



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RUI EDUARDO BRASILEIRO PAIVA

INJETIVIDADE COMO UM FENÔMENO DE  
TRANSVERSALIDADE EM GEOMETRIAS DE  
CURVATURA NEGATIVA

FORTALEZA  
2013

**RUI EDUARDO BRASILEIRO PAIVA**

INJETIVIDADE COMO UM FENÔMENO DE  
TRANSVERSALIDADE EM GEOMETRIAS DE  
CURVATURA NEGATIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

FORTALEZA  
2013

*Dedico este trabalho à minha família, a meu pai Rui Paiva e à minha mãe Regina Cláudia, pela confiança e orgulho em mim depositados. À minha esposa Emanuela e a filha Letícia. Aos meus irmãos Daniele e Rodrigo.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela força e as oportunidades.

Ao meu pai Rui do Vale Paiva e a minha mãe Regina Cláudia Brasileiro Paiva pelo amor e carinho.

Aos meus irmãos Daniele e Rodrigo e a querida tia avó Maria de Lourdes.

À amada esposa Emanuela e a linda filha Letícia.

Ao estimado amigo Genário, pelos conselhos, a amizade e o companheirismo.

Aos meus amigos da UFC: Anderson, Airton, Breno, Diego, Eurípedes, Eduardo, Gilson, Henrique, João Nunes, João Luís, Leo Ivo, Neilha, Nicolas, Otávio, Rafael, Roger, Renan, Selene, Yuri e Wanderley. Aqui um destaque especial ao grande amigo José Edson Sampaio pelas horas de estudos juntos, pela paciência em sanar minhas dificuldades, pelas valorosas contribuições na elaboração deste trabalho e pela amizade.

Aos queridos amigos Ricardo Mesquita, Wellington Loureiro, Ana Paula Araújo, Kariny Brito e a querida tia Hildene.

Ao meu orientador Alexandre Fernandes, pela paciência, incentivo e orientação nos meus estudos.

Ao professor Ulisses Lima Parente, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas.

Aos professores da Matemática, em especial, Fernanda Camargo, José Fábio Montenegro, José Othon, Marcos Melo, Antônio Caminha Muniz Neto, Lev Birbrair, João Lucas Marques Barbosa, Darlan Girão, Luquézio Petrola, Gregório Pacelli, Abdênago Alves de Barros, Francesco Mercuri, Ernani Ribeiro e Alberto Maia, pelo aprendizado proporcionado.

A Funcap e ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Nesta dissertação abordamos o problema de injetividade de difeomorfismos locais em dimensão dois, do ponto de vista da geometria de curvatura negativa. O teorema principal fornece um conjunto de condições suficientes para injetividade de um difeomorfismo local  $f : M_1 \rightarrow M_2$ , entre superfícies de Hadamard, que se baseiam inteiramente em certas condições de transversalidade simples de serem satisfeitas por folheações definidas pelos horociclos associados a métrica de curvatura não positiva variável em  $M_1$  e  $M_2$ , e o pull-back por  $f$  de tais folheações. O Teorema fornece também uma definição geométrica para alguns dos resultados sobre a conjectura de estabilidade global assintótica, em particular, apresenta uma extensão parcial da condição espectral para o caso de variedades de Hadamard.

**Palavras chaves:** Geometria. Topologia. Folheações (Matemática).

## ABSTRACT

In this work, we study the problem of injectivity of a local diffeomorphism on dimension two of the point of view of the geometry of negative curvature. The main theorem provides a set of sufficient conditions for injectivity of a local diffeomorphism  $f : M_1 \rightarrow M_2$ , between Hadamard surfaces, which depends on certain transversality conditions to be satisfied by simple foliations defined by horocycles associated to the metric with non positive curvature varying in  $M_1$  and  $M_2$ , and the pull-back in  $f$  of such foliations. This result gives a geometric definition for some of the results about the global asymptotic stability conjecture, in particular, it has a partial extension of the spectral condition for the case of Hadamard manifolds.

**Keywords:** Geometry. Topology. Foliations (Math).

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação . . . . .	1
1.2	A Geometria hiperbólica . . . . .	3
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>8</b>
2.1	Folheações . . . . .	8
2.2	Convexidade . . . . .	9
2.3	Variedades de Hadamard . . . . .	10
<b>3</b>	<b>COMPACTIFICAÇÃO NUMA VARIEDADE DE HADAMARD</b>	<b>14</b>
3.1	Pontos no infinito . . . . .	14
3.2	A Topologia do cone . . . . .	16
3.3	Funções de Busemann . . . . .	20
<b>4</b>	<b>GENERALIZAÇÃO PARCIAL DA CONDIÇÃO ESPECTRAL PARA SUPERFÍCIES DE HADAMARD</b>	<b>25</b>
4.1	Teorema principal . . . . .	25
4.2	A condição espectral . . . . .	34
4.3	Uma relação entre o teorema principal e a condição espectral . . . . .	35
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Apresentação

Neste trabalho abordamos o problema de injetividade de difeomorfismos locais em dimensão dois, do ponto de vista da geometria de curvatura negativa. O teorema principal fornece um conjunto de condições suficientes para injetividade de um difeomorfismo local  $f : M_1 \rightarrow M_2$  entre superfícies não compactas simplesmente conexas que se baseiam inteiramente em certas condições de transversalidade, as quais são simples de serem satisfeitas por folheações definidas pelos horociclos associados à métrica de curvatura não positiva variável em  $M_1$  e  $M_2$ , e o pull-back em  $f$  de tais folheações. O Teorema fornece uma definição geométrica para alguns dos resultados de [10] e [15], em particular, apresenta uma extensão parcial da condição espectral (ver [10]) para o caso de variedades de Hadamard.

Os argumentos apresentados, de certo modo, revelam um aperfeiçoamento, no lado analítico, do método introduzido em [15] para mostrar injetividade de difeomorfismos locais em  $\mathbb{R}^n$  que satisfazem certas condições algébricas. No presente trabalho, porém, as nossas condições são inteiramente geométricas e trabalhamos no contexto de Superfícies de Riemann, completas, simplesmente conexas, de curvatura não-positiva (superfícies de Hadamard). O princípio subjacente é que as funções de Busemann de uma variedade de Hadamard desempenham um papel semelhante ao desempenhado por funcionais lineares em espaços Euclidianos. A questão da injetividade de uma aplicação  $f$  reduz então para o problema de selecionar um ponto no infinito, cuja função Busemann distingue entre  $f(a)$  e  $f(b)$  quando  $a \neq b$ . Isto é feito usando a teoria do grau.

A fim de mostrar que uma aplicação  $f$  é injetiva construímos primeiramente uma aplicação auxiliar, denotada por  $\psi_{1,1}$  cuja sobrejetividade implica a injetividade de  $f$ .

A aplicação  $\psi_{1,1}$  está naturalmente mergulhada em uma família

$$\{\psi_{\alpha,s}; \alpha \geq 1, 0 \leq s \leq 1\}$$

obtida tomando curvas integrais de uma família de três parâmetros adequados de campos de vetores. Uma cuidadosa análise geométrica permite provar que  $\psi_{\alpha,1}$  é sobrejetiva quando  $\alpha = 1$ .

Antes de afirmar tais resultados devemos introduzir alguns conceitos. Começamos, neste capítulo, por recordar os principais resultados oriundos da geometria hiperbólica, vamos rever a noção de horociclos, a qual diz que se  $v$  é um ponto no círculo unitário  $T$  um  $v$ -horociclo (em relação à métrica de Poincaré no disco aberto unitário  $D$ ) é um círculo Euclidiano em  $D$ , que é tangente a  $T$  em  $v$  (excluindo-se  $v$ ). A região entre dois  $v$ -horociclos distintos será chamada um  $v$ -horociclo. Horociclos serão orientados no sentido anti-horário.

No capítulo 2 iniciamos com o conceito e algumas propriedades da teoria das folheações, reunimos alguns fatos básicos a cerca da convexidade de conjuntos e aplicações convexas, recordamos algumas definições e propriedades úteis sobre variedades de Hadamard. Verificamos que uma superfície de Hadamard  $M$  é difeomorfa ao  $\mathbb{R}^2$ , definimos uma relação de equivalência entre geodésicas em uma variedade de Hadamard, cujas classes são chamadas classes assintóticas. Dedicamos o final deste capítulo para discutir um pouco sobre características elementares em variedades de Hadamard, tais como: a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico, a lei dos cossenos, a unicidade das geodésicas e sua propriedade minimizante, as consequências da definição de assintoticidade de raios geodésicos, demonstramos um importante teorema que será fortemente utilizado no capítulo seguinte para justificar a unicidade de uma geodésica que liga pontos finitos a uma classe assintótica e, por fim, damos a definição de simetria geodésica.

No capítulo 3 verificamos que uma variedade de Hadamard pode ser compactada de maneira natural pela introdução de  $M(\infty)$ , o círculo no infinito, ou fronteira ideal. Um elemento de  $M(\infty)$  é uma classe de equivalência de geodésicas que ficam a uma distância finita uma da outra com o passar do tempo para  $+\infty$ . As geodésicas da métrica de Poincaré são arcos de círculos perpendiculares ao círculo unitário e neste caso  $M(\infty)$  pode ser naturalmente identificado com  $T$ . Dado um ponto no infinito  $v$  e um ponto  $p$  em  $M$ , há exatamente uma geodésica  $\gamma$  por  $p$  na classe de  $v$  e escrevemos  $\gamma = \gamma_v$ . Além disso, se a curvatura de  $M$  é negativa, há exatamente uma geodésica unindo quaisquer dois pontos distintos de  $M(\infty)$ . Na fronteira ideal pode-se definir uma topologia de tal modo que, para cada ponto  $p$  em  $M$  a identificação natural entre o círculo unitário no plano tangente em  $p$  e  $M(\infty)$  é um homeomorfismo. Finalizamos

este capítulo fazendo um breve estudo sobre as funções de Busemann, apresentamos uma forma alternativa para definir um  $v$ -horociclo, como um conjunto de nível de uma função de Busemann  $B_v$  e algumas propriedades importantes: ela é uma função da classe  $C^2$  [11], seu gradiente tem comprimento um e  $-\nabla B_v(p)$  determina uma geodésica na classe  $v$ .

No capítulo 4, provamos o teorema principal que, de certo modo, generaliza parcialmente a condição espectral no caso de superfícies de Hadamard e encerramos este trabalho discorrendo um pouco sobre a relação entre o teorema principal e a condição espectral.

## 1.2 A Geometria hiperbólica

A origem da geometria hiperbólica está ligada ao questionamento de um dos cinco postulados estabelecido por Euclides, mais precisamente, o quinto postulado. Esse postulado, também conhecido como postulado das paralelas, numa versão moderna, afirma que:

“Por um ponto  $P$  não pertencente a uma reta  $\gamma$  passa uma única reta paralela à  $\gamma$ ”.

Esta geometria possui vários modelos, todos isométricos a uma variedade Riemanniana, completa e simplesmente conexa com curvatura não positiva. Dentre esses modelos apresentaremos o *disco de Poincaré* e o *semiplano de Poincaré*. O objetivo não é fornecer uma exposição detalhada do assunto, e sim introduzir noções e conceitos. Para mais detalhes recomendamos ao leitor [16].

**Definição 1.1.** *O disco de Poincaré é o disco  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ , munido com a métrica Riemanniana dada pela seguinte expressão:*

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

*Utilizando a identificação  $(x, y) \longleftrightarrow x + iy$ , de  $\mathbb{R}^2$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$ , a métrica será*

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}; \quad |z| < 1 \quad (1.1)$$

O comprimento hiperbólico de uma curva diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  é dado por

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{(1 - |z|^2)} = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|dt}{(1 - |\gamma(t)|^2)}.$$

**Proposição 1.2.** *O disco  $D$  com a métrica (1.1) tem curvatura constante igual a  $-1$ .*

*Demonstração.* Afiramos que a curvatura gaussiana do disco  $D$  com a métrica (1.1) é dada pela expressão

$$K(z) = -\frac{\Delta \log(\lambda(z))}{\lambda^2(z)}$$

onde  $\Delta$  representa o laplaciano. Na verdade, basta ver que as curvas coordenadas  $x = \text{constante}$ ,  $y = \text{constante}$  são mutuamente ortogonais com respeito a métrica (1.1) e portanto (ver [13], proposição 6.3, página 296)

$$K = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{(\sqrt{G})_x}{\sqrt{E}} \right)_x + \left( \frac{(\sqrt{E})_y}{\sqrt{G}} \right)_y \right\}.$$

Desta forma, sendo  $E = G = \lambda^2$ , com  $\lambda = \frac{2}{1-|z|^2}$  temos que

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{\lambda^2} \left\{ \left( \frac{\lambda_x}{\lambda} \right)_x + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda} \right)_y \right\} \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \left\{ \left( \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \right)_x + \left( \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} \right)_y \right\} \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda. \end{aligned}$$

Agora, sabendo-se que o laplaciano pode ser dado na forma  $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$ , pela regra do produto de Leibniz obtemos

$$\Delta \log(\lambda(z)) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2},$$

e daí o resultado segue. □

**Proposição 1.3.** *Uma aplicação  $F : D \rightarrow D$  é uma isometria do disco de Poincaré que preserva orientação se, e somente se,  $F$  é uma transformação de Möbius do tipo*

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (1.2)$$

onde  $\theta$  é um número real e  $a$  é um número complexo tal que  $|a| < 1$ . Em particular, as rotações  $T(z) = e^{i\theta} z$  são isometrias hiperbólicas.

*Demonstração.* Ver [16], página 17. □

**Definição 1.4.** *Uma reta hiperbólica em um disco de Poincaré é uma reta ou círculo (ambos Euclidianos) que intersectam o círculo unitário perpendicularmente.*

Usando a classificação para isometrias hiperbólicas dada pela proposição 1.3, juntamente com o fato de que transformações de Möbius preservam ângulos e levam retas em círculos ou retas, provamos a asserção seguinte.

**Proposição 1.5.** *Entre dois pontos distintos no disco de Poincaré existe uma única reta hiperbólica.*

*Demonstração.* Sejam  $z_1$  e  $z_2$  dois pontos distintos de  $D$ . Suponhamos primeiramente  $z_1 = 0$  e  $z_2 = w$  e seja  $L$  o diâmetro do círculo unitário  $C$  que passa por  $w$ . Então  $L$  intersecta o círculo  $C$  perpendicularmente. Agora, para  $z_1$  e  $z_2$  arbitrários em  $D$ , existe uma isometria hiperbólica do tipo (1.2) tal que  $T(z_1) = 0$  e  $T(z_2) = w$ . Assim,  $T^{-1}(L)$  passa por  $z_1$  e  $z_2$  e, portanto,  $T^{-1}(L)$  é um círculo ou uma reta, e além disso, intersecta  $C$  perpendicularmente. A unicidade da reta hiperbólica vem da unicidade da reta e do círculo euclidianos.  $\square$

**Definição 1.6.** *Seja  $v$  um ponto no círculo unitário  $S^1 = \partial D$ . Um  $v$ -horociclo, em relação à métrica de Poincaré do disco unitário aberto  $D$ , é um círculo euclidiano em  $D$ , que é tangente a  $S^1$  em  $v$ , excluindo-se o ponto  $v$ . A região entre dois  $v$ -horociclos distintos será chamada um  $v$ -horoanel.*

Vejamos agora algumas propriedades dos horociclos no disco de Poincaré.

**Proposição 1.7.** *Os horociclos cobrem todo o disco de Poincaré.*

*Demonstração.* Seja  $S^1 = \partial D$ , onde  $D$  é o disco de Poincaré. Fixado  $v \in S^1$ , escolha um ponto qualquer em  $D$ , digamos  $z_1$ . Então basta considerar o diâmetro que passa por  $v$  e tomar o ponto simétrico de  $z_1$  em relação a esse diâmetro, digamos  $z_2$ . É claro que  $z_2 \in D$  e além disso, os pontos  $v$ ,  $z_1$ , e  $z_2$  determinam um círculo em  $D$ . Como  $z_1$  foi escolhido aleatoriamente, segue-se o resultado.  $\square$

**Proposição 1.8.** *Os horociclos são curvas de nível de uma submersão no disco de Poincaré.*

*Demonstração.* A menos de rotação podemos supor que  $v = (0, -1)$ . Desse modo, seja  $C = (0, r - 1)$  o centro de um  $v$ -horociclo de raio  $r$ . Então, a equação reduzida  $x^2 + [y - (r - 1)]^2 = r^2$  nos dá

$$r = \frac{x^2 + y^2 + 2y + 1}{2y + 2}; \quad x \neq 0 \text{ e } y \neq -1.$$

Assim, para cada  $r \in (0, 1)$  a aplicação  $\varphi : D \rightarrow (0, 1)$  dada por

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2y + 1}{2y + 2}$$

é uma submersão. Logo, as curvas de nível  $\varphi^{-1}(r)$  são os círculos euclidianos em  $D$ , tangentes a  $S^1 = \partial D$  em  $v$ , excluindo-se o ponto  $v$ .  $\square$

**Definição 1.9.** *Seja  $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$  o semiplano superior:  $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ . Munido da métrica*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

*tal modelo, chamado semiplano de Poincaré, torna-se geodésicamente completo e tem curvatura constante  $-1$ .*

Este modelo é muito útil para efetuar certos cálculos em geometria hiperbólica. A transformação de Möbius

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (1.3)$$

aplica conformemente  $\mathbb{H}$  sobre o disco  $D$  de Poincaré. Além disso,  $T$  é uma isometria, por esta razão,  $\mathbb{H}$  é completo e tem curvatura constante  $-1$ . A métrica em  $\mathbb{H}$  é também uma métrica conforme.

Como a transformação  $T$  leva geodésicas em geodésicas, círculos em círculos e preserva ângulos, temos a seguinte:

**Proposição 1.10.** *As retas hiperbólicas no modelo  $\mathbb{H}$  são as retas ou os círculos euclidianos, ortogonais ao eixo real.*

*Demonstração.* Mostraremos que a curva diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $a > 0$ , do eixo dos  $y$ , dado por  $\gamma(t) = (0, t)$  é a imagem de uma geodésica. De fato, para qualquer arco  $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  dada por  $\eta(t) = (x(t), y(t))$  com  $\eta(a) = (0, a)$  e  $\eta(b) = (0, b)$ , temos que

$$\begin{aligned} L(\eta) &= \int_a^b |\eta'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dt}{y} \\ &\geq \int_a^b \left| \frac{dy}{dt} \right| \frac{dt}{y} \geq \int_a^b \frac{dy}{y} = L(\gamma). \end{aligned}$$

Segue-se que  $\gamma$  minimiza arcos diferenciáveis por partes e, portanto a imagem de  $\gamma$  é uma geodésica.

É fácil ver que as isometrias de  $H$

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad z = x + iy, \quad ad - bc = 1,$$

transformam o eixo  $0y$  em semi-círculos superiores ou em semi-retas  $x = x_0, y > 0$ . Estas curvas são, portanto, geodésicas em  $\mathbb{H}$ .  $\square$

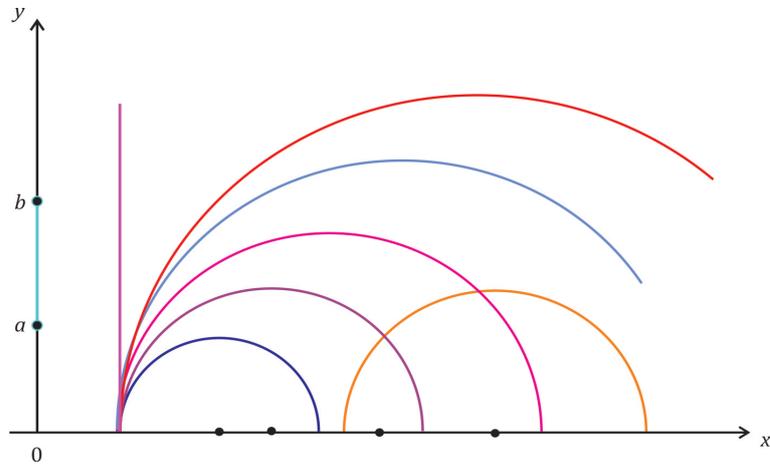


Figura 1.1: Geodésicas do semiplano de Poincaré.

# Capítulo 2

## PRELIMINARES

Neste capítulo, estabelecemos algumas definições, notações e resultados usados no decorrer do texto.

### 2.1 Folheações

**Definição 2.1.** *Uma folheação de dimensão  $p$  e classe  $C^r$  em uma variedade  $M$  de dimensão  $m$  é uma decomposição de  $M$  em uma união de subconjuntos conexos disjuntos  $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , chamados as folhas da folheação, com a seguinte propriedade: Todo ponto em  $M$  tem uma vizinhança  $U$  e um sistema de coordenadas locais, de classe  $C^r$ , dado por  $x = (x_1, \dots, x_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que para cada folha  $\mathcal{L}_\alpha$ , as componentes de  $U \cap \mathcal{L}_\alpha$  são descritas pelas equações da forma  $x_{p+1} = \text{constante}, \dots, x_m = \text{constante}$ .*

**Exemplo 2.2.** *Uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^r$  é uma submersão se, para todo ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  temos que  $\nabla f(x) \neq 0$ , neste caso todo número real é valor regular de  $f$  e pelo Teorema da função implícita, por cada ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  passa uma curva de nível de classe  $C^r$ . Logo o plano todo fica decomposto por curvas regulares, esta decomposição é um exemplo de folheação regular, e cada curva é chamada de folha da folheação.*

**Definição 2.3.** *Uma folheação  $\mathcal{F}$  dada sobre um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  é dita folheação orientável, se existe campo de vetores sem singularidades definido em todo  $\mathcal{U}$  e que induz a folheação globalmente.*

**Exemplo 2.4.** *Folheações dadas por submersões  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são orientáveis. Com efeito, basta lembrar que o campo vetorial gradiente  $\nabla f(x, y)$  é não nulo e perpendicular as curvas de nível, assim o campo vetorial ortogonal ao vetor gradiente definido por:*

$$\nabla f^\perp(x, y) = \left( -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$$

é tangente as curvas de nível de  $f$ , portanto as trajetórias deste campo coincidem com a folheação definida por  $f$ , as próprias orientações das trajetórias induzem uma orientação nas folhas.

**Definição 2.5.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades e  $\mathcal{F}$  uma folheação. Dizemos que  $f : N \rightarrow M$  é transversal a  $\mathcal{F}$  quando  $f$  é transversal a todas as folhas de  $\mathcal{F}$ . Isto significa que para cada  $x \in N$  temos*

$$(df)_x(T_x(N)) + T_{f(x)}(\mathcal{F}) = T_{f(x)}M.$$

onde por  $T_{f(x)}(\mathcal{F})$  denotamos o espaço tangente a folha de  $\mathcal{F}$  que passa por  $f(x)$ .

**Teorema 2.6.** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma folheação em  $M$  de classe  $C^r$  e  $f : N \rightarrow M$ , de classe  $C^r$ , transversal a  $\mathcal{F}$ . Então existe uma única folheação  $f^*(\mathcal{F})$  em  $N$  de classe  $C^r$ , cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos  $f^{-1}(F)$ ,  $F$  folha de  $\mathcal{F}$ . Em particular, se  $f$  é uma submersão  $f^*\mathcal{F}$  está bem definida para qualquer folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$ .*

*Demonstração.* Ver [3], página 34. □

A fim de afirmarmos nossos resultados, precisamos de um conceito mais fraco do que transversalidade.

**Definição 2.7.** *Diremos que duas folheações diferenciáveis, planas e orientadas são vagamente transversais se, para cada ponto  $p$  em seu domínio comum de definição, ou suas folhas são transversais em  $p$  ou são tangentes, mas possuem orientações opostas.*

## 2.2 Convexidade

**Definição 2.8.** *Uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se para  $a < b$  e  $s \in (0, 1)$  vale a desigualdade*

$$g(a + s(b - a)) \leq g(a) + s(g(b) - g(a)).$$

**Definição 2.9.** *Uma função  $f$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é convexa, se para toda geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  a função  $f \circ \gamma$  é convexa.*

**Observação.** Uma função  $f$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , em uma variedade Riemanniana  $M$  é convexa se o seu determinante hessiano é positivo semidefinido, isto é, se  $(f \circ \gamma)'' \geq 0$  para toda geodésica  $\gamma$  em  $M$ .

**Proposição 2.10.** *Seja  $f$  uma função convexa diferenciável em um conjunto convexo  $W$ . Então os únicos pontos críticos de  $f$  no interior de  $W$  são mínimos absolutos.*

*Demonstração.* Seja  $p \in W$  um ponto crítico com  $f(p) = a$ . Se existisse um ponto  $q \in W$  com  $f(q) < a$ , então seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$  a geodésica de  $p$  a  $q$ . Mas  $f(\gamma(t)) < a$  é convexo, para  $t \in [0, 1]$  e  $(f \circ \gamma)'(1) = \langle \nabla f(p), \gamma'(1) \rangle > 0$ , uma contradição pois  $\nabla f(p) = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.11.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de curvatura não positiva  $K$ . Então a função distância<sup>1</sup>  $d : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa para todo subconjunto  $W \subset M$ .*

*Demonstração.* Vamos provar que para as geodésicas  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow W$ ,  $i = 1, 2$  a função  $t \mapsto d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  é convexa. Seja  $\sigma_t : [0, 1] \rightarrow W$  o segmento geodésico de  $\gamma_1(t)$  a  $\gamma_2(t)$  e  $L(\sigma(t)) = \int_0^1 |\sigma'(t)| dt = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Se  $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , então, pela segunda fórmula de variação,  $L$  diferenciável e  $K \geq 0$  implica  $L''(\sigma(t)) \geq 0$  (ver detalhes em [2], página 7). Por outro lado, se  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ , então  $L(\sigma(t_0)) = 0$  é um mínimo absoluto e neste caso temos que  $L$  é convexo.  $\square$

## 2.3 Variedades de Hadamard

**Definição 2.12.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  completa e simplesmente conexa com curvatura seccional não positiva é chamada uma variedade de Hadamard.*

O Teorema abaixo diz que se  $M$  é uma variedade de Hadamard, então  $M$  tem a mesma topologia e estrutura diferenciável do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.13.** *Se  $M$  é uma variedade de Hadamard então  $M$  é difeomorfa ao espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = \dim M$ . Mais precisamente, em qualquer ponto  $p \in M$ , a aplicação exponencial  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* Ver [4], página 151.  $\square$

**Corolário 2.14.** *Seja  $M$  uma variedade de Hadamard. Dados  $p, q \in M$  distintos, existe uma única geodésica  $\gamma_{pq}$ , com  $|\gamma'_{pq}| = 1$ ,  $\gamma_{pq}(0) = p$ ,  $\gamma_{pq}(t) = q$ , e tal que  $t = d(p, q)$ .*

*Demonstração.* Como  $M$  é completa, pelo teorema de Hopf - Rinow, existe pelo menos uma geodésica  $\gamma$  entre  $p$  e  $q$ . Se  $v$  é a velocidade inicial de tal geodésica ( $\gamma'(0) = v$ ), então  $\exp_p(v) = q$ . Como  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  esta geodésica é única.  $\square$

**Observação.** Passaremos doravante a considerar todas geodésicas com velocidade unitária (chamadas de raios geodésicos), salvo menção ao contrário.

<sup>1</sup>A distância (Riemanniana)  $d(p, q)$  é definida como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam  $p$  a  $q$ .

**Proposição 2.15.** *Seja  $M$  uma variedade de Hadamard, e seja  $X$  um campo diferenciável de vetores em  $M$ . Se existe uma constante  $c > 0$  tal que  $|X(p)| < c$ , para todo  $p \in M$ , então as trajetórias de  $X$ , isto é, as curvas  $\varphi(t)$  em  $M$  com  $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ , estão definidas para todo valor de  $t$ .*

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  e  $\varphi(t)$  a trajetória de  $X$  tal que  $\varphi(0) = p$  e  $\varphi'(0) = X(p)$ . Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais temos que  $I = \{t \in \mathbb{R}; \varphi(t) \text{ é bem definida}\}$  é da forma  $I = (\omega_-, \omega_+) \subset \mathbb{R}$ . Suponha, por absurdo, que  $\omega_+ < \infty$ , como  $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$  temos que

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t X(\varphi(\tau))d\tau.$$

Assim,

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t X(\varphi(\tau))d\tau.$$

Logo,  $|\varphi(t) - \varphi(0)| = |\int_0^t X(\varphi(\tau))d\tau| \leq \int_0^t |X(\varphi(\tau))|d\tau \leq ct \leq c\omega_+$ . Portanto  $|\varphi(t) - p| \leq c\omega_+$  implica que  $\varphi(t) \in \bar{B}_{c\omega_+}(p)$ . Como  $\bar{B}_{c\omega_+}(p)$  é fechado e limitado em uma variedade de Hadamard, temos, pelo Teorema de Hopf e Rinow, que  $\bar{B}_{c\omega_+}(p)$  é compacto. Isto é um absurdo, já que  $\varphi$  é uma curva integral, e assim,  $\forall K \subset M$  compacto, existe  $t_0$  tal que  $\varphi(t) \notin K, \forall t > t_0$ . Daí segue que  $\varphi(t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Com isso  $\omega_+ = \infty$ , e de modo análogo,  $\omega_- = -\infty$ .  $\square$

**Definição 2.16.** *Seja  $M$  uma variedade de Hadamard. Se  $p \neq q \in M$ , seja  $\gamma_{pq}$  a única geodésica tal que  $\gamma_{pq}(0) = p$  e  $\gamma_{pq}(t) = q$ , com  $t = d(p, q)$ . O ângulo  $\angle_p(m, n)$  subtendido pelos pontos  $m, n \in M$  em um ponto distinto  $p$  é definido por  $\angle(\gamma'_{pm}(0), \gamma'_{pn}(0))$ .*

Assumiremos que em uma variedade de Hadamard, três pontos não colineares A, B e C determinam um triângulo geodésico, onde verificam-se:

1. **Lei dos cossenos:**  $c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ , onde  $a, b, c$  são os lados e  $\theta$  é o ângulo oposto a  $c$ .
2. **Soma dos ângulos:** A soma dos ângulos internos do triângulo é  $\leq \pi$ .
3. **Dupla Lei dos cossenos:** Aplicando-se a lei dos cossenos duas vezes obtém-se  $c \leq b \cos \alpha + a \cos \beta$ .

**Definição 2.17.** *Duas geodésicas  $\alpha$  e  $\beta$  em uma variedade de Hadamard são ditas assintóticas se existe um número  $c > 0$  tal que  $d(\alpha(t), \beta(t)) \leq c$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Observação.** Em  $\mathbb{R}^n$  a relação de assintoticidade é o paralelismo de retas que são imagens de geodésicas com o mesmo sentido.

**Lema 2.18.** *As seguintes assertivas são consequência da definição:*

1. *Se  $\alpha$  e  $\beta$  são assintóticas, então também o são reparametrizações de  $\alpha$  e  $\beta$  com velocidades unitárias e com a mesma orientação de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.*
2. *A relação de assintoticidade é uma relação de equivalência no conjunto de todos os raios geodésicos de  $M$ .*
3. *Se duas geodésicas assintóticas em  $M$  têm um ponto em comum, então elas são iguais, a menos parametrização.*

**Teorema 2.19.** *Seja  $\alpha$  uma geodésica em  $M$ ,  $\{p_n\}$  uma sequência em  $M$  que converge para  $p$  e  $\{t_n\}$  uma sequência em  $\mathbb{R}$  que converge para  $+\infty$ . Se  $\beta_n$  é a geodésica de  $p_n$  até  $\alpha(t_n)$  então  $\beta'_n(0)$  converge para um vetor  $v$  na esfera unitária em  $T_pM$ , e  $\beta = \gamma_v$  é assintótica a  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Seja  $c > 0$  um número tal que  $d(p_n, \alpha(0)) \leq c$  para todo  $n$ . Seja  $s_n$  um número tal que  $\beta_n(s_n) = \alpha(t_n)$ . Pela desigualdade triangular  $|s_n - t_n| \leq d(p_n, \alpha(0)) \leq c$ . Em particular  $\{s_n\}$  converge para  $+\infty$ . Agora, fixemos  $s \geq 0$ , e seja  $n$  tal que  $s \leq s_n$ . Como a função  $t \mapsto d(\beta_n(t), \alpha(t))$  é convexa, temos que

$$d(\beta_n(s), \alpha(s)) \leq \max\{d(\beta_n(0), \alpha(0)), d(\beta_n(s_n), \alpha(s_n))\}.$$

Mas  $d(\beta_n(s_n), \alpha(s_n)) = d(\alpha(t_n), \alpha(s_n)) = |t_n - s_n| \leq c$  e  $d(\beta_n(0), \alpha(0)) \leq c$ , pois  $p_n = \beta_n(0)$ . Logo,  $d(\beta_n(s), \alpha(s)) \leq c$  para todo  $s \geq 0$ . Alguma subsequência  $\beta'_n(0)$  converge para  $v$  na esfera unitária em  $T_pM$ . Pela continuidade da aplicação exponencial,  $d(\beta_n(s), \alpha(s)) \leq c$  implica que  $d(\gamma_v(s), \alpha(s)) \leq c$  para todo  $c \geq 0$ . Portanto,  $\gamma_v$  é assintótica a  $\alpha$ .  $\square$

**Corolário 2.20.** *Dada uma geodésica  $\alpha$  e um ponto  $p \in M$ , existe uma única geodésica  $\beta$ , tal que  $\beta(0) = p$  e  $\beta$  é assintótica a  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Claramente a existência segue do Teorema 2.19, enquanto que a unicidade é obtida pelos itens 2 e 3 do Lema 2.18.  $\square$

**Definição 2.21.** *Seja  $M$  uma variedade de Hadamard. Para cada  $p \in M$  definimos um difeomorfismo  $S_p : M \rightarrow M$  por*

$$S_p(\gamma(t)) = \gamma(-t),$$

onde  $\gamma$  é uma geodésica qualquer de  $M$ , com  $\gamma(0) = p$ , para todo  $t$  arbitrário. Alternativamente, podemos escrever

$$S_p(\exp_p(v)) = \exp_p(-v)$$

---

para todo vetor  $v \in T_pM$ . Tal difeomorfismo é chamado de simetria geodésica.

A aplicação  $S_p$  está bem definida pela unicidade da geodésica que liga dois pontos quaisquer em uma variedade de Hadamard.

## Capítulo 3

# COMPACTIFICAÇÃO NUMA VARIEDADE DE HADAMARD

Nesse capítulo, apresentamos uma maneira natural de compactificar uma variedade de Hadamard, definimos uma topologia para tais variedades e encerramos com um breve estudo sobre as funções de Busemann.

### 3.1 Pontos no infinito

**Definição 3.1.** *Seja  $M$  uma variedade de Hadamard. Dizemos que um ponto no infinito de  $M$  é uma classe assintótica de raios geodésicos. O conjunto dos pontos no infinito será denotado por  $M(\infty)$  e  $\overline{M} = M \cup M(\infty)$  a compactificação de  $M$ . Os pontos de  $M$  serão chamados de pontos finitos e os de  $M(\infty)$  pontos infinitos.*

**Exemplo 3.2.** *Se  $M$  é o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional, isto é, a bola unitária em  $\mathbb{R}^n$  com a métrica de Poincaré, então  $M(\infty)$  é a esfera limitante  $S^{n-1}$ .*

**Definição 3.3.** *Seja  $\gamma : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$  uma geodésica. Dizemos que  $\gamma(\infty)$  é a classe assintótica de  $t \rightarrow \gamma(t)$ . Dizemos ainda que  $\gamma(-\infty)$  é a classe assintótica da curva reversa  $t \rightarrow \gamma(-t)$ . Definimos a extensão assintótica de  $\gamma$  por  $\gamma : [-\infty, +\infty] \rightarrow \overline{M}$ .*

**Proposição 3.4.** *Uma vez que  $\gamma$  realiza a distância entre dois quaisquer de seus pontos, temos que  $\gamma(-\infty) \neq \gamma(\infty)$ .*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $\gamma(-\infty) = \gamma(\infty)$ . Então  $[\gamma]$  e  $[\gamma^{-1}]$  são assintóticas, isto é, existe  $c > 0$  tal que  $d(\gamma(t), \gamma^{-1}(t)) \leq c$  para todo  $t$ . Ou seja,  $d(\gamma(t), \gamma(-t)) \leq c$  para todo  $t$ . Mas  $d(\gamma(t), \gamma(-t)) = 2t$ , e portanto,  $2t \leq c$ . Logo, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos o absurdo.  $\square$

**Observação.** Se  $x \in M(\infty)$  escrevemos  $\gamma(\infty) = x$ . Com esta notação, de acordo com o Corolário 2.20, dado  $p \in M$  e  $x \in M(\infty)$  existe uma única geodésica  $\gamma_{px}$  tal que  $\gamma_{px}(0) = p$  e  $\gamma_{px}(\infty) = x$ .

**Definição 3.5.** Dizemos que uma topologia  $\tau \in \overline{M}$  é admissível se satisfaz as seguintes condições:

1. **Propriedade do fecho:** A topologia de  $M$  induzida por  $\tau$  é a topologia original de  $M$  e  $M$  é um conjunto aberto denso de  $\overline{M}$ .
2. **Propriedade da extensão geodésica:** Se  $\gamma$  é uma geodésica de  $M$ , então sua extensão assintótica é contínua.
3. **Propriedade da extensão isométrica:** Se  $\varphi$  é uma isometria de  $M$ , então sua extensão assintótica é contínua.
4. **Propriedade intensiva:** Se  $x \in M(\infty)$ ,  $V$  é uma vizinhança de  $x$ , e  $r > 0$  é um número qualquer, existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $N_r(U) = \{q \in \overline{M} : d(q, U) < r\} \subseteq V$ . Estendemos a métrica trivialmente modo que  $d(a, b) = \infty$  se  $a \neq b$  e um desses pontos está em  $M(\infty)$ . Na verdade, esta é a única extensão contínua da métrica, assumindo a propriedade da extensão geodésica.

**Exemplo 3.6.** A topologia Euclidiana herdada na bola unitária fechada em  $\mathbb{R}^n$  satisfaz as propriedades acima para o modelo do espaço hiperbólico  $n$ -dimensional.

**Lema 3.7.** Para cada  $x \in M(\infty)$  seja  $\mathcal{N}(x)$  uma coleção de subconjuntos de  $\overline{M}$  tais que:

- (a) Se  $V \in \mathcal{N}(x)$  então  $x \in V$  e  $V \cap M$  é não vazio e aberto em  $M$ .
- (b) Se  $V \in \mathcal{N}(x)$ ,  $W \in \mathcal{N}(y)$  e  $z \in V \cap W \cap M(\infty)$  existe  $U \in \mathcal{N}(z)$  tal que  $U \subset V \cap W$ .

Então existe uma única topologia  $\tau$  em  $\overline{M}$  tal que  $\tau$  tem a propriedade do fecho e  $\mathcal{N}(x)$  é uma base local para  $\tau$  em cada  $x \in M(\infty)$ .

*Demonstração.* Afirmamos que  $\mathcal{B} = \left( \bigcup_{x \in M(\infty)} \mathcal{N}(x) \right) \cup \tau_M$  é base para a topologia de  $\overline{M}$ . De fato,

i)  $\mathcal{B}$  cobre  $\overline{M}$ .

Seja  $x \in \overline{M}$ . Se  $x \in M$ , então como  $M \in \tau_M$ , segue-se que  $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ . Contudo, se  $x \in M(\infty)$ , então por (a), existe  $V \in \mathcal{N}(x)$  tal que  $x \in V$ . Como  $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{B}$  segue-se que  $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ .

ii) Se  $x \in V \cap W$ ,  $V, W \in \mathcal{B}$ , existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U \subset V \cap W$ .

(1)  $x \in M(\infty)$ .

Sejam  $V \in \mathcal{N}(y_1)$  e  $W \in \mathcal{N}(y_2)$ . Se  $x \in V \cap W \cap M(\infty)$ , então por (b) existe  $U \in \mathcal{N}(x)$  tal que  $x \in U \subset V \cap W$ .

(2)  $x \in M$ .

1º caso. Sejam  $V \in \mathcal{N}(y_1)$  e  $W \in \mathcal{N}(y_2)$ . Se  $x \in V \cap W$ , então por (a)  $V \cap W \tau_M$  não vazio. Daí,  $x \in U = (V \cap M) \cap (W \cap M)$  que pertence a  $\tau_M$ . Assim  $x \in U \subset V \cap W$ .

2º caso. Sejam  $V \in \mathcal{N}(y)$  e  $W \in \tau_M$ . Por (a) temos que  $V \cap M \in \tau_M$ . Seja  $U = (V \cap M) \cap W \in \tau_M$ . Daí  $x \in U \subset V \cap W$ .

3º caso. Sejam  $V, W \in \tau_M$ . Então  $U = V \cap W \in \tau_M$ .

Logo  $\mathcal{B}$  é base para  $\overline{M}$ . □

## 3.2 A Topologia do cone

**Definição 3.8.** Sejam  $p$  um ponto de  $M(\infty)$  e  $a, b \in M$ . O ângulo formado por  $a, b$  em  $p$  é dado por  $\angle_p(a, b) = \angle(\gamma'_{pa}(0), \gamma'_{pb}(0))$ .

**Observação.** Se  $p$  é um ponto de  $M(\infty)$  e  $a, b \in M$ , usando a fórmula usual do ângulo e a Proposição 2.19, temos a seguinte desigualdade  $\angle_a(b, p) + \angle_b(a, p) \leq \pi$ .

**Definição 3.9.** Seja  $0 < \epsilon < \pi$  e  $v$  um vetor unitário de  $T_p M$ . O conjunto dos pontos finitos ou infinitos, onde a diferença angular de  $v$  é menor que  $\epsilon$ , denotado por  $C(v, \epsilon) = \{b \in \overline{M} : \angle_p(\gamma_v(\infty), b) < \epsilon\}$ , é o cone de vértice  $p = \mu(v)$  (onde  $\mu$  é a projeção do fibrado), eixo  $v$  e ângulo  $\epsilon$ .

**Observação.** Para  $t > 0$  temos  $\angle_p(\gamma_v(t), b) = \angle_p(\gamma_v(\infty), b) = \angle(v, \gamma'_{pb}(0))$ .

**Lema 3.10.** Seja  $\alpha$  uma geodésica de  $M$ . Se  $s \leq t$  e  $\delta \leq \epsilon$  então  $C(\alpha'(t), \delta) \subseteq C(\alpha'(s), \epsilon)$ .

*Demonstração.* Supondo  $s = t$ , seja  $b \in C(\alpha'(0), \delta)$ , então  $\angle_{\alpha(t)}(b, \alpha(\infty)) < \delta$  e como  $\delta \leq \epsilon$ , temos que  $\angle_{\alpha(t)}(b, \alpha(\infty)) < \epsilon$ . Daí  $b \in C(\alpha'(s), \epsilon)$ .

Por outro lado, supondo  $s < t$ , como  $b \in C(\alpha'(t), \delta)$ , temos que  $\angle_{\alpha(t)}(b, \alpha(\infty)) < \delta$ . Então obtemos

$$\angle_{\alpha(t)}(\alpha(s), b) + \angle_{\alpha(t)}(\alpha(\infty), b) = \pi.$$

Assim,

$$\angle_{\alpha(t)}(\alpha(s), b) + \angle_{\alpha(t)}(\alpha(\infty), b) < \angle_{\alpha(t)}(\alpha(s), b) + \delta,$$

o que nos dá

$$\angle_{\alpha(t)}(\alpha(s), b) > \pi - \delta.$$

Agora, note que

$$\angle_{\alpha(s)}(\alpha(t), b) + \angle_{\alpha(t)}(\alpha(s), b) + \angle_b(\alpha(s), \alpha(t)) \leq \pi,$$

e portanto,

$$\pi - \delta + \angle_{\alpha(t)}(\alpha(s), b) + \angle_b(\alpha(s), \alpha(t)) < \pi.$$

Logo,  $\angle_{\alpha(t)}(\alpha(s), b) + \angle_b(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta \leq \epsilon$ . Isto implica que  $b \in C(\alpha'(s), \epsilon)$ .  $\square$

**Lema 3.11.** *Seja  $V$  um cone com vértice  $q$ , sejam  $p \in M$  e  $\beta = \gamma_{pz}$ , onde  $z \in V \cap M(\infty)$ . Então existem números  $T > 0$  e  $\delta > 0$ , tais que  $C(\beta'(t), \delta) \subseteq V$ ,  $\forall t \geq T$ .*

*Demonstração.* Seja  $\alpha = \gamma_{qz}$  e escolha  $\epsilon > 0$  tal que  $C(\alpha'(0), \epsilon) \subseteq V$ . Como  $\alpha$  e  $\beta$  são assintóticas, existe  $c > 0$ , tal que  $d(\alpha(t), \beta(t)) \leq c$ ,  $\forall t \geq 0$ . Além disso, como  $d(q, \alpha(t)) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , então como consequência da lei dos cossenos temos que  $\angle_q(\alpha(t), \beta(t)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Da mesma forma  $\angle_{\beta(t)}(p, q) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Agora faça  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$  e escolha  $T$  de forma que  $t \geq T$  acarrete em:

$$(1) \angle_q(z, \beta(t)) < \delta \text{ e } (2) \angle_{\beta(t)}(p, q) < \delta.$$

Afirmamos que para  $t \geq T$  temos  $C(\beta'(t), \delta) \subseteq C(\alpha'(0), \epsilon) \subseteq V$ .

De fato,  $b \in C(\beta'(t), \delta)$  implica  $\angle_{\beta(t)}(z, b) < \delta$  (3). Além disso, usando o fato que

$$\angle_{\beta(t)}(p, q) + \angle_{\beta(t)}(q, z) = \pi$$

e que  $\angle_{\beta(t)}(p, q) < \delta$  obtemos

$$\delta + \angle_{\beta(t)}(q, z) > \pi$$

e assim  $\angle_{\beta(t)}(q, z) > \pi - \delta$  (4).

Por outro lado  $\angle_{\beta(t)}(q, b) = \angle_{\beta(t)}(q, z) - \angle_{\beta(t)}(z, b)$ . Mas por (3)  $\angle_{\beta(t)}(z, b) < -\delta$  e por (4)  $\angle_{\beta(t)}(q, z) > \pi - \delta$ , o que nos dá

$$\angle_{\beta(t)}(q, z) - \angle_{\beta(t)}(z, b) > \pi - 2\delta$$

e daí  $\angle_{\beta(t)}(q, b) > \pi - 2\delta$  (5).

Como  $\angle_q(\beta(t), b) + \angle_{\beta(t)}(q, b) + \angle_b(q, \beta(t)) \leq \pi$ , com maior razão

$$\angle_q(\beta(t), b) + \angle_{\beta(t)}(q, b) \leq \pi.$$

Por (5) concluímos que  $\angle_q(\beta(t), b) + \pi - 2\delta < \pi$  e então  $\angle_q(\beta(t), b) < 2\delta$  (6).

Finalmente, uma vez que

$$\angle_q(\beta(t), b) = \angle_q(z, b) + \angle_q(z, \beta(t)),$$

temos que

$$\angle_q(z, b) \leq \angle_q(\beta(t), b) + \angle_q(z, \beta(t)).$$

Portanto de (1) e (6) obtemos  $\angle_q(z, b) < 3\delta = \epsilon$ . Logo,  $b \in C(\alpha'(0), \epsilon) \subseteq V$ .  $\square$

**Proposição 3.12.** *Se  $M$  é uma variedade de Hadamard, existe uma única topologia  $\tau \in \overline{M}$ , tal que:*

(a)  $\tau$  tem a propriedade do fecho;

(b) Para cada  $z \in M(\infty)$ , o conjunto dos cones contendo  $z$  é uma base local para  $\tau$  em  $z$ . Chama-se  $\tau$  a topologia do cone em  $\overline{M}$ .

*Demonstração.* Sejam  $V$  e  $W$  dois cones contendo  $z \in M(\infty)$ , pelo Lema 3.7, basta mostrar que existe um cone  $C$  tal que  $z \in C \subseteq V \cap W$ . Com efeito, seja  $\beta = \gamma_{pz}$ , onde  $p$  é o vértice de  $V$ . Escolha  $\epsilon > 0$ ;  $C(\beta'(0), \epsilon) \subseteq V$ . Pelo Lema 3.11, existem  $t > 0$  e  $\delta < \epsilon$  tais que  $C(\beta'(t), \delta) \subseteq W$ . Pelo Lema 3.10 concluímos que  $C(\beta'(t), \delta) \subseteq C(\beta'(0), \epsilon)$ . Portanto  $C(\beta'(t), \delta) \subseteq V \cap W$ .  $\square$

**Definição 3.13.** *Seja  $C(v, \epsilon)$  um cone com vértice  $p = \mu(v)$ , para qualquer número  $r > 0$  chamamos  $T(v, \epsilon, r) = C(v, \epsilon) - \{q \in M : d(p, q) < r\}$  o cone truncado de vértice  $p$ , eixo  $v$ , ângulo  $\epsilon$  e raio  $r > 0$ .*

**Lema 3.14.** *Se  $V$  é um cone, possivelmente truncado, cuja parte finita  $V \cap M \subseteq C(v, \epsilon)$ , então  $V \subseteq C(v, \epsilon')$  para algum  $\epsilon' > \epsilon$ .*

*Demonstração.* Seja  $\alpha = \gamma_{pz}$ , onde  $p$  é o vértice de  $V$  e  $z \in V \cap M(\infty)$ . Como para  $t > 0$  suficientemente grande tem-se  $\alpha(\infty) \in C(v, \epsilon)$  pois  $\angle_p(\alpha(t), \gamma_v(\infty)) < \epsilon$ , então  $\angle_p(\alpha(\infty), \gamma_v(\infty)) \leq \epsilon$  o que implica  $z \in C(v, \epsilon')$  para algum  $\epsilon' > \epsilon$ .  $\square$

**Lema 3.15.** *Seja  $\alpha$  uma geodésica de  $M$ . Dados  $a > 0$  e  $\epsilon > 0$ , existem  $r > 0$  e  $\delta > 0$ , tais que  $T(\alpha'(0), \delta, r) \subseteq C(\alpha'(a), \epsilon)$ .*

*Demonstração.* Pela lei dos cossenos podemos escolher  $r > 0$  suficientemente grande, de modo que

$$d(q, \alpha(0)) \geq 0 \Rightarrow \angle_q(\alpha(0), \alpha(a)) < \frac{\epsilon}{3}; \quad (3.1)$$

$$d(q, \alpha(r)) \geq 1 \Rightarrow \angle_{\alpha(a)}(q, \alpha(r)) < \frac{\epsilon}{3}; \quad (3.2)$$

onde  $q \in M$ . Pela continuidade da aplicação exponencial existe um número  $\delta > 0$  tal que se  $v$  é um vetor qualquer em  $\alpha(0)$  satisfazendo

$$\angle(v, \alpha'(0)) < \delta, \quad (3.3)$$

então  $d(\exp(rv), \alpha(r)) < 1$ . Afirmamos que  $r$  e  $\delta$  são os números procurados. Seja  $m$  um ponto finito de  $T(\alpha'(0), \delta, r)$ . Seja  $\beta$  a geodésica de  $\alpha(0)$  a  $m$  e observe que  $\beta(r)$  precede  $m$ . Por (3.1) temos  $\angle_{\beta(r)}(\alpha(0), \alpha(a)) < \frac{\epsilon}{3}$ , e portanto,  $\angle_{\beta(r)}(\alpha(a), m) > \pi - \frac{\epsilon}{3}$ . Pela propriedade da soma dos ângulos  $\angle_{\alpha(a)}(\beta(r), m) < \frac{\epsilon}{3}$ . Como  $d(\beta(r), \alpha(r)) < 1$  podemos usar (3.3) para chegarmos a  $\angle_{\alpha(a)}(\beta(r), \alpha(r)) < \frac{\epsilon}{3}$  por (3.2). Assim,

$$\angle_{\alpha(a)}(m, \alpha(r)) \leq \angle_{\alpha(a)}(m, \beta(r)) + \angle_{\alpha(a)}(\beta(r), \alpha(r)) < \frac{2\epsilon}{3}.$$

Logo  $m \in C(\alpha'(a), \frac{2\epsilon}{3})$ , e pelo Lema 3.14 temos que  $T(\alpha'(0), \delta, r) \subseteq C(\alpha'(a), \epsilon)$ .  $\square$

**Proposição 3.16.** *Fixado  $p \in M$ , o conjunto dos cones truncados de vértice  $p$  que contém  $z \in M(\infty)$  forma uma base local para a topologia do cone em  $z$ .*

*Demonstração.* Fixe um ponto  $p$  em  $M$  e seja  $V$  um cone que contém  $z \in M(\infty)$ . Seja  $\beta = \gamma_{pz}$ . Pelo Lema 3.11, existem  $t > 0$  e  $\delta > 0$ , tais que  $C(\beta'(t), \delta) \subseteq V$ . Pelo Lema 3.15, existem  $r > 0$  e  $\delta' > 0$ , tais que  $T(\beta'(0), \delta', r) \subseteq C(\beta'(t), \delta)$ .  $\square$

**Proposição 3.17.** *A topologia  $\tau$  para  $\overline{M}$  é admissível.*

*Demonstração.* **(1) Propriedade do fecho:** Segue da Proposição 3.12. **(2) Propriedade da extensão geodésica:** Seja  $p \in M$  e  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$  um raio geodésico, então a aplicação  $[0, \infty] \rightarrow S(p)$  dada por  $t \rightarrow \gamma'_{p, \alpha(t)}(0)$  é contínua para todo  $t$ , já que  $\gamma_{p, \alpha}(\infty)$  é a única geodésica partindo de  $p$  e assintótica a  $\alpha$ , de acordo com o Teorema 2.19. **(3) Propriedade da extensão isométrica:** Se  $\phi$  é uma isometria de  $M$  e  $C(v, \epsilon)$  é um cone qualquer, então  $\phi(C(v, \epsilon)) = C(\phi(v), \epsilon)$ . Logo  $\phi$  é um homeomorfismo de  $M$ . **(4) Propriedade intensiva:** Seja  $V$  uma vizinhança de  $z \in M(\infty)$  e seja  $a > 0$  dado. Pela Proposição 3.12 temos que  $V = C(v, \epsilon)$ , onde  $v = \gamma'_{pz}(0)$ . Pela Lei dos cossenos escolhamos  $r > 0$  suficientemente grande, de modo que se  $d(p, m) > r$ ,  $d(p, n) > r - a$  e  $d(m, n) < a$  então  $\angle_p(m, n) < \frac{\epsilon}{2}$ . Se  $T = T(v, \frac{\epsilon}{2}, r)$ , então  $T$  é uma vizinhança de  $z$  tal que  $N_a(T) \subset C(v, \epsilon)$ . Na verdade, se  $n \in N_a(T)$  então existe  $m \in T$  tal que  $d(m, n) < a$ . Pelas condições impostas,  $\angle_p(m, n) < \frac{\epsilon}{2}$  e portanto,  $\angle_p(n, z) \leq \angle_p(m, n) + \angle_p(m, z) < \epsilon$ . O que finaliza a prova do teorema.  $\square$

O seguinte Teorema estabelece uma analogia com o disco de Poincaré no espaço hiperbólico  $n$ -dimensional.

**Teorema 3.18.** *Se  $p \in M$  seja  $B(p)$  a bola fechada unitária em  $T_p M$  com esfera limite  $S(p)$ . Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  um homeomorfismo. Então a aplicação  $\varphi : B(p) \rightarrow \overline{M}$  tal que  $\varphi(v) = \exp(f(|v|)v)$  é um homeomorfismo que leva  $S(p)$  em  $M(\infty)$ .*

*Demonstração.* É claro que  $\varphi$  restrita a  $B(p) - S(p)$  é uma aplicação contínua e injetiva em  $M$ . Além disso,  $\overline{M}$  é Hausdorff, uma vez que dois pontos distintos em  $M(\infty)$  podem ser separados por cones com o mesmo vértice. Desde que  $B(p)$  é compacto, é suficiente mostrar que  $\varphi$  é contínua em  $v \in S(p)$ . Para um cone truncado  $T = T(v, \epsilon, r)$ , vizinhança de  $\varphi(v)$ , temos  $\varphi^{-1}(T) = T(v, \epsilon, f^{-1}(r)) \subseteq B(p)$ , que é claramente uma vizinhança de  $v$  em  $B(p)$ .  $\square$

### 3.3 Funções de Busemann

Seja  $X$  um espaço métrico e  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow X$  um raio geodésico em  $X$ . Um co-raio de  $\gamma$  iniciando em  $x \in X$  é um raio geodésico que é o limite de uma sequência de caminhos geodésicos  $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ , tal que para todo  $n \geq 0$ ,  $\alpha_n$  liga  $x_n$  a  $\gamma(t_n)$ , onde  $\{x_n\}$  é uma sequência de pontos em  $X$  convergindo para  $x$  e  $\{t_n\}$  é uma sequência de números não negativos tendendo para  $+\infty$ .

**Definição 3.19.** *Seja  $X$  um espaço métrico e  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow X$  um raio geodésico. A função de Busemann associada a  $\gamma$  é a aplicação  $B_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida para  $x \in X$  por*

$$B_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma(t)) - t),$$

onde  $d$  é a distância em  $x$ .

Em particular, no contexto de variedades de Hadamard, essas funções desempenham um papel semelhante ao desempenhado por funcionais lineares em espaços Euclidianos.

**Exemplo 3.20.** *Seja  $\mathbb{R}^n$  munido com a métrica Euclidiana, e  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  um raio geodésico da forma  $\gamma(t) = tu$ , com  $u$  unitário. A função de Busemann  $B_\gamma$  é definida*

por  $B_\gamma(x) = \langle x, -u \rangle$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
B_\gamma(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma(t)) - t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} (|x - \gamma(t)| - t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\langle x - \gamma(t), x - \gamma(t) \rangle} - t \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\langle x - \gamma(t), x - \gamma(t) \rangle - t^2}{\sqrt{\langle x - \gamma(t), x - \gamma(t) \rangle} + t} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{|x|^2 - 2t\langle x, u \rangle + t^2|u| - t^2}{\sqrt{|x|^2 - 2t\langle x, u \rangle + t^2|u|} + t} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{|x|^2 - 2t\langle x, u \rangle + t^2|u| - t^2}{t}}{\frac{\sqrt{|x|^2 - 2t\langle x, u \rangle + t^2|u|} + t}{t}} \right) \\
&= \langle x, -u \rangle.
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Os lemas abaixo e a continuidade da aplicação  $t \mapsto d(p, \gamma(t)) - t$  asseguram que a função de Busemann  $B_\gamma$  está bem definida. A unicidade vem do fato de que se houver uma outra geodésica assintótica a  $\gamma$  partindo de  $p$ , ela será, a menos de parametrizações, igual à  $\gamma$ .

**Lema 3.21.** *A aplicação  $t \mapsto d(p, \gamma(t)) - t$  é monótona decrescente, para  $p$  fixado.*

*Demonstração.* Se  $t > s$ , pela desigualdade triângular, temos que

$$\begin{aligned}
d(p, \gamma(t)) &\leq d(p, \gamma(s)) + d(\gamma(t), \gamma(s)) \\
&\leq d(p, \gamma(s)) + t - s.
\end{aligned}$$

Portanto,  $d(p, \gamma(t)) - t \leq d(p, \gamma(s)) - s$ . □

**Lema 3.22.** *A aplicação  $t \mapsto d(p, \gamma(t)) - t$  é inferiormente limitada, para  $p$  fixado.*

*Demonstração.* Seja  $q = \gamma(0)$  um ponto distinto de  $p$ . Pela desigualdade triangular, temos que  $d(p, \gamma(t)) \geq d(\gamma(t), q) - d(p, q)$ . Portanto,  $d(p, \gamma(t)) - t \geq -d(p, q)$ ,  $\forall t$ , o que prova o lema. □

Vejamos algumas propriedades importantes a respeito das funções de Busemann.

**Proposição 3.23.** *Para qualquer espaço métrico  $X$  e qualquer raio geodésico  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow X$ , a função de Busemann associada  $B_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) para todo  $t \in [0, +\infty)$ , temos  $B_\gamma(\gamma(t)) = -t$ ;

(ii) para todo  $x, y$  em  $X$ , temos

$$B_\gamma(x) - B_\gamma(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} (|x - \gamma(t)| - |y - \gamma(t)|);$$

(iii)  $B_\gamma$  é 1-Lipschitz.

(iv)  $B_\gamma$  é convexa.

*Demonstração.* Para todo  $t \geq 0$  e para todo  $t' \geq t$ , temos

$$\begin{aligned} B_\gamma(\gamma(t)) &= \lim_{t' \rightarrow \infty} (d(\gamma(t'), \gamma(t)) - t') \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} (|\gamma(t') - \gamma(t)| - t') \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} (t' - t - t') \\ &= -t, \text{ o que prova o primeiro item.} \end{aligned}$$

Agora, para todo  $x$  e  $y$  em  $X$ , temos

$$\begin{aligned} B_\gamma(x) - B_\gamma(y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma(t)) - t) - \lim_{t \rightarrow \infty} (d(y, \gamma(t)) - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (|x - \gamma(t)| - t) - \lim_{t \rightarrow \infty} (|y - \gamma(t)| - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (|x - \gamma(t)| - |y - \gamma(t)|), \text{ e assim obtemos o segundo item.} \end{aligned}$$

Para todo  $t \geq 0$ , temos  $|x - \gamma(t)| - |y - \gamma(t)| \leq |x - y|$ . Portanto, por (ii), obtemos  $B_\gamma(x) - B_\gamma(y) \leq |x - y|$ . Por simetria, também temos  $B_\gamma(y) - B_\gamma(x) \leq |x - y|$ , o que mostra que  $|B_\gamma(x) - B_\gamma(y)| \leq |x - y|$ . Isto prova (iii). Por fim, seja  $\beta : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica. Queremos mostrar que

$$B_\gamma(\beta(a + s(b - a))) \leq B_\gamma(\beta(a)) + s(B_\gamma(\beta(b)) - B_\gamma(\beta(a))), \text{ onde } a < b \text{ e } s \in (0, 1).$$

Mas sendo  $d$  convexa, fixado  $t \in \mathbb{R}$ , temos que vale a seguinte desigualdade

$$d(\beta(a + s(b - a)), \gamma_v(t)) \leq d(\beta(a), \gamma(t)) + s(d(\beta(b), \gamma(t)) - d(\beta(a), \gamma(t))),$$

pois a função  $d$  é convexa (ver Teorema 2.11). Em particular, temos que

$$d(\beta(a + s(b - a)), \gamma(t)) - t \leq d(\beta(a), \gamma(t)) - t + s(d(\beta(b), \gamma(t)) - d(\beta(a), \gamma(t))).$$

Como  $t$  foi tomado arbitrariamente, o resultado segue passando o limite em  $t$ . Isto prova (iv).  $\square$

**Proposição 3.24.** *Se  $\gamma_0$  é um subraio de  $\gamma$  e se  $\gamma_0(0) = \gamma(t_0)$ , então, para todo  $x \in X$ , temos  $B_{\gamma_0}(x) = B_\gamma(x) + t_0$ .*

*Demonstração.* Com efeito,

$$\begin{aligned}
B_{\gamma_0}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma_0(t)) - t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} (|x - \gamma_0(t)| - t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} (|x - \gamma(t + t_0)| - t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} (|x - \gamma(t + t_0)| - (t + t_0)) + t_0 \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma(t + t_0)) - (t + t_0)) + t_0 \\
&= B_\gamma(x) + t_0,
\end{aligned}$$

O que finaliza a prova da proposição.  $\square$

**Definição 3.25.** *Sejam  $X$  um espaço métrico e  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow X$  e  $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow X$  dois raios geodésicos. Então, a distância no infinito entre  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  é o elemento em  $[0, +\infty) \cup \{\infty\}$  definido como  $\delta_\infty(\gamma, \tilde{\gamma}) = \lim_{t, \tilde{t} \rightarrow \infty} \inf d(\gamma(t), \tilde{\gamma}(\tilde{t}))$ .*

**Proposição 3.26.** *Sejam  $X$  um espaço métrico,  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow X$  e  $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow X$  dois raios geodésicos,  $x$  e  $\tilde{x}$  dois pontos em  $X$ . Então, temos que*

$$|B_\gamma(x) + B_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}) - B_\gamma(\tilde{x}) - B_{\tilde{\gamma}}(x)| \leq 2\delta_\infty(\gamma, \tilde{\gamma}).$$

*Demonstração.* Considere duas seqüências de números reais  $(t_n)$  e  $(\tilde{t}_n)$  que tendem para  $+\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e tal que

$$\delta_\infty(\gamma, \tilde{\gamma}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma(t_n), \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma(t_n) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)|.$$

Para todo  $n \geq 0$

$$|x - \gamma(t_n)| - |x - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)| \leq |\gamma(t_n) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)|$$

e

$$|\tilde{x} - \gamma(t_n)| - |\tilde{x} - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)| \leq |\gamma(t_n) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)|,$$

o que implica

$$||x - \gamma(t_n)| - |x - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)|| - ||\tilde{x} - \gamma(t_n)| - |\tilde{x} - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)|| \leq 2|\gamma(t_n) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}_n)|.$$

Em particular, quando  $b \rightarrow +\infty$ , o lado esquerdo converge para  $|B_\gamma(x) + B_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}) - B_\gamma(\tilde{x}) - B_{\tilde{\gamma}}(x)|$ , enquanto que o lado direito converge para  $2\delta_\infty(\gamma, \tilde{\gamma})$ .  $\square$

**Corolário 3.27.** *Sejam  $X$  um espaço métrico,  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow X$   $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow X$  dois raios geodésicos em  $X$ . Se  $\delta_\infty(\gamma, \tilde{\gamma}) = 0$ , então  $B_\gamma - B_{\tilde{\gamma}}$  é uma aplicação constante.*

*Demonstração.* Se  $\delta_\infty(\gamma, \tilde{\gamma}) = 0$ , então a Proposição 3.26 mostra que para todo  $x$  e  $\tilde{x}$  em  $X$ , temos

$$B_\gamma(x) - B_{\tilde{\gamma}}(x) = B_\gamma(\tilde{x}) - B_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}),$$

que mostra que a aplicação  $B_\gamma - B_{\tilde{\gamma}}$  é constante.  $\square$

Seja  $M$  uma variedade de Hadamard. Fixado  $o \in M$ , para cada  $v \in M(\infty)$  seja  $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$  um raio geodésico tal que  $\gamma_v(0) = o$  e  $\gamma_v(\infty) = v$ . Denotamos por  $B_v$  a correspondente função de Busemann  $B_{\gamma_v}$  em  $\gamma_v$ .

**Teorema 3.28.** *Se  $M$  é uma variedade de Hadamard,  $p \in M$  e  $B_v$  é uma função de Busemann em  $v \in M(\infty)$ ,  $B_v$  goza de três propriedades importantes a saber:*

(i)  $B_v$  é de classe  $C^2$ ;

(ii)  $-\nabla B_v(p)$  determina uma geodésica na classe de  $v$ ;

(iii)  $|\nabla B_v| \equiv 1$ .

*Demonstração.* (i) ver Proposição 3.1, página 484 de [11]. (ii) ver Proposição 3.5, página 58 de [5]. (iii) ver Lema 3.4, página 24 de [1].  $\square$

**Definição 3.29.** *Seja  $M$  uma variedade de Hadamard,  $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$  um raio geodésico e  $B_v$  a função de Busemann associada. Um horociclo com raio central  $\gamma_v$  é um conjunto de nível da função  $B_v$ .*

Esta definição coincide com a anterior, no caso do disco de Poincaré (ver página 23 de [1]). Tal como antes, um  $v$ -horociclo é uma região entre dois  $v$ -horociclos.

**Exemplo 3.30.** *Numa superfície plana um  $v$ -horociclo é uma faixa delimitada pelas linhas perpendiculares à  $v$ .*

Se  $B_v$  é uma função de Busemann em  $v \in M(\infty)$  e  $p \in M$ , então a esfera limite em  $v$  em torno de  $p$  é o conjunto  $L(p, v) = \{q \in M; B_v(q) = B_v(p)\}$ . A bola limite em  $v$  determinada por  $p$  é o conjunto  $N(p, v) = \{q \in M; B_v(q) < B_v(p)\}$ . Devido ao corolário 3.27, estas definições são independentes da escolha de  $B_v$  em  $v$ . É fácil verificar que  $L(p, v)$  é a fronteira topológica de  $N(p, v)$ .

# Capítulo 4

## GENERALIZAÇÃO PARCIAL DA CONDIÇÃO ESPECTRAL PARA SUPERFÍCIES DE HADAMARD

Nesse capítulo provamos o teorema principal, que de certo modo, generaliza parcialmente a condição espectral no caso de superfícies de Hadamard.

### 4.1 Teorema principal

**Teorema 4.1.** *Seja  $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  um difeomorfismo local que preserva orientação entre superfícies orientadas de Hadamard. Se existe uma aplicação contínua  $h : M_1(\infty) \rightarrow M_2(\infty)$  que satisfaz:*

- i) Para todo  $v \in M_1(\infty)$ , a folheação horociclo  $H_v$  e a folheação pull-back  $f^*H_{h(v)}$  são vagamente transversais.*
- ii) Para todo  $v \in M_1(\infty)$ , o conjunto onde  $H_v$  e  $f^*H_{h(v)}$  são tangentes intersecta cada  $v$ -horociclo em um conjunto compacto.*

*Então  $f$  é injetiva.*

*Demonstração.* Seja  $Df(x) : T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2$  a diferencial de  $f$  em  $x$  e denote por  $(Df(x))^t : T_{f(x)} M_2 \rightarrow T_x M_1$  a transposta de  $Df(x)$  definida de maneira usual. No que se segue,  $B_w$  indicará a função de Busemann correspondente a  $w \in M_1(\infty)$  ou  $M_2(\infty)$ , para uma escolha de pontos em uma base fixada de  $M_1$  e  $M_2$ . Por sua vez, a folheação horociclo  $H_v = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} B_v^{-1}(c)$  e a folheação pull-back  $f^*H_{h(v)} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} g^{-1}(c)$ , onde  $g$  é a composição  $B_{h(v)} \circ f : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que obviamente é de classe  $C^1$ , e uma submersão, já

que  $Dg(x) = \nabla B_{h(v)} \cdot Df(x) \neq 0$  para todo  $x$ , pois  $Df(x)$  é um isomorfismo e uma vez que  $|\nabla B_{h(v)}| \equiv 1$ , temos que  $\nabla B_{h(v)}$  é não nulo.

Dado  $\alpha \geq 1$ ,  $s \in [0, 1]$  e  $v \in M_1(\infty)$ , definimos um campo vetorial  $G_{v,\alpha,s}$  em  $M_1$  por

$$G_{v,\alpha,s}(x) = \nabla B_v(x) - \frac{s}{\alpha} \frac{Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))}{|Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))|}. \quad (4.1)$$

Uma vez que funções de Busemann são de classe  $C^2$ , o campo vetorial  $G_{v,\alpha,s}$  é de classe  $C^1$  e suas trajetórias locais são unicamente determinadas. Na verdade, uma vez que  $|G_{v,\alpha,s}| \leq 2$  e  $M_1$  é completa, as trajetórias são definidas para todo tempo. Observamos também que  $G_{v,\alpha,s}$  varia continuamente com os parâmetros  $v$ ,  $\alpha$  e  $s$ . Em particular, o fluxo associado também varia continuamente com estes parâmetros.

Agora suponha que  $f(a) = f(b)$  com  $a \neq b$  e denote por  $\phi_{v,\alpha,s}$  a curva integral de  $G_{v,\alpha,s}$  passando por  $a$  no tempo  $t = 0$ . Daí  $\phi_{v,\alpha,s}(t) = x(t)$  resolve o problema de valor inicial  $x'(t) = G_{v,\alpha,s}(x(t))$  em  $x(0) = a$ . Sendo  $\alpha > 1$  e usando que  $|\nabla B_v| = 1$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_v(x) &= \langle \nabla B_v(x), x'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla B_v(x), G_{v,\alpha,s}(x) \rangle \\ &= \left\langle \nabla B_v(x), \nabla B_v(x) - \frac{s}{\alpha} \frac{Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))}{|Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))|} \right\rangle \\ &= \langle \nabla B_v(x), \nabla B_v(x) \rangle - \frac{s}{\alpha} \left\langle \nabla B_v(x), \frac{Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))}{|Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))|} \right\rangle \\ &= |\nabla B_v(x)|^2 - \frac{s}{\alpha} \left\langle \nabla B_v(x), \frac{Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))}{|Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))|} \right\rangle. \end{aligned}$$

Mas pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\left\langle \nabla B_v(x), \frac{Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))}{|Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))|} \right\rangle \leq 1,$$

desta forma podemos escrever

$$\frac{d}{dt} B_v(x) \geq 1 - \frac{s}{\alpha} \geq 1 - \frac{1}{\alpha}, \text{ pois } s \in [0, 1].$$

Integrando a expressão anterior de 0 e  $t$ , obtemos

$$B_v(\phi_{v,\alpha,s}(t)) - B_v(a) \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha} t, \quad (4.2)$$

que é válido para  $t \geq 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ,  $v \in M_1(\infty)$ . Para  $\alpha > 1$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ,

definimos uma aplicação contínua  $\psi_{\alpha,s} : M_1 \rightarrow M_1$  por

$$\psi_{\alpha,s}(w) = \begin{cases} \phi_{v(a,w),\alpha,s}(d(w,a)), & w \neq a \\ a, & w = a \end{cases}$$

Aqui  $d$  representa a distância Riemanniana e para  $w \neq a$ ,  $v(a,w)$  representa o ponto no infinito correspondente a única geodésica orientada partindo de  $a$  até  $w$ . A partir da definição de  $\psi_{\alpha,s}$  e (4.2), temos

$$B_{v(a,w)}(\psi_{\alpha,s}(w)) - B_{v(a,w)}(a) \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha} d(w,a). \quad (4.3)$$

Para  $\alpha > 1$  consideramos a homotopia  $K_\alpha : [0, 1] \times M_1 \rightarrow M_1$  dada por

$$K_\alpha(s, w) = \psi_{\alpha,s}(w).$$

Sejam  $s_n \in [0, 1]$  e  $w_n \in M_1$  seqüências e  $(s, a) \in [0, 1] \times M_1$ , de modo que

$$\begin{aligned} (s_n, w_n) \rightarrow \infty &\Leftrightarrow d((s_n, w_n), (s, a)) \rightarrow \infty \\ &\Leftrightarrow (d(s_n, s) + d(w_n, a)) \rightarrow \infty \\ &\Leftrightarrow d(w_n, a) \rightarrow \infty, \text{ pois } d(s_n, s) \leq 1. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n, a) = \infty$  implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(K_\alpha(s_n, w_n), a) = \infty$ . De fato,  $d(K_\alpha(s_n, w_n), a) = d(\psi_{\alpha,s_n}(w_n), a)$ , e pela definição de função de Busemann, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\gamma_n$  partindo de  $a$ , tal que  $\gamma_n(\infty) = v(a, w_n)$ . Portanto,

$$B_{v(a,w_n)}(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(a, \gamma_n(t)) - t) \text{ e } B_{v(a,w_n)}(\psi_{\alpha,s_n}(w_n)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(\psi_{\alpha,s_n}(w_n), \gamma_n(t)) - t).$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} d(\psi_{\alpha,s_n}(w_n), a) &\geq d(\psi_{\alpha,s_n}(w_n), \gamma_n(t)) - d(a, \gamma_n(t)) \\ &\geq (d(\psi_{\alpha,s_n}(w_n), \gamma_n(t)) - t) - (d(a, \gamma_n(t)) - t). \end{aligned}$$

Além disso, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $d(\psi_{\alpha,s_n}(w_n), a) \geq B_{v(a,w_n)}(\psi_{\alpha,s_n}(w_n)) - B_{v(a,w_n)}(a)$ . Por (4.3) temos que

$$d(\psi_{\alpha,s_n}(w_n), a) \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha} d(w_n, a).$$

Logo  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(K_\alpha(s_n, w_n), a) = \infty$ , como queríamos provar. Portanto a homotopia contínua  $K_\alpha$  é própria. Em particular, as aplicações  $K_\alpha(0, \cdot)$  e  $K_\alpha(1, \cdot)$  também são aplicações próprias de  $M_1$ . Desta forma é possível definir o seu grau topológico, e em

seguida, a invariância do grau sob homotopias adequadas nos dá

$$\deg(\psi_{\alpha,1}) = \deg(\psi_{\alpha,0}). \quad (4.4)$$

Claramente,  $\psi_{\alpha,0}$  é uma simetria geodésica sobre o ponto  $a$  e portanto um difeomorfismo de  $M_1$ . Consequentemente,  $\deg(\psi_{\alpha,1}) = \deg(\psi_{\alpha,0})$  é não nulo. Em particular,  $\psi_{\alpha,1}$  é sobrejetiva. Logo, dado  $b \in M_1$ , existe  $u_\alpha \in M_1$  tal que  $\psi_{\alpha,1}(u_\alpha) = b$ . Contudo,

$$\psi_{\alpha,1}(u_\alpha) = \phi_{v(a,u_\alpha),\alpha,1}(d(u_\alpha, a)).$$

Desta forma para todo  $\alpha > 1$ , tomando  $\tau_\alpha = d(a, u_\alpha) > 0$  e  $v_\alpha = v(a, u_\alpha)$ , temos

$$\phi_{v_\alpha,\alpha,1}(0) = a, \quad \phi_{v_\alpha,\alpha,1}(\tau_\alpha) = b. \quad (4.5)$$

Agora analisamos os dois únicos casos possíveis.

**Caso 1.**  $\liminf_{\alpha \rightarrow 1} \tau_\alpha < \infty$ .

Seja  $\alpha_n$  uma seqüência que converge para 1, tal que  $\tau_{\alpha_n} \rightarrow c < \infty$  e  $v_{\alpha_n} \rightarrow v$  para algum  $c$  e algum  $v$ . A partir da dependência contínua dos parâmetros do fluxo e de (4.5), temos

$$\phi_{v,1,1}(0) = a, \quad \phi_{v,1,1}(c) = b. \quad (4.6)$$

Sendo  $x = \phi_{v,1,1}(t)$ , temos

$$\frac{d}{dt} B_{h(v)}(f(x)) = \langle \nabla B_{h(x)}(f(x)), Df(x)x' \rangle,$$

agora usando o fato que  $\langle v, Df(x)w \rangle = \langle Df(x)^t v, w \rangle$  para todo  $v \in T_{f(x)}M_2$  e  $w \in T_x M_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_{h(v)}(f(x)) &= \langle Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)), x'(t) \rangle \\ &= \langle Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)), G_{v,1,1}(x(t)) \rangle \\ &= \left\langle Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)), \nabla B_v(x) - \frac{Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))}{|Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))|} \right\rangle \\ &= \langle Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)), \nabla B_v(x) \rangle - |Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))| \\ &\leq |Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))| |\nabla B_v(x)| - |Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))| = 0, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy e o fato de que  $|\nabla B_v| = 1$ . Ainda pela desi-

gualdade de Cauchy, temos que

$$\frac{d}{dt}B_{h(v)}(f(x(t))) = 0$$

exatamente quando  $Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)) = \lambda \nabla B_v(x)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Isto implica que

$$\nabla B_v(x) = \frac{Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))}{|Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))|}, \quad (4.7)$$

pois  $|\nabla B_v(x)| = 1$  e  $\nabla B_{h(v)}(f(x)) \neq 0$ , uma vez que  $f$  é difeomorfismo local.

Contudo, veremos que (4.7) não pode ocorrer. De fato, supondo que (4.7) seja verdadeiro, então

$$Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)) = \beta(x) \nabla B_v(x), \quad (4.8)$$

onde  $\beta(x) = |Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))| > 0$ . Seja  $w$  (respectivamente  $w'$ ) um vetor tangente orientando positivamente o  $v$ -horociclo em  $x$  (respectivamente o  $h(v)$ -horociclo em  $f(x)$ ), de modo que as bases  $\{\nabla B_v(x), w\}$  e  $\{\nabla B_{h(v)}(f(x)), w'\}$  sejam positivas. Sendo assim,  $Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x))$  e  $w$  são ortogonais, e como

$$\langle Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)), w \rangle = \langle \nabla B_{h(v)}(f(x)), Df(x)w \rangle,$$

segue-se que  $\langle \nabla B_{h(v)}(f(x)), Df(x)w \rangle = 0$ .

Portanto  $Df(x)w = \mu w'$  para algum  $\mu$  não nulo, e além disso, a folheação pull-back  $f^*H_{h(v)}$  é tangente a folheação horociclo  $H_v$  em  $x$ . Realmente, sejam  $w \in T_x B_v^{-1}(c)$  tal que  $w$  orienta  $T_x B_v^{-1}(c)$  e  $\tilde{w} \in T_x g^{-1}(d)$ . Existe  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow g^{-1}(d)$  tal que  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha'(0) = \tilde{w}$ . Daí,

$$\begin{aligned} g(\alpha(t)) = d &\Leftrightarrow \langle \nabla B_{h(v)}(f(\alpha(t))), Df(\alpha(t))\alpha'(t) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)), \tilde{w} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Mas  $\langle Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)), w \rangle = 0$ , e como  $\dim T_x M_1 = 2$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{w} = \lambda w$ . Isto mostra que  $T_x B_v^{-1}(c) = T_x g^{-1}(d)$ . Agora, para  $0 \leq t \leq 1$  temos

$$X_t = tDf(x)\nabla B_v(x) + (1-t)\nabla B_{h(v)}(f(x))$$

e  $\langle X_t, \nabla B_{h(v)}(f(x)) \rangle = 1 - t + t\beta(x) \geq \min\{1, \beta(x)\} > 0$ . Com isso afirmamos que  $\{X_t, w'\}$  é uma base para  $0 \leq t \leq 1$  e que as orientações de  $\{X_0, w'\}$  e  $\{X_1, w'\}$  são

iguais. Para ver isto, observe que  $rX_t + sw' = 0 \Leftrightarrow r = s = 0$ . Portanto  $X_t$  e  $w'$  são dois vetores linearmente independentes, para  $0 \leq t \leq 1$ . Além do mais, escrevendo  $X_1$  e  $w'$  como uma combinação linear dos elementos da base  $\{X_0, w'\}$ , temos

$$\begin{aligned} X_1 &= aX_0 + bw' \\ w' &= 0X_0 + 1w' \end{aligned}$$

e neste caso devemos obter

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a > 0.$$

Mas  $X_0 = \nabla B_{h(v)}(f(x))$  e  $X_1 = Df(x)\nabla B_v(x)$ , e portanto,

$$a = \langle Df(x)\nabla B_v(x), \nabla B_{h(v)}(f(x)) \rangle = \langle \nabla B_v(x), Df(x)^t \nabla B_{h(v)}(f(x)) \rangle = \beta(x) > 0.$$

Daí segue-se que  $\{X_1, w'\} = \{Df(x)\nabla B_v(x), \frac{1}{\mu}Df(x)w\}$  é uma base positiva. Como  $f$  preserva orientação, temos que  $\mu > 0$ . De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned} Df(x)\nabla B_v(x) &= a\nabla B_{h(v)}(f(x)) + bw' \\ Df(x)w &= 0\nabla B_{h(v)}(f(x)) + \mu w' \end{aligned}$$

e, portanto,  $a\mu > 0$ , donde segue-se que  $\mu > 0$ . Mas isto contradiz a hipótese (i) do teorema, a qual diz que para cada  $v \in M_1(\infty)$ , as folheações  $H_v$  e  $f^*H_{h(v)}$  são vagamente transversais, isto é, suas folhas são transversais em um ponto  $p$  do domínio comum, ou são tangentes mas possuem orientações opostas. Portanto,  $\frac{d}{dt}B_{h(v)}(f(x)) < 0$ .

Integrando  $\frac{d}{dt}B_{h(v)}(f(x)) < 0$  entre 0 e  $c$  ( $c > 0$  tendo em vista (4.6), uma vez que  $a \neq b$ ), temos  $B_{h(v)}(f(b)) < B_{h(v)}(f(a))$  que é uma contradição para  $f(a) = f(b)$ . Isto conclui a prova do teorema sob a suposição que o primeiro caso prevalece. Analisemos agora o outro caso.

**Caso 2.**  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \tau_\alpha = \infty$ .

Vamos mostrar que este caso também não pode acontecer. Seja  $\alpha_n$  uma sequência que converge para 1 com  $\tau_n = \tau_{\alpha_n} \rightarrow \infty$  e  $v_n = v_{\alpha_n} \rightarrow v_0$ . Afirmamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n]) \quad (4.9)$$

é um subconjunto ilimitado de  $M_1$ . De fato, Suponha por absurdo que a união em

(4.9) está contida num conjunto compacto fixo  $K$ . Sendo  $x_n(t) = \phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_{v_n}(x_n(t)) &= \langle \nabla B_{v_n}(x_n(t)), x'_n(t) \rangle \\ &= \left\langle \nabla B_{v_n}(x_n(t)), \nabla B_{v_n}(x_n(t)) - \frac{1}{\alpha_n} \frac{Df(x_n)^t \nabla B_{h(v_n)}(f(x_n))}{|Df(x_n)^t \nabla B_{h(v_n)}(f(x_n))|} \right\rangle \\ &= 1 - \frac{1}{\alpha_n} \left\langle \nabla B_{v_n}(x_n), \frac{Df(x_n)^t \nabla B_{h(v_n)}(f(x_n))}{|Df(x_n)^t \nabla B_{h(v_n)}(f(x_n))|} \right\rangle \\ &\geq 1 - \frac{1}{\alpha_n}, \text{ por Cauchy - Schwarz,} \end{aligned}$$

além disso, como  $\alpha_n \geq 1$ , então  $-\frac{1}{\alpha_n} \geq -1$  e assim,

$$\frac{d}{dt} B_{v_n}(x_n(t)) \geq 0.$$

Suponha que existe uma subsequência  $\{\alpha_{n_k}\}$  de  $\{\alpha_n\}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} B_{v_{n_k}}(x_{n_k}(t)) = 0,$$

e pelo fato de  $\bigcup \phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n]) \subset K$ , fixado um intervalo e a menos de tomarmos subsequência,  $\{x_{n_k}(t)\}$  é uniformemente convergente para cada intervalo fixado.

De fato, como  $\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t) = x_n(t)$ , temos que  $\bigcup x_n([0, \tau_n]) \subset K$ , isto significa que  $|x| \leq A, \forall x \in K$ . Assim, sendo  $I_j \subset [0, \tau_n]$ , para  $n \geq j$  temos  $\|x_n\|_{L^\infty(I_j)} \leq A, \forall n \geq j$ . Agora, como  $|G_{v_n, \alpha_n, 1}| \leq 2$  ( $x'_n(t) = G_{v_n, \alpha_n, 1}(x_n(t))$ ), temos que  $x_n$  é 2-lipschitz, para todo  $n$ . Então  $\{x_n\}$  é equicontínua. Agora, podemos usar o Teorema de Ascoli-Arzelá para concluir que existe uma subsequência  $\{x_{n_k}\}$  tal que

$$x_{n_k}(t) \rightrightarrows x(t), \quad \text{em } I_j.$$

Como  $B_v$  é de classe  $C^2$ , afirmamos que

$$\frac{d}{dt} B_{v_0}(x(t)) = 0.$$

Para ver isto, usaremos o fato que se  $B_{v_n}(x_n) \rightrightarrows B_{v_0}(x)$  então  $\frac{d}{dt} B_{v_n}(x_n) \rightarrow 0$ . Ora,  $\{B_{v_n}(x_n(t))\}$  é equilimitada, pois

$$\begin{aligned} |B_{v_n}(x_n(t)) - B_{v_n}(x_n(s))| &\leq d(x_n(t), x_n(s)) \\ &\leq \text{diâmetro}(K). \end{aligned}$$

Daí,  $|B_{v_n}(x_n(t))| \leq \text{diâmetro}(K) + |B_{v_n}(a)|$ . Além do mais, é claro que  $\sup_n |B_{v_n}(a)| <$

$+\infty$ , pois se não fosse, a menos de tomar subsequência, teríamos

$$\lim_n |B_{v_n}(a)| = +\infty.$$

Porém,  $v_n \rightarrow v$ , e  $B_v$  é contínua em  $v$ . Logo,  $\lim_n |B_{v_n}(a)| = B_{v_0}(a)$ ,  $\forall a$ . Portanto,  $|B_{v_0}(a)| = +\infty$  é absurdo, já que  $B_{v_0} : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  é função. Isto mostra que  $\{B_{v_n}(x_n)\}$  é equilimitada. E como  $B_{v_n}(x_n)$  é 2-lipschitz,  $\{B_{v_n}(x_n)\}$  é equicontínua. Daí, novamente pelo teorema de Ascoli-Arzelá,

$$B_{v_n}(x_n) \rightrightarrows B_{v_0}(x),$$

o que nos dá

$$\frac{d}{dt} B_{v_n}(x_n) \rightarrow 0.$$

Mas isso implica, pela desigualdade de Schwarz,

$$Df(x)^t \nabla B_{h(v_0)}(f(x)) = \beta(x) \nabla B_{v_0}(x), \quad (4.10)$$

para algum  $\beta(x) > 0$ . E já vimos que (4.10) não pode ocorrer, logo não existe tal subsequência. Daí, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt} B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}) \geq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Integrando de 0 a  $\tau_n$ , temos

$$\int_0^{\tau_n} \frac{d}{dt} B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}) dt \geq \delta \tau_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(\tau_n)) - B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(0)) \geq \delta \tau_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

E por (4.5),  $B_{v_n}(b) - B_{v_n}(a) \geq \delta \tau_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Mas  $B_{v_n}$  é Lipschitz com constante igual a 1, então  $B_{v_n}(b) - B_{v_n}(a) \leq d(a, b)$ , e como  $\tau_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , temos que  $d(a, b) \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , o que é uma contradição, já que  $d(a, b)$  é constante. Isso mostra que (4.9) é ilimitado.

Um truncamento de uma região  $v$ -horoeanel fechada  $L_v$  é um subconjunto fechado  $T_v$  limitado pelos horociclos na fronteira de  $L_v$  e pelas duas  $v$ -geodésicas distintas. Seja  $\delta = |B_v(a) - B_v(b)|$ . Para todo  $v \in M_1(\infty)$ , considere o  $v$ -horoeanel  $L_{v, \delta} = B_v^{-1}([B_v(a) - 2\delta, B_v(a) + 2\delta])$ . Em particular,  $a, b \in L_{v, \delta}$  para todo  $v \in M_1(\infty)$ . Seja  $v_0$  como antes. Pela hipótese (ii) no teorema, é possível encontrar um truncamento  $T_{v_0, \delta}$

de  $L_{v_0, \delta}$  que contém  $a$  e  $b$ , e tal que

$$L_{v_0, \delta} \cap \{\text{pontos onde } H_{v_0} \text{ e } f^* H_{h(v_0)} \text{ são tangentes}\} \subset T'_{v_0, \delta}. \quad (4.11)$$

Onde  $T'_{v_0, \delta}$  é obtido de  $T_{v_0, \delta}$  excluindo as  $v_0$ -geodésicas na sua fronteira. Como  $n \rightarrow \infty$ ,  $L_{v_n, \delta} \rightarrow L_{v_0, \delta}$  uniformemente sobre conjuntos compactos. É evidente que também é possível encontrar truncamentos  $T_{v_n, \delta}$  de  $L_{v_n, \delta}$  que contém  $a$  e  $b$  e converge para  $T_{v_0, \delta}$ .

Agora seja  $K$  a união sobre todo  $v_n \in M_1(\infty)$  de todos os truncamentos  $T_{v_n, \delta}$  de  $L_{v_n, \delta}$  dados acima. Uma vez que  $K$  é um conjunto limitado, segue-se a partir de (4.9) que o conjunto  $(M_1 \setminus K) \cap \phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n])$  é não-vazio para todos os  $n$  suficientemente grande. Em particular,

$$(M_1 \setminus T_{v_n, \delta}) \cap \phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n]) \neq \emptyset, \quad n \geq N. \quad (4.12)$$

Desde que  $\frac{d}{dt} B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t)) > 0$ , a trajetória  $\phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n])$  é transversal a folheação  $v_n$ -horociclo, pois se não fosse, existiria  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\phi'_{v_n, \alpha_n, 1}(t_0) \in T_{\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t_0)}(B_{v_n}^{-1}(c)), \quad \text{para algum } c \in \mathbb{R}.$$

Mas  $\nabla B_{v_n}(p) \perp T_p B_{v_n}^{-1}(c)$ , para todo  $p \in B_{v_n}^{-1}(c)$ , então teríamos uma contradição com

$$\frac{d}{dt} B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t))|_{t_0} = \nabla B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t_0)) \cdot \phi'_{v_n, \alpha_n, 1}(t_0) > 0,$$

e por (4.5) temos

$$\phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n]) \subset L_{v_n, \delta}. \quad (4.13)$$

De fato, supondo que  $\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t_0) \notin L_{v_n, \delta}$  para algum  $t_0 \in (0, \tau_n)$ , então temos que  $B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t_0)) \notin [B_v(a) - 2\delta, B_v(a) + 2\delta] = I$ . Agora chame  $f_n(t) = B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t))$ .

Logo,  $f_n(0) = B_{v_n}(a)$  e  $f_n(\tau_n) = B_{v_n}(b)$ , e como  $f'_n(t) = \frac{d}{dt} B_{v_n}(\phi_{v_n, \alpha_n, 1}(t)) > 0$ , com isso temos  $f_n(0) < f_n(\tau_n)$ . Mas  $f_n(t_0) \notin (f_n(0), f_n(\tau_n)) \subset I$ , um absurdo. Portanto,

$$\phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n]) \subset L_{v_n, \delta}.$$

Uma vez que  $a$  e  $b$  pertencem a todos os truncamentos, segue-se a partir de (4.12) que a trajetória  $\phi_{v_n, \alpha_n, 1}([0, \tau_n]) \neq \emptyset$ ,  $n \geq N$ , deve sair e voltar a entrar em  $T_{v_n, \delta}$ . Por (4.13), os pontos de saída e de entrada não podem estar na fronteira dos  $v_n$ -

horocirclos do truncamento. Ao passar para subsequências podemos assumir que a saída e entrada de pontos estão na mesma componente geodésica  $\gamma_n$  na fronteira de  $T_{v_n, \delta}$ . Em particular, o campo vetorial  $G_{v_n, \alpha_n, 1}$  torna-se tangente a uma  $v_0$ -geodésica no ponto  $x_0$  na  $v_0$ -geodésica que é parte da fronteira de  $L_{v_0, \delta} \setminus T_{v_0, \delta}$ . Assim, existe  $\ell$  tal que

$$G_{v_0, 1, 1}(x_0) = \ell \nabla B_{v_0}(x_0), \quad x_0 \in L_{v_0, \delta} \setminus T'_{v_0, \delta}. \quad (4.14)$$

Daí segue de (4.14) e (4.1) que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$Df(x_0)^t \nabla B_{h(v_0)}(f(x_0)) = \lambda \nabla B_{v_0}(x_0), \quad x_0 \in L_{v_0, \delta} \setminus T'_{v_0, \delta}$$

Tal como explicado na discussão anterior (4.8), isto implica que as folheações  $H_v$  e  $f^* H_{h(v)}$  são tangentes no ponto  $x_0 \in L_{v_0, \delta} \setminus T'_{v_0, \delta}$  uma contradição (4.11) e, finalmente, para o fato que assumimos,  $f(a) = f(b)$  com  $a \neq b$ . Portanto o caso 2 também leva a uma contradição, e a prova do teorema.  $\square$

## 4.2 A condição espectral

Recordamos o famoso Teorema de injetividade de Gutierrez [10]: Se um difeomorfismo local  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que  $[0, +\infty) \cap \text{Spec } Df(z) = \emptyset$ , para todo  $z \in \mathbb{R}^2$ , então  $F$  é injetivo.

É natural perguntar se injetividade é uma consequência da condição espectral  $[0, +\infty) \cap \text{Spec } Df(z) = \emptyset$  onde a aplicação  $F$  é agora definida apenas num subconjunto convexo  $\Omega$  do plano. Esta questão tem uma resposta negativa, tal como mostrado pelo seguinte exemplo simples: Tome  $\Omega$  para ser o semiplano superior aberto em  $\mathbb{C}$  e considere a aplicação real subjacente  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F(z) = z^3$ . Para  $z \in \Omega$ , a derivada  $F'(z) = 3z^2$  falha em  $[0, +\infty)$  e  $F$  não é injetiva.

Apesar disso, sob uma condição espectral adequada um difeomorfismo local definido em um conjunto convexo pode ser injetivo, por exemplo, se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é aberto, convexo e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaz a condição espectral mais forte  $\mathbb{R} \cap \text{Spec } Df(z) = \emptyset$ , para todo  $z \in \Omega$ , então  $F$  é injetiva. Para ver isto, suponha  $F(a) = F(b)$  com  $a \neq b$ , e  $v = b - a$ . A função  $g$  em  $[0, 1]$  dada por  $g(t) = \langle F(a + tv), v^\perp \rangle$  satisfaz  $g(0) = g(1)$ . Pelo teorema do valor médio existe  $z \in [a, b]$  tal que  $\langle DF(z)v, v^\perp \rangle = 0$ . Em particular,  $v$  é um autovetor de  $DF(z)$  correspondente para um autovalor real, uma contradição.

Para entender o teorema de Gutierrez a partir de um ponto de vista geométrico, temos que perceber que a condição espectral é equivalente à condição geométrica de

que cada folheação de  $\mathbb{R}^2$  por linhas paralelas é vagamente transversal à sua folheação pull-back sob um difeomorfismo local. Da mesma forma, a condição espectral mais forte  $\mathbb{R} \cap \text{Spec } Df(z) = \emptyset$  é equivalente à condição de que as folheações acima são realmente transversais.

### 4.3 Uma relação entre o teorema principal e a condição espectral

No contexto das superfícies de Hadamard, linhas paralelas são horociclos correspondentes ao mesmo ponto no infinito. Na verdade, o teorema 4.1 é destinado a fornecer uma geometrização do Teorema de injetividade de Gutierrez. Para ver isto, tome  $(M_1, g_1) = (M_2, g_2) =$  o plano flat e  $h =$  identidade. Assim, vemos que a condição (i) é equivalente à condição espectral  $[0, +\infty) \cap \text{Spec}(Df(x))^t = \emptyset$ , para todo  $x$  no plano, onde  $A^t$  denota a matriz transposta de  $A$ .

De fato, seja  $\{v, v^\perp\}$  uma base ortonormal positiva e suponhamos, a título de contradição, que para  $f$  nas condições do teorema,  $Df(x)^t v = \lambda v$ , onde  $\lambda > 0$ . Segue-se que  $Df(x)v^\perp = \mu v^\perp$  para algum número real  $\mu$ . A aplicação  $f$  preserva orientação de modo que a base  $\{Df(x)v, Df(x)v^\perp\} = \{Df(x)v, \mu v^\perp\}$  é positiva. Desde que  $\langle Df(x)v, v \rangle > 0$ , temos que  $\mu > 0$ , o que é uma contradição para a definição de transversalidade vaga.

A condição (ii) significa que o conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^2$  que tem  $v$  como um autovetor de  $(Df(x))^t$  intercepta qualquer faixa no plano com lados perpendiculares a  $v$  em um compacto definido. Na verdade, o resultado central no artigo de Gutierrez [10] indica que a condição espectral  $[0, +\infty) \cap \text{Spec}(Df(x))^t = \emptyset$  basta para provar que  $f$  é injetiva.

Uma consequência importante do teorema de Gutierrez (ver também [7] e [9]) é a solução afirmativa da conjectura de estabilidade global assintótica na teoria dos sistemas dinâmicos: se  $f$  é um campo vetorial suave em  $\mathbb{R}^2$  com uma singularidade em  $p$  e se as linearizações de  $f$  são estáveis em todos os pontos então a variedade estável de  $p$  é o plano inteiro.

Tendo em vista os desenvolvimentos descritos no parágrafo acima, é natural perguntar se a condição (ii) do Teorema é supérflua. Se isto puder ser demonstrado, que é um caso da teoria, teremos uma generalização completa do teorema de Gutierrez para superfícies de Hadamard.

# REFERÊNCIAS

- [1] BALLMAN, W.; GROMOV, M.; SCHROEDER, U. *Manifolds of nonpositive curvature*. Progr. Math. vol. 61, Birkhäuser, 1985.
- [2] BISHOP, R.; O'NEILL, B. *Manifolds of negative curvature*. **Trans. Amer. Math. Soc.** 145 (1969), p. 1–49.
- [3] CAMACHO, C.; LINS NETO A. *geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston Inc., (1985).
- [4] CARMO, M. P. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, (1992).
- [5] EBERLEIN, P.; O'NEILL, B. *Visibility Manifolds*. **Pacific Journal of Mathematics**. 46 (1977), p. 45–109.
- [6] EBERLEIN, E.; HAMENSTADT, U.; SCHROEDER, V. *Manifolds of nonpositive curvature*. Proc. Simposia Pure Math. 54 (1993), p. 179–226.
- [7] FESSLER, R. *A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization*. **Ann. Polon. Math.** 62 (1995), p. 45–75.
- [8] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1974).
- [9] GLUTSYUK, A. A. *A complete solution of the Jacobian problem for vector fields on the plane*. **Math. Surveys** 49 (1994), p. 185–186.
- [10] GUTIERREZ, C. *A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture*. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire** 12 (1995), p. 627–671.
- [11] HEINTZE, E.; IM HOF, H. C. *On the geometry of horospheres*. **J. Differential Geom.** 12 (1977), p. 481–491.
- [12] LEE, J. M. *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*. vol. 176 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1997).
- [13] O'NEILL, B. *Elementary Differential Geometry*. Second Edition, Academic Press, 1997.
- [14] PAPADOPOULOS, A. *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. European Mathematical Society, 2005.

- [15] SMYTH, B.; XAVIER, F. *injectivity of local diffeomorphisms from nearly spectral conditions*. **J. Differential Equations** 130 (1996), p. 406–414.
- [16] VERJOVSKY, A. *Introduccion a la geometria y variedades hiperbolicas*. Instituto Politécnico Nacional, México, 1982.
- [17] XAVIER, F. *Injectivity as a Transversality Phenomenon in Geometries of Negative Curvature*. **Illinois J. Math.** 43 (1999), no. 2, p. 256–263.