UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rondinelle Marcolino Batista

RIGIDEZ DE SOLITONS GRADIENTE

Fortaleza
2013

Rondinelle Marcolino Batista

RIGIDEZ DE SOLITONS GRADIENTE

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

Fortaleza
2013

B337r Batista, Rondinelle Marcolino

Rigidez de solitons gradiente / Rondinelle Marcolino Batista. − 2013.

70f.: enc.; 31cm.

Dissertação(mestrado) − Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2013.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Geometria Diferencial. 2. Variedades Riemanniana. I. Título.

CDD 516.36

A minha linda filha Maria Sofia Soares Marcolino, a minha esposa Tatianne Soares da Silva Marcolino e a minha mãe Raimunda dos Santos Marcolino.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus e a minha mãe Raimunda pelo incondicional amor, apoio, dedicação, enfim obrigado por tudo.

A minha filha lindona Maria Sofia e a minha esposa Tatianne, pelo amor e apoio.

A todos os meus familiares em especial, meu avô Joaquim Marcolino, meu tio Raimundo Marcolino e meu primo Jefferson Marcolino.

Agradeço também ao professor Abdênago Alves de Barros, pela orientação, pelas palavras de incetivo e paciência com minhas dificuldades em geral.

Agradeço ao professor Jorge Herbert Soares de Lira por ter aceito o convite para participar da banca examinadora de minha dissertação.

Também agradeço aos amigos da pós-graduação em matemática da UFC, Leon, Deibson, Felipe, João, Edinardo, Thadeu, Tiarlos, João Vitor, Chaves, Raimundo Bastos, José Ederson, Damião, Nazareno, Flávio, Cícero, Isaias.

Agradeço ainda a Alexsandro, Daniel Silva, Halyson, Manoel pela amizade. A Kelton Silva, Tiago Veras, Antonio Wilson e Ernani Junior pela amizade e ajuda que foi imprescidível para mim durante todo o curso de mestrado.

Em especial gostaria de agradecer a meus amigos Jafran Lima, Lucas Brito, Eugênio de Sousa e Kelson Carvalho. Aos professores Aldir Brasil, Charles Escórcio, pelo apoio a mim conferido quando fui aluno destes, agradecer também aos professores Ayrton Vasconcelos, Ezequias Matos pela amizade e apoio durante e após ser seu aluno. Enfim agradeço o professor Paulo Alexandre por mim orientar e mim encaminhar ao mestrado, mais principalmente pelo apoio, incetivo e amizade.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Nosso objetivo nesse trabalho é apresentar um teorema que caracteriza os solitons gradiente rígidos para caso não compacto. Como aplicação provaremos que os solitons gradiente homogêneos são rígidos e apresentaremos um exemplo de soliton de Ricci que não pode ser gradiente.

Palavras-chaves: Variedades completas, curvatura escalar constante, solitons de Ricci, variedades de Einstein.

Abstract

Our goal in this work is to present a theorem which characterizes the gradient solitons rigid for non-compact case. As an application we prove that the homogeneous gradient solitons are rigid and provide an example of the Ricci soliton can not be gradient.

Keywords: Complete manifold, constant scalar curvature, Ricci soliton, Einstein manifold.

Sumário

Introdução

Tem sido tema corrente entre os matemáticos o estudo dos solitons de Ricci. Em particular, solitons de Ricci gradiente, G. Perelman em [15] provou que todo soliton de Ricci compacto é um soliton gradiente.

O objetivo desse trabalho é determinar quando solitons gradientes são rígidos. Em [6] os autores mostram que solitons gradientes compactos são rígidos quando sua curvatura escalar é constante. Além disso em dimensões 2 e 3 R. Hamilton em [7] e T. Ivey em [8] mostraram respectivamente, que todos os solitons gradiente compacto são rígidos. Em [9] N. Koiso construiu um exemplo de soliton gradiente compacto contrátil em dimensão 4 que não tem curvatura escalar constante, isto é, não rígido. Também em [8] T.Ivey mostra que em qualquer dimensão solitons gradientes compactos estáveis ou expansivos são rígidos. No caso não compacto G. Perelman em [16] mostrou que em dimensão 3 todo soliton gradiente contrátil com curvatura seccional não-negativa são rígidos. Em dimensões maiores, é menos claro detectar rigidez. Na verdade, existem solitons de Ricci expansivos com curvatura escalar constante, que não são rígidos (veja [10]). Isto mostra que alguma outra hipótese é necessário, em geral, para provar rigidez.

Neste trabalho provaremos o seguinte teorema de caracterização de rigidez devido a P. Petersen e W. Wylie em [18].

Teorema 0.1. *Um soliton gradiente é rígido se, e somente se, possui curvatura escalar constante e é radialmente plano.*

Como aplicação provaremos o seguinte resultado devido a P. Petersen e W. Wylie em [17].

Teorema 0.2. *Todo soliton gradiente homogêneo é rígido.*

E exibiremos um exemplo de soliton de Ricci não gradiente devido a Di Cerbo em [5].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Alguns conceitos sobre tensores

A estrutura de produto interno sobre os espaços tangentes a uma variedade Riemanniana torna possível visualizar tensores de diferentes maneiras. Veremos isso com o tensor Hessiano e o tensor de Ricci. Mas a observação fundamental é que uma aplicação bilinear pode ser interpretada como uma aplicação linear quando se tem uma estrutura de produto interno, como ensina o lema

Lema 1.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Existe um isomorfismo entre o espaço dos $(l+1,k)-$tensor $T_k^{l+1}(V)$ e o espaço das aplicações multilineares*

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V.$$

Demonstração. Denotando por $\mathcal{A}(V)$ o espaço vetorial das aplicações multilineares

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V.$$

Definindo $\Phi : \mathcal{A} \to T_k^{l+1}(V)$ que associa cada $A \in \mathcal{A}(V)$ ao $(l+1,k)-$tensor

$$\Phi A\,(\omega, \omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k) = \omega(A(\omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k)).$$

É fácil ver que esta aplicação é linear, note também que Φ é injetiva, pois dados $\omega, \omega_1, \ldots,$ $\omega_l \in V^*$ e $X_1, \ldots, X_k \in V$ quaisquer, se

$$\Phi A\,(\omega, \omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k) = 0$$

então

$$\omega(A(\omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k)) = 0.$$

Como os vetores e covetores são arbitrários, segue que

$$A(\omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k) = 0,$$

donde $A = 0$. Além disso, $\dim\mathcal{A} = \dim \mathrm{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{l+1}}(\mathrm{V})$, logo Φ é o isomorfismo procurado. $\square$

Assim, em todo este trabalho sempre que falarmos $(l+1,k)-$tensor, iremos trabalhar com este na forma de uma aplicação multilinear como vimos no lema anterior. Além disso, em todo o texto usaremos a convenção de Einstein para soma, que consiste em omitir o sinal do somatório quando temos índices cruzados repetidos, por exemplo

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j E_j$$

é equivalente a $y_i = x_i^j E_j$.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana, dado um $(s,t)-$tensor T em M podemos tornar T um $(s-k, t+k)-$tensor para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s-k$ e $t+k$ sejam não negativos. Abstratamente, isto é feito da seguinte forma. Sobre uma variedade Riemanniana (M, g) existe um isomorfismo natural entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}^*(M)$; este isomorfismo é dado pela aplicação que associa cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ a aplicação linear $(W \mapsto g(X, W)) \in \mathfrak{X}^*(M)$. Usando este isomorfismo, podemos substituir $\mathfrak{X}(M)$ por $\mathfrak{X}^*(M)$ ou vice-versa, e assim mudar o tipo de tensor.

Vejamos como mudar o tipo de um tensor. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial em $\mathfrak{X}(M)$ e $\{\sigma^1, \ldots, \sigma^n\} \subset \mathfrak{X}^*(M)$ sua base dual, isto é, $\sigma^i(E_j) = \delta_j^i$. Os vetores e os covetores podem ser escritos como

$$\begin{aligned} v &= v^i E_i = \sigma^i(v) E_i, \\ \omega &= \alpha_j \sigma^j = \omega(E_j)\sigma^j. \end{aligned}$$

O tensor T pode agora ser escrito como

$$T = T_{j_1 \cdots j_t}^{i_1 \cdots i_s} \sigma^{j_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{j_t} \otimes E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_s},$$

onde $T_{j_1 \cdots j_t}^{i_1 \cdots i_s} = T(\sigma^{i_1}, \cdots, \sigma^{i_s}, E_{j_1}, \cdots, E_{j_t})$.

Agora vejamos como podemos mudar E_i num covetor e σ^j em um vetor. Lembre que o dual de E_i é o covetor $w \mapsto g(E_i, w)$, que pode ser escrito como

$$g(E_i, w) = g(E_i, E_j)\sigma^j(w) = g_{ij}\sigma^j(w).$$

Por outro lado, temos que encontrar o vetor v correspondente ao covetor σ^j. A propriedade que o define é

$$g(v, w) = \sigma^j(w).$$

Assim, temos

$$g(v, E_i) = \delta_i^j.$$

Escrevendo $v = v^k E_k$, temos que

$$g_{ki}v^k = \delta_i^j.$$

Sendo (g^{ij}) a inversa de (g_{ij}), temos portanto

$$v = v^i E_i = g^{ij} E_i.$$

Assim,

$$E_i \to g_{ij}\sigma^j,$$

$$\sigma^j \to g^{ij} E_i.$$

Para exemplificar, provemos que na forma de $(1,1)-$tensor, o tensor métrico g é igual a aplicação identidade $I : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Com efeito, escrevendo o tensor g na forma de $(1,1)-$tensor

$$g(E_i) = g_i^j E_j,$$

e

$$g = g_j^i E_i \otimes \sigma^j.$$

Assim na forma de $(0,2)-$tensor teremos

$$g = g_{kj}\sigma^k \otimes \sigma^j = g_j^i g_{ik}\sigma^k \otimes \sigma^j,$$

e na forma de $(2,0)-$tensor temos que

$$g = g^{ik} E_i \otimes E_k = g_j^i g^{kj} E_i \otimes E_k,$$

assim

$$\begin{aligned} g^i_j g_{ik} &= g_{kj} \\ g^i_j g^{kj} &= g^{ik}, \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} g^i_j g_{ik} g^i_j g^{kj} &= g_{kj} g^{ik} \\ g^i_j \delta^j_i g^i_j &= \delta^i_j \\ g^i_j &= \delta^i_j, \end{aligned}$$

implicando que $g^i_j = 0$ se $i \neq j$ e $g^j_j = 1$. Logo $g(E_i) = E_i$.

Definição 1.2. *Sejam V um espaço com produto interno e $L : V \to V$ um $(1,1)-$tensor, definimos a norma do tensor L por*

$$|L| = \sqrt{\mathrm{tr}\,(L^* \circ L)} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(L \circ L^*)},$$

onde $L^* : V \to V$ é a adjunta de L.

Note que, se V tem dimensão finita n e $L : V \to V$ é auto-adjunto então existe uma base de autovetores tais que $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ são seus autovalores contados com suas respectivas multiplicidades, donde $|L| = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$.

1.2 Operadores diferenciais e curvaturas

Em tudo o que segue (M, g) denotará uma variedade Riemannnina n-dimensional com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.3. *Definamos a **derivada covariante** de um $(1,r)-$tensor S, como sendo o $(1,r+1)-$tensor $\nabla S : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} \nabla S(X, Y_1, .., Y_r) &= (\nabla_X S)(Y_1, \ldots, Y_r) \\ &= \nabla_X (S(Y_1, \ldots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} S(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r). \end{aligned}$$

Dizemos que um tensor S é **paralelo** se $\nabla S = 0$. Observe que uma métrica Riemanniana g é um tensor paralelo, pois

$$(\nabla g)(X, Y_1, Y_2) = \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0,$$

para quaisquer $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.4. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **gradiente** de f é o campo diferenciável ∇f, definido sobre M por*

$$g(\nabla f, X) = D_X f = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.5. *Sejam $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então*

(1) $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$.

(2) $\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$.

Demonstração. Basta ver que, sendo X um campo diferenciável sobre M, temos

$$\begin{aligned} g(\nabla(f+h), X) &= D_X(f+h) = D_X f + D_X h \\ &= g(\nabla f, X) + g(\nabla h, X) \\ &= g(\nabla f + \nabla h, X) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\nabla(fh), X) &= D_X(fh) = hD_X f + fD_X h \\ &= g(h\nabla f, X) + g(f\nabla h, X) \\ &= g(h\nabla f + f\nabla h, X). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.6. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$g(\nabla f, v)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.1}$$

Em particular, se p é um ponto de máximo ou de mínimo local para f, então $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Para a primeira parte basta observar que, sendo X uma extensão local de γ', temos

$$g(\nabla f, v)(p) = D_X f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Suponha agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ uma vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$. Se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é como no enunciado da proposição, então $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$g(\nabla f, v)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Como a igualdade anterior é válida para todo $v \in T_pM$, então $\nabla f(p) = 0$. □

Corolário 1.7. *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f. \tag{1.2}$$

Demonstração. Se $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned} g(\nabla(\phi \circ f), v) &= \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= (\phi' \circ f)g(\nabla f, v)(p). \end{aligned}$$

□

Definição 1.8. *Dada uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, dizemos que $p \in M$ é* ***um ponto crítico*** *de f se $\nabla f(p) = 0$. Em particular, segue da Proposição 1.6 que todo ponto de máximo ou de mínimo local de f é um ponto crítico de f.*

Corolário 1.9. *Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.*

Demonstração. Fixe $p \in M$ e seja $A = \{q \in M; f(q) = f(p)\}$. A continuidade de f garante que A é fechado em M. Como $A \neq \emptyset$ (pois $p \in M$), se mostrarmos que A é aberto em M seguirá da conexidade de M que $A = M$, isto é, f será constante. Seja então $q \in A$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada conexa de q. Para todo $q' \in U$, existe uma curva diferenciável $\gamma : [0, 1] \to U$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = q'$. Segue da Proposição 1.6 que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = g\Big(\nabla f, \frac{d\gamma}{dt}\Big)(\gamma(t)) = 0,$$

e daí a função $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)$ é constante em $[0,1]$. Em particular,

$$f(p) = f(q) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(q'),$$

donde $q' \in A$. Sendo $q' \in U$ arbitrário, concluímos que $U \subset A$, ou seja, A é aberto em M. $\square$

Proposição 1.10. *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenadas $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\nabla f = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Em particular,

$$|\nabla f|^2 = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Demonstração. Se $\nabla f = a^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x^l} = g\Big(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big) = a^j g\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big),$$

de maneira que

$$g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} = a^j g^{kl} g_{jl} = a^j \delta_{kj} = a^k.$$

Para o que falta, temos

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= g\Big(g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}, g^{mj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^m}\Big) \\ &= g^{kl} g^{mj} g_{km} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= g^{kl} \delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.11. *Seja X um campo vetorial diferenciável em M. A* ***divergência*** *de X é uma função diferenciável* $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$, *dada para $p \in M$ por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{1.3}$$

onde $v \in T_pM$ e tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

De maneira similar a definição anterior, podemos definir a divergência de um $(1,r)-$ten-

sor S como sendo o $(0,r)-$tensor

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} S)(v_1,\ldots,v_r) &= \operatorname{tr}\{w \mapsto (\nabla_w S)(v_1,\ldots,v_r)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} g\Big((\nabla_{e_i} S)(v_1,\ldots,v_r), e_i\Big), \end{aligned}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Lembre que um referencial ortonormal $\{E_1,\ldots,E_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ para todo $1 \leq i,j \leq n$. Para a construção de um referencial geodésico em uma vizinhança de p, veja Capítulo 3 de [4].

Definição 1.12. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* ***Laplaciano*** *de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{1.4}$$

Definição 1.13. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* ***Hessiano*** *de f é o campo de operadores lineares $(\operatorname{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por*

$$(\operatorname{Hess} f)_p\,(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue da definição da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de $p \in M$, então

$$(\operatorname{Hess} f)_p\,(X) = \nabla_X \nabla f.$$

Proposição 1.14. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $p \in M$, então $(\operatorname{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Se $v, w \in T_pM$ e V, W denotam respectivamente extensões de v, w a campos definidos em uma vizinhança de $p \in M$, então

$$\begin{aligned} g((\operatorname{Hess} f)_p(v), w)(p) &= g(\nabla_V \nabla f, W)(p) \\ &= D_V g(\nabla f, W)(p) - g(\nabla f, \nabla_V W)(p) \\ &= (D_V(D_W f))(p) - g(\nabla f, \nabla_W V + [V,W])(p) \\ &= (D_W(D_V f))(p) + (D_{[V,W]} f)(p) \\ &\quad - g(\nabla f, \nabla_W V)(p) - g(\nabla f, [V,W])(p) \\ &= (D_W(D_V f))(p) - g(\nabla f, \nabla_W V)(p) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= D_W g(\nabla f, V)(p) - g(\nabla f, \nabla_W V)(p)\\
&= g(\nabla_W \nabla f, V)(p)\\
&= g((\mathrm{Hess}\, f)_p(w), v)(p).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 1.15. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\Delta f = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}\, f). \tag{1.5}$$

Demonstração. É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$. Para tanto, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}\, f)_p &= \sum_{i=1}^{n} g((\mathrm{Hess}\, f)_p(e_i), e_i)(p) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i)(p)\\
&= \mathrm{div}\,(\nabla f)(p) = \Delta f(p).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 1.16. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.*

(a) Se $p \in M$ é ponto crítico de f, $v \in T_pM$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$, então

$$(\mathrm{Hess}\, f)_p(v, v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.6}$$

(b) Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma geodésica de M, então

$$(\mathrm{Hess}\, f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t). \tag{1.7}$$

Demonstração. Façamos a prova de (a), sendo a prova de (b) análoga. Basta ver que

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}\, f)_p(v, v) &= g(\nabla_{\frac{dc}{dt}} \nabla f, c')(p)\\
&= \frac{d}{dt} g(\nabla f, c')\Big|_{t=0} - g\Big(\nabla f, \frac{Dc'}{dt}\Big)(p)\\
&= \frac{d}{dt} g\Big(\nabla f, \frac{dc}{dt}\Big)\Big|_{t=0}\\
&= \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Agora observe que podemos definir o *Hessiano* como o $(1,1)-$tensor $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ dado por $\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f$, a Proposição 1.14 sugere uma definição na forma de um $(0,2)-$tensor simétrico $\mathrm{Hess}\, f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$, tal que

$$g(\nabla^2 f(X), Y) = g(\nabla^2 f(Y), X).$$

Diremos que $\nabla^2 f \geq k (\leq k)$, se todos os seus autovalores forem $\geq k(\leq k)$.

Definição 1.17. *Uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é dita* ***convexa****, se para cada geodésica $\gamma : [a,b] \to M$ a função $(f \circ \gamma)$ for convexa, isto é*

$$f(\gamma(s)) \leq \frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b-a}(s-a) + f(\gamma(a)),$$

ou equivalentemente

$$f(\gamma(s)) \leq \frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b-a}(s-b) + f(\gamma(b))$$

para todo $s \in [a,b]$.

Lema 1.18. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então $\nabla^2 f \geq 0$ se, e somente se, f é convexa.*

Demonstração. Se $\nabla^2 f \geq 0$, então para uma geodésica qualquer $\gamma : [0,1] \to M$ temos

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t) = (\mathrm{Hess}\, f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq 0,$$

para todo $t \in [0,1]$. Então, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, quaisquer que sejam $t, t+h \in [0,1]$, existe c entre t e $t+h$, com

$$(f \circ \gamma)(t+h) = (f \circ \gamma)(t) + (f \circ \gamma)'(t)h + \frac{(f \circ \gamma)''(c)}{2}h^2.$$

Como $(f \circ \gamma)''(c) \geq 0$, temos $(f \circ \gamma)(t+h) \geq (f \circ \gamma)(t) + (f \circ \gamma)'(t)h$. Logo

$$\frac{(f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t)}{h} \leq (f \circ \gamma)'(t),$$

se $h < 0$, e

$$\frac{(f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t)}{h} \geq (f \circ \gamma)'(t),$$

quando $h > 0$. Equivalentemente: se $0 < s < 1$, então

$$\frac{(f \circ \gamma)(s) - (f \circ \gamma)(0)}{s} \leq \frac{(f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(s)}{1-s},$$

e

$$\begin{aligned}(1-s)((f\circ\gamma)(s)-(f\circ\gamma)(0)) &\leq s(f\circ\gamma)(1)-s(f\circ\gamma)(s)\\ (f\circ\gamma)(s) &\leq (1-s)(f\circ\gamma)(0)+s(f\circ\gamma)(1).\end{aligned}$$

Portanto, f é convexa.

Reciprocamente, seja $\gamma:[r,t]\to M$ uma geodésica qualquer. Se f é convexa então, para quaisquer $s,a,b\in\mathbb{R}$ tais que, $s\in(a,b)\subset[r,t]$, temos

$$\frac{(f\circ\gamma)(s)-(f\circ\gamma)(a)}{s-a}\leq\frac{(f\circ\gamma)(b)-(f\circ\gamma)(a)}{b-a}\leq\frac{(f\circ\gamma)(s)-(f\circ\gamma)(b)}{s-b},$$

fazendo $s\to a$ na primeira desigualdade e $s\to b$ na segunda, obtemos

$$(f\circ\gamma)'(a)\leq(f\circ\gamma)'(b).$$

Logo $(f\circ\gamma)'(s)$ é não-decrescente em $[r,t]$, donde $(f\circ\gamma)''(s)\geq 0$ para todo $[r,s]$, mas já sabemos que

$$(f\circ\gamma)''(s)=\operatorname{Hess}f_{\gamma(s)}(\gamma',\gamma'),$$

assim provando o lema. □

Lema 1.19. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana completa e $f:M\to\mathbb{R}$ uma função convexa. Se $p\in M$ é um ponto crítico de f, então p é um mínimo global de f.*

Demonstração. Suponha que $p\in M$ é um ponto crítico de f, isto é, $\nabla f(p)=0$. Dado qualquer $q\in M$, seja $\gamma:[0,1]\to M$ geodésica tal que $\gamma(0)=p$ e $\gamma(1)=q$ (tal geodésica existe, pois M é completa), como f é convexa, então pelo lema anterior

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t)=(\operatorname{Hess}f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))\geq 0.$$

Integrando e usando o teorema fundamental do cálculo obtemos

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)-\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0)\geq 0.$$

Como

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0)=g(\nabla f(p),\gamma'(0))=0,$$

integrando novamente temos

$$(f\circ\gamma)(t)\geq(f\circ\gamma)(0),$$

para todo $t\in[0,1]$. Consequentemente $f(q)\geq f(p)$. □

Definição 1.20. *Seja (M,g) uma variedade Riemannina. O* ***tensor curvatura de Riemann*** *é o $(1,3)-$tensor $\mathrm{Rm}:\mathfrak{X}(M)^3\to\mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned}\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z-\nabla^2_{Y,Z}Z\\ &= \nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z,\end{aligned}$$

para todo $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$.

Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor Rm como um $(0,4)-$tensor, definido por $\mathrm{Rm}:\mathfrak{X}(M)^4\to\mathcal{C}^\infty(M)$

$$\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W)=g(\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z,W).$$

Proposição 1.21. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(1) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W)=-\mathrm{Rm}\,(Y,X,Z,W)=\mathrm{Rm}\,(Y,X,W,Z)$.

(2) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W)=\mathrm{Rm}\,(Z,W,X,Y)$.

(3) *Primeira identidade de Bianchi*

$$\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z+\mathrm{Rm}\,(Y,Z)X+\mathrm{Rm}\,(Z,X)Y=0.$$

(4) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_Z\mathrm{Rm})(X,Y,W)+(\nabla_X\mathrm{Rm})(Y,Z,W)+(\nabla_Y\mathrm{Rm})(Z,X,W)=0.$$

Para uma prova veja Capítulo 3 de [19].

Definição 1.22. *Seja $P\subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente. A* ***curvatura seccional*** *de P em p é dada por*

$$\sec\,(X,Y)=\frac{g(\mathrm{Rm}\,(X,Y)Y,X)}{|X|^2|Y|^2-g(X,Y)^2},$$

onde $X,Y\in P$ são dois vetores linearmente independentes de T_pM. Lembre que esta definição não depende da escolha dos vetores (veja Capítulo 4 de [4]).

Observe que, se $\{e_1,e_2\}$ é uma base ortonormal de P, então

$$\sec\,(e_1,e_2)=g(\mathrm{Rm}\,(e_1,e_2)e_2,e_1).$$

Definição 1.23. *O **tensor curvatura de Ricci*** $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *é o* $(0,2)-$*tensor obtido pelo "traço"do tensor curvatura de Riemann, isto é,*

$$\mathrm{Ric}\,(Y,Z) = \mathrm{tr}\,\{X \mapsto \mathrm{Rm}\,(X,Y)Z\},$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\mathrm{Ric}\,(v,w) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(e_i,v)w, e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(e_i,w)v, e_i).$$

Assim Ric é uma forma bilinear simétrica, donde também pode ser definido como o $(1,1)-$tensor simétrico

$$\mathrm{Ric}\,(v) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rm}\,(v,e_i)e_i.$$

Diremos que $\mathrm{Ric} \geq k (\leq k)$ se todos os autovalores de $\mathrm{Ric}\,(v)$ são $\geq k\ (\leq k)$. Se (M,g) satisfaz $\mathrm{Ric}\,(v) = kv$, ou equivalentemente, $\mathrm{Ric}\,(v,v) = kg(v,v)$, então (M,g) é dita uma **variedade de Einstein** com **constante de Einstein** k.

Definição 1.24. *A **curvatura escalar** de uma variedade é a função* $\mathrm{R} : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathrm{R} = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric} \\
&= \sum_{j=1}^{n} g(\mathrm{Ric}\,(e_j), e_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(e_i,e_j)e_j, e_i) \\
&= 2\sum_{i<j} g(\mathrm{Rm}\,(e_i,e_j)e_j, e_i) \\
&= 2\sum_{i<j} \sec\,(e_i,e_j).
\end{aligned}$$

Proposição 1.25. *(Segunda Identidade de Bianchi contraida)*

$$\mathrm{dR} = 2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}.$$

Demonstração. Dado um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança de $p \in M$ qualquer, $X \in \mathfrak{X}(M)$, usando a segunda identidade de Bianchi, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{dR}\,(X) &= D_X\mathrm{R} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_X\mathrm{Rm})(E_i,E_j,E_j,E_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_j}\mathrm{Rm})(E_i,X,E_j,E_i) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_i}\mathrm{Rm})(E_j,X,E_j,E_i) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_j}\mathrm{Rm})(E_i,X,E_j,E_i) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_j}\mathrm{Rm})(E_j,E_i,E_i,X) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_{E_j}(\mathrm{Rm}\,(E_j,E_i,E_i,X)) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\nabla_{E_j}g(\mathrm{Ric}\,(E_j),X) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}g((\nabla_{E_j}\mathrm{Ric})(X),E_j).
\end{aligned}$$

Usando a definição 1.11 concluimos que

$$\mathrm{dR}\,(X) = 2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}\,(X),$$

como queriamos provar. □

Definição 1.26. *Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}$, onde $U \subset (M,g)$ é aberto, é uma **função distância** se $|\nabla f| = 1$ sobre U.*

Provaremos agora as três equações fundamentais da geometria Riemanniana, onde a segunda e a terceira são conhecidas como, **equação de Gauss** e **equação de Codazzi-Mainardi**, respectivamente.

Teorema 1.27. *(Equação da Curvatura Radial) Se $U \subset (M,g)$ é um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função distância, então*

$$\nabla_N S + S^2 = -\mathrm{Rm}_N,$$

onde $N = \nabla f$, $S = \nabla^2 f$ *e* $\mathrm{Rm}_N = \mathrm{Rm}\,(\cdot, N)N$.

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{X}(U)$ qualquer, então

$$\begin{aligned}(\nabla_N S)(X) + S^2(X) &= \nabla_N(S(X)) - S(\nabla_N X) + S(S(X)) \\ &= \nabla_N \nabla_X N - \nabla_{\nabla_N X} N + \nabla_{\nabla_X N} N \\ &= \nabla_N \nabla_X N - \nabla_{[N,X]} N \\ &= -\mathrm{Rm}\,(X, N)N + \nabla_X \nabla_N N.\end{aligned}$$

Contudo, já que $|N| = 1$, então $\nabla_N N = 0$, pois para todo $Y \in \mathfrak{X}(U)$

$$\begin{aligned}g(\nabla_N N, Y) &= g(S(N), Y) \\ &= g(N, S(Y)) \\ &= g(N, \nabla_Y N) \\ &= \frac{1}{2} D_Y g(N, N) \\ &= \frac{1}{2} D_Y 1 = 0.\end{aligned}$$

□

Em particular, $\nabla_N N = S(N) = 0$ sobre U, isto é, as curvas integrais de N são geodésicas em U.

Teorema 1.28. *(Equação da Curvatura Tangencial)*

$$\begin{aligned}\tan \mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \mathrm{Rm}^r\,(X,Y)Z - \mathrm{II}(Y,Z)S(X) + \mathrm{II}(X,Z)S(Y) \\ &= \mathrm{Rm}^r\,(X,Y)Z - g(S(Y),Z)S(X) + g(S(X),Z)S(Y),\end{aligned}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U_r)$ *sendo* $U_r = f^{-1}(r)$ *e* Rm^r *é o tensor curvatura de Riemann de* (U_r, g_r), $\tan(W) = W - g(W,N)N$ *é a projeção de* W *sobre* TU_r, *e* $\mathrm{II}(U,V) = g(S(U),V)$.

Teorema 1.29. *(Equação da Curvatura Normal)*

$$\mathrm{nor}\,\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z = g(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X), Z)N,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U_r)$ *e* $\mathrm{nor}\,(W) = g(W,N)N$ *é projeção de* W *sobre* N.

Demonstração. As duas equações da curvatura acima, são obtidas calculando $\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z$. Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U_r)$, então

$$\begin{aligned}\nabla^r_X Y &= \tan(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X Y - g(\nabla_X Y, N)N,\end{aligned}$$

como $0 = g(Y,N)$, então $-g(\nabla_X Y, N) = g(Y, \nabla_X N)$ daí

$$\begin{aligned}
\nabla^r_X Y &= \nabla_X Y + g(S(X),Y)N \\
&= \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y)N.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X(\nabla^r_Y Z - g(S(Y),Z)N) - \nabla_Y(\nabla^r_X Z - g(S(X),Z)N) \\
&\quad -\nabla^r_{[X,Y]}Z + g(S([X,Y]),Y)N \\
&= \nabla_X\nabla^r_Y Z - \nabla_Y\nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]}Z \\
&\quad -\nabla_X(g(S(Y),Z)N) + \nabla_Y(g(S(X),Z)N) \\
&\quad +g(S([X,Y]),Z)N \\
&= \mathrm{Rm}^r\,(X,Y)Z \\
&\quad -g(S(X),\nabla^r_Y Z)N + g(S(Y),\nabla^r_X Z)N + g(S([X,Y]),Z)N \\
&\quad -g(\nabla_X S(Y),Z)N - g(S(Y),\nabla_X Z)N - g(S(Y),Z)\nabla_X N \\
&\quad +g(\nabla_Y S(X),Z)N + g(S(X),\nabla_Y Z)N + g(S(X),Z)\nabla_Y N,
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
g(S(X),\nabla_Y Z) &= g(S(X),\nabla^r_Y Z) + g(\nabla_Y Z, N)g(S(X),N) \\
&= g(S(X),\nabla^r_Y Z) - g(S(Y),Z)g(S(X),N). \\
g(S(Y),\nabla_X Z) &= g(S(Y),\nabla^r_X Z) + g(\nabla_X Z, N)g(S(Y),N) \\
&= g(S(Y),\nabla^r_X Z) - g(S(X),Z)g(S(Y),N),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g(S(X),N) &= g(X,S(N)) = 0 \\
g(S(Y),N) &= g(Y,S(N)) = 0,
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \mathrm{Rm}^r(X,Y)Z \\
&\quad -g(S(Y),Z)S(X) + g(S(X),Z)S(Y) \\
&\quad +(-g(\nabla_X S(Y),Z) + g(\nabla_Y S(X),Z))N \\
&\quad +(g(S(\nabla_X Y),Z) - g(S(\nabla_Y X),Z))N
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Rm}^{r}(X,Y)Z - g(S(Y),Z)S(X) + g(S(X),Z)S(Y) \\
&\quad + g(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X), Z)N.
\end{aligned}
$$

□

1.3 Noções básicas sobre Grupos de Lie

Definição 1.30. *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G, munida de uma estrutura de grupo tal que as aplicações*

$$i : G \to G \quad e \quad m : G \times G \to G$$

definidas por $i(g) = g^{-1}$ e $m(g,h) = gh^{-1}$ são diferenciáveis.

Doravante, salvo menção em contrário, supomos que G é um grupo de Lie fixado, com elemento neutro e. Nesse caso, a **translação à esquerda** por $a \in G$ é a aplicação $L_a : G \to G$ dado por $L_a(g) = ag$. Denotando por $\iota_a : G \to G \times G$ a inclusão $\iota_a(g) = (a,g)$, temos $L_a = m \circ \iota_a$, de sorte que L_a é diferenciável; mas como $L_a \circ L_a^{-1} = L_a^{-1} \circ L_a = Id_G$, segue que L_a é mesmo um difeomorfismo de G, tal que $(L_a)^{-1} = L_a^{-1}$. Analogamente, a translação à direita por $a \in G$ é o difeomorfismo $R_a : G \to G$ definido por $R_a = ga$. Por fim, observe que L_a e R_b comutam para todos $a, b \in G$. Uma métrica Riemanniana g em um grupo de Lie G é invariante à esquerda se $L_g : G \to G$ for uma isometria para todo $g \in G$. Analogamente, uma métrica Riemanniana em G é invariante à direita se $R_g : G \to G$ for uma isometria para todo $g \in G$, e bi-invariante se for simultaneamente invariante à esquerda e à direita.

Observação 1.31. Observe que todo grupo de Lie invariante à direita (ou a esquerda) é uma variedade Riemannina homogênea. Com efeito, dados $p, q \in G$ quaisquer, basta tomar $g = qp^{-1}$, pois $L_g(p) = qp^{-1}p = q$.

Uma **álgebra de Lie** (real) é um espaço vetorial real $\mathfrak{g}$, munido de uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear e anti-simétrica $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ para a qual vale a **identidade de Jacobi**

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Tal aplicação é o **colchete de Lie** de $\mathfrak{g}$.

Uma **subálgebra de Lie** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$. Em particular, $\mathfrak{h}$ é ela mesma uma álgebra de Lie com a restrição do colchete de Lie de $\mathfrak{g}$, e a inclusão $\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, ou seja, uma transformação linear que preserva os colchetes de Lie de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, isto é, tal que

$$\iota([X,Y]) = [\iota(X), \iota(Y)],$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.32. *Se G é um grupo de Lie, a* ***álgebra de Lie de G*** *é a subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$ formada pelos campos invariantes à esquerda.*

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sua **série central descendente** é definida indutivamente por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Nessas expressões os colchetes tem o seguinte significado: dados subconjuntos $U, V \subset \mathfrak{g}$ a notação $[U, V]$ indica o subespaço vetorial gerado por todos os colchetes $[X, Y]$, com $X \in U$ e $Y \in V$.

Definição 1.33. *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Definição 1.34. *Um grupo de Lie conexo é dito* ***nilpotente*** *se sua álgebra de Lie é nilpotente.*

1.4 Campos de Killing sobre variedades homogêneas

Lembre que um campo de vetores X é dito **completo** se houver um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}$ gerado por X.

Definição 1.35. *Seja α um tensor e X um campo completo (esta definição estender-se ao caso em que X não é completo e somente define um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos locais), a* ***derivada de Lie*** *de α com respeito a X é dada por*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{X}}\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_t^*\alpha - \alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\alpha,$$

onde φ_t^* é o difeomorfismo induzido pelo φ_t.

Proposição 1.36. *A derivada de Lie com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então $\mathcal{L}_X f = D_X f$.*

(2) *Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

(3) *Sejam α e β tensores, então $\mathcal{L}_X(\alpha \otimes \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\otimes\beta + \alpha\otimes(\mathcal{L}_X\beta)$.*

(4) *Se α é um $(0,r)-$tensor, então para quaisquer $Y_1,\ldots,Y_r \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\alpha)(Y_1,\ldots,Y_r) &= D_X\alpha(Y_1,\ldots,Y_r)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\ldots,Y_{r-1},[X,Y_i],Y_{i+1},\ldots,Y_r)\\ &= (\nabla_X\alpha)(Y_1,\ldots,Y_r)\\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\ldots,Y_{i-1},\nabla_{Y_i}X,Y_{i+1},\ldots,Y_r).\end{aligned}$$

Para uma prova veja Capítulo 13 de [11].

Agora note que da proposição acima, e do fato que $\nabla g = 0$ temos que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X), \tag{1.8}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, se $X = \nabla f$ para alguma $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, teremos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = 2\mathrm{Hess}\, f(Y,Z). \tag{1.9}$$

Observação 1.37. Se $\varphi : M \to M$ é um difeomorfismo , α um tensor e $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X\alpha) = \mathcal{L}_{\varphi^* X}(\varphi^*\alpha).$$

Se $f : M \to \mathbb{R}$, então

$$\varphi^*(\mathrm{grad}_g f) = \mathrm{grad}_{\varphi^* g}(f \circ \varphi).$$

Se $\varphi(t) : M \to M$ é uma família a $1-$parâmetro de difeomorfismos e α é um tensor, então

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)^* \alpha) = \mathcal{L}_{X(t)} \varphi(t)^* \alpha,$$

onde

$$X(t_0) \doteqdot \frac{\partial}{\partial t}\Big(\varphi(t_0)^{-1} \circ \varphi(t)\Big)\Big|_{t=t_0} = \Big(\varphi(t_0)^{-1}\Big)_* \Big(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)\Big|_{t=t_0}\Big).$$

Definição 1.38. *Um difeomorfismo $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ diz-se uma **isometria**, se $\varphi^* h = g$. Se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que $\varphi_{|_U} : U \to \varphi(U)$ é uma isometria, então este será uma **isometria local**.*

Proposição 1.39. *Se $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ é uma isometria e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $d\varphi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\varphi(X)}(d\varphi(Y))$.*

Para uma prova veja Capítulo 3 de [13].

Com este resultado, podemos verificar alguns resultados que usaremos posteriormente.

Lema 1.40. *Seja $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ isometria. Então*

(1) $d\varphi(\mathrm{Rm}_1\,(X, Y)Z) = \mathrm{Rm}_2\,(d\varphi(X), d\varphi(Y))(d\varphi(Z))$.

(2) $\varphi^*(\mathrm{R_N}) = \mathrm{R_M}$, *isto é,* $\mathrm{R_N} \circ \varphi = \mathrm{R_M}$.

(3) $\varphi^*(\mathrm{Ric_N}) = \mathrm{Ric_M}$,

onde Rm_1 *e* Rm_2 *são os tensores curvatura de Riemann de M e N respectivamente,* $\mathrm{Ric_M}$ *e* $\mathrm{Ric_N}$ *seus tensores Ricci e* $\mathrm{R_M}$ *e* $\mathrm{R_N}$ *suas curvaturas escalar.*

Demonstração. Para (1), note que dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathrm{Rm}_1\,(X, Y)Z) &= d\varphi(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) \\ &= d\varphi(\nabla_X \nabla_Y Z) - d\varphi(\nabla_Y \nabla_X Z) - d\varphi(\nabla_{[X,Y]} Z). \end{aligned}$$

da proposição anterior e usando o fato que $[d\varphi(X), d\varphi(Y)] = d\varphi([X, Y])$, obtemos

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathrm{Rm}_1\,(X, Y)Z) &= \nabla_{d\varphi(X)} \nabla_{d\varphi(Y)} d\varphi(Z) - \nabla_{d\varphi(Y)} \nabla_{d\varphi(X)} d\varphi(Z) \\ &\quad - \nabla_{[d\varphi(X), d\varphi(Y)]} d\varphi(Z) \\ &= \mathrm{Rm}_2\,(d\varphi(X), d\varphi(Y)) d\varphi(Z). \end{aligned}$$

Para (2), veja que dados $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $P \subset T_pM$, então

$$\begin{aligned}\sec(d\varphi(e_1), d\varphi(e_2)) &= g_N(\mathrm{Rm}_2(d\varphi(e_1), d\varphi(e_2))d\varphi(e_2), d\varphi(e_1))\\ &= g_N(d\varphi(\mathrm{Rm}_1(e_1, e_2)e_2), d\varphi(e_1))\\ &= g_M(\mathrm{Rm}_1(e_1, e_2)e_2, e_1).\end{aligned}$$

Assim $\mathrm{R_N} \circ \varphi = \mathrm{R_M}$. Um racíocinio análogo leva a (3). □

Definição 1.41. *Dizemos que um campo X de vetores diferenciável sobre (M, g) é de* ***Killing*** *se $\mathcal{L}_X g = 0$. Se X é um campo de Killing completo, então o grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos φ_t que são gerados por X é um grupo a $1-$parâmetro de isometrias de (M, g).*

Lema 1.42. *Seja (M, g) uma variedade Riemannina, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Então $\mathcal{L}_X \mathrm{Hess}\, f = \mathrm{Hess}\, \mathcal{L}_X f$.*

Demonstração. Considere $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em torno de um ponto $p \in M$ qualquer. Como X é de Killing $\mathcal{L}_X g = 0$, então para quaisquer $i, j, k \in \{1, \cdots, n\}$, temos

$$\begin{aligned}0 &= (\mathcal{L}_X g)_{ij}\\ &= g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} X)\\ &= x^k g(\nabla_{\partial_i}\partial_k, \partial_j) + \partial_i x^k g(\partial_k, \partial_j) + x^k g(\partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial_k)\\ &+ \partial_j x^k g(\partial_i, \partial_k)\\ &= \partial_i x^j + \partial_j x^i\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\partial_k\partial_i x^j &= -\partial_k\partial_j x^i\\ &= -\partial_j\partial_k x^i\\ &= \partial_j\partial_i x^k\\ &= \partial_i\partial_j x^k\\ &= -\partial_i\partial_k x^j\\ &= -\partial_k\partial_i x^j\end{aligned}$$

daí

$$\partial_k\partial_i x^j = 0. \tag{1.10}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}\,\mathcal{L}_X f)_{ij} &= \partial_i\partial_j(\mathcal{L}_X f) - (\nabla_{\partial_i}\partial_j)\mathcal{L}_X f\\
&= \partial_i\partial_j(x^k\partial_k f)\\
&= \partial_i(\partial_j x^k\partial_k f + x^k\partial_j\partial_k f)\\
&= \partial_i\partial_j x^k\partial_k f + \partial_j x^k\partial_i\partial_k f + \partial_i x^k\partial_j\partial_k f + x^k\partial_i\partial_j\partial_k f.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X \mathrm{Hess}\, f)_{ij} &= (\nabla_X \mathrm{Hess}\, f)(\partial_i,\partial_j) + \mathrm{Hess}\, f(\nabla_{\partial_i}X,\partial_j) + \mathrm{Hess}\, f(\partial_i,\nabla_{\partial_j}X)\\
&= D_X(\partial_i\partial_j f) - \mathrm{Hess}\, f(\nabla_X\partial_i,\partial_j) - \mathrm{Hess}\, f(\partial_i,\nabla_X\partial_j)\\
&+ x^k\mathrm{Hess}\, f(\nabla_{\partial_i}\partial_k,\partial_j) + \partial_i x^k\mathrm{Hess}\, f(\partial_k,\partial_j)\\
&+ x^k\mathrm{Hess}\, f(\partial_i,\nabla_{\partial_j}\partial_k) + \partial_j x^k\mathrm{Hess}\, f(\partial_i,\partial_k)\\
&= x^k\partial_k\partial_i\partial_j f - x^k\mathrm{Hess}\, f(\nabla_{\partial_k}\partial_i,\partial_j) - x^k\mathrm{Hess}\, f(\partial_i,\nabla_{\partial_k}\partial_j)\\
&+ \partial_i x^k\mathrm{Hess}\, f(\partial_k,\partial_j) + \partial_j x^k\mathrm{Hess}\, f(\partial_i,\partial_k)\\
&= x^k\partial_k\partial_i\partial_j f + \partial_i x^k\partial_k\partial_j f - \partial_i x^k(\nabla_{\partial_k}\partial_j)f + \partial_j x^k\partial_i\partial_k f\\
&- \partial_j x^k(\nabla_{\partial_i}\partial_k)f\\
&= x^k\partial_k\partial_i\partial_j f + \partial_i x^k\partial_k\partial_j f + \partial_j x^k\partial_i\partial_k f
\end{aligned}$$

donde

$$(\mathrm{Hess}\,\mathcal{L}_X f)_{ij} = \partial_i\partial_j x^k\partial_k f + (\mathcal{L}_X\mathrm{Hess}\, f)_{ij}.$$

Portanto pela igualdade (1.10) $\mathcal{L}_X\mathrm{Hess}\, f = \mathrm{Hess}\,\mathcal{L}_X f$. □

Proposição 1.43. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana completa, se $X\in\mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing, então X é completo.*

Para uma prova veja Capítulo 9 de [13].

Denotaremos por $I(M)=Iso(M)$ o grupo das isometrias de uma variedade Riemanniana (M,g), defininamos a ação $\mu: I(M)\times M\to M$ como

$$\mu(\phi,p)=\phi(p).$$

Teorema 1.44. *Se (M,g) é uma variedade Riemanniana, existe uma única maneira de tornar $I(M)$ uma variedade tal que:*

(1) *$I(M)$ é um grupo de Lie.*

(2) *A ação μ é diferenciável.*

(3) *Um homomorfismo $\beta : \mathbb{R} \to I(M)$ é diferenciável se a aplicação $\mathbb{R} \times M \to M$ definida por $(t,p) \mapsto \beta(t)(p)$ for diferenciável.*

Este resultado segue de um teorema mais geral do Capítulo 4 de [14].

Observação 1.45. Seja $\mathfrak{g}(I(M))$ a álgebra de Lie do grupo das isometrias $I(M)$, existe uma relação entre os campos de Killing de M e $\mathfrak{g}(I(M))$. Se $X \in \mathfrak{g}(I(M))$, seja $t \mapsto \varphi_t$ seu subgrupo a 1-parâmetro. Pelo teorema anterior, a aplicação $\mathbb{R} \times M \to M$ definida por $(t,p) \mapsto \varphi_t(p)$ é diferenciável. Para cada $p \in M$, seja X_p^+ a velocidade inicial da curva $t \mapsto \varphi_t(p)$. Então X^+ é um campo de vetores diferenciável sobre M. Segue da identidade $\varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_{t+s}(p)$, que $\{\varphi_t\}$ é o fluxo de X^+. Já que o grupo a 1-parâmetro está definido para todo $\mathbb{R}$, X^+ é completo. Além disso como φ_t é uma isometria, então X^+ é um campo de Killing.

Proposição 1.46. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e $\mathfrak{g}(I(M))$, $\mathfrak{g}(M)$ às álgebras de Lie do grupo das isometrias de M, M respectivamente. Então*

(1) *O conjunto $c\mathfrak{g}(M)$ de todos os campos de Killing completos sobre M é uma subálgebra de $\mathfrak{g}(M)$.*

(2) *A aplicação $X \mapsto X^+$ é um anti-isomorfismo de Lie $\mathfrak{g}(I(M)) \to c\mathfrak{g}(M)$, isto é, um isomorfismo linear tal que*

$$[X^+, Y^+] = [X,Y]^+,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}(I(M))$.

Para uma prova veja Capítulo 9 de [13].

Definição 1.47. *Uma variedade Riemanniana M é dita* ***homogênea*** *se, dados dois pontos $p, q \in M$ quaisquer existir uma isometria φ de M tal que $\varphi(p) = q$, isto é, o grupo das isometrias $I(M)$ de M age transitivamente sobre M.*

Lema 1.48. *Uma variedade Riemanniana homogênea é completa.*

Demonstração. Suponha M não completa. Então existe $p \in M$ e uma geodésica normalizada $\gamma : [0, t_0] \to M$, com $\gamma(0) = p$, tal que não pode ser estendida além de t_0. Seja

$\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(p)$ é uma bola normal, e seja $q = \gamma(t_0 - \frac{\varepsilon}{2}) \in M$. Seja $\varphi : M \to M$ uma isometria tal que $\varphi(p) = q$. Existe $v \in T_pM$, $|v| = 1$, tal que $d\varphi_p v = \gamma'(t_0 - \frac{\varepsilon}{2})$. Considerando a geodésica $\alpha : [0, \varepsilon) \to M$ dada por $\alpha(t) = \exp_p tv$. Então $\varphi \circ \alpha : [0, \varepsilon) \to M$ é uma geodésica tal que

$$(\varphi \circ \alpha)(0) = \varphi(p) = q = \gamma(t_0 - \frac{\varepsilon}{2}),$$

e

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = d\varphi_p \alpha'(0) = d\varphi_p v = \gamma'(t_0 - \frac{\varepsilon}{2}).$$

Assim, $\varphi \circ \alpha$ é uma geodésica de M que coincide com γ em $[t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_0)$. Por unicidade, temos que $(\varphi \circ \alpha)(t) = \gamma(t + t_0 - \frac{\varepsilon}{2})$, o que permite estender γ além de t_0, contradizendo o que supomos, logo M é completa. □

Lema 1.49. *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana homogênea, então sua curvatura escalar é constante.*

Demonstração. Dados $p, q \in M$ quaisquer, existe por hipótese $\varphi : M \to M$ isometria tal que $\varphi(p) = q$, assim pelo Lema 1.40 $\mathrm{R}(q) = (\mathrm{R} \circ \varphi)(p) = \mathrm{R}(p)$, logo R é constante. □

Proposição 1.50. *Sejam $G \times M \to M$ uma ação transitiva, com G um grupo de Lie e H o grupo de isotropia de um ponto $p \in M$, isto é, o conjunto dos pontos $g \in G$ tal que $gp = p$. Então a aplicação natural $j : \frac{G}{H} \to M$ que leva aH no ponto ap é um difeomorfismo. Em particular, a projeção $g \to gp$ é uma submersão $\pi : G \to M$.*

Para uma prova deste teorema veja [21].

Corolário 1.51. *Para cada vetor tangente a uma variedade Riemanniana homogênea existe um campo de Killing sobre M que o estende.*

Demonstração. Segue da proposição acima, que para cada $p \in M$, a projeção $g \to gp$ é uma submersão $\pi : \mathfrak{g}(I(M)) \to M$. Logo, se $v \in T_pM$ existe $\widetilde{v} \in T_e(\mathfrak{g}(I(M)))$ tal que $d\pi(\widetilde{v}) = v$. Como $\widetilde{v}$ estende-se a um campo de vetores diferenciável invariante à esquerda V sobre $\mathfrak{g}(I(M))$, segue da Proposição 1.46, que V^+ é um campo de Killing sobre M tal que $V_p^+ = v$. □

Capítulo 2

Solitons de Ricci gradiente

Neste capítulo, definiremos solitons de Ricci gradientes exiberemos alguns exemplos clássicos e estabeleceremos algumas fórmulas gerais, que serão utilizadas no próximo capítulo. Neste capítulo (M, g) denotará uma variedade Riemanniana conexa e completa.

2.1 Definições e fórmulas em solitons gradientes

Definição 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana, um* ***soliton de Ricci*** (M, g, X, λ) *é uma métrica Riemanniana junto com um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que,*

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g. \tag{2.1}$$

Este é chamado de expansivo se $\lambda < 0$, estável quando $\lambda = 0$ e contrátil se $\lambda > 0$. Quando $X = \nabla f$, onde $f \in C^\infty(M)$, pela igualdade (1.9) podemos reescrever a equação (2.1)

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, f = \lambda g, \tag{2.2}$$

e este é chamado ***soliton de Ricci gradiente****, ou simplesmente* ***soliton gradiente****.*

Observação 2.2. Note que tomando o traço em (2.2) obtemos pela Proposição 1.15

$$\mathrm{R} + \Delta f = \lambda n. \tag{2.3}$$

O estudo dos solitons de Ricci está contido na teoria dos Fluxos de Ricci, teoria esta utilizada por Grigori Perelman para demonstrar a conjectura de Poincaré, neste trabalho não trataremos diretamente de sua conexão com a teoria dos Fluxos de Ricci, contudo esta conexão fica evidenciada pelo

Teorema 2.3. *Se* $(M, g_0, f_0, \frac{-\lambda}{2})$ *é um soliton gradiente com o campo vetorial* $\mathrm{grad}_{g_0} f_0$ *completo, então existe uma solução* $g(t)$ *do fluxo de Ricci, isto é,*

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}(g(t)),$$

com $g(0) = g_0$*, difeomorfismos* $\phi(t)$ *com* $\phi(0) = Id_M$*, funções* $f(t)$ *com* $f(0) = f_0$*, definido para todo* t*, tal que* $\tau(t) = \lambda t + 1 > 0$*, sastifazendo:*

(1) $\phi(t) : M \to M$ *é uma família a* 1 *parâmetro de difeomorfismos gerados pelos campos* $X(t) = \frac{1}{\tau(t)}\mathrm{grad}_{g_0} f_0$*, isto é,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t)(x) = \frac{1}{\tau(t)}(\mathrm{grad}_{g_0} f_0)(\phi(t)(x));$$

(2)

$$g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g_0;$$

(3)

$$f(t) = f_0 \circ \phi(t) = \phi(t)^*(f_0);$$

(4)

$$\mathrm{Ric}(g(t)) + \nabla^{g(t)}\nabla^{g(t)} f(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0,$$

onde $\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)$*, é o gradiente de* $f(t)$ *com a métrica* $g(t)$*.*

Demonstração. Defina $\tau(t) = \lambda t + 1$. Já que o campo $\mathrm{grad}_{g_0} f_0$ é completo, existe uma família a 1−parâmetro de difeomorfismos $\phi(t) : M \to M$ gerados pelos campos $\frac{1}{\tau(t)}\mathrm{grad}_{g_0} f_0$ definido para todo $\tau(t) > 0$. Então defina $f(t) = f_0 \circ \phi(t)$ e $g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g_0$. Assim

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \frac{\lambda}{\tau(t_0)} g(t_0) + \tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t)^* g_0)}{\partial t}\Big|_{t=t_0}.$$

Usando a observação 1.37, temos que

$$\begin{aligned}\tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t)^* g_0)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} &= \tau(t_0)\mathcal{L}_{(\phi(t_0)^{-1})_*(\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}|_{t=t_0})}\phi(t_0)^* g_0 \\ &= \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t_0)} f(t_0)} g(t_0),\end{aligned}$$

já que

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \frac{1}{\tau(t_0)}\mathrm{grad}_{g_0} f_0 = \phi(t)_*(\mathrm{grad}_{g(t_0)} f(t_0)).$$

Consequentemente

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)} g(t).$$

Agora usando a observação 1.37, teremos

$$\begin{aligned} -2\mathrm{Ric}(g(t)) &= \phi(t)^*(-2\mathrm{Ric}(g_0)) \\ &= \phi(t)^*(\lambda g_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g_0} f_0} g_0) \\ &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)} g(t), \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathrm{Ric}(g(t)) + \nabla^{g(t)}\nabla^{g(t)} f(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)} g(t) \\ &= -2\mathrm{Ric}(g(t)). \end{aligned}$$

□

O teorema acima, diz que dado um soliton gradiente com ∇f completo, existe uma solução do Fluxo de Ricci que é igual ao soliton gradiente em algum instante e mais ainda, a solução é ainda um soliton gradiente para todo t do intervalo de definição da solução.

Agora exibiremos alguns exemplos clássicos de solitons gradiente, no próximo capítulo obteremos como aplicação do resultado principal um exemplo de soliton de Ricci não gradiente.

1. *Solitons de Einstein.* Se (M, g) é uma variedade de Einstein com constante de Einstein λ, tomando $f : M \to \mathbb{R}$ constante temos que $\mathrm{Hess}\, f = 0$, assim

   $$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, f = \lambda g.$$

   Portanto, (M, g, f, λ) é um soliton gradiente.

2. *Soliton Gaussiano.* Seja $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f, \lambda)$ onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dado por $f = \frac{\lambda}{2}|x|^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e g é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$. Assim o tensor curvatura $\mathrm{Rm} = 0$ implicando que $\mathrm{Ric}(g) = 0$. Além disso seja $\{E_i\}_i$ base canônica do $\mathbb{R}^n$, isto é, $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ e $\nabla_{E_i} E_j = 0$, então

   $$\mathrm{Hess}\, f(E_i, E_j) = E_i(E_j(f)) - g(\nabla f, \nabla_{E_i} E_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Logo, $\operatorname{Hess} f(E_i, E_j) = 0$ se $i \neq j$ e $\operatorname{Hess} f(E_i, E_i) = \lambda$, daí

$$\mathrm{Ric}_{ij} + \operatorname{Hess} f_{ij} = \lambda g_{ij}.$$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, g, f, \lambda)$ é um soliton gradiente chamado soliton Gaussiano.

3. *Soliton de Hamilton.* Seja $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ uma superfície Riemanniana, com

$$g_\Sigma := \frac{g}{1 + x^2 + y^2},$$

onde g é a métrica canônica do $\mathbb{R}^2$. Afirmamos que

$$g_\Sigma(t) = \frac{g}{e^{4t} + x^2 + y^2}$$

é uma solução de

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}(g(t)).$$

Para ver isto lembre que, se (M^2, g) é uma superfície Riemanniana e $g = uh$, onde $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então

$$\mathrm{R}_g = u^{-1}(\mathrm{R}_h - \Delta_h \ln u)$$

(para uma prova deste fato veja Capítulo 2 de [1]), e $\mathrm{Ric}_{ij} = \frac{\mathrm{R}}{2} g_{ij}$ quando $n = 2$, assim $g(t) = u(t)h$ é uma solução da equação do fluxo de Ricci se, e somente se,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_h \ln u - \mathrm{R}_h.$$

Verifiquemos a condição suficiente,

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{\partial u(t)}{\partial t} h = (\Delta_h \ln u(t) - \mathrm{R}_h)h,$$

assim

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -\mathrm{R}_{g(t)} u(t) h = -\mathrm{R}_{g(t)} g(t) = -2\mathrm{Ric}(g(t)).$$

Então, como $g_\Sigma(t) = u(t)g$ onde

$$u(t) = \frac{-1}{e^{4t} + x^2 + y^2},$$

basta mostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g \ln u - \mathrm{R}_g = \Delta_g \log u.$$

Para isto, veja que

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \frac{-4e^{4t}}{(e^{4t} + x^2 + y^2)^2},$$

e

$$\frac{\partial \ln u(t)}{\partial x} = \frac{-2x}{e^{4t} + x^2 + y^2}.$$

Assim

$$\frac{\partial^2 \ln u(t)}{\partial x^2} = \frac{-2(e^{4t} + x^2 + y^2) + 4x^2}{(e^{4t} + x^2 + y^2)^2},$$

analogamente obtemos

$$\frac{\partial^2 \ln u(t)}{\partial y^2} = \frac{-2(e^{4t} + x^2 + y^2) + 4y^2}{(e^{4t} + x^2 + y^2)^2}.$$

Logo

$$\Delta_g \ln u = \frac{-4e^{4t}}{(e^{4t} + x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial u(t)}{\partial t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(g_\Sigma) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}\frac{-4}{(e^0 + x^2 + y^2)^2} g \\ &= \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2} g. \end{aligned}$$

Seja $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por $Y = -2(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})$, onde $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Mostremos que

$$\mathcal{L}_Y g_\Sigma = \frac{-4}{(1 + x^2 + y^2)^2} g.$$

Com efeito, como $g_\Sigma = ug$ onde $u = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$, então

$$\mathcal{L}_Y g_\Sigma = \mathcal{L}_Y(ug) = (\mathcal{L}_Y u)g + u\mathcal{L}_Y g.$$

Sendo

$$\mathcal{L}_Y u = D_Y u = -2x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y},$$

então

$$\begin{aligned} D_Y u &= -2x\frac{-2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} - 2y\frac{-2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\mathcal{L}_Y dx^i = d(\mathcal{L}_Y x^i) = d(D_Y x^i) = dY^i,$$

assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y g &= \mathcal{L}_Y(g_{ij}dx^i \otimes dx^j) \\
&= \mathcal{L}_Y g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(\mathcal{L}_Y dx^i) \otimes dx^j + g_{ij}dx^i \otimes (\mathcal{L}_Y dx^j) \\
&= D_Y g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{ij}dY^i \otimes dx^j + g_{ij}dx^i \otimes dY^j \\
&= (D_Y g_{ij} + g_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j})dx^i \otimes dx^j.
\end{aligned}$$

Daí

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = D_Y g_{ij} + g_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j},$$

onde $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^2$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$, então

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = 0$$

e

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = 2\frac{\partial Y^i}{\partial x^i}.$$

Como

$$Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} = -2(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}),$$

então

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = -4.$$

Donde

$$\mathcal{L}_Y g = -4g,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y g_\Sigma &= \frac{4x^2 + 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}g + \frac{-4}{1 + x^2 + y^2}g \\
&= \frac{-4}{(1 + x^2 + y^2)^2}g.
\end{aligned}$$

Logo

$$\mathrm{Ric}(g_\Sigma) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g_\Sigma = 0,$$

isto é, $(\mathbb{R}^2, Y, g_\Sigma, 0)$ é um soliton de Ricci estável. Note ainda que $Y = \nabla f$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2)$. Com efeito, escrevendo

$$\nabla f = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{-2x}{1+x^2+y^2} &= \frac{\partial f}{\partial x}\\ &= g_\Sigma(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x})\\ &= a_x u g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) + a_y u g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})\\ &= a_x u,\end{aligned}$$

assim $a_x = -2x$, analogamente obtemos $a_y = -2y$. Logo na métrica g_Σ

$$\nabla f = -2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Portanto $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, f, 0)$ é um soliton gradiente estável.

Agora estabeleceremos uma fórmula geral que conduz às fórmulas de Bochner para campos de Killing e campos gradiente.

Lema 2.4. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, então*

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \operatorname{Ric}(X,X) + D_X \operatorname{div} X. \tag{2.4}$$

Quando $X = \nabla f$ é um campo gradiente e $Z \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(Z) = 2\operatorname{Ric}(Z,X) + 2D_Z \operatorname{div} X \tag{2.5}$$

ou na notação de $(1,1)-$tensor

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f. \tag{2.6}$$

Demonstração. Dado um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em vizinhança de $p \in M$ qualquer e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}\mathcal{L}_X g)(E_i, X)\\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g(E_i,X)) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(\nabla_{E_i}E_i, X)\\ &- \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(E_i, \nabla_{E_i}X)\\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, X) + g(E_i, \nabla_X X))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, X)) + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(E_i, \nabla_X X)) \\
&- \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X).
\end{aligned}
$$

Agora note que, sendo $\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \alpha^j E_j$ temos

$$
\begin{aligned}
\alpha^j &= g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2, E_j) \\
&= D_{E_j}(\frac{1}{2}|X|^2) \\
&= g(\nabla_{E_j}X, X).
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{E_j}X, X)E_j,
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\Delta\frac{1}{2}|X|^2 &= \operatorname{div}(\nabla(\frac{1}{2}|X|^2)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2, E_i).
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{E_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2 &= \nabla_{E_i}(\sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{E_j}X, X)E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{E_j}X, X)\nabla_{E_i}E_j + \sum_{j=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_j}X, X))E_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_j}X, X))E_j.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\Delta\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, X)).
$$

Agora lembre que $|\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X)$. Então

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(X) &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(E_i, \nabla_X X)) \\
&- |\nabla X|^2 - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}E_i, \nabla_X X) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{E_i}\nabla_X X) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X) \\
&= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla^2_{E_i,X}X).
\end{aligned}$$

Note ainda que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}\,(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(E_i,X)X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{E_i,X}X - \nabla^2_{X,E_i}X, E_i),
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\,\mathcal{L}_X g)(X) &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X,X) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,E_i}X, E_i).
\end{aligned}$$

Usando que $X = x^j E_j \Rightarrow \nabla_X E_i = x^j \nabla_{E_j} E_i = 0$, calculemos $D_X \mathrm{div}\, X$

$$\begin{aligned}
D_X \mathrm{div}\, X &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_X(g(\nabla_{E_i}X, E_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X \nabla_{E_i}X, E_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_X E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,E_i}X, E_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_X E_i}X, E_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_X E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,E_i}X, E_i).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\mathrm{div}\,\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}\,(X,X) + D_X \mathrm{div}\, X.$$

Quando $X = \nabla f$, então para todo $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$g(\nabla_Z X, Y) = \mathrm{Hess}\, f(Z,Y) = \mathrm{Hess}\, f(Y,Z) = g(Z, \nabla_Y X),$$

assim

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(Z) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, Z) + g(E_i, \nabla_Z X)) \\
&- \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}Z) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}Z}X) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_Z X, E_i) + g(E_i, \nabla_Z X)) \\
&- \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i}Z}X, E_i) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}Z}X) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla_Z X, E_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}E_i, \nabla_Z X) \\
&- 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i}Z}X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2g(\nabla^2_{E_i,Z}X, E_i) \\
&= 2\mathrm{Ric}\,(Z, X) + 2g(\nabla^2_{Z,E_i}X, E_i).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(Z) \;=\; 2\mathrm{Ric}\,(Z, X) + 2D_Z\operatorname{div} X.$$

Como $\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \nabla^2 f$, então na forma de $(1,1)-$tensor teremos

$$\operatorname{div}\nabla^2 f \;=\; \mathrm{Ric}\,(\nabla f) + \nabla\Delta f.$$

□

Observação 2.5. *Dado um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ numa vizinhança de $p \in M$ qualquer, temos que:*

$$\operatorname{tr}\mathcal{L}_X g = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(E_i, E_i) = 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{Ei}X, E_i) = 2\operatorname{div} X. \tag{2.7}$$

Corolário 2.6. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing sobre uma variedade Riemanniana, então*

$$\Delta\frac{1}{2}|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X, X). \tag{2.8}$$

Demonstração. Como $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing, então $\mathcal{L}_X g = 0$ e da igualdade (2.7) temos que $\operatorname{div} X = 0$, além disso da igualdade (2.4) obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X, X).$$

□

Corolário 2.7. *Se* $X = \nabla f$ *com* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, *então*

$$\Delta\frac{1}{2}|X|^2 = |\nabla X|^2 + D_X\mathrm{div}\, X + \mathrm{Ric}\,(X, X). \tag{2.9}$$

Demonstração. Basta fazer $Z = X$ em (2.5) e igualar a (2.4), para obtermos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= 2\mathrm{Ric}\,(X, X) + 2D_X\mathrm{div}\, X\\ &+ |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X, X) - D_X\mathrm{div}\, X\\ &= |\nabla X|^2 + D_X\mathrm{div}\, X + \mathrm{Ric}\,(X, X).\end{aligned}$$

□

As igualdades (2.8) e (2.9), constituem às fórmulas de Bochner mencionadas anteriormente.

Lema 2.8. *Um soliton de Ricci satisfaz:*

$$\frac{1}{2}(\Delta - D_X)|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2. \tag{2.10}$$

Demonstração. Tomando o traço na equação (2.1), obtemos

$$\mathrm{R} + \mathrm{div}\, X = \lambda n,$$

assim

$$D_Z\mathrm{R} + D_Z\mathrm{div}X = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M),$$

pela segunda identidade de Bianchi contraida Proposição 1.25, temos que

$$D_Z\mathrm{R} = 2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}\,(Z) \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Fazendo $Z = X$ e como $\mathrm{div}\, g = 0$, tomando o divergente na equação (2.1) e usando a equação (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}-D_X\mathrm{div}\, X &= 2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}\,(X)\\ &= -\mathrm{div}\,(\mathcal{L}_X g)(X)\\ &= -(\frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}\,(X, X) + D_X\mathrm{div}\, X).\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X, X)\\ &= |\nabla X|^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_X g)(X, X) - \lambda|X|^2,\end{aligned}$$

como $(L_X g)(X,X) = 2g(\nabla_X X, X) = D_X|X|^2$ temos que

$$\frac{1}{2}(\Delta - D_X)|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2.$$

□

Agora consideremos a equação (2.2) na forma de um $(1,1)-$tensor, isto é,

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f = \lambda I,$$

ou na forma condensada

$$\mathrm{Ric} + S = \lambda I, \quad S = \nabla^2 f. \tag{2.11}$$

Com esta notação podemos obter algumas identidades que fornecem informações sobre a curvatura escalar dos solitons gradientes.

Lema 2.9. *Um soliton gradiente satisfaz as seguintes igualdades:*

$$\nabla \mathrm{R} \;=\; 2\mathrm{Ric}\,(\nabla f) \tag{2.12}$$

$$\nabla_{\nabla f} S + S \circ (S - \lambda I) \;=\; -\mathrm{Rm}\,(\cdot, \nabla f)\nabla f - \frac{1}{2}\nabla_{\cdot}\nabla \mathrm{R} \tag{2.13}$$

$$\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric} + \mathrm{Ric} \circ (\lambda I - \mathrm{Ric}) \;=\; \mathrm{Rm}\,(\cdot, \nabla f)\nabla f + \frac{1}{2} + \nabla_{\cdot}\nabla \mathrm{R} \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{2}\Delta_f \mathrm{R} = \frac{1}{2}(\Delta - D_{\nabla f})\mathrm{R} \;=\; \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric} \circ (\lambda I - \mathrm{Ric})). \tag{2.15}$$

Demonstração. Para provar (2.12) note que

$$\mathrm{div}\,(\nabla^2 f) = \mathrm{Ric}\,(\nabla f) + \nabla \Delta f.$$

Mas, $\mathrm{R} + \Delta f = \lambda n$ para todo soliton gradiente. Assim $\nabla \mathrm{R} + \nabla \Delta f = 0$, tomando o divergente na equação (2.2) teremos,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{Ric} + \mathrm{div}\,(\nabla^2 f) = \mathrm{div}\,(\lambda g) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla \mathrm{R} &= 2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric} \\
&= -2\mathrm{div}\,(\nabla^2 f) \\
&= -2\mathrm{Ric}\,(\nabla f) - 2\nabla \Delta f \\
&= -2\mathrm{Ric}\,(\nabla f) + 2\nabla \mathrm{R},
\end{aligned}$$

daí

$$\nabla \mathrm{R} \;=\; 2\mathrm{Ric}\,(\nabla f).$$

Para (2.14) considere $E \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer e calculemos

$$\mathrm{Rm}\,(E,\nabla f)\nabla f \;=\; \nabla^2_{E,\nabla f}\nabla f - \nabla^2_{\nabla f,E}\nabla f.$$

Primeiro note que,

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\nabla f,E}\nabla f &= \nabla_{\nabla f}\nabla_E\nabla f - \nabla_{\nabla_{\nabla f}E}\nabla f\\
&= \nabla_{\nabla f}(S(E)) - S(\nabla_{\nabla f}E)\\
&= (\nabla_{\nabla f}S)(E),
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{E,\nabla f}\nabla f &= \nabla_E\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla_{\nabla_E\nabla f}\nabla f\\
&= \nabla_E(S(\nabla f)) - S(\nabla_E\nabla f)\\
&= -\nabla_E(\mathrm{Ric}\,(\nabla f)) + \nabla_E(\lambda\nabla f) + \mathrm{Ric}\,(\nabla_E\nabla f) - \lambda\nabla_E\nabla f\\
&= -\nabla_E(\mathrm{Ric}\,(\nabla f)) + \lambda\nabla_E\nabla f + \mathrm{Ric}\,(\nabla_E\nabla f) - \lambda\nabla_E\nabla f\\
&= -\frac{1}{2}\nabla_E\nabla\mathrm{R} + \mathrm{Ric}\circ S(E)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla_E\nabla\mathrm{R} + \mathrm{Ric}\circ(\lambda I - \mathrm{Ric})(E).
\end{aligned}$$

Assim

$$\mathrm{Rm}\,(E,\nabla f)\nabla f \;=\; -\frac{1}{2}\nabla_E\nabla\mathrm{R} + \mathrm{Ric}\circ(\lambda I - \mathrm{Ric})(E) - (\nabla_{\nabla f}S)(E)$$

como

$$(\nabla_{\nabla f}\lambda I)(E) = \nabla_{\nabla f}(\lambda I(E)) - \lambda I(\nabla_{\nabla f}E) = 0$$

então

$$(\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric})(E) + \mathrm{Ric}\circ(\lambda I - \mathrm{Ric})(E) \;=\; \mathrm{Rm}\,(E,\nabla f)\nabla f + \frac{1}{2}\nabla_E\nabla\mathrm{R}.$$

Agora note que multiplicando (2.14) por -1, e notando que

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Ric}\circ(\lambda I - \mathrm{Ric})(E) &= (S-\lambda I)\circ S(E)\\
&= S\circ S(E) - \lambda I\circ S(E)\\
&= S\circ S(E) - \lambda S(E)\\
&= S\circ(S-\lambda I)(E),
\end{aligned}$$

obtemos

$$(\nabla_{\nabla f}S)(E) + S\circ(S-\lambda I)(E) \;=\; -\mathrm{Rm}\,(E,\nabla f)\nabla f - \frac{1}{2}\nabla_E\nabla \mathrm{R}.$$

Para obtermos (2.15) tomemos um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em torno de um ponto $p\in M$ qualquer, então

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\{E\mapsto(\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric})(E)\} &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric})(E_i),E_i)\\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric}\,(E_i),E_i) - \sum_{i=1}^n g(\mathrm{Ric}\,(\nabla_{\nabla f}E_i),E_i),\end{aligned}$$

como $\nabla f = \alpha^j E_j \quad \Rightarrow \nabla_{\nabla f}E_i = \alpha^j\nabla_{E_j}E_i = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{Ric}\,(\nabla_{\nabla f}E_i) = 0$, então

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\{E\mapsto(\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric})\,(E)\} &= \sum_{i=1}^n D_{\nabla f}(g(\mathrm{Ric}\,(E_i),E_i))\\ &- \sum_{i=1}^n g(\mathrm{Ric}\,(E_i),\nabla_{\nabla f}E_i)\\ &= D_{\nabla f}(\sum_{i=1}^n g(\mathrm{Ric}\,(E_i),E_i))\\ &= D_{\nabla f}\mathrm{R},\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\{E\mapsto \mathrm{Rm}\,(E,\nabla f)\nabla f\} &= \mathrm{Ric}\,(\nabla f,\nabla f),\\ \mathrm{tr}\,\{E\mapsto \frac{1}{2}\nabla_E\nabla\mathrm{R}\} &= \mathrm{tr}\,\frac{1}{2}\mathrm{Hess}\,\mathrm{R} = \frac{1}{2}\Delta\mathrm{R},\\ \mathrm{Ric}\,(\nabla f,\nabla f) &= \frac{1}{2}D_{\nabla f}\mathrm{R}.\end{aligned}$$

Assim, tomando o traço em (2.14) obteremos

$$\begin{aligned}D_{\nabla f}\mathrm{R} + \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric}\circ(\lambda I-\mathrm{Ric})) &= \mathrm{Ric}\,(\nabla f,\nabla f) + \frac{1}{2}\Delta\mathrm{R}\\ D_{\nabla f}\mathrm{R} + \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric}\circ(\lambda I-\mathrm{Ric})) &= \frac{1}{2}D_{\nabla f}R + +\frac{1}{2}\Delta\mathrm{R}\\ \frac{1}{2}\Delta_f\mathrm{R} = \frac{1}{2}(\Delta - D_{\nabla f})\mathrm{R} &= \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric}\circ(\lambda I-\mathrm{Ric})).\end{aligned}$$

□

Observação 2.10. Podemos reescrever (2.15) da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\Delta_f\mathrm{R} = -|\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g|^2 + \mathrm{R}(\lambda - \frac{1}{n}\mathrm{R}). \tag{2.16}$$

Com efeito, como Ric é auto-adjunto, então pelo Teorema Espectral, existe uma base de autovetores $\{E_i\}_{i=1}^n$, tais que, $\mathrm{Ric}\,(E_i) = \lambda_i E_i$, note que

$$\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

e

$$|\mathrm{Ric}|^2 = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric}(\mathrm{Ric})^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2,$$

onde $(\mathrm{Ric})^*$ é a adjunta do tensor de Ricci na forma de um $(1,1)-$tensor, assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_f \mathrm{R} &= \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric} \circ (\lambda I - \mathrm{Ric})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\lambda - \lambda_i) \\ &= -|\mathrm{Ric}|^2 + \lambda \mathrm{R}, \end{aligned}$$

além disso denotando a adjunto do tensor métrico na forma de um $(1,1)-$tensor por $(g)^*$, teremos

$$\begin{aligned} -|\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g|^2 &= -\mathrm{tr}\left((\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g)(\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g)^*\right) \\ &= -\mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric}(\mathrm{Ric})^*) + \frac{1}{n}\mathrm{R}.\mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric}(g)^*) \\ &+ \frac{1}{n}\mathrm{R}.\mathrm{tr}\,(g(\mathrm{Ric})^*) - \frac{1}{n^2}\mathrm{R}^2.\mathrm{tr}\,(g(g)^*) \\ &= -|\mathrm{Ric}|^2 + \frac{1}{n}\mathrm{R}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \frac{1}{n}\mathrm{R}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - \frac{1}{n^2}\mathrm{R}^2 n \\ &= -|\mathrm{Ric}|^2 + \frac{1}{n}\mathrm{R}^2, \end{aligned}$$

assim,

$$\frac{1}{2}\Delta_f \mathrm{R} = -|\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g|^2 + \mathrm{R}(\lambda - \frac{1}{n}\mathrm{R}).$$

2.2 Alguns resultados sobre solitons gradientes

Agora provaremos alguns resultados gerais à cerca de solitons gradiente, que motivarão a prova do teorema sobre a rigidez de solitons gradiente para o caso de variedades não-compactas.

Proposição 2.11. *Se um soliton gradiente (M, g, f, λ) é de Einstein, então ou o soliton é o Gaussiano, ou* $\mathrm{Hess}\, f = 0$.

Demonstração. Por hipótese $\mathrm{Ric} = \mu g$, assim

$$\mu g + \mathrm{Hess}\, f = \lambda g.$$

Se $\mu = \lambda$, então $\mathrm{Hess}\, f = 0$. Se $\mu \neq \lambda$, temos

$$\mathrm{Hess}\, f = (\lambda - \mu) g.$$

Isto é suficiente para provarmos que M é isométrico ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, veja Teorema 2 de Tashiro em [20]. Mas por conveniência vamos apresentar uma prova deste resultado. Com efeito, considere $\bar{f} = \frac{1}{\lambda-\mu} f$, assim

$$\mathrm{Hess}\, \bar{f} = g.$$

Daí, temos que $\bar{f}$ é estritamente convexa, pois na forma de $(1,1)-$tensor $\nabla^2 \bar{f} = I$, isto é, os autovalores de $\nabla^2 \bar{f}$ serão estritamente positivo, daí $\bar{f}$ possui no máximo um ponto crítico. Além disso, f é própria. Com efeito, fixado $p \in M$, seja $x \in M$ qualquer, como M é completo, existe uma geodésica normalizada minimizante $\gamma : [0, d(x,p)] \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(d(x,p)) = x$, onde $d(x,p)$ é a distância de x a p, logo pela Proposição 1.16 para todo $t \in [0, d(x,p)]$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{f} \circ \gamma)(t) = \mathrm{Hess}\, \bar{f}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1,$$

integrando e usando o teorema fundamental do cálculo

$$\frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \gamma)(t) - \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \gamma)(0) = t, \tag{2.17}$$

integrando novamente e usando a Proposição 1.6

$$(\bar{f} \circ \gamma)(t) = \bar{f}(p) + \frac{t^2}{2} + g(\nabla \bar{f}(p), \gamma'(0))t. \tag{2.18}$$

Assim se $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em M que escapa de qualquer compacto, então $d(x_i, p) \to \infty$, da igualdade (2.18) segue que $\{\bar{f}(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ que escapa de qualquer compacto, logo $\bar{f}$ é própria.

Afirmamos ainda que $\bar{f}$ possui ponto crítico. De fato, supondo $|\nabla \bar{f}| \neq 0$ sobre M. Considere o campo $X = \frac{\nabla \bar{f}}{|\nabla \bar{f}|}$ sobre M, como M é completo e $|X| = 1$, então X é completo (veja Capítulo 7 de [4]). Seja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma curva integral de X, isto é , $X(\gamma) = \gamma'$.

Para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\gamma'}\gamma', Y) &= \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} g(\nabla_{\nabla \bar{f}}\gamma', Y) \\ &= \frac{1}{|\nabla \bar{f}|^2} g(\nabla_{\nabla \bar{f}}\nabla \bar{f}, Y) + \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) g(\nabla \bar{f}, Y) \\ &= \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} g(\nabla_{\gamma'}\nabla \bar{f}, Y) + D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) g(\gamma', Y) \\ &= \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} \mathrm{Hess}\, \bar{f}(\gamma', Y) + D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) \mathrm{Hess}\, \bar{f}(\gamma', Y) = 0, \end{aligned}$$

pois como $\nabla^2 \bar{f} = I$ e $|X| = 1$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_{\nabla \bar{f}} X &= \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} \nabla_{\nabla \bar{f}}\nabla \bar{f} + D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) \nabla \bar{f} \\ &= \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} \nabla \bar{f} + D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) \nabla \bar{f}, \end{aligned}$$

assim

$$g(\nabla_{\nabla \bar{f}} X, \nabla \bar{f}) = g(X, \nabla \bar{f}) + D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) g(\nabla \bar{f}, \nabla \bar{f}),$$

multiplicando a igualdade anterior por $\frac{1}{|\nabla \bar{f}|^2}$, obtemos

$$0 = g(\nabla_X X, X) = \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} g(X, X) + D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) g(X, X),$$

daí

$$D_{\nabla \bar{f}}\Big(\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}\Big) = -\frac{1}{|\nabla \bar{f}|}.$$

Portanto, γ é uma geodésica. Da igualdade (2.17) $(\bar{f}\circ\gamma)'(t_0) = 0$, quando $t_0 = -(\bar{f}\circ\gamma)'(0)$, assim

$$\begin{aligned} 0 = (\bar{f} \circ \gamma)'(t_0) &= g(\nabla \bar{f}(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0)) \\ &= \frac{|\nabla \bar{f}(\gamma(t_0))|^2}{|\nabla \bar{f}(\gamma(t_0))|} \\ &= |\nabla \bar{f}(\gamma(t_0))| \neq 0, \end{aligned}$$

contradição. Além disso como $\bar{f}$ é estritamente convexa e própria segue do Lema 1.19 que $\bar{f}$ possui um único ponto de mínimo global.

Da igualdade (2.18) e do fato que existe único $p \in M$ tal que $\nabla \bar{f}(p) = 0$, a menos de uma constante podemos assumir que

$$\bar{f} = \frac{r^2}{2}, \tag{2.19}$$

onde $r : M \to \mathbb{R}$ é uma função distância.

Agora note que das igualdades (2.18) e (2.19), e como $p \in M$ é o único ponto crítico de M, segue que para todo $x \in M \setminus \{p\}$ a função distância $d(x,p)$ é diferenciável, daí do teorema (densidade de Bishop) tem-se que $cut(p) = \emptyset$ (cut locus de p), donde $\exp_p : T_pM \simeq \mathbb{R}^n \to M$ é um difeomorfismo (veja Proposição 3.9 de [3]). Introduzindo coordenadas polares geodésicas sobre T_pM, isto é, $(r,\theta) \in (0,+\infty) \times S^{n-1}$. Considerando $\{E_i\}_{i=2}^n$ referencial ortonormal local de S^{n-1} e $\{\theta^i\}_{i=2}^n$ seu referencial dual, e estendendo-os radialmente. Então pelo Lema de Gauss (veja Capítulo 5 de [19])

$$g = dr \otimes dr + g_{ij}(r,\theta)\theta^i \otimes \theta^j, \tag{2.20}$$

onde $g_{ij} = g(E_i, E_j)$, como a métrica é localmente Euclidiana,

$$g_{ij} = r^2\delta_{ij} + O(r^2). \tag{2.21}$$

Já que $([0,\infty) \times S^{n-1}, dr \otimes dr + r^2 \sum_{i=2}^n \theta^i \otimes \theta^i)$ é isométrico ao $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica canônica (veja Capítulo 2 de [19]), para o proposto basta mostrar que

$$g_{ij} = r^2\delta_{ij}.$$

Sendo $\nabla r = \frac{\partial}{\partial r}$ da igualdade (2.20)

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Hess}\, r(E_i,E_j) &= (\mathcal{L}_{\nabla r} g)(E_i,E_j) \\
&= 2dr \otimes (\mathcal{L}_{\nabla r} dr)(E_i,E_j) + (\mathcal{L}_{\nabla r} g_{ij})\theta^i \otimes \theta^j(E_i,E_j) \\
&+ g_{ij}(\mathcal{L}_{\nabla r}\theta^i) \otimes \theta^j(E_i,E_j) + +g_{ij}\theta^i \otimes (\mathcal{L}_{\nabla r}\theta^j)(E_i,E_j) \\
&= \frac{\partial g_{ij}}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Da igualdade (2.19) e do Corolário 1.7, temos que $\nabla \bar{f} = r\nabla r$ implicando

$$\nabla r = \frac{\nabla \bar{f}}{|\nabla \bar{f}|},$$

assim dados $E_i, E_j \in \nabla r^{\perp}$, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\, r(E_i,E_j) &= g(\nabla_{E_i}\nabla r, E_j) \\
&= g(\nabla_{E_i}\frac{\nabla \bar{f}}{|\nabla \bar{f}|}, E_j) \\
&= \frac{1}{|\nabla \bar{f}|} g(\nabla_{E_i}\nabla \bar{f}, E_j) + D_{E_i}\Big(\frac{1}{\nabla \bar{f}}\Big) g(\nabla \bar{f}, E_j) \\
&= \frac{1}{r}\mathrm{Hess}\, \bar{f}(E_i,E_j) \\
&= \frac{1}{r} g_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo g_{ij} satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial r} & = & \frac{2}{r} g_{ij} \\ g_{ij} & = & r^2\delta_{ij} + \quad O(r^2). \end{cases} \tag{2.22}$$

Agora observe que podemos resolver o sistema (2.22), usando o método de separação de variáveis, pois para $g_{ij} > 0$ o sistema (2.22) é equivalente a

$$\frac{\partial g_{ij}}{g_{ij}} = 2\frac{\partial r}{r},$$

isto é,

$$\partial(\ln g_{ij}) = 2\frac{\partial r}{r},$$

assim integrando obteremos

$$\ln g_{ij} = \ln r^2.$$

Portanto $g_{ij} = r^2\delta_{ij}$, donde M é isométrica a $\mathbb{R}^n$, o que prova a proposição. □

Teorema 2.12. *Um soliton de Ricci compacto e orientável com* $\mathrm{Ric}\,(X,X) \leq 0$ *é de Einstein, com constante de Eisntein* λ *dado pela equação do soliton. Em particular, um soliton gradiente compacto com curvatura escalar constante é de Einstein.*

Demonstração. Pelo Lema 2.8 temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 + \frac{1}{2}D_X|X|^2 - \lambda|X|^2,$$

como

$$(L_X g)(X,X) \quad = \quad 2g(\nabla_X X, X) = D_X|X|^2$$

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g \quad = \quad \lambda g,$$

então

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X,X) \geq 0.$$

Além disso pelo teorema da divergência

$$\int_M \frac{1}{2}\Delta|X|^2 = 0,$$

pois $\partial M = \emptyset$, daí $\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = 0$, implicando que

$$|\nabla X|^2 = \mathrm{Ric}\,(X,X) \leq 0,$$

donde $|\nabla X| = 0$, assim tomando um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança de $p \in M$ arbitrário, tem-se $\nabla_{Ei} X = 0$ e dados $Y = y^i E_i$,$Z = z^i E_i$ $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer, obtém-se

$$\begin{aligned}(L_X g)(Y,Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \\ &= \sum_{i=1}^n y^i g(\nabla_{Ei} X, Z) + \sum_{i=1}^n z^i g(Y, \nabla_{Ei} X) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{Ric} = \lambda g$. Se $X = \nabla f$ e R for constante, então $\nabla \mathrm{R} = 2\mathrm{Ric}\,(\nabla f)$ implica que $\mathrm{Ric}\,(\nabla f, \nabla f) = 0$ e o resultado segue-se do provado acima. $\square$

Proposição 2.13. *Um soltion gradiente com* $\mathrm{Ric} \geq 0\,(\leq 0)$ *possui curvatura escalar constante se, e somente, se* $\mathrm{Ric}\,(\nabla f, \nabla f) = 0$.

Demonstração. Lembre que para um operador auto-adjunto $T \geq 0\,(\leq 0)$, se

$$g(T(v), v) = 0 \ \Rightarrow T(v) = 0.$$

Com efeito, pelo Teorema Espectral existe uma base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$ de autovetores tais que $T(E_i) = \lambda_i E_i$ com $\lambda_i \geq 0$ para cada i, se

$$v = \alpha^i E_i \ ; \ g(T(v), v) = 0,$$

então

$$(\alpha^i)^2 \lambda_i = 0 \ \Rightarrow (\alpha^i)^2 = 0 \ \Rightarrow v = 0 \ \Rightarrow T(v) = 0.$$

Como o tensor Ricci é simétrico, então Ric na forma de $(1,1)-$tensor é auto-adjunto, assim a proposição segue de $\nabla \mathrm{R} = 2\mathrm{Ric}\,(\nabla f)$. $\square$

Lema 2.14. *Se* $(M, g, f, \lambda) = (M_1 \times M_2, g_1 + g_2, f, \lambda)$ *é um soliton gradiente, então* $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ *e cada* (M_i, g_i, f_i, λ) *é um soliton gradiente*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} + \mathrm{Hess}\, f_i = \lambda g_i.$$

Demonstração. Primeiro note que, se usarmos coordenadas locais $\{x^j\}$ onde $x^1, \ldots, x^m$ são coordenadas sobre M_1 e $x^{m+1}, \ldots, x^n$ são coordenadas sobre M_2. A métrica produto implica que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0, \tag{2.23}$$

se $i \leq m$ e $j \geq m+1$ ou $i \geq m+1$ e $j \leq m$. Se escrevermos $\nabla f = \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, então

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla f &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \alpha^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \Big(\frac{\partial}{\partial x^i} \alpha^j \Big) \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Se assumirmos que $i \leq m$, então

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla f \in \mathfrak{X}(M_1),$$

$$\alpha^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M_1),$$

mostrando que $\frac{\partial}{\partial x^i}\alpha^j = 0$ par $j \geq m+1$. De forma análoga $\frac{\partial}{\partial x^i}\alpha^j = 0$ quando $i \geq m+1$ e $j \leq m$. Isto mostra que

$$\nabla f = X_1 + X_2, \tag{2.24}$$

onde $X_i \in \mathfrak{X}(M_i)$, g_i é a métrica de M_i.

Pela Proposição 1.10

$$\begin{aligned} \nabla f &= g^{lk} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= g_1^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + g_2^{rs} \frac{\partial f}{\partial x^r} \frac{\partial}{\partial x^s}, \end{aligned}$$

onde $i, j \leq m$ e $r, s \geq m+1$.

Agora note que a igualdade (2.24) significa que, para $r \geq m+1$ e $i \leq m$

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\Big(g_1^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big) = 0 \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(g_2^{rs} \frac{\partial f}{\partial x^r} \Big) = 0,$$

assim, pela igualdade (2.23), temos

$$g_1^{ij} \frac{\partial}{\partial x^r}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big) = 0,$$

logo

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} : M_1 \times \{q\} \to \mathbb{R},$$

para algum $q \in M_2$. Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial x^r} : \{p\} \times M_2 \to \mathbb{R},$$

para algum $p \in M_1$.

Definindo $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ pondo $f_1(x_1) = f(x_1, q)$ e $f_2 : M_2 \to \mathbb{R}$ pondo $f_2(x_2) = f(p, x_2) - f(p, q)$, teremos

$$\nabla f_1 = g_1^{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = g_1^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_1, q) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\nabla f_2 = g_2^{rs}\frac{\partial f_2}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial x^s} = g_2^{rs}\frac{\partial f}{\partial x^r}(p,x_2)\frac{\partial}{\partial x^s},$$

definindo agora $f_1 + f_2 : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ por $(f_1+f_2)(x_1,x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, temos que

$$\nabla f_1 + \nabla f_2 = \nabla(f_1+f_2) = \nabla f, \tag{2.25}$$

logo, pelo Corolário 1.9 $f = f_1 + f_2$.

Para concluir a prova, note que a decomposição obtida em 2.24 pode ser feita para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, como $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \cong T_pM_1 \oplus T_qM_2$ (veja Capítulo 1 de [13]) esta decomposição é única, e a conexão Riemanniana de M é $\nabla = \nabla^1 + \nabla^2$ (veja Capítulo 6 de [4]), onde ∇^i é a conexão Riemanniana de M_i, daí

$$\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}_1 + \mathrm{Ric}_2,$$

e da igualdade (2.25)

$$\mathrm{Hess}\, f = \mathrm{Hess}\, f_1 + \mathrm{Hess}\, f_2,$$

logo dados $X_i, Y_i \in \mathfrak{X}(M_i)$

$$\mathrm{Ric}\,(X_i,Y_i) + \mathrm{Hess}\, f(X_i,Y_i) = \lambda g(X_i,Y_i),$$

reduz-se

$$\mathrm{Ric}_i\,(X_i,Y_i) + \mathrm{Hess}\, f_i(X_i,Y_i) = \lambda g_i(X_i,Y_i).$$

O que prova o lema. □

Note que, o lema acima implica

$$\mathrm{Rm}\,(\cdot,\nabla f)\nabla f = \mathrm{Rm}_1\,(\cdot,\nabla f_1)\nabla f_1 + \mathrm{Rm}_2\,(\cdot,\nabla f_2)\nabla f_2,$$

assim se, por exemplo M_2 for plano, então a curvatura radial de M e M_1 são iguais.

Agora provaremos um lema sobre funções distância que permite decompor uma variedade Riemannina.

Lema 2.15. *Se $f : (M,g) \to \mathbb{R}$ é uma função distância tal que $\nabla^2 f = 0$, então (M,g) é isométrica a $(M',\widetilde{g}) = (N \times \mathbb{R}, g' + g_0)$, onde g_0 é a métrica canônica do $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Primeiro observe que sendo $\nabla^2 f = 0$, então ∇f é um campo paralelo, daí para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\begin{aligned} g\Big(\nabla\Big(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\Big), X\Big) &= D_X\Big(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\Big) \\ &= g(\nabla_X \nabla f, \nabla f) \\ &= g(\nabla_{\nabla f}\nabla f, X) \end{aligned}$$

pois $\nabla^2 f$ é um $(0,2)-$tensor simétrico, assim

$$\nabla\Big(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\Big) = \nabla_{\nabla f}\nabla f, \tag{2.26}$$

donde,

$$0 = \nabla\Big(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\Big) = \nabla_{\nabla f}\nabla f,$$

logo as curvas integrais de ∇f são geodésicas. Além disso da definição de derivada de Lie temos que para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X,Y) &= g(\nabla_X \nabla f, Y) + g(X, \nabla_Y \nabla f)\\
&= 2\nabla^2 f(X,Y)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto ∇f é um campo de Killing completo, pois M é completo, mas ainda supondo $N = f^{-1}(0) \neq \emptyset$, então (N^{n-1}, g') é uma subvariedade Riemanniana completa, onde g' é a métrica induzida por g e totalmente geodésica, pois tendo este condimensão igual a 1, sua segunda forma fundamental coincide com o hessiano de f, mas por hipótese $\nabla^2 f = 0$. Desta forma, definamos $h : N \times \mathbb{R} \to M$ por

$$h(x,t) = \varphi_t(p),$$

onde φ_t é o fluxo associado ao campo ∇f com $N \times \mathbb{R}$ munida da métrica produto $\widetilde{g} = g' + g_0$, onde g_0 é a métrica canônica do $\mathbb{R}$, pela diferenciabilidade do fluxo temos que h é diferenciável. Além disso observe que

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) = g(\nabla f, \frac{d}{dt}\varphi_t(p)) = |\nabla f|^2 = 1,$$

implicando que

$$h(N,t) \subset \{x \in M; f(x) = t\}. \tag{2.27}$$

Afirmamos que h é bijetiva. Com efeito, se $h(p_1,t_1) = h(p_2,t_2)$, então $\varphi_{t_1}(p_1) = \varphi_{t_2}(p_2)$, contradizendo o fato de φ_t serem curvas integrais de ∇f, assim h é injetiva. Para a sobrejetividade, observe que dado $q \in M$ qualquer, se $q \in N$ é claro que $q = \varphi_0(q) = h(q,0)$, se $q \in M \setminus N$, então existe $p \in N$ tal que $d(p,q) = d(q,N)$, pois $N = f^{-1}(0)$ fechado, como M é completa existe uma geodésica minimizante unitária $\gamma : [0, d(p,q)] \to M$ ligando p a q, além disso γ é normal a N, donde γ coincide com $\varphi_t(p)$ e a sobrejetividade segue.

Provemos que h define uma isometria, desta forma lembre que para qualquer $(p,l) \in N \times \mathbb{R}$, $T_{(p,l)}(N \times \mathbb{R}) \cong T_pN \oplus T_l\mathbb{R}$.

Se $\{1\}$ é uma base de $T_l\mathbb{R}$, tomando a curva $\gamma : I \to N \times \mathbb{R}$ dada por $\gamma(s) = (p, s+l)$, isto é, $\gamma(0) = (p,l)$ e $\gamma'(0) = 1$, então

$$dh_{(p,l)}(1) = \frac{d}{ds}\varphi_{s+l}(p)\Big|_{s=0} = \nabla f(\varphi_s(p))$$

pois $\varphi_t(p)$ é curva integral do campo ∇f, assim

$$g(dh_{(p,l)}(1), dh_{(p,l)}(1)) = g(\nabla f(p), \nabla f(p)) = 1 = \widetilde{g}(1,1).$$

Se $v, w \in T_pN$, então

$$g(dh_{(p,l)}(v), dh_{(p,l)}(w)) = g'(v,w) = \widetilde{g}(v,w),$$

segue do fato que sendo ∇f um campo de Killing e N é uma subvariedade totalmente geodésica, $h(p,l)$ com $l \in \mathbb{R}$ fixo é o fluxo do campo ∇f, portanto uma isometria.
Se $v \in T_pN$ e $w \in T_l\mathbb{R}$, suponha por simplicidade $g_0(w,w) = 1$, assim segue de (2.27)

$$g(dh_{(p,l)}(v), dh_{(p,l)}(w)) = g(dh_{(l,p)}(v), \nabla f) = 0 = \widetilde{g}(v,w).$$

Portanto para quaisquer $v, w \in T_{(p,l)}(N \times \mathbb{R})$ e $(p,l) \in N \times \mathbb{R}$

$$g(dh_{(p,l)}(v), dh_{(p,l)}(w)) = \widetilde{g}(v,w).$$

$\square$

Proposição 2.16. *Todo soliton gradiente (M, g, f, λ) com $\lambda = 0$ e curvatura escalar constante é Ricci plano, isto é,* $\mathrm{Ric} = 0$. *Além disso, se f não é constante, então $M = N \times \mathbb{R}$ com N Ricci plano.*

Demonstração. Como R é constante e $\lambda = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\Delta_f \mathrm{R} &= -|\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g|^2 + \mathrm{R}\Big(\lambda - \frac{1}{n}\mathrm{R}\Big) \\ &= -|\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g|^2 - \frac{1}{n}\mathrm{R}^2. \end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{R} = 0$ e $\mathrm{Ric} = 0$. Além disso, da equação dos solitons gradientes

$$\mathrm{Hess}\, f = -\mathrm{Ric} = 0,$$

donde $\nabla_Y \nabla f = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, ∇f é paralelo. Se f não for constante, então ∇f é paralelo não nulo, pelo mesmo argumento utilizado no Lema 2.15, temos que $M = N \times \mathbb{R}$ e como $\mathbb{R}$ é Ricci plano, então N também será Ricci plano.

□

Proposição 2.17. *Seja (M, g, f, λ) um soliton gradiente com curvatura escalar constante e $\lambda \neq 0$. Quando $\lambda > 0$ tem-se $0 \leq \mathrm{R} \leq n\lambda$, se $\lambda < 0$ então $n\lambda \leq \mathrm{R} \leq 0$. No caso em que a curvatura escalar é igual a um dos extremos, (M, g) é de Einstein.*

Demonstração. Como R é constante, então

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_f \mathrm{R} \;=\; -|\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g|^2 + \mathrm{R}\Big(\lambda - \frac{1}{n}\mathrm{R}\Big),$$

monstrando que

$$0 \leq |\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g|^2 \;=\; \mathrm{R}\Big(\lambda - \frac{1}{n}\mathrm{R}\Big).$$

Assim quando $\lambda > 0$, supondo $\mathrm{R} \geq 0$ (o caso $\mathrm{R} \leq 0$ se faz de modo análogo) temos que

$$\lambda - \frac{1}{n}\mathrm{R} \geq 0,$$

isto é, $0 \leq \mathrm{R} \leq n\lambda$, em particular quando $\mathrm{R} = 0$, então

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g = 0,$$

isto é, a métrica é de Einstein com constante de Einstein igual a zero, se $\mathrm{R} = n\lambda$, novamente

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\mathrm{R}g = 0,$$

e daí a métrica é de Einstein com constante de Einstein igual a λ. O caso $\lambda < 0$ se faz de maneira análoga. □

O próximo resultado oferece condições fracas, para que solitons gradientes com curvatura escalar constante sejam radialmente plano, isto é, $\sec(\cdot, \nabla f) = 0$.

Proposição 2.18. *Cada uma das condições abaixo implica que um soliton gradiente (M, g, f, λ) com $\lambda > 0\,(< 0)$ é radialmente plano.*

(1) *Curvatura escalar constante e* $\sec(\cdot, \nabla f) \geq 0\,(\sec(\cdot, \nabla f) \leq 0)$.

(2) *Curvatura escalar constante e* $0 \leq \mathrm{Ric} \leq \lambda g\,(\lambda g \leq \mathrm{Ric} \leq 0)$.

Demonstração. Para (1), tome um referencial ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$ em torno de um ponto $p \in M$, e note que R constante implica

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\nabla_{\nabla f}\mathrm{R} &= \mathrm{Ric}\,(\nabla f, \nabla f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(E_i, \nabla f)\nabla f, E_i). \end{aligned}$$

Sendo $\sec(E, \nabla f) \geq 0$ (≤ 0) para todo $E \in \mathfrak{X}(M)$ e

$$\sec(E, \nabla f) = \frac{g(\mathrm{Rm}\,(E, \nabla f)\nabla f, E)}{|X|^2|\nabla f|^2 - g(E, \nabla f)^2},$$

segue que $g(\mathrm{Rm}\,(E_i, \nabla f)\nabla f, E_i) = 0$ para cada i, daí $\sec(E, \nabla f) = 0$.
Para o que falta, primeiro observe que

$$0 = \frac{1}{2}\Delta_f \mathrm{R} = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric} \circ (\lambda I - \mathrm{Ric})).$$

Segue da hipótese sobre o tensor Ricci que $\mathrm{Ric} \circ (\lambda I - \mathrm{Ric})$ é um operador não-negativo. Assim,

$$\mathrm{Ric} \circ (\lambda I - \mathrm{Ric}) = 0.$$

Se $E \in \mathfrak{X}(M)$ é um autovetor, isto é, $\mathrm{Ric}\,(E) = \mu E$, temos que

$$\lambda\mu E - \mu^2 E = 0,$$

donde $\mu = 0$ ou $\mu = \lambda$, analogamente para $\nabla^2 f$.

Assim a igualdade (2.14) reduz-se a

$$\begin{aligned} \mathrm{Rm}\,(\cdot, \nabla f)\nabla f &= (\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric})(\cdot) \\ &= -\nabla^2_{\nabla f, \cdot}\nabla f. \end{aligned}$$

Se $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\nabla^2 f(E) = \nabla_E \nabla f = 0$, então

$$\begin{aligned} g(\nabla^2_{\nabla f, E}\nabla f, E) &= g(\nabla_{\nabla f}\nabla_E \nabla f, E) - g(\nabla_{\nabla_{\nabla f}E}\nabla f, E) \\ &= -g(\nabla_E \nabla f, \nabla_{\nabla f}E) = 0, \end{aligned}$$

e quando $\nabla^2 f(E) = \lambda E$

$$\begin{aligned} g(\nabla^2_{\nabla f, E}\nabla f, E) &= g(\nabla_{\nabla f}\nabla_E \nabla f, E) - g(\nabla_{\nabla_{\nabla f}E}\nabla f, E) \\ &= \lambda g(\nabla_{\nabla f}E, E) - g(\nabla_E \nabla f, \nabla_{\nabla f}E) \\ &= \lambda g(\nabla_{\nabla f}E, E) - \lambda g(E, \nabla_{\nabla f}E) = 0. \end{aligned}$$

Assim $g(\mathrm{Rm}\,(E, \nabla f)\nabla f, E) = 0$ para todos os autoespaços. Isto mostra que a métrica é radialmente plana, isto é, $\sec(\cdot, \nabla f) = 0$. $\square$

Proposição 2.19. *Se (M,g,f,λ) é um soliton gradiente com curvatura escalar constante, $\lambda \neq 0$ e f não constante, então existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que*

$$f+\alpha = \frac{\lambda}{2}r^2,$$

onde r é uma função diferenciável quando $\nabla f \neq 0$, e satisfaz $|\nabla r| = 1$.

Demonstração. Lembre que pela igualdade (2.26)

$$\nabla(\frac{1}{2}|\nabla f|^2) = \nabla_{\nabla f}\nabla f.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla(\mathrm{R}+|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\nabla \mathrm{R} + \nabla\frac{1}{2}|\nabla f|^2 \\ &= \mathrm{Ric}\,(\nabla f) + \nabla_{\nabla f}\nabla f \\ &= \lambda\nabla f, \end{aligned}$$

daí, pelo Corolário 1.9

$$\nabla(\mathrm{R}+|\nabla f|^2 - 2\lambda f) = 0,$$

implicando que

$$\mathrm{R}+|\nabla f|^2 - 2\lambda f = c, \tag{2.28}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Como R é constante e $\lambda \neq 0$, tome

$$\alpha = \frac{\mathrm{R}-c}{2\lambda},$$

e defina $\bar{f} : M \to \mathbb{R}$ pondo

$$\bar{f} = f - \Big(\frac{\mathrm{R}-c}{2\lambda}\Big),$$

assim $\nabla\bar{f} = \nabla f \;\Rightarrow \mathrm{R}+|\nabla\bar{f}|^2 - 2\lambda\bar{f} - \mathrm{R} + c = c$. Daí

$$|\nabla\bar{f}|^2 = 2\lambda\bar{f}.$$

Portanto, λ e $\bar{f}$ tem o mesmo sinal e $\bar{f}(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla f(p) = 0$. Como f é não constante, defina $r : M \to \mathbb{R}$ pondo

$$\bar{f} = \frac{\lambda}{2}r^2,$$

então pelo Corolário 1.7

$$\nabla\bar{f} = \lambda r\nabla r,$$

e ainda

$$\begin{aligned} 2\lambda\bar{f} &= |\nabla\bar{f}|^2 \\ &= \lambda^2 r^2 |\nabla r|^2 \\ &= 2\lambda\bar{f}|\nabla r|^2. \end{aligned}$$

Portanto, quando $\nabla f \neq 0$ teremos $|\nabla r| = 1$, o que finaliza a prova da proposição. $\square$

Capítulo 3

Rigidez de solitons gradiente

Neste capítulo provamemos o teorema que caracteriza os solitons gradientes rígidos e como aplicação provaremos a rigidez dos solitons gradientes homogêneos. Neste capítulo (M, g) sempre denotará uma variedade Riemanniana conexa e completa, suponha ainda na seção 3.2 que a métrica g possui curvatura escalar limitada.

3.1 Solitons gradiente rígido

Definição 3.1. *Um soliton gradiente (M, g, f, λ) é **rígido**, se ele é isométrico a um quociente $N \times_\Gamma \mathbb{R}^k$, sendo N uma variedade de Einstein com constante de Einstein λ e $f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$ sobre $\mathbb{R}^k$, isto é, um soliton Gaussiano, onde a ação Γ age livremente sobre N e pelas transformações ortogonais sobre $\mathbb{R}^k$(fora as componentes translacionais).*

Agora vamos provar o teorema principal do trabalho, que caracteriza os solitons gradientes rígidos sobre variedades não-compactas, como dito na introdução deste trabalho o caso compacto foi provado em [6].

Teorema 3.2. *Um soliton gradiente (M, g, f, λ) é rígido se, e somente se, possui curvatura escalar constante e é radialmente plano.*

Demonstração. Supondo (M, g, f, λ) ser rígido, então $M = N \times \mathbb{R}^k$ onde N é uma variedade de Einstein, note ainda que pelo Lema 2.14 e da definição de rigidez f é tal que

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2),$$

com f_1 constante sobre N e $f_2(x_2) = \frac{\lambda}{2}|x_2|^2$ sobre $\mathbb{R}^k$, se Rm_1 é o tensor de Riemann de N e Rm_2 é o tensor de Riemann do $\mathbb{R}^k$, então para todo $E \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rm}\,(E, \nabla f)\nabla f &= \mathrm{Rm}_1\,(E_1, \nabla f_1)\nabla f_1 + \mathrm{Rm}_2\,(E_2, \nabla f_1)\nabla f_2 \\ &= \mathrm{Rm}_1\,(E_1, \nabla f_1)\nabla f_1 = 0,\end{aligned}$$

pois f_1 é constante e $\mathrm{Rm}_2 = 0$. Logo $\sec(E, \nabla f) = 0$, isto é, M é radialmente plano, agora lembre que pela igualdade (2.3)

$$\mathrm{R} + \Delta f = \lambda n,$$

como $f = f_1 + f_2$, temos que $\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$, mas por hipótese $(\mathbb{R}^k, g_o, f_2, \lambda)$ é um soliton Gaussiano (onde g_o é a métrica canônica do $\mathbb{R}^k$), mas todo soliton Gaussiano satisfaz $\mathrm{Hess}\, f_2 = \lambda g_o$, donde tomando o traço , tem-se $\Delta f_2 = \lambda k$, logo $\mathrm{R} = \lambda(n-k)$ é constante.

Reciprocamente, se um soliton gradiente (M, g, f, λ) é tal que, R é constante e para todo $E \in \mathfrak{X}(M)$ $\sec(E, \nabla f) = 0$, então:
Se $\lambda = 0$, aplicando a Proposição 2.16 e o Lema 2.14 sucessivas vezes, M será isométrica a $N \times \mathbb{R}^k$, com N de Einstein e $f = \frac{\lambda}{2}|x|^2$ sobre $\mathbb{R}^k$, donde M é rígido.
Se $\lambda \neq 0$, suponha por simplicidade $\lambda > 0$, o caso $\lambda < 0$ prova-se de forma análoga.

Usando a equação dos solitons na forma de $(1,1)-$tensor

$$\mathrm{Ric} + S = \lambda g, \quad S = \nabla^2 f$$

das igualdades (2.13) e (2.14), obtemos

$$\nabla_{\nabla f} S + S \circ (S - \lambda I) = 0, \tag{3.1}$$

$$\nabla_{\nabla f}\mathrm{Ric} + \mathrm{Ric} \circ (\lambda I - \mathrm{Ric}) = 0.$$

Note que podemos assumir que f é não constante, pois do contrário teríamos $\mathrm{Hess}\, f = 0$, daí

$$\mathrm{Ric} = \lambda g,$$

donde pelo teorema de Bonnet-Myers (veja capítulo 9 de [4]) M seria compacta. Logo pela Proposição 2.19, a menos de uma constante podemos assumir que

$$f = \frac{\lambda}{2} r^2,$$

onde r é uma função distância não negativa. Assim, o conjunto mínimo da f será

$$N = \{x \in M; f(x) = 0\}.$$

Ainda pela Proposição 2.19, teremos

$$N = \{x \in M; \nabla f(x) = 0\}.$$

Assim da igualdade (3.1) para todo $x \in N$, tem-se

$$S \circ (S - \lambda I) = 0. \tag{3.2}$$

Considere a função $\mu_{min} : M \to \mathbb{R}$, onde $\mu_{min}(p)$ é o menor autovalor de S. Se $E \in T_pM$ é tal que $|E| = 1$ e $S(E) = \mu_{min}E$, podemos obter uma base ortonormal de T_pM $\{E_i\}_{i=1}^n$ tal que $E_1 = E$, a partir daí podemos obter um referencial geodésico em torno de p, isto é, $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$ para isto basta tomar uma uma bola normal em torno de p e para cada ponto desta bola, tomar o transporte paralelo da base pela única geodésica que liga p a cada ponto da bola. Assim da igualdade (3.1), temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\nabla f}S)(E) + S \circ (S - \lambda I)(E) &= 0\\
\nabla_{\nabla f}(S(E)) - S(\nabla_{\nabla f}E) + S^2(E) - \lambda S(E) &= 0\\
\mu_{min}\nabla_{\nabla f}E - D_{\nabla f}\mu_{min}E - \nabla_{\nabla_{\nabla f}E}\nabla f + \mu_{min}^2 E - \lambda\mu_{min}E &= 0,
\end{aligned}$$

como $\nabla f = a^j E_j$, então $\nabla_{\nabla f}E = a^j\nabla_{E_j}E = 0$ em p, assim

$$\Big(-D_{\nabla f}\mu_{min} - \mu_{min}(\lambda - \mu_{min})\Big)E = 0,$$

de $|E| = 1$ temos

$$D_{\nabla f}\mu_{min} = \mu_{min}(\lambda - \mu_{min}).$$

Quando $r > 0$, e usando um sistema de coordenadas tal que $\frac{\partial}{\partial x^1} = \nabla f$ e lembrando que $\nabla f = \lambda r \nabla r$, a igualdade anterior torna-se

$$\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r} = \frac{\mu_{min}}{\lambda r}(\lambda - \mu_{min}). \tag{3.3}$$

Afirmamos que $\mu_{min} \geq 0$. Com efeito, se $\mu_{min} < 0$ para algum r_o, temos da igualdade (3.3) que $\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r} < 0$, donde μ_{min} será decrescente numa vizinhança de r_0, mas observe que μ_{min} será decrescente para $r > r_0$, pois do contrário μ_{min} se tornará crescente a partir de algum $\bar{r}$, donde existirá $\bar{r}$ tal que $\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r} = 0$ e necessariamente $\mu_{min}(\bar{r}) < 0$, pois $\mu_{min} < 0$ numa vizinhança de r_0, daí a igualdade (3.3) implicará que em $\bar{r}$

$$\mu_{min}(\lambda - \mu_{min}) = 0,$$

pois $\lambda, r > 0$, assim ou $\mu_{min}(\bar{r}) = 0$, ou $\mu_{min}(\bar{r}) = \lambda$, contradição. Logo $\mu_{min} \to -\infty$, pois do contrário μ_{min} seria convexa, mas da igualdade (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu_{min}}{\partial r^2} &= -\frac{\mu_{min}}{\lambda r^2}(\lambda - \mu_{min}) + \frac{(\lambda - \mu_{min})}{\lambda r}\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r} - \frac{\mu_{min}}{\lambda r}\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r} \\ &= -\frac{\mu_{min}}{\lambda r^2}(\lambda - \mu_{min}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r} - \frac{2}{\lambda r}\mu_{min}\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r}. \end{aligned}$$

Novamente pela igualdade (3.3), temos

$$-\frac{\mu_{min}}{\lambda r^2}(\lambda - \mu_{min}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r},$$

assim

$$\frac{\partial^2 \mu_{min}}{\partial r^2} = -\frac{2}{\lambda r}\mu_{min}\frac{\partial \mu_{min}}{\partial r} < 0$$

contradizendo pelo Lema 1.18 o fato de μ_{min} ser convexa, mas $\mu_{min} \to -\infty$ contradiz a diferenciabilidade da f. Logo $\mu_{min} \geq 0$, donde pelo Lema 1.18 f é convexa.

Isto mostra que N é totalmente convexa, isto é, para quaisquer dois pontos de N, qualquer geodésica que liga estes pontos está contida em N. Com efeito, para quaisquer $p, q \in N$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, como f é convexa, então para todo $s \in [0,1]$

$$f(\gamma(s)) \leq (1-s)f(\gamma(0)) + sf(\gamma(1)),$$

como $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = 0$ e $f \geq 0$, segue que $f(\gamma(s)) = 0$ para todo $s \in [0,1]$.

Da igualdade (3.2) segue que sobre N os únicos autovalores de $S = \nabla^2 f$ são 0 e λ. Com efeito, se $E \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $S(E) = \xi E$ e $E \neq 0$, então da igualdade (3.2) temos que sobre N

$$\begin{aligned} S \circ (S - \lambda I)(E) &= 0 \\ S(S(E)) - \lambda S(E) &= 0 \\ \xi^2 E - \lambda \xi E &= 0 \\ (\xi^2 - \lambda \xi)E &= 0, \end{aligned}$$

como $E \neq 0$, então $\xi = 0$ ou $\xi = \lambda$. Já que a curvatura escalar é constante suas multiplicidades são constantes. Usando que o posto de $\nabla^2 f$ é constante, então pelo teorema do posto para conjuntos de nível, N será uma subvariedade (veja Capítulo 8 de [11]), cujo espaço tangente é dado pelo $\mathrm{Ker}\,(\nabla^2 f)$. Donde segue que N é totalmente geodésica. Além disso N é compacta e de Einstein, pois como N é totalmente geodésica o tensor Ric de N coincide com o tensor de Ricci de M, assim da equação dos solitons gradiente

$$\mathrm{Ric} = \lambda g,$$

implicando que N é de Einstein, com constante de Einstein igual a λ, e pelo teorema de Bonnet-Myers N é compacta.

Seja $\upsilon(N) = \{v \in T_pM\,; p \in N, v \in (T_pN)^{\perp} \subset T_pM\}$, e considere a aplicação exponencial normal

$$\exp_p : \upsilon(N) \to M.$$

Segue as curvas integrais de ∇f ou ∇r, pois N é totalmente geodésica, e assim um difeomorfismo.

Usando as equações fundamentais contidas no Teorema 1.27, tem-se que a métrica é completamente determinada pelo fato que por hipótese M é radialmente plano, e N é totalmente geodésica, donde M e $N \times_{\Gamma} \mathbb{R}^k$ satisfazem a mesma equação diferencial parcial assim por unicidade de solução M é do tipo $N \times_{\Gamma} \mathbb{R}^k$.

$\square$

3.2 Rigidez de solitons gradientes homogêneos

Proposição 3.3. *Se X é um campo de Killing sobre um soliton gradiente (M, g, f, λ), então $\nabla D_X f$ é paralelo. Além disso, se $\lambda \neq 0$ e $\nabla D_X f = 0$, então $D_X f = 0$.*

Demonstração. Como X é um de Killing, então

$$\mathcal{L}_X g = 0,$$

da definição de derivada de Lie e pelo Lema 1.40

$$\mathcal{L}_X \mathrm{Ric} = 0.$$

Pelo lema 1.42 e como $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, f = \lambda g$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_X \mathrm{Hess}\, f \\ &= \mathrm{Hess}\, \mathcal{L}_X f \\ &= \mathrm{Hess}\, D_X f, \end{aligned}$$

donde para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se $\nabla_Y \nabla D_X f = 0$, implicando que $\nabla D_X f$ é paralelo.

Se $\lambda \neq 0$ e $\nabla D_X f = 0$, então $D_X f$ é constante. Afirmamos que $D_X f = 0$, pois do contrário $D_X f = c \neq 0$ implica que f é sobrejetiva. Com efeito, seja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma curva integral de X (lembre que pela Proposição 1.43 γ está definida em todo $\mathbb{R}$, pois X é um de Killing), isto é, $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ teremos,

$$c = D_X f_{\gamma(t)} = g(\nabla f, \gamma'(t)) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t).$$

Assim, dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, tome $t_o = \frac{a-(f\circ\gamma)(0)}{c}$. Então,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(t_o) - (f \circ \gamma)(0) &= c t_o \\ &= c\frac{(a - (f \circ \gamma)(0))}{c} \\ &= a - (f \circ \gamma)(0). \end{aligned}$$

Portanto, $(f \circ \gamma)(t_o) = a$, isto é, f é sobrejetiva. Da igualdade (2.28) e como $\lambda \neq 0$, temos

$$f = \frac{\mathrm{R} + |\nabla f|^2 - c_1}{\lambda},$$

$c_1 \in \mathbb{R}$ constante. Como por hipótese a curvatura escalar R é limitada e $0 \leq |\nabla f|^2$, então f será limitada inferiormente, contradizendo o fato da f ser sobrejetiva. Portanto, se $\lambda \neq 0$ e $\nabla D_X f = 0$, então $D_X f = 0$. $\square$

Com esta proposição obtemos um critério para decompor um soliton gradiente, através da análise dos campos de Killing sobre os solitons gradiente.

Corolário 3.4. *Se X é um campo de Killing sobre um soliton gradiente, então ou $D_X f = 0$, ou M é isométrico a $N \times \mathbb{R}$ onde N é um soliton gradiente com a mesma curvatura radial de M.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3 ou $D_X f = 0$, ou $\nabla D_X f$ é um campo paralelo não nulo com $\mathrm{Hess}\, D_X f = 0$, daí pelos Lemas 2.14 e 2.15 o soliton gradiente é isométrico a $M = N \times \mathbb{R}$, onde N tem a mesma curvatura radial de M, pois $\mathbb{R}$ é plano. $\square$

Agora estamos em condições de provar a rigidez dos solitons gradientes homogêneos.

Teorema 3.5. *Todos os solitons gradiente homegêneos são rígidos.*

Demonstração. Seja (M, g, f, λ) um soliton gradiente homogêneo, quando $\lambda = 0$, como M é homogênea então pelo Lema 1.49 sua curvatura escalar é constante, então pela Proposição 2.16 temos que M é Ricci plano, donde do Teorema 3.2 segue que M é um soliton rígido.

Quando $\lambda \neq 0$, aplicando o Corolário 3.4 sucessivamente e usando o Lema 2.14 concluímos que

$$(M, g) = (N \times \mathbb{R}^k, g_1 + g_2)$$

com $f = f_1 + f_2$, onde $D_X f_1 = 0$ para todo campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(N)$ e (N, g_1, f_1, λ), $(\mathbb{R}^k, g_2, f_2, \lambda)$ são solitons gradiente . Além disso como M é uma variedade homogênea, N também será uma variedade homogênea.

Afirmamos que f_1 é constante. Com efeito, dados $p \in N$ e $v \in T_pN$ quaisquer, como N é uma variedade homogênea pelo Corolário 1.51 existe um campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(N)$, tal que, $X(p) = v$. Daí

$$\begin{aligned} 0 &= D_X f_1 \\ &= g_1(\nabla f_1, X) \\ &= g_1(\nabla f_1(p), v), \end{aligned}$$

onde g_1 é a métrica de N, donde $\nabla f_1 = 0$, pois $p \in N$ e $v \in T_pN$ são arbitrários, logo f_1 é constante, desta forma N é de Einstein com constante de Einstein λ. Além disso $(\mathbb{R}^k, g_2, f_2, \lambda)$ é um soliton Gaussiano, pois como g_2 é a métrica canônica, então $\mathrm{Ric} = 0$, assim a igualdade (2.2) torna-se $\mathrm{Hess}\, f_2 = \lambda g_2$, como $\lambda \neq 0$, então a Proposição 2.11 garante o afirmado. Note ainda que sendo $\mathbb{R}^k$ um soliton Gaussiano ∇f é não constante e

$$\begin{aligned} \mathrm{Rm}\,(\cdot, \nabla f)\nabla f &= \mathrm{Rm}_1\,(\cdot, \nabla f_1)\nabla f_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde Rm_1 é o tensor de Riemann de N, donde $\sec(\cdot, \nabla f) = 0$. Portanto M é radialmente plano e possui curvatura escalar constante, assim pelo Teorema 3.2 é um soliton gradiente rígido.

$\square$

3.3 Soliton de Ricci não gradiente

Definição 3.6. *Um soliton de Ricci com métrica invariante à esquerda sobre um grupo de Lie nilpotente é chamado **nilsoliton**.*

Observação 3.7. Em [10], J. Laurent prova a existência de nilsolitons.

Teorema 3.8. *Um Nilsoliton não pode ser do tipo gradiente.*

Demonstração. Seja $(\mathfrak{h}, g)$ nilsoliton, pela Observação 1.31 este é um soliton gradiente homogêneo. Se este fosse do tipo gradiente , então pelo Teorema 3.5 $(\mathfrak{h}, g)$ seria isométrico a um produto Riemanniano $N \times \mathbb{R}^k$, onde N é uma variedade de Einstein. Implicando que seu tensor de Ricci é semi-definido, o que contradiz o fato que qualquer métrica invariante à esquerda sobre um grupo de Lie comutativo nilpotente deve ter curvatura de Ricci misto (para uma prova deste fato veja Teorema 2.4 em [12]). □

Referências Bibliográficas

[1] CHOW, B. ; LU, P. ; NI, L. *Hamilton's Ricci Flow.* Providence, RI.: American Mathematical Society, 2010. (Graduate Studies in Mathematics ; v. 77)

[2] CHOW, B. ; KNOPF, D. *The Ricci flow: An Introduction.* Providence, RI.: American Mathematical Society, 2004. (Mathematical Surveys and Monographs : v. 110)

[3] CAMINHA, A. *Tópicos de Geometria Diferencial.* Preprint.

[4] CARMO, M. P.do. *Geometria Riemanniana.* 3° ed. Rio de Janeiro: IMPA,2005. (Projeto Euclides)

[5] DI CERBO, L. F. *A Ricci Nilsoliton is Nongradient.* arXiv: math.DG/0801.0004v1.

[6] EMINENTI, M. ; GABRIELE, L. N. ;MANTEGAZZA, C. *Ricci Solitons -The equation point of view.* arXiv: math.DG/0607546v2.

[7] HAMILTON, R. *The Ricci flow on Surface.* In Mathematics and General Relativity. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1998. p 237-262. (Contemporary Mathematics; v.71)

[8] IVEY, T. *Ricci solitons on compact three-manifolds.* Diff. Geom. Appl., v. 3 p.301-307, 1993.

[9] KOISO, N. *On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics.* In Recent topics in differential and geometry. Boston, MA: Academic Press, 1990. p.327-337.(Adv. Stud. Pure Math. ; v. 18)

[10] LAURENT, J. *Ricci Soliton homogeneous nilmanifolds.* Math. Ann., v.319,p.715-733, 2001.

[11] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds.* New York:Springer-Verlag, 2002.(Graduate Texts in Mathematics; v 218)

[12] MILNOR, J. *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups.* Advances in Math., V.21,nº3, p.293-329, 1976.

[13] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity.* New York : Academic Press, 1983.

[14] PALAIS, R. S. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups.* Mem. Amer. Math. Soc., v.22, 1957.

[15] PERELMAN, G. Ya. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* arXiv: math.DG/0211159.

[16] _____. *Ricci flow with surgery on three manifolds.* arXiv: math.DG/0303109.

[17] PETERSEN, P. ; WYLIE, W. *On gradient Ricci solitons with symmetry.* Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 2085-2092.

[18] _____. *Rigidity of gradient Ricci solitons.* Pacific J. of Math.,v. 241, n.2, p.329-345, 2009.

[19] PETERSEN, P. *Riemannian geometry.* New York : Springer-Verlag,1998. (Graduate Texts in Mathematics ; V. 171)

[20] TASHIRO, Y. *Complete Riemannian and some vector fields.* Trans. Amer. Math. Soc., v.117,p.251-275,1965.

[21] WARNER, F. W. *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups.* Glenview, Illinois: Scott, Foresman, 1971.