = 0$.

Agora, dada uma coleção de elementos $\{\varphi_i\}$,$\varphi_i \in \mathscr{H}(U_i)$,$\{U_i\}$ cobertura de um aberto U, satisfazendo $\rho_{U_{ij},U_i}(\varphi_i) = \rho_{U_{ij},U_j}(\varphi_j)$, com $U_{ij} = U_i \cap U_j$, queremos mostrar que existe $\varphi \in \mathscr{H}(U)$ com $\rho_{U_i,U}(\varphi) = \varphi_i$ para cada U_i da cobertura.
Assim, dado $s \in \mathscr{F}(U)$, vamos determinar $\varphi(s) \in \mathscr{G}(U)$. Seja $t_i = \varphi_i(\rho^{\mathscr{F}}_{U_i,U}(s)) \in \mathscr{G}(U_i)$. Temos

$$\rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij},U_i}(t_i) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij},U_i}(\varphi_i(\rho^{\mathscr{G}}_{U_i,U}(s))) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij},U_i}\rho^{\mathscr{G}}_{U_i,U}(\varphi(s)) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij},U}(\varphi(s)) =$$

$$\rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij},U_j}\rho^{\mathscr{G}}_{U_j,U}(\varphi(s)) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij},U_j}\varphi_j(\rho^{\mathscr{G}}_{U_j,U}(s)) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij},U_j}(t_j).$$

Como $\mathscr{G}$ é um feixe, segue que existe $t \in \mathscr{G}(U)$, tal que $\rho^{\mathscr{G}}_{U_i,U}(t) = t_i$, para cada i. Definindo $\varphi(s) = t$, temos $\rho^{\mathscr{G}}_{U_i,U}(\varphi)(s) = \varphi_i$, para cada U_i da cobertura e assim $\mathscr{H} = Hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ satifaz as duas condições da definição de feixes.

Proposição 1.7.1 *Seja $\mathscr{F}$ um $\mathscr{O}_X$-módulo sobre X e $U \subset X$ aberto. Então*

$$Hom_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{O}_X|_U, \mathscr{F}|_U) \simeq \mathscr{F}(U).$$

Prova Dado $\varphi \in Hom_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{O}_X|_U,\mathscr{F}|_U)$, considere o elemento $\varphi(1_U) \in \mathscr{F}(U)$. Denote $\varphi(1_U)$ por a. Observe que para um aberto $V \subset U$, $\varphi_V(1_V) = \varphi_V(\rho_{V,U}(1_U)) = \rho_{V,U}(\varphi_U(1_U)) = \rho_{V,U}(a)$ e dado uma seção $s \in \mathscr{O}_X(V)$, $\varphi_V(s) = s\varphi_V(1_V) = s \cdot \rho_{V,U}(a)$. Dessa maneira, a uma seção qualquer $t \in \mathscr{F}(U)$ iremos associar o morfismo φ_t definido para cada aberto $V \subset U$ como $(\varphi_t)|_V(s) = s\cdot\rho_{V,U}(t)$. É fácil ver que as aplicações definidas são inversas uma da outra e portanto temos um isomorfismo. $\square$

Proposição 1.7.2 (Grupo de Picard) *Seja G o conjunto dos feixes invertíveis sobre um espaço anelado X munido de uma relação que identifica feixes isomorfos. Denotaremos um elemento $\overline{\mathscr{F}}$ de G simplesmente por $\mathscr{F}$. Considere agora em G uma operação que associa a $\mathscr{F}$,$\mathscr{G} \in G$, o elemento $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$. $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ é um feixe invertível e G construído dessa maneira é um grupo. Este grupo é chamado o grupo de Picard de X, denotado por Pic X.*

Prova Inicialmente, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ é um feixe invertível, pois $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são ambos localmente livres de posto 1 e assim existem coberturas $\{U_i\}$,$\{V_j\}$ tais que $\mathscr{F}|_{U_i} \simeq \mathscr{O}_X$ e $\mathscr{G}|_{V_j} \simeq \mathscr{O}_X$. Tomando interseções dois a dois de tais abertos obtemos uma cobertura $\{W_{ij}\}$ tal que $(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G})|_{W_{ij}} \simeq \mathscr{O}_X \otimes \mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_X$. Dessa forma o conjunto G é fechado para a operação $\otimes$. E observe que $\mathscr{O}_X$ é o elemento neutro de G, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X \simeq \mathscr{F}$. o inverso de $\mathscr{F}$ será o feixe dual $\mathscr{F}^{-1} = \underline{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$. De fato, vejamos que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^{-1} \simeq \mathscr{O}_X$, ou seja, $\overline{\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^{-1}} = \overline{\mathscr{O}_X}$.

Considere o morfismo

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^{-1} &\longrightarrow \mathscr{O}_X \\ a \otimes f &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

Considere novamente a cobertura $\{U_i\}$. Para um aberto afim qualquer U, então $\mathscr{F}|_{U \cap U_i} \simeq \mathscr{O}_U$. Para simplificar diremos que $\mathscr{F}|_U \simeq \mathscr{O}_U$. Além disso,

$$\mathscr{F}^{-1}|_U = Hom_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{O}_U) \simeq Hom_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{O}_U, \mathscr{O}_U).$$

E pelo resultado anterior, $Hom_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{O}_U, \mathscr{O}_U) \simeq \mathscr{O}_U$.
Com isso, concluímos que φ_U é um isomorfismo. Consequentemente φ é um isomorfismo e portanto G é um grupo. $\square$

Proposição 1.7.3 *Seja X um esquema noetheriano, e $\mathscr{F}$ um feixe coerente sobre X. Então $\mathscr{F}$ é um feixe localmente livre se, e somente se, os talos $\mathscr{F}_x$ são $\mathscr{O}_{X,x}$-módulos livres para cada ponto $x \in X$.*

Prova Inicialmente, iremos verificar a seguinte afirmação: Se o talo $\mathscr{F}_x$ é um $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo para algum ponto $x \in X$, então existe uma vizinhança U do ponto x tal que $\mathscr{F}_U$ é livre. De fato, podemos considerar X como sendo o aberto afim Spec A, e sendo $\mathscr{F}$ coerente, então $\mathscr{F} \cong \widetilde{M}$, M um A-módulo finitamente gerado por elementos $m_1, \ldots, m_n$. Assim, para algum $p \in$ Spec A, $\mathscr{F}_x \cong \widetilde{M_p}$. Como por hipótese, M_p é livre, então $M_p \cong \sum_{i=1}^n A_p x_i$. Os elementos x_i podem ser considerados como seções em algum aberto principal $D(s)$, e a imagem de um elemento m_i em M_p é um elemento m_i'

$$m_i' = \frac{a_{i,1}}{t_{i,1}} x_1 + \ldots + \frac{a_{i,n}}{t_{i,n}} x_n,$$

com $t_{i,j} \notin p$. Apesar dos elementos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ formarem um conjunto linearmente independente em $D(s)$, não é possível afirmar que M_f seja um módulo livre. Entretanto tomando $t = \prod_{i,j} t_{i,j}$, e denotando por $u = st$, então claramente $M_u = \sum_{i=1}^n A_u x_i$, tendo em vista que m_i' é gerado pelas seções x_i no aberto $D(u)$. Com isso, M_u é livre e portanto, $\mathscr{F}|_{D(u)} \cong \widetilde{M_u}$ é um feixe livre.
Em seguida, observe que se $\mathscr{F}$ é um feixe localmente livre então, por definição, para cada $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ é um $\mathscr{O}_{X,x}$-módulo livre. A recíproca é garantida pela afirmação que acabamos de demonstrar, a qual fornece uma cobertura aberta tal que para cada aberto U, $\mathscr{F}_U$ é livre. $\square$

Antes de prosseguirmos, de maneira similar a qual foi definida o espectro de um anel A, é possível definir um esquema Proj S a partir de um anel graduado $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$. Definimos Proj S como sendo o conjunto dos ideais primos homogêneos p de S tais que $S_+ \not\subset p$, onde $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$. Para a definição do feixe estrutural e as demais verificações a respeito do esquema Proj S, remetemos o leitor à página 76 e 77, proposição 2.5 do livro do Hartshorne [1]. Por sua vez, se M um S-módulo graduado, também é possível definir um feixe $\widetilde{M}$ em Proj S. Para isso, lembramos que para cada $p \in$ Proj S, a notação $M_{(p)}$ indica o grupo dos elementos de grau zero na localização $T^{-1}M$, onde T é o conjunto multiplicativo formado pelo elementos homogêneos de $S - p$. Veja a seguir.

Definição 1.7.2 Seja S um anel graduado e M um S-módulo graduado. Definimos um feixe $\widetilde{M}$ a partir de M em Proj S da seguinte maneira. Para $p \in$ Proj S, considere a localização M_p de M em p. Para cada aberto $U \subset$ Proj S, defina $\widetilde{M}(U)$ como sendo o grupo das funções $s\colon U \to \coprod_{p\in U} M_{(p)}$ satisfazendo as condições

1. para cada $p \in U$, existe uma vizinhança $V \supset U$ de p e elementos $m \in M, f \in A$, homogêneos de mesmo grau, tais que para cada $q \in V$, temos $f \notin q$, e $s(q) = m/f \in M_{(q)}$

Para $f \in S+$, o conjunto $D_+(f) = \{p \in \text{Proj}S | f \notin p\}$ é um aberto de Proj S e além disso tais abertos formam uma cobertura para Proj S.

Se M é um S-módulo graduado, e $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$, então dado um inteiro k, definimos o S-módulo graduado $M(k)$ como sendo

$$M(k) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M(k)_n,\ M(k)_n = M_{n+k}.$$

Exemplo 1.16 *Seja S um anel graduado, e $X = Proj\ S$. Para $n \in \mathbb{Z}$, definamos o feixe $\mathscr{O}_X(n)$ como sendo $\widetilde{S(n)}$. $\mathscr{O}_X(n)$ é um feixe invertível sobre X. De fato, assumindo que S seja gerado pelo conjunto S_1 como uma S_0-álgebra, tome $f \in S_1$. Então $\mathscr{O}_X(n)|_{D+(f)} \simeq \widetilde{S(n)}_{(f)}$ sobre Spec $S_{(f)}$. Aqui denotamos por $S(n)_{(f)}$ os elementos de grau n em $S_{(f)}$. Verifiquemos que $\mathscr{O}_X(n)|_{D+(f)}$ é livre de posto 1. Para isso, considere a aplicação de $S_{(f)}$ em $S(n)_{(f)}$, $a/f^m \mapsto af^n/f^m$. Tal aplicação está bem-definida e é naturalmente um isomorfismo. Com isso, $S(n)_{(f)}$ é um $S_{(f)}$-módulo de posto 1. Como $f \in S_1$, X pode ser coberto por abertos $D_+(f)$ e portanto $\mathscr{O}_X(n)$ é invertível.*

Proposição 1.7.4 *Sejam M,N S-módulos graduados, $X = Proj\ S$ e S um módulo graduado gerado por S_1 como uma S_0-álgebra. Então $\widetilde{M \otimes_{\mathscr{O}_X} N} \simeq \widetilde{M} \otimes_S \widetilde{N}$.*

Prova $\{D_+(f)\}_{f\in S_1}$ forma uma cobertura de abertos básicos para X. Em cada aberto básico $D_+(f)$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} \mu_f\colon M_{(f)}\otimes_{S(f)} N_{(f)} &\longrightarrow (M\otimes_S N)_{(f)} \\ \frac{a}{f^m}\otimes\frac{b}{f^n} &\longmapsto \frac{a\otimes b}{f^{n+m}}. \end{aligned}$$

Então, se tivermos

$$\mu_f\left(\sum_i \frac{a_i}{f^{n_i}}\otimes\frac{b_i}{f^{m_i}}\right)=0,$$

com a_i, b_i pertencentes às partes M_{m_i} e N_{n_i} de M,N respectivamente, então obtemos em $(M\otimes_S N)_{(f)}$ que $\sum_i \frac{a_i\otimes b_i}{f^{m_i+n_i}}=0$ e assim existe um inteiro r tal que

$$f^r(\sum_i a_i\otimes b_i)=\sum_i (f^r a_i)\otimes b_i = 0\in M\otimes_S N.$$

Com isso, em $M_{(f)}\otimes_{S(f)} N_{(f)}$, segue que

$$\sum_i \frac{f^r a_i}{f^{n_i+r}}\otimes\frac{b_i}{f^{m_i}}=\sum_i \frac{a_i}{f^{n_i}}\otimes\frac{b_i}{f^{m_i}}=0.$$

Portanto, μ_f é injetiva. Por sua vez, dado um elemento $(a\otimes b)/f^n\in (M\otimes_S N)_{(f)}$, então $a\in S_d$ para um certo d e $b\in S_{n-d}$. Com isso,

$$\mu_f\left(\frac{a}{f^d}\otimes\frac{b}{f^{n-d}}\right)=\frac{a\otimes b}{f^n}.$$

Assim, como para cada $D_+(f)$, μ_f é um isomorfismo, então induz-se um isomorfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos sobre X, $\mu\colon M\widetilde{\otimes_{\mathscr{O}_X}} N\to \widetilde{M}\otimes_S\widetilde{N}$. $\square$

Desse resultado, com a mesma notação, temos como consequência

Corolário 1.7.1

$$\mathscr{O}_X(n)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(m)\simeq\mathscr{O}_X(n+m)$$

$$\mathscr{O}_X(-n)\simeq \underline{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X(n),\mathscr{O}_X)$$

Capítulo 2

CRITÉRIOS DE VALORAÇÃO

Neste capítulo veremos algumas propriedades relacionadas a esquemas. Apresentaremos como resultado principal o critério de valoração para morfismos separáveis e para morfismos próprios e além desse resultado, veremos que uma variedade projetiva definida sobre um certo corpo k é própria.

2.1 Produto Fibrado

Nas construções a seguir, S é um esquema e (X, α) e (Y, β) são esquemas sobre S, ou seja, X e Y são esquemas e $\alpha : X \to S$ e $\beta : Y \to S$ são morfismos. Denotaremos (X, α) e (Y, β) simplesmente por X e Y, deixando os morfismos subentendidos.

Definição 2.1.1 O produto fibrado de X e Y sobre S, é o objeto $(X \times_S Y, (p_1, p_2))$, em que $X \times_S Y$ é um esquema e $p_1 \colon X \times_S Y \to X$ e $p_2 \colon X \times_S Y \to Y$ são morfismos ditos morfismo de projeção sobre os fatores de $(X \times_S Y, (p_1, p_2))$. Esses morfismos são de tal maneira que formam um diagrama comutativo com $\alpha \colon X \to S$ e $\beta \colon Y \to S$. E, além disso, devem satisfazer a seguinte propriedade universal: Para todo objeto $(Z, (f, g))$, onde Z é um esquema sobre S, $f \colon Z \to X$, $g \colon Z \to Y$ são morfismos que formam um diagrama comutativo com α e β, então deverá existir um único morfismo de Z para $X \times_S Y$, $\theta \colon Z \to X \times_S Y$, tal que $f = p_1 \circ \theta$ e $g = p_2 \circ \theta$.

O diagrama a seguir ilustra a definição acima.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "\alpha"'] \\
& Y \arrow[r, "\beta"] & S
\end{tikzcd}$$

Antes de verificarmos a existência do produto fibrado, provemos um resultado preliminar.

Proposição 2.1.1 *Seja R um anel e $(Z, \mathscr{O}_Z)$ um esquema. Temos a seguinte bijeção*

$$\alpha\colon Hom_{esquemas}(Z, Spec\ R) \longrightarrow Hom_{anéis}(R, \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z))$$

Prova Construiremos uma aplicação $\beta\colon Hom_{\text{esquemas}}(Z, \text{Spec } R) \longrightarrow Hom_{\text{anéis}}(R, \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z))$. Seja $f = (f, \theta) \in Hom_{\text{esquemas}}(Z, \text{Spec } R)$. Então o morfismo de feixes $\theta\colon \mathscr{O}_{\text{Spec } R} \to f_*\mathscr{O}_Z$ em Spec R induz o homomorfismo de anéis

$$\varphi\colon \Gamma(SpecR, \mathscr{O}_{\text{Spec } R}) \to \Gamma(\text{Spec } R, f_*\mathscr{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z).$$

Defina $\beta(f) = \varphi$.

Agora, dado um elemento $\psi\colon R \to \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z) \in Hom_{\text{anéis}}(R, \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z))$, considere a aplicação natural $\nu_z\colon \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z) \to \mathscr{O}_{Z,z}$ que associa a uma seção seu talo em um determinado ponto z e defina ψ_z como sendo a composição $\psi_z = \nu_z \circ \psi\colon R \to \mathscr{O}_{Z,z}$. Seja m_z o ideal maximal do anel local $\mathscr{O}_{Z,z}$. Então $\psi_z^{-1}(m_z)$ é um ideal primo de R. Com isso, podemos definir uma aplicação

$$f\colon Z \longrightarrow \text{Spec } R$$

$$z \longmapsto \psi_z^{-1}(m_z).$$

f é contínua. Com efeito, fixado um aberto básico X_g, verifiquemos que $f^{-1}(X_g)$ é um aberto de Z. Sabendo que $X_g = \{p \in \text{Spec } R | g \notin R\}$, então

$$f^{-1}(X_g) = \{z \in Z | g \notin \psi_z^{-1}(m_z)\} = \{z \in Z | \psi_z(g) \notin (m_z)\}$$

$$= \{z \in Z | \psi_z(g) \text{ é invertível em } \mathscr{O}_{Z,z}\} = \{z \in Z | \psi(g)(z) = \psi(g)_z \neq 0\}.$$

Com isso, $f^{-1}(X_g)$ é aberto em Z. Agora, observe que ψ induz um homomorfismo

$$\psi_g\colon R_g \to \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)_{\psi(g)}.$$

Por sua vez, como $f^{-1}(X_g)$ é aberto, podemos considerar o morfismo de restrição $\Gamma(Z, \mathscr{O}_Z) \to \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathscr{O}_Z)$.

A propriedade universal da localização garante a existência de uma função $\rho_g\colon \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)_{\psi g} \to \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathscr{O}_Z)$ que faz o diagrama a seguir comutar.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathscr{O}_Z) \\ \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)_{\psi(g)} \arrow[ur, "\rho_g"] & \end{tikzcd}$$

Estamos interessados na composição $\theta_g = \rho_g \circ \psi_g\colon R_g \to \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathscr{O}_Z)$. Como consideramos os abertos básicos X_g, ao variar g em R, a partir de θ_g, conseguimos construir um morfismo de feixes

$$\theta\colon \mathscr{O}_{\text{Spec } R} \to f_*(\mathscr{O}_Z)$$

e portanto

$$(f, \theta)\colon (Z, \mathscr{O}_Z) \to (\text{Spec } R, \mathscr{O}_{\text{Spec } R}).$$

Defina $\beta^{-1}(\psi) = (f, \theta)$.

Finalmente β é uma bijeção, fato que segue da maneira como tal função foi construída. Não iremos verificar esses detalhes. $\square$

Proposição 2.1.2 *O produto fibrado $X \times_S Y$ existe e é único a menos de um único isomorfismo.*

Prova A idéia consiste em construir os produtos fibrados para esquemas afins e em seguida realizar uma colagem (Veja **seção 1.4.3**) de modo a obter o objeto desejado. A prova é dividida em várias etapas.

(1). Inicialmente observe que se o produto fibrado $X \times_S Y$ existir, então a propriedade universal do produto fibrado garante a existência de um único morfismo θ entre um produto fibrado Z e $X \times_S Y$. Da mesma forma, a propriedade universal aplicada em Z garantirá a existência única de um morfismo θ' entre $X \times_S Y$ e Z de modo que Z e $X \times_S Y$ serão isomorfos. Com isso, concluímos que ele será único a menos de um único isomorfismo.

(2). Sejam $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$,$S = \text{Spec } R$ afins. Sendo X,Y S-esquemas, então A e B são R-álgebras. Temos que o produto fibrado $X \times_S Y$ será exatamente Spec

$(A \otimes_R B)$. De fato, para qualquer esquema Z, dar um morfismo de Z para Spec $(A \otimes_R B)$ é o mesmo que dar um homomorfismo do anel $A \otimes_R B$ para o anel $\Gamma(Z, \mathscr{O}_Z)$, como vimos na proposição anterior, **proposição 2.1.1**.

Por sua vez, dar um homomorfismo de um anel $A \otimes_R B$ em um anel arbitrário C é equivalente a dar homomorfismos de anéis $A \to C$ e $B \to C$ induzindo o mesmo homomorfismo em R. Com isso, como consequência da **proposição 2.1.1** novamente, conclui-se que dar um morfismo de Z em Spec $(A \otimes_R B)$ é equivalente a dar morfismos de $Z \to X$ e $Z \to Y$ que dão origem ao mesmo morfismo de $Z \to S$. Portanto, na condição de X,Y e S serem afins, vale

$$X \times_S Y = \text{Spec } (A \otimes_R B).$$

(3). **Colagem de morfismos** Se X e Y são esquemas, é fácil verificar que um morfismo $f\colon X \to Y$ pode ser definido por meio de uma cobertura aberta $\{U_i\}$ para X e morfismos $f_i\colon U_i \to Y$, compatíveis nas interseções $U_i \cap U_j$. U_i aqui é visto como um subesquema aberto $(U_i, \mathscr{O}_{U_i})$.

(4). Se X,Y são esquemas sobre S, e seja $U \subset X$ aberto. Se o produto $X \times_S Y$ existir, então $p_1^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ é um produto fibrado de U e Y sobre S. Com efeito, dado um esquema Z e morfismos $f\colon Z \to U$ e $g\colon Z \to Y$ que satisfaçam as condições de um produto fibrado, então compondo f com a inclusão $U \subset X$, podemos pensar em f como uma aplicação de Z em X. Com isso, pela propriedade universal do produto fibrado, existe um morfismo único $\theta\colon Z \to X \times_S Y$.

(5). **Colagem de esquemas** Verifiquemos agora que se X,Y são esquemas sobre S e $\{X_i\}$ é uma cobertura para X tal que para cada i, $(X_i \times_S Y, (p_{i_1}, p_{i_2}))$ exista, então $X \times_S Y$ existe. De fato, para cada i, j tome U_{ij} como sendo o conjunto $p_{i_1}^{-1}(X_{ij}) \subset X_i \times_S Y$, onde $X_{ij} = X_i \cap X_j$. Pelo passo 4 logo acima, vemos que U_{ij} é um produto para X_{ij} e Y sobre S. Observe que como $U_{ji} = p_{i_1}^{-1}(X_{ji}) \subset X_j \times Y$ e $X_{ij} = X_{ji}$, então U_{ji} é também um produto para X_{ij} e Y sobre S. Pela unicidade do produto, como visto no passo 1, existirá um único isomorfismo $\zeta_{ij}\colon U_{ji} \to U_{ij}$, tal isomorfismo sendo compatível com as projeções p_{i_1},p_{i_2}. Portanto, temos uma família de esquemas $\{X_i \times_S Y\}$, e uma família de abertos $\{U_{ij}\}$ para cada $X_i \times_S Y$. Os isomorfismos ζ_{ij} naturalmente satisfazem as hipóteses 1. e 2. na **proposição 1.4.3**. E além disso, a hipótese 3. da mesma proposição **proposição 1.4.3** é satisfeita. Pois, temos que se $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$, então

$$\zeta_{ij}(U_{ji} \cap U_{jk}) = U_{ij} \cap U_{ik}$$

e em $U_{ji} \cap U_{jk}$ temos

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ki} \circ \zeta_{ij}.$$

Portanto, realizamos a colagem dos esquemas $X_i \times_S Y$ via isomorfismos ζ_{ij} para obter um esquema $X \times_S Y$. Afirmo que $X \times_S Y$ é o produto fibrado para X e Y sobre S. De fato, os morfismo de projeção p_1 e p_2 de $X \times_S Y$ são definidos por colagem das projeções de cada esquema $X_i \times_S Y$ (passo 3). Em seguida, dado um esquema Z e morfismos $f\colon Z \to X$ e $g\colon Z \to Y$, seja $Z_i = f^{-1}(X_i)$. Daí, obtemos aplicações $\theta_i\colon Z_i \to X_i \times_S Y$, as quais compondo-se com as inclusões $X_i \times_S Y \subset X \times_S Y$, nos dão aplicações $\theta_i\colon Z_i \to X \times_S Y$. É fácil ver que estas aplicações coincidem em abertos $Z_i \cap Z_j$, o que nos permite, como no passo 3, colar tais morfismos de maneira a obter um morfismo $\theta\colon Z \to X \times_S Y$ compatível com as projeções e f e g. A unicidade de θ pode ser checada localmente.

(6). Pelo passo 2, sabemos que se X,Y,S são todos afins, então $X \times_S Y$ existe. Portanto, pelo passo 5, podemos concluir que para um esquema qualquer X, e esquemas Y,S afins, o produto existe. Usando o passo 5 novamente em Y, considerando uma cobertura $\{Y_i\}$ de Y e a existência de esquemas $X \times_S Y_i$, vemos que o produto fibrado existirá para quaisquer esquemas X,Y sobre um esquema afim S.

(7). Finalmente, dados X,Y e S esquemas arbitrários, e seus esquemas sobre S, $q\colon X \to S$ e $r\colon Y \to S$. Seja S_i uma cobertura de abertos afins de S. E sejam $X_i = q^{-1}(S_i)$ e $Y_i = r^{-1}(S_i)$. Aplicando o passo 6, obtemos que o produto $X_i \times_{S_i} Y_i$ existe. Verifiquemos que este esquema é um produto para X_i e Y sobre S. Com efeito, dados morfismos $f\colon Z \to X_i$ e $g\colon Z \to Y$ sobre S, observe que a imagem de g está contida em Y_i Portanto, $X_i \times_S Y$ existe para cada i e uma aplicação do passo 5 garante a existência de $X \times_S Y$, encerrando a prova. $\square$

Exemplo 2.1 *Considere o espaço projetivo n-dimensional sobre um anel A, $\mathbb{P}^n_A = Proj$ $A[x_0, \ldots, x_n]$. Seja $A \to B$ um homomorfismo de anéis e $\varphi_1\colon$ Spec $B \to$ Spec A o seu morfismo induzido. Do homomorfismo natural $u_i\colon A \to A[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$, mediante uma colagem de morfismos correspondentes, obtemos também o morfismo $\varphi_2\colon \mathbb{P}^n_A \to$ Spec A. Assim, os Spec A-esquemas (Spec B, φ_1) e $(\mathbb{P}^n_A, \varphi_2)$ determinam o produto $\mathbb{P}^n_A \times_{SpecA}$ Spec B. Além disso, definindo $f_2\colon \mathbb{P}^n_B \to \mathbb{P}^n_A$ a partir de $A[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i] \to B[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i]$, é possível obter um diagrama comutativo $\varphi_2 \circ f_2 = \varphi_1 \circ f_1$. Como consequência da propriedade universal do produto fibrado, segue o isomorfismo $\mathbb{P}^n_B \simeq$*

$\mathbb{P}^n_A \times_{SpecA}$ *Spec B*.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n_B \arrow[dr, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& \mathbb{P}^n_A \times_{SpecA} SpecB \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & \mathbb{P}^n_A \arrow[d, "\varphi_2"'] \\
& SpecB \arrow[r, "\varphi_1"] & SpecA
\end{tikzcd}$$

Uma aplicação importante do produto fibrado é o conceito de mudança de um esquema base.

Definição 2.1.2 (Extensão de base) Sejam S,S' esquemas e $S' \to S$ um morfismo entre esses esquemas. Então se X for esquema sobre S, considere o produto $X' = X \times_S S'$, o qual será um esquema sobre S'. Dizemos que X' é uma extensão de base $S' \to S$ obtida a partir de X.

E em seguida temos a noção de morfismo universalmente fechado.

Definição 2.1.3 (Morfismo Universalmente fechado) Um morfismo $f\colon X \to Y$ é dito universalmente fechado se é fechado visto como uma aplicação entre espaços topológicos e dado qualquer morfismo $g\colon Y' \to Y$, o morfismo obtido pela extensão de base $f'\colon X' \to Y'$ também é fechado.

2.2 Morfismo diagonal

Dado um morfismo $f\colon X \to Y$ de esquemas, com base na construção do tópico anterior podemos considerar o produto fibrado $(X \times_Y X, (p_1, p_2))$, p_i o morfismo de projeção na i-ésima coordenada. Por definição de produto fibrado, existe um único morfismo $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ de maneira que $p_1 \circ \Delta_f = id_X$ e $p_2 \circ \Delta_f = id_X$. Tal morfismo Δ_f é dito o morfismo diagonal de f e como vimos é um objeto bem-definido. O diagrama a seguir serve de ilustração.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[drr, bend left, "id_X"] \arrow[ddr, bend right, "id_X"'] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "f"'] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Dizemos que um morfismo $f\colon X \to Y$ é **separável** quando o morfismo diagonal Δ_f é uma imersão fechada. f é então dito separável sobre Y. Denotaremos Δ_f simplesmente por Δ.

Observação 2.1 Observe que para um anel comutativo R, o conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, R)$ possui um único elemento f que é o homomorfismo definido como $f(n) = nf(1_{\mathbb{Z}}) = n1_R$. Assim, pela **proposição 2.1.1**, um homomorfismo de esquemas $f^{\#}\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \mathscr{O}_{SpecZ})$ é unicamente determinado por um homomorfismo de anéis $f\colon \mathbb{Z} \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Com base nessa observação, temos a seguinte definição.

Definição 2.2.1 Um esquema X é dito separável se o morfismo $f\colon X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ é separável.

A seguir, alguns resultados sobre morfismos separáveis.

Proposição 2.2.1 *Um morfismo $f\colon X \to Y$ de esquemas afins é um morfismo separável.*

Prova Seja $X = \mathrm{Spec}\,A$, $Y = \mathrm{Spec}\,B$. f é então induzido por um homomorfismo de anéis $B \to A$, e assim A é uma B-álgebra. $X \times_Y X$ é afim pois é o conjunto $\mathrm{Spec}\,A \otimes_B A$. O morfismo diagonal Δ é induzido a partir do homomorfismo de anéis $A \otimes_B A \to A$ definido por $a \otimes a' \to aa'$. Resta saber se Δ é imersão fechada. $\square$

Proposição 2.2.2 *Um morfismo $f\colon X \to Y$ entre esquemas é separável se, e somente se, a imagem do morfismo diagonal Δ é um subconjunto fechado de $X \times_Y X$.*

Prova A condição necessária é conseqüência da própria definição de morfismo separável. Agora se $\Delta(X)$ é um subconjunto fechado de $X \times_Y X$, para provar que Δ é uma imersão fechada, é preciso verificar duas condições, uma é que Δ é um homeomorfismo sobre sua imagem e a outra é que $\Delta^{\#}\colon \mathscr{O}_{X\times_Y X} \to \Delta_*\mathscr{O}_X$ é sobrejetora. De fato, pela definição de morfismo diagonal, é verdade que $p_1 \circ \Delta = id_X$ e com isso Δ é injetiva e portanto um homeomorfismo sobre sua imagem. Para concluir a sobrejetividade de $\Delta^{\#}$ basta ver que para um ponto $P \in X$, é possível escolher um aberto afim U contendo P suficientemente pequeno de modo que $f(U)$ esteja contida em um aberto afim V de Y. Então, $U \times_V U$ é uma vizinhança aberta de $\Delta(P)$. Pelo resultado anterior aplicado ao morfismo de esquemas afins $f|_U\colon U \to V$, concluímos que $\Delta_{f|_U}\colon U \to U \times_V U$ é uma imersão fechada, donde $\Delta^{\#}_{f|_U}\colon \mathscr{O}_{U\times_V U} \to \Delta_*\mathscr{O}_U$ é sobrejetiva. Como P é arbitrário, segue que $\Delta^{\#}$ é sobrejetiva nos talos donde advém o resultado. $\square$

Adicionemos mais uma definição com o propósito de definirmos um morfismo próprio. Dizemos que um morfismo $f\colon X \to Y$ é do tipo finito se é possível obter uma cobertura de Y por abertos afins $U_i = \text{Spec } A_i$ tal que cada $f^{-1}(U_i)$ pode ser coberta por uma quantidade finita de abertos afins $U_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$ com A_{ij} sendo uma A_i-álgebra finitamente gerada.
Então,

Definição 2.2.2 (Morfismo próprio) Um morfismo $f\colon X \to Y$ é dito próprio se é separável, do tipo finito e universalmente fechado.

2.3 Critério de Valoração para morfismos próprios e para morfismos separáveis

Nessa seção, apenas descreveremos os Critérios de Valoração para morfismos separáveis e o Critério de Valoração para morfismos próprios, que serão utilizados adiante. Para uma demonstração de ambos teoremas, veja [1], páginas 97-102 ou [3], páginas 63-67.

Teorema 2.1 (Critério de Valoração para morfismos próprios) *Seja $f\colon X \to Y$ um morfismo de esquemas do tipo finito e seja X um esquema noetheriano. Então f é um morfismo próprio se, e somente se, para um anel de valoração R arbitrário com corpo quociente K e dados morfismos $s_1\colon$ Spec $K \to X$ e $s\colon$ Spec $R \to Y$ que tornam o diagrama*

$$\begin{tikzcd} Spec K \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Spec R \arrow[r, "s"] \arrow[ur, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

comutativo ($f \circ s_1 = s \circ i$), existir um único morfismo $g\colon$ Spec $R \to X$ que torne o diagrama todo comutativo. No diagrama acima, $i\colon$ Spec $K \to$ Spec R é a imersão aberta induzida pela inclusão $R \subset K$.

Com a mesma notação, estabelece-se um critério semelhante para morfismos separáveis.

Teorema 2.2 : (Critério de Valoração para morfismos separáveis) *Seja $f\colon X \to Y$ um morfismo de esquemas e X um esquema noetheriano. Então f é um morfismo separável se, e somente se, dados morfismos s_1 e s que tornam o diagrama no teorema* *anterior* **2.1** *comutativo ($f \circ s_1 = s \circ i$), existir no máximo um único morfismo $g\colon$ Spec $R \to X$ que torne o diagrama inteiro comutativo.*

2.4 Morfismo Projetivo

Inialmente, dado um esquema Y, definimos o espaço projetivo sobre Y como sendo o esquema $\mathbb{P}^n_Y = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} Y$, lembrando que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. E por sua vez, um morfismo $f\colon X \to Y$ é dito projetivo se o diagrama a seguir for comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & Y \\ \mathbb{P}^n_Y \arrow[ur, "p_2"] & \end{tikzcd}$$

onde j é uma imersão fechada e p_2 é o morfismo de projeção no segundo fator.

Teorema 2.3 *Seja k um corpo. Então se $f\colon X \to$ Spec k é um morfismo projetivo, onde X é um esquema noetheriano, então f é um morfismo próprio.*

Prova Para a prova, veja em [3], exemplo 5.11, páginas 66-67 que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ é próprio sobre Spec Z. Como por hipótese, f é projetivo, então f admite uma decomposição $f = p_2 \circ j$ como visto logo acima. Pelo Corolário 4.8a, página 102 em [1], observa-se que sendo $j\colon X \to \mathbb{P}^n_k$ uma imersão fechada, então j é um morfismo próprio. Temos além disso que $i\colon$ Spec $k \to$ Spec $\mathbb{Z}$ definido de maneira natural é um morfismo próprio haja vista ser naturalmente do tipo finito, separável por ser morfismo de esquemas afins **(Proposição 2.2.1)** e dado um morfismo $Y \to$ Spec $\mathbb{Z}$, a extensão de base Spec $k \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} Y \to Y$ é um morfismo fechado e portanto i é universalmente fechado. Pelo Corolário 4.8c, página 102 em [1], morfismos próprios são estáveis sob extensão de base, ou seja, sendo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to$ Spec $\mathbb{Z}$ e Spec $k \to$ Spec $\mathbb{Z}$ próprios, então $p_2\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}$ Spec $k \to$ Spec k é morfismo próprio. Pelo Corolário 4.8b, página 102 em [1], a composição de morfismos próprios é um morfismo próprio, donde segue que $f = p_2 \circ j$ é próprio. $\square$

Capítulo 3

DIVISORES

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de divisor para esquemas inteiros e em seguida alguns resultados simples relacionados aos Divisores de Weil e de Cartier. O resultado de maior importância deste capítulo diz que sob determinada hipótese o grupo dos divisores de Weil é isomorfo ao grupo dos divisores de Cartier. Além disso, a partir de um divisor de Cartier D, determinaremos um feixe associado $\mathscr{L}(D)$.

3.1 Divisores de Weil

Inicialmente, iremos considerar um esquema bem específico. Para nossos propósitos, o esquema X logo adiante será um esquema inteiro separável noetheriano. Além disso, adicionaremos outra condição: X será regular em codimensão 1, como definido a seguir.

Definição 3.1.1 Um esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ é dito regular em codimensão 1 se todo anel local $\mathscr{O}_{X,x}$ de X de dimensão 1 for um anel regular.

Definição 3.1.2 Um divisor primo em X é um subesquema de X que é inteiro, fechado e de codimensão 1. Tais divisores primos geram um grupo abeliano livre que será denotado por Div X. Um elemento de Div X será dito um divisor de Weil sobre X. Dessa forma, podemos escrever um elemento D de Div X na forma $D = \sum n_i Y_i$, onde os n_i são inteiros, Y_i divisores primos e apenas uma quantidade finita desses n_i é diferente de zero. Se todos n_i forem inteiros não-negativos, diz-se que D é um divisor efetivo.

Nesta seção, nos referiremos a um divisor de Weil de X simplesmente como um divisor de X.

Se Y é um divisor primo de X, e λ é seu ponto genérico, isto é, $Y = \overline{\{\lambda\}}$, então $\mathscr{O}_{X,\lambda}$ é um anel local de dimensão 1 e portanto é um anel de valoração discreta (Veja **Apêndice A.4.3**) com corpo quociente K, que é isomorfo ao corpo de funções de X pela **proposição 1.4.2**. Chamamos de valoração de Y, a valoração v_Y de $\mathscr{O}_{X,\lambda}$, definida por $v_Y(x_\lambda) = 1$, onde x_λ é o gerador do ideal maximal $m_\lambda = (x_\lambda)$. A proposição a seguir garante que Y é determinado unicamente pela valoração v_Y, isto é, se Y' for um divisor primo tal que $v_{Y'} = v_Y$, então $Y' = Y$.

Proposição 3.1.1 *Seja X é um esquema inteiro do tipo finito sobre o corpo k com corpo de funções K e considere uma valoração v de K/k (Veja* **Apêndice A.3***). $x \in X$ é dito o centro de v se o anel de valoração R, de v, domina o anel local $\mathscr{O}_{X,x}$, isto é, $\mathscr{O}_{X,x} \subseteq R$ e $m_R \cap \mathscr{O}_{X,x} = m_x$. Se X é separável sobre k, então o centro, caso exista, de qualquer valoração de K/k é único.*

Prova Aplicaremos aqui o critério de valoração de separação, **teorema 2.2**. As hipóteses nos permitem montar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "s"] \arrow[ur, "g"] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

onde f é dado pela hipótese de X ser um morfismo sobre k. Como R é anel de valoração de uma valoração v sobre K/k, então $v(k) = 0$, donde $k \subset R \subset K$. Com isso, temos os homomorfismos induzidos i e s. O morfismo s_1 é obtido a partir do fato de R dominar $\mathscr{O}_{X,x}$, pois daí temos um homomorfismo local $\mathscr{O}_{X,x} \to R$, o que nos permite considerar a inclusão $k(x) \subset K$. Tal inclusão induz o morfismo Spec $K \to$ Spec $k(x) \subset X$ entre conjuntos unitários.
Com a observação de que Spec k é unitário quando k é um corpo, obviamente o diagrama acima comuta. Aplicando o critério de valoração de separação, concluímos que existe no máximo um morfismo $g\colon$ Spec $R \to X$ que torne o diagrama inteiro comutativo. Portanto, o centro de v caso exista é único. $\square$

Como X é separável, como consequência da proposição que acabamos de mostrar, uma valoração v de K tem no máximo um único centro, ou seja, domina no máximo um único anel local $\mathscr{O}_{X,x}$, $x \in X$, de maneira que a v pode corresponder apenas um divisor primo.

A seguir, para $f \in K^*$, o corpo de funções de X, define-se um divisor de f como sendo $(f) = \sum v_Y(f)Y$, com a soma variando sobre os divisores primos de X. Tal soma é finita como conferiremos a seguir e com isso (f) é de fato um divisor de X.

Proposição 3.1.2 $v_Y(f) = 0$ *exceto para uma quantidade finita de divisores primos* Y *em* X.

Prova Seja $U = \text{Spec } A$ um aberto afim de X sobre o qual f é uma função regular. Considere então o conjunto $Z = X - U$ que é um fechado próprio de X. Como, por hípótese, X é um esquema noetheriano, então como espaço topológico, X é um espaço noetheriano. Como consequência, Z contém apenas uma quantidade finita de fechados irredutíveis, e portanto, apenas um quantidade finita de divisores primos de X, de modo que os outros divisores primos de X devem intersectar U. Assim, para concluir o resultado, será suficiente verificarmos que existe uma quantidade finita de divisores primos Y contidos em U tais que $v_Y(f) \neq 0$. Como f é uma função regular sobre U, teremos $v_Y(f) \geq 0$. Observe que existe uma correspondência entre ideais primos $p \in A$ de altura 1 satisfazendo $f \in p$ e subesquemas inteiros fechados $Y = V(p)$ de codimensão 1 contidos em U. Denotando por Af o ideal gerado por f em A, teremos que os fechados Y determinados por essa correspondência satisfazerão $Y \subset V(Af)$. Portanto, $v_Y(f) > 0$ se, e somente se, $Y \subset V(Af)$. E, como $V(Af)$ é um fechado próprio de U, e utilizando novamente o fato de X ser noetheriano, segue que existirá apenas uma quantidade finita de fechados irredutíveis e de codimensão 1 contidos em V(Af), ou seja, teremos apenas uma quantidade finita de divisores primos Y com $v_Y(f) \neq 0$. $\square$

Se um divisor de X coincidir com um divisor de alguma função no corpo K^*, dizemos que esse divisor é um divisor principal. Podemos associar de maneira natural um elemento f de K^* ao elemento (f) de Div X. Como conseqüência das propriedades da função de valoração, esta correspondência é um homomorfismo de K^* para Div X, cuja imagem forma um subgrupo de Div X, constituído pelos divisores principais de Div X. Dois divisores D, D' em Div X são ditos linearmente equivalentes se $D - D'$ for um divisor principal. Estabelecendo então em Div X a relação de equivalência linear, o grupo obtido a partir de Div X quocientado pelo subgrupo dos divisores principais de X é denominado o grupo das classes de divisores de X, denotado por Cl X.

Exemplo 3.1 (Divisores de Weil em $\mathbb{A}$) *Considere a reta afim* $\mathbb{A} = Spec\ k[x]$ *sobre um corpo algebricamente fechado* k. *Um subesquema inteiro fechado em* $\mathbb{A}$ *e de codimensão 1*

é um ponto fechado. Seja $p_a \in \mathbb{A}$ o elemento correspondente ao ideal primo $(x-a)$ de $k[x]$. Então um divisor de Weil D em $\mathbb{A}$ tem a forma $\sum_{a\in k} n_a p_a$, n_a inteiro. Naturalmente, $n_a \neq 0$ apenas para um quantidade finita de pontos a de k e assim, $D = \sum_{i=1}^{N} n_i p_{a_i}$. Tome $f = \prod_{i=1}^{N}(x-a)^{n_i}$. Então, de fato $v_{p_a}(f) = n_a p_a$, e portanto teremos $D = (f)$, onde (f) é o divisor principal de f. Concluímos com esse resultado, que todo divisor de $\mathbb{A}$ é um divisor principal e portanto Cl$(\mathbb{A}) = 0$.
De maneira similar, podemos concluir que Cl$(\mathbb{A}^n) = 0$. Nesse caso um subesquema inteiro fechado de codimensão 1 em $\mathbb{A}^n$ = Spec $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tem a forma $V(F)$ onde F é polinômio irredutível de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposição 3.1.3 *Seja A um domínio noetheriano. Então A é um domínio de fatoração única se, e somente se, X = Spec A é normal e Cl $X = 0$.*

Prova É equivalente provar que Cl $X = 0$ se, e somente se, todo ideal primo de altura 1 é principal, pois é fato que todo ideal primo de altura 1 de A é principal se, e somente se, A é DFU. Além disso, A é inteiramente fechado e portanto X é normal.
Com efeito, se todo ideal primo de altura 1 é principal, então para $Y \subset X$ divisor primo, temos que Y possui codimensão 1, e corresponde a um ideal primo p de altura 1, de maneira que $Y = V(p)$ e $p = (f)$. Então, o divisor de f se escreve como $1 \cdot Y$ e portanto todo divisor primo é principal, ou seja, o grupo quociente Cl $X = 0$.

Provemos agora a recíproca. Suponha Cl $X = 0$. Seja p um ideal de altura 1 de Spec A e $Y = V(p)$ o divisor primo correspondente. Como Cl $X = 0$, então Y é um divisor principal donde existe $f \in K$ tal que $(f) = Y$. K isomorfo ao corpo quociente de A (**proposição 1.4.2**). Verifiquemos em seguida que $f \in A$ e f gera o ideal p. Como $v_Y(f) = 1$, então $f \in \mathscr{O}_{X,p} \simeq A_p$ e f gera o ideal maximal de A_p, pA_p . Se p' é outro ideal primo de A de altura 1, então temos um divisor primo correspondente Y' de X e por ser $(f) = Y$, será $v_{Y'}(f) = 0$, donde $f \in A_{p'}$. Com isso, fica verificado que $f \in A_p$, para todo p ideal de A de altura 1. Aplicando (**Apêndice A.4.4**), concluímos que $f \in A$. Além disso, $f \in A \cap pA_p = p$. Resta agora mostrarmos que p é gerado por f. Com efeito, seja g um elemento de p. Então, $g \in pA_p$, donde $v_Y(g) \geq 1$. Para qualquer outro Y' primo, $v_{Y'}(g) \geq 0$, donde $v_{Y'}(g/f) \geq 0$ para todos os divisores primos Y' de X inclusive Y. Portanto, $g/f \in A_{p'}$ para todos os ideais primos p' de altura 1. Aplicando novamente (**Apêndice A.4.4**), segue que $g/f \in A$, ou seja $g \in Af$. $\square$

Proposição 3.1.4 *Para qualquer divisor $D = \sum n_i Y_i$ do espaço projetivo $\mathbb{P}^n_k$ sobre um* *corpo k, defina o grau de D como sendo deg $D = \sum n_i$ deg Y_i, onde deg Y_i é o grau da hipersuperfície Y_i. Sendo H o hiperplano $x_0 = 0$, $D \sim$ (deg $D) \cdot H$.*

Prova Se D é um divisor de grau d, podemos escrevê-lo como uma diferença de dois divisores $D_1 - D_2$, ambos efetivos de grau d_1 e d_2, $d_1 - d_2 = d$. Observe que uma hipersuperfície irredutível em $\mathbb{P}_k^n$ é uma variedade projetiva de dimensão $n-1$ e portanto corresponde a um ideal primo homogêneo de altura 1 no anel de coordenadas homogêneas $k[x_1, \ldots, x_n]$ de $\mathbb{P}_k^n$. Sendo $k[x_1, \ldots, x_n]$ noetheriano e DFU, um ideal de altura 1 é principal. Assim, se D_j é efetivo, $D_j = \sum n_i Y_i$, $n_i \geq 0$. Tome $h = h_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot h_r^{n_r}$, onde (h_i) é o ideal primo correspondente a Y_i. É fácil ver que $(h) = \sum v_{Y_i}(h) Y_i = \sum n_i Y_i = D_j$, e portanto D_j é principal. Daí,

$$D - dH = D_1 - D_2 - dH = (g_1) - (g_2) - d(x_0) = (g_1/x_0^d g_2) = (f).$$

Concluímos que $D \sim dH$.

$\square$

3.2 Divisores de Cartier

Tendo definido o conceito de divisor sobre um esquema inteiro, deseja-se estender o conceito de divisor a um esquema geral. Inicialmente definiremos o conceito de anel de frações totais de um anel A.

Definição 3.2.1 Seja X um esquema. Para cada aberto afim $U = \operatorname{Spec} A$, considere o conjunto $Z(A)$ dos elementos de A que não são divisores de zero, e defina $Q(A)$ como sendo a localização do anel A com respeito ao sistema multiplicativo determinado por $Z(A)$. $Q(A)$ é denominado o anel de frações totais de A. Agora, para cada aberto U, defina $K(U)$ como sendo $Q(\Gamma(U, \mathscr{O}_X))$. K_X assim definido constitui um pré-feixe de X. O feixe associado a esse pré-feixe $K_X^+ = \mathscr{K}$, denomina-se o feixe de anéis de frações totais de $\mathscr{O}_X$.

Observe que se A for um domínio, então $S = A \setminus \{0\}$ e seu anel de frações totais será exatamente o corpo de frações de A. Enquanto, que se $Z(A)$ for não-vazio, então $Q(A)$ não será corpo. Sobre um esquema arbitrário, o feixe $\mathscr{K}$ terá papel conceituamente similar ao do corpo de funções de um esquema inteiro. Denote por $\mathscr{K}^*$ o feixe obtido a partir de $\mathscr{K}$, tal que para cada aberto U, $\mathscr{K}^*(U)$ é o grupo abeliano munido com uma operação de multiplicação sobre os elementos invertíveis de $\mathscr{K}(U)$. Do mesmo modo, é definido o subfeixe $\mathscr{O}_X^*$. Vendo $\mathscr{O}_X^*$ como um subfeixe de $\mathscr{K}^*$, podemos considerar o feixe quociente $\mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*$. A partir dele estabelecemos o conceito de divisor de Cartier sobre um esquema X a seguir.

Definição 3.2.2 Defina um divisor de Cartier D sobre um esquema X como sendo uma seção global do feixe quociente $\mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*$. Mais precisamente, utilizando a definição de feixe e as propriedades de feixes quocientes, um divisor de Cartier D sobre X pode ser descrito através de uma coleção $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$, onde $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta afim de X satisfazendo $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e f_i uma seção de $\Gamma(U_i, \mathscr{K}^*)$, tal que para $i, j \in I$, $f_i|_{U_i\cap U_j} = g_{ij} f_j|_{U_i\cap U_j}$, $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathscr{O}_X^*)$.

Apresentaremos a seguir mais uma noção que será necessária adiante.

Definição 3.2.3 Um esquema noetheriano X é dito localmente fatorial se para todo $x \in X$, o anel local $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única.

Com essa hipótese adicional, os divisores de Weil e de Cartier são os "mesmos", mais precisamente os seus respectivos grupos são isomorfos como veremos no teorema a seguir.

Teorema 3.1 *Seja X um esquema inteiro separável noetheriano e localmente fatorial. Então existe um isomorfismo φ do grupo Div X dos divisores de Weil sobre X para o grupo dos divisores de Cartier $\Gamma(\mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*)$ sobre X. A imagem do subgrupo dos divisores principais de Weil sob este isomorfismo é dita o conjunto dos divisores principais de Cartier.*

Prova Sendo X localmente fatorial, então todo anel local de X é um domínio de fatoração única e, portanto, inteiramente fechado. Assim, X é normal. Como conseqüência de **apêndice A.4.3**, X é regular de codimensão 1. Note que sendo X inteiro, $\Gamma(X, \mathscr{K}^*)$ é o corpo $k(X)^*$ das funções racionais não-nulas. Inicialmente, dado um divisor de Cartier $\mathscr{D}$, desejamos associá-lo a um divisor de Weil de X. Então seja $\{(f_j, U_j)\}$ com $f_j \in \Gamma(U_j, (K)^*) = k(X)^*$ a representação de $\mathscr{D}$. Então, para um divisor primo Y tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, podemos estabelecer $v_Y(f_i)$. Note que se tivermos para um outro índice j,$Y \cap U_j \neq \emptyset$, então $f_i = g_{ij} f_j$, com $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathscr{O}_X^*)$. Assim, f_i/f_j é invertível em $U_i \cap U_j$,donde $v_Y(f_i/f_j) = 0$ e portanto $v_Y(f_i) = v_Y(f_j)$. Defina então $v(\mathscr{D})$ como sendo esse inteiro $v_Y(f_i)$. Feito isso, agora podemos estabelecer uma correspondência $\mathscr{D} \to \sum_Y v_Y(\mathscr{D})Y$. Tal aplicação está bem-definida, haja vista que sendo X noetheriano,

apenas uma quantidade finita de divisores primos Y satisfazerá $v_Y(\mathscr{D}) \neq 0$. Essa correspondência é naturalmente um homomorfismo de grupos abelianos. Verificaremos em seguida que tal aplicação é de fato um isomorfismo.
Se $\sum_Y v_Y(\mathscr{D})Y = 0$, então isso significa que os coeficientes são nulos, ou seja, para qualquer divisor primo Y, e para qualquer índice $i \in I$, $v_Y(f_i) = 0$, o que nos leva a concluir que cada $f_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X^*)$, ou seja, $\mathscr{D} = \{(U_i, f_i)\}$ é o elemento neutro do grupo $\Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathscr{O}_X^*)$. Com isso, concluímos a injetividade.

Para a sobrejetividade, dado $D \in \text{Div } X$, exibiremos o divisor de Cartier correspondente a D. Para isso, dado $x \in X$, o divisor D determina um divisor D_x em Spec $\mathscr{O}_{X,x}$, que é obtido tomando-se o talo no ponto x de cada divisor primo que constitui D. Utilizando a hipótese de X ser localmente fatorial, concluímos que $\mathscr{O}_{X,x}$ é um DFU. Como consequência da **proposição 3.1.3**, $V =$ Spec $\mathscr{O}_{X,x}$ é normal e Cl $V = 0$, ou seja, todo divisor de Weil de Spec $\mathscr{O}_{X,x}$ é um divisor principal. Daí, $D_x = (f_x)$, para algum $f_x \in K$. Assim, (f_x) sobre X e D tem a mesma restrição a Spec $\mathscr{O}_{X,x}$, de modo que diferem somente em divisores primos que não passam por x. Existem apenas uma quantidade finita destes divisores que possuem coeficientes não-nulos seja em (f_x) seja em D, portanto existe um aberto U_x de x tal que D e (f_x) tem a mesma restrição a U_x. Os abertos U_x formarão a cobertura desejada. Temos $\{(f_x, U_x)\}$ um divisor de Cartier sobre X. Tal associação é bem-definida, pois caso f,f' determinem o mesmo divisor de Weil sobre um aberto U, então $f/f' \in \Gamma(U, \mathscr{O}^*)$.

Tal correspondência é naturalmente um isomorfismo entre os grupos abelianos dos divisores de Weil sobre um aberto U, e seus divisores principais se correspondem. $\square$

3.3 O Feixe associado a um divisor

Fixado um divisor de Cartier D sobre um esquema X e representado por $\{U_i, f_i\}$ da maneira como foi apresentado na seção anterior, podemos construir a partir de D um subfeixe $\mathscr{L}(D)$ do feixe de anéis de frações totais $\mathscr{K}$. Para isso, basta tomar o subfeixe de $\mathscr{O}_X$-módulos de $\mathscr{K}$ definido em cada aberto U_i como sendo o gerado por f_i^{-1}. A boa definição de $\mathscr{L}(D)$ deve-se ao fato do elemento f_i/f_j ser invertível em $U_i \cap U_j$, de forma que f_i^{-1} e f_j^{-1} geram o mesmo $\mathscr{O}_X$-módulo.
Chamaremos $\mathscr{L}(D)$ de feixe assciado a D. Veremos a seguir uma proposição relacionada

a $\mathscr{L}(D)$.

Proposição 3.3.1 *Seja X um esquema. Então vale:*

1. *Para qualquer divisor de Cartier D, $\mathscr{L}(D)$ é um feixe invertível sobre X. A aplicação $D \mapsto \mathscr{L}(D)$ é uma correspondência biunívoca entre os divisores de Cartier sobre X e os subfeixes invertíveis de $\mathscr{K}$.*

2. $\mathscr{L}(D_1 - D_2) \cong \mathscr{L}(D_1) \otimes \mathscr{L}(D_2)^{-1}$

3. *$D_1 \sim D_2$ se, e somente se, $\mathscr{L}(D_1) \cong \mathscr{L}(D_2)$ como feixes invertíveis e independentemente do mergulho em $\mathscr{K}$*

Prova 1. Como cada $f_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{K}^*)$, restringindo a aplicação a U_i, então $\mathscr{O}_{U_i} \to \mathscr{L}(D)|_{U_i}$ cuja lei é $1 \to f_i^{-1}$ é um isomorfismo. Logo, $\mathscr{L}(D)$ é um feixe invertível. Agora, dado um subfeixe invertível $\mathscr{F}$ de $\mathscr{K}$, queremos construir um divisor de Cartier D, com $\mathscr{F} = \mathscr{L}(D)$. Para isso, basta considerar uma cobertura $\{U_i\}$ de X e tomar f_i em cada U_i como sendo g^{-1}, onde g é o gerador de $\mathscr{F}$ em U_i.
2. Sejam D_1,D_2 divisores de Cartier localmente definidos por f_i e g_i respectivamente. Note que $\mathscr{L}(D_1 - D_2)$ é localmente gerado por $f_i^{-1} g_i$, e assim $\mathscr{L}(D_1 - D_2) = \mathscr{L}(D_1) \cdot \mathscr{L}(D_2)^{-1}$ como subfeixes de $\mathscr{K}$. Naturalmente, temos que $\mathscr{L}(D_1) \cdot \mathscr{L}(D_2)^{-1}$ é isomorfo ao produto tensorial $\mathscr{L}(D_1) \otimes \mathscr{L}(D_2)^{-1}$.
3. Precisamos mostrar a seguinte equivalência: $D = D_1 - D_2$ é principal se, e somente se, $\mathscr{L}(D) \cong \mathscr{O}_X$. De fato, se D é principal e definido por $f \in \Gamma(X, \mathscr{K}^*)$, então D é gerado globalmente por f^{-1}. A correspondência $1 \to f^{-1}$ estabelece um isomorfismo entre $\mathscr{O}_X$ e $\mathscr{L}(D)$. Para a outra afirmação, dado um isomorfismo entre $\mathscr{O}_X$ e $\mathscr{L}(D)$, a imagem do elemento 1 em $\mathscr{O}_X$ por esse isomorfismo dá um elemento de $\Gamma(X, \mathscr{K}^*)$ cuja imagem inversa definirá D como um divisor principal. $\square$

Definição 3.3.1 Um divisor de Cartier D sobre um esquema X é dito efetivo se pode ser representado pela coleção de pares $\{U_i, f_i\}$, onde $f_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_{U_i})$. Nesse caso, é possível definir um único feixe de ideais $\mathscr{I}$, tal feixe localmente gerado por cada f_i, a partir do qual tomamos o subesquema fechado Y de X associado a $\mathscr{I}$. (veja **proposição 1.6.9**). Tal subesquema recebe o nome de subesquema associado ao divisor D.

Observação 3.1 *Estabelece-se então uma correspondência biunívoca entre os divisores efetivos de Cartier sobre X e os subesquemas fechados localmente principais Y, ou seja, subesquemas cujos feixes de ideais são localmente gerados por um único elemento.*

Proposição 3.3.2 *Seja D um divisor de Cartier sobre um esquema X, e seja Y o subesquema fechado localmente principal associado a $\mathscr{D}$ (Como na observação acima). Então $\mathscr{I}_Y \simeq \mathscr{L}(-D)$.*

Prova $\mathscr{L}(-D)$ *é o subfeixe de $\mathscr{K}$ gerado localmente por f_i. Como D é um divisor efetivo, então na verdade $\mathscr{L}(-D)$ é um subfeixe de $\mathscr{O}_X$, e tal subfeixe é simplesmente o feixe ideal $\mathscr{I}_Y$ de Y.* $\square$

Capítulo 4

DIFERENCIAIS

Esta seção tem como objetivo definir o feixe de formas diferenciais relativas de um esquema sobre outro. A diferenciação de funções é útil para se determinar o espaço tangente em pontos fechados de um esquema X, e ao se introduzir o conceito de diferenciais, a idéia é estabelecer que os vários espaços vetoriais em cada ponto p de X não são simplesmente independentes entre si, mas de fato, estão relacionados a um objeto global sobre X. Iniciaremos a seção definindo o módulo de diferenciais de um determinado anel sobre outro, que servirá de alicerce para a construção do feixe de diferenciais.

4.1 Diferenciais de Kähler

Nas definições a seguir, A é um anel comutativo com unidade, B uma A-álgebra e M um B-módulo. De modo a simplificar, considere A como sendo um subanel de B.

Definição 4.1.1 Uma aplicação $d\colon B \to M$ é dita uma A-derivação de B para M se satisfaz as seguintes condições

1. d é uma aplicação aditiva
2. $d(bb') = bdb' + b'db$, para $b, b' \in B$
3. Para $a \in A$, $d(a \cdot 1_B) = 0$

Denotamos o conjunto das A-derivações de B para M por $Der_A(B, M)$. Para $a \in B$, $D \in Der_A(B, M)$, definindo a aplicação $(aD)(b) = aD(b)$ para $b \in B$ torna $Der_A(B, M)$ um B-módulo. Se $B = M$ denotaremos o conjunto $Der_A(B, M)$ simplesmente por $Der_A(B)$.

Definição 4.1.2 Seja $\Omega_{B/A}$ um B-módulo junto com uma A-derivação $d\colon B \to \Omega_{B/A}$, a qual satisfaz a seguinte propriedade universal: Para qualquer B-módulo M e para qualquer A-derivação $D\colon B \to M$, existe um único homomorfismo de B-módulos $f\colon \Omega_{B/A} \to M$ tal que $D = f \circ d$. Ao par $(\Omega_{B/A}, d)$, ou simplesmente $\Omega_{B/A}$, quando d estiver subentendido, damos o nome de módulo de diferenciais relativas de B sobre A ou o módulo de diferenciais de Khaler de B sobre A.

Uma construção natural que garante a existência do objeto acima definido consiste em considerar o B-módulo F gerado pelos símbolos $\{db|b \in B\}$, quocientado pelo submódulo W gerado pelas expressões $\{d(b + b') - db - db', d(bb') - bdb' - b'db, da\}$, com $b, b' \in B$, $a \in A$. Assim, definindo $\Omega_{B/A}$ como sendo esse quociente, e considerando a A-derivação

$$d\colon B \to \Omega_{B/A}$$

que associa a cada elemento $b \in B$ o elemento $\overline{db} \in \Omega_{B/A}$, o objeto $(\Omega_{B/A}, d)$ assim construído será o módulo de diferenciais relativas de B sobre A. De fato, se M é um B-módulo e $D\colon B \to M$ é uma A-derivação, então defina a aplicação $f\colon \Omega_{B/A} \to M$ como $\overline{db} \to Db$. f é naturalmente um homormorfismo de B-módulos e de fato f está bem-definida pois se $db \sim db'$, então $f(\overline{db'}) - f(\overline{db}) = f(\overline{db'} - \overline{db}) = f(\overline{d(b - b')}) = f(\overline{0}) = 0$. Com isso, temos $(f \circ d)(b) = f(\overline{db}) = Db, b \in B$. E portanto f satisfaz a propriedade universal de $\Omega_{B/A}$. Além disso, se f' também satisfaz a propriedade universal, então $f' \circ d = D = f \circ d$, donde $f' = f$.

Observe portanto, a partir da **definição 4.1.2**, que o par $(\Omega_{B/A}, d)$ é único a menos de um único isomorfismo, ou seja, se tivermos dois pares (Ω, d),(Ω', d') tal que $\Omega \simeq \Omega'$, então existirá um único isomorfismo j tal que $d = j \circ d'$.

Exemplo 4.1 *Seja $S = A$ um anel, $R = A[x_1, \ldots, x_n]$, e $f\colon \mathbb{A}^n \to U = Spec\ A$, o morfismo induzido a partir da inclusão $S \to R$. Então, as relações que definem $\Omega_{R/A}$ são exatamente as "regras de diferenciação". Para $f \in R$, então $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$,onde $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i \in R$ e com isso, $\Omega_{R/A}$ é um R-módulo livre gerado pelos símbolos $dx_1, \ldots, dx_n$. De fato, se tivermos $\sum_i P_i dx_i = 0$, então como a diferenciação $\frac{\partial}{\partial x_m}$ é de maneira natural uma A-derivação, podemos aplicar a propriedade universal para garantir a existência de uma aplicação $f_m\colon \Omega_{R/A} \to Spec\ A$, tal que $f_m \circ d = \frac{\partial}{\partial x_m}$. Aplicando ambos membros em x_j, temos $f_m \circ dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_m} = \delta_{jm}$, e por sua vez*

$$f_m(\sum_i P_i dx_i) = \sum_i P_i f_m(dx_i) = P_m = 0,$$

donde conclui-se o fato.

A proposição a seguir fornece uma apresentação mais concreta do módulo de diferenciais relativas.

Proposição 4.1.1 *Seja B uma A-álgebra. Considere o homomorfismo $f\colon B\otimes_A B\to B$ definido por $f(b\otimes b')=bb'$, e seja $I=Kerf$. Considere $B\otimes_A B$ como um B-módulo pela multiplicação à esquerda. Então I/I^2 herda uma estrutura de B-módulo. Definindo uma aplicação $d\colon B\to I/I^2$ por $db=1\otimes b-b\otimes 1$(módulo I^2), então o par $(I/I^2,d)$ é um módulo de diferenciais relativas para B/A.*

Prova Inicialmente, a estrutura de B-módulo em I/I^2 é dada por $r(r_1\otimes r_2):=rr_1\otimes r_2$, onde $r_1\in B$,$r_1\otimes r_2\in I$. Defina então, a aplicação de B-módulos $\varphi\colon \Omega_{B/A}\to I/I^2$ que associa db ao elemento $1\otimes b-b\otimes 1$ (módulo I^2), $b\in B$. Desejamos construir uma inversa para φ. Para isso, seja $C=B\oplus\Omega_{B/A}$ um B-módulo, o qual possui estrutura de anel com operação $(b_1\oplus db_1')(b_2\oplus db_2'):=b_1b_2\oplus(b_1db_2'+b_2db_1')$. Por sua vez, a aplicação $B\times B\to C$ definida como $(b_1,b_2)\to(b_1b_2,b_1db_2)$ é naturalmente um homomorfismo A-bilinear de anéis, e dessa forma induz uma aplicação $g\colon B\otimes_A B\to C$, em que $g(b_1\otimes b_2)=(b_1b_2,b_1db_2)$.Observe que $g(I)$ pode ser identificado com um subconjunto de $\Omega_{B/A}$, já que a primeira coordenada de $g(I)$ é nula por conta da definição de f. Além disso, $g(I^2)=0$ pois g é um homomorfismo e

$$g((b_1\otimes b_2)(b_1'\otimes b_2'))=g(b_1b_1'\otimes b_2b_2')=(b_1b_1'b_2b_2',b_1b_1'd(b_2b_2')+b_2b_2'd(b_1b_1'))=$$

$$(b_1b_1'b_2b_2',b_1b_1'(b_2db_2'+b_2'db_2)+b_2b_2'(b_1db_1'+b_1'db_1))=$$

$$(b_1b_1'b_2b_2',b_1b_2b_1'db_2'+b_1'b_2'b_1db_2+b_1b_2b_2'db_1'+b_1'b_2'b_2db_1)=0.$$

Isso nos permite obter a partir da g, uma aplicação $\psi\colon I/I^2\to\Omega_{B/A}$. E essa será a inversa de φ. Com efeito,

$$\psi\circ\varphi(db)=\psi(1\otimes b-b\otimes 1)=g(1\otimes b-b\otimes 1)=(b,1\cdot db)-(b,b\cdot d1)=(0,db)=db$$

e por sua vez

$$\varphi\circ\psi(b\otimes b')=\varphi(0,bdb')=\varphi(bdb')=b\varphi(db')=b(1\otimes b'-b'\otimes 1)=b\otimes b',$$

de maneira que $I/I^2\simeq\Omega_{B/A}$.

□

Proposição 4.1.2 *Se A' e B são A-álgebras, e seja $B'=B\otimes_A A'$. Então $\Omega_{B'/A'}\simeq\Omega_{B/A}\otimes_B B'$. Além disso, se S é um sistema multiplicativo em B, então $\Omega_{S^{-1}B/A}\simeq S^{-1}\Omega_{B/A}$.*

Prova Faremos uso essencialmente da propriedade universal de $\Omega_{B'/A'}$. Com efeito, sendo $\Omega_{B/A} \otimes_B B'$ um B'-módulo, $b' = b \otimes a' \in B'$ e definindo uma A'-derivação

$$D : B' \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B B'$$

$$b \otimes a' \longmapsto d_{B/A}(b) \otimes (1 \otimes a'),$$

então existe um homomorfismo $f \colon \Omega_{B'/A'} \to \Omega_{B/A} \otimes_B B'$ tal que $D = f \circ d_{B'/A'}$. Defina agora uma aplicação $\overline{f} \colon \Omega_{B/A} \otimes_B B' \to \Omega_{B'/A'}$ com a lei $d_{B/A} b \otimes (b_0 \otimes a') \mapsto b_0 d_{B'/A'}(b \otimes a')$. $\overline{f}$ será a inversa de f. De fato,

$$\overline{f} \circ f(d_{B'/A'}(b \otimes a')) = \overline{f}(D(b \otimes a')) = \overline{f}(d_{B/A}(b) \otimes (1 \otimes a')) = d_{B'/A'}(b \otimes a'),$$

e

$$f \circ \overline{f}(d_{B/A} b \otimes (b_0 \otimes a')) = b_0 f(d_{B'/A'}(b \otimes a')) =$$

$$b_0 D(b \otimes a') = b_0(d_{B/A}(b) \otimes (1 \otimes a')) = d_{B/A}(b) \otimes (b_0 \otimes a').$$

Com isso, concluimos que $\Omega_{B'/A'} \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B B'$.
A segunda parte, $\Omega_{S^{-1}B/A} \simeq S^{-1}\Omega_{B/A}$, é verificada de maneira similar, considerando a A-derivação $S^{-1}B \to S^{-1}\Omega_{B/A}$, definida por $b/s^n \mapsto db/s^n$ e utilizando novamente a propriedade universal de $(\Omega_{S^{-1}B/A}, d_{S^{-1}B/A})$. $\square$

Os dois teoremas a seguir exibem sequências exatas associadas com diferenciais de Khaler. Tais sequências serão de fundamental importância para a caracterização de um anel local regular.

Teorema 4.1 (Primeira sequência exata) *Sejam* $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *anéis e homomorfismos. Então existe uma sequência exata natural de C-módulos*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\ v\ } \Omega_{C/A} \xrightarrow{\ u\ } \Omega_{C/B} \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

Prova Para verificar esse resultado, faremos uso da **proposicão A.4.6** no apêndice. Estabelecidas α e β, e as correspondentes estruturas de A-álgebra em B e B-álgebra em C, definiremos aplicações de C-módulos u e v. Para $b \in B$,$c \in C$, defina

$$u(d_{C/A}(c)) = d_{C/B}(c),$$

$$v(d_{B/A}(b) \otimes c) = c \cdot d_{C/A}(\beta(b)).$$

Temos que a sequência (4.1) é exata se e somente se para qualquer C-módulo M, a sequência

$$Hom_C(\Omega_{C/B}, M) \longrightarrow Hom_C(\Omega_{C/A}, M) \longrightarrow Hom_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \qquad (4.2)$$

é exata. Por outro lado, temos que

$$Hom_C(\Omega_{B/A} \otimes C, M) \simeq Hom_B(\Omega_{B/A}, M) \simeq Der_A(B, M),$$

com os isomorfismos estabelecidos de maneira natural, $Hom_C(\Omega_{B/A} \otimes C, M) \to Hom_B(\Omega_{B/A}, M)$ dado como $g(db \otimes c) \mapsto f(cdb) = cf(db)$ e $Hom_B(\Omega_{B/A}, M) \to Der_A(B, M)$ dado por $f \mapsto f \circ d$, para d em $(\Omega_{B/A}, d)$. Assim, (4.2) pode ser reescrita como

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(\Omega_{C/B}, M) \arrow[r, "\omega_1"] & Hom_C(\Omega_{C/A}, M) \arrow[r, "\omega_2"] & Hom_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \arrow[r, "\omega_3"] \arrow[d, "\omega"] & Hom_B(\Omega_{B/A}, M) \\
Der_B(C, M) \arrow[u, "\lambda_{C,B}"] \arrow[r, "u^*"] & Der_A(C, M) \arrow[u, "\lambda_{C,A}"] \arrow[r, "v^*"] & Der_A(B, M) \arrow[ur, "\lambda_{B,A}"'] &
\end{tikzcd}$$

Seja $D \in Der_A(C, M)$. Tomando $b \in B$, segue pelo diagrama acima que

$$v^*(D)(b) = (\omega \circ \omega_2) \circ (\lambda_{C/A}(D))(b) = (\omega \circ \omega_2) \circ f(b),$$

em que $\lambda_{C/A}(D) = f$ e $f \colon \Omega_{C/A} \to M$ é a aplicação satisfazendo a propriedade universal de $(\Omega_{C/A}, d)$, tal que $D = f \circ d$. Daí,

$$\omega \circ (\omega_2 \circ f)(b) = \omega \circ (f \circ v)(b) = f \circ v(d_{C/A} b \otimes 1) = f \circ d_{C/A}(\beta(b)) = D(\beta(b)).$$

Com isso, concluímos que $v^*(D)(b) = D(\beta(b))$. De maneira similar, se $D \in Der_B C/A$, então para $c \in C$

$$u^*(D)(c) = (\lambda_{C/A}^{-1} \circ \omega_1) \circ \lambda_{C/B}(D)(c) = (\lambda_{C/A}^{-1} \circ \omega_1) \circ \overline{f}(c),$$

onde novamente $\lambda_{C/B}(D) = \overline{f}$, em que $\overline{f} \colon \Omega_{C/B} \to M$ é uma aplicação tal que $D = \overline{f} \circ d_{C/A}$. Daí,

$$\lambda_{C/A}^{-1} \circ (\omega_1 \circ \overline{f})(c) = \lambda_{C/A}^{-1} \circ (\overline{f} \circ u)(c) = \overline{f} \circ u(d_{C/A}(c)) = (\overline{f} \circ d_{C/B})(c) = D(c).$$

Com isso, concluímos que u^* é a inclusão de $Der_B(C, M)$ em $Der_A(C, M)$.

Nosso propósito final é verificar que Im u^* = Ker v^*. De fato, se $D \in$ Ker $v^* \subset Der_A(C, M)$, então $v^*(D) = D(\beta(b)) = 0$, para todo $b \in B$, ou seja, $D \in Der_B(C, M)$, donde $D \in \text{Im } u^*$. Agora, se $D \in \text{Im } u^*$, então $D \in Der_B(C, M)$ donde $D(b \cdot 1_C) = 0$, $b \in B$. Sendo C uma B-álgebra determinada por β, segue que $b \cdot 1_C := \beta(b)$, e portanto $D(\beta(b)) = 0 = v^*(D)(b)$ para todo $b \in B$. Logo, a sequência determinada por u^*, v^* é exata e como consequência desse fato, (4.2) também o é. $\square$

Teorema 4.2 (Segunda sequência exata) *Seja B uma A-álgebra e seja I um ideal de B, e $C = B/I$. Então existe uma sequência exata natural de C-módulos*

$$I/I^2 \xrightarrow{\ \delta\ } \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v} \Omega_{C/A} \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

onde para $b \in I$, se $\overline{b}$ é sua imagem em I/I^2, então $\delta\overline{b} = db \otimes 1$. Em particular, I/I^2 tem uma estrutura de C-módulo, e δ é uma aplicação C-linear.

Prova Verifiquemos inicialmente a condição da linearidade de δ. Para $(b + i_0) \in C$ e $(i_1 + j) \in I/I^2$, a operação $(b + i_0)(i_1 + j) = (bi_1 + j')$, $bi_1 \in I$,$j' = i_0 i_1 + i_0 j + bj \in I^2$ torna I/I^2 um C-módulo. Com isso, se $c \in C$ e $\overline{b} \in I/I^2$, então

$$\delta(c\overline{b}) = d(cb) \otimes 1 = cdb \otimes 1 + bdc \otimes 1 = c(db \otimes 1) + dc \otimes b.$$

Como $b \in I$, então b é nulo em C de modo que $dc \otimes b = 0$, e portanto $\delta(c\overline{b}) = c\delta(\overline{b})$ verificando a C-linearidade de δ.

A aplicação $v\colon \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A}$ é definida da mesma maneira como na proposição anterior, sendo $v(d_{B/A}(b) \otimes c) = c \cdot d_{C/A}(\pi(b))$. Observe que sendo $\pi\colon B \to C$ sobrejetiva, então v também será sobrejetiva. Aplicando a **proposição A.4.6** no apêndice, temos que a sequência determinada por v e δ será exata se, e somente se, para qualquer C-módulo M a sequência

$$Hom_C(\Omega_{C/A}, M) \longrightarrow Hom_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \longrightarrow Hom_C(I/I^2, M) \tag{4.4}$$

for exata. Como $C = B/I$, temos um isomorfimo $\lambda_I\colon Hom_C(I/I^2, M) \to Hom_B(I, M)$. definido de maneira natural. Em conjunto com o isomorfismo

$$\lambda_{B,A}\colon Der_A(B, M) \to Hom_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M)$$

definido como $D \mapsto \overline{f}(db \otimes 1) := f(db)$, onde f é a aplicação que satisfaz a propriedade universal de $(\Omega_{B/A}, d_{B/A})$, e $\lambda_{C,A}\colon Der_A(C, M) \to Hom_C(\Omega_{C/A}, M)$ é um isomorfismo definido de maneira similar, temos

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(\Omega_{C/A}, M) \arrow[r, "\omega_1"] & Hom_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \arrow[r, "\omega_2"] & Hom_C(I/I^2, M) \arrow[d, "\lambda_I"] \\
Der_A(C, M) \arrow[r, "v^*"] \arrow[u, "\lambda_{C,B}"] & Der_A(B, M) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[u, "\lambda_{B,A}"] & Hom_B(I, M)
\end{tikzcd}$$

Verifiquemos que Im $v^* =$ Ker δ^*, o que permitirá concluir a exatidão de (4.4). Com efeito, se $D \in Der_A(B, M)$, e $b \in I$ então

$$\delta^*(D)(b) = (\lambda_I \circ \omega_2) \circ \lambda_{B,A}(D)(b) = \lambda_I \circ \omega_2(\overline{f}(b)) =$$

$$\lambda_I(\overline{f} \circ \delta)(b) = \overline{f} \circ \delta(\pi(b)) = \overline{f} \circ \delta(\bar{b}) = \overline{f}(db \otimes 1) = D(b)$$

onde $\pi \colon I \to I/I^2$ é a projeção canônica.

Com isso, obtemos que δ^* é uma inclusão. Vemos na demonstração da proposição anterior (4.1) que $v^*(D)(b) = D(\pi(b))$. Assim, para $b \in I$,

$$\delta^* v^*(D)(b) = \delta^*(D(\pi(b))) = \delta^*(0) = 0,$$

donde Im $v^* \subset$ Ker δ^*. Por sua vez, se tivermos $D \in$ Ker δ^*, então $D(I) = 0$, de modo que $v^*(D') = D$, onde $D'(\bar{b}) := D(b)$. Daí, segue o resultado. $\square$

Proposição 4.1.3 *Se B é uma A-álgebra finitamente gerada, ou se B é uma localização de uma A-álgebra finitamente gerada, então $\Omega_{B/A}$ é um B-módulo finitamente gerado.*

Prova Pelo **exemplo 4.1**, se R é um anel polinomial $A[x_1, \ldots, x_m]$, então seu módulo de diferenciais $\Omega_{R/A}$ é um B-módulo livre de posto m gerado pelos elementos $dx_1, \ldots, dx_m$. Então, caso B seja uma A-álgebra finitamente gerada, B pode ser visto como um quociente $A[x_1, \ldots, x_n]/I$, $I \subset A[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal. Aplicando o teorema da segunda sequência exata **4.2**, onde $C = A[x_1, \ldots, x_n]/I$ no enunciado daquele teorema, segue que $\Omega_{B/A}$ está em bijeção com algum submódulo de $\Omega_{A[x_1,\ldots,x_n]/A} \otimes B$. Sendo $\Omega_{A[x_1,\ldots,x_n]/A} \otimes B$ finitamente gerado, segue portanto o resultado. Agora, se B for uma localização de um quociente de um anel $A[x_1, \ldots, x_n]$ em um conjunto S, então pela **proposição 4.1.2**, temos $\Omega_{B/A} = \Omega_{S^{-1}A[x_1,\ldots,x_n]/A} \simeq S^{-1}\Omega_{A[x_1,\ldots,x_n]/A}$, o qual por sua vez é finitamente gerado. $\square$

Proposição 4.1.4 *Seja K uma extensão de corpos finitamente gerada de um corpo k. Então $dim_K\ \Omega_{K/k} \geq gr\ K/k$, onde gr denota o grau de transcendência de um corpo e dim_K a dimensão como espaço vetorial. A igualdade ocorre se, e somente se, K é separavelmente gerado sobre k. (Veja* **apêndice A.4***)*

Prova Veja [5],teorema 59,página 191. □

Proposição 4.1.5 *Seja B um anel local que contém um corpo k que é isomorfo ao seu corpo residual B/m. Então, a aplicação $\delta\colon I/I^2 \to \Omega_{B/k} \otimes_B k$ da sequência exata (4.3) é um isomorfismo.*

Prova Como B contém o corpo k, B é uma k-álgebra. Então pela **proposição 4.2**, em que $C = k$ e $A = k$, temos $\Omega_{C/A} = \Omega_{k/k}$, que por sua vez é igual a 0 pela definição de k-derivação. Com isso, como a sequência **(4.3)**, por hipótese, é exata, segue que δ é sobrejetiva. Agora, para verificarmos a injetividade, devido a **proposição A.4.6** será suficiente mostrar que a aplicação

$$\delta'\colon Hom_k(\Omega_{B/k} \otimes k, k) \to Hom_k(m/m^2, k)$$

definida como $f \mapsto f \circ \delta$, entre os espaços duais é sobrejetiva. Para isso, observe que temos um isomorfismo

$$\alpha\colon Hom_k(\Omega_{B/k} \otimes k, k) \longrightarrow Hom_B(\Omega_{B/k}, k)$$

$$\varphi \longmapsto \overline{\varphi}$$

$$db \mapsto \varphi(db \otimes 1)$$

onde $b \in B$, cuja inversa será a aplicação que associa ao elemento $\overline{\varphi} \in Hom_B(\Omega_{B/k}, k)$ o elemento $\varphi(db \otimes 1) := \overline{\varphi}(db)$ em $Hom_k(\Omega_{B/k} \otimes k, k)$. Por sua vez, podemos identificar $Hom_B(\Omega_{B/k}, k)$ com o conjunto $Der_k(B, k)$ das k-derivações de B em k por meio de uma aplicação β construída a seguir. Se $\varphi \in Hom_B(\Omega_{B/k}, k)$, então $\beta(\varphi) := \varphi' = \varphi \circ d$ é um elemento de $Der_k(B, k)$. Com efeito, para $b, b' \in B$ temos

$$\varphi'(bb') = \varphi(bdb' + b'db) = b(\varphi db') + b'(\varphi db) = b\varphi'(b') + b'\varphi'(b).$$

As demais propriedades de k-derivação são satisfeitas naturalmente tendo em vista φ ser um homomorfismo de B-módulos. Agora vejamos a inversa. Se $\varphi' \in Der_k(B, k)$, então pela propriedade universal de $(\Omega_{B/k}, d)$, existe uma $\varphi \in Hom_B(\Omega_{B/k}, k)$ tal que $\varphi' = \varphi \circ d$. Claramente, essa aplicação construída é inversa da anterior.

Se $b \in B$, podemos escrever b da forma $b = \lambda + c$ para certos $\lambda \in k$,$c \in m$, de maneira única. De fato, via homomorfismo canônico $B \to \frac{B}{m}$ que associa b a $\lambda = \overline{b}$ e sendo $\frac{B}{m} \simeq k$, segue que $\lambda \in k$ e $\lambda = b + c$, com $c \in m$. Se b admite uma outra representação

$b = \lambda' + c'$ então $\lambda' = b - c'$ donde temos λ e λ' são elementos iguais em $\frac{B}{m}$, e daí, $c = c'$, confirmando a unicidade da representação. Finalmente, mostremos que δ' é sobrejetiva. Seja $h \in Hom_k(m/m^2, k)$, e $b = \lambda + c \in B$.Defina um elemento $g \in Der_k(B, k)$, como $gb = h(\overline{c})$ com $\overline{c} \in m/m^2$, $c \in m$, $b \in B$. g assim definido é de fato um elemento de $Der_k(B, k)$. Pois, para $b, b' \in B$ temos

$$g(bb') = g((\lambda + c)(\lambda' + c')) = g(\lambda\lambda' + c'\lambda + c\lambda' + cc') = g(\lambda'' + c'')$$

onde $\lambda'' = \lambda\lambda'$ e $c'' = c'\lambda + c\lambda' + cc'$. Como $\overline{cc'} = 0$, então

$$g(\lambda''+c'') = h(\overline{c'\lambda + c\lambda'}) = h(\overline{c'\lambda + cc' + c\lambda' + cc'}) = \overline{\lambda + c}\cdot h(\overline{c'})+\overline{\lambda' + c'}\cdot h(\overline{c}) = bgb'+b'gb.$$

Também

$$g(b + b') = g(\lambda + c + \lambda + c') = h(c + c') = h(c) + h(c') = g(b) + g(b')$$

e por fim, se $b \in k$, então

$$g(b) = g(\lambda + 0) = h(\overline{0}) = 0.$$

Resta verificar agora, que $\delta'(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(g))) = h$, como exposto a seguir

$$Der_k(B, k) \xrightarrow{\beta^{-1}} Hom_B(\Omega_{B/k}, k) \xrightarrow{\alpha^{-1}} Hom_k(\Omega_{B/k} \otimes k, k) \xrightarrow{\delta'} Hom_k(m/m^2, k)$$

Observe que $h(\overline{b}) = h(\overline{\lambda}) + h(\overline{c}) = h(\overline{c})$ Então, $\beta^{-1}(g)$ é uma aplicação f tal que $g = f \circ d$. Por sua vez, $\alpha^{-1}(f)$ é uma aplicação u definida como $u(db \otimes 1) = f(db)$. Em seguida, $\delta'(u) = u \circ \delta$ e para $\overline{b} \in m/m^2$, temos

$$\delta'(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(g)))(\overline{b}) = \delta'(u)(\overline{b}) = u \circ \delta(\overline{b}) = u(db \otimes 1)$$

$$= f(db) = (f \circ d)(b) = g(b) = h(\overline{c}) = h(\overline{b}).$$

Portanto, δ' é sobrejetiva, e assim um isomorfismo. $\square$

Proposição 4.1.6 *Seja A um domínio local noetheriano, com corpo residual k e corpo quociente K. Se M é A-módulo finitamente gerado, e além disso dim_k $M \otimes_A k = dim_K$ $M \otimes_A K = r$, então M é livre de posto r.*

Prova Seja m o ideal maximal de A, então temos que

$$M \otimes k \simeq M \otimes A/m \simeq M/mM$$

sendo o segundo isomorfismo obtido ao se tensorizar por M a sequência exata determinadas pelas inclusões $0 \to m \to A \to A/m \to 0$. Então, a partir da seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow m \otimes M \xrightarrow{\imath \otimes id} A \otimes M \xrightarrow{\pi \otimes id} A/m \otimes M \longrightarrow 0$$

obtemos

$$\frac{A \otimes M}{m \otimes M} \simeq A/m \otimes M$$

Por ser M um A-módulo, segue que $M/mM \simeq (A \otimes M)/(m \otimes M) \simeq M \otimes k$. Com isso, como por hipótese, $dim_k\ M \otimes k = r$, então $dim_k\ M/mM = r$. Agora, considerando o homomorfismo sobrejetivo $M \to M/mM$ e aplicando o lema de Nakayama (Veja **apêndice A.2**), temos que para uma determinada base para o espaço vetorial M/mM, os elementos correspondentes em M formam um conjunto de geradores para M, o qual possui r elementos. Com isso, existe uma sequência $0 \to R \to A^r \to M \to 0$, onde $R =$Ker φ. Tensorizando tal sequência por K, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow R \otimes K \xrightarrow{u} K^r \xrightarrow{v} M \otimes K \longrightarrow 0$$

Como $dim_K\ M \otimes K = r$, então v é uma bijeção, e com isso, tem kernel nulo, e portanto Im $u = 0$ e daí, $R \otimes K = 0$. Mas, sendo R um submódulo de um módulo sem torção, então R é um módulo sem torção. Logo, $R = 0$ e A^r é isomorfo a M. $\square$

Proposição 4.1.7 *Seja B um anel local contendo um corpo k isomorfo ao seu corpo residual. Assuma além disso, que k é um corpo perfeito, e que B é a localização de uma k-álgebra finitamente gerada. Então $\Omega_{B/A}$ é um B-módulo livre de posto igual a dim B se, e somente se, B é um anel local regular.*

Prova Inicialmente, suponha $\Omega_{B/k}$ um módulo livre de posto dim B. Como consequência da proposição anterior, **proposição 4.1.5**, temos que $dim_k\ m/m^2 = dim_k\ \Omega_{B/k} \otimes k = dim_k\ \Omega_{B/k} = dim\ B$, o que nos leva a concluir que B é um anel regular. Em particular, B é um domínio de integridade. Reciprocamente, suponha B um anel local regular de dimensão r com ideal maximal m. Então, pela definição de anel regular, $dim_k\ m/m^2 = r$. Novamente, pela **proposição 4.1.5**, segue que $dim_k\ \Omega_{B/k} \otimes k = r$. Agora, seja K o corpo quociente de B. Aplicando **proposição 4.1.2**, para B,K, k-álgebras e $A' = B \otimes K$, obtemos $\Omega_{B/k} \otimes_B k = \Omega_{K/k}$. Como, por hipótese, o corpo k é perfeito, então pela **proposição A.4.2** no apêndice, K é uma extensão separavelmente gerada de k e pela **proposição 4.1.4**, $dim_K\ \Omega_{K/k}$ é igual ao grau de transcendência de K sobre k. Como por hipótese, B é a localização de uma k-álgebra finitamente gerada, então **proposição 4.1.3** nos diz que $\Omega_{B/k}$ é um B-módulo finitamente gerado. A conclusão segue da **proposição 4.1.6**. □

4.2 Feixe de Diferenciais

Estabelecido o conceito de módulo de diferenciais, desejamos levá-lo para a linguagem de esquemas. Seja $\varphi\colon X \to Y$ um morfismo de esquemas e consideramos o morfismo diagonal $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ o qual fornece um isomorfismo entre o esquema X e sua imagem $\Delta(X)$, que por sua vez é um subesquema fechado de um aberto W de $X \times_Y X$, como se observa na demonstração da **proposição 2.2.2**. Nessa demonstração, W é a união dos abertos $U_p \times_Y U_p$ para cada ponto $p \in X$. Tal isomorfismo motiva a seguinte definição:

Definição 4.2.1 Seja $f\colon X \to Y$ um morfismo de esquemas, $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ o morfismo diagonal e $\mathscr{I}$ o feixe de ideais de $\Delta(X)$ em um aberto W de $X \times_Y X$. Defina o feixe de diferenciais relativas de X sobre Y como sendo o feixe $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ sobre X.

Observação 4.1 *:* Vale destacar o fato de que a **definição 4.2.1** não tem uso do ponto de vista computacional. Tal definição tem o propósito de garantir a existência de um objeto $\Omega_{X/Y}$, um feixe quasi-coerente, com a condição de que restringindo a abertos afins, ele tem a forma de um módulo de diferenciais relativas. No que diz respeito à aplicações, é interessante saber que $\Omega_{X/Y}$ pode ser determinado localmente em abertos afins e faremos uso desse fato nas proposições posteriores.

De fato, observe que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ tem uma estrutura natural de $\mathscr{O}_{\Delta(X)}$-módulo. Então, tendo em vista que Δ induz um isomorfismo de X para $\Delta(X)$, $\Omega_{X/Y}$ herda uma estrutura natural de $\mathscr{O}_X$-módulo. Além disso, como o feixe ideal é quasi-coerente, então $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ será um feixe quasi-coerente e da mesma forma o seu pull-back. Portanto, $\Omega_{X/Y}$ é um feixe quasi-coerente. Considerando abertos afins $U = \text{Spec}A$ em Y e $V = \text{Spec}B$ em X tais que $f(V) \subset U$, então $V \times_U V$ é um aberto afim de $X \times_Y X$ isomorfo a Spec $B \otimes_A B$, e $\Delta(X) \cap (V \times_U V)$ é um subesquema fechado definido pelo núcleo do homomorfismo diagonal $B \otimes_A B \to B$. Portanto, $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ é o feixe associado ao módulo I/I^2. Segue daí, que $\Omega_{V/U} \simeq (\Omega_{B/A})\tilde{}$.

Observação 4.2 : Observe que na condição de $f\colon X \to Y$ ser um morfismo, é possível obter uma cobertura de X constituída por abertos afins $\{U_i\}$ de tal maneira que para cada índice i da cobertura exista um certo aberto afim V_i de Y tal que $f(U_i) \subset V_i$. De fato, considere uma cobertura $\{V_j\}$ de Y por abertos afins e devido à continuidade de f vista como aplicação entre os espaços topológicos X e Y, temos que $\{f^{-1}(V_j)\}$ forma uma cobertura aberta de X. Assim, para cada ponto p de X é possível fixar um aberto afim U_p contendo p e contido em algum aberto $f^{-1}(V_p)$. Claramente os abertos $\{U_p\}$, $p \in X$ formam uma cobertura aberta de X satisfazendo $f(U_p) \subset V_p$. Utilizaremos essa observação nas proposições a seguir.

Proposição 4.2.1 *Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y' \to Y$ morfismos e $f'\colon X' = X \times_Y Y' \to Y'$ o morfismo obtido por extensão de base. Então, $\Omega_{X'/Y'} \simeq g'^*(\Omega_{X/Y})$, onde $g'\colon X' \to X$ é a projeção na primeira coordenada.*

Prova Considere uma cobertura $\{V_j = \text{Spec } D_j\}$ de Y, e a partir dela obtenha coberturas $\{U_i = \text{Spec } C_i\}$ de X e $\{V'_m = \text{Spec } D'_m\}$ de Y' tais que $f(U_i) \subset V_{k_i}$ e $f'(V'_m) \subset V_{k_m}$ para certos índices k_i,k_m da maneira como argumentado logo acima na **observação 4.2**. Os morfismos $f|_{U_i}\colon U_i \to V_{k_i}$,$f'|_{V'_m}\colon V'_m \to V_{k_m}$ induzem os homomorfismos de anéis $D_{k_i} \to C_i$ e $D_{k_m} \to D'_m$. Tome, então, uma cobertura afim para X' composta pelos abertos $U'_{im} = U_i \times_{V_i} V'_m$. Observe que $U'_{im} = U_i \times_{V_i} V'_m$ é isomorfo a Spec $C_i \otimes_{D_{k_i}} D'_m$. Agora, aplicando a **proposição 4.1.2** para cada par de índices i,m, onde $A' = D'_m$,$A = D_{k_i}$,$B = C_i$ e $B' = C_i \otimes_{D_{k_i}} D'_m = B \otimes_A A'$ e sob a condição de A',B serem A-álgebras pela hipótese de $g\colon Y' \to Y$ e $f\colon X \to Y$ serem morfismos, concluímos que $\Omega_{B'/A'} \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B B'$.

Por outro lado, como $\Omega_{U'_{im}/V'_m} \simeq \widetilde{\Omega_{B'/A'}}$, então $\Omega_{U'_{im}/V'_m} \simeq (\Omega_{B/A} \otimes_B B')\tilde{}$. Aplicando **proposição 1.5.2, item 5** para a projeção na primeira coordenada

$$g'|_{U'_{im}}\colon \text{Spec } C_i \otimes_{D_{k_i}} D'_m \to \text{Spec } C_i,$$

segue que

$$\Omega_{U'_{im}/V'_m} \simeq (\Omega_{B/A} \otimes_B B')\tilde{} = g'^*(\widetilde{\Omega_{B/A}}) = g'^*(\Omega_{U_i/V_{k_i}}).$$

Realizando a colagem dos feixes $\Omega_{U'_{im}/V'_m}$, para todos índices i, m, obtemos então o resultado desejado, $\Omega_{X'/Y'} \simeq g'^*(\Omega_{X/Y})$. $\square$

Proposição 4.2.2 *Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ morfismos de esquema. Então, existe uma sequência exata de feixes sobre X*

$$f^*\Omega_{Y/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0 \tag{4.5}$$

Prova Escolha coberturas conforme a **observação 4.2**, $\{W_i = \text{Spec } Z_i\}$ de Z e $\{V_j = \text{Spec } Y_j\}$ de Y tais que $g(V_j) \subset W_{k_j}$. E novamente utilizando a observação, a partir de $\{V_j\}$, obtenha uma cobertura $\{U_m = \text{Spec } X_m\}$ tal que $f(U_m) \subset V_{k_m}$. Assim, para cada U_m, $f(U_m) \subset V_{k_m}$ e $g(V_{k_m}) \subset W_{k_{jm}}$. Considerando então para cada m, j os homomorfismos de anéis induzidos $g'_j\colon Z_{k_{jm}} \to Y_{k_m}$ e $f'_m\colon Y_{k_m} \to X_m$, aplicamos o teorema da primeira sequência exata, **teorema 4.1**, com $A = Z_{k_{jm}}$,$B = Y_{k_m}$ e $C = X_m$ no enunciado daquele teorema, para obtermos a sequência exata

$$\Omega_{Y_{k_m}/Z_{k_{jm}}} \otimes_{Y_{k_m}} X_m \longrightarrow \Omega_{X_m/Z_{k_{jm}}} \longrightarrow \Omega_{X_m/Y_{k_m}} \longrightarrow 0.$$

E ao tomar seus feixes associados, e utilizando **proposição 1.5.2, item 5** em $f|_{\text{Spec } X_m}\colon \text{Spec } X_m \to \text{Spec } Y_{k_m}$ para garantir que $(\Omega_{Y_{k_m}/Z_{k_{jm}}} \otimes_{Y_{k_m}} X_m)^{\sim} \simeq f^*\widetilde{\Omega_{Y_{k_m}/Z_{k_{jm}}}}$, segue

$$f^*\widetilde{\Omega_{Y_{k_m}/Z_{k_{jm}}}} \longrightarrow (\Omega_{X_m/Z_{k_{jm}}})^{\sim} \longrightarrow (\Omega_{X_m/Y_{k_m}})^{\sim} \longrightarrow 0.$$

Realizando a colagem dos feixes associados ao longo dos abertos da cobertura, e colando juntos os respectivos morfismos que compõem cada uma das sequências exatas, concluímos que a sequência **(4.5)** é exata. $\square$

A prova da proposição a seguir utiliza o teorema da segunda sequência exata **4.2** e é semelhante à prova das duas proposições anteriores. Iremos apenas estabelecer o resultado.

Proposição 4.2.3 *Seja $f\colon X \to Y$ um morfismo, e seja Z um subesquema fechado de X, com feixe ideal $\mathscr{I}$, então temos a seguinte sequência exata de feixes sobre Z*

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\ \delta\ } \Omega_{X/Y} \otimes \mathscr{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0 \tag{4.6}$$

A seguir provaremos um resultado de importância.

Proposição 4.2.4 *Sejam A um anel $Y = \text{Spec } A$, e seja $X = \mathbb{P}^n_A$. Então existe uma sequência exata de feixes sobre X, dada como*

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

Prova Temos $X = \text{Proj } S$, onde $S = A[x_0, \ldots, x_n]$ é o anel de coordenadas homogêneas em $n+1$ indeterminadas. Sendo S um anel graduado, podemos escrever S na forma de soma direta de suas partes homogêneas $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$, onde S_n é a parte homogênea de S de grau n. Seja então E o S-módulo graduado $S(-1)^{\oplus n+1}$, a soma direta de $n+1$ cópias de $S(-1) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_{n-1}$. Considerando o i-ésimo fator de E, temos que a parte homogênea de grau 1 de $S(-1)$ será simplesmente a parte homogênea de grau 0 de S que é o anel A. Denote o elemento $1 \in A$ desse i-ésimo fator de E por e_i e considere um homomorfismo entre esses S-módulos graduados $\varphi\colon E \to S$ satisfazendo a condição $\varphi(e_i) = x_i$. Seja M o núcleo desse homomorfismo. Com isso, temos uma sequência exata à esquerda natural de S-módulos

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow S.$$

a qual por sua vez, considerando-se os respectivos feixes associados, induz a sequência de feixes sobre X

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{\oplus n+1} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

Verificaremos que essa sequência é exata.
Inicialmente, veremos que $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{O}_X(-1)^{\oplus n+1} \to \mathscr{O}_X$ é sobrejetiva. Para isso, considere uma cobertura aberta $\{U_i = D_+(U_i)\}$ de $X = \mathbb{P}^n_A$ e o morfismo $\widetilde{\varphi}$ restrito a U_i. Como

$$U_i = Spec\ A[x_0, \ldots, x_n]_{x_i} = Spec\ S_{x_i},$$

então $\widetilde{\varphi}|_{U_i}$ nada mais é do que o morfismo induzido a partir do homomorfismo de anéis

$$\varphi_{x_i}\colon E_{x_i} \longrightarrow S_{x_i}.$$

Observe que o homomorfismo $\varphi\colon E \to S$ não é sobrejetivo, pois os elementos de grau 0 de S não possuem correspondente em E. Contudo, localizando E,S numa certa indeterminada x_i, obtemos que a aplicação $\varphi_{x_i}\colon E_{x_i} \to S_{x_i}$ das localizações em x_i induzida a partir de $\varphi\colon E \to S$, definida como $e_j/x_i^n \to x_j/x_i^n$, é um homomorfismo sobrejetivo. De fato, se $(a_0 + \sum a_{j_0\ldots j_n} x_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n})/x_i^m$ é um elemento de S_{x_i}, com $a_0, a_{j_0\ldots j_n} \in A$,$j_0 + \ldots + j_n > 0$, então

$$\frac{a_0 e_i}{x_i^{m+1}} + \sum \frac{a_{j_0\ldots j_n} e_s x_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot x_s^{j_s - 1}}{x_i^m} \in \varphi_{x_i}^{-1}((a_0 + \sum a_{j_0\ldots j_n} x_0^{j_0} \ldots x_n^{j_n})/x_i^m).$$

onde $s =$max i,$i = 1, \ldots, n$ tal que $j_i > 0$. E daí, $\widetilde{\varphi}|_{U_i}$ é sobrejetiva e por sua vez $\widetilde{\varphi}$ é sobrejetiva.

A injetividade de $\widetilde{M} \to \mathscr{O}_X^{\oplus n+1}$ pode ser verificada de maneira semelhante valendo-se da condição de que a sequência nas localizações

$$0 \longrightarrow M_{x_i} \longrightarrow E_{x_i} \longrightarrow S_{x_i} \longrightarrow 0$$

é exata.

Em seguida, provemos que $\widetilde{M} \cong \Omega_{X/Y}$.

Sendo $E = S(-1)^{\oplus n+1}$, então φ_{x_i} é um homomorfismo de S_{x_i}-módulos livres, em que E_{x_i} possui o conjunto $\{e_0/x_i, \ldots, e_n/x_i\}$, como base e Ker $\varphi_{x_i} = M_{x_i}$. Mostremos que M_{x_i} é um módulo de posto n cujos geradores são os elementos

$$\left\{\frac{e_j}{x_i} - \frac{x_j}{x_i}\frac{e_i}{x_i}\right\}, j \neq i. \tag{4.7}$$

Assim, seja $h \in$ Ker φ_{x_i}. Podemos escrever h como

$$h = \sum_{j=0}^{n} f_j\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \cdot \frac{e_j}{x_i}.$$

Aplicando φ_i

$$\varphi_i(h) = \sum_{j=0}^{n} f_j\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \cdot \varphi_i\left(\frac{e_j}{x_i}\right) = 0.$$

Observando que $\varphi_i(e_i/x_i) = 1$, segue que

$$f_i\left(\frac{x_0}{x_i} \cdots \frac{x_n}{x_i}\right) = -\sum_{j\neq i} f_j\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \cdot \frac{x_j}{x_i}.$$

Assim, podemos escrever h como

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j\neq i} f_j\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \cdot \frac{e_j}{x_i} - \left\{\sum_{j\neq i} f_j\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \cdot \frac{x_j}{x_i}\right\}\frac{e_i}{x_i} \\ &= \sum_{j\neq i} f_j\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \cdot \left(\frac{e_j}{x_i} - \frac{x_j}{x_i} \cdot \frac{e_i}{x_i}\right). \end{aligned}$$

(4.7) também será linearmente independente pois se tivermos

$$\sum_{j\neq i} b_j(e_j - (x_j/x_i)e_i) = 0 \text{ ,onde } b_j = \sum a_{j_0\cdot\ldots\cdot j_n} x_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}/x_i^{m_j} \in S_{x_i},$$

então

$$\sum_{j\neq i} b_j e_j - \left(\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i} b_j x_j\right) e_i = 0 \in M_{x_i}. \tag{4.8}$$

Denotando por m' o maior entre os m_j que aparecem em cada b_j, e tomando o produto de $x_i^{m'}$ pela expressão acima **(4.8)**, temos

$$\sum_{j\neq i}\left(\sum a_{j_0\cdot\ldots\cdot j_n}x_0^{j_0}\cdot\ldots\cdot x_n^{j_n}\cdot x_i^{m'-m_j}\right)e_j-\sum_{j\neq i}\left(\sum a_{j_0\cdot\ldots\cdot j_n}x_0^{j_0}\cdot\ldots\cdot x_n^{j_n}\cdot x_i^{m'-m_j-1}x_j\right)e_i=0,$$

em M. Como $\{e_0,\ldots,e_n\}$ é base para M, segue que cada coeficiente $a_{j_0\cdot\ldots\cdot j_n}$ se anulará, donde cada b_j é 0.

Com isso, temos que $\widetilde{M}|_{U_i}=M_{x_i}$ é um $\mathscr{O}_{U_i}$-módulo gerado pelas seções

$$\frac{e_j}{x_i}-\frac{x_j}{x_i}\cdot\frac{e_i}{x_i}\ ,\ i\neq j$$

Sendo $U_i\simeq \text{Spec }A[x_0/x_i,\ldots,x_n/x_i]$, então pelo **exemplo 4.1**, $\Omega_{X/Y}|_{U_i}$ é um $\mathscr{O}|_{U_i}$-módulo gerado pelas seções $d(x_j/x_i)$, $j\neq i$. Observação feita, defina a aplicação $\varphi_i\colon \Omega_{X/Y}|_{U_i}\to \widetilde{M}_{U_i}$ como

$$\varphi_i(d(x_j/x_i))=(1/x_i^2)(x_ie_j-x_je_i).$$

Definida assim, φ_i leva um gerador de $\Omega_{X/Y}|_{U_i}$ em um gerador de $\widetilde{M}_{U_i}$ e portanto é um isomorfismo. Precisamos por último, realizar a colagem dos isomorfismos φ_i nos abertos U_i para obter um isomorfismo $\varphi\colon \Omega_{X/Y}\to\widetilde{M}$. De fato, sobre os abertos $U_i\cap U_j$, temos $(x_k/x_i)=(x_k/x_j)\cdot(x_j/x_i)$. Daí, em $\Omega_{X/Y}|_{U_i\cap U_j}$ temos que

$$d\left(\frac{x_k}{x_j}\cdot\frac{x_j}{x_i}\right)=\frac{x_k}{x_j}d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)+\frac{x_j}{x_i}d\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

donde

$$d\left(\frac{x_k}{x_i}\right)-\frac{x_k}{x_j}d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)=\frac{x_j}{x_i}d\left(\frac{x_k}{x_j}\right).$$

Aplicando φ_i no lado esquerdo,

$$\varphi_i\left(d\left(\frac{x_k}{x_i}\right)-\frac{x_k}{x_j}d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)\right)=(1/x_i^2)(x_ie_k-x_ke_i)-\frac{x_k}{x_j}(1/x_i^2)(x_ie_j-x_je_i)=$$

$$\frac{1}{x_ix_j}(x_je_k-x_ke_j)=\frac{x_j}{x_i}\frac{1}{x_j^2}(x_je_k-x_ke_j)=\varphi_j\left(\frac{x_j}{x_i}d\left(\frac{x_k}{x_j}\right)\right).$$

Portanto, a colagem fica bem-definida e concluímos que $\widetilde{M}\simeq\Omega_{X/Y}$.

□

Capítulo 5

A INVARIÂNCIA BIRRACIONAL DO GÊNERO GEOMÉTRICO

Neste capítulo, apresentaremos o resultado principal deste trabalho. Inicialmente, definiremos o conceito de variedade a partir das noções de esquema e exibiremos alguns resultados pertinentes. A seguir definiremos o conceito de gênero geométrico e mostramos que duas variedades projetivas birracionais e não-singulares sobre um corpo algebricamente fechado k possuem o mesmo gênero geométrico. Concluindo o capítulo, veremos aplicações desse teorema e outros resultados.

5.1 Variedades não-singulares

Inicialmente, apresentemos o conceito de variedade abstrata.

Definição 5.1.1 Definimos uma variedade abstrata X como sendo um esquema inteiro separável do tipo finito sobre um corpo algebricamente fechado k. Além disso, se tal esquema for próprio sobre k, diremos que a variedade é completa.

Observação 5.1 : A partir de uma variedade V é possível obter um esquema (Veja [1], proposição 2.6, página 78), o qual é dito o esquema associado a V. Dessa forma, podemos identificar variedades com seus esquemas associados. Portanto, mediante essa identificação, daqui em diante iremos nos referir a uma variedade abstrata simplesmente como uma variedade.

Definição 5.1.2 Uma variedade X sobre um corpo algebricamente fechado k é dita não-singular se os anéis locais de X são anéis locais regulares.

O resultado a seguir estabelece uma conexão entre a não-singularidade e diferenciais.

Proposição 5.1.1 *Seja X um esquema irredutível separável do tipo finito sobre um corpo algebricamente fechado k. Então $\Omega_{X/k}$ é um feixe localmente livre de posto $n = dimX$ se, e somente se, X é uma variedade não-singular sobre k.*

Prova Se $x \in X$ for um ponto fechado, então o anel local $B = \mathscr{O}_{X,x}$ tem dimensão n, corpo residual k e é a localização de uma k-álgebra do tipo finito. Além disso, o módulo de diferenciais $\Omega_{B/k}$ de B sobre k é igual ao talo $(\Omega_{X/k})_x$ do feixe $\Omega_{X/k}$. Portanto, podemos aplicar **proposição 4.1.7** e com isso obtem-se que $(\Omega_{X/k})_x$ é livre de posto n se, e somente se, B é um anel local regular. O resultado segue aplicando **proposição A.4.5** e a **proposição 1.7.3**. $\square$

Proposição 5.1.2 *Seja X uma variedade não-singular sobre k. Seja $Y \subset X$ um subesquema fechado irredutível definido por um feixe de ideais $\mathscr{I}$. Então Y é não-singular se e somente se*

1. *$\Omega_{Y/X}$ é feixe localmente livre*
2. *a sequência exata em **(4.6)** é também exata à esquerda*

$$0 \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to \Omega_{X/k} \otimes \mathscr{O}_Y \to \Omega_{Y/k} \to 0 \tag{5.1}$$

Além disso, neste caso, $\mathscr{I}$ é localmente gerado por $r = codim(Y, X)$ elementos, e $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ é um feixe livre de posto r sobre Y.

Prova Se as asserções (1) e (2) são válidas, então $\Omega_{X/k}$ é localmente livre, de modo que pela **proposição 5.1.1**, precisamos mostrar apenas que o posto de $\Omega_{Y/k}$ é igual dim Y. Então seja q =posto $\Omega_{Y/k}$. Sabido que $\Omega_{X/k}$ é localmente livre de posto n, então, em virtude da sequência exata na asserção (2), temos que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ é localmente livre sobre Y com posto $n - q$. Aplicando o lema de Nakayama (**apêndice A.2**), segue que $\mathscr{I}$ pode ser localmente gerado por $n - q$ elementos, de modo que dim $Y \geq n - (n - q) = q$. Considerando agora qualquer ponto fechado $y \in Y$, teremos que $q = dim_K\ m_y/m_y^2$ devido à **proposição 4.1.5** e então $q \geq \dim Y$ por **A.4.1, apêndice**. Portanto, $q = \dim Y$. Isto mostra que Y é não-singular, e ao mesmo tempo estabelece a outra afirmação da asserção (2), já que sabemos que a codimensão de Y em X é igual a $n - q$.
Agora a recíproca. Assuma que Y é não-singular. Então $\Omega_{X/Y}$ é localmente livre de

posto dim $Y = q$, donde segue diretamente o fato (1). Pela **proposição 4.2.3**, temos a sequência exata

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes \mathscr{O}_Y \xrightarrow{\varphi} \Omega_{Y/k} \longrightarrow 0$$

Considere um ponto fechado $y \in Y$. Então Ker φ é localmente livre de posto $r = n - q$ no ponto y, de modo que é possível escolher seções $x_1, \ldots, x_r \in \mathscr{I}$ numa vizinhança adequada de y, tais que $dx_1, \ldots, dx_r$ geram Ker φ. Seja $\mathscr{I}'$ o feixe ideal gerado por $x_1, \ldots, x_r$, e seja Y' o seu subesquema fechado correspondente. Então, por construção, $dx_1, \ldots, dx_r$ geram um subfeixe livre de posto r de $\Omega_X \otimes \mathscr{O}_{Y'}$ numa vizinhança de y. Segue então que na sequência exata para Y'

$$\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2 \xrightarrow{\delta'} \Omega_{X/k} \otimes \mathscr{O}_{Y'} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{Y'/k} \longrightarrow 0$$

δ' é injetiva, já que sua imagem é livre de posto r, e $\Omega_{Y'/k}$ é localmente livre de posto $n - r$. A parte anterior da demonstração nos mostra que Y' é irredutível e não-singular de dimensão $n - r$ numa vizinhança do ponto y. Mas $Y \subset Y'$, $\mathscr{I} = \mathscr{I}'$, o que nos permite concluir que δ é injetiva como desejado. $\square$

5.2 O Teorema

Primeiramente, estabeleçamos o conceito de birracionalidade entre duas variedades projetivas, e a seguir a noção dos feixes canônico e tangente.

Definição 5.2.1 Seja X,Y variedades projetivas, e considere os pares (U, φ_U), onde U é um aberto não-vazio de X e φ_U é um morfismo de U para Y. Dois pares (U, φ_U), (V, φ_V) são equivalentes se φ_U e φ_V são iguais em $U \cap V$. Defina uma aplicação racional $\varphi\colon X \to Y$ como sendo uma classe de equivalência $\overline{(U, \varphi_U)}$ sob essa relação.

Observação 5.2 Em geral, um mapa racional não é uma aplicação de X para Y. Entretanto, tomando a união U de todos os abertos U_α nos pares $\langle U_\alpha, f_\alpha \rangle$ que pertencem a classe de equivalência do mapa racional, é possível obter um representante maximal $\langle U, f \rangle$ para a aplicação, com f definida de tal maneira que $f_{|U_\alpha} = f_\alpha$. O aberto U construído dessa maneira é um aberto denso e é dito o *domínio* do mapa racional $\varphi\colon X \to Y$.

Definição 5.2.2 Um mapa birracional $\varphi\colon X \to Y$ é um mapa racional que admite um mapa racional $\psi\colon Y \to X$ satisfazendo $\psi \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \psi = id_Y$ como mapas racionais.

ψ é dita uma inversa para φ. Dizemos que X é birracionalmente equivalente a Y se existir um mapa birracional de X para Y.

Definiremos a seguir a Álgebra Exterior de um feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F}$.
Dado um A-módulo M, denotando por $T^n(M)$ o produto tensorial de M uma quantidade n de vezes, definimos uma A-álgebra $T(M)$ como sendo $T(M) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(M)$. Com isso, a álgebra exterior de M, que será denotada por $\bigwedge M$ será o quociente de $T(M)$ pelo ideal gerado pelas expressões de $x \otimes x$, $x \in M$. Dessa maneira, $\bigwedge M = \bigoplus_{n\geq 0} \bigwedge^n M$. Com base nesse fato, então

Definição 5.2.3 *Seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço anelado e $\mathscr{F}$ feixe de $\mathscr{O}_X$-módulos. Definiremos a álgebra exterior $\bigwedge \mathscr{F}$ de $\mathscr{F}$ como sendo o feixe associado ao pré-feixe definido associando-se a cada aberto U, o elemento $\bigwedge(\mathscr{F}(U))$, que é uma $\mathscr{O}_X$-álgebra haja vista $\mathscr{F}(U)$ ser um $\mathscr{O}_X(U)$-módulo. Dado n natural, dizemos que a componente $\wedge^n \mathscr{F}$ é a n-ésima potência exterior de $\mathscr{F}$.*

Definição 5.2.4 (Feixe Tangente e Feixe canônico) Seja X uma variedade não-singular sobre um corpo k. Defina o feixe tangente de X como sendo $\mathscr{T}_X = Hom_{\mathscr{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathscr{O}_X)$. Defina também o feixe canônico de X como sendo $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$.

Observe que ω_X é um feixe invertível. Agora, antes de enunciar o teorema, definimos o gênero geométrico $p_g(X)$ de uma variedade X projetiva e não-singular sobre um corpo k como sendo $p_g(X) = dim_k \Gamma(X, \omega_X)$. Do fato de $\Gamma(X, \omega_X)$ ser um espaço vetorial de dimensão finita, temos que $p_g(X)$ é um número não-negativo.

Teorema 5.1 (Invariância birracional do gênero geométrico) *Seja X e X' duas variedades birracionalmente equivalentes, projetivas e não-singulares sobre k. Então $p_g(X) = p_g(X')$.*

Prova Seja $f\colon X \to X'$ um mapa birracional e denote por $V \subset X$ o domínio do mapa racional f (Como na **observação 5.2**). Assim, $f\colon V \to X'$ é um morfismo que representa esta aplicação racional e além disso V é denso em X. Então aplicando a **proposição 4.2.2** para f e o morfismo $X' \to \operatorname{Spec} k$ dado pela hipótese, obtemos uma aplicação

$$f^*\Omega_{X'} \longrightarrow \Omega_V.$$

Pela **proposição 5.1.1**, este é um morfismo de feixes localmente livres de posto $n = dim$ X, de modo que obtemos uma aplicação induzida nas potências exteriores $f^*\omega_{X'} \to$

ω_V. Esta aplicação por sua vez induz uma aplicação entre os espaços das seções globais $f^*\colon \Gamma(X', \omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$. Agora, como f é birracional, existe um aberto $U \subset V$ tal que $f(U)$ é um aberto de X', e f induz um isomorfismo de U para $f(U)$. Portanto, $\omega_V|_U \simeq \omega_{X'}|_{f(U)}$ via f. Do fato de que a seção global não-nula de um feixe invertível não pode se anular em um aberto denso, concluímos que a aplicação de espaços vetoriais $f^*\colon \Gamma(X', \omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$ deve ser injetiva. Em seguida, devemos comparar $\Gamma(V, \omega_V)$ e $\Gamma(X, \omega_X)$.

Inicialmente, mostremos que $X - V$ tem codimensão maior ou igual a 2 em X. Com efeito, isso é consequência do critério de valoração para morfismos próprios, **teorema 2.1**. Se $p \in X$ é um ponto de codimensão 1, então $\mathscr{O}_{X,p}$ é domínio de valoração discreta já que X é não-singular, **proposição A.4.3**. Sendo X' é projetivo, como consequência do **teorema 2.3**, X' é próprio sobre k. Assim, temos um morfismo próprio $g\colon X' \to \text{Spec } k$. Para aplicarmos o critério, levaremos em consideração o corpo de frações $Q(\mathscr{O}_{X,p})$. Observe que $Q(\mathscr{O}_{X,p})$ é o corpo de funções K da variedade X, e por sua vez $K = \mathscr{O}_{X,\lambda}$, sendo λ o ponto genérico de X. Veja que como V é um aberto denso, então $\lambda \in V$. Dessa forma, restrigindo f temos uma aplicação $f_1\colon \text{Spec } K \to X'$ do ponto genérico de X para X'. Assim, o critério de valoração para morfismos próprios garante a existência de $\Delta\colon$ Spec $\mathscr{O}_{X,p} \to X'$ satisfazendo o diagrama comutativo a seguir.

$$\begin{tikzcd}
\text{Spec } K \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "i"] & X' \arrow[d, "g"] \\
\text{Spec } \mathscr{O}_{X,p} \arrow[r, "s"] \arrow[ur, "\Delta"] & \text{Spec } k
\end{tikzcd}$$

Tal morfismo pode ser estendido a uma vizinhança de p, donde devemos ter $p \in V$ pela definição de V.

Agora precisamos mostrar que a aplicação de restrição natural $\Gamma(X, \omega_X) \to \Gamma(V, \omega_V)$ é bijetiva. Para isso, é suficiente mostrar que para qualquer aberto afim $U \subset X$ tal que $\omega_X|_U \simeq \mathscr{O}_U$, temos $\Gamma(U, \mathscr{O}_U) \to \Gamma(U \cap V, \mathscr{O}_{U\cap V})$ bijetiva. De fato, a injetividade segue do fato de $U \cap V$ ser denso em U. Portanto, uma seção nula em $U \cap V$ será nula em U. Agora, dada uma seção s de $\Gamma(U \cap V, \mathscr{O}_{U\cap V})$, observe que devido ao fato de que $U - (U \cap V)$ ter codimensão maior ou igual a 2 em U, então os pontos de codimensão 1 de U estão em $U \cap V$. Além disso, pelo fato de X ser não-singular, X é normal. Então, sendo $U =$Spec A, como consequência da **proposição A.4.4, apêndice**, segue que $A = \cap A_p$, com a interseção sendo tomada sobre as localizações de A em ideais primos p com altura 1. Como s está definida nos pontos que correspondem aos ideais primos de cada A_p, então

s regular nos pontos de Spec $A = U$ e portanto ela define uma seção de $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$, o que nos garante a sobrejetividade.

Combinando tais resultados, vemos que

$$dim\Gamma(X', \omega_{X'}) \leq dim\Gamma(V, \omega_V) = dim\Gamma(X, \omega_X)$$

donde $p_g(X') \leq p_g(X)$. Obtemos a outra desigualdade por simetria, e portanto, concluímos que $p_g(X) = p_g(X')$. $\square$

5.3 Outros Resultados e Aplicações

Os resultados a seguir tratam do comportamento do feixe canônico de uma subvariedade não-singular de uma variedade não-singular. Em seguida, falaremos a respeito de variedades racionais e apresentaremos um resultado que permite verificar se uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^n$ é uma variedade não-racional.

Definição 5.3.1 Seja Y uma subvariedade não-singular de uma variedade não-singular X sobre um corpo k. Chamamos de feixe conormal de Y em X, o feixe localmente livre $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$, sendo $\mathscr{I}$ o feixe ideal que dá a estrutura de subesquema fechado em Y. O seu dual $\mathscr{N}_{Y/X} = Hom_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_Y)$ será então o feixe normal de Y em X. O feixe $\mathscr{N}_{Y/X}$ é um feixe localmente livre de posto $r = codim(Y, X)$.

Proposição 5.3.1 *Seja* $0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de feixes localmente livres, tais que* $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ *e* $\mathscr{F}''$ *possuem postos* n', n *e* n'' *respectivamente. Então existe um isomorfismo* $\bigwedge^n \mathscr{F} \simeq \bigwedge^{n'} \mathscr{F}' \otimes \bigwedge^{n''} \mathscr{F}''$.

Prova Com efeito, provemos o resultado para espaços vetoriais, mas o argumento pode ser adaptado à módulos. Dessa forma, supondo uma sequência exata $0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$, em que U, V, W sejam espaços vetoriais de dimensão u, v e w respectivamente e $s\colon U \to V$, $r\colon V \to W$ os homomorfismos que compõem a sequência. Defina em seguida o homomorfismo

$$A\colon \bigwedge^{u} U \otimes \bigwedge^{w} W \longrightarrow \bigwedge^{v} V$$

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_u) \otimes (b_1 \wedge \ldots \wedge b_w) \longmapsto s(a_1) \wedge \ldots \wedge s(a_u) \wedge r^{-1}(b_1) \ldots \wedge r^{-1}(b_w)$$

Esta aplicação está bem-definida, haja vista ser $W \simeq V/s(U)$ e para elementos cujas coordenadas $r^{-1}(b_i)$ pertençam a $s(U)$, a sua respectiva imagem por A será nula. A aplicação A assim definida é não-nula, de forma que é portanto uma aplicação sobrejetiva entre espaços vetoriais de dimensão 1, e portanto um isomorfismo. $\square$

Antes de apresentar o próximo resultado, relembremos que uma variedade X é definida como sendo um esquema inteiro separável do tipo finito sobre um corpo algebricamente fechado k. Definida assim, observe que de fato X é um esquema Noetheriano. Com efeito, ser do tipo finito sobre k significa que existe um morfismo $f\colon X \to \operatorname{Spec} k$ com a condição de que $f^{-1}(\operatorname{Spec} k)$ é coberto por uma quantidade finita de abertos afins $\{U_j = \operatorname{Spec} A_j\}$ e cada A_j é uma k-álgebra finitamente gerada. Daí A_j é um anel noetheriano. Se além disso, a variedade é não-singular, então seus anéis locais são regulares. Portanto, isso nos permite confirmar que uma variedade não-singular X é em particular um esquema inteiro separável noetheriano e regular em codimensão 1 e além disso uma subvariedade não-singular fechada de codimensão 1 é um divisor primo de X, conforme visto no capítulo 3. Em virtude do **teorema 3.1**,um divisor de Weil Y pode ser visto como um divisor de Cartier sobre X, que chamaremos de D, de modo que faz sentido considerarmos o subesquema fechado associado a esse divisor de Cartier (Veja **definição 3.3.1**), nesse caso, o próprio subesquema Y.

Proposição 5.3.2 *Seja Y uma subvariedade não-singular de codimensão r em uma variedade não-singular X sobre um corpo k. Então temos $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathscr{N}_{Y/X}$. No caso $r = 1$, considerando Y como um divisor e sendo $\mathscr{L}$ seu feixe associado invertível sobre X, vale $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_Y$*

Prova Considere a sequência exata **(5.1)**

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \longrightarrow \Omega_X \otimes \mathscr{O}_Y \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow 0.$$

Considerando Ω_X feixe localmente livre com posto n e aplicando a **proposição 5.3.1** para essa sequência, obtemos

$$\bigwedge^n \Omega_X \otimes \mathscr{O}_Y \simeq \left(\bigwedge^n \Omega_X\right) \otimes \mathscr{O}_Y \simeq \bigwedge^{n-r} \Omega_Y \otimes \bigwedge^r (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2),$$

donde

$$\omega_X \otimes \mathscr{O}_Y \simeq \omega_Y \otimes \bigwedge^r (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2).$$

Utilizando o fato que a formação de potências exteriores comuta com a operação de tomar o feixe dual, concluímos que $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathscr{N}_{Y/X}$. No caso $r = 1$, temos que $\mathscr{I}_Y \simeq \mathscr{L}(-Y)$

(proposição 3.3.2). Portanto, pela **proposição 3.3.1**,

$$\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{L}(-Y) \cdot \mathscr{L}(-Y) \simeq \mathscr{L}(-2Y)$$

e daí,

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \simeq \mathscr{L}(-Y)/\mathscr{L}(-2Y) \simeq \mathscr{L}(-Y) \otimes \mathscr{O}_Y,$$

donde tomando-se o feixe dual vale $\mathscr{N}_{Y/X} \simeq \mathscr{L}(Y) \otimes \mathscr{O}_Y$. Denotando $\mathscr{L}(Y)$ apenas por $\mathscr{L}$, então, para $r = 1$, obtemos $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_Y$. $\square$

Antes de prosseguirmos, definimos uma variedade como sendo racional se ela é birracionalmente equivalente a $\mathbb{P}^n$ para algum n natural. A principal implicação do próximo resultado é oferecer um teste para verificar se uma hipersuperfície de grau d é uma variedade não-racional.

Proposição 5.3.3 *Seja $X = \mathbb{P}^n$ e $Y = k$. Então $\omega_X \simeq \mathscr{O}_X(-n-1)$. Além disso, se Z for uma hipersuperfície de grau d, $d \geq 2$, então $\omega_Z \simeq \mathscr{O}_Z(d-n-1)$.*

Prova Considere a sequência exata exibida na **proposição 4.2.4**

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

Utilizando a **proposição 5.3.1** na sequência exata **(5.2)**, e calculando as potências exteriores máximas de cada elo, obtemos

$$\omega_X \otimes \mathscr{O}_X \simeq \bigwedge^{n+1} \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \tag{5.3}$$

Observe que para $n = 0$, naturalmente obtemos que $\bigwedge^{n+1} \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \simeq \mathscr{O}_X(-n-1)$. Supondo que fixado um inteiro não-negativo k tal fato seja verdadeiro, então por meio da sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{k+1} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1)^{k+2} \longrightarrow \mathscr{O}_X(-1) \longrightarrow 0$$

definida de maneira natural e aplicando novamente **proposição 5.3.1**, segue que

$$\bigwedge^{k+2} \mathscr{O}_X(-1)^{k+2} \simeq \bigwedge^{k+1} \mathscr{O}_X(-1)^{k+1} \otimes \bigwedge \mathscr{O}_X(-1)$$

Portanto, pela hipótese de indução, conclui-se que

$$\bigwedge^{k+2} \mathscr{O}_X(-1)^{k+2} \simeq \mathscr{O}_X(-k-1) \otimes \mathscr{O}_X(-1) \simeq \mathscr{O}_X(-k-2),$$

conforme desejado. Com isso, concluímos que $\bigwedge^{n+1} \mathscr{O}_X(-1)^{n+1} \simeq \mathscr{O}_X(-n-1)$ e podemos então reescrever **(5.3)** como

$$\omega_X \otimes \mathscr{O}_X \simeq \omega_X \simeq \mathscr{O}_X(-n-1).$$

Agora seja Z uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^n$. Então, considerando Z como um divisor de X, pela **proposição 3.1** temos que $Z \sim dH$, com H sendo o hiperplano $x_0 = 0$ de $\mathbb{P}^n$. E devido ao resultado **proposição 3.3.1**, sendo $\mathscr{I}$ o feixe ideal associado a Z, temos que $\mathscr{I} \simeq \mathscr{L}(-dH)$, pela **proposição 3.3.2**. Com isso, $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \simeq \mathscr{L}(-dH)/\mathscr{L}(-2dH) \simeq \mathscr{L}(-dH) \otimes \mathscr{O}_Z$. Dessa maneira, seu dual $\mathscr{N}_{Z/X} \simeq \mathscr{L}(dH) \otimes \mathscr{O}_Z$. Pela **proposição 5.3.2**, segue que

$$\omega_Z \simeq \omega_X \otimes \mathscr{L}(dH) \otimes \mathscr{O}_Z \simeq \mathscr{O}_X(-n-1) \otimes \mathscr{L}(dH) \otimes \mathscr{O}_Z \simeq \mathscr{O}_Z(d-n-1).$$

□

Observe que dado s inteiro positivo, então $\mathscr{O}_X(-s)$ não possui seções globais, e isso implica que $p_g(\mathbb{P}^n) = 0$, $n \geq 1$. devido a **proposição 5.1**, concluímos que se X é uma variedade racional, então $p_g(X) = 0$. Com esse resultado, é possível discernir se uma hipersuperfície Y não-singular de grau d em $\mathbb{P}^n$ é uma variedade não-racional, (nesse caso, $p_g(X) \neq 0$). Além disso, permite concluir que existem variedades não-racionais em todas as dimensões. Exibiremos a seguir a aplicação desse resultado em alguns casos particulares do feixe ω_Y.

(1) **n = 2, d = 2**: Y é uma cônica em $\mathbb{P}^2$, e $\omega_Y = \mathscr{O}_Y(-1)$. Y pode ser visto como imagem de um mergulho 2-uplo de $\mathbb{P}^1$

$$\mu\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(a_0 : a_1) \longmapsto (a_0a_0 : a_0a_1 : a_1a_1)$$

(2) **n = 2, d = 3**: Y é uma curva cúbica plana não-singular e $\omega_Y \simeq \mathscr{O}_Y$. Daí, $p_g(Y) = \dim \Gamma(Y, \omega_Y) = 1$, donde concluímos que Y é não-racional.
(3) **n = 2, d ≥ 4**: Para uma curva plana de grau arbitrário d, teremos a expressão $\omega_Y \simeq \mathscr{O}_Y(d-3)$. Com isso, $p_g(Y) > 0$ e portanto a curva é não-racional.
(4) **n = 3, d = 2,3**: Aqui as hipersuperfícies Y são quádricas e cúbicas não-singulares de $\mathbb{P}^3$, com $\omega_Y \simeq \mathscr{O}_Y(-2), \mathscr{O}_Y(-1)$, respectivamente. $p_g(Y) = 0$. Tais hipersuperfícies, de fato, são racionais.

(5) $\mathbf{n = 3,\ d \geq 4}$: Outro exemplo de hipersuperfícies não-racionais, $\omega_Y \simeq \mathscr{O}_Y(d-4)$, $p_g > 0$.
(6) $\mathbf{n = 4,\ d = 3{,}4}$: As cúbicas e quárticas em $\mathbb{P}^4$ possuem $p_g = 0$. De todo modo é sabido que no geral elas não são variedades racionais. Veja [7] e [8].

Finalmente para o caso n geral, com $d \geq n+1$, temos um resultado revelante. Tal hipersuperfície Y não-singular de $\mathbb{P}^n$ satisfaz $\omega_Y \simeq \mathscr{O}_Y(d-n-1)$, donde $p_g(Y) > 0$ e Y é não-racional. Com isso, podemos concluir a existência de variedades não-racionais em todas as dimensões.

REFERÊNCIAS

[1] HARSHORNE, R. *Algebraic Geometry.* New York : Spring-Verlag, 1977. (Graduate Texts in Mathematics, 52).

[2] UENO, K. *Algebraic Geometry 1:* From Algebraic Varieties to Schemes. Tokio : American Mathematical Society, 1997. (Translations of Mathematical Monographs, 185).

[3] UENO, K. *Algebraic Geometry 2:* Sheaves and Cohomology. Tokio : American Mathematical Society, 1997. (Translations of Mathematical Monographs, 197).

[4] UENO, K. *Algebraic Geometry 3:* Further Study of Schemes. Tokio : American Mathematical Society, 1998. (Translations of Mathematical Monographs, 218).

[5] MATSUMURA, H. *Commutative Algebra.* 2. ed. Reading, Mass : W. A. Benjamin Co., 1980.

[6] ATIYAH, M.F.; MACDONALD, I.G. *Introduction to Commutative Algebra*, Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1969.

[7] CLEMENS, C. H.; GRIFFITHS, P. A. the Intermediate Jacobian of the cubic threefold. Annals of Math., v. 95, p. 281-356, 1972.

[8] ISKOVSKIH, V. A.; MANIN, JU. I. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. Math. USSR-Sbornik v. 15, p. 141-166, 1971.

[9] GATHMANN, A. Algebraic Geometry: Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern 2002/2003. Disponível em <http://www.mathematik.uni-kl.de/ gathmann/class/alggeom-2002/main.pdf>. Acesso em 20 de set. 2012.

APÊNDICE A

A.1 Limites diretos

Definição A.1.1 Seja I um conjunto dirigido e parcialmente ordenado. Definimos um sistema dirigido como sendo uma família de objetos $\{X_i, i \in I\}$ indexados por I e tal que para cada par $i, j \in I$ com $i \leq j$, exista um morfismo $f_{ij} \colon X_i \to X_j$ satisfazendo:

1. f_{ii} é a função identidade de X_i
2. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ para $i \leq j \leq k$

A família $\langle X_i, f_{ij} \rangle$ definida dessa maneira é dito um sistema dirigido sobre I.

Agora passemos a definição do limite direto de um sistema dirigido.

Definição A.1.2 Seja $\langle X_i, f_{ij} \rangle$ um sistema dirigido. Um elemento pertencente a essa família é da forma (x, i), onde $x \in X_i$. Assim, defina uma relação sobre esses elementos de tal maneira que $(x_i, i) \sim (x_j, j)$ se existir $k \in I$ e morfismos f_{ik}, f_{jk} tais que $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$. Definimos o limite direto como sendo a união disjunta dos elementos dessa família quocientado por essa relação $\varinjlim X_i = \bigsqcup X_i / \sim$.

O limite direto é dotado da seguinte propriedade universal: Seja $\langle X_i, f_{ij} \rangle$ um sistema dirigido sobre uma categoria de objetos $\mathscr{A}$. O limite direto é um objeto X em $\mathscr{A}$ determinado por $\langle X_i, f_{ij} \rangle$ junto com morfismos $\phi_i \colon X_i \to X$ satisfazendo $\phi_i = \phi_j \circ f_{ij}$. Se existirem um outro objeto Y em $\mathscr{A}$ e morfismos $\psi_i \colon X_i \to Y$ satisfazendo $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$, então existirá um unico morfismo $u \colon X \to Y$ fazendo o diagrama seguinte comutar:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Exibiremos a seguir um exemplo prático do cálculo de um limite direto.

Exemplo A.1 *considere o ponto* $(p) \in$ *Spec* $\mathbb{Z}$, *em que* p *é um número primo. Para cada inteiro* f, *seja* $D(f)$ *o aberto principal correspondente na topologia de Zariski de Spec* $\mathbb{Z}$. *Assim,* $(p) \in D(f)$ *se, e somente se,* $f \notin (p)$, *donde* p *não divide* f *e, portanto,* p *e* f *são relativamente primos. Construíremos um sistema dirigido a partir do conjunto*

$$C_p = \{D(f) | f \text{ e } p \text{ são relativamente primos}\}.$$

Defina em C_p *a seguinte relação de ordem*

$$D(f) \leq D(g) \text{ se, e somente se, } D(f) \supset D(g).$$

Agora, através da correspodência entre um aberto $D(f)$ *e o anel local* $\mathbb{Z}_f$, *e do fato de que* $D(f) \supset D(g)$ *se, e somente se* $g \in rad(f)$, *podemos obter homomorfismos de restrição* $\rho_{D(g),D(f)}$ *entre* $\mathbb{Z}_f$ *e* $\mathbb{Z}_g$ *definidos como*

$$\begin{array}{rccc} \rho_{D(g),D(f)}: & \mathbb{Z}_f & \longrightarrow & \mathbb{Z}_g \\ & \dfrac{r}{f^m} & \longmapsto & \dfrac{a^m r}{a^m f^m} = \dfrac{a^m r}{g^{nm}} \end{array}$$

em que $g^n = af$, *para algum* n *inteiro positivo, donde* $g^{nm} = a^m f^m$.
A aplicação $\rho_{D(g),D(f)}$ *está bem-definida e* $\{\mathbb{Z}_f, \rho_{D(g),D(f)}\}$ *é o sistema dirigido em questão. Calculemos agora o limite* $\varinjlim_{D(f) \in C_p} \mathbb{Z}_f$.
Para isso, suponhemos f *inteiro positivo e expressemos um elemento* r/f^m *de* $\mathbb{Z}_f$ *como uma fração irredutível*

$$\frac{r}{f^m} = \frac{s}{t}$$

em que p não divide t. Com isso, obtemos

$$\overline{\left(\frac{r}{f^m}, D(f)\right)} = \overline{\left(\frac{s}{t}, D(t)\right)}$$

em $\varinjlim_{D(f)\in C_p} \mathbb{Z}_f$*, de forma que todo elemento de* $\varinjlim_{D(f)\in C_p} \mathbb{Z}_f$ *pode ser expresso como* $\overline{(s/t, D(t))}$*, com s/t irredutível.*

Daí, segue que

$$\varinjlim_{D(f)\in C_p} \mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}'_{(p)}$$

onde $\mathbb{Z}'_{(p)} = \{\overline{\left(\frac{n}{m}, D(m)\right)} | n/m$ *irredutível.* $m, n \in \mathbb{Z}, mdc(m,p) = 1\}$*. Podemos identificar* $\mathbb{Z}_{(p)}$ *com* $\mathbb{Z}'_{(p)}$*, fazendo* $n/m \mapsto \overline{\left(\frac{n}{m}, D(m)\right)}$*. Portanto,*

$$\varinjlim_{D(f)\in C_p} \mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}_{(p)}$$

A noção dual de limite dirigido pode ser estabelecida de maneira similar.

Definição A.1.3 Seja I um conjunto dirigido e parcialmente ordenado. Definimos um sistema projetivo como sendo uma família de objetos $\{X_i, i \in I\}$ indexados por I e tal que para cada par $i, j \in I$ com $i \leq j$, exista um morfismo $f_{ij}\colon X_j \to X_i$ satisfazendo:

1. f_{ii} é a função identidade de X_i
2. $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ para $i \leq j \leq k$

A família $\langle X_i, f_{ij}\rangle$ definida dessa maneira é dito um sistema projetivo sobre I.

Definição A.1.4 Seja $\langle X_i, f_{ij}\rangle$ um sistema projetivo. Um elemento pertencente a essa família é da forma (x, i), onde $x \in X_i$. Assim, o limite projetivo $\varprojlim X_i$ como

$$\varprojlim X_i = \{a \in \prod_{i\in I} X_i | a_i = f_{ij}(a_j) \text{ para } i \leq j\}$$

O limite projetivo também possui uma é dotado da propriedade universal: Seja $\langle X_i, f_{ij}\rangle$ um sistema projetivo sobre uma categoria de objetos $\mathscr{A}$. O limite projetivo é um objeto X em $\mathscr{A}$ determinado por $\langle X_i, f_{ij}\rangle$ junto com morfismos $\phi_i\colon X \to X_i$ satisfazendo $\phi_i = f_{ij} \circ \phi_j$. Se existirem um outro objeto Y em $\mathscr{A}$ e morfismos $\psi_i\colon Y \to X_i$ satisfazendo $\psi_i = f_{ij} \circ \psi_j$, então existirá um unico morfismo $u\colon Y \to X$ fazendo o diagrama seguinte comutar:

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{Y} \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
& \boldsymbol{X} \arrow[dl, "\phi_j"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & \\
\boldsymbol{X_j} \arrow[rr, "f_{ij}"] & & \boldsymbol{X_i}
\end{tikzcd}$$

A.2 Lema de Nakayama

Proposição A.2.1 ***(Lema de Nakayama)*** *Sejam A um anel comutativo com unidade, M um A-módulo finitamente gerado e a um ideal de A contido na interseção de todos os ideais maximais de A, o radical de Jacobson $\mathscr{R}$ de A. Então, se $aM = M$, segue que $M = 0$.*

Prova Suponha $M \neq 0$, e seja $u_1, \ldots, u_n$ um conjunto minimal de geradores de M. Então, como por hipótese $aM = M$, temos $u_n \in aM$, e daí, $u_n = a_1u_1 + \ldots + a_nu_n$, com $a_i \in a$. Com isso, segue que $(1 - a_n)u_n = a_1u_1 + \ldots + a_{n-1}u_{n-1}$. Como $a_n \in \mathscr{R}$, $1 - a_n$ é uma unidade em A. Dessa forma, u_n pertenceria ao submódulo de M gerado por $u_1, \ldots, u_{n-1}$, contradizendo a minimalidade do conjunto de geradores de M. Portanto, M $= 0$. $\square$

Corolário A.2.1 *Seja M um A-módulo finitamente gerado, e N um submódulo de M, com $a \subset \mathscr{R}$ um ideal. Então se $M = aM + N$, segue que $M = N$.*

Prova Segue do lema de Nakayama, aplicado ao módulo M/N, tendo em vista que $a(M/N) = (aM + N)/N$. $\square$

Corolário A.2.2 *Sejam A um anel local com ideal maximal m, M um A-módulo finitamente gerado e $x_1, \ldots, x_n$ elementos M cujas imagens em M/mM formam uma base para o espaço vetorial M/mM. Então, os elementos x_i geram M.*

Prova Seja N o submódulo de M gerado pelos x_i. Então as inclusões $N \to M \to M/mM$, levam N sobrejetivamente sobre M/mM, e daí, $N + mM = M$. Pelo corolário anterior, segue que $N = M$. $\square$

A.3 Anéis de Valoração

Definição A.3.1 *Seja K um corpo arbitrário e G um grupo abeliano totalmente ordenado. Definimos uma valoração de K como sendo uma aplicação $v\colon K\setminus\{0\} \to G$ tomando valores em G, sujeita às seguintes condições $(x, y \neq 0)$*

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$
2. $v(x + y) \geq min(v(x), v(y))$

Assim, dada uma valoração de um corpo K, podemos definir o conjunto $R = \{x \in K|v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$. R é de fato um subanel de K, haja vista $v(x + y) \geq 0, v(xy) \geq 0$ e $v(1) = 0$ com as demais propriedades de anel herdadas naturalmente de K. R é dito o anel de valoração de v. Mais precisamente, um anel A é dito um anel de valoração se ele for um domínio de integridade e além disso ele for um anel de valoração de alguma valoração v de seu corpo quociente.

R é um anel local com ideal maximal $m = \{x \in K|v(x) > 0\}$. De fato, m é fechado para a operação de soma e para ay com $a \in R$,$y \in m$, $v(ay) \geq 0$. Se $x \in R \setminus m$, então $v(x) = 0$ e como $v(x \cdot x^{-1}) = 0$, então $v(x^{-1}) = 0$, donde $x^{-1} \in R$. Então x é unidade e conclui-se que m é ideal maximal. Se p for um outro ideal maximal de R, então $x \in R\setminus m$ implica que x é unidade e portanto, $x \notin p$. Portanto, $p \subset m$. Se a valoração v se anular em um subcorpo k de K, isto é, $v(k \setminus \{0\})$, então diremos que v é uma valoração de K/k e R será um anel de valoração de K/k. Em particular, quando $G = \mathbb{Z}$, dizemos que a valoração é discreta e o subsequente domínio será um domínio de valoração discreta.

A.4 Miscelânea

Definição A.4.1 Um anel local noetheriano A com ideal maximal m e corpo residual $A/m = k$ é dito um anel regular se dim $A = dim_k\ m/m^2$.

Proposição A.4.1 *Se A é um anel local noetheriano com ideal maximal m e corpo residual k, então $dim_k m/m^2 \geq dimA$.*

Prova Veja [5], página 78. □

Definição A.4.2 *Seja k um corpo. Uma extensão K/k é dita separavelmente gerada se K é uma extensão separável de uma certa extensão $k(t_1, \ldots, t_n)/k$, onde cada t_i é um elemento transcendente sobre k.*

Proposição A.4.2 *Se k é um corpo perfeito, então qualquer extensão finitamente gerada K/k é separavelmente gerada.*

Prova Veja [5], página 194, Corolário. □

Proposição A.4.3 *Seja A um domínio de integridade que é também um anel local noetheriano de dimensão 1. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é um anel de valoração discreta*
2. *A é inteiramente fechado*
3. *A é um anel local regular*
4. *m é um ideal principal*

Prova Veja [6], proposição 9.2, página 94. □

Proposição A.4.4 *Seja A um domínio noetheriano inteiramente fechado. Então $A = \bigcap_{p \text{ primo },\, ht\, p=1} A_p$.*

Prova Veja [5], teorema 38, página 124. □

Proposição A.4.5 *Uma localização de um anel regular em um ideal primo é um anel regular.*

Prova Veja [5], página 139. □

Proposição A.4.6 *Seja A um anel e*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \tag{A.1}$$

uma sequência de A-módulos e homomorfismos. Tal sequência será exata se, e somente se, a sequência

$$0 \longrightarrow Hom(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} Hom(M', N) \tag{A.2}$$

for uma sequência exata para qualquer A-módulo N, em que $f \mapsto f \circ v$ e $f \mapsto f \circ u$ são de maneira natural as leis das aplicações $\overline{v}$ e $\overline{u}$, respectivamente.

Prova Suponha que A sequência em (A.2) seja exata. Dessa forma, como consequência da exatidão, $\overline{v}$ é injetiva para qualquer N. Com isso, temos que v é sobrejetiva. De fato, se assim não for, então Im $v \neq M''$. Considere então, o homomorfismo $h \colon M'' \to N$, tal que $h_{|Imv} = 0$, e $h_{|(M'' \setminus Imv)} \neq 0$. h assim definido é um elemento de $Hom(M'', N)$ e claramente $\overline{v}(h) = h \circ v = 0$, o que contraria a injetividade de $\overline{v}$. Em seguida, temos que $\overline{u} \circ \overline{v} = 0$, também por conta da hipótese de ser seqûencia exata. Logo, seja $f \colon M'' \to N$ uma aplicação, então $\overline{u} \circ \overline{v}(f) = f \circ v \circ u = 0$. Tomando $N = M''$ e considerando f a aplicação identidade, então $v \circ u = 0$, ou seja, Im $u \subset$ Ker v. Para verificarmos que Im $u \supset$ Ker v, tome $N = M/\text{Im } u$ e seja π a projeção $\pi \colon M \to N$. Aplicando $\overline{u}$ em π, temos $\overline{u}(\pi) = \pi \circ u$ com Im $(\pi \circ u) =$ Im $u/$ Im $u = 0$. Portanto, $\pi \in$ Ker $\overline{u}$. Como por hipótese em (A.2), Im $\overline{v} =$ Ker $\overline{u}$, então existe $\varphi \in Hom(M'', N)$ tal que $\pi = \varphi \circ v$ e portanto Ker $v \subset$ Ker $\pi =$ Im u, donde concluímos que (A.1) é exata. Vejamos agora a recíproca.

Admitindo que (A.1) seja uma sequência exata, então por hipótese, temos v sobrejetiva, e como consequência disso, $\overline{v}$ será injetiva. De fato, se tivermos $\overline{v}(f) = f \circ v = 0$, onde $f \in Hom(M'', N)$, então $f \circ v(M) = f(M'') = 0$ e, portanto $f = 0$. Agora, resta verificar que Im $\overline{v} =$ Ker $\overline{u}$. Seja $f \in$ Im $\overline{v}$. Então existe $g \in Hom(M'', N)$ tal que $f = g \circ v$. Assim, $\overline{u}(f) = g \circ v \circ u$ e pela hipótese de exatidão em (A.1), $v \circ u = 0$, donde segue que Im $\overline{v} \subset$ Ker $\overline{u}$. E para a outra inclusão, se $g \in$ Ker $\overline{u}$, então $\overline{u}(g) = g \circ u = 0$, donde conclui-se a outra inclusão. Portanto, (A.2) é sequência exata. $\square$