



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**ANDERSON FEITOZA LEITÃO MAIA**

**ESTIMATIVAS PARA A CURVATURA MÉDIA DE  
SUBVARIEDADES CILINDRICAMENTE LIMITADAS**

FORTALEZA  
2013

**ANDERSON FEITOZA LEITÃO MAIA**

**ESTIMATIVAS PARA A CURVATURA MÉDIA  
DE SUBVARIEDADES CILINDRICAMENTE  
LIMITADAS**

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Matemática,  
da Universidade Federal do Ceará, para  
a obtenção do grau de Mestre em  
Matemática.

Área de concentração: Geometria e  
Topologia

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio  
Colares

**FORTALEZA**

**2013**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

M184e      Maia, Anderson Feitoza Leitão  
              Estimativas para a curvatura média de subvariedades cilíndricamente limitadas / Anderson  
              Feitoza Leitão Maia /. - 2013  
              69 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.  
Área de Concentração: Geometria e Topologia  
Orientação: Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares.

1. Geometria. 2. Análise geométrica. 3. Topologia. I. Título.

Dedico este trabalho à minha família.

“A Matemática pura é, à sua maneira, a poesia das idéias lógicas .”

Albert Einstein (1879-1955).

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida, por toda a força que ele me concede diante de todos os desafios que surgem e por todas as pessoas maravilhosas que ele colocou na minha vida(meus pais, minha avó(Mana) e meu avô(Leitão), meu irmão(Júnior) e minha irmã(Alexsandra), minha família, meus amigos e os professores que marcaram toda minha carreira estudantil.)

Ao meu pai Cosme Maia e minha mãe Maria Tereza que são as pessoas mais importantes da minha vida, e tudo que eu tenho e conseguir até hoje se deve ao grande apoio e dedicação deles. Não há uma palavra no universo que possa expressar o amor e a gratidão que sinto por eles.

Ao meu tio, irmão, melhor amigo, orientador Raimundo Alves(Júnior) que sempre esteve do meu lado me dando apoio e me orientando durante minha carreira estudantil na matemática.

À minha irmã Alexsandra pelo constante apoio e ajuda em cuidar de mim e aos meus avôs pelo carinho dedicado e os ensinamentos. Em especial minha avó Maria Mable(Mana) minha segunda mãe.

Aos meus amigos(que considero irmãos) e colegas da UFC e de fora(que de alguma forma contribuíram ou ainda contribuem na minha vida), especialmente e em ordem alfabética: Adenilson Arcanjo, Adriano Alves, Ana Elisa Leão, Breno Rafael, Daniel Verçosa, Delson Barros, Diego Eloi, Diego Quântico, Disson Soares, Dulce O'Brien, Edno dos Santos, Edson Sampaio, Eduardo Garcez(Zé), Elaine Sampaio, Ernando Carneiro, Euripedes Carvalho, Fátima Cruz, Francisco de Assis, Francisco Yure Santos, Germanna Fraga, Gilson Granja, Gisele Oliveira, Gleydson Ricarte, Heládio Andrade, Henrique Blanco, Ivan Mota, João Luís, João Nunes, Jonatan Floriano, Kelma Gomes, Leo Ivo, Lyana Dalia, Marlon de Oliveira, Maria Angélica, Maria Viviane(Vivi), Michele Fonseca, Natália Carvalho, Neilha Pinheiro, Nicolas Alcantara, Olavo Júnior, Paulo Henrique, Paulo Ricardo, Renan Santos, Roger Oliveira, Rui Brasileiro, Sofia Rivera, Victor Maximiano, Wanderley de Oliveira e a todos aqueles que eu

possa ter esquecido de mencionar.

Ao meu orientador Antonio Gervasio Colares, pela confiança depositada em mim, pelo incentivo e orientação nos meus estudos.

Aos professores da Matemática em especial e em ordem alfabética: Abdênago Barros, Afonso de Oliveira, Alberto Maia, Alexandre Fernandes, Antonio Caminha, Antonio Gervasio, Diego Moreira, Eduardo Teixeira, Fábio Montenegro, Fernanda Camargo, Francesco Mercury, Lucas Barbosa, Marcos Melo, Othon Dantas e Pacelli Bessa pelo aprendizado proporcionado e pelas orientações concedidas durante minha graduação e mestrado.

Aos membros da banca examinadora, Professor José Fábio Bezerra Montenegro, Professor Gregório Pacelli Feitosa Bessa e o Professor Sebastião Carneiro pela disponibilidade e pelas contribuições fornecidas.

Aos membros da secretária de pós-graduação em especial a Andrea e aos membros da biblioteca em especial a Rocilda.

Ao órgão financiador CAPES pelo o apoio financeiro.

# Resumo

Esse trabalho é baseado no artigo *The Mean Curvature Cylindrically Bounded Submanifolds*, nele abordaremos uma estimativa para a curvatura média de subvariedades completas cilindricamente limitadas. Ademais apresentaremos uma relação entre uma estimativa da curvatura média e o fato de  $M$  ser estocasticamente incompleta.

**Palavras-Chaves:** Problema de Calabi, Princípio do Máximo de Omori-Yau, Subvariedades Cilindricamente Limitadas, Curvatura Média, Completitude Estocástica.



# Abstract

This work is based on the article *The Mean Curvature Cylindrically Bounded Submanifolds*, it will discuss an estimate for the mean curvature of complete cylindrically submanifolds bounded. Furthermore we present a relationship between an estimate of the mean curvature and the fact that  $M$  is stochastically incomplete.

**Keywords:** Calabi Problem, Omori-Yau Maximum Principle, Cylindrically Bounded Submanifolds, Mean Curvature, Stochastic completeness.

# Sumário

<b>Introdução</b>	p. 1
<b>1 Preliminares</b>	p. 3
1.1 Linguagem Básica . . . . .	p. 4
1.2 Conexões Afins e Conexões Riemannianas . . . . .	p. 7
1.3 Geodésicas . . . . .	p. 8
1.4 Operadores Diferenciais - Gradiente, Divergência, Laplaciano e Hessiano . . . . .	p. 13
1.5 Curvaturas . . . . .	p. 20
1.6 Campos de Jacobi e o Cut Locus . . . . .	p. 24
1.7 A Expressão do Laplaciano e o Hessiano da Função Distância . . . . .	p. 26
1.8 Teorema de Comparação do Hessiano . . . . .	p. 33
<b>2 Princípio do Máximo de Omori-Yau e Noções de Completitude Estocastica</b>	p. 37
2.1 Princípio do Máximo . . . . .	p. 37
2.2 Princípio do Máximo de Omori-Yau . . . . .	p. 39
2.3 Noções Básicas de Variedades Riemannianas Estocasticamente Completas . . . . .	p. 44
<b>3 Estimativas para a Curvatura Média de Subvariedades Cilindricamente Limitadas</b>	p. 46
3.1 Teorema Principal . . . . .	p. 46

3.2	Considerações Finais . . . . .	p. 56
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>p. 57</b>

# Introdução

Eugenio Calabi [7], em meados de 1960, propôs duas conjecturas sobre hipersuperfícies mínimas completas em  $\mathbb{R}^n$ . Veja também [8]. Na primeira, conjecturou que toda hipersuperfície mínima completa do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é ilimitada, enquanto, na segunda, conjecturou que as hipersuperfícies não planares mínimas completas do  $\mathbb{R}^n$  têm projeção ilimitada sobre todo subespaço  $(n - 2)$ -dimensional.

Ambas as conjecturas acabaram por serem falsas para superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$ .

Primeiro Jorge-Xavier [17] exibiram um exemplo de uma superfície mínima completa não-plana compreendida entre dois planos paralelos, mostrando que a segunda conjectura não é verdadeira. Utilizando os métodos empregados por Jorge-Xavier, Nadirashvili [20] exibiu um exemplo de uma superfície mínima completa contida na bola unitária do  $\mathbb{R}^3$ , contrariando assim a primeira conjectura. Recentemente foi demonstrado por Colding e Minicozzi [9] que ambas as conjecturas se mantêm para superfícies mínimas mergulhadas.

Como uma aplicação de nosso método, generalizamos os resultados de Markvorsen [18] e Bessa e Montenegro [6] sobre incompletitude estocástica de subvariedades mínimas para subvariedades de curvatura média limitada.

Bessa e Montenegro [6] mostraram que subvariedades mínimas cilíndricamente limitadas completas de  $N \times \mathbb{R}$  são estocasticamente incompletas. Aqui nós estenderemos esses resultados para subvariedades completas com curvatura média suficientemente pequena dentro de um cilindro fechado  $B(r) \times \mathbb{R}^\ell$  numa variedade Riemanniana produto  $N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$ . Para isto provaremos o resultado principal proposto por Alias, Bessa e Dajczer [1]:

**Teorema 0.1.** *Seja  $\varphi : M^m \rightarrow N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa  $M$  de dimensão  $m > \ell + 1$ . Seja  $B_N(r)$  a bola geodésica de  $N^{n-\ell}$  centrada em  $p$  com raio  $r$ . Dado  $q \in M$ , assumir que as curvaturas seccionais radiais  $K_N^{\text{rad}}$  ao longo da geodésicas radiais saindo de  $p = \pi(\varphi(q)) \in N^{n-\ell}$  são limitadas quando  $K_N^{\text{rad}} \leq b$*

em  $B_N(r)$ . Suponha que

$$\varphi(M) \subset B_N(r) \times \mathbb{R}^\ell$$

para  $r < \min\{\text{inj}_N(p), \pi/2\sqrt{b}\}$ , onde assumiremos  $\frac{\pi}{2\sqrt{b}}$  para  $\infty$  se  $b \leq 0$ .

(a) Se  $\varphi : M^m \rightarrow N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$  é própria, então

$$\sup_M |H| \geq \frac{m-\ell}{m} C_b(r). \quad (1)$$

(b) Se

$$\sup_M |H| < \frac{m-\ell}{m} C_b(r), \quad (2)$$

então  $M$  é estocasticamente incompleta.

Ademais, apresentaremos uma consequência do teorema para hipersuperfícies euclidianas:

**Corolário 0.1.** *Seja  $\varphi : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície completa com curvatura média  $H$ . Se*

$$\varphi(M) \subset B_{\mathbb{R}^2}(r) \times \mathbb{R}^{n-2} \quad \text{e} \quad \sup_M |H| < \frac{1}{n-1}r,$$

então  $\varphi$  não é própria.

# Capítulo 1

## Preliminares

### Conteúdo

---

1.1	Linguagem Básica . . . . .	p. 4
1.2	Conexões Afins e Conexões Riemannianas . . . . .	p. 7
1.3	Geodésicas . . . . .	p. 8
1.4	Operadores Diferenciais - Gradiente, Divergência, Laplaciano e Hessiano . . . . .	p. 13
1.5	Curvaturas . . . . .	p. 20
1.6	Campos de Jacobi e Cut Locus . . . . .	p. 24
1.7	A Expressão do Laplaciano e o Hessiano da Função Distância . . . . .	p. 26
1.8	Teorema de Comparação do Hessiano . . . . .	p. 33

---

Neste capítulo encontraremos os fundamentos básicos para a identificação das hipóteses dos nossos resultados e o bom entendimento dos nossos cálculos, bem como os enunciados de alguns resultados clássicos que usamos no trabalho, destacando a Expressão do Laplaciano e o Teorema de Comparação do Hessiano. Os resultados que não demonstraremos conterão as referências onde tais provas poderão ser encontradas.

## 1.1 Linguagem Básica

Iniciaremos com uma breve exposição sobre variedades Riemannianas para que o texto fique mais completo. Começaremos com a definição do conceito de variedades diferenciáveis, que generaliza o conceito de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.1.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações injetivas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos do  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que:*

- i.  $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ .*
- ii. para todo par  $\alpha, \beta$  com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  são diferenciáveis.*
- iii. A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é maximal relativa às condições acima.*

O par  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  é chamado de parametrização(ou sistema de coordenadas) de  $M$  em  $p$  e  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma vizinhança coordenada em  $p$ .

Como nas superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , também é possível considerar o espaço tangente à uma variedade diferenciável  $M$  em um ponto  $p$ . Primeiro, estenderemos a noção de diferenciabilidade. Para tanto, precisamos da seguinte definição:

**Definição 1.2.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades diferenciáveis de dimensão  $n$  e  $m$ . Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é diferenciável em  $p \in M_1$  se dada uma parametrização  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$  em  $\varphi(p)$  existe uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  em  $p$  tal que  $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$  e a aplicação  $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ . Diremos que  $\varphi$  é diferenciável em um aberto de  $M_1$  se ela é diferenciável em cada ponto do aberto.*

**Observação 1.1.** *Uma estrutura diferenciável em um conjunto  $M$  induz de uma maneira natural uma topologia em  $M$ . Dizendo que os abertos de  $M$  são os conjuntos  $A \subset M$  tais que  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  para toda parametrização, induzimos em  $M$  uma topologia.*

**Definição 1.3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma curva(diferenciável) em  $M$ . Suponha que  $\alpha(0) = p \in M$ , e seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções de  $M$  diferenciáveis em  $p$ . O vetor tangente à curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}.$$

O vetor tangente em  $p$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ . Chamamos de espaço tangente a  $M$  em  $p$ , identificado por  $T_p M$ , ao espaço vetorial formado pelos vetores que são tangentes à  $M$  em  $p$ . As operações que fazem deste conjunto espaço vetorial são as operações usuais em espaços de funções.

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades diferenciáveis de dimensão  $n$  e  $m$  e  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação diferenciável. Para todo ponto  $p \in M_1$  e para cada  $v \in T_p M_1$ , escolha uma curva diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Seja  $\beta \circ \alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$  dada por  $d\varphi_p = \beta'(0)$  que é linear e não depende da escolha de  $\alpha$ , é chamada a diferencial de  $\varphi$  em  $p$ .

**Definição 1.4.** (*Variedades Riemannianas*) Uma variedade Riemanniana é um par composto de uma variedade diferenciável e uma métrica Riemanniana. Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no  $T_p M$ , o qual satisfaz o seguinte: se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é uma vizinhança coordenada em  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em  $U$ .

O conjunto  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(q), \frac{\partial}{\partial x_2}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(q) \right\}$  é uma base para o espaço tangente à  $M$  no ponto  $p$ ,  $T_p M$ .

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. O campo de vetores  $X$  em  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $X(p) \in T_p M$ . Considerando uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada  $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função em  $U$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  é a base associada a  $\mathbf{x}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Também



podemos ver o campo  $X$  como sendo uma aplicação  $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $Xf$  é a função

$$Xf(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(p),$$

Indicaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores em  $M$ . No que segue, usaremos uma operação  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que  $[X, Y]$  é o campo  $XY - YX$  para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Não é difícil ver que esta operação satisfaz as seguintes propriedades:

**Proposição 1.1.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , são campos de vetores diferenciáveis em  $M$ ,  $a, b$  números reais, e  $f, g$  funções diferenciáveis, então:*

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (*anticomutatividade*),
- (b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (*linearidade*),
- (c)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (*identidade de Jacobi*)
- (d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo 0. □

Uma aplicação diferenciável  $c : I \rightarrow M$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em uma variedade diferenciável  $M$  chama-se uma curva (parametrizada).

**Definição 1.5.** *Um Campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é uma aplicação que a cada  $t \in I$  associa um vetor tangente  $V(t) \in T_{c(t)}M$ . Diz-se que  $V$  é diferenciável se para toda função diferenciável  $f$  em  $M$ , a função  $t \rightarrow V(t)f$  é uma função diferenciável em  $I$ .*

O campo  $dc \left( \frac{d}{dt} \right)$ , indicado por  $\frac{dc}{dt}$ , é denominado campo velocidade (ou tangente) de  $c$ . Restringindo a curva  $c$  a um intervalo fechado  $[a, b] \subset I$  obtemos um segmento, definimos o comprimento de um segmento por

$$\ell_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt,$$

**Definição 1.6.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p, q \in M$ . A distância  $d(p, q) = \text{ínfimo}$  dos comprimentos de todas as curvas  $f_{p,q}$ , onde  $f_{p,q}$ , é uma curva diferenciável por partes ligando  $p$  a  $q$ .*

## 1.2 Conexões Afins e Conexões Riemannianas

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  a parti de agora o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e por  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ .

**Definição 1.7.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por  $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$  e satisfaz as seguintes propriedades:

- i.  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- ii.  $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- iii.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

Conexões afins sempre existem, porém em uma variedade Riemanniana a unicidade não é garantida. Contudo se uma conexão afim em  $M$  for simétrica,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e compatível com a métrica,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

então o Teorema de Levi-Civita(citado abaixo) garante unicidade fornecendo a seguinte expressão

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle \}$$

**Teorema 1.1. (Levi-Civita).** *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:*

- a)  $\nabla$  é simétrica,
- b)  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo II. □

A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita ou Riemanniana de  $M$ .

**Definição 1.8.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  com conexão Riemanniana  $\nabla$ . Existe única correspondência que associa a um campo de vetores  $V$  ao longo de uma curva diferenciável correspondência que  $c : I \rightarrow M$  outro campo de vetores  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que:*

$$i \quad \frac{DV}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt}(V) + \frac{DV}{dt}(W)$$

$$ii \quad \frac{D}{dt}(fV) = f \frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt}(V)$$

iii *Se  $V$  é uma restrição de um campo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  a uma curva  $c : I \rightarrow M$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$ .*

## 1.3 Geodésicas

---

Apresentaremos nesta seção o transporte paralelo, uma técnica muito utilizada. Introduziremos um dos conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana, a saber, geodésicas. As geodésicas podem ser vistas como curvas com aceleração nula ou ainda aquelas que minimizam distâncias.

**Definição 1.9.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim. Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  é chamado paralelo quando  $\frac{DV}{dt} = 0$  em  $I$ .*

**Proposição 1.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim. Seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $V_0$  um vetor tangente a  $M$  em  $c(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  (isto é  $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ ). Então existe um único campo de vetores paralelo  $V$  ao longo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ , ( $V(t)$  é chamado o transporte paralelo de  $V(t_0)$  ao longo de  $c$ ).*

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo II. □

Agora, afim de generalizar o conceito de retas do  $\mathbb{R}^n$  introduziremos o conceito de geodésicas e daremos uma idéia de que, ao menos localmente, elas minimizam a distância entre dois pontos

No que se segue,  $M$  será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana

**Definição 1.10.** Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica em  $t_0 \in I$  se

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

no ponto  $t_0$ . Como o campo  $\left( \frac{d\gamma}{dt} \right)$  é tangente a curva  $\gamma$ , podemos pensar também que  $\gamma$  será uma geodésica se

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

Se  $\gamma$  é uma geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$  dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica. Se  $[a, b] \subset I$  e  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica, a restrição de  $\gamma$  a  $[a, b]$  é chamada (segmento de) geodésica ligando  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ .

Apresentaremos dois lemas. O primeiro lema segue para a existência e unicidade de geodésicas e o segundo lema mostra que é possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição ou vice-versa.

**Lema 1.1.** Dado  $p \in M$ , existem um aberto  $V \subset M, p \in V$ , números  $\delta > 0$  e  $\varepsilon > 0$  e uma aplicação  $C^\infty$

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \quad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon\},$$

tais que a curva  $t \rightarrow \gamma$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$ , é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $v$ , para cada  $q \in V$  e cada  $v \in T_q M$  com  $|v| < \varepsilon$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo III. □

O lema acima afirma que se  $|v| < \varepsilon$ , a geodésica  $\gamma(t, q, v)$  existe em um intervalo  $(-\delta, \delta)$  e é única.

**Lema 1.2. (Homogeneidade de uma geodésica)** Se a geodésica  $\gamma(t, q, v)$  está definida no intervalo  $(-\delta, \delta)$ , então a geodésica  $\gamma(t, q, av)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , está definida no intervalo  $\left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$  e

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

*Demonstração.* Seja  $h : \left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right) \rightarrow M$  uma curva dada por  $h(t) = \gamma(at, q, v)$ . Então

$$h(0) = q \quad \text{e} \quad \frac{dh}{dt}(0) = av.$$

Ademais como  $h'(t) = \alpha\gamma(\alpha t, q, v)$ ,

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{dh}{dt} \right) = \nabla_{h'(t)} h'(t) = \alpha^2 \nabla_{\gamma'(\alpha t, q, v)} \gamma'(\alpha t, q, v) = 0$$

onde, na primeira igualdade, estendemos  $h'(t)$  a uma vizinhança de  $h(t)$  em  $M$ . Portanto,  $h$  é uma geodésica que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $\alpha v$ . Por unicidade,

$$h(t) = \gamma(\alpha t, q, v) = \gamma(t, q, \alpha v).$$

□

Devido ao lemas anteriores podemos definir uma importante aplicação.

**Definição 1.11.** *Seja  $p \in M$  e  $\mathcal{U} \subset TM$ , onde  $\mathcal{U}$  é um aberto como o do **Lema 1**. Então a aplicação  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  dada por*

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a aplicação exponencial em  $\mathcal{U}$

**Observação 1.2.** *Salve o contrário, utilizaremos a restrição de  $\exp$  a um aberto do espaço tangente  $T_q M$ , isto é, definiremos*

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

por

$$\exp_q(v) = \exp(q, v),$$

onde  $B_\varepsilon(0)$  é uma bola aberta de centro na origem  $0$  de  $T_q M$  e de raio  $\varepsilon$ . Além disso  $\exp_q$  é diferenciável e  $\exp_q(0) = q$ .

Geometricamente,  $\exp_q(0)$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo um comprimento igual a  $|v|$ , a partir de  $q$ , sobre a geodésica que passa por  $q$  com velocidade igual a  $\frac{v}{|v|}$ .

**Proposição 1.3.** *Dado  $q \in M$  existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de  $B_\varepsilon(0)$  sobre um aberto de  $M$ .*

*Demonstração.* De fato, temos que:

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \left. \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \right|_{t=0} \\ &= v. \end{aligned}$$

Assim,  $d(\exp_q)_0$  é a identidade de  $T_qM$ , donde pelo teorema da função inversa,  $\exp_q$  é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0.

□

**Definição 1.12.** Um segmento de geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é chamado minimizante se  $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ , onde  $\ell(\cdot)$  indica o comprimento de uma curva e  $c$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(a)\gamma(b)$

**Lema 1.3. (Gauss)** Seja  $p \in M$  e seja  $v \in T_pM$  tal que  $\exp_p v$  esteja definida. Seja  $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$ . Então

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo III.

□

Usaremos a seguinte terminologia:

Se  $\exp_p$  é um difeomorfismo em uma vizinhança  $V$  da origem em  $T_pM$ ,  $\exp_p V = U$  é chamada uma *vizinhança normal* de  $p$ . Se  $B_\varepsilon(0)$  é tal que  $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$  chamamos  $B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$  a *bola normal* (ou *geodésica*) de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ . Pelo Lema de Gauss, a fronteira de uma bola normal é uma hipersuperfície (subvariedade de codimensão 1) em  $M$  ortogonal às geodésicas que partem de  $p$ , ela é denotada por  $S_\varepsilon(p)$  e denominada por *esfera normal* ou (ou *geodésica*). As geodésicas em  $B_\varepsilon(p)$  que partem de  $p$  são chamadas *geodésicas radiais*.

Agora, para propriedades minimizantes das geodésicas temos o importante teorema a seguir, que nos diz que as geodésicas minimizam localmente o comprimento de arco em uma variedade  $M$ .

**Teorema 1.2.** Sejam  $p \in M$ ,  $U$  uma vizinhança normal de  $p$  e  $B \subset U$  uma bola normal de centro  $p$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  um segmento de geodésica com  $\gamma(0) = p$ . Se  $c : [0, 1] \rightarrow M$  é

qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(0)$  a  $\gamma(1)$ , então  $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$  e se a igualdade vale então  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo III. □

**Observação 1.3.** O teorema acima não é global. se consideramos um arco suficientemente grande de geodésica ele pode deixar de ser minimizante. Por exemplo as geodésicas de uma esfera partem de um ponto  $p$  não são minimizantes depois que passam pelo antípoda de  $p$ . Refinaremos a proposição 1.3.

**Proposição 1.4.** Para cada  $p \in M$  existem uma vizinhança  $W$  de  $p$  e um número  $\delta > 0$ , tais que, para cada  $q \in W$ ,  $\exp_q$  é um difeomorfismo em  $B_\delta(0) \subset T_q M$  e  $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$ , isto é,  $W$  é vizinhança normal de cada um de seus pontos.

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo III. □

Apresentaremos agora as variedades completas. A utilidade das variedades completas é o fato que dado dois pontos quaisquer de uma tal variedade existe uma geodésica minimizante ligando esses dois pontos, isso se deve ao *Teorema-Hopf e Rinow*.

**Definição 1.13.** Uma variedade Riemanniana  $M$  é (geodesicamente) completa se para todo  $p \in M$ , a aplicação exponencial,  $\exp_p$ , está definida para todo  $v \in T_p M$ , isto é, se as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.3. (Hopf e Rinow)** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e seja  $p \in M$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- a)  $\exp_p$  está definida em todo o  $T_p M$ .
- b) Os limitados e fechados de  $M$  são compactos.
- c)  $M$  é completa no espaço métrico.
- d)  $M$  é geodesicamente completa.
- e) Existe uma sucessão de compactos  $K_n \subset M$ ,  $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$  e  $\bigcup K_n = M$ , tais que se  $q_n \in K_n$  então  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ .

Ademais, cada uma dessas afirmações acima implica que:

- f) Para todo  $q \in M$  existe uma geodésica  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  com  $\ell(\gamma) = d(p, q)$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo VII. □

Precisamos do conceito de referencial geodésico. Com isto podemos introduzir os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano e demonstrarmos relações entre eles.

**Proposição 1.5.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ . Então, dado  $p \in M$ , existe  $U \subset M$  aberto com  $p \in U$  e uma família  $E_i \in X(U)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de campos de vetores tais que*

*i.*  $\{E_1(u), \dots, E_n(u)\}$  é uma base ortonormal para cada  $u \in U$  ;

*ii.*  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$

**Definição 1.14.** *Tal família é chamada de referencial geodésico em  $p$ .*

*Demonstração.* Com efeito, seja  $p \in M$ . Considere  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal para  $T_p M$ . Seja  $U$  uma vizinhança normal de  $p$ . Dado um ponto  $q \in U$  existe uma única geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  unindo  $p$  a  $q$ . Considere  $E_i(q)$  como o transporte paralelo de  $e_i$  ao longo de  $\nabla$  em  $q$ .

Como  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  e os vetores  $e_i$  são transportados paralelamente, temos que em todo ponto  $q \in M$  os vetores  $E_i(q)$  formam uma base ortonormal para  $T_q M$ .

Agora seja  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , então para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  podemos escolher uma geodésica  $\gamma(t)$  com  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = E_j(p)$ . Como o campo  $E_i$  é paralelo cumpre que  $0 = \nabla_{\gamma'} E_i = \nabla_{E_j} E_i$ . O que conclui a demonstração. □

## 1.4 Operadores Diferenciais - Gradiente, Divergência, Laplaciano e Hessiano

---

Nesta seção apresentaremos os operadores diferenciáveis: gradiente, divergente, Laplaciano e Hessiano. Além disso, algumas de suas principais propriedades.

**Definição 1.15. (Gradiente)** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Definimos o gradiente de  $f$  como o campo de vetores  $\text{grad } f$  em  $M$  satisfazendo, para  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ ,*

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v).$$

*Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  temos*

$$\langle \text{grad } f(p), X \rangle = X(f).$$



**Proposição 1.6.** Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial ortonormal local em  $M$  então,

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i. \quad (1.1)$$

*Demonstração.* Sendo  $\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , temos que

$$e_j = \langle \text{grad } f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \right\rangle = \alpha_j.$$

Assim,

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i.$$

□

Decorre da definição que se  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis valem as seguintes propriedades:

- i.  $\text{grad } (f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$ ;
- ii.  $\text{grad } (fg) = g(\text{grad } f) + f(\text{grad } g)$ .

**Proposição 1.7.** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Dados  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ , seja  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  uma curva diferenciável tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ . Então

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Em particular, se  $p$  é o ponto de máximo ou mínimo local para  $f$ , então  $\text{grad } f(p) = 0$ .

*Demonstração.* Note que, sendo  $X$  uma extensão local  $\gamma'$ , temos

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = (X(f))(p) = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Considere que  $p$  é o ponto de máximo para  $f$  (o outro caso é análogo). Então existe  $U \subset M$  uma vizinhança aberta de  $p$  tal que  $f(p) \geq f(q)$  para todo  $q \in U$ . Se  $v \in T_p M$  e  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  é como no enunciado, então  $(f \circ \gamma) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tem um máximo local em 0, donde

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

□

**Proposição 1.8.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis, então*

$$\text{grad}(\varphi \circ f) = \varphi'(f) \text{grad} f$$

*Demonstração.* Se  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  e  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é uma curva diferenciável tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ , então pela proposição anterior temos que

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(\varphi \circ f), v \rangle &= \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \\ &= \varphi'(f(p)) \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \\ &= \langle \varphi'(f) \text{grad} f, v \rangle. \end{aligned}$$

□

**Definição 1.16. (Divergência)** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Definimos a divergência de  $X$  como uma função  $\text{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\text{div} X(p) = \text{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)), \quad p \in M.$$

**Proposição 1.9.** *Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial ortonormal local em  $M$  então,*

$$\text{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle.$$

*Demonstração.* Temos que,

$$\nabla_{e_j} X = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,$$

onde

$$\langle \nabla_{e_j} X, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_k \right\rangle = \lambda_k.$$

Assim,

$$\nabla_{e_j} X = \langle \nabla_{e_j} X, e_i \rangle e_i.$$

Daí, a matriz da aplicação  $(Y \rightarrow \nabla_Y X)$  nesta base é dada por

$$(\nabla X) = \begin{pmatrix} \langle \nabla_{e_1} X, e_1 \rangle & \cdots & \langle \nabla_{e_n} X, e_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \nabla_{e_1} X, e_n \rangle & \cdots & \langle \nabla_{e_n} X, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(\nabla X) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle.$$

□

Decorre da definição que se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável valem as seguintes propriedades:

- i.  $\operatorname{div}(f + g) = \operatorname{div} f + \operatorname{grad} g$ ;
- ii.  $\operatorname{div}(fX) = f(\operatorname{div} X) + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle$ .

**Proposição 1.10.** *Seja  $X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$ , onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial ortonormal local em  $M$  então,*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (e_i(X_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle). \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Temos,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \left( \sum_{j=1}^n X_j e_j \right), e_i \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^n (e_i(X_j) e_j), e_i \right\rangle + \sum_{i,j=1}^n X_j \langle \nabla_{e_i} e_j, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , tem-se que

$$0 = e_i \langle e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle \implies \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n e_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^n X_j \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i(X_i) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} e_i, \sum_{i=1}^n X_j e_j \rangle). \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (e_i(X_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle).$$

□

**Definição 1.17. (Laplaciano).** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Definimos o Laplaciano como o operador  $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  tal que*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Decorre das propriedades do *gradiente* e de *divergência* que para quaisquer  $f, g \in \mathcal{D}(M)$  o laplaciano satisfaz as seguintes propriedades:

- i.  $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$ ;
- ii.  $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$ .

**Proposição 1.11.** *Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial ortonormal local em  $M$  então,*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)).$$

*Demonstração.* De fato, pela equação (1.1)

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n e_i(f)e_i\right),$$

e por (1.2)

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f))$$

e finalmente pela propriedade que o *gradiente* satisfaz, temos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)).$$

□

Se  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis, então

$$\Delta(\phi \circ f) = (\phi'' \circ f) \|\operatorname{grad} f\|^2 + (\phi' \circ f) \Delta f.$$

*Demonstração.* Segue da definição, das propriedades do laplaciano e da **proposição 1.8** que

$$\begin{aligned}
 \Delta(\phi \circ f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi \circ f)) \\
 &= \operatorname{div}((\phi' \circ f)\operatorname{grad} f) \\
 &= \langle \operatorname{grad}(\phi' \circ f), \operatorname{grad} f \rangle + (\phi' \circ f)\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
 &= \langle (\phi'' \circ f)\operatorname{grad} f + (\phi' \circ f)\Delta f \\
 &= \Delta(\phi \circ f) = (\phi'' \circ f)\|\operatorname{grad} f\|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f.
 \end{aligned}$$

□

Agora daremos duas definições para o hessiano

**Definição 1.18. (Hessiano)** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Definimos o Hessiano de  $f$  em  $p \in M$  como o operador linear  $\operatorname{Hess} f_p : T_p M \rightarrow T_p M$  dado por

$$\operatorname{Hess} f_p(v) = \nabla_v \operatorname{grad} f, \quad v \in T_p M.$$

Ademais, se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  for uma extensão de  $v$  numa vizinhança de  $p$ , então temos

$$(\operatorname{Hess} f)_p(X) = \nabla_X \operatorname{grad} f(p), \quad X \in \mathfrak{X}.$$

Além disso o  $(\operatorname{Hess} f)_p$  é um operador linear auto adjunto.

**Proposição 1.12.** Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f).$$

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  e considere  $U \subset M$  uma vizinhança de  $p$  onde esteja definido um referencial móvel  $\{E_1, \dots, E_n\}$ . Então

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)_p &= \sum_{i=1}^n \langle (\operatorname{Hess} f)_p(E_i), E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \rangle_p \\
 &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(p) \\
 &= \Delta f(p).
 \end{aligned}$$

□

Uma outra maneira de definir o hessiano seria utilizando a linguagem de tensores em uma variedade.

**Definição 1.19.** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $f \in \mathcal{D}(M)$  Definimos a hessiana de  $f$  em  $p \in M$  como  $\text{Hess } f(p) : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\text{Hess } f(p)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f(p), Y \rangle.$$

É fácil ver que tal forma bilinear é simétrica e que

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(X, Y) &= \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle \\ &= X \langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f. \end{aligned}$$

Agora abordaremos algumas consequência no caso em que o referencial é geodésico.

Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $\{E_i \in \mathfrak{X}(U); i = 1, \dots, n = \dim M\}$  um referencial geodésico em  $p \in M$ . Se  $f \in \mathcal{D}(M)$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  então o *gradiente* de  $f$  e a *divergência* de  $X$  podem ser escritos, respectivamente, como

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i(p). \quad (1.3)$$

e

$$\text{div } X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p), \quad \text{onde } X = \sum_i f_i X_i \quad (1.4)$$

como  $\text{grad } f$  é um campo de vetores na vizinhança coordenada  $U \subset M$  de  $p$ , podemos escrevê-lo como combinação linear dos campos do referencial geodésico. Sendo este, em cada ponto, uma base ortonormal do espaço tangente, podemos escrever

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } f(p), E_i(p) \rangle E_i(p)$$

por outro temos que

$$\langle \text{grad } f(p), E_i(p) \rangle = df_p(E_i(p)) = E_i f,$$

e assim obtemos a equação (1.3). Agora verifiquemos que (1.4) acontece. Temos,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} (\sum_{j=1}^n f_j E_j), E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{E_i} (f_j E_j), E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_j \nabla_{E_i} (E_j) + E_i(f_j) E_j, E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i(f_j) \langle E_j, E_i \rangle
 \end{aligned}$$

donde segue-se o resultado, pois  $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Além disso, obtemos uma nova equação para o *Laplaciano*:

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f))(p) \quad (1.5)$$

## 1.5 Curvaturas

Nesta seção nós introduziremos outro conceito fundamental na teoria de Geometria Riemanniana, a saber, a *curvatura*. Apresentaremos a *curvatura seccional*, *curvatura de Ricci* e *curvatura escalar*. Além disso, definiremos a segunda forma fundamental.

**Definição 1.20.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Definimos a curvatura de  $M$  como sendo uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  a aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

onde  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

Temos consequência direta das propriedades de conexões e da operação  $[ , ]$ , os colchetes, que  $R$  é bilinear e, para cada par  $X, Y$ , o *operador curvatura*  $R(X, Y)$  é linear.

**Proposição 1.13.** *i.  $R$  é bilinear em  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ , isto é*

$$\begin{aligned}
 R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\
 R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),
 \end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{D}(M)$ ,  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ .

ii. Para todo par,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M)$ ,  $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo IV. □

Outro resultado interessante que segue diretamente da definição e das propriedades básicas da curvatura é :

**Proposição 1.14. (Primeira Identidade de Bianchi).**

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo IV. □

**Observação 1.4.** Se tomarmos  $M = \mathbb{R}^n$ , então para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ , teremos que  $R(X, Y)Z = 0$ . De fato, seja  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  as componentes naturais do campo  $Z$  nas coordenadas naturais do  $\mathbb{R}^n$ , teremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0$$

Portanto, podemos pensar na curvatura de uma variedade Riemanniana como uma maneira de medir o quanto  $M$  deixa de ser euclidiana.

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana), que iremos definir.



**Definição 1.21.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  e  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional de  $T_p M$ , o número real*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2},$$

*é denominado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ , onde  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ .*

*A expressão acima independe da escolha da base tomada para  $\sigma$*

**Observação 1.5.** *A importância da curvatura seccional provém do fato de que o conhecimento de  $K(\sigma)$ , para todo  $\sigma$ , determina completamente a curvatura  $R$  de  $M$*

A seguir apresentaremos a curvatura de Ricci e a curvatura escalar, que nada mais é do que médias de curvaturas seccionais.

**Definição 1.22.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  e  $\mathbf{x} = z_n$  um vetor unitário em  $T_p M$ , tomemos uma base ortonormal  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$  ao hiperplano de  $T_p M$  ortogonal a  $\mathbf{x}$ . Definimos a curvatura de Ricci na direção de  $\mathbf{x}$  como sendo*

$$\text{Ric}_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(\mathbf{x}, z_i)\mathbf{x}, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

*Definimos a curvatura escalar(ou média) em  $p$  como*

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

*As expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais.*

Recordemos as definições de *imersões*, *mergulhos* e *isometria* estamos interessados nas *imersões isométricas*. Por fim abordaremos o conceito da *segunda forma fundamental*.

**Definição 1.23.** *Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma imersão se  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disso,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , onde  $\varphi(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , diz-se que  $\varphi$  é um mergulho. Se para todo compacto  $K \subset N$  tem-se que  $\varphi^{-1}(K) \subset M$  é compacto, diz-se que  $\varphi$  é própria. Caso  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \hookrightarrow N$  seja um mergulho, diz-se que  $M$  é uma subvariedade de  $N$*

**Definição 1.24.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  (isto é,  $f$  é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_p = \langle df_p(\mathbf{u}), df_p(\mathbf{v}) \rangle_{f(p)},$$

*para todo  $p \in M$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p M$ .*

Se  $f : M^m \longrightarrow \bar{N}^{n+m=k}$  é uma imersão de uma variedade diferenciável  $M$  em uma variedade Riemanniana  $\bar{M}$  então a métrica Riemanniana de  $\bar{M}$  induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em  $M$  : se  $v_1, v_2 \in T_p M$ , define-se

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle.$$

Desta maneira,  $f$  passa a ser uma *imersão isométrica* de  $M$  em  $\bar{M}$ . Como, pela forma local das imersões, dado  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f(U) \subset \bar{M}$  é uma subvariedade de  $\bar{M}$ , é comum identificarmos  $U \approx f(U)$ .

Para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p \bar{M}$ , decompõe  $T_p \bar{M}$ , na soma direta

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \bar{M}$ . Assim dado  $v \in T_p \bar{M}$ ,  $p \in M$  podemos escrever

$$v = v^T + v^N,$$

onde  $v^T$  (componente tangencial de  $v$ )  $\in T_p M$  e  $v^N$  (componente normal de  $v$ )  $\in (T_p M)^\perp$ . A conexão Riemanniana de  $\bar{M}$  será indicada por  $\bar{\nabla}$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $M$ , e  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões locais a  $\bar{M}$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

**Definição 1.25. (Segunda Forma Fundamental).** A segunda forma fundamental é a aplicação  $\alpha(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  dada por

$$\alpha(X, Y) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)^\perp. \quad (1.6)$$

**Observação 1.6.** Se  $\bar{X}_1$  é uma outra extensão de  $X$ , teremos

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}_1} \bar{Y} - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X} - \bar{X}_1} \bar{Y},$$

que se anula em  $M$ , pois  $\bar{X} - \bar{X}_1 = 0$  em  $M$ . Além disto, se  $\bar{Y}_1$  é uma outra extensão de  $Y$ ,

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}_1 - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} (\bar{Y} - \bar{Y}_1) = 0,$$

pois  $\bar{Y} - \bar{Y}_1 = 0$  ao longo de uma trajetória de  $X$ . Isto mostra que  $\alpha(X, Y)$  não depende das extensões  $\bar{X}, \bar{Y}$ . Portanto  $\alpha(X, Y)$  está bem definida. Indicaremos por  $\mathfrak{X}(U)^\perp$  os campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $f(U) \approx U$ .

**Proposição 1.15.** Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , a aplicação  $\alpha(X, Y) : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo VI. □

## 1.6 Campos de Jacobi e o Cut Locus

Nesta seção introduziremos os Campos de Jacobi. Os Campos de Jacobi são campos de vetores ao longo de geodésicas, definidos por meio de uma equação diferencial que aparece naturalmente no estudo de aplicação exponencial. Ademais apresentaremos o cut locus (lugar dos pontos mínimos).

**Definição 1.26.** Seja  $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . Um campo diferenciável de vetores  $J$  ao longo de  $\gamma$  é um campo de Jacobi se  $J$  satisfaz a equação

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0 \quad (\text{equação de Jacobi})$$

para  $t \in [0, a]$ .

**Observação 1.7.** Um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais  $J(0)$  e  $\frac{DJ}{dt}(0)$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo V. □

**Definição 1.27.** Considere  $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$  uma geodésica. O ponto  $(t_0)$  é conjugado de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ ,  $t_0 \in (0, a]$ , se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , não identicamente nulo, com  $J(0) = 0 = J(t_0)$ . O número máximo de tais campos linearmente independentes é a multiplicidade do ponto conjugado  $\gamma(t_0)$

**Observação 1.8.** Se  $\gamma(t_0)$  é conjugado de  $\gamma(0)$ , então  $\gamma(0)$  é conjugado de  $\gamma(t_0)$ .

**Definição 1.28.** O conjunto dos (primeiros) pontos conjugados a um ponto  $p \in M$ , para todas as geodésicas que saem de  $p$ , é denominado o lugar dos pontos conjugados de  $p$  e indicado por  $C(p)$

De agora, por diante, por simplicidade de notação, indicaremos  $\frac{DJ}{dt} = J'$ ,  $\frac{D^2 J}{dt^2} = J''$  e assim sucessivamente.

**Proposição 1.16.** *Seja  $J$  um campo de Jacobi ao longo a geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ . Então*

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0), \gamma'(0) \rangle, \quad t \in [0, a].$$

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo V. □

**Proposição 1.17.** *Considere  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica,  $V_1 \in T_{\gamma(0)}M$  e  $V_2 \in T_{\gamma(a)}M$ . Se  $\gamma(a)$  não é conjugado a  $\gamma(0)$  existe um único campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , com  $J(0) = V_1$  e  $J(a) = V_2$ .*

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo V. □

Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana completa,  $p \in M$  um ponto de  $M$ , e seja  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  uma geodésica normalizada com  $\gamma(0) = p$ . Vimos anteriormente que se  $t > 0$  é suficientemente pequeno,  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ , isto é,  $\gamma([0, t])$  é uma geodésica minimizante. Além disto, se  $\gamma([0, t_1])$  não é minimizante, o mesmo se passa para todo  $t > t_1$ . Por continuidade, o conjunto dos números  $t > 0$  para os quais  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$  é da forma  $[0, t_0]$  ou  $[0, \infty)$ . No primeiro caso,  $\gamma(t_0)$  é chamado o *ponto mínimo* de  $p$  ao longo de  $\gamma$ , no segundo caso, diz que tal ponto mínimo não existe.

**Definição 1.29.** *Definimos o lugar dos pontos mínimos de  $p$  ("cut locus" de  $p$ ), indicado por  $\text{Cut}(p)$ , como a união dos pontos mínimos de  $p$  ao longo de todas as geodésicas que partem de  $p$ .*

**Proposição 1.18.** *Suponha  $\gamma(t_0)$  é o um ponto mínimo de  $p = \gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ . Então:*

(a) *ou  $\gamma(t_0)$  é o primeiro ponto conjugado de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ ,*

(b) *ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$  de  $p$  a  $\gamma(t_0)$  tal que  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$ .*

*Reciprocamente, se (a) ou (b) se verifica, então existe  $\bar{t}$  em  $(0, t_0]$  tal que  $\gamma(\bar{t})$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ .*

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo XIII. □

**Corolário 1.1.** *Se  $q$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ , então  $p$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $-\gamma$ . Em particular,  $q \in \text{Cut}(p)$  se e só se  $p \in \text{Cut}(q)$ .*

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo XIII. □

## 1.7 A Expressão do Laplaciano e o Hessiano da Função Distância

Nesta seção obteremos uma importante fórmula para o Hessiano e o cálculo do Laplaciano de uma função. Tal fórmula foi obtida por Jorge-Koutrofotis [16]. Além disso abordaremos o hessiano da função distância.

Seja  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana  $M$  em uma variedade Riemanniana completa  $N$ . Considere uma função suave  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f = g \circ \varphi$ . Sejam  $q \in M$  e  $X \in T_q M$ . Identificando  $X$  com  $d\varphi(X)$ . Então temos

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = X(f) = df(X) = dg(X) = X(g) = \langle \text{grad } g, X \rangle. \quad (1.7)$$

Portanto, a projeção do vetor  $\text{grad } g$  no espaço tangente a  $M$  em  $q$ ,  $T_q M$ , deve ser o vetor  $\text{grad } f$ , isto é,

$$\text{grad } g = \text{grad } f + (\text{grad } g)^\perp \quad (1.8)$$

onde  $(\text{grad } g)^\perp$  é perpendicular a  $T_q M$ .

Sejam  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  as conexões Riemannianas em  $M$  e  $N$ , respectivamente. Utilizando as equações (1.7) e (1.8), juntamente com as propriedades da conexão Riemanniana, dados  $X, Y \in T_q M$  podemos obter o seguinte resultado.

**Proposição 1.19. (Expressão do Hessiano)** Nas condições acima e para todo  $X, Y \in T_p M$ , temos

$$\text{Hess } (f)(X, Y) = \text{Hess } (g(\varphi))(X, Y) + \langle \text{grad } g, \alpha(X, Y) \rangle. \quad (1.9)$$

*Demonstração.* Como

$$\alpha(X, \text{grad } f) = \bar{\nabla}_X \text{grad } f - \nabla_X \text{grad } f,$$

temos

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(q)(X, Y) &= \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } f - \alpha(X, \text{grad } f), Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } f, Y \rangle - \langle \alpha(X, \text{grad } f), Y \rangle \end{aligned}$$

Lembrando que  $\alpha(X, Y) \in (T_p M)^\perp$  para todo  $X, Y \in T_p M$ , teremos

$$\langle \alpha(X, \text{grad } f), Y \rangle = 0.$$

Usando

$$\langle X(Y, \text{grad } f) = \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } f, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad } f \rangle,$$

a equação (1.7) e (1.8), obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(X, Y) &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } f, Y \rangle \\ &= \langle X(Y, \text{grad } f) - \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad } f \rangle \\ &= \langle X(Y, \text{grad } g) - \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad } f \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } g, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad } g \rangle - \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad } f \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } g, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad } g - \text{grad } f \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } g, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_X Y, (\text{grad } g)^\perp \rangle \\ &= \text{Hess } g(X, Y) + \langle (\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \text{grad } g \rangle \\ &= \text{Hess } g(X, Y) + \langle \text{grad } g, \alpha(X, Y) \rangle \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Pela equação que já deduzimos para o cálculo do Laplaciano, na (*proposição 1.12*), tomando o traço em (1.9) com respeito a uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_m\}$  do  $T_q M$ , temos para o Laplaciano de  $f$ ,

$$\begin{aligned} \Delta f(q) &= \text{tr}(\text{Hess } f(q))(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Hess } f(q)(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Hess } (g(\varphi(q)))(e_i, e_i) + \langle \text{grad } g, \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_j) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta f(q) = \sum_{i=1}^n \text{Hess } (g(\varphi(q)))(e_i, e_i) + \langle \text{grad } g, \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_j) \rangle. \quad (1.10)$$

Chamamos ao traço em  $\alpha$  de vetor curvatura média, denotado por  $\vec{H}$ . Assim obtemos a

expressão do Laplaciano citada no início da seção:

$$\Delta f(q) = \sum_{i=1}^n \text{Hess}(g(\varphi(q)))(e_i, e_i) + \langle \text{grad } g, \vec{H} \rangle. \quad (1.11)$$

O valor  $\frac{1}{m} \|\vec{H}\|$ , que denotaremos por  $|H|$ , é denominado curvatura média de  $M$ .

**Lema 1.4.** *Seja  $N$  uma variedade Riemanniana  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Então*

$$\text{Hess}^N(\phi \circ f)(X, X) = \phi''(f) \langle \text{grad}^N(f), X \rangle^2 + \phi'(f) \text{Hess}^N(f)(X, X).$$

*Demonstração.* Usando a definição de Hessiano e a (Proposição 1.8) temos

$$\begin{aligned} \text{Hess}^N(\phi \circ f)(X, X) &= (\phi \circ f)(X, X) \langle \nabla_X \text{grad}(\phi \circ f), X \rangle \\ &= \langle \nabla_X(\phi'(f) \text{grad}(f)), X \rangle \\ &= \langle \phi'(f) \nabla_X \text{grad}(f) + X(\phi'(f)) \text{grad}(f), X \rangle \\ &= \phi'(f) \langle \nabla_X \text{grad}(f), X \rangle + X(\phi'(f)) \langle \text{grad}(f), X \rangle \\ &= \phi'(f) \langle \nabla_X \text{grad}(f), X \rangle + \phi''(f) X(f) \langle \text{grad}(f), X \rangle \\ &= \phi'(f) \langle \nabla_X \text{grad}(f), X \rangle + \phi''(f) \langle \text{grad}(f), X \rangle^2 \\ &= \phi''(f) \langle \text{grad}^N(f), X \rangle^2 + \phi'(f) \text{Hess}^N(f)(X, X) \end{aligned}$$

□

Agora estudemos o Hessiano da função distância. Recordemos que o lugar dos pontos mínimos de  $p$  (ou "cut locus" de  $p$ ), indicado por  $\text{Cut}(p)$ , é a união dos pontos mínimos de  $p$  ao longo de todas as geodésicas que partem de  $p$ .

Considere  $M$  uma variedade Riemanniana. Defina o conjunto  $E_p$

$$E_p = \{v \in T_p M; \exp_p(tv) \in M \setminus \text{Cut}(p), \forall 0 \leq t \leq 1\}. \quad (1.12)$$

**Proposição 1.20.**  $\exp_p : E_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$  é um difeomorfismo.

*Demonstração.* É claro que  $\exp_p(E_p) = M \setminus \text{Cut}(p)$ . Seja agora  $q \in M \setminus \text{Cut}(p)$  e  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$  a única geodésica normalizada e minimizante ligando  $p = \gamma(0)$  a  $q = \gamma(1)$ . Então  $q$  não é conjugado a  $p$  ao longo de  $\gamma$ . Portanto,  $v \in T_p M$  não é ponto crítico de  $\exp_p$ , que é assim um difeomorfismo local  $M \setminus \text{Cut}(p)$ . Basta, pois, mostrarmos que  $\exp_p$  é injetiva em  $E_p$ . Suponha que existam  $v, w \in E_p$  distintos, tais que

$$\gamma(t) = \exp_p(tv) \quad \text{e} \quad \alpha(t) = \exp_p(tw)$$

ligam  $p$  a  $q = \gamma(1) = \gamma(1)$ . Segue de  $q \neq \text{Cut}(p)$  que ao menos uma dentre  $\alpha$  e  $\gamma$ , digamos  $\gamma$ , não é minimizante até  $q$ . Logo, existe  $0 < t_0 < 1$  tal que

$$\exp_p(t_0 v) = \gamma(t_0) \in \text{Cut}(p),$$

contradizendo o fato de que  $v$  (e portanto  $t_0 v$ ) pertence a  $E_p$ .  $\square$

**Observação 1.9.** Fixando  $p \in M$  denotaremos por  $\rho : M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\}) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  a função distância a partir de  $p$ , isto é,  $\rho(q) = d(p, q)$  onde  $q \in M \setminus (\text{Cut}(p))$ .

**Proposição 1.21.** Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$  uma geodésica normalizada partindo de  $p$ . Então

$$\text{grad } \rho(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad \forall \quad 0 < t < a. \quad (1.13)$$

Em particular,  $|\text{grad } \rho| = 1$ .

*Demonstração.* Seja

$$\gamma(t) = \exp_p(tv), \quad 0 \leq t \leq a \quad \text{e} \quad q = \gamma(t_0).$$

Se  $w \in T_q M$ ,  $w$  perpendicular  $\gamma'(t_0)$ . Então da proposição anterior e do lema **de Gauss**(proposição) a existência de  $W \in T_v(T_p M)$  tal que

$$\langle W, v \rangle = 0 \quad \text{e} \quad (d \exp_p)_{t_0 v} W = w.$$

Consideremos então  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E_p$  tal que

$$|\alpha(s)| = t_0, \quad \alpha(0) = t_0 v \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = W.$$

Segue da unicidade de geodésica minimizante que liga  $\exp_p(\alpha(s))$  a  $p$  que

$$\rho(\exp_p(\alpha(s))) = t_0.$$

Logo,

$$0 = \langle \text{grad } \rho(q), (d \exp_p)_{t_0 v} W \rangle = \langle \text{grad } \rho(q), w \rangle.$$

Como a igualdade acima é válida para todo  $w$  ortogonal  $\gamma'(t_0)$ , então  $\text{grad } \rho(q)$  é múltiplo de  $\gamma'(t_0)$ . Mas desde que  $\rho(\gamma(t)) = t$  para  $0 < t < a$ , temos

$$\langle \text{grad } \rho(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 1 \quad \forall \quad 0 < t < a,$$



e daí consideremos

$$\text{grad } \rho(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad \forall 0 < t < a.$$

□

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . Considere  $V$  um campo de vetores diferenciáveis por partes ao longo de  $\gamma$ . Para todo  $t_0 \in [0, a]$ , escreveremos

$$\int_0^{t_0} \{\langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle\} dt = I_{t_0}(V, V).$$

**Lema 1.5.** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica sem pontos conjugados a  $\gamma(0)$  no intervalo  $[0, a]$ . Considere  $J$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , com  $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ , e seja  $V$  um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de  $\gamma$ , com  $\langle V, \gamma' \rangle = 0$ . Suponhamos que  $J(0) = V(0) = 0$  e que  $J_{t_0} = V_{t_0}$ ,  $t_0 \in (0, a]$ . Então*

$$I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V) \tag{1.14}$$

e a igualdade ocorre se e só se  $V = J$  em  $[0, t_0]$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo X. □

Agora fixe um ponto  $p \in M$ . Para  $x \in M \setminus \text{Cut}(p)$ , seja  $\gamma$  uma geodésica minimizante ligando  $p$  a  $x$ , parametrizada pela distância, tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(a) = x$ . Seja  $X \in T_p M$  tal que  $\langle X, \frac{\partial}{\partial \gamma} \rangle = 0$ . Já que  $x$  não é ponto conjugado de  $p$ , podemos estender  $X$  a um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  satisfazendo

$$J(\gamma(0)) = 0, \quad J(\gamma(a)) = X \quad \text{e} \quad [J, \frac{\partial}{\partial \gamma}] = 0.$$

Pela (proposição 1.21) temos,  $\frac{\partial}{\partial \gamma} = \text{grad } \rho$  e  $[J, \text{grad } \rho] = 0$ , então

$$\nabla_J \text{grad } \rho = \nabla_{\text{grad } \rho} J.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Hess } \rho(X, Y) &= \langle \nabla_J \text{grad } \rho, J \rangle \\
&= \langle \nabla_{\text{grad } \rho} J, J \rangle \\
&= \int_0^a \frac{d}{dt} \langle J, \nabla_{\text{grad } \rho} J \rangle dt \\
&= \int_0^a \langle \nabla_{\text{grad } \rho} J, \nabla_{\text{grad } \rho} J \rangle + \langle J, \nabla_{\text{grad } \rho} \nabla_{\text{grad } \rho} J \rangle \\
&= \int_0^a \{ |\nabla_{\text{grad } \rho} J|^2 + \langle J, \nabla_{\text{grad } \rho} \nabla_{\text{grad } \rho} J \rangle \} dt
\end{aligned}$$

Como  $J$  é um campo de Jacobi, temos

$$\nabla_{\text{grad } \rho} \nabla_{\text{grad } \rho} J + R(J, \text{grad } \rho) \text{grad } \rho = 0.$$

Portanto temos que:

$$\text{Hess } \rho(X, Y) = \int_0^a (|\nabla_{\text{grad } \rho} J|^2 - \langle J, R(J, \text{grad } \rho) \text{grad } \rho \rangle) dt = I_a(J, J) \quad (1.15)$$

onde  $R$  é a curvatura da variedade Riemanniana  $M$  e o segundo membro acima é a forma do índice.

**Proposição 1.22.** *Seja  $M^n$  uma variedade de Riemanniana completa e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica normalizada partindo de  $p$  e que não intersecta  $\text{Cut}(p)$ . Se  $0 \leq t \leq a$  e  $X \in T_\gamma(t_0)$  é ortogonal a  $\gamma'(t_0)$ , então*

$$(\text{Hess } \rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) = I_{t_0}(J, J) = \langle J', J \rangle(t_0),$$

onde  $J$  é o campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0$  e  $J(t_0) = X$ .

*Demonstração.* Vide [24] no capítulo I. □

Tome  $M$  uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante  $k$ . Agora para calcular o Hessiano da função distância de  $M$  seja

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}, & \text{se } k < 0 \\ t, & \text{se } k = 0 \\ \frac{\text{sen}(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}}, & \text{se } k > 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

e

$$C_k(t) = \frac{S'_k(t)}{S_k(t)} = \begin{cases} \sqrt{-k} \coth(t\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0 \\ \frac{1}{t}, & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{k} \cot(t\sqrt{k}), & \text{se } k > 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Defina  $f(t) = \frac{S'_k(t)}{S_k(t)}$ . Veja que  $f$  satisfaz a equação de Jacobi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + k f(t) = 0 \\ f(0) = 0, f(\rho) = 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

Seja  $\gamma$  uma geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco e  $X \in T_p M$  tal que  $\langle X, \gamma'(\rho) \rangle = 0$ . Denotemos por  $X(t)$ ,  $t \in [0, \rho]$  o transporte paralelo de  $X$  ao longo de  $\gamma$ . Logo o campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com  $J(0) = 0$  e  $J(\rho) = X$  é dado desta forma:

$$J(t) = f(t)X(t).$$

Seja  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma}, X_1, \dots, X_{n-1} \right\}$  uma base ortonormal de  $T_{\gamma(p)} M$ , paralela ao longo de  $\gamma$  e  $J(t) = f(t)X_i$  campos de Jacobi. Agora analisemos os três casos para a curvatura seccional.

### 1º Caso.

Se  $k < 0$  temos pela expressão (1.15):

$$\begin{aligned} \text{Hess}(\rho)(X_i, X_i) &= \int_0^\rho \left\{ \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} f(t)X_i(t)\|^2 - \langle R(f(t)X_i(t), \frac{\partial}{\partial \gamma}) \frac{\partial}{\partial \gamma}, f(t)X_i(t) \rangle \right\} dt \\ &= \int_0^\rho \left\{ \|f(t)\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} X_i(t) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(f(t))X_i(t)\|^2 - kf^2(t) \right\} dt \\ &= \int_0^\rho \left\{ -k \frac{\cosh^2(t\sqrt{-k})}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})} - k \frac{\sinh^2(t\sqrt{-k})}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})} \right\} dt \\ &= \int_0^\rho -\frac{k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})} (2\cosh^2(t\sqrt{-k}) - 1) dt \\ &= -\frac{k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})} \int_0^\rho \cosh(2t\sqrt{-k}) dt \\ &= -\frac{k}{\sinh^2(\rho\sqrt{-k})} \left( \frac{\sinh(2\rho\sqrt{-k})}{2\sqrt{-k}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-k} \sinh(2\rho\sqrt{-k})}{2 \sinh^2(\rho\sqrt{-k})} \\ &= \sqrt{-k} \frac{\cosh(\rho\sqrt{-k})}{\sinh(\rho\sqrt{-k})} \\ &= \sqrt{-k} \coth(\rho\sqrt{-k}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Hess}(\rho)(X_i, X_i) = \sqrt{-k} \coth(\rho\sqrt{-k}). \quad (1.19)$$

### 2º Caso.

Se  $k = 0$  repetindo o mesmo processo temos pela expressão (1.15):

$$\text{Hess}(\rho)(X_i, X_i) = \frac{1}{\rho} \quad (1.20)$$

### 3º Caso.

Se  $k > 0$  repetindo o mesmo processo temos pela expressão (1.15):

$$\text{Hess}(\rho)(X_i, X_i) = \sqrt{k} \cot(\rho\sqrt{k}) \quad (1.21)$$

Assim o Hessiano da função distância em  $M$  satisfaz

$$\text{Hess}(\rho)(X_i, X_i) = C_b(\rho(x)), \quad (1.22)$$

onde  $C_b(\rho(x))$  é o sistema apresentado na equação (1.17) em função de outra variável.

**Observação 1.10.** *Note que nessas condições temos*

$$\Delta\rho = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Hess}(\rho)(X_i, X_i) = (n-1)\text{Hess}(\rho)(X_i, X_i),$$

e daí,

$$\Delta\rho = \begin{cases} (n-1)\sqrt{-k}\coth(t\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0 \\ \frac{n-1}{\rho}, & \text{se } k = 0 \\ (n-1)\sqrt{k}\cot(t\sqrt{k}), & \text{se } k > 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

## 1.8 Teorema de Comparação do Hessiano

Nesta seção apresentaremos o teorema de Rauch e provaremos o Teorema de Comparação do Hessiano.

**Teorema 1.4. (Rauch)** *Sejam  $M^n$  e  $\widetilde{M}^m$ ,  $m \geq n$ , variedades Riemannianas,  $\gamma : [0, a] \rightarrow M^n$  e  $\widetilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \widetilde{M}^m$  geodésicas com mesma velocidade escalar e tais que*

- i.  $\widetilde{\gamma}(t)$  não é conjugado a  $\widetilde{\gamma}(0)$  ao longo de  $\widetilde{\gamma}$ ,  $\forall 0 < t \leq a$ .*

ii.  $K_M(\gamma'(t), X) \leq K_{\widetilde{M}}(\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{X}), \quad \forall X \in T_{\gamma(t)}M, \quad \widetilde{X} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$  respectivamente perpendiculares a  $\gamma'(t)$  e  $\widetilde{\gamma}'(t)$ .

Se  $J$  e  $\widetilde{J}$  são campos de Jacobi respectivamente ao longo de  $\gamma$  e  $\widetilde{\gamma}$ , não identicamente nulos e tais que  $J(0) = \widetilde{J}(0) = 0$  e  $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle \widetilde{J}'(0), \widetilde{\gamma}'(0) \rangle$ , então:

(a)  $\frac{|J(t)|}{|\widetilde{J}(t)|}$  é uma função não-decrescente de  $t \in (0, a]$ .

(b)  $\langle J', J \rangle \geq \frac{|J|^2}{|\widetilde{J}|^2} \langle \widetilde{J}', \widetilde{J} \rangle$  para  $t \in (0, a]$ .

*Demonstração.* Vide [10] no capítulo X. □

**Teorema 1.5. (Teorema de Comparação do Hessiano)** Sejam  $M^n$  e  $\widetilde{M}^n$  variedades Riemannianas completas e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  e  $\widetilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \widetilde{M}$  geodésicas normalizadas que não intersectam respectivamente  $\text{Cut}(\gamma(0))$  e  $\text{Cut}(\widetilde{\gamma}(0))$ . Se

$$K_M(\gamma'(t), X) \leq K_{\widetilde{M}}(\widetilde{\gamma}'(t), \widetilde{X}),$$

para todos  $t \in [0, a]$ ,  $X \in T_{\gamma(t)}M$  e  $\widetilde{X} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$  ortogonais respectivamente a  $\gamma'(t)$  e  $\widetilde{\gamma}'(t)$ , e  $\rho$  e  $\widetilde{\rho}$  denotam respectivamente as funções distância em  $M$  e em  $\widetilde{M}$  a partir de  $\gamma(0)$  e  $\widetilde{\gamma}(0)$ , então, para  $0 < t \leq a$  tem-se

$$(\text{Hess } \rho)_{\gamma(t)}(X, X) \geq (\text{Hess } \widetilde{\rho})_{\widetilde{\gamma}(t)}(\widetilde{X}, \widetilde{X}), \quad (1.24)$$

para todos  $X \in T_{\gamma(t)}M$  e  $\widetilde{X} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$  unitários e ortogonais respectivamente a  $\gamma'(t)$  e  $\widetilde{\gamma}'(t)$ .

*Demonstração.* Fixe  $0 < t \leq a$ . Pela (proposição 1.22)

$$(\text{Hess } \rho)_{\gamma(t_0)}(X, X) = \langle J', J \rangle(t_0),$$

onde  $J$  é o campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0$  e  $J(t_0) = X$ . Note em particular que  $\langle J, \gamma' \rangle = 0$  em  $[0, t_0]$ . Analogamente,

$$(\text{Hess } \widetilde{\rho})_{\widetilde{\gamma}'(t_0)}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) = \langle \widetilde{J}', \widetilde{J} \rangle(t_0),$$

onde  $\widetilde{J}$  é o campo de Jacobi ao longo de  $\widetilde{\gamma}$  tal que  $\widetilde{J}(0) = 0$  e  $\widetilde{J}(t_0) = \widetilde{X}$ , com  $\langle \widetilde{J}, \widetilde{\gamma}' \rangle = 0$  em  $[0, t_0]$ . Agora, como  $\widetilde{\gamma}$  não encontra  $\text{Cut}(\widetilde{\gamma}(0))$  em  $(0, t_0]$  temos que  $\widetilde{\gamma}(t)$  não é conjugado a  $\widetilde{\gamma}(0)$  ao

longo de  $\tilde{\gamma}$ , para  $0 < t \leq t_0$ . Portanto, segue do teorema de Rauch que

$$\begin{aligned}
 (\text{Hess } \rho)_\gamma(t_0)(X, X) &= \langle J', J \rangle(t_0) \\
 &\geq \frac{|J(t_0)|^2}{|\tilde{J}(t_0)|^2} \langle \tilde{J}', \tilde{J} \rangle(t_0) \\
 &= \frac{|X|^2}{|\tilde{X}|^2} (\text{Hess } \tilde{\rho})_{\tilde{\gamma}(t_0)}(\tilde{X}, \tilde{X}) \\
 &= (\text{Hess } \tilde{\rho})_{\tilde{\gamma}(t_0)}(\tilde{X}, \tilde{X}).
 \end{aligned}$$

□

Nas notações e hipóteses do Teorema de Comparação do Hessiano, tem-se

$$(\Delta \rho)(\gamma(t)) \geq (\Delta \tilde{\rho})(\tilde{\gamma}(t)) \quad \forall 0 < t \leq a. \quad (1.25)$$

*Demonstração.* Basta somar as desigualdades quando  $X$  e  $\tilde{X}$  percorrem bases ortonormais respectivamente de  $\langle \gamma'(t) \rangle^\perp$  e  $\langle \tilde{\gamma}'(t) \rangle$ , observando que

$$(\text{Hess } \rho)_{\gamma(t)}(\gamma', \gamma') = \langle \nabla_{\gamma'} \nabla_{\rho}, \gamma' \rangle = \langle \nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma' \rangle = 0 \quad (1.26)$$

valendo uma relação análoga para  $\tilde{\rho}$ .

□

**Proposição 1.23.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante  $k$  e  $\rho(x) = \text{dis}_M(x_0, x)$  função distância a um ponto  $x_0 \in M$ , com  $x \in M \setminus \text{Cut}(x_0)$ , então*

$$\text{Hess}^M(\rho(x))(X, X) = C_k(\rho(x))(1 - \langle \text{grad}(\rho(x)), X \rangle^2) \quad (1.27)$$

onde  $X \in T_x M$  e  $\|X\| = 1$ .

*Demonstração.* Vide [24] no capítulo I.

□

Pra averiguar a validade do próximo resultado basta realizar em cada caso,  $b < 0$ ,  $b = 0$  e  $b > 0$ , a comparação do Hessiano de  $\rho$  com o hessiano da função distância da variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a  $b$ .

**Teorema 1.6.** *Seja  $M^m$  uma variedade Riemanniana e  $x_0, x_1 \in M$  tal que existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $x_0$  a  $x_1$  e seja  $\rho(x) = \text{dis}_M(x_0, x)$  função distância a um ponto  $x_0 \in M$ . Seja  $K_\gamma \leq b$  a curvatura seccional radial de  $M$  ao longo de  $\gamma$ . Se  $b > 0$  assumimos  $\rho(x_1) \leq \pi/2\sqrt{b}$ , onde*

$$C_b(\rho(x)) = \begin{cases} \sqrt{-b} \coth(\rho(x)\sqrt{-b}), & \text{se } b < 0 \\ \frac{1}{\rho(x)}, & \text{se } b = 0 \\ \sqrt{b} \cot(\rho(x)\sqrt{b}), & \text{se } b > 0 \text{ e } \rho(x) \leq \pi/2\sqrt{b}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Então, temos que o Hess  $\rho(x)(\gamma', \gamma') = 0$  e

$$\text{Hess } \rho(x)(X, X) \geq C_b(\rho(x)) \|X\|^2 \quad (1.29)$$

onde  $X \in T_x M$  é perpendicular a  $\gamma'(\rho(x))$ .

*Demonstração.* Sejam  $N$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante  $b$  e  $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow N$  uma geodésica minimizante com velocidade unitária.

Temos pela (proposição 1.23)

$$\text{Hess}^N(\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(t)))(\tilde{X}, \tilde{X}) = C_b(\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(t))), \quad t \in [0, a],$$

onde

$$\tilde{X} \in T_{\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(t))} N, \quad \|\tilde{X}\| = 1 \quad \text{e} \quad \langle X, \text{grad } \tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(t)) \rangle = 0.$$

Notemos que

$$\text{Hess}^M(\rho(x))(X, X) = \|X\|^2 \text{Hess}^M\left(\rho(x)\left(\frac{X}{\|X\|}, \frac{X}{\|X\|}\right)\right).$$

Aplicando o teorema 1.5 (**Teorema de Comparação do Hessiano**) obtemos que

$$\text{Hess } \rho(x)(X, X) \geq \|X\|^2 C_b(\tilde{\rho}(x)).$$

□

# Princípio do Máximo de Omori-Yau e Noções de Completitude Estocastica

## Conteúdo

---

2.1	Princípio do Máximo . . . . .	p. 37
2.2	Princípio do Máximo de Omori-Yau . . . . .	p. 39
2.3	Noções Básicas de Variedades Riemannianas Estocasticamente Completas . . . . .	p. 44

---

Neste capítulo demonstraremos o Princípio do Máximo de Omori-Yau, uma versão mais atual proposta por Pigola, Rigoli e Setti, que mostra que o Princípio do Máximo independe das limitações da curvatura. Ademais apresentaremos alguns conceitos básicos de completitude estocástica.

## 2.1 Princípio do Máximo

---

Nesta seção apresentaremos alguns versões básicas do princípio do máximo e citaremos algumas generalizações.

Recordemos que se  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então  $u$  atinge seu máximo em algum ponto  $x_0 \in [a, b]$ . Se  $x_0 \in (a, b)$  e  $u$  possui segunda derivada contínua em uma vizinhança



de  $x_0$ , então

$$(i) u'(x_0) = 0 \quad e \quad (ii) u''(x_0) \leq 0. \quad (2.1)$$

Segue-se facilmente que, se  $u$  é uma desigualdade diferencial do tipo

$$u''(x) + g(x)u'(x) > 0$$

num intervalo aberto  $(a, b)$ , onde  $g$  é uma função limitada qualquer, então  $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$ .

Substituindo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  por variedade Riemanniana  $M$  compacta sem bordo, temos que, dada qualquer função  $u \in C^2(M)$ , existe um ponto  $x_0 \in M$  tal que

$$(i) u(x_0) = u^*, \quad (ii) |\text{grad } u(x_0)| = 0, \quad e \quad (iii) \Delta u(x_0) \leq 0, \quad (2.2)$$

onde  $u^* = \sup_M u < \infty$ , ou mais geralmente,

$$(i) u(x_0) = u^*, \quad (ii) |\text{grad } u(x_0)| = 0, \quad e \quad (iii)' \nabla^2 u(x_0) \leq 0, \quad (2.3)$$

no sentido de que

$$\nabla^2 u(x_0)(v, v) \leq 0 \quad \forall v \in T_{x_0}M.$$

Aqui  $\text{grad}$ ,  $\Delta$  e  $\nabla^2$  denotam respectivamente os operadores gradiente, Laplaciano e o Hessiano numa variedade Riemanniana  $M$ . Seguindo Yau, a validade de (2.2) ou (2.3) é chamado princípio do máximo usual (equivalentemente, o princípio do máximo finito)

Note que, quando  $M$  não é compacta, nem sempre é possível, para alguma função contínua  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  com  $u^* = \sup_M u < \infty$ , encontrar um ponto  $x_0$  tal que  $u(x_0) = u^*$ . Se a variedade Riemanniana considerada é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^m$  munido com sua métrica usual, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.** *Seja  $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada superiormente e de classe  $C^2$ . Então existe uma sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$  tal que*

$$(i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) |\text{grad } u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad e \quad (iii) \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}. \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Vide [4] no capítulo 1. □

Em [21] Omori provou que se  $M$  é uma variedade Riemanniana Completa com curvatura seccional limitada inferiormente, então para qualquer função  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u <$

$\infty$  existe uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  satisfazendo

$$(i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad (ii) |\text{grad } u(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad (iii)' \nabla^2 u(x_k) < \frac{1}{k} \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (2.5)$$

no sentido de formas quadráticas, isto é,

$$\nabla^2 u(x_k)(v, v) \leq \frac{1}{k} |v|^2 \quad \forall v \in T_{x_k} M.$$

Depois através de [25] e [26] Yau estendeu-o para variedades Riemannianas com curvatura de Ricci limitada inferiormente, substituindo a condição (iii)' pela a condição (iii) do *Teorema 2.1*.

## 2.2 Princípio do Máximo de Omori-Yau

Nesta seção apresentaremos e provaremos a versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau que independe das limitações da curvatura.

**Teorema 2.2.** *Seja  $M^m$  uma variedade Riemanniana e assuma que existe uma função  $\psi : M \rightarrow [0, \infty)$  de classe  $C^2$  não-negativa satisfazendo as seguintes condições:*

(a.1)  $\psi(x) \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow +\infty$

(a.2)  $\exists A > 0$  tal que  $|\text{grad } \psi| \leq A\sqrt{\psi}$  fora de um conjunto compacto.

(a.3)  $\exists B > 0$  tal que  $\Delta\psi \leq B\sqrt{\psi G(\sqrt{\psi})}$  fora de um conjunto compacto.

onde  $G$  é uma função diferenciável em  $[0, +\infty)$  satisfazendo:

$$\begin{aligned} (i) G(0) > 0, & & (ii) G'(t) \geq 0 \in [0, +\infty), \\ (iii) \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \notin L^1(0, +\infty), & & (iv) \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < +\infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Então, dada uma função  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u < \infty$  existe uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^m$  tal que

$$(i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \quad (ii) |\text{grad } u(x_k)| < \frac{1}{k}; \quad (iii) \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Primeiro vamos definir a seguinte função auxiliar

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}}. \quad (2.8)$$

Note que  $\varphi(t)$  é bem definida para todo  $t \geq 0$ , diferenciável, positiva e satisfaz

$$\varphi(t) \rightarrow +\infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (2.9)$$

Além disso, temos que:

$$\varphi'(t) = e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{G(t)}}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} - e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}} \frac{G'(t)}{2\sqrt{G(t)}} \frac{1}{G(t)} \\ &= \varphi(t) \left( \frac{1}{G(t)} - \frac{G'(t)}{2G(t)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$\left( \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right)^2 - \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \frac{G'(t)}{2G(t)^{3/2}} \geq 0. \quad (2.10)$$

Agora utilizando-se as condições satisfeitas por  $G$ , também temos que

$$\frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < c \implies \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{tG(\sqrt{t})}}, \quad (2.11)$$

para alguma constante positiva  $c > 0$ . Por outro lado temos

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \leq \frac{c_1}{\sqrt{tG(\sqrt{t})}}, \quad (2.12)$$

onde  $c_1 = \sqrt{c}$ .

Consideremos agora qualquer função diferenciável  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u < \infty$ . Fixemos um ponto  $x_0 \in M$  e defina, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função

$$u_k(x) = \frac{u(x) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(x))^{1/k}}. \quad (2.13)$$

Então,

$$u_k(x_0) = \frac{1}{\varphi(\psi(x_0))^{1/k}} > 0.$$

Ademais, como  $u^* < \infty$  e  $\varphi(\psi(x)) \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow +\infty$ , temos que

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} u_k(x) \leq 0. \quad (2.14)$$

Assim,  $u_k$  atinge seu máximo absoluto positivo em algum ponto  $x_k \in M$ . Iterando este procedimento, nós produzimos uma sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ . Começamos mostrando que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} u(x_k) = u^*. \quad (2.15)$$

Para provar isso, assuma por contradição que existe um ponto  $\hat{x} \in M$  tal que

$$u(\hat{x}) > u(x_k) + \delta,$$

para algum  $\delta > 0$  e para cada  $k \geq k_0$  suficientemente grande.

Se  $x_k$  está em um subconjunto compacto de  $M$ , então passando uma subsequência se necessário,  $x_k \rightarrow \bar{x}$  de modo que

$$u(\hat{x}) \geq u(\bar{x}) + \delta > u(\bar{x}).$$

Por outro lado, desde que

$$u_k(x_k) = \frac{u(x_k) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(x_k))^{1/k}} \geq u_k(\hat{x}) = \frac{u(\hat{x}) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(\hat{x}))^{1/k}}$$

para todo  $k$ , tomando  $k \rightarrow +\infty$  deduzimos que

$$u(\bar{x}) - u(x_0) + 1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(\hat{x}) = u(\hat{x}) - u(x_0) + 1,$$

mostrando que

$$u(\bar{x}) \geq u(\hat{x}),$$

que é uma contradição.

No caso em que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  não está em qualquer subconjunto compacto de  $M$  então, de acordo com a condição (a.1),  $\psi(x_k) \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$  em uma subsequência, e para cada  $k$  tal que  $\psi(x_k) > \psi(\hat{x})$  temos que

$$u_k(\hat{x}) = \frac{u(\hat{x}) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(\hat{x}))^{1/k}} > \frac{u(x) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(x))^{1/k}} = u_k(x_k)$$

contradizendo a definição de  $x_k$ . Isto prova (2.14) e, passando à uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(x_k) = u^*.$$

Novamente, se  $\{x_k\}$  está em um subconjunto compacto de  $M$ , então passando a uma

subsequência se necessário,  $\{x_k\} \rightarrow \bar{x} \in M$  e  $u$  atinge seu máximo absoluto em  $\bar{x}$ . Portanto, no ponto  $\bar{x}$  temos

$$u(\bar{x}) = u^*, \quad |\text{grad } u(\bar{x})| = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 u(\bar{x}) \leq 0.$$

No caso em que a sequência  $y_k = \bar{x}$  é constante para cada  $k$ , temos que são satisfeitas todas as condições de (2.7). Portanto só precisamos considerar o caso que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  não está em algum subconjunto compacto de  $M$ , que de acordo com a condição (a.1), significa que  $\psi(x_k) \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , passando uma subsequência se necessário.

Desde que  $u_k$  atinge seu máximo absoluto em  $x_k$ , temos que

$$|\text{grad } u_k(x_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 u_k(x_k) \leq 0.$$

Um cálculo direto de (2.13) nos fornece que

$$\text{grad } u_k(x) = \frac{1}{\varphi(\psi(x))^{1/k}} \left( \text{grad } u(x) - \frac{1}{k}(u(x) - u(x_0) + 1) \frac{\varphi'(\psi(x))}{\varphi(\psi(x))} \text{grad } \psi(x) \right) \quad (2.16)$$

Portanto,  $\text{grad } u_k(x_k) = 0$  se, e somente se,

$$\text{grad } u(x_k) = \frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1) \frac{\varphi'(\psi(x_k))}{\varphi(\psi(x_k))} \text{grad } \psi(x_k). \quad (2.17)$$

Utilizando (2.12) e a condição (a.2) em (2.17), temos, para  $k$  suficientemente grande

$$\begin{aligned} |\text{grad } u(x_k)| &\leq \frac{1}{k}(u^* - u(x_0) + 1) \frac{c_1}{\sqrt{\psi(x_k)} G(\sqrt{\psi(x_k)})} A \sqrt{\psi(x_k)} \\ &\leq \frac{1}{k}(u^* - u(x_0) + 1) \frac{c_1}{\sqrt{G(\sqrt{\psi(x_k)})}} A, \end{aligned}$$

para alguma constante  $c_1 > 0$ . Desde que que o lado direito tende a zero quando  $k \rightarrow \infty$ , isto prova a condição (ii) em (2.7).

Por outro lado, um cálculo direto de (2.16), usando o fato que  $\text{grad } u_k(x_k) = 0$  e a equivalência (2.17) nessa ordem, obtemos que para todo  $v \in T_k M$

$$\text{Hess } u_k(x_k)(v, v) = \nabla^2 u_k(x_k)(v, v) = \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{1/k}} \left( \nabla^2 u(x_k)(v, v) - \frac{\alpha_k}{k} \Lambda_k(v, v) \right), \quad (2.18)$$

onde

$$\psi_k = \psi(x_k), \quad \alpha_k = u(x_k) - u(x_0) + 1,$$

e

$$\Lambda_k(v, v) = \frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)} \nabla^2 \psi(x_k)(v, v) + \left( \frac{1}{k} \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} - \left( \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} - \frac{\varphi''(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)} \right) \right) \langle \text{grad } \psi(x_k), v \rangle^2.$$

Portanto  $\nabla^2 u_k(x_k) \leq 0$  se, e somente se,

$$\nabla^2 u(x_k)(v, v) \leq \frac{\alpha_k}{k} \Lambda_k(v, v) \quad (2.19)$$

para todo  $v \in T_{x_k} M$ . Agora usando (2.10) em (2.19) obtemos

$$\nabla^2 u(x_k)(v, v) \leq \frac{\alpha_k}{k} \left( \frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)} \nabla^2 \psi(x_k)(v, v) + \frac{1}{k} \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} \langle \text{grad } \psi(x_k), v \rangle^2 \right). \quad (2.20)$$

Tomando o traço em (2.20), temos que

$$\Delta u(x_k) \leq \frac{\alpha_k}{k} \left( \frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)} \Delta \psi(x_k) + \frac{1}{k} \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} |\text{grad } \psi(x_k)|^2 \right). \quad (2.21)$$

De (2.12) e (a.2) deduzimos que

$$\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} \langle \text{grad } \psi(x_k), v \rangle^2 \leq \frac{c_1^2 A^2}{G(\sqrt{\psi_k})} |v|^2, \quad (2.22)$$

para  $k$  suficientemente grande.

A condição (a.3) e a desigualdade (2.12) implicam

$$\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)} \Delta \psi(x_k) \leq c_1 B |v|^2, \quad (2.23)$$

para  $k$  suficientemente grande, e (2.21) implica

$$\Delta u(x_k) \leq \frac{c_2}{k}, \quad (2.24)$$

para alguma constante positiva  $c_2$ , onde o lado direito tende a zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Isto prova a condição (iii) em (2.7).  $\square$

**Observação 2.1.** Observe que uma função  $G$  que satisfaz as hipóteses acima é

$$G(t) = (t+2)^2 (\log(t+2))^2. \quad (2.25)$$

Esta função será utilizada durante a demonstração do teorema principal apresentado no próximo capítulo. Exemplos especialmente significativos da função  $G$  que satisfaçam as condições do Teorema acima podem ser encontrados em [4].

## 2.3 Noções Básicas de Variedades Riemannianas Estocasticamente Completas

Nesta seção abordaremos o conceito básico de completitude estocástica e algumas equivalências. Por fim apresentaremos o Princípio do Máximo fraco.

Recordemos que a completitude estocástica é a propriedade que um processo estocástico tenha tempo de vida (intrínseco) infinito. Uma condição analítica clássica para expressar a completitude estocástica é:

**Definição 2.1.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  é dita ser estocasticamente completa se para algum (e portanto, qualquer)  $(x, t) \in M \times (0, +\infty)$*

$$\int_M p(x, y, t) dy = 1 \quad (2.26)$$

onde  $p(x, y, t)$  é o núcleo de calor (minimal) do operador Laplaciano  $\Delta$ .

Notemos que na definição anterior a variedade Riemanniana  $M$  não é assumida ser geodesicamente completa. Na verdade seguindo Dodziuk em [12] podemos construir um núcleo de calor minimal sobre uma variedade Riemanniana arbitrária como o supremo dos núcleos de calor de Dirichlet sobre uma sequência exaustiva de domínios relativamente compactos com fronteira diferenciável. A condição analítica expressa em (2.26) é equivalente a um número de propriedades.

Apresentaremos agora o Princípio do Máximo fraco.

**Definição 2.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa). O Princípio do Máximo fraco se verifica para sobre  $M$  se, para qualquer função  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u < \infty$  existe uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  satisfazendo*

$$(i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad e \quad (ii) \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}. \quad (2.27)$$

Em [22] Pigola, Rigoli e Setti encontraram a seguinte caracterização para completitude estocástica.

**Teorema 2.3.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $M$  é estocasticamente completa.

(2) Para toda função diferenciável  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u < \infty$ , e para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\inf_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \leq 0$$

onde  $\Omega_\varepsilon = \{x \in M : u(x) > u^* - \varepsilon\}$ .

(3) Satisfaz o Princípio do Máximo fraco.

(4) Para toda função diferenciável  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u < \infty$  e toda  $f \in C^0(\mathbb{R})$ , se  $\Delta u \geq f(u)$  no subconjunto  $\Omega_\varepsilon = \{x \in M : u(x) > u^* - \varepsilon\}$ , para algum  $\varepsilon > 0$ , então  $f(u^*) \leq 0$ .

*Demonstração.* Vide [4] no capítulo 1. □

**Observação 2.2.** Estaremos interessados na equivalência (1) - (3), a qual iremos utilizar na demonstração do teorema principal apresentado no próximo capítulo.

Para uma introdução detalhada sobre completitude estocástica é indicado a leitura *Stochastic Calculus on Manifolds* de Emeny [13]. Outros resultados semelhantes ao teorema apresentado acima podem ser encontrados em [14] e [23].



# Estimativas para a Curvatura Média de Subvariedades Cilindricamente Limitadas

## Conteúdo

---

3.1	Teorema Principal . . . . .	p. 46
3.2	Considerações Finais . . . . .	p. 56

---

Neste capítulo apresentaremos o resultado principal da dissertação. Abordaremos uma estimativa para a curvatura média de subvariedades completas cilindricamente limitadas. Ademais apresentaremos uma relação entre uma estimativa da curvatura média e o fato de  $M$  ser estocasticamente incompleta. Tais resultados serão demonstrados tendo como ferramentas principais: o *Teorema de Comparação do Hessiano*, o *Princípio do Máximo de Omori-Yau* (apresentados e demonstrados anteriormente no capítulo 1 e 2 respectivamente) e os conceitos de *completitude estocástica* apresentados no capítulo anterior. Por fim apresentaremos uma aplicação para hipersuperfícies euclidianas e indicaremos alguns trabalhos semelhantes e extensões do resultado principal.

## 3.1 Teorema Principal

---

**Definição 3.1.** Uma aplicação  $p : M \rightarrow N$ , entre variedades, chama-se própria quando é contínua e a imagem inversa  $p^{-1}(K) \subset M$  de cada compacto  $K \subset N$  é um conjunto compacto.

A seguir denotaremos

$$C_b(t) = \begin{cases} \sqrt{b}\cot(t\sqrt{b}), & \text{se } b > 0, t < \pi/2\sqrt{b} \\ \frac{1}{t}, & \text{se } b = 0 \\ \sqrt{-b}\coth(t\sqrt{-b}), & \text{se } b < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Teorema 3.1.** *Seja  $\varphi : M^m \longrightarrow N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa  $M$  de dimensão  $m > \ell + 1$ . Seja  $B_N(r)$  a bola geodésica de  $N^{n-\ell}$  centrada em  $p$  com raio  $r$ . Dado  $q \in M$ , assumir que as curvaturas seccionais radiais  $K_N^{\text{rad}}$  ao longo da geodésicas radiais saindo de  $p = \pi(\varphi(q)) \in N^{n-\ell}$  são limitadas quando  $K_N^{\text{rad}} \leq b$  em  $B_N(r)$ . Suponha que*

$$\varphi(M) \subset B_N(r) \times \mathbb{R}^\ell$$

para  $r < \min\{\text{inj}_N(p), \pi/2\sqrt{b}\}$ , onde assumiremos  $\frac{\pi}{2\sqrt{b}}$  para  $\infty$  se  $b \leq 0$ .

(a) Se  $\varphi : M^m \longrightarrow N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$  é própria, então

$$\sup_M |H| \geq \frac{m-\ell}{m} C_b(r). \quad (3.2)$$

(b) Se

$$\sup_M |H| < \frac{m-\ell}{m} C_b(r), \quad (3.3)$$

então  $M$  é estocasticamente incompleta.

*Demonstração.* Defina  $\sigma : N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell \longrightarrow [0, +\infty)$  por

$$\sigma(z, y) = \rho_{\mathbb{R}^\ell}(y), \quad (3.4)$$

onde  $\rho_{\mathbb{R}^\ell}(y) = \|y\|_{\mathbb{R}^\ell}$  é a função distância para a origem em  $\mathbb{R}^\ell$ . Desde que  $\varphi$  é própria e  $\varphi(M) \subset B_N(r) \times \mathbb{R}^\ell$ , então a função  $\psi(x) = \sigma \circ \varphi(x)$  satisfaz

$$\psi(x) \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \rho_M(x) = \text{dist}_M(q, x) \longrightarrow \infty. \quad (3.5)$$

De fato, quando  $\rho_M(x) \longrightarrow \infty$  significa que  $x$  sai de qualquer compacto em  $M$ . Como  $\varphi$  é própria então  $\varphi(x)$  deve sair de qualquer compacto de  $N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$ , caso contrário existiria um compacto  $K$  em  $N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$  e uma sequência  $x_n$  em  $M$  com  $\rho_M(x_n)$  indo para o infinito e  $\varphi(x_n)$  em  $K$  para todo  $n$ , assim  $\varphi(x_n)$  seria um compacto cuja imagem inversa por  $\varphi$  seria

$x_n$  que não é compacto contradizendo o fato de  $\varphi$  ser própria. Portanto já que  $\varphi(x)$  sai de qualquer compacto então  $\psi(x) = \sigma(\varphi(x))$  vai para o infinito pois  $\sigma$  é uma função distância em  $\mathbb{N}^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$ .

Fora de um conjunto compacto nós temos

$$|\text{grad}^M \psi(x)| \leq |\text{grad}^{\mathbb{N}^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x))| = |\text{grad}^{\mathbb{R}^\ell} \rho_{\mathbb{R}^\ell}| \quad (3.6)$$

$$= 1 \quad (3.7)$$

$$\leq \sqrt{\psi(x)}, \quad (3.8)$$

onde a primeira desigualdade acima decorre de (1.8).

**Observação 3.1.** Quando  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell)$  normal a  $\mathbb{R}^\ell$  e  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell$  tal que  $\alpha(0) = \varphi(x)$  e  $\alpha'(0) = X$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  temos  $\alpha_2'(0) = 0$ . Então

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x)), X \rangle &= d\sigma_{\varphi(x)}(X) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \sigma(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \rho_{\mathbb{R}^\ell}(\alpha_2(t)) \right|_{t=0} \\ &= d\rho_{\mathbb{R}^\ell}(\alpha_2'(0)) = 0. \end{aligned}$$

Como

$$\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x)) = \text{grad}^{\mathbb{R}^\ell} \rho_{\mathbb{R}^\ell} + (\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x)))^\perp \text{ e } (\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x)))^\perp = 0,$$

então

$$\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x)) = \text{grad}^{\mathbb{R}^\ell} \rho_{\mathbb{R}^\ell}. \quad (3.9)$$

Para calcular  $\Delta_M \psi$  começamos com as bases  $\{\partial/\partial\rho_N, \partial/\partial\theta_2, \dots, \partial/\partial\theta_{n-\ell}\}$  de  $T\mathbb{N}$  e  $\{\partial/\partial\rho_{\mathbb{R}^\ell}, \partial/\partial\gamma_2, \dots, \partial/\partial\gamma_\ell\}$  de  $T\mathbb{R}^\ell$  (coordenadas polares) ortonormais em  $x \in M$ . Então escolhemos uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  para  $T_x M$  como segue

$$e_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial\rho_N} + \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij} \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \beta_i \frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbb{R}^\ell}} + \sum_{t=2}^{\ell} b_{it} \frac{\partial}{\partial\gamma_t}, \quad (3.10)$$

onde

$$|e_i|^2 = 1 = \alpha_i^2 + \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 + \beta_i^2 + \sum_{t=2}^{\ell} b_{it}^2.$$

Portanto, temos

$$\text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x))(e_i, e_i) = \text{Hess}_{\mathbb{R}^\ell} \rho_{\mathbb{R}^\ell}(\pi_{\mathbb{R}^\ell} e_i, \pi_{\mathbb{R}^\ell} e_i) = \sum_{t=2}^{\ell} b_{it}^2 \text{Hess}_{\mathbb{R}^\ell} \rho_{\mathbb{R}^\ell} \left( \frac{\partial}{\partial \gamma_t}, \frac{\partial}{\partial \gamma_t} \right),$$

onde,  $\pi_{\mathbb{R}^\ell}$  denota a projeção ortogonal sobre  $T\mathbb{R}^\ell$ . Usando a igualdade (1.22) obtemos

$$\text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x))(e_i, e_i) = \sum_{t=2}^{\ell} b_{it}^2 C_k \sigma(\varphi(x)) = \frac{1}{\sigma(\varphi(x))} \sum_{t=2}^{\ell} b_{it}^2, \quad (3.11)$$

onde na última igualdade estamos usando o fato de  $\mathbb{R}^\ell$  ser um espaço de curvatura seccional constante  $k = 0$ .

Como

$$1 = \alpha_i^2 + \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 + \beta_i^2 + \sum_{t=2}^{\ell} b_{it}^2 \implies \sum_{t=2}^{\ell} b_{it}^2 \leq 1,$$

então

$$\text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x))(e_i, e_i) \leq \frac{1}{\psi(x)}. \quad (3.12)$$

Desde que  $\psi(x) \rightarrow \infty$  quando  $\rho_M(x) = \text{dist}_M(q, x) \rightarrow \infty$  temos que  $\sqrt{\psi(x)G\sqrt{\psi(x)}} \rightarrow \infty$ , onde  $G(t) = (t+2)^2(\ln(t+2))^2$  satisfaz as 4 condições do Princípio do Máximo de Omori-Yau, como  $\psi(x) \rightarrow \infty$  e  $G$  é crescente, logo  $G$  é no mínimo limitada e portanto,  $\sqrt{\psi(x)G\sqrt{\psi(x)}} \rightarrow \infty$ . Portanto, fora de um conjunto compacto, podemos supor que

$$|\vec{H}(x) = m|H|(x) \leq \sqrt{\psi(x)G\sqrt{\psi(x)}}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, se  $\sup_M |H| = +\infty$  não há nada mais a provar. Além disso, fora de um conjunto compacto temos também que

$$\frac{1}{\psi(x)} \leq \sqrt{\psi(x)G\sqrt{\psi(x)}}. \quad (3.14)$$

Assim, a partir de (1.11), (3.11), (3.12) e da desigualdade de Schwarz temos fora de um conjunto compacto que

$$\begin{aligned} \Delta_M \psi(x) &= \sum_{i=1}^m \text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x))(e_i, e_i) + \langle \text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \sigma(\varphi(x)), \vec{H} \rangle \\ &\leq \frac{m}{\psi(x)} + m|H|(x) \\ &\leq (m+1) \sqrt{\psi(x)G\sqrt{\psi(x)}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta_M \psi(x) \leq (m+1) \sqrt{\psi(x) G \sqrt{\psi(x)}}. \quad (3.15)$$

Portanto, pelo *Teorema 2.2* o Princípio do Máximo de Omori-Yau acontece em  $M$ .

Agora defina  $\rho : N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\rho(z, y) = \rho_N(z) = \text{dist}_N(p, z),$$

e  $u : M^m \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$u(x) = \rho \circ \varphi(x).$$

Como  $\varphi(M) \subset B_N(r) \times \mathbb{R}^\ell$ , temos que  $u^* = \sup_M u \leq r < \infty$ . Portanto, pelo *Princípio do Máximo de Omori-Yau* existe uma sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^m$  tal que

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \quad |\text{grad } u|(x_k) < \frac{1}{k}; \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Assim,

$$\frac{1}{k} > \Delta u(x_k) = \sum_{i=1}^n \text{Hess}_{N \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k))(e_i, e_i) + \langle \text{grad}^{N \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k)), \vec{H}(x_k) \rangle, \quad (3.16)$$

onde  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  é uma base ortonormal para  $T_{x_k} M$ .

Considere  $\{\partial/\partial\rho_N, \partial/\partial\theta_2, \dots, \partial/\partial\theta_{n-\ell}\}$  uma base ortonormal para  $TN$  e  $\{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}$  coordenadas usuais para  $\mathbb{R}^\ell$ . Então escolhemos uma base ortonormal para  $T_{x_k} M$  desta forma

$$e_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial \rho_N} + \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{t=1}^{\ell} c_{it} \frac{\partial}{\partial y_t}, \quad (3.17)$$

onde

$$|e_i|^2 = 1 = \alpha_i^2 + \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 + \sum_{t=1}^{\ell} c_{it}^2.$$

Usando o mesmo argumento da *observação 3.1* e o *Teorema de Comparação do Hessiano* um cálculo simples implica que

$$\begin{aligned}
\text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k))(e_i, e_i) &= \text{Hess}_{\mathbb{N}} \rho_{\mathbb{N}}(z(x_k))(\pi_{\text{TN}} e_i, \pi_{\text{TN}} e_i) \\
&= \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 \text{Hess}_{\mathbb{N}} \rho_{\mathbb{N}}(z(x_k)) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \\
&\geq \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 C_b(r) \\
&= \left( 1 - \alpha_i^2 - \sum_{t=1}^{\ell} c_{it}^2 \right) C_b(r),
\end{aligned}$$

onde  $\pi_{\text{TN}}$  denota a projeção ortogonal sobre TN. Assim,

$$\sum_{i=1}^m \text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k))(e_i, e_i) \geq \left( m - \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 - \sum_{i,t=1}^{m,\ell} c_{it}^2 \right) C_b(r). \quad (3.18)$$

Em  $x_k$  por (1.8) temos

$$\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k)) = \text{grad } u(x_k) + (\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k)))^\perp.$$

Assim,

$$\text{grad } u(x_k) = \text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k)) - (\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k)))^\perp, \quad (3.19)$$

e portanto

$$|\text{grad } u|^2(x_k) = \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho}, e_i \right\rangle^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 < \frac{1}{k^2}. \quad (3.20)$$

Levando-se em conta que  $|\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho| = |\text{grad}^{\mathbb{N}} \rho_{\mathbb{N}}|$  temos

$$\langle \text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k)), \vec{H} \rangle \geq -m \sup_M |H|, \quad (3.21)$$

desde que  $\langle \text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k)), \vec{H}(x_k) \rangle \geq -|\text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho(\varphi(x_k))| |\vec{H}(x_k)|$ .

Assim, substituindo (3.16) e (3.19) em (3.14) obtemos

$$\frac{1}{k} > \left( m - \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 - \sum_{i,t=1}^{m,\ell} c_{it}^2 \right) C_b(r) - m \sup_M |H|. \quad (3.22)$$

Segue-se usando (3.18) em (3.20) que

$$\frac{1}{k} > \left( m - \frac{1}{k^2} - \sum_{i,t=1}^{m,\ell} c_{it}^2 \right) C_b(r) - m \sup_M |H|, \quad (3.23)$$

que implica

$$\frac{1}{k} + \frac{C_b(r)}{k^2} + m \sup_M |H| > \left( m - \sum_{i,t=1}^{m,\ell} c_{it}^2 \right) C_b(r). \quad (3.24)$$

Note agora que

$$\begin{aligned} |\text{grad}^M (y_t \circ \varphi)|^2 &= \sum_{i=1}^m \langle \text{grad}^M (y_t \circ \varphi), e_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \text{grad}^{N \times \mathbb{R}^\ell} y_t, e_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial}{\partial y_t}, e_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^m c_{it}^2. \end{aligned}$$

Desde que

$$|\text{grad}^{N \times \mathbb{R}^\ell} y_t| = |\text{grad}^M (y_t \circ \varphi) + (\text{grad}^{N \times \mathbb{R}^\ell} y_t)^\perp|$$

temos  $|\text{grad}^M (y_t \circ \varphi)|^2 \leq |\text{grad}^{N \times \mathbb{R}^\ell} y_t|^2 = 1$ . Então,

$$\sum_{i,t=1}^{m,\ell} c_{it}^2 = \sum_{t=1}^{\ell} \sum_{i=1}^m c_{it}^2 = \sum_{t=1}^{\ell} |\text{grad} (y_t \circ \varphi)|^2 \leq \ell. \quad (3.25)$$

Assim,

$$m - \sum_{i,t=1}^{m,\ell} c_{it}^2 \geq m - \ell. \quad (3.26)$$

Portanto, substituindo (3.24) em (3.22) teremos

$$\frac{1}{k} + \frac{C_b(r)}{k^2} + m \sup_M |H| > (m - \ell) C_b(r). \quad (3.27)$$

Fazendo  $k \rightarrow +\infty$  em (3.25) obtemos

$$m \sup_M |H| \geq (m - \ell) C_b(r). \quad (3.28)$$

Portanto,

$$\sup_M |H| \geq \frac{m - \ell}{m} C_b(r).$$

Isto conclui a primeira parte da demonstração do teorema.

Para provar a segunda parte do teorema precisaremos dos conceitos de completude

estocástica apresentado no capítulo anterior.

Pelo (Teorema 2.3) temos que uma variedade  $M$  é estocasticamente completa se, e somente se, para toda função diferenciável  $u \in C^2(M)$  com  $u^* = \sup_M u < \infty$  existe uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  satisfazendo, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$(i) u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad e \quad (ii) \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}. \quad (3.29)$$

Suponha que  $M$  é uma variedade Riemanniana estocasticamente completa. Defina  $g : \mathbb{N}^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x, z) = \widehat{g}(z) = \phi_b(\rho_N(z)), \quad (3.30)$$

onde

$$\phi_b(t) = \begin{cases} 1 - \cos(t\sqrt{b}), & \text{se } b > 0, t < \pi/2\sqrt{b} \\ t^2, & \text{se } b = 0 \\ \cosh(t\sqrt{-b}), & \text{se } b < 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Como  $\varphi(M) \subset B_N(r) \times \mathbb{R}^\ell$ , então  $f = g \circ \varphi$  é uma função diferenciável limitada em  $M$ . Assim existe uma sequência de pontos  $\{x_k\}$  em  $M$  tal que

$$f(x_k) > f^* - \frac{1}{k} \quad e \quad \Delta f(x_k) < \frac{1}{k}, \quad (3.32)$$

para  $k \geq 1$ , onde  $f^* = \sup_M u \leq \phi_b(r) < \infty$ . Repetindo um argumento análogo a primeira parte da demonstração (para a escolha da base e utilizando novamente a observação 3.1) e usando o lema 1.4 obtemos

$$\begin{aligned} \text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} g(\varphi(x_k))(e_i, e_i) &= \text{Hess}_N \widehat{g}(z(x_k))(\pi_{TN} e_i, \pi_{TN} e_i) \\ &= \text{Hess}_N \phi_b(\rho_N(z(x_k)))(\pi_{TN} e_i, \pi_{TN} e_i) \\ &\stackrel{\text{lema}}{=} \phi_b''(r_k) \langle \text{grad}^N r_k, e_i \rangle^2 + \phi_b'(r_k) \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 \text{Hess}_N \rho_N(z(x_k)) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \\ &\stackrel{(3.18)}{=} \phi_b''(r_k) \alpha_i^2 + \phi_b'(r_k) \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 \text{Hess}_N \rho_N(z(x_k)) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \\ &\stackrel{(1.22)}{\geq} \phi_b''(r_k) \alpha_i^2 + \phi_b'(r_k) C_b(r_k) \sum_{j=2}^{n-\ell} a_{ij}^2 \\ &= \phi_b''(r_k) \alpha_i^2 + \phi_b'(r_k) C_b(r_k) \left( 1 - \alpha_i^2 - \sum_{t=2}^{\ell} c_{it}^2 \right), \end{aligned}$$



onde  $r_k = \rho_N(z(x_k))$ . Então,

$$\text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} g(\varphi(x_k))(e_i, e_i) \geq \alpha_i^2(\Lambda_k) + \phi'_b(r_k) C_b(r_k) \left(1 - \sum_{t=2}^{\ell} c_{it}^2\right), \quad (3.33)$$

tal que  $\Lambda_k = \phi''_b(r_k) - \phi'_b(r_k) C_b(r_k)$ .

Por outro lado temos que

$$\phi'_b(t) = \begin{cases} \sqrt{b} \text{sen}(t\sqrt{b}), & \text{se } b > 0, t < \pi/2\sqrt{b} \\ 2t, & \text{se } b = 0 \\ \sqrt{-b} \text{senh}(t\sqrt{-b}), & \text{se } b < 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

e

$$\phi''_b(t) = \begin{cases} b \cos(t\sqrt{b}), & \text{se } b > 0, t < \pi/2\sqrt{b} \\ 2, & \text{se } b = 0 \\ -b \cosh(t\sqrt{-b}), & \text{se } b < 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Logo,

$$\phi'_b(t) C_b(t) = \begin{cases} b \cos(t\sqrt{b}), & \text{se } b > 0, t < \pi/2\sqrt{b} \\ 2, & \text{se } b = 0 \\ -b \cosh(t\sqrt{-b}), & \text{se } b < 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Portanto,

$$\phi''_b(r_k) - \phi'_b(r_k) C_b(r_k) = 0.$$

Assim, (3.31) se reduz

$$\text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} g(\varphi(x_k))(e_i, e_i) \geq \phi'_b(r_k) C_b(r_k) \left(1 - \sum_{t=1}^{\ell} c_{it}^2\right). \quad (3.37)$$

Assim, a partir de (1.11), (3.27), (3.35) e da *desigualdade de Schwarz* obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} > \Delta f(x_k) &= \sum_{i=1}^m \text{Hess}_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} g(e_i, e_i) + \langle \text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} g, \vec{H} \rangle \\
&\stackrel{(\text{lema 1.4})}{\geq} \phi'_b(r_k) C_b(r_k) \left( m - \sum_{i,t} c_{it}^2 \right) + \phi'_b(r_k) \langle \text{grad}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\ell} \rho_N, \vec{H} \rangle \\
&\stackrel{(3.24)}{\geq} \phi'_b(r_k) \left( m - \ell \right) C_b(r_k) - \sup_M |H|.
\end{aligned}$$

Desde que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi'_b(r_k) > 0$ , fazendo  $k \rightarrow \infty$  temos que

$$\sup_M |H| \geq \frac{m-\ell}{m} C_b(r), \quad (3.38)$$

que é uma contradição, já que temos por hipótese que

$$\sup_M |H| < \frac{m-\ell}{m} C_b(r). \quad (3.39)$$

Portanto,  $M$  é estocasticamente incompleta.  $\square$

Agora apresentemos uma consequência do teorema para hipersuperfícies euclidianas.

**Corolário 3.1.** *Seja  $\varphi : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície completa com curvatura média  $H$ . Se*

$$\varphi(M) \subset B_{\mathbb{R}^2}(r) \times \mathbb{R}^{n-2} \quad \text{e} \quad \sup_M |H| < \frac{1}{n-1} \frac{1}{r},$$

*então  $\varphi$  não é própria.*

*Demonstração.* Note que podemos ver  $\varphi$  como

$$\varphi : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$$

Suponha por absurdo, que  $\varphi$  seja própria. Além disso temos que a curvatura seccional  $K_N^{\text{rad}} = 0$  em  $B_{\mathbb{R}^2}(r)$ . Assim do *Teorema 10 item (a)* temos

$$\sup_M |H| \geq \frac{(n-1) - (n-2)}{n-1} \frac{1}{r} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{r},$$

que é uma contradição. Portanto  $\varphi$  não é própria.  $\square$

## 3.2 Considerações Finais

---

Este trabalho possui algumas extensões, e estas podem ser vistas nos artigos:

(I) - *A Mean Curvature Estimate for cylindrically Bounded Submanifolds*(Luis J. Alías and Marcos Dajczer) - 2011.

Neste projeto eles estendem a estimativa obtida nessa dissertação para a curvatura média de uma subvariedade própria cilíndricamente limitada em uma variedade produto com um espaço euclidiano como um fator para um espaço produto ambiente geral dotado de uma estrutura de produto warped.

(II) - *An Estimate for the Sectional Curvature of Cylindrically Bounded Submanifolds*(Luis J. Alías G. Pacelli Bessa, and J. Fabio Montenegro) - 2012.

Neste artigo os autores apresentam estimativas sharp para a curvatura seccional de  $m$ -subvariedades completas imersas cilíndricamente limitadas  $\varphi : M^m \rightarrow N^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$ ,  $n + \ell \leq 2m - 1$  (extendendo o teorema de Jorge-Koutrofotis), desde que  $\varphi$  é própria com a norma da segunda forma fundamental com crescimento controlado ou  $M$  tem curvatura escalar com decaimento quadrático forte. Os resultados serão uma aplicação do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau para a Hessiana de uma variedade Riemanniana, em uma versão mais atual proposta por Pigola, Rigoli and Setti [23].

(III) - *Proper Submanifolds in Product Manifolds*.(Hongbing QIU and Yuanlong XIN) - 2012.

Os autores obtém várias versões do princípio do máximo de Omori-Yau em subvariedades completas propriamente imersas com curvatura média controlada em certas variedades produtos, em variedades Riemannianas completas cuja curvatura  $k$ -Ricci tem decaimento quadrático forte e também obtém um princípio do máximo para o fluxo da curvatura média de variedades completas com curvatura média limitada. Utilizando o princípio do máximo generalizado, uma estimativa sobre a curvatura média de subvariedades propriamente imersas com projeção em  $N_1$  limitada na variedade produto  $N_1 \times N_2$  é dada. Esse artigo generaliza o resultado apresentado em [1].

## Referências Bibliográficas

- [1] ALIAS, L. J.; BESSA, G. P.; DAJCZER, M. The mean curvature of cylindrically bounded submanifolds. *Mathematische Annalen*, v. 345, p. 367-376, 2009.
- [2] ALIAS, L. J.; BESSA, G. P.; MONTENEGRO, J. F. An estimate for the sectional curvature of cylindrically bounded submanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 364, n. 7, p. 3513-3528, 2012.
- [3] ALIAS, L. J.; DAJCZER, M. A mean curvature estimate for cylindrically bounded submanifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 254, n. 1, p. 1-9, 2011.
- [4] ALIAS, L. J.; RIGOLI, M. *An Introduction to the Omori-Yau maximum principle and its applications*. São Carlos: RiMa, 2010. (XVI Escola de Geometria Diferencial)
- [5] BESSA, G. P.; MONTENEGRO, J. F. On compact of H-Hypersurfaces  $N \times \mathbb{R}$ . *Geom. Dedicata J.*, v. 127, p. 1-5, 2007.
- [6] BESSA, G. P.; MONTENEGRO, J. F. Mean time exit and isoperimetric inequalities for minimal submanifolds of  $N \times \mathbb{R}$ . *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 41, p. 242-252, 2009.
- [7] CALABI, E. Problems in Differential Geometry (S. Kobayashi and J. Eells, Jr., eds.) *Proc. of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry*, Kyoto, Japan, 1965, Nippon Hyoronsha Co. Ltd., Tokyo p. 170, 1966.
- [8] CHERN, S. S. The Geometry of G-structures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 72, p. 167-219, 1966.
- [9] COLDING, T.; MINICOZZI II, W. The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces. *Annals of Math.*, v. 161, p. 727-758, 2005.
- [10] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro:IMPA, 2008.(Projeto Euclides)
- [11] DO CARMO, M. P. *Superfícies mínimas*. Rio de Janeiro:IMPA, 2011. (Publicações matemáticas)
- [12] DODZIUK, J. Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 32, p. 703-716, 1983.

- [13] EMENY, M. *Stochastic calculus on manifolds*. Berlin:Springer-Verlag, 1989.
- [14] GRIGOR'YAN, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bulletin(New Series) of the American Mathematical Society*, v. 36, p.135-249, 1999.
- [15] HOFFMAN, D.; MEEKS, W. The Strong Half-space theorem for minimal surfaces. *Inventiones mathematicae*, v. 101, p. 373-377, 1990.
- [16] JORGE, L.; KOUTROFIOTIS, D. An estimate for the curvature of bounded submanifolds. *Amer. J. Math.*, v. 103, p. 711-725, 1980.
- [17] JORGE, L.; XAVIER, F. A complete minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  between two parallel planes. *Annals of Math.*, v. 112, p. 203-206, 1980.
- [18] MARKVORSEN, S. On the mean exit time from a submanifolds. *J. Differential Geometry*, v. 29, p. 1-8, 1989.
- [19] MARTINN, F.; MORALES, S. A complete bounded minimal cylinder in  $\mathbb{R}^3$ . *Michigan Math. J.*, v. 47, p. 499-514, 2000.
- [20] NADIRASHVILI, N. Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces. *Inventiones mathematicae*, v. 126, p. 457-465, 1996.
- [21] OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 19, n. 2, p. 205-214, 1967.
- [22] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. A remark on the maximum principle and stochastic completeness. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 131, p. 1283-1288, 2003.
- [23] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. Maximum principle on Riemannian manifolds and applications. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, n. 822, 2005.
- [24] SCHOEN, R.; YAU, S. Lectures on differential geometry. *Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology*, v. 1, 1994.
- [25] YAU, S. T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 28, p. 201-228, 1975.
- [26] YAU, S. T., CHENG, S. Y. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v.28, n.3, p. 333-354, 1975.