UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HENRIQUE BLANCO DA SILVA

PRIMEIRO AUTOVALOR NÃO NULO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE MÍNIMA NA ESFERA UNITÁRIA

FORTALEZA - CE
2013

HENRIQUE BLANCO DA SILVA

PRIMEIRO AUTOVALOR NÃO NULO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE MÍNIMA NA ESFERA UNITÁRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2013

HENRIQUE BLANCO DA SILVA

PRIMEIRO AUTOVALOR NÃO NULO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE MÍNIMA NA ESFERA UNITÁRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 23 / 08 / 2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

A Deus.

Aos meus Pais, Conceição e Raimundo.

E ao meu irmão André. Dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar forças para fazer esta dissertação e de tudo que eu tenho na vida.

Agradeço aos meus pais Conceição de Maria Blanco da Silva e Raimundo Benassuli da Silva e ao meu irmão André Blanco da Silva, dos quais eu dedico este trabalho, pelo apoio e confiança que sempre depositaram em mim.

Agradeço ao meu tio Claúdio José Cavalcante Blanco e ao meu primo Tedy Rony Luz Duarte que foram meus grandes exemplos e sempre me incentivaram a busca pelo conhecimento.

Agradeço a toda minha família que desde a minha graduação sempre me ajudaram e me incentivaram a continuar estudando.

Agradeço a Cristiane Emanuele da Silva pela paciência e de estar sempre ao meu lado durante este Mestrado.

Agradeço ao meu Orientador o Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros pela excelente orientação e pela amizade.

Agradeço também aos meus amigos e professores, Ernani Ribeiro e ao Dr. José Nazareno Vieira Gomes por participarem da minha banca.

Agradeço aos meus professores da Pós-Graduação Luquésio Jorge, Lucas Barbosa, Fábio Montenegro, Othon Lopes, Lev Birbrair, Ernani Ribeiro, Pacelli Bessa e Daniel Cibotaru que contribuiram para o meu conhecimento matemático, aos meus amigos de pós-graduação. Mestrado: Em especial ao meu amigo João Nunes que me deu todo apoio na minha chegada em Fortaleza, ao Wanderley do qual eu tive prazer de dividir a mesma sala ao longo deste período de dissertação e pelas valiosas discussões sobre matemática e aos demais amigos que fiz na UFC, Léo Ivo, Gilson, Roger, José Eduardo, Rui, Breno, Diego Eloy, Yuri, Nícolas, João Victor, Edson Gama, Selene, Neilha, Anderson, Marlon, Elaine, João Luís, Airton, Janielly, Rafael, Raimundo e Narcélio, pelas discussões bastante produtivas e pela discontração. Doutorado: Damião, Disson, Rondinelle, Wilson, Chaves, Tiarlos, Assis, João Victor, Cleiton, Rafael e Joserlan.

Agradeço também a quem não estiver presente nesta simples e pequena lista de agradecimentos. Peço desculpas.

Agradeço também a Andréa pela competência, atenção e paciência.

Agradeço a FUNCAP pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudarmos o primeiro autovalor não nulo do operador Laplaciano de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante imersas na esfera unitária contida no espaço Euclidiano. Vamos mostrar que para o caso mínimo, teremos uma de três possíveis estimativas para este primeiro autovalor e, como consequência de um possível autovalor, esta hipersuperfície será isométrica à uma esfera.

Palavras-chave: Hipersuperfícies mínimas. Autovalores do operador Laplaciano. Curvatura seccional.

ABSTRACT

The aim of this work is we study the first nonzero eigenvalue of the Laplacian operator compact hypersurfaces with constant mean curvature immersed in the unit sphere contained in Euclidean space. We will show that for the minimal case, we will have one of three possible estimates for the first eigenvalue and, as a consequence of a possible eigenvalue, this hypersurface will be isometric to sphere.

Keywords: Minimal hypersurfaces. Eigenvalues of Laplacian operator. Sectional curvature.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O estudo do espectro do Laplaciano de variedades Riemannianas compactas é um problema clássico da análise em variedades. De fato, uma questão interessante é se variedades isoespectrais são isométricas. Por outro lado, considerando variedades imersas em formas espaciais este problema se torna mais simples. Por exemplo, um resultado devido a Takahashi [13] mostra que para uma subvariedade M^n mínima imersa na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+k}$ suas funções coordenadas são autofunções do Laplaciano com autovalor respectivo n. Seguindo este fato, Yau [14] conjecturou que o primeiro autovalor de uma hipersuperfície mínima compacta M^n mergulhada na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ deve ser igual a n. Um primeiro passo na direção de resolver esta conjectura foi dado por Choi e Wang [5] onde eles mostraram que $\lambda_1 \geq \dfrac{n}{2}$. Em seguida, Barros e Bessa [1] provaram que $\lambda_1 > \dfrac{n}{2}$. Por outro lado, um resultado clássico devido a Obata [10] mostra que uma variedade Riemanniana compacta M^n é isométrica a uma esfera euclidiana desde que exista uma função diferenciável f em M satisfazendo $\nabla_X \nabla f = -fX$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\mathfrak{X}(M)$ é a álgebra de Lie dos campos de vetores de M e ∇ sua conexão Riemanniana. Estes resultados serão de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho o qual está dividido da seguinte maneira. No capítulo 2, teremos as preliminares, onde serão apresentados alguns resultados básicos. No capítulo 3 provaremos alguns lemas preliminares que serão essenciais para a prova do teorema principal e no capítulo 4, iremos provar um lema principal tendo como consequência os seguintes resultados:

Teorema 1. *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, então o primeiro autovalor não nulo λ_1 do operador Laplaciano satisfaz uma das seguintes condições*

(i) $\lambda_1 = n$, *(ii)* $\lambda_1 \leq (1+k_0)n$, *(iii)* $\lambda_1 \geq n + \dfrac{n}{2}(nk_0 - (n-1))$

onde k_0 é o ínfimo das curvaturas seccionais de M.

Teorema 2. *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, se o primeiro autovalor não nulo do operador Laplaciano, satisfaz $\lambda_1 = n$, então M é isométrica a esfera unitária S^n ou então teremos $k_0 < n^{-1}(n-1)$.*

Capítulo 2

PRELIMINARES

Primeiramente, vamos admitir que (M, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão n, onde g denota a métrica Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ a álgebra de Lie dos campos de vetores diferenciáveis em M.

2.1 Curvaturas

Definição 2.1.1. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação linear $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2.1}$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, obteremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n),$$

o que implica

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0,$$

como havíamos afirmado.

A seguir veremos uma importante propriedade da curvatura R dada pela seguinte proposição

Proposição 2.1.1 (Primeira Identidade de Bianchi)**.**

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Demonstração. Segue da Definição 2.1.1 e da identidade de Jacobi, (veja [**?**](pág. 93 e 94)) que

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_X [Y,Z] + \nabla_Y [Z,X] + \nabla_Z [X,Y] \\
&- \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Como consequência da Definição 2.1.1 e da primeira identidade de Bianchi, temos as seguintes propriedades da curvatura R, da qual uma demonstração pode ser vista em [3] (pág. 102)

(i) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle = 0.$

(ii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle.$

(iii) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle.$

(iv) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle,$

onde X, Y, Z e $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.1.2. *Dado um ponto qualquer* $p \in M$ *e um subespaço bi-dimensional* $\sigma \subset T_pM$*, o número real*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2}, \tag{2.2}$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado de **curvatura seccional** de σ em p.

Observe que se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em torno de p, então, a equação (2.2) se escreve

$$K(e_i, e_j) = \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle$$

para todo $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local, o tensor de Ricci e a curvatura escalar de M, denotados por Ric e S são definidos respectivamente, por

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, X)Y, e_i\rangle \tag{2.3}$$

e

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle. \tag{2.4}$$

O operador de Ricci de M denotado por Q é definido da seguinte forma $Ric(X,Y) = \langle Q(X), Y\rangle$, onde Q é um operador simétrico e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2.2 Vetor gradiente

Definição 2.2.1. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. O gradiente de* f *é um campo de vetores diferenciável sobre* M *definido por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f) \tag{2.5}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

É imediato a partir da definição que o gradiente de uma função diferenciável é unicamente determinado por (2.5). A existência é assegurada pela seguinte proposição.

Proposição 2.2.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Então, temos*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Ademais o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Demonstração. Veja [2] (pág. 9) □

Proposição 2.2.2. *Sejam f, $h : M \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, então*

(i) $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$.

(ii) $\nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f$.

Demonstração. Se X é qualquer campo diferenciável em M, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+h), X \rangle &= X(f+h) = X(f) + X(h) \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla h, X \rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla h, X \rangle. \end{aligned}$$

e isto prova (i). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \nabla fh, X \rangle &= X(fh) = fX(h) + hX(f) \\ &= f\langle \nabla h, X \rangle + h\langle \nabla f, X \rangle \\ &= \langle f\nabla h + h\nabla f, X \rangle. \end{aligned}$$

O que finaliza a prova da proposição. □

2.3 O divergente de um campo vetorial

Definição 2.3.1. *Seja X um campo de vetores diferenciável sobre M. O divergente de X, denotado por $\mathrm{div}X$ é uma função diferenciável sobre M definido da seguinte maneira*

$$(\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{2.6}$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Proposição 2.3.1. *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle e_i$ em U, então*

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} [e_i \langle X, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle].$$

Demonstração. De acordo com a definição, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de M, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathrm{div} X &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} [e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle]. \end{aligned}$$

□

Em particular, se o referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ for geodésico então

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle X, e_i \rangle.$$

Proposição 2.3.2. *Suponha que $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre M, então*

(i) $\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div}\ X + \mathrm{div}\ Y$.

(ii) $\mathrm{div}(fX) = f \mathrm{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração. A prova do primeiro item segue da definição de divergente. Agora mostraremos o segundo item. Por definição de divergente e pelas propriedades da conexão Riemanniana ∇, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} fX, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle f \nabla_{e_i} X + e_i(f) X, e_i \rangle \\ &= f \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i(f) X, e_i \rangle \\ &= f \mathrm{div} X + \langle \nabla f, X \rangle. \end{aligned}$$

□

2.4 O Laplaciano de uma função

Definição 2.4.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f denotado por $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ é definido por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{2.7}$$

Vejamos como fica a expressão do Laplaciano de uma função em termos de um referencial ortonormal.

Proposição 2.4.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} [e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f].$$

Em particular, se o referencial for geodésico, deduzimos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)).$$

Demonstração. Veja [2] (pág. 16). $\square$

Segue das propriedades do vetor gradiente e da Proposição 2.3.2 que o operador Laplaciano satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.4.2. *Sejam $f, h : M \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis então*

(i) $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h.$

(ii) $\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle.$

Demonstração. De fato, segue da definição do Laplaciano que

$$\begin{aligned}
\Delta(f + h) &= \operatorname{div}(\nabla(f + h)) = \operatorname{div}(\nabla f + \nabla h) \\
&= \operatorname{div}(\nabla f) + \operatorname{div}(\nabla h) \\
&= \Delta f + \Delta h
\end{aligned}$$

e isto prova (i). Se $h = f$ tem-se $\Delta(f + f) = 2\Delta f$.

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\nabla(fh)) = \operatorname{div}(h\nabla f + f\nabla h)\\ &= \operatorname{div}(h\nabla f) + \operatorname{div}(f\nabla h) = h\operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla h, \nabla f\rangle\\ &+ f\operatorname{div}(\nabla h) + \langle \nabla h, \nabla f\rangle\\ &= h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle,\end{aligned}$$

o que prova o segundo item. □

Em particular se $h = f$, temos

$$\Delta(f^2) = 2f\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla f\rangle = 2f\Delta f + 2\|\nabla f\|^2. \tag{2.8}$$

2.5 O Hessiano de uma função

Definição 2.5.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Hessiano de f é o campo de operadores lineares $(\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por*

$$(\mathrm{Hess} f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Proposição 2.5.1. *O Hessiano de f é um operador simétrico (auto-adjunto).*

Demonstração. Sejam X e Y extensões locais de x e $y \in T_pM$ de alguma vizinhança de p, então

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{Hess} f)_p(x), y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle\\ &= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle\\ &= X(Y(f)) - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle\\ &= X(Y(f)) - \langle \nabla f, [X,Y] + \nabla_Y X\rangle\\ &= Y(X(f)) + [X,Y](f) - \langle \nabla f, [X,Y]\rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle\\ &= Y\langle \nabla f, X\rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle\\ &= \langle x, (\mathrm{Hess} f)_p(y)\rangle.\end{aligned}$$

□

Como consequência da definição de Hessiano e Laplaciano a seguinte proposição nos dá uma relação entre esses dois operadores.

Proposição 2.5.2. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então*

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}f) = \Delta f.$$

Demonstração. Basta considerar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de $p \in M$. Então temos em p,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}f) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\mathrm{Hess}f)(e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\ &= \mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5.3 (Fórmula de Bochner)**.** *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, então*

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) = \|\mathrm{Hess}f\|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{2.9}$$

Demonstração. Suponha que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ seja um referencial ortonormal local e geodésico. Pela Proposição 2.4.1 e pela simetria do operador Hessiano, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i(e_i\langle \nabla f, \nabla f \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i\langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i\langle (\mathrm{Hess}f)(e_i), \nabla f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i\langle e_i, (\mathrm{Hess}f)(\nabla f) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f \rangle. \end{aligned}$$

Agora, pela definição da curvatura R, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(e_i,\nabla f)\nabla f + \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f + \nabla_{[e_i,\nabla f]}\nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle R(e_i,\nabla f)\nabla f, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{[e_i,\nabla f]}\nabla f, e_i\rangle \\
&= Ric(\nabla f,\nabla f) + \nabla f\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle (\text{Hess} f)([e_i,\nabla f]), e_i\rangle \\
&= Ric(\nabla f,\nabla f) + \nabla f(\Delta f) + \sum_{i=1}^{n}\langle [e_i,\nabla f], (\text{Hess} f)(e_i)\rangle \\
&= Ric(\nabla f,\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla f, (\text{Hess} f)(e_i)\rangle \\
&= Ric(\nabla f,\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \|\text{Hess} f\|^2.
\end{aligned}$$

□

Como queríamos demonstrar.

2.6 A segunda forma fundamental

Definição 2.6.1. *Sejam M^n uma variedade diferenciável e $\overline{M}^{n+m=k}$ uma variedade Riemanniana, dizemos que uma aplicação $\varphi : M \to \overline{M}$ é uma imersão se:*

(i) *φ é diferenciável.*

(ii) *$d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$.*

Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre a imagem $\varphi(M) \subset \overline{M}$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, dizemos que φ é um mergulho.

Segue da definição de imersão que podemos induzir uma métrica em M da seguinte forma, se v_1 e $v_2 \in T_pM$, definimos

$$\langle v_1, v_2\rangle_p = \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)\rangle_{\varphi(p)},$$

assim φ passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$.

Seja $\varphi : M \to \overline{M}$ uma imersão, então para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$, ou seja, φ é localmente um mergulho. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $\varphi(p)$ e um difeomorfismo $\psi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que ψ aplica difeomorficamente $\varphi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $\varphi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $d\varphi_q(v) \in T_{\varphi(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo ψ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v. Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, v^T) \quad e \quad (p, v) \to (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $\varphi : M \to \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X e Y são campos locais em M, então

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. Além disso $\alpha(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$. De fato, se $\overline{X}_1$ é uma outra extensão de X, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y},$$

que se anula em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M; além disso, se $\overline{Y}_1$ é uma outra extensão de Y, temos que

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X.

Portanto $\alpha(X,Y)$ está bem definida. No que segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos de vetores diferenciáveis em U de vetores normais onde φ é um mergulho.

Proposição 2.6.1. *Se X, $Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Para uma demonstração veja [3] (pág. 140 e 141).
Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle \alpha(x,y), \eta \rangle,$$

x, $y \in T_pM$ é pela Proposição 2.6.1, uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.6.2. *A forma quadrática β_η definida em T_pM dada por*

$$\beta_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental da imersão φ em p segundo o vetor normal η.

É comum considerar o campo α, como sendo a segunda forma fundamental de φ em $p \in M$. Observe que a aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ chamada de operador forma ou de Weingarten dada por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle \alpha(x,y), \eta\rangle.$$

A proposição a seguir nos dá uma expressão para o operador de Weingarten.

Proposição 2.6.2. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Sejam $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x e y, respectivamente, e tangentes a M. Daí, segue que $\langle N, Y\rangle = 0$, e portanto teremos em p que

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle \alpha(X,Y), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle \\
&= \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. □

Se a codimensão entre M e $\overline{M}$ for 1, dizemos que M é uma hipersuperfície imersa em $\overline{M}$. Se φ for um difeomorfismo, dizemos que φ é uma isometria ou que M é isométrica a $\overline{M}$. Se M é uma hipersuperfície imersa de $\overline{M}$, então existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM com valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tal que $Ae_i = \lambda_i e_i$. Então denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de φ. O número

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n}$$

é denominado de curvatura média de M.

Definição 2.6.3. *Uma imersão $\varphi : M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se traço $A_\eta = 0$.*

Escolhendo um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_m\}$ de vetores em $\mathfrak{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual φ é um mergulho, podemos escrever, em p,

$$\alpha(x,y)=\sum_{i=1}^{m}H_i(x,y)E_i,\quad x,y\in T_pM,\quad i=1,\dots,m,$$

onde $H_i=H_{E_i}$. Não é difícil verificar que o vetor normal dado por

$$\overrightarrow{H}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{tr}A_i)E_i,$$

onde $A_i=A_{E_i}$, não depende do referencial escolhido. O vetor $\overrightarrow{H}$ é chamado de vetor curvatura média de φ. É claro que φ é mínima se, e somente se $\overrightarrow{H}(p)=0$, para todo $p\in M$.

2.7 Imersões Umbílicas

Definição 2.7.1. *Uma imersão isométrica $\varphi: M^n\to\overline{M}^{n+m=k}$ é umbílica em $p\in M$ se, para todo $\eta\in(T_pM)^{\perp}-\{0\}$, existir um real λ_η tal que*

$$A_\eta=\lambda_\eta I. \tag{2.10}$$

onde I é o operador identidade. A imersão φ é totalmente umbílica se for umbílica em todo $p\in M$.

De acordo com (2.10), observe que para qualquer real c, $A_\eta=A_{c\eta}$, ou seja, $\lambda_\eta=\lambda_{c\eta}$. Portanto, se φ for umbílica em $p\in M$, então o número real λ_η irá depender somente do subespaço $(T_pM)^{\perp}$ gerado por η (pois $c\eta$ será também normal a M) e será denominado o fator de umbilicidade da imersão φ na direção de η.

Lema 2.1. *Seja $\varphi: M\to\overline{M}$ uma imersão isométrica, então são equivalentes:*

(i) *φ é umbílica em $p\in M$.*

(ii) *$A_\eta=\langle\overrightarrow{H}(p),\eta\rangle I$, para todo $\eta\in(T_pM)^{\perp}$.*

(iii) *$\alpha_p(X_p,Y_p)=\langle X_p,Y_p\rangle\overrightarrow{H}(p)$.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Seja φ umbílica em p e $\eta \in (T_pM)^\perp$ unitário. Completando η a uma base ortonormal $\{\eta_1 = \eta, \ldots, \eta_k\}$ de $(T_pM)^\perp$, temos

$$\overrightarrow{H}(p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_{\eta_j})\eta_j,$$

agora por (2.10), temos que

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{H}(p), \eta \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n}(n\lambda_\eta)\eta_j, \eta_j \right\rangle \\ &= \lambda_\eta.\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Seja $\{\eta_1 = \eta, \ldots, \eta_k\}$ uma base ortonormal para $(T_pM)^\perp$. Daí, temos em p

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y) &= \sum_{j=1}^{k} \langle \alpha(X, Y), \eta_j \rangle \eta_j = \sum_{j=1}^{k} \langle A_{\eta_j} X, Y \rangle \eta_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} \langle \langle \overrightarrow{H}, \eta_j \rangle X, Y \rangle \eta_j = \langle X, Y \rangle \sum_{j=1}^{k} \langle \overrightarrow{H}, \eta_j \rangle \eta_j \\ &= \langle X, Y \rangle \overrightarrow{H}.\end{aligned}$$

(iii)$\Rightarrow$(ii): Seja $\eta \in (T_pM)^\perp$. Então temos em p que

$$\langle \alpha(X, Y), \eta \rangle = \langle \langle X, Y \rangle \overrightarrow{H}, \eta \rangle = \langle \overrightarrow{H}, \eta \rangle \langle X, Y \rangle.$$

Como X, Y são vetores quaisquer em T_pM, segue que

$$A_\eta = \langle \overrightarrow{H}, \eta \rangle I.$$

Logo φ é umbílica em $p \in M$. Assim, finalizamos a prova do lema. $\square$

Capítulo 3

IMERSÕES NA ESFERA

3.1 O Teorema de Takahashi

A esfera unitária que vamos denotar por $\mathbb{S}^{n+k}$ é o conjunto dado por

$$\mathbb{S}^{n+k} = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n+k+1}) \in \mathbb{R}^{n+k+1}; x_1^2 + \ldots + x_{n+k+1}^2 = 1\right\}.$$

Vamos começar este capítulo com um resultado bastante importante para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 3.1 (Takahashi)**.** *Suponha que $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+k}$ é uma imersão isométrica. Se $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+k+1})$, então*

$$\Delta\varphi = -n\varphi + n\overrightarrow{H},$$

onde $\Delta\varphi = (\Delta\varphi_1, \ldots, \Delta\varphi_{n+k+1})$ e $\overrightarrow{H}$ é o vetor curvatura média de M^n. Em particular, φ é uma imersão mínima se, e somente se, $\Delta\varphi = -n\varphi$.

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M$ de p, geodésico em p. Assim, podemos completar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a um referencial adaptado $\{e_1, \ldots, e_n, \eta_1, \ldots, \eta_k\}$ para $\varphi(U)$, de modo que $\{e_1, \ldots, e_n, \eta_1, \ldots, \eta_k, \varphi\}$ é uma base ortonormal de $T_q\mathbb{R}^{n+k+1}$ para todo $q \in U$. Se α denota a segunda forma fundamental da imersão φ, ∇ a conexão Riemanniana de M, $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\mathbb{S}^{n+k}$ e ∇^0 a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+k+1}$, então temos em p

$$\Delta\varphi = \left(\sum_{i=1}^n e_i e_i(\varphi_1), \ldots, \sum_{i=1}^n e_i e_i(\varphi_{n+k+1})\right) = \sum_{i=1}^n \nabla^0_{e_i}\nabla^0_{e_i}\varphi = \sum_{i=1}^n \nabla^0_{e_i} e_i.$$

Assim, podemos escrever este vetor como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\nabla^0_{e_i}e_i &= \sum_{j=1}^{n}\left\langle\sum_{i=1}^{n}\nabla^0_{e_i}e_i, e_j\right\rangle e_j + \sum_{l=1}^{k}\left\langle\sum_{i=1}^{n}\nabla^0_{e_i}e_i, \eta_l\right\rangle \eta_l \\ &+ \left\langle\sum_{i=1}^{n}\nabla^0_{e_i}e_i, \varphi\right\rangle \varphi.\end{aligned}$$

Como $\nabla^0_{e_i}e_i = \overline{\nabla}_{e_i}e_i - \langle e_i, e_i\rangle\varphi$, obtemos que

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \sum_{l=1}^{k}\left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i, e_i), \eta_l\right\rangle \eta_l + \left\langle\sum_{i=1}^{n}\nabla^0_{e_i}e_i, \varphi\right\rangle \varphi \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, e_i\rangle\varphi \\ &= n\overrightarrow{H} - n\varphi.\end{aligned}$$

Portanto, concluimos o teorema de Takahashi. □

Vamos supor agora que M é uma hipersuperfície com curvatura média constante (que denotaremos por CMC) imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Vamos denotar por $g := \langle .,. \rangle$ a métrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ bem como a métrica induzida em M. Seja ∇ a conexão Riemanniana de M e A o operador forma ou de Weingarten da hipersuperfície M. A curvatura R, o tensor de Ricci Ric e a curvatura escalar S de M são dados, respectivamente por

$$R(X,Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y + \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY, \tag{3.1}$$

$$Ric(X,Y) = (n-1)\langle X, Y\rangle + nH\langle AX, Y\rangle - \langle AX, AY\rangle \tag{3.2}$$

e

$$S = n(n-1) + n^2H^2 - \|A\|^2, \tag{3.3}$$

onde X, Y e $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

A prova da equação (3.1), segue do fato que a curvatura seccional normalizada da esfera é 1 e pela equação de Gauss, veja [3] (pág. 149). As equações (3.2) e (3.3) segue da definição de tensor de Ricci e da curvatura escalar. Observe que neste caso, o operador de Ricci é dado por

$$Q(X) = (n-1)X + nHAX - A^2X. \tag{3.4}$$

Os seguintes exemplos mostram a existência de hipersuperfícies CMC imersas na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$.

Exemplo 3.1. *As esferas $\mathbb{S}^n(r)$ de raio r, onde $0 < r < 1$ são exemplos de hipersuperfícies CMC não nulas compactas imersas na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Para provar isto, considere o mergulho $\mathbb{S}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Seja $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ um vetor unitário fixado e defina uma função diferenciável $f_a : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f_a(x) = \langle a, x\rangle$. Primeiramente devemos determinar quais os valores de $b \in \mathbb{R}$ para que $M^n = f_a^{-1}(b)$ seja uma hipersuperfície na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Para isto, basta verificar que o $\nabla f_a(x) \neq 0$ para todo $x \in M^n = f_a^{-1}(b)$. Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$. Então, se ∇^0 denota a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+2}$, temos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f_a(x), X\rangle &= X(f_a(x)) = X\langle a, x\rangle\\ &= \langle \nabla^0_X a, x\rangle + \langle a, \nabla^0_X x\rangle\\ &= \langle a, X\rangle.\end{aligned}$$

E isto nos diz que $\langle \nabla f_a(x) - a, X\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$. Daí, como $a \in \mathbb{R}^{n+2} = T_x\mathbb{S}^{n+1} \oplus (T_x\mathbb{S}^{n+1})^\perp$ e $\dim(T_x\mathbb{S}^{n+1})^\perp = 1$, temos que

$$a = \nabla f_a(x) + \lambda x.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\langle a, x\rangle &= \langle \nabla f_a(x) + \lambda x, x\rangle\\ &= \langle \nabla f_a(x), x\rangle + \lambda\langle x, x\rangle = \lambda.\end{aligned}$$

Assim, $a = \nabla f_a(x) + bx$. Logo,

$$\begin{aligned}\langle \nabla f_a(x), \nabla f_a(x)\rangle &= \langle a - bx, a - bx\rangle\\ &= 1 - b^2.\end{aligned}$$

Então $\|\nabla f_a(x)\| > 0$, desde que, $-1 < b < 1$. Com esta condição, segue que $M^n = f_a^{-1}(b)$ é uma hipersuperfície na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$.

Vamos mostrar agora que M^n é totalmente umbílica, a aplicação de Gauss do mergulho $M \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é

$$N(x) = \frac{\nabla f_a(x)}{\|\nabla f_a(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}(a - bx).$$

Daí, o operador de Weingarten A aplicado em $Y \in T_xM$ é dado por

$$AY = -\nabla^0_Y N = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}Y.$$

Portanto segue que M^n é totalmente umbílica e a curvatura média de M^n é dada por

$$H = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}.$$

Agora, observe que

$$M^n = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1}; f_a(x) = b\right\}.$$

Então, tomando $a = (0, \ldots, 0, 1)$ temos que $x_{n+2} = b$. Logo $M^n = \mathbb{S}^n(1-b^2)$. Por outro lado, para $b = 0$, temos $H = 0$, ou seja, $M^n = \mathbb{S}^n(1)$ é mínima.

Exemplo 3.2 (Toro de Clifford)**.** *O produto de duas esferas Euclidianas* $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *tal que* $0 < r < 1$ *é outro exemplo de hipersuperfície CMC imersa na esfera Euclidiana* $\mathbb{S}^{n+1}$.

Tome qualquer inteiro $0 < k < n$ e defina uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2.$$

Vejamos agora, que $M^n = f^{-1}(r^2)$ é uma hipersuperfície na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. De fato, se $X = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ é qualquer campo diferenciável sobre $\mathbb{S}^{n+1}$. Então

$$X(f) = 2x_1X_1 + \ldots + 2x_{k+1}X_{k+1},$$

então,

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f) = \langle (2x_1, \ldots, 2x_{k+1}, 0 \ldots, 0), X\rangle = \langle 2Z, X\rangle,$$

onde $Z = (x_1, \ldots, x_{k+1}, 0 \ldots, 0)$. Daí, podemos escrever

$$Z = Z^T + \langle Z, x\rangle x,$$

tal que Z^T é tangente a esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, então

$$\langle \nabla f, X\rangle = \langle 2Z^T, X\rangle = \langle 2(Z - \langle Z, x\rangle x), X\rangle = \langle 2(Z - f(x)x), X\rangle.$$

Logo

$$\nabla f(x) = 2(Z - f(x)x)$$

para todo $x \in \mathbb{S}^{n+1}$. Assim, se $x \in M^n = f^{-1}(r^2)$, temos que

$$\nabla f(x) = 2(Z(x) - r^2 x).$$

Portanto

$$\langle \nabla f(x), \nabla f(x) \rangle = 4r^2(1 - r^2) > 0.$$

Observe agora que um ponto $x = (x_1, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{n+2}) \in f^{-1}(r^2)$ satisfaz o sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2 & = & r^2 \\ x_{k+2}^2 + \ldots + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 & = & 1 - r^2 \end{cases}$$

Assim, $M^n = \mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$, onde M^n é chamado Toro de Clifford.

Para mostrar que M^n possui curvatura média constante, considere a aplicação normal de Gauss

$$N(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = \frac{1}{2r\sqrt{1-r^2}} 2(Z(x) - r^2 x) = \frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}(Z(x) - r^2 x),$$

onde $\langle N, N \rangle = 1$. Portanto, se $X = (X_1, X_2)$ é um campo diferenciável sobre M, onde $X_1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^k(r))$ e $X_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}))$, teremos

$$\begin{aligned} AX &= -\nabla_X^0 N = -\nabla_X^0 \left(\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}(Z(x) - r^2 x) \right) \\ &= -\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}} \nabla_X^0 (Z(x) - r^2 x) \\ &= -\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}} \left(\nabla_X^0 Z(x) - r^2 \nabla_X^0 x \right) \\ &= -\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}} \left((X_1, 0) - r^2 (X_1, X_2) \right) \\ &= -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}(X_1, 0) + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever o operador de Weingarten A a matriz

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} I_k & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} I_{n-k} \end{pmatrix}$$

onde I_k e I_{n-k} denotam as matrizes identidade. Logo concluimos que a curvatura média de M^n é constante e dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n}\left(-\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}k + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}(n-k)\right) \\ &= \frac{nr^2-k}{nr\sqrt{1-r^2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que M^n possui duas curvaturas principais distintas, portanto não é totalmente umbílica.

3.2 O Hessiano de uma autofunção do Laplaciano

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma autofunção correspondendo ao primeiro autovalor não nulo λ_1 do operador Laplaciano Δ dado por $\Delta f = -\lambda_1 f$. Vamos agora definir um operador $B = \text{Hess} f : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por $BX = \nabla_X \nabla f$. As derivadas covariante do operador B são definidas da seguinte maneira

$$(\nabla B)(X,Y) = \nabla_X BY - B(\nabla_X Y)$$

e ainda

$$(\nabla^2 B)(X,Y,Z) = \nabla_X(\nabla B)(Y,Z) - (\nabla B)(\nabla_X Y, Z) - (\nabla B)(Y, \nabla_X Z).$$

As propriedades do operador B são dadas pelo lema a seguir

Lema 3.1. *Seja M uma hipersuperfície CMC imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local de M e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então o operador B satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\langle BX, Y\rangle = \langle X, BY\rangle$.

(ii) $\langle (\nabla B)(X,Y), Z\rangle = \langle Y, (\nabla B)(X,Z)\rangle$.

(iii) $TrB = -\lambda_1 f$.

(iv) $(\nabla B)(X,Y) - (\nabla B)(Y,X) = R(X,Y)\nabla f$.

(v) $\sum_{i=1}^{n}(\nabla B)(e_i, e_i) = -\lambda_1 \nabla f + Q(\nabla f)$.

(vi) $(\nabla^2 B)(X, Y, Z) - (\nabla^2 B)(X, Z, Y) = (\nabla_X R)(Y, Z)\nabla f + R(Y, Z)BX$.

(vii) $(\nabla^2 B)(X, Y, Z) - (\nabla^2 B)(Y, X, Z) = R(X, Y)BZ - B(R(X, Y)Z)$.

Demonstração. A propriedade (i) foi provada na Proposição 2.5.1, para obtermos o segundo item, observe que pela simetria do operador B, temos que

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla B)(X, Y), Z\rangle &= \langle \nabla_X BY - B(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X BY, Z\rangle - \langle B(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&= X\langle BY, Z\rangle - \langle BY, \nabla_X Z\rangle - \langle \nabla_X Y, BZ\rangle \\
&= X\langle Y, BZ\rangle - \langle Y, B(\nabla_X Z)\rangle - \langle \nabla_X Y, BZ\rangle \\
&= \langle Y, (\nabla B)(X, Z)\rangle.
\end{aligned}$$

As provas dos itens (iii) e (iv) seguem da definição de divergente e da curvatura R. Agora provaremos o item (v). Suponha que o referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é geodésico, então para qualquer campo diferenciável X em M, temos

$$\begin{aligned}
X(\Delta f) &= \sum_{i=1}^{n} X\langle Be_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X Be_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla B)(X, e_i), e_i\rangle,
\end{aligned}$$

agora usando as propriedades (ii) e (iv) e as propriedades do tensor de curvatura R, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla B)(X, e_i), e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla B)(e_i, X) + R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n}(\nabla B)(e_i, e_i), X \right\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle R(e_i, X)\nabla f, e_i\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n}(\nabla B)(e_i, e_i), X \right\rangle - Ric(X, \nabla f).
\end{aligned}$$

Por outro lado, $X(\Delta f) = \langle -\lambda_1 \nabla f, X\rangle$, portanto

$$\langle -\lambda_1 \nabla f, X\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}(\nabla B)(e_i, e_i), X \right\rangle - \langle Q(\nabla f), X\rangle,$$

assim

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla B)(e_i,e_i) = -\lambda_1\nabla f + Q(\nabla f).$$

Com relação a propriedade (vi), vamos denotar por D_1 e D_2 as seguintes diferenças

$$D_1(X,Y,Z) = (\nabla^2 B)(X,Y,Z) - (\nabla^2 B)(X,Z,Y)$$

e

$$D_2(X,Y,Z) = (\nabla^2 B)(X,Y,Z) - (\nabla^2 B)(Y,X,Z).$$

Portanto, segue por definição da segunda derivada covariante do operador B e pelas propriedades do tensor de curvatura R

$$\begin{aligned}
D_1(X,Y,Z) &= \nabla_X(\nabla B)(Y,Z) - (\nabla B)(\nabla_X Y,Z) - (\nabla B)(Y,\nabla_X Z)\\
&- \nabla_X(\nabla B)(Z,Y) + (\nabla B)(\nabla_X Z,Y) + (\nabla B)(Z,\nabla_X Y)\\
&= \nabla_X[(\nabla B)(Y,Z) - (\nabla B)(Z,Y)] + [(\nabla B)(\nabla_X Z,Y)\\
&- (\nabla B)(Y,\nabla_X Z)] + [(\nabla B)(Z,\nabla_X Y) - (\nabla B)(\nabla_X Y,Z)]\\
&= \nabla_X R(Y,Z)\nabla f + R(\nabla_X Z,Y)\nabla f + R(Z,\nabla_X Y)\nabla f\\
&= \nabla_X R(Y,Z)\nabla f - R(\nabla_X Y,Z)\nabla f - R(Y,\nabla_X Z)\nabla.
\end{aligned}$$

Agora, se $W \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\begin{aligned}
\langle D_1(X,Y,Z),W\rangle &= \langle \nabla_X R(Y,Z)\nabla f - R(\nabla_X Y,Z)\nabla f\\
&- R(Y,\nabla_X Z)\nabla f - R(Y,Z)BX + R(Y,Z)BX, W\rangle\\
&+ \langle R(Y,Z)\nabla f,\nabla_X W\rangle - \langle R(Y,Z)\nabla f,\nabla_X W\rangle\\
&= X\langle R(Y,Z)\nabla f,W\rangle - \langle R(\nabla_X Y,Z)\nabla f,W\rangle\\
&- \langle R(Y,\nabla_X Z)\nabla f,W\rangle - \langle R(Y,Z)BX,W\rangle\\
&- \langle R(Y,Z)\nabla f,\nabla_X W\rangle + \langle R(Y,Z)BX,W\rangle\\
&= \langle(\nabla_X R)(Y,Z)\nabla f,W\rangle + \langle R(Y,Z)BX,W\rangle\\
&= \langle(\nabla_X R)(Y,Z)\nabla f + R(Y,Z)BX,W\rangle.
\end{aligned}$$

Desta forma, concluimos que

$$D_1(X,Y,Z) = (\nabla_X R)(Y,Z)\nabla f + R(Y,Z)BX.$$

Finalmente, observe que pela segunda derivada covariante do operador B, temos

$$\begin{aligned} D_2(X,Y,Z) &= \nabla_X(\nabla B)(Y,Z) - (\nabla B)(\nabla_X Y, Z) - (\nabla B)(Y, \nabla_X Z) \\ &- (\nabla_Y(\nabla B)(X,Z) - (\nabla B)(\nabla_Y X, Z) - (\nabla B)(X, \nabla_Y Z)). \end{aligned}$$

E isto nos diz que

$$\begin{aligned} D_2(X,Y,Z) &= \nabla_X[\nabla_Y BZ - B(\nabla_Y Z)] - \nabla_{\nabla_X Y} BZ \\ &+ B(\nabla_{\nabla_X Y} Z) - \nabla_Y B(\nabla_X Z) \\ &+ B(\nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_Y[\nabla_X BZ - B(\nabla_X Z)] \\ &+ \nabla_{\nabla_Y X} BZ - B(\nabla_{\nabla_Y X} Z) + \nabla_X B(\nabla_Y Z) - B(\nabla_X \nabla_Y Z). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} D_2(X,Y,Z) &= \nabla_X \nabla_Y BZ - \nabla_X B(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} BZ + B(\nabla_{\nabla_X Y} Z) \\ &- \nabla_Y B(\nabla_X Z) + B(\nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_Y \nabla_X BZ + \nabla_Y B(\nabla_X Z) \\ &+ \nabla_{\nabla_Y X} BZ - B(\nabla_{\nabla_Y X} Z) + \nabla_X B(\nabla_Y Z) - B(\nabla_X \nabla_Y Z). \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos que

$$\begin{aligned} D_2(X,Y,Z) &= \nabla_X \nabla_Y BZ - \nabla_Y \nabla_X BZ - \nabla_{[X,Y]} BZ \\ &- (B(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)) \\ &= R(X,Y)BZ - B(R(X,Y)Z), \end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. $\square$

3.3 Lemas essenciais

Provaremos agora um conjunto de resultados que serão essenciais para a prova dos teoremas principais. Um teorema fundamental para obtermos os seguintes resultados, é dado pelo

Teorema 3.2 (Teorema da divergência). *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$\int_M \mathrm{div} X = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle,$$

onde ν é o campo unitário normal a ∂M apontando para fora de M. Em particular se M não possui fronteira, então

$$\int_M \mathrm{div} X = 0.$$

Daqui em diante M será uma variedade Riemanniana compacta sem bordo. Uma consequência do teorema da divergência no caso em que a variedade é sem bordo é o seguinte: suponha que λ é um autovalor do operador Laplaciano, então existe uma função $f \in C^\infty(M)$ tal que

$$\Delta f + \lambda f = 0.$$

Afirmamos que $\lambda \geq 0$. De fato, $(\Delta f)f = -\lambda f^2$ o que implica pela equação (2.8) que $\lambda f^2 = -\frac{1}{2}(\Delta f^2) + \|\nabla f\|^2$. Daí $\lambda \int_M f^2 = \int_M \|\nabla f\|^2$, ou seja, $\lambda = \dfrac{\int_M \|\nabla f\|^2}{\int_M f^2} \geq 0$. Logo, todos os autovalores do operador Laplaciano são não negativos.

Lema 3.2. *Sejam M uma hipersuperfície CMC compacta imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local geodésico de M. Então*

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{i=1}^n \langle \nabla e_i Q(\nabla f), Be_i\rangle &= \int_M \left\{(n-1)\|B\|^2 - \lambda_1 \|A\nabla f\|^2\right\} \\ &+ \int_M \left\{(n-1)\|A\nabla f\|^2 - \|A^2\nabla f\|^2\right\} \\ &+ nH \int_M (\lambda_1 - (n-1))\langle A\nabla f, \nabla f\rangle \\ &- nH \int_M \left\{nH\|A\nabla f\|^2 - 2\langle A^2\nabla f, A\nabla f\rangle\right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Observe que pela equação (3.4), temos que o operador de Ricci é dado por $Q(\nabla f) = (n-1)\nabla f + nHA\nabla f - A^2\nabla f$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla e_i Q(\nabla f), Be_i\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\left((n-1)\nabla f + nHA\nabla f - A^2\nabla f\right), Be_i\rangle \\ &= (n-1)\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla f, Be_i\rangle + nH\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} A\nabla f, Be_i\rangle \\ &- \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} A^2\nabla f, Be_i\rangle. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla e_i Q(\nabla f), Be_i\rangle &= (n-1)\sum_{i=1}^{n}\langle Be_i, Be_i\rangle \\ &+ nH\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\langle A\nabla f, Be_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle A\nabla f, (\nabla B)(e_i, e_i)\rangle\right) \\ &- \sum_{i=1}^{n} e_i\langle A^2\nabla f, Be_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A^2\nabla f, (\nabla B)(e_i, e_i)\rangle.\end{aligned}$$

Simplificando a equação acima, obteremos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla e_i Q(\nabla f), Be_i\rangle &= (n-1)\|B\|^2 + nH\mathrm{div}(BA\nabla f) \\ &- nH\langle A\nabla f, -\lambda_1\nabla f\rangle \\ &- nH\langle A\nabla f, Q(\nabla f)\rangle - \mathrm{div}(BA^2\nabla f) \\ &+ \langle A^2\nabla f, -\lambda_1\nabla f\rangle + \langle A^2\nabla f, Q(\nabla f)\rangle \\ &= (n-1)\|B\|^2 - \lambda_1\|A\nabla f\|^2 \\ &- \mathrm{div}(BA^2\nabla f) + Ric(A^2\nabla f, \nabla f) \\ &+ nH(\mathrm{div}(BA\nabla f) + \lambda_1\langle A\nabla f, \nabla f\rangle - Ric(A\nabla f, \nabla f)).\end{aligned}$$

Logo, basta integrar a equação acima para obtermos o resultado desejado, ou seja

$$\begin{aligned}\int_M \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} Q(\nabla f), Be_i\rangle &= \int_M \left\{(n-1)\|B\|^2 - \lambda_1\|A\nabla f\|^2\right\} \\ &+ \int_M \left\{(n-1)\|A\nabla f\|^2 - \|A^2\nabla f\|^2\right\} \\ &+ nH\int_M (\lambda_1 - (n-1))\langle A\nabla f, \nabla f\rangle \\ &- nH\int_M \left\{nH\|A\nabla f\|^2 - 2\langle A^2\nabla f, A\nabla f\rangle\right\}.\end{aligned}$$

Observemos que se M é hipersuperfície mínima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_M \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} Q(\nabla f), Be_i\rangle &= \int_M \left\{(n-1)\|B\|^2 - \lambda_1\|A\nabla f\|^2\right\} \\ &+ \int_M \left\{(n-1)\|A\nabla f\|^2 - \|A^2\nabla f\|^2\right\}.\end{aligned}$$

$\square$

O que conclui a demonstração.

Lema 3.3. *Seja* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal local na hipersuperfície CMC compacta imersa* M *na esfera unitária* $\mathbb{S}^{n+1}$ *que diagonaliza o operador* B *com* $Be_i = a_i e_i$. *Então*

$$\frac{1}{2}\int_M \sum_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)^2 = \int_M \left(n\|B\|^2 - \lambda_1 \|\nabla f\|^2\right).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} 2a_i a_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_j^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle Be_i, Be_i\rangle - 2\sum_{i=1}^{n} \langle Be_i, e_i\rangle \sum_{j=1}^{n} \langle Be_j, e_j\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle Be_j, Be_j\rangle \\
&= 2n\|B\|^2 - 2(\mathrm{tr}B)^2 \\
&= 2n\|B\|^2 - 2\lambda_1^2 f^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\int_M \sum_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)^2 = \int_M \left(n\|B\|^2 - \lambda_1^2 f^2\right).$$

Por outro lado, como $\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2\|\nabla f\|^2$ e $\Delta f = -\lambda_1 f$, teremos

$$\int_M \|\nabla f\|^2 = \lambda_1 \int_M f^2,$$

e assim obtemos o resultado desejado. □

Lema 3.4. *Seja* M *uma hipersuperfície CMC compacta imersa na esfera unitária* $\mathbb{S}^{n+1}$ *e* f *uma função diferenciável sobre* M *tal que* $\Delta f = -\lambda_1 f$. *Então*

$$\int_M \left(\|B\|^2 - \lambda_1 \|\nabla f\|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f)\right) = 0.$$

Demonstração. Basta definir uma função diferenciável em M por

$$\varphi = \frac{1}{2}\|\nabla f\|^2$$

e usar a fórmula de Bochner para concluir o resultado. □

Lema 3.5. *Sejam M uma hipersuperfície CMC compacta imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local de M. Então*

$$\int_M \sum_{i,k=1}^{n} \langle (\nabla_{e_k} R)(e_k, e_i)\nabla f, Be_i\rangle = \int_M \left\{ -\frac{1}{2}\|R_{\nabla f}\|^2 - \sum_{i,k=1}^{n} \langle R(e_k, e_i)Be_k, Be_i\rangle \right\},$$

onde $\|R_{\nabla f}\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \|R(e_i, e_j)\nabla f\|^2$.

Demonstração. Suponha que o referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é geodésico, então

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_k} R)(e_k, e_i)\nabla f, Be_i\rangle &= \nabla R(e_k, e_i, \nabla f, Be_i, e_k) \\
&= e_k\langle R(e_k, e_i)\nabla f, Be_i\rangle - \langle R(e_k, e_i)Be_k, Be_i\rangle \\
&- \langle R(e_k, e_i)\nabla f, (\nabla B)(e_k, e_i)\rangle \\
&= e_k\langle R(Be_i, \nabla f)e_i, e_k\rangle - \langle R(e_k, e_i)Be_k, Be_i\rangle \\
&- \langle R(e_k, e_i)\nabla f, (\nabla B)(e_k, e_i)\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_k} R(Be_i, \nabla f)e_i, e_k\rangle - \langle R(e_k, e_i)Be_k, Be_i\rangle \\
&- \langle R(e_k, e_i)\nabla f, (\nabla B)(e_k, e_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Daí, usando o Lema 3.1 temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^{n} \langle (\nabla_{e_k} R)(e_k, e_i)\nabla f, Be_i\rangle &= \sum_{i,k=1}^{n} \langle \nabla_{e_k} R(Be_i, \nabla f)e_i, e_k\rangle \\
&- \sum_{i,k=1}^{n} \langle R(e_k, e_i)Be_k, Be_i\rangle - \|\nabla B\|^2 \\
&+ \sum_{i,k=1}^{n} \langle (\nabla B)(e_i, e_k), (\nabla B)(e_k, e_i)\rangle. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 3.1 teremos

$$\|R_{\nabla f}\|^2 = 2\|\nabla B\|^2 - 2\sum_{i,k=1}^{n} \langle (\nabla B)(e_k, e_i), (\nabla B)(e_i, e_k)\rangle. \qquad (3.6)$$

Comparando as equações (3.5) e (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^{n} \langle (\nabla_{e_k} R)(e_k, e_i)\nabla f, Be_i\rangle &= -\frac{1}{2}\|R_{\nabla f}\|^2 - \sum_{i,k=1}^{n} \langle R(e_k, e_i)Be_k, Be_i\rangle \\
&+ \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{n} R(Be_i, \nabla f)e_i \right).
\end{aligned}$$

Logo, integrando a equação acima, deduzimos

$$\int_M \sum_{i,k=1}^{n} \langle (\nabla_{e_k} R)(e_k, e_i)\nabla f, Be_i\rangle = \int_M \left\{ -\frac{1}{2}\|R_{\nabla f}\|^2 - \sum_{i,k=1}^{n} \langle R(e_k, e_i)Be_k, Be_i\rangle \right\}.$$

□

Lema 3.6. *Seja M uma hipersuperfície CMC compacta imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|R_{\nabla f}\|^2 &= (n-1)\|\nabla f\|^2 + (\|A\|^2 - 2)\|A\nabla f\|^2 \\ &- \|A^2\nabla f\|^2 + 2nH\langle \nabla f, A\nabla f\rangle \end{aligned}$$

Demonstração. Usando a equação (3.1) e o fato de M possuir curvatura média constante, temos que

$$\begin{aligned} \|R_{\nabla f}\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle R(e_i, e_j)\nabla f, R(e_i, e_j)\nabla f\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_j, \nabla f\rangle^2 \langle e_i, e_i\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_j, \nabla f\rangle\langle e_i, \nabla f\rangle\langle e_i, e_j\rangle \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_j, \nabla f\rangle\langle Ae_j, \nabla f\rangle\langle e_i, Ae_i\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_j, \nabla f\rangle\langle Ae_i, \nabla f\rangle\langle e_i, Ae_j\rangle \\ &- \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, \nabla f\rangle\langle e_j, \nabla f\rangle\langle e_j, e_i\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, \nabla f\rangle^2 \langle e_j, e_j\rangle \\ &- \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, \nabla f\rangle\langle Ae_j, \nabla f\rangle\langle e_j, Ae_i\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, \nabla f\rangle\langle Ae_i, \nabla f\rangle\langle e_j, Ae_j\rangle \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_j, \nabla f\rangle\langle e_j, \nabla f\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_j, \nabla f\rangle\langle e_i, \nabla f\rangle\langle Ae_i, e_j\rangle \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_j, \nabla f\rangle^2 \langle Ae_i, Ae_i\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_j, \nabla f\rangle\langle Ae_i, \nabla f\rangle\langle Ae_i, Ae_j\rangle \\ &- \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_i, \nabla f\rangle\langle e_j, \nabla f\rangle\langle Ae_j, e_i\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_i, \nabla f\rangle\langle e_i, \nabla f\rangle\langle Ae_j, e_j\rangle \\ &- \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_i, \nabla f\rangle\langle Ae_j, \nabla f\rangle\langle Ae_i, Ae_j\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle Ae_i, \nabla f\rangle^2 \langle Ae_j, Ae_j\rangle \end{aligned}$$

Agora, basta usar as definições de vetor gradiente e curvatura média para obtermos que

$$
\begin{aligned}
\|R_{\nabla f}\|^2 &= n\|\nabla f\|^2 - \|\nabla f\|^2 + nH\langle \nabla f, A\nabla f\rangle - \|A\nabla f\|^2 \\
&- \|\nabla f\|^2 + n\|\nabla f\|^2 - \|A\nabla f\|^2 + nH\langle \nabla f, A\nabla f\rangle \\
&+ nH\langle \nabla f, A\nabla f\rangle - \|A\nabla f\|^2 + \|A\nabla f\|^2\|A\|^2 - \|A^2\nabla f\|^2 \\
&- \|A\nabla f\|^2 + nH\langle \nabla f, A\nabla f\rangle - \|A^2\nabla f\|^2 + \|A\nabla f\|^2\|A\|^2 \\
&= 2(n-1)\|\nabla f\|^2 - 4\|A\nabla f\|^2 + 2\|A\nabla f\|^2\|A\|^2 \\
&- 2\|A^2\nabla f\|^2 + 4nH\langle \nabla f, A\nabla f\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|R_{\nabla f}\|^2 &= (n-1)\|\nabla f\|^2 + (\|A\|^2 - 2)\|A\nabla f\|^2 \\
&- \|A^2\nabla f\|^2 + 2nH\langle \nabla f, A\nabla f\rangle.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.7. *Seja M uma hipersuperfície CMC imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

$$
\|\nabla B\|^2 \geq \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2.
$$

Demonstração. Vamos definir um tensor simétrico $C : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ do qual é dado por

$$
C(X,Y) = \langle BX, Y\rangle + \frac{\lambda_1}{n} f\langle X, Y\rangle.
$$

Assim, a derivada covariante do tensor C com respeito a um campo de vetores X em M é dado por

$$
(\nabla C)(X,Y,Z) = \langle (\nabla B)(X,Y), Z\rangle + \frac{\lambda_1}{n} X(f)\langle Y, Z\rangle. \tag{3.7}
$$

De fato, calculando o valor de ∇C temos que

$$
\begin{aligned}
(\nabla C)(X,Y,Z) &= X(C(Y,Z)) - C(\nabla_X Y, Z) - C(Y, \nabla_X Z) \\
&= X(\langle BY, Z\rangle + \frac{\lambda_1}{n}\langle fY, Z\rangle) - (\langle B(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&+ \frac{\lambda_1}{n} f\langle \nabla_X Y, Z\rangle) - (\langle BY, \nabla_X Z\rangle + \frac{\lambda_1}{n} f\langle Y, \nabla_X Z\rangle) \\
&= \langle \nabla_X BY, Z\rangle + \langle BY, \nabla_X Z\rangle + \frac{\lambda_1}{n}\langle \nabla_X fY, Z\rangle \\
&+ \frac{\lambda_1}{n}\langle fY, \nabla_X Z\rangle - \langle B(\nabla_X Y), Z\rangle - \frac{\lambda_1}{n} f\langle \nabla_X Y, Z\rangle \\
&- \langle BY, \nabla_X Z\rangle - \frac{\lambda_1}{n}\langle fY, \nabla_X Z\rangle.
\end{aligned}
$$

E isto implica que

$$\begin{aligned}
(\nabla C)(X,Y,Z) &= \langle(\nabla B)(X,Y),Z\rangle + \frac{\lambda_1}{n}X(f)\langle Y,Z\rangle + \frac{\lambda_1}{n}f\langle\nabla_X Y,Z\rangle \\
&+ \frac{\lambda_1}{n}\langle fY,\nabla_X Z\rangle - \frac{\lambda_1}{n}f\langle\nabla_X Y,Z\rangle - \frac{\lambda_1}{n}\langle fY,\nabla_X Z\rangle \\
&= \langle(\nabla B)(X,Y),Z\rangle + \frac{\lambda_1}{n}X(f)\langle Y,Z\rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|\nabla C\|^2 &= \sum_{i,j,k=1}^{n}[(\nabla C)(e_i,e_j,e_k)]^2 \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\left[\langle(\nabla B)(e_i,e_j),e_k\rangle + \frac{\lambda_1}{n}e_i(f)\langle e_j,e_k\rangle\right]^2 \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\langle(\nabla B)(e_i,e_j),e_k\rangle^2 \\
&+ 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i,j,k=1}^{n}\langle(\nabla B)(e_i,e_j),e_k\rangle\langle\nabla f,e_i\rangle\langle e_j,e_k\rangle \\
&+ \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\lambda_1^2}{n^2}\langle\nabla f,e_i\rangle^2\langle e_j,e_k\rangle^2 \\
&= \|\nabla B\|^2 + \frac{\lambda_1^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,e_i\rangle^2\sum_{j,k=1}^{n}\langle e_j,e_k\rangle^2 \\
&+ 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i,j,=1}^{n}\langle(\nabla B)(e_i,e_j),e_j\rangle\langle\nabla f,e_i\rangle \\
&= \|\nabla B\|^2 + \frac{\lambda_1^2}{n^2}n\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f,e_i\rangle^2 + 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\langle(\nabla B)(e_i,e_j),e_j\rangle\langle\nabla f,e_i\rangle \\
&= \|\nabla B\|^2 + \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2 + 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\langle(\nabla B)(e_i,e_j),e_j\rangle\langle\nabla f,e_i\rangle \\
&= \|\nabla B\|^2 + \frac{\lambda_1^2}{n} + 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\langle(\nabla B)(e_j,e_i),e_j\rangle\langle\nabla f,e_i\rangle \\
&+ 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\langle R(e_i,e_j)\nabla f,e_j\rangle\langle\nabla f,e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, usando as propriedades do operador B, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla C\|^2 &= \|\nabla B\|^2 + \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2 + 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle -\lambda_1\nabla f + Q(\nabla f), e_i\rangle\langle \nabla f, e_i\rangle \\
&- 2\frac{\lambda_1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\langle R(\nabla f, e_j)e_j, e_i\rangle\langle \nabla f, e_i\rangle \\
&= \|\nabla B\|^2 + \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2 - 2\frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2 + 2\frac{\lambda_1}{n}Ric(\nabla f, \nabla f) \\
&- 2\frac{\lambda_1}{n}Ric(\nabla f, \nabla f) = \|\nabla B\|^2 - \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2.
\end{aligned}$$

Desde que $\|\nabla C\|^2 \geq 0$, conluimos que

$$\|\nabla B\|^2 \geq \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2,$$

o que finaliza a prova do lema. □

Capítulo 4

RESULTADOS PRINCIPAIS

Vamos começar esta seção com o principal resultado que servirá para demonstrar os teoremas principais.

4.1 Lema Principal

Lema 4.1. *Se k_0 é o ínfimo das curvaturas seccionais de uma hipersuperfície CMC compacta imersa M na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

$$\begin{aligned} c &+ \left(\int_M n\left\{(2(\lambda_1 - n) - k_0 n)\langle A\nabla f, \nabla f\rangle + 2\langle A^2\nabla f, A\nabla f\rangle\right\}\right) H \\ &+ \left(\int_M -2n^2\|A\nabla f\|^2\right) H^2 \leq 0 \end{aligned}$$

onde c é dado por

$$\begin{aligned} c &= \int_M \left\{\|\nabla B\|^2 - \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2\right\} - \frac{n-1}{n}\int_M (\lambda_1 - (1+k_0)n)(\lambda_1 - n)\|\nabla f\|^2 \\ &+ \int_M (n(nk_0 - (n-3)) - 2\lambda_1)\|A\nabla f\|^2. \end{aligned}$$

Em particular, se M for hipersuperfície mínima, então $c \leq 0$.

Demonstração. Defina uma função diferenciável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi = \frac{1}{2}\|B\|^2.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ for um referencial ortonormal local geodésico, segue pelas propriedades do tensor de curvatura R e pela propriedade (ii) do Lema 3.1 que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla\varphi, X\rangle &= X(\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X\langle Be_i, Be_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X Be_i, Be_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla B)(X, e_i), Be_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla B)(X, Be_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla B)(Be_i, X) + R(X, Be_i)\nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla B)(Be_i, X), e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle R(X, Be_i)\nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (\nabla B)(Be_i, e_i), X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle R(\nabla f, e_i)Be_i, X\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n}[(\nabla B)(Be_i, e_i) - R(\nabla f, e_i)Be_i], X\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Assim, o gradiente de φ, é dado por

$$
\nabla\varphi = \sum_{i=1}^{n}\left[(\nabla B)(Be_i, e_i) - R(\nabla f, e_i)Be_i\right].
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \sum_{i,k=1}^{n}\langle \nabla_{e_k}[(\nabla B)(Be_i, e_i) - R(\nabla f, e_i)Be_i], e_k\rangle \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} e_k(\langle (\nabla B)(Be_i, e_i), e_k\rangle - \langle R(\nabla f, e_i)Be_i, e_k\rangle) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} e_k(\langle (\nabla B)(Be_i, e_k), e_i\rangle - \langle R(Be_i, e_k)\nabla f, e_i\rangle) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} e_k\langle (\nabla B)(e_k, Be_i), e_i\rangle \\
&= \|\nabla B\|^2 + \sum_{i,k=1}^{n}\langle (\nabla^2 B)(e_k, e_k, e_i), Be_i\rangle.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando as propriedades (vi) e (vii) do Lema 3.1, temos que

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 B)(e_k, e_k, e_i) &= (\nabla^2 B)(e_k, e_i, e_k) + (\nabla_{e_k} R)(e_k, e_i)\nabla f + R(e_k, e_i)Be_k \\
&= (\nabla^2 B)(e_i, e_k, e_k) + R(e_k, e_i)Be_k - BR(e_k, e_i)e_k \\
&+ (\nabla_{e_k} R)(e_k, e_i)\nabla f + R(e_k, e_i)Be_k.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^{n}\langle(\nabla^2 B)(e_k,e_k,e_i),Be_i\rangle &= -\lambda_1\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla f,Be_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}Q(\nabla f),Be_i\rangle\\ &+ 2\sum_{i,k=1}^{n}\langle R(e_k,e_i)Be_k,Be_i\rangle\\ &+ \sum_{i,k=1}^{n}\langle(\nabla_{e_k}R)(e_k,e_i)\nabla f,Be_i\rangle\\ &- \sum_{i,k=1}^{n}\langle R(e_k,e_i)e_k,B^2e_i\rangle.\end{aligned}$$

Agora, usando os Lemas 3.2 e 3.5, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_M\Delta\varphi &= \int_M\left\{\|\nabla B\|^2-\lambda_1\|B\|^2+(n-1)\|B\|^2-\lambda_1\|A\nabla f\|^2\right\}\\ &+ \int_M\left\{(n-1)\|A\nabla f\|^2-\|A^2\nabla f\|^2-\frac{1}{2}\|R_{\nabla f}\|^2\right\}\\ &+ \int_M\left\{\sum_{i,k=1}^{n}\langle R(e_k,e_i)Be_k,Be_i\rangle-\sum_{i,k=1}^{n}\langle R(e_k,e_i)e_k,B^2e_i\rangle\right\}\\ &+ \left(\int_M n\left\{(\lambda_1-(n-1))\langle A\nabla f,\nabla f\rangle+2\langle A^2\nabla f,A\nabla f\rangle\right\}\right)H\\ &+ \left(\int_M -n^2\|A\nabla f\|^2\right)H^2=0.\end{aligned}$$

Por outro lado, escolhendo um referencial ortonormal local que diagonaliza o operador B, com $Be_i=a_ie_i$, temos

$$\sum_{i,k=1}^{n}\langle R(e_k,e_i)Be_k,Be_i\rangle-\sum_{i,k=1}^{n}\langle R(e_k,e_i)e_k,B^2e_i\rangle=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(a_i-a_k)^2K_{ik},$$

onde K_{ik} é a curvatura seccional da seção plana gerada pelos vetores $\{e_i,e_k\}$, $i\neq k, i,k=1,\ldots,n$. Usando isto juntamente com o Lema 2.6, obtemos que

$$\begin{aligned}0 &= \int_M\left\{\|\nabla B\|^2-\lambda_1\|B\|^2+(n-1)\|B\|^2-\lambda_1\|A\nabla f\|^2\right\}\\ &+ \int_M\left\{(n-1)\|A\nabla f\|^2-(n-1)\|\nabla f\|^2+(2-\|A\|^2)\|A\nabla f\|^2\right\}\\ &+ \int_M\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(a_i-a_k)^2K_{ik}\right\}\\ &+ \left(\int_M n\left\{(\lambda_1-(n-1)-2)\langle A\nabla f,\nabla f\rangle+2\langle A^2\nabla f,A\nabla f\rangle\right\}\right)H\\ &+ \left(\int_M -n^2\|A\nabla f\|^2\right)H^2.\end{aligned}$$

Como k_0 é o ínfimo das curvaturas seccionais da hipersuperfície M, teremos $\sum_{i,k=1}^{n}(a_i-a_k)^2K_{ik} \geq \sum_{i,k=1}^{n}(a_i-a_k)^2k_0$. Usando esta desigualdade e o Lema 3.3, teremos

$$\begin{aligned}
0 \ \geq\ & \int_M \left\{\|\nabla B\|^2 - \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2\right\} + \left(\frac{\lambda_1^2}{n} - \lambda_1 k_0 - (n-1)\right)\|\nabla f\|^2 \\
+\ & \int_M \left((k_0 n + n - 1 - \lambda_1)\|B\|^2 + (n-1-\lambda_1+2-\|A\|^2)\,\|A\nabla f\|^2\right) \\
+\ & \left(\int_M n\left\{(\lambda_1-(n+1))\langle A\nabla f, \nabla f\rangle + 2\langle A^2\nabla f, A\nabla f\rangle\right\}\right) H \\
+\ & \left(\int_M -n^2\|A\nabla f\|^2\right) H^2.
\end{aligned}$$

Assim, pela equação (3.2) e o Lema 3.4, deduzimos que

$$\begin{aligned}
0 \ \geq\ & \int_M \left\{\|\nabla B\|^2 - \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2\right\} \\
+\ & \int_M \left\{\frac{\lambda_1^2}{n} - \lambda_1 k_0 - (n-1) + (k_0 n + n - 1 - \lambda_1)(\lambda_1 - (n-1))\right\}\|\nabla f\|^2 \\
+\ & \int_M (k_0 n + 2(n-\lambda_1) - \|A\|^2)\|A\nabla f\|^2 \\
+\ & \left(\int_M n\left\{(2(\lambda_1-n) - k_0 n)\langle A\nabla f, \nabla f\rangle + 2\langle A^2\nabla f, A\nabla f\rangle\right\}\right) H \\
+\ & \left(\int_M -n^2\|A\nabla f\|^2\right) H^2.
\end{aligned}$$

Agora simplificando a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
0 \ \geq\ & \int_M \left\{|\nabla B\|^2 - \frac{\lambda_1^2}{n}\|\nabla f\|^2\right\} - \frac{n-1}{n}\int_M (\lambda_1 - (1+k_0)n)(\lambda_1 - n)\|\nabla f\|^2 \\
+\ & \int_M (k_0 n + 2(n-\lambda_1) - \|A\|^2)\|A\nabla f\|^2 \\
+\ & \left(\int_M n\left\{(2(\lambda_1-n) - k_0 n)\langle A\nabla f, \nabla f\rangle + 2\langle A^2\nabla f, A\nabla f\rangle\right\}\right) H \\
+\ & \left(\int_M -n^2\|A\nabla f\|^2\right) H^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$S = \sum_{i,k=1}^{n} K_{ik} \geq \sum_{i,k=1}^{n} k_0 = n(n-1)k_0,$$

então

$$S = n(n-1) + n^2H^2 - \|A\|^2 \geq n(n-1)k_0.$$

Logo

$$(n^2H^2 - \|A\|^2)\|A\nabla f\|^2 \geq n(n-1)(k_0-1)\|A\nabla f\|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c \quad &+ \quad \left(\int_M n\left\{(2(\lambda_1 - n) - k_0 n)\langle A\nabla f, \nabla f\rangle + 2\langle A^2\nabla f, A\nabla f\rangle\right\}\right) H \\ &+ \quad \left(\int_M -2n^2\|A\nabla f\|^2\right) H^2 \leq 0, \end{aligned}$$

como queriamos demonstrar. □

4.2 Teoremas Principais

Finalizamos este trabalho provando os teoremas principais.

Teorema 4.1. *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, então o primeiro autovalor não nulo λ_1 do operador Laplaciano satisfaz uma das seguintes condições*

(i) $\lambda_1 = n$, *(ii)* $\lambda_1 \leq (1+k_0)n$, *(iii)* $\lambda_1 \geq n + \frac{n}{2}(nk_0 - (n-1))$

onde k_0 é o ínfimo das curvaturas seccionais de M.

Demonstração. Se M é totalmente geodésica, então $M = \mathbb{S}^n$. Logo segue que $\lambda_1 = n$. Portanto, no restante da demonstração vamos assumir que M não é totalmente geodésica. Observe que a primeira integral do número c é não negativa em vista do Lema 3.7. Assim, temos as seguintes possibilidades

(i) $(\lambda_1 - (1+k_0)n)(\lambda_1 - n) \geq 0$ **(ii)** $n(nk_0 - (n-3)) - 2\lambda_1 \leq 0.$

Assim, para o caso (i), temos que se $\lambda_1 \geq (1+k_0)n$, então $\lambda_1 \geq n$. Mas pelo teorema de Takahashi, $\lambda_1 \leq n$, logo $\lambda_1 = n$. Então, neste caso $\lambda_1 = n$ ou $\lambda_1 \leq (1+k_0)n$. Para o caso (ii) temos que

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{2}(nk_0 - (n-3)) = n + \frac{n}{2}(nk_0 - (n-1))$$

e isto prova o Teorema 4.1. □

Teorema 4.2. *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Se o primeiro autovalor não nulo do operador Laplaciano $\lambda_1 = n$, então M é isométrica a esfera unitária S^n ou $k_0 < n^{-1}(n-1)$.*

Demonstração. Por hipótese, se $\lambda_1 = n$, então pelo Lema 4.1 obtemos que

$$\int_M \left\{\|\nabla B\|^2 - n\|\nabla f\|^2\right\} + n\int_M (nk_0 - (n-1))\|A\nabla f\|^2 \leq 0,$$

assim temos duas possibilidades, $nk_0 < (n-1)$ ou $nk_0 \geq (n-1)$. Supondo $nk_0 \geq (n-1)$

$$0 \leq \int_M \left\{\|\nabla B\|^2 - n\|\nabla f\|^2\right\} + n\int_M (nk_0 - (n-1))\|A\nabla f\|^2 \leq 0.$$

Logo,

$$\|\nabla B\|^2 = n\|\nabla f\|^2.$$

Afirmamos que $A\nabla f = 0$. De fato, como temos $\|\nabla B\|^2 = n\|\nabla f\|^2$, temos pelo Lema 3.7 que $\nabla C = 0$. Então pela equação (3.7), teremos

$$(\nabla B)(X,Y) = -X(f)Y, \quad \text{para} \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\nabla B)(e_i,e_i) &= \sum_{i=1}^n -e_i(f)e_i \\ &= \sum_{i=1}^n -\langle \nabla f, e_i\rangle e_i \\ &= -n\nabla f + Q(\nabla f). \end{aligned}$$

Daí, $-\nabla f = -n\nabla f + Q(\nabla f)$ e isto implica $Q(\nabla f) = (n-1)\nabla f$. Logo $A^2\nabla f = 0$. Então $\langle A^2\nabla f, \nabla f\rangle = 0$, o que implica $\|A\nabla f\|^2 = 0$. Portanto $A\nabla f = 0$. Assim,

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = (n-1)\|\nabla f\|^2.$$

Agora, usando o Lema 3.4 com $\lambda_1 = n$, obtemos que

$$\int_M \left\{\|B\|^2 - \|\nabla f\|^2\right\} = 0.$$

Como

$$\int_M \|\nabla f\|^2 = n \int_M f^2$$

temos

$$\int_M \left\{ \|B\|^2 - nf^2 \right\} = 0.$$

Ora, mas pelo Lema 3.3, $\|B\|^2 \geq nf^2$, assim $\|B\|^2 = nf^2$ se, e somente se, $B = -fI$. Portanto, teremos $BX = -fX$ o que nos dá a equação diferencial de Obata, (veja [10]) $\nabla_X \nabla f = -fX$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e consequentemente M é isométrca a esfera $\mathbb{S}^n$. Portanto concluimos que $k_0 \ < n^{-1}(n-1)$ ou então M é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$. Portanto, concluimos a prova do Teorema 4.2. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] BARROS, A. A.; BESSA, G. Pacelli; Estimates of the first eigenvalue of minimal hypersurfaces of $\mathbb{S}^{n+1}$. Matemática contemporânea, Rio de Janeiro, v.17, p. 42-47, 1999.

[2] CAMINHA, A.; Notas de Geometria Diferencial 2010.

[3] CARMO, M.P. do; Geometria Riemanniana. Rio de Janeiro, projeto Euclides, IMPA: 2008.

[4] CHAVEL, I.; Eingevalues in Riemannian Geometry. Orlando, FL Academic Press: 1984.

[5] CHOI,H.I., WANG, A.N.; A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. J. Differen. Geom. v. 18, p. 559-562 1983.

[6] DESHMUKH, S., AL-EID, A.; Curvature bounds for the spectrum of a compact Riemannian manifold of constant scalar curvature. J. Geom. Anal,v. 15 n.4, p. 589-606, 2005.

[7] DESHMUKH, S.; Minimal hypersurfaces in Kaehler 6-Sphere. J. Geom. Phy. v. 60, p. 623-625, 2010.

[8] GALLOT, S.; Hulin, D.; Lafontaine, J.; Riemannian geometry. Berlin: Springer Verlag, 1990.

[9] LEE, J.M.; Introduction to smooth manifolds. New York: Springer-Verlag, 2002.

[10] OBATA, M.; Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. J. Math. Soc. Jpn. v. 14, p. 333-340, 1962.

[11] SIMONS, J.; Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann. Math, v. 88, p. 62-105 1968.

[12] TANNO, S.; Eigenvalues of the Laplacian of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. v. 25, p. 391-403 1973.

[13] TAKAHASHI, T. Minimal immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan, p. 383-384 1966.

[14] YAU, S.T.; Problem Section on Differential Geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ: 1982.