UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DIEGO ELOI MISQUITA GOMES

O TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES NÃO-LIMITADOS E AUTOADJUNTOS

FORTALEZA
2013

DIEGO ELOI MISQUITA GOMES

O TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES NÃO-LIMITADOS E AUTO-ADJUNTOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção de Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise Funcional.

Orientador:
Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

FORTALEZA
2013

Gomes, Diego Eloi Misquita

X??X O Teorema Espectral para Operadores Não-limitados e Autoadjuntos/

Diego Eloi Misquita Gomes: Fortaleza 2013.

74f.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro .

1- Análise Funcional

XXX ?????

À Deus, meu único Senhor, minha esposa Izabela e minha família

"Não atentando nós nas coisas que se vêem, mas nas que se não vêem; porque as que se vêem são temporais, e as que se não vêem são eternas."

2 Coríntios 4:18

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, que me deu forças para continuar quando achei que não havia mais. A Ele a honra, glória e o louvor para sempre. Esteve comigo nos meus piores momentos e sei que nunca me deixará só.

À minha esposa Izabela, pela compreensão, motivação, meu equilíbrio, com quem sei que sempre posso contar e peço perdão por, diversas vezes, precisar trocá-la por meus livros de matemática.

Ao meu irmão Norberto(Júnior), em quem me espelhei com relação aos estudos e pelo constante cuidado com relação a mim.

Aos meus pais Norberto e Ana Maria, pela educação que me deram, pelos esforços constantes para me manterem durante a graduação, pela motivação, orgulho e toda ajuda, muito obrigado mesmo.

Aos meus amigos que começaram a graduação comigo em quem me espelho matematicamente (tendo até uma certa inveja dos seus brilhantismos), os quais tenho orgulho de conhecer e sei que darão muitos frutos à Matemática: Adenilson, Ramom, Luiz Paulo, Rafael Rezende, Marlon e Hudson.

Faço aqui um agradecimento especial à José Leandro (in memoriam), um dos alunos mais brilhantes e proporcionalmente humildes que conheci, com quem aprendi algo sobre a grandeza da simplicidade.

Não posso esquecer meus colegas de profissão que entraram comigo, os quais vi crescer durante este tempo e me alegro com isso: Leo Ivo, José Eduardo, Rui, Selene, Anderson, Gilson, Yure, Nicholas, João Vitor, Wanderley, Roger, Henrique e Breno.

Agradeço ainda aos colegas Airton, Rafael Eufrázio, Renan Santos, Rafael Alves, Rodrigo Matos, João Luiz, Diego,Fabiana, Renivaldo, Rafael Diógenes, Leandro e mais alguém do doutorado que eu tenha esquecido.

Deixo aqui também um agradecimento especial ao meu colega de profissão e amigo pessoal Emanuel Viana, que me ajudou bastante durante o mestrado e na construção desta dissertação, me motivou e me deu bons conselhos.

Insanidade eu teria se esquecesse do meu orientador Fábio Montenegro, que prontamente me atendeu e teve uma paciência quase infinita comigo. Obrigado pelo apoio, paciência e puxões de orelha.

Aos professores : José Alberto, Alexandre Fernandes, Luquésio, Diego Moreira, João Lucas e Marcos Melo, pelos quais tenho grande apreço e sou grato pelos ensinamentos durante o período do mestrado.

Aos professores Daniel Cibotaru, Gleydson Ricarte e Luiz Antônio, pelas contribuições à dissertação e pela prontidão que os mesmos tiveram de estar nessa banca.

À Andréa pela competência, agilidade e simpatia.

Ao Cnpq pelo apoio financeiro.

Resumo

O Teorema Espectral é um dos teoremas mais famosos da Análise Funcional, principalmente pelo grande número de versões dadas ao mesmo. Existem versões para operadores limitados, ilimitados, autoadjuntos, compactos, em espaços de dimensão finita ou infinita. A versão geral do teorema foi provada independentemente por Stone e Neumann no período de 1929-1932, mas outras provas surgiram ao longo dos anos. A prova contida neste trabalho é de Edward Brian Davies(1994), o qual conseguiu, na prova da versão do teorema para cálculos funcionais, explicitar uma fórmula para $f(H)$ (onde H é um operador não-limitado e autoadjunto) para uma grande classe de funções e não apenas mostrar a existência do mesmo. A principal ideia foi originalmente dada por Helffer e Strojand(1989) e utiliza em sua prova teoremas conhecidos como a Fórmula Integral de Cauchy Generalizada, Teorema da Divergência, Stone-Weierstrass, Teorema de Liouville, além de fatos conhecidos da teoria dos operadores lineares em espaços de Hilbert.

Palavras-chaves: Operadores não-limitados, espectro, cálculo funcional, análise funcional.

Abstract

The Spectral Theorem is one of the most famous theorems in Functional Analysis, particularly because of the large number of proofs given to it. There are versions for bounded operators, unbounded operators, self-adjoints operators, compacts, on finite-dimensional spaces, on infinite-dimensional spaces. The general version was proved by Stone and Weierstrass during the period 1929-1932, but another proofs emerged over the years. The proof in this monography was given by Edward Brian Davies(1994), which gives an explicity formula for the functional calculus $f(H)$ (where H is an self-adjoint operator) and not only proof its existence. The main idea was originally given by Helffer and Strojand(1989) and in its proofs it used well-knows theorems like Stokes' Theorem, Cauchy's Integral Formula Generalized, Stone-Weierstrass, Liouville's Theorem, besides facts of the theory of linear operators on Hilbert spaces.

Keywords: Unbounded operators, spectra, functional calculus, functional analysis.

Sumário

Introdução **11**

1 Operadores Lineares Não-limitados **13**

2 O Cálculo Funcional e a Fórmula de Helffer-Strödjand **37**

Introdução

O Teorema Espectral é um dos teoremas com os quais alunos ainda da graduação já têm um primeiro contato no curso de Álgebra Linear, que ocorre normalmente ainda no primeiro ano da faculdade de Matemática e de áreas afins. Sua importância não fica tão clara num primeiro momento, porém, ao vermos um bom curso de Análise Funcional, vemos algumas versões deste teorema, de modo que não existe um único teorema espectral, mas sim uma série de versões para o mesmo. A versão aqui encontrada é uma versão que envolve um Cálculo Funcional, uma parte da matemática destinada a nos dizer sobre quais circunstâncias podemos calcular $f(H)$, onde f é uma função e H é um operador. A maior parte do texto está contido no livro Spectral Theory and Differential Operators, de E. B. Davies. Num primeiro momento, estudaremos algumas propriedades básicas dos Operadores Lineares Não-limitados e demonstraremos alguns fatos centrais desta teoria. Sua importância reside no fato de que operadores diferenciais como o rotacional ou o laplaciano são operadores deste tipo e é importante saber sobre o seu comportamento. Desenvolvemos, então, o Cálculo Funcional para funções em um determinado conjunto e depois estendemos para o conjunto $C_0(\mathbb{R}$. O Teorema principal é:

Teorema 0.1. *Seja H um operador não-limitado e autoadjunto definido num subconjunto denso de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, existe uma única aplicação linear $\delta : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que leva f em $f(H)$ tal que:*

(1) δ é multiplicativo.

(2) Temos $\bar{f}(H) = f(H)^*$, para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$.

(3) Temos $\|f(H)\| \leq \|f\|_\infty$, para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$.

(4) Se $w \notin \mathbb{R}$ e $r_w(s) := (w - s)^{-1}$ e então $r_w(H) = (w - H)^{-1}$.

(5) Se $f \in C_0(\mathbb{R})$ é tal que $supp f \cap Spec(H) = \emptyset$, então $f(H) = 0$.

A beleza desta prova está em explicitarmos o nosso cálculo funcional, pois na maioria das provas desta versão do Teorema Espectral, o que é provado é apenas a existência do mesmo, mas aqui encontramos a fórmula

$$f(H) := -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy.$$

Capítulo 1

Operadores Lineares Não-limitados

A teoria dos operadores lineares não-limitados começou a ser estudada por John von Neumann e Marshall Stone, por volta de 1920, principalmente para dar fundamentos matemáticos à teoria da Mecânica Quântica. Na verdade, a maioria dos operadores estudados na física não são limitados. A importância dos mesmos vem do fato de que os Operadores Diferenciais são, em geral, lineares e não-limitados. Existem algumas características que tais operadores lineares não herdam dos operadores limitados como, por exemplo, o fato de um operador simétrico ser autoadjunto.

Neste capítulo, nós vamos abordar o contexto apropriado no qual poderemos definir e analisar o espectro de alguns operadores lineares não-limitados, particularmente os que são fechados e os auto-adjuntos. É de suma importância a boa definição do espaço onde o operador está definido, porque o espectro de um operador muda dependendo do seu domínio. Faz-se necessário, portanto, deixarmos claro que utilizaremos no texto apenas espaços de Banach ou de Hilbert complexos.

Há ainda um outro problema: os operadores diferenciais são não-limitados quando definidos nos usuais espaços de Banach ou de Hilbert. Devido a isso, não podemos começar nosso estudo sem dar uma definção mais geral para um operador linear qualquer. Para isso, na nossa definição, não exigiremos que o domínio do nosso operador seja todo o espaço de Banach ou de Hilbert, mas o mesmo consistirá de um subespaço linear denso. A especificação deste espaço na definição do operador é de extrema importância, pois escolhas de domínios diferentes correspondem a aplicações de diferentes condições de fronteira para o mesmo operador, o que frequentemente nos dá um espectro totalmente diferente. Por isso, quando o termo "operador diferencial"aperecer, entenderemos que as condições de fronteira já foram dadas. Compreender estes operadores é ainda importante quando desejamos resolver Equações Diferenciais Parciais ou quando desejamos saber como um operador age numa variedade Riemaniana.

Definição 1.1. *Um operador linear num espaço de Banach $\mathcal{B}$ é um par consistindo de um subespaço linear denso $L \subset \mathcal{B}$, junto com um operador linear $A : L \longrightarrow \mathcal{B}$. Nós chamamos L de domíno do operador A e escrevemos $Dom(A) := L$. Se $\tilde{L}$ é um subespaço linear de $\mathcal{B}$ que contém L e $\tilde{A}f = Af$, para todo $f \in L$, então dizemos que $\tilde{A}$ é uma extensão de A.*

Umas outras noções bem importantes e que aparecerão várias vezes no texto são os termos autovalor e autovetor, este último, quando o operador estiver agindo num espaço de funções, denominaremos autofunção.

Definição 1.2. *Um número complexo λ é dito ser um* **autovalor** *de um operador A se existe um elemento $f \in Dom(A)$ diferente de zero tal que $Af = \lambda f$. Se o espaço de Banach no qual A está definido é um espaço de funções, então chamaremos f de* **autofunção**. *Em geral, a f associada ao λ é chamada de autovetor, já que esta noção é comum em espaços vetoriais.*

Exemplo 1.3. *Para o nosso primeiro exemplo, tomemos*

$$Af = -f''$$

Caso $\mathcal{B} = C([a,b])$ e $Dom(A) = C^\infty([a,b])$, veja que, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(x) = e^{\sqrt{\lambda} ix}$ é uma autofunção associada a λ, e, portanto, λ é um autovalor desse operador. Logo, todo número complexo é um autovalor desse operador. Porém, para este mesmo operador, caso $\mathcal{B} = C_P([a,b])$- que são as funções contínuas e periódicas - e $Dom(A) = C_P^\infty([a,b])$, então o conjunto dos autovalores seria um conjunto enumerável.

Exemplo 1.4. *Ainda tomando o operador $Hf = -f''$ com domínio $C^2[a,b] \subset L^2[a,b]$, podemos considerar as condições de contorno de Dirichlet agindo no domínio deste operador e chamaremos de H_D o operador acima definido com domínio*

$$L_D = \{C^2[a,b] \;/\; f(a) = f(b) = 0\}$$

ou tomar as condições de contorno de Neumann, sendo chamado de H_N o operador acima definido com domínio

$$L_N = \{C^2[a,b] \;/\; f'(a) = f'(b) = 0\}.$$

Devido a essa simples mudança de domínios, podemos perceber que 0 *é um autovalor de* H_N*, porém não é um autovalor de* H_D*, portanto, o conjunto dos autovalores destes dois operadores(que essencialmente são um mesmo operador, mudando apenas um detalhe no domínio) são diferentes.*

A continuidade de operadores lineares é extremamente útil para nós, pois podemos usar passagens de limites, estimar a norma de um operador e usar muitos dos teoremas vistos num primeiro curso de Análise Funcional. Devido a isso, seria muito bom se tivéssemos uma espécie de "continuidade"para operadores não-limitados ou pelo menos uma propriedade boa o suficiente que pudesse substituí-la. Tal propriedade aparece quando temos a noção de **fecho**. No texto sempre usaremos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ significando que $\|f_n - f\|$ vai para zero quando n vai para o infinito.

Definição 1.5. *Seja* A *um operador linear em* $\mathcal{B}$ *com domínio* L*. Dizemos que* A *é* **fechado** *quando, para toda sequência* (f_n) *em* L *com limite* $f \in \mathcal{B}$ *e* $g \in \mathcal{B}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} Af_n = g$*, tenhamos que* $f \in L$ *e* $Af = g$*.*

Alternativamente, podemos dizer que um operador é fechado se, e somente se, o seu gráfico for fechado, ou seja, se o conjunto

$$Graf(A) = \{(f,g); f \in L, g \in \mathcal{B} \text{ e } Af = g\}$$

é um subconjunto fechado de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Dados dois espaços de Banach $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, podemos definir algumas normas de modo que o espaço $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ possa tornar-se também de Banach. Porém, para a norma definida abaixo

$$\|(f,g)\| = (\|f\|^2 + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

temos que se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são espaços de Hilbert, então $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ (com a norma acima) também é um espaço de Hilbert(basta ver que a mesma satisfaz a lei do paralelogramo).
O Teorema do Gráfico Fechado diz que se um operador fechado tem domínio igual a todo o $\mathcal{B}$, então tal operador é limitado. Então fica aqui claro o porquê de na nossa definição 1.1 considerarmos o domínio do operador apenas como um subespaço denso e não todo o espaço de Banach. Conceitualmente, o Teorema do Gráfico Fechado é muito útil, porém o mesmo não nos dá estimativa alguma da norma. Veremos mais adiante que o valor da norma do operador resolvente nos ajudará a estimar o espectro de A.

Definição 1.6. *Seja A um operador linear em $\mathcal{B}$ com domínio L. Dizemos que um número complexo z pertence ao* **resolvente** *de A, o qual denotaremos por $\rho(A)$, se o operador $(z-A) : L \longrightarrow \mathcal{B}$ for bijetivo e se o operador inverso $(z-A)^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, chamado operador* **resolvente**, *for limitado. O* **espectro** *de A, que denotaremos por $Spec(A)$, é definido como $Spec(A) := \mathbb{C}\backslash\rho(A)$.*

Note que, como L não é um espaço de Banach, não podemos usar o Teorema da Aplicação Aberta para conseguir de graça que $(z-A)^{-1}$ é limitado, por isso a definição é um pouco diferente da definição usual para operadores limitados e um pouco mais longa também. Denotaremos por $R(z, A) = (z-A)^{-1}$ o resolvente de z com relação a A. O lema abaixo nos mostra um pouco da importância dos operadores fechados nesta teoria. Dizemos que uma função $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \longrightarrow X$, X espaço vetorial normado, é *analítica na norma* se sua norma, $|f| : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser representada localmente por uma série de Taylor.

Lema 1.7. *Se o operador A não tem o espectro igual a todo o plano complexo $\mathbb{C}$, então A é fechado. O espectro Spec(A) de um operador linear é sempre fechado. Mais especificamente, seja $z \notin Spec(A)$ e sendo $c = \|R(z, A)\|$. Então o espectro não intersecta o conjunto aberto de $\mathbb{C}$:*

$$\{w \in \mathbb{C}; |w-z| < c^{-1}\}$$

Ou seja, $\rho(A)$ é um conjunto aberto. Además, o operador resolvente é uma função analítica na norma de z e satisfaz:

i) $R(z, A) - R(w, A) = (w-z)R(z, A)R(w, A)$

ii) $R(z, A)R(w, A) = R(w, A)R(z, A)$

iii) $\frac{d}{dz}R(z, A) = -R(z, A)^2$

Prova: Suponha $z \notin Spec(A)$ e defina $B := (z-A)^{-1}$. Por definição, B é limitado. Seja, então $(f_n) \in Dom(A)$ uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ e tal que exista $\lim_{n\to\infty} Af_n = g$. Para mostrar que A é fechado, devemos mostrar que $Af = g$. Tomando $h_n = (z-A)f_n$, veja que

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}(zf_n - Af_n) = zf - g$$

Aplicando B, vem que

$$B(zf-g) = \lim_{n\to\infty} B(h_n) = lim_{n\to\infty}(z-A)^{-1}(z-A)f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

Daí,

$$B(zf-g)=f \Rightarrow (z-A)B(zf-g)=(z-A)f \Rightarrow zf-g=zf-Af$$

Logo, $Af=g$, e, então, A é fechado.

Agora, considere o operador limitado

$$C:=\sum_{n=0}^{+\infty}(-u)^n B^{n+1}$$

Note que se $|u|<\|B\|^{-1}$, então

$$\|C\|<\sum|u|^n.\|B\|^{n+1}=\|B\|\sum(|u|.\|B\|)^n$$

e como $|u|.\|B\|<1$, temos que C converge. Da definição, segue que:

$$-uBC=\sum_{n=0}^{+\infty}(-u)^{n+1}.B^{n+2} \ \text{ e } \ C=\sum_{n=0}^{+\infty}(-u)^n.B^{n+1}$$

Logo,

$$B=C-uBC \tag{1.1}$$

Analogamente,
$-uCB=\sum_{n=0}^{+\infty}(-u)^{n+1}.B^{n+2}$ e $C=\sum_{n=0}^{+\infty}(-u)^n B^{n+1}$
Então,

$$B=C-uCB \Rightarrow C=B+uCB \tag{1.2}$$

Por (1.1), $Ker(C)\subseteq Ker(B)$ e $Im(B)\subseteq Im(C)$.

Por (1.2), $Ker(B)\subseteq Ker(C)$ e $Im(C)\subseteq Im(B)$.

Como $Ker(B)=\{f\in\mathcal{B};\ (z-A)^{-1}f=0\}=\{0\}$, já que

$$(z-A)^{-1}f=0 \Leftrightarrow (z-A)(z-A)^{-1}=0 \Leftrightarrow f=0$$

e $Im(B)=Dom(A)$, temos que C é um operador linear e que leva $\mathcal{B}$ em $Dom(A)$. Se $f\in Dom(A)$ e $g=(z-A)f$, aplicando B à esquerda, vem:

$$Bg=B.(z-A)f=f$$

Por (1.2),

$$Cg=f+uCf \Rightarrow C(z-u-A)f=C(z-A)f-uCf$$

Mas,

$$C(z-A)f=C(B^{-1}f)=Cg=f+uCf \Rightarrow C(z-u-A)f=f,\ \ \forall f\in\mathcal{B}$$

Logo, $C = (z-u-A)^{-1}$, e, dado $u \notin Spec(A)$ com $|u| < ||(z-A)^{-1}||$, temos

$$(z-u-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-u)^n (z-A)^{n+1}$$

e localmente esta série converge na norma.

Agora, sejam z,$w \notin Spec(A)$. Vamos calcular

$$(z-A)[R(z,A) - R(w,A) + (z-w)R(z,A)R(w,A)] = H$$

Aplicado a algum $f \in \mathcal{B}$:

$$Hf = (z-A)R(z,A)f - (z-A)R(w,A)f + (z-w)(z-A)R(z,A)R(w,A)f =$$

$$= f - (z-A)R(w,A)f + (z-w)R(w,A)f \tag{1.3}$$

Daí, como

$$[-(z-A) + (z-w)]R(w,A) = -(w-A)R(w,A) \Rightarrow (1.3) = f - f = 0$$

Mas, por hipótese, se $z \notin Spec(A)$, $(z-A)$ é injetivo, então:

$$(R(z,A) - R(w,A) + (z-w)R(z,A)R(w,A)) = 0$$

e (i) está provado. Temos que, para $z,\ w \notin Spec(A)$:

$$R(z,A) - R(w,A) = (w-z)R(z,A)R(w,A) \tag{1.4}$$

Trocando z por w:

$$R(w,A) - R(z,A) = (z-w)R(w,A)R(z,A)$$

Multiplicando esta última equação por (-1) e usando (1.4):

$$R(z,A) - R(w,A) = (w-z)R(w,A)R(z,A) \Rightarrow R(z,A)R(w,A) = R(w,A)R(z,A)$$

e *(ii)* está provado.

Para o item *(iii)*, utilizaremos o conceito de derivada de Frechet (ver [11]). Por (i),

$$R(z+w,A) - R(z,A) = -(w)R(z+w,A)R(z,A)$$

Dividindo por w

$$\frac{R(z+w,A) - R(z,A)}{w} + R(z+w,A)R(z,A) = 0$$

Tomando o limite quando $w \longrightarrow 0$:

$\lim_{w\to 0} \dfrac{|R(z+w,A) - R(z,A)|}{|w|} + \lim_{w\to 0} R(z+w,A)R(z,A) = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dz}R(z,A) + R(z,A)^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dz}R(z,A) = -R(z,A)^2$ e (iii) está provado.

Definição 1.8. *Seja A um operador linear em $\mathcal{B}$ com domínio L. Dizemos que A é* **fechável** *se existe uma extensão fechada $\tilde{A}$ de A.*

É natural pensarmos que sempre existem extensões fechadas, tendo a simples ideia de tomar o $\overline{Graf(A)}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, mas pode haver uma falha sutil nisso, pois o fecho do gráfico pode não ser o gráfico de nenhum operador.

Exemplo 1.9. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $\{\phi_n\}$ uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. Considere ainda $e_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \phi_i$ e seja ainda D o conjunto das combinações lineares finitas dos $\{\phi_n\}$ contendo também e_∞. Definamos em D o operador:*

$$H(be_\infty + \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i) = be_\infty$$

Deste modo, temos que $\overline{Graf(H)}$ contém (e_∞, e_∞)(por definição) e $(e_\infty, 0)$, pois podemos tomar a sequência $e_N = \sum_{i=1}^{N} e_i \phi_i$ e sabemos que $e_N \to e_\infty$ quando $N \to \infty$. Logo, o fecho do gráfico de H não pode ser gráfico de nenhum operador linear.

Precisaremos agora de uma ferramenta muito utilizada em análise, o famoso Lema de Zorn. Para tal resultado, vamos apresentar algumas definições. Seja M um conjunto com uma ordem parcial $\leq$. Nós dizemos que um subconjunto $N \subset M$ é *totalmente ordenado* se para qualquer par (a, b) em $N \times N$ tenhamos $a \leq b$ ou $b \leq a$(ou ambos). Dizemos que $c \in M$ é uma cota inferior para o conjunto N se $c \leq n$, qualquer que seja $n \in N$. Dizemos ainda que $c \in M$ é um elemento **minimal** de M se, para todo elemento $m \in M$ satisfazendo $m \leq c$, tenhamos $m = c$.
Com isso em mãos, podemos definir um conjunto *minimamente indutivo* como um conjunto no qual todo subconjunto $N \subset M$ totalmente ordenado tem uma cota inferior. Assim sendo, temos uma versão "minimal"do Lema de Zorn:

Lema 1.10. *Todo conjunto ordenado não-vazio e minimamente indutivo possui um elemento minimal.*

Agora, usaremos o fato acima para mostrarmos a proposição:

Proposição 1.11. *Seja A um operador fechável, então A possui a menor das suas extensões fechadas. Tal extensão é chamada de* **fecho** *do operador A e é denotada por $\bar{A}$.*

Prova : Seja $M = \{A_i;\ A_i$ é uma extensão fechada de A $\}$ com a seguinte relação de ordem:

$$A_i \leq A_j \Leftrightarrow D(A_i) \subset D(A_j)$$

e A_j estende A_i. Inicialmente, vemos que $M \neq \emptyset$, já que A admite uma extensão fechada(é fechável). Agora, veja também que M munido dessa ordem(parcial) é um conjunto minimamente indutivo, pois, dado um subconjunto $N = (A_i)_{i \in I}$ totalmente ordenado basta escolhermos $\tilde{A} \in N$ para ser uma extensão de A tal que $\tilde{A}f = A_k f$ para todo $x \in D(A_k)$ e $D(\tilde{A}) = \bigcap\limits_{i \in I} D(A_i)$ e, a partir disso, note que toda extensão fechada de A deve pertencer a N ser uma extensão de $\tilde{A}$. De fato, se A_k é uma extensão fechada de A, por definição, devemos ter $D(\tilde{A}) \subset D(A_k)$. Logo, toda extensão fechada de A em N é também uma extensão de $\tilde{A}$, e, portanto, $\tilde{A}$ é uma cota inferior de N. Daí, M é minimamente indutivo. Portanto, pelo *Lema minimal de Zorn*(lema 1.10), temos que M possui um elemento minimal, o qual é o fecho de A. Podemos concluir da própria relação que foi colocada acima a unicidade do fecho.

Definição 1.12. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador H: $L \longrightarrow \mathcal{H}$, com $L \subset \mathcal{H}$ subconjunto denso, é* **simétrico** *se, para todos os $f, g \in L$:*

$$\langle Hf, g \rangle = \langle f, Hg \rangle$$

Lema 1.13. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $H : L \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador simétrico. Então, H é fechável e $\bar{H}$ é simétrico.*

Prova: Pela proposição anterior, se H é fechável, então existe $\bar{H}$. Desta forma, basta mostrarmos que H tem uma extensão fechada. Para tal, mostraremos que sempre que tivermos $f_n \to f$, com $(f_n) \in L$, existirá um único $g \in \mathcal{H}$ tal que $Hf_n \to g$. Deste modo, poderemos definir $\bar{H}f = g$. Suponhamos que existem (f_n) e (h_n) em L tais que $f_n, h_n \to f$, mas $Hf_n \to g$ e $Hh_n \to g'$ com $g \neq g'$. Daí, dado um $k \in L$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle g, k \rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} Hf_n, k \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Hf_n, k \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, Hk \rangle = \langle f, Hk \rangle = \\ &= \langle \lim_{n\to\infty} h_n, Hk \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Hh_n, k \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} Hh_n, k \rangle = \langle g', k \rangle \end{aligned}$$

Assim, como k é qualquer em L e o mesmo é denso em $\mathcal{H}$, devemos ter $g = g'$, e, portanto, dada f, g tal que $\bar{H}f = g$ está unicamente determinado. Agora, se tomarmos $f_n \to f$ e g tal que $\lim\limits_{n\to\infty} Hf_n = g$, veja que, para qualquer $h \in L$, vale:

$$\langle g, h \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Hf_n, h \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, Hh \rangle = \langle f, Hh \rangle$$

Logo, para qualquer $h \in L$, temos

$$\langle g, h\rangle \; = \; \langle f, Hh\rangle$$

Tomando $(h_n) \subset L$ tal que $h_n \to h$, $\lim\limits_{n\to\infty} Hh_n \; = \; k$ e f como acima, temos que:

$$\langle \bar{H}f, h_n\rangle \; = \; \langle f, Hh_n\rangle$$

Passando o limite quando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\langle \bar{H}f, h_n\rangle \; = \; \langle \bar{H}f, h\rangle \; = \; \lim_{n\to\infty}\langle f, Hh_n\rangle \; = \; \langle f, k\rangle \; = \; \langle f, \bar{H}h\rangle$$

e $\bar{H}$ é simétrico.

Definição 1.14. *Se A é um operador linear num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então, o* **operador adjunto** *de A será denotado por A^*, seu domínio $Dom(A^*)$ é definido como o conjunto dos $g \in \mathcal{H}$ tais que existe um $k \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\langle Af, g\rangle \; = \; \langle f, k\rangle$$

para todos os $f \in Dom(A)$. Verifica-se que k é único e definimos $A^*g = k$. Dizemos que A é **autoadjunto** *se A=A^*, isto é, $Dom(A^*)$=$Dom(A)$ e $Af = A^*f$, $\forall f \in Dom(A)$.*

Podemos definir também o adjunto do adjunto, denotado por $(A^*)^* \; = \; A^{**}$, e, na verdade podemos operar “adjuntando”operadores. Como exemplo, veja que, da própria definição, se A e B são dois operadores tais que $A \subset B$(no sentido de B estender A), então $B^* \subset A^*$. É importante mencionar que nem todo operador simétrico é autoadjunto.

Exemplo 1.15. *Vamos a um exemplo de um operador que é simétrico, mas não é autoadjunto. Seja $\mathcal{H} = L^2[0,1]$ e definamos $H : Dom(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ por $Hf = if'$, onde $Dom(H) = \{f \in AC[0,1] \; / \; f(1) = f(0) = 0\}$. Note que H é simétrico, pois, para quaisquer f,$g \in Dom(H)$*

$$\langle Hf, g\rangle = \int_0^1 if'\bar{g} = if\bar{g}\Big|_0^1 - \int_0^1 if\bar{g}' = \int_0^1 f\overline{ig'} = \langle f, Hg\rangle$$

Usamos acima integração por partes e o fato de $f(1) = f(0) = 0$. Porém, sabemos da definição que

$$Dom(H^*) = \{f \in Dom(H) \; / \; \text{existe } k \in \mathcal{H} \text{ tal que } \langle Hf, g\rangle = \langle f, k\rangle\}$$

Agora veja que para $\langle Hf, g\rangle = \langle f, k\rangle$, basta que $f(1)\bar{g}(1) = f(0)\bar{g}(0)$ e usarmos integral por partes da mesma forma. Logo, $Dom(H) \neq Dom(H^*)$.

Lema 1.16. *Se A é um operador fechado com domínio denso num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então A^* é também um operador fechado com domínio denso em $\mathcal{H}$.*

Prova:

Afirmação: A^* é um operador fechado.

Prova da afirmação: De fato, mostraremos que $Graf(A^*) = G$ é fechado. Seja $(g,k) \in G$. Então, temos que $\langle Af, g\rangle = \langle f, k\rangle$. Tomando o produto interno em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, veja que

$$\langle (Af, -f), (g,k)\rangle \ = 0$$

para todo $f \in Dom(A)$. Logo, definimos

$$M := \{(Af, -f) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \,; f \in Dom(A)\}$$

Agora, note que $(g,k) \in G$ se, e somente se, $(g,k) \perp M$, e, como $M^{\perp}$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, então G é fechado, e, portanto, a afirmação acima é verdadeira.

Seja $Dom(A^*) = \mathcal{D}$. Vamos olhar para o conjunto $\mathcal{D}^{\perp}$. Se $h \in \mathcal{H}$ é tal que

$$\langle g, h\rangle = 0, \forall g \in \mathcal{D},$$

veja que

$$\langle (g, A^*g), (h, 0)\rangle = 0, \forall g \in \mathcal{D}.$$

Logo, $(h,0) \in G^{\perp} = M^{\perp\perp} = \bar{M}$. Daí, existe uma sequência (f_n) em $Dom(A)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} Af_n = h,$$

e, como A é fechado, $h = A0 = 0$. Portanto, $\mathcal{D}^{\perp} = 0$, ou seja, $\mathcal{D}$ é um subespaço linear denso em $\mathcal{H}$.

Exemplo 1.17. *A hipótese de A ser fechado no lema acima é crucial. De fato, considere uma função f mensurável e limitada tal que $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Seja*

$$Dom(A) = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}); \int |f(x)\phi(x)|dx < \infty\}.$$

É claro que $Dom(A)$ contém todos as funções em L^2 com suporte compacto, logo, $Dom(A)$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$. Agora, seja ϕ_0 uma função dada em $L^2(\mathbb{R})$ e definamos $T\phi = \langle f, \phi\rangle \phi_0$. Dada uma $\varphi \in Dom(A^*)$, por definição:

$$\langle \phi, T^*\varphi\rangle = \langle T\phi, \varphi\rangle = \langle \langle f, \phi\rangle \phi_0, \varphi\rangle = \overline{\langle f, \varphi\rangle} \langle \phi_0, \phi\rangle = \langle \phi, \langle f, \varphi\rangle f\rangle$$

para todos os $\phi \in Dom(A)$. Logo, chegamos que $A^*\varphi = \langle f, \phi\rangle f$. Mas, como $f \notin L^2(\mathbb{R})$, isso só ocorre quando $\langle f, \phi\rangle = 0$, e, portanto, qualquer $\phi \in Dom(A^*)$ é ortogonal a ϕ_0, daí, $Dom(A^*)$ não pode ser denso.

Se H é um operador simétrico, então é claro que o operador adjunto H^* é uma extensão de H. Então, alternativamente, podemos dizer que um operador H é autoadjunto se é simétrico e $Dom(H^*) = L$, então $H = H^*$, e, como consequência da afirmação provada no lema acima, H é fechado. Se H é simétrico e fechado, temos que $H = \bar{H} \subset H^*$.

Definição 1.18. *Dizemos que um operador simétrico H definido num subespaço linear denso L de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é* **essencialmente autoadjunto** *se seu fecho é auto-adjunto.*

A importância do estudo dos operadores essencialmente autoadjuntos é que os mesmos possuem uma única extensão autoadjunta.

Lema 1.19. *Se H é essencialmente autoadjunto, então H possui apenas uma extensão autoadjunta.*

Prova: Como o fecho de H já é autoadjunto, ao supormos que exista uma outra extensão autoadjunta $\tilde{H}$ de H, teremos que $\overline{H} \subset \tilde{H}$. Daí, tomando o adjunto dos dois lados, temos que $\tilde{H} = \tilde{H}^* \subset \overline{H}^* = \overline{H}$. Logo, $\overline{H} = \tilde{H}$.

A recíproca do lema acima também é verdadeira(ver [2]). Lembramos aqui que um conjunto $(\xi_i)_{i \in I}$ é dito ser um *conjunto ortonormal completo* se $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = 0$ sempre que $i \neq j$, $\|\xi_i\| = 1$ e $\mathcal{H}$ é gerado(como espaço vetorial) pelos $(\xi)_i$'s. Sabemos também que todo espaço de Hilbert complexo separável $\mathcal{H}$ é isomorfo a $\mathbb{C}^n$, se $dim\mathcal{H} = n$ ou a l^2, caso $dim(\mathcal{H}) = +\infty$

Lema 1.20. *Seja H um operador simétrico em $\mathcal{H}$ com domínio L e seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}$. Se cada f_n pertencer a L e existirem $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $Hf_n = \lambda_n f_n$, para todo n, então H é essencialmente autoadjunto. Além disso, o espectro de $\bar{H}$ é o fecho do conjunto dos λ_n.*

Observação: veja que o lema acima é um critério para sabermos se um operador é essencialmente autoadjunto. Porém, tal critério não é muito bom, pois precisaríamos saber explicitamente as autofunções do operador e isso nem sempre é possível.

Prova do lema: Seja $f \in L$ e sejam $(\alpha_n) \in \mathbb{C}$ números complexos tais que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n.$$

Dessa forma,

$$g := Hf = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n.$$

Note que, para um $m \in \mathbb{N}$ qualquer:

$$\beta_m = \langle g, f_m \rangle \ = \ \langle Hf, f_m \rangle \ = \ \langle f, Hf_m \rangle \ = \ \lambda_m \langle f, f_m \rangle = \lambda_m \alpha_m$$

Como $\mathcal{H}$ é separável, então é isomorfo ao l^2 e devemos ter $\|f\|^2 < +\infty$, mas

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle \ = \ \langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \rangle \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \langle \alpha_n f_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \rangle.$$

Então, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\langle \alpha_m f_m, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \rangle = \alpha_m \langle f_m, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \rangle \ = \ \alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_m, \alpha_n f_n \rangle \ =$$

$$= \ \alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n} \langle f_m, f_n \rangle = \alpha_m \overline{\alpha_m} = |\alpha_m|^2$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|f\|^2 < +\infty \text{ e, analogamente, } \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 < +\infty$$

Então, chegaremos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + {\lambda_n}^2) |\alpha_n|^2 < +\infty$$

Agora, para a construção de uma extensão $\tilde{H}$ de H, tomemos

$$\tilde{L} = \left\{ f \in \mathcal{H} / f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n, \text{onde} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + {\lambda_n}^2) |\alpha_n|^2 < +\infty \right\}$$

e definamos $\tilde{H} : \tilde{L} \longrightarrow \mathcal{H}$ como $\tilde{H} f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n f_n$. Desse modo, é claro que $\tilde{H}$ é uma extensão de H. Seja $S = \overline{\{\lambda_n \ / \ 1 \leq n < \infty\}}$. Sabemos que cada λ_n é um autovalor de $\tilde{H}$, e, como $Spec(\tilde{H})$ é fechado, então $S \subset Spec(\tilde{H})$. Tomemos $z \notin S$. Definimos um operador A em $\mathcal{H}$ por:

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - \lambda_n)^{-1} f_n$$

Assim, A é limitado e injetivo. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um conjunto ortonormal completo, podemos escrever todos os elementos de $\mathcal{H}$ como combinações lineares dos (f_n)'s, de modo que encontraremos que a imagem do operador A acima definido é o próprio $\tilde{L}$ e que

$(z - \tilde{H})Af = f$, para todo $f \in \mathcal{H}$. Então $z \notin Spec(\tilde{H})$ e $A = (z - \tilde{H})^{-1}$, o que implica que $S = Spec(\tilde{H})$.

Agora, como $Spec(\tilde{H})$ não é todo o conjunto $\mathbb{C}$, o *lema* 1.7 nos diz que $\tilde{H}$ é um operador fechado. Se

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \in Dom(\tilde{H}), \text{ definamos } g_m := \sum_{n=1}^{m} \alpha_n f_n.$$

Portanto,

$$\lim_{m \to \infty} g_m = g$$

e temos que

$$\lim_{m \to \infty} H g_m = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \lambda_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n f_n = \tilde{H} g$$

o que nos diz que $\tilde{H}$ é o fecho de H. Precisamos ainda mostrar que $\tilde{H}$ é auto-adjunto. Seja $f \in Dom(\tilde{H}^*)$ e $\tilde{H}^* f = k$. Temos então:

$$\langle k, f_n \rangle \; = \; \langle \tilde{H}^* f, f_n \rangle \; = \; \langle f, \tilde{H} f_n \rangle \; = \; \lambda_n \langle f, f_n \rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle f, \tilde{H} f_n \rangle = \langle f, \lambda_n f_n \rangle = \bar{\lambda} \langle f, f_n \rangle.$$

Ainda mais, se

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n, \text{ podemos tomar } k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n f_n$$

Daí, $f \in Dom(\tilde{H})$ e então $\tilde{H}^* = \tilde{H}$.

Vamos ver alguns exemplos de operadores que têm conjuntos ortonormais como auto-funções e que satisfazem o lema acima, de modo que possamos concluir que os mesmos são essencialmente auto-adjuntos.

Exemplo 1.21. *O operador H_D definido no exemplo 1.4 é essencialmente auto-adjunto no seu domínio L_D. De fato, definamos a seguinte sequência de funções:*

$$f_n(x) = \left(\frac{2}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} sen\left(\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)} \right) \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

É claro que

$$f_n' = \frac{n\pi}{b-a} \left(\frac{2}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} cos\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right)$$

e

$$f_n'' = -\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} \left(\frac{2}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} sen\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right)$$

Portanto, tomando $\lambda_n := \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$, *os mesmos são os auto-valores da sequência de funções. É fácil ver que* $\|f_n\|_{L^2} = 1$ *e temos também:*

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_a^b |f_n(x)|^2 |f_m(x)|^2 dx = \int_a^b sen^2\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right).sen^2\left(\frac{m\pi(x-a)}{b-a}\right) = 0$$

Exemplo 1.22. *Um outro exemplo aparece quando olhamos para a equação de Legendre:*

$$-\frac{d}{dx}\left((1-x)^2\frac{df}{dx}\right) = \lambda f$$

Seja H *um operador simétrico em* $L^2(-1,1)$ *definido por:*

$$Hf := -\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{df}{dx}\right)$$

E então H *é essencialmente auto-adjunto no domínio* $C^2(-1,1)$. *De fato, considere os polinômios de Legendre:*

$$P_n := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Note que os mesmos satisfazem a equação de Legendre com autovalores $\lambda_n = n(n+1)$. *Fazendo algumas contas, usando integração por partes, chegamos que as funções*

$$f_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(x)$$

são um conjunto ortonormal em $L^2(-1,1)$. *O conjunto gerado pelos* f_n*'s coincide com o conjunto de todos os polinômios em* $[-1,1]$, *e, como tal conjunto é uniformemente denso em* $C[-1,1]$*(Stone-Weierstrass), o mesmo é denso na norma em* $L^2(-1,1)$. *Daí,* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é um conjunto ortonormal completo em* $L^2(-1,1)$. *Assim, podemos aplicar o lema 1.20 para concluir que* H *é essencialmente auto-adjunto.*

Exemplo 1.23. *Um dos mais importantes operadores diferenciáveis é o Laplaciano, o qual é usualmente denotado por* $-\Delta$, *e também é um dos mais antigos. Tal operador começou a ser estudado por Laplace(1749-1827) em conexão com a teoria da gravitação e, ainda hoje, temos muitos trabalhos buscando encontrar o espectro do Laplaciano em variedades Riemannianas. Seja* Ω *uma região no* $\mathbb{R}^N$ *e* $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ *o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em* $\overline{\Omega}$, *que é o fecho de* Ω, *as quais se anulam no bordo, a simetria de* $-\Delta$ *vem da seguinte identidade:*

$$\int_\Omega ((\Delta f)\bar{g} - f(\overline{\Delta g}))dx = 0$$

a qual nos é assegurada pelo teorema de Green. Pode-se provar também que numa variedade Riemanniana completa, o Δ agindo em funções, formas ou tensores é um operador essencialmente auto-adjunto(ver [9]).

Existem muitos operadores simétricos que não são essencialmente autoadjuntos, ou seja, não tem uma única extensão autoadjunta. Porém, é importante também saber quando determinado operador possui extensão autoadjunta pelo fato de que existem algumas propriedades inerentes apenas a este tipo de operador. Dessa forma, ainda que tal operador não seja autoadjunto(ou seja, não goze da propriedade desejada), pode ser que consigamos uma extensão do operador que seja autoadjunta, e, assim, apliquemos a propriedade desejada. O próprio operador citado acima é um exemplo deste tipo de operador. Seja H um operador simétrico. Podemos definir a *transformada de Cayley* de H por $U = (H - i)(H + i)^{-1}$ a qual é uma bijeção de $Im(H + i)$ em $Im(H - i)$ e satisfaz, para todo $f \in L$:

$$\|(H + i)f\|^2 = \|Hf\|^2 + \|f\|^2 = \|(H - i)f\|^2$$

Perceba que, com este conceito, conseguimos transferir um problema de operador não-limitado para um operador unitário, e, portanto, limitado. Na verdade, algumas versões do teorema espectral foram provadas para operadores limitados e estendidas para operadores não-limitados utilizando-se este conceito. Além disso, o lema abaixo mostra outra importância desta definição.

Definição 1.24. *Dizemos que um operador H é isométrico se o mesmo preserva distância. Isso é equivalente à relação $\langle Hf, Hg\rangle = \langle f, g\rangle$ quando estamos em um espaço de Hilbert.*

Lema 1.25. *Existe uma correspondência 1-1 entre as extensões simétricas de H e as extensões isométricas de U, que é a sua transformada de Cayley. Além disso, as extensões estão relacionadas da seguinte maneira:*

$$\tilde{U} = (\tilde{H} - i)(\tilde{H} + i) \text{ e } \tilde{H} = i(I + \tilde{U})(I - \tilde{U})$$

Prova: (i) Se $\tilde{H}$ é uma extensão simétrica de H, então $\tilde{U}$-a transformada de Cayley de $\tilde{H}$- é uma extensão isométrica de U.
De fato, se $f \in L$, então

$$\|(\tilde{H} + i)f\|^2 = \|\tilde{H}f\|^2 + \langle \tilde{H}f, if\rangle + \langle if, \tilde{H}f\rangle\|x\|^2$$

Como H é simétrico , temos

$$\|x\|^2 \leq \|(\tilde{H}+i)f\| = \|\tilde{H}f\|^2 + \|f\|^2$$

Logo, para que tenhamos $(\tilde{H}+i)f = 0$, devemos ter $f = 0$. Note que, como $\tilde{U} = (\tilde{H}-i)(\tilde{H}+i)^{-1}$, o problema de existência de $\tilde{U}$ está atrelado à existência de $(\tilde{H}+i)^{-1}$. Pelo que mostramos acima, $\tilde{U}$ está bem definida. Agora, sabemos que

$$\tilde{U}(\tilde{H}+i)f = (\tilde{H}-i)f, \forall f \in L \Rightarrow Dom(\tilde{U}) = Im(\tilde{H}+i) \text{ e } Im(\tilde{U}) = Im(\tilde{H}-i)$$

De modo que, dado $g \in Im(\tilde{H}+i) = Dom(\tilde{U})$, existe f tal que $Hf + if = g$, daí

$$\tilde{U}g = (\tilde{H}-i)f \text{ e } \|\tilde{U}g\|^2 = \|(\tilde{H}-i)f\|^2 = \|(\tilde{H}+i)f\|^2 = \|g\|^2$$

Logo, $\tilde{U}$ é isometria e (i) está provado. Reciprocamente, seja $\tilde{U}$ uma extensão isométrica de U

$$\tilde{U} : M^+ \supseteq Im(H+i) \longrightarrow M^- \supseteq Im(H-i)$$

Vamos encontrar uma extensão simétrica $\tilde{H}$ de H a qual está relacionada com $\tilde{U}$. Suponha que exista $f \in M^+$ tal que $\tilde{U}f = f$. Seja $g = (H+i)h$, com $h \in L$. Temos:

$$2i\langle f, (H-i)h - (H+i)h\rangle = \langle f, Ug - g\rangle = \langle f, Ug\rangle - \langle f, g\rangle = \langle \tilde{U}f, \tilde{U}g\rangle - \langle f, g\rangle = 0$$

Porém, L é subespaço linear denso em $\mathcal{H}$, logo, $f = 0$. Então, o operador $\tilde{U} - 1$ é injetivo. Definamos $\tilde{H}$, com domínio $(\tilde{U}-1)M^+$ de modo que:

$$(\tilde{H}+i)^{-1} = \frac{1}{2}i(\tilde{U}-1) \text{ ou } \tilde{H}f = \frac{1}{2}(\tilde{U}+1)g, \text{ se } f = \frac{1}{2}i(\tilde{U}-1)g, \text{ com } g \in M^+$$

Sejam f_1, f_2 tais que

$$\tilde{H}f_j = \frac{1}{2}i(\tilde{U}+1)g_j, \quad f_j = \frac{1}{2}(\tilde{U}-1)g_j, \text{ com } g_j \in M^+$$

Daí,

$$\langle \tilde{H}f_1, f_2\rangle = \langle \frac{1}{2}(\tilde{U}+1)g_1, \frac{1}{2}i(\tilde{U}-1)g_2\rangle = -\frac{1}{4}i\langle(\tilde{U}+1)g_1, (\tilde{U}-1)g_2\rangle =$$
$$-\frac{1}{4}i(\langle \tilde{U}g_1, \tilde{U}g_2\rangle - \langle \tilde{U}g_1, g_2\rangle + \langle g_1, \tilde{U}g_2\rangle - \langle g_1, g_2\rangle)$$

Como $\tilde{U}$ é isométrica

$$\langle \tilde{H}f_1, f_2\rangle = -\frac{1}{4}i(\langle g_1, \tilde{U}g_2\rangle - \langle \tilde{U}g_1, g_2\rangle) = \frac{1}{4}i(\langle \tilde{U}g_1, g_2\rangle - \langle g_1, \tilde{U}g_2\rangle) =$$

$$= \frac{1}{4} i \langle (\tilde{U} - 1) g_1, (\tilde{U} + 1) g_2 \rangle = \langle \frac{1}{2} i (\tilde{U} - 1) g_1, \frac{1}{2} (\tilde{U} + 1) g_2 \rangle = \langle f_1, \tilde{H} f_2 \rangle$$

Logo, $\tilde{H}$ é uma extensão(por definição) simétrica de H.

O lema acima faz com que possamos tratar de um problema de extensões simétricas de operadores simétricos, como um problema equivalente de extensões de isometrias o que, em geral, é mais fácil de ser trabalhado. Basicamente, o que teremos que fazer agora para estender uma transformada de Cayley é conseguir uma bijeção entre os subespaços de deficiência $Im(H+i)^{\perp}$ e $Im(H-i)^{\perp}$. Podemos citar ainda que toda isometria U estende-se unicamente a uma isometria cujo domínio é o fecho do $Dom(U)$.

Definição 1.26. *Dizemos que um operador H é unitário se vale a relação $H^{-1} = H^*$ a qual é equivalente a $H^* H^{-1} = H^{-1} H^* = I$. Note que H é isométrico se, e somente se ele é unitário.*

Definição 1.27. *Seja H um operador simétrico. Definimos os* **subespaços de deficiência** *de H como os conjuntos:*

$$L^+ := \{f \in Dom(H^*); H^* f = if\} = \{f \in \mathcal{H}; \langle Hh, f \rangle = -i \langle h, f \rangle, \ \forall h \in Dom(H)\}$$

e

$$L^- := \{f \in Dom(H^*); H^* f = -if\} = \{f \in \mathcal{H}; \langle Hh, f \rangle = i \langle h, f \rangle, \ \forall h \in Dom(H)\}.$$

Os **índices de deficiência** *de H são as dimensões dos espaços L^+ e L^- e serão denotados por $i_+ = dim L^+$ e $i_- = dim L^-$.*

Teorema 1.28. *Seja H um operador simétrico e fechado em $\mathcal{H}$. Existem extensões autoadjuntas de H se, e somente se, seus índices de deficiência são iguais. Além disso, as seguintes condições são equivalentes:*
(1) H é essencialmente autoadjunto;
(2) Os índices de deficiência de H são ambos iguais a zero;
(3) H tem exatamente uma extensão autoadjunta.

Prova: Inicialmente, provaremos um lema que será muito útil na prova deste teorema.

Lema 1.29. *Seja H um operador simétrico e fechado como acima e U a sua transformada de Cayley. Então uma extensão $\tilde{H}$ de H é autoadjunta se, e somente se, $\tilde{U}$ - que é a transformada de Cayley de $\tilde{H}$ - é unitária. Em particular U é unitária se, e somente se, H é autoadjunto.*

Prova do lema: Se $\tilde{H}$ é uma extensão autoadjunta, em particular, é uma extensão simétrica e daí $\tilde{U}$ é uma extensão isométrica de U, logo, $\tilde{U}$ é unitária. Reciprocamente, seja $\tilde{U}$ uma extensão unitária, e, portanto, isométrica de U. Temos, pelo lema acima, associada a ela uma extensão $\tilde{H}$ simétrica e devemos mostrar que a mesma é autoadjunta. Também pelo lema acima, temos a relação $\tilde{H} = i(I - \tilde{U})(I - \tilde{U})^{-1}$. Seja, então, $f \in Dom(\tilde{H}^*)$, logo, existe um $k \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle \tilde{H}g, f\rangle = \langle g, k\rangle$$

para todo $g \in Dom(\tilde{H})$. Veja que podemos escrever $g = (I - \tilde{U})h$ e $k = \tilde{H}^*g$, com h qualquer em $Dom(\tilde{U})$. Substituindo na relação acima, temos:

$$\langle i(I + \tilde{U})h, f\rangle = \langle (I - \tilde{U})h, k\rangle = \langle h, k\rangle - \langle \tilde{U}h, k\rangle$$

logo,

$$\langle ih, f\rangle + \langle i\tilde{U}h, f\rangle = i\langle h, f\rangle + i\langle \tilde{U}h, f\rangle = \langle h, k\rangle - \langle \tilde{U}h, k\rangle$$

Como $\tilde{U}$ é isometria, podemos escrever $\langle h, k\rangle = \langle \tilde{U}h, \tilde{U}k\rangle$ e $\langle h, f\rangle = \langle \tilde{U}h, \tilde{U}f\rangle$. Ficamos com a seguinte equação:

$$i\langle h, f\rangle + i\langle \tilde{U}h, f\rangle - \langle h, k\rangle + \langle \tilde{U}h, k\rangle = 0$$

$$= i\langle \tilde{U}h, \tilde{U}f\rangle + i\langle \tilde{U}h, f\rangle - \langle \tilde{U}h, \tilde{U}k\rangle + \langle \tilde{U}h, k\rangle = \langle \tilde{U}h, -i\tilde{U}f - if - \tilde{U}k + k\rangle = 0$$

Daí, como h é qualquer e $Dom(\tilde{U})$ é denso, temos que

$$-i\tilde{U}f - if - \tilde{U}k + k = 0 = -(\tilde{U} + I)f + (\tilde{U} - I)k$$

isolando f:

$$-i(\tilde{U} + I)f = -(\tilde{U} - I)k \Rightarrow f = -i(\tilde{U} + I)^{-1}(I - \tilde{U})k$$

Agora, comparando com a expressão do lema 1.25, vem que $\tilde{H}f = k$ e então $f \in Dom(\tilde{H})$, demonstrando que $\tilde{H}$ é autoadjunto.

Prova do teorema: ($\Rightarrow$) Suponha que exista $\tilde{H} \supset H$ extensão autoadjunta, em particular, simétrica. Daí,

$$\tilde{U} : Im(\tilde{H} + i) \longrightarrow Im(\tilde{H} - i)$$

é uma extensão isométrica e como H é fechado, então $Im(H + i)$ é um conjunto fechado, de modo que podemos escrever

$$Im(\tilde{U} + i) = Im(H + i) \oplus Im(H + i)^{\perp}$$

Agora, note que $\tilde{U} \supset U$ e $\tilde{U}$ é isometria, então

$$\tilde{U} : Im(H+i)^{\perp} \longrightarrow Im(H-i)^{\perp} \text{ bijetivamente}$$

Vamos mostrar que $Im(H+i)^{\perp} = Ker(H^{*}-i)$.
De fato, seja $g \in Im(H+i)^{\perp}$. Dado $f \in Im(H+i)$ qualquer, existe $h \in Dom(H)$ tal que $(H+i)h = f$. Temos que:

$$0 = \langle (H+i)h, g\rangle = \langle Hh, g\rangle + i\langle h, g\rangle = \langle h, H^{*}g\rangle + \langle h, -ig\rangle = \langle h, (H^{*}-i)g\rangle$$

Como $Dom(H)$ é denso, $f \in Ker(H^{*}-i)$.
Reciprocamente, se $f \in Ker(H^{*}-i)$, então $(H^{*}-i)f = 0$ e vale $\langle g, (H^{*}-i)f\rangle = 0$ para todo $g \in Dom(H+i)$. Daí,

$$0 = \langle g, (H^{*}-i)f\rangle = \langle g, H^{*}f\rangle + \langle g, -if\rangle = \langle fg, H^{*}f\rangle + i\langle g, f\rangle = \langle Hg, f\rangle + \langle ig, f\rangle = \langle (H+i)g, f\rangle$$

para todo $g \in Dom(H+i) = Dom(H)$, portanto, $f \in Im(H+i)^{\perp}$.
De modo análogo podemos mostrar que $Im(H-i)^{\perp} = Ker(H^{*}+i)$. Da bijeção obtida acima vem que $i_{+} = i_{-}$.
$(\Leftarrow)$ Segue do lema anterior.
$(1) \Rightarrow (2)$: Se H é autoadjunto e $f \in L^{+}$, então $Hf = H^{*}f = if$ e daí

$$i\langle f, f\rangle = \langle Hf, f\rangle = \langle f, Hf\rangle = -i\langle f, f\rangle$$

Logo, $f = 0$ e $L^{+} = \{0\}$ e como vale a mesma conta para o L^{-}, temos que $L^{-} = \{0\}$.
$(2) \Rightarrow (1)$: O operador $(H+i) : Dom(H) \longrightarrow M^{+}$, onde $M^{+} := Im(H+i) \subset \mathcal{H}$. Agora, o operador inverso $(H+i)^{-1}$ é uma contração e como H é fechado, o operador inverso é fechado e limitado e daí o subespaço M^{+} é fechado. Veja que o complemento ortogonal de M^{+} é $L^{+} = 0$ (por hipótese) e daí $M^{+} = \mathcal{H}$. Então, dado $f \in Dom(H^{*})$, existe $g \in Dom(H)$ tal que $(H+i)g = (H^{*}+i)f$. Mas, H^{*} é uma extensão de H e então $(H^{*}+i)(f-g) = 0$ e então $(f-g) \in L^{-} = \{0\}$. Isso nos dá que $f \in Dom(H)$ e que $H^{*} = H$.
$(2) \Rightarrow (3)$: Segue do lema 1.25.
$(3) \Rightarrow (1)$: Por hipótese, existe $\tilde{H}$ extensão autoadjunta de H e por (2), $\tilde{i_{+}} = \tilde{i_{-}} = 0$, onde os índices estão sendo vistos com respeito a $\tilde{H}$. Pelo lema 1.25, a transformada de Cayley $\tilde{U}$ é uma extensão unitária de U, transformada de Cayley com respeito a H. Então, $\tilde{U} : L^{+} \longrightarrow L^{-}$ é uma bijeção e daí $i_{+} = i_{-}$. Se $i_{+} \neq 0$ podemos conseguir uma

extensão unitária de U para cada extensão isométrica de L^+ em L^- o que nos dá mais de uma extensão autoadjunta, contradizendo nossa hipótese. Logo, $i_+ = i_- = 0$ e o resultado segue.

Lema 1.30. *Seja X um subconjunto mensurável do $\mathbb{R}^N$ e seja $\mathcal{H} = L^2(X)$. Seja H um operador simétrico em $\mathcal{H}$ real, ou seja, dado $f \in Dom(H)$, então o conjugado de f, $\bar{f}$, também pertence a $Dom(H)$ e:*

$$\overline{H(f)} = H(\bar{f}).$$

Então, H tem pelo menos uma extensão autoadjunta.

Prova: Inicialmente, vamos provar que H^* é real. De fato, seja $g \in Dom(H^*)$. Então, para todo $f \in Dom(H)$, vale que

$$\langle Hf, g \rangle = \langle f, H^* g \rangle$$

Tomando o fecho, vem que:

$$\overline{\langle Hf, g \rangle} = \langle \overline{Hf}, \bar{g} \rangle = \overline{\langle f, H^* g \rangle} = \langle \bar{f}, \overline{H^* g} \rangle$$

Como H é real, chegaremos a

$$\langle H\bar{f}, \bar{g} \rangle = \langle \bar{f}, H^* \bar{g} \rangle = \langle \bar{f}, \overline{H^* g} \rangle$$

Como f é qualquer em $Dom(H)$, o qual é denso, segue que $\overline{H^* g} = H^* \bar{g}$ e H^* é real. Daí, veja que, ao tomarmos o operador conjugação, o qual leva $f \longrightarrow \bar{f}$, o mesmo leva bijetivamente L^+ em L^-. De fato, se $f \in L^+$, então $H^* f = if$. Tomando o fecho e lembrando que H é real, vem que $\overline{H^* f} = \overline{if}$ o que nos dá $H^* \overline{f} = -i\overline{f}$, ou seja, $\overline{f} \in L^-$. De modo análogo podemos concluir que, dado $\overline{f} \in L^-$, existe $f \in L^+$ relacionado ao mesmo. Como o operador conjugação é bijetivo, então $dim L^+ = dim L^-$, e, então, H tem, pelo menos, uma extensão autoadjunta.

O teorema acima não diz exatamente quantas extensões autoadjuntas o operador possui. Se tomarmos H em $L^2(a, b)$ como no exemplo 1.4, mas com domínio

$$L := L_N \cap L_D = \{f \in C^2(a, b) / f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0\},$$

então H é real e possui duas extensões autoadjuntas distintas, $\overline{H_N}$ e $\overline{H_D}$. Ao identificarmos explicitamente os subespaços de deficiência, podemos usar o lema 1.25 para classificar todas as extensões autoadjuntas de um operador simétrico dado. Porém, isso normalmente só é possível para operadores diferenciais ordinários, para os quais os subespaços de deficiência tem dimensão finita.

Exemplo 1.31. *Seja H o operador simétrico em $L^2(0,\infty)$ dado por*

$$Hf := if'$$

de modo que $Dom(H) = C_c^\infty(0,\infty)$. Pode-se mostrar que $H^* f = \pm if$ se, e somente se, $f, f' \in L^2$ e $f' = \pm f$. Essas condições fazem com que tenhamos $f(x) = ce^{\pm x}$. Portanto, $dimL^+ = 0$ e $dimL^- = 1$, e, então, H não tem extensões autoadjuntas. Tomando agora o mesmo operador, só que em $L^2(0,1)$ com domínio $C_c^\infty(0,1)$, H tem índices de deficiência iguais e iguais a 1, logo, possui pelo menos uma extensão autoadjunta, e, na verdade, este operador possui infinitas extensões autoadjuntas.

Teorema 1.32. *O espectro de qualquer operador autoadjunto é real e não-vazio. Se $z \notin \mathbb{R}$, então*

$$\|(z - H)^{-1}\| \le |Imz|^{-1}. \tag{1.5}$$

Além disso,

$$(\bar{z} - H)^{-1} = ((z - H)^{-1})^* \tag{1.6}$$

Prova: Vamos supor que $Spec(H) \neq \emptyset$ e suponha $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que exista $f \neq 0$ tal que $Hf = \lambda f$. Assim,

$$\lambda\langle f, f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \langle Hf, f\rangle = \langle f, H^* f\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \overline{\lambda}\langle f, f\rangle$$

Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $K = \frac{(H-x)}{y}$, onde $z = x + iy$, com $y \neq 0$. Veja que $K = K^*$ e sabemos também que $\pm i \notin Spec(H)$ e $\|(K \pm i)^{-1}\| \le 1$. Logo, $z \notin Spec(H)$ e (1.5) segue-se. Se f_1,$f_2 \in Dom(H)$, então:

$$\langle (H - z)f_1, f_2\rangle = \langle f_1, (H - \overline{z})f_2\rangle$$

Fazendo $g_1 = (H - z)f_1$ e $g_2 = (H - \overline{z})f_2$, vem que:

$$\langle g_1, f_2\rangle = \langle f_1, g_2\rangle$$

Donde temos (1.6). Suponhamos agora que $Spec(H) = \emptyset$. Então, para quaisquer ϕ,$\varphi \in \mathcal{H}$, a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(z) := \langle (z - H)^{-1}\phi, \varphi\rangle$$

é analítica em $\mathbb{C}$, a qual vai a zero quando $|z| \to \infty$. Pelo teorema de Liouville temos que f deve ser identicamente nula, e, como ϕ e φ foram dados arbitrariamente, temos que $(z - H)^{-1}$ é identicamente nula. O que contradiz a hipótese de $Spec(H) = \emptyset$. Portanto, $Spec(H) \neq \emptyset$.

O Operador Multiplicação

Uma classe de operadores autoadjuntos muito importante para a teoria espectral são os chamados **operadores multiplicação**, os quais descreveremos abaixo. Na verdade, todo operador autoadjunto é unitariamente equivalente a um operador multipllicação. Seja E um subconjunto de Borel do $\mathbb{R}^n$ e μ uma medida de Borel não-negativa e enumeravelmente aditiva a qual é limitada em todos os subconjuntos de Borel do $\mathbb{R}^n$. Seja ainda $\mathcal{H} := L^2(E, d\mu)$ o espaço de todas as funções mensuráveis $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que:

$$\|f\| := \left(\int_E |f(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Seja $a : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que a restrição de a a qualquer subconjunto de E é uma função limitada e $\mathcal{D}$ o conjunto das funções $f \in \mathcal{H}$ tais que

$$\int_E (1 + a(x)^2)|f(x)|^2 d\mu < \infty$$

Definamos agora o operador $A : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ dada por

$$(Af)(x) := a(x)f(x)$$

para cada $x \in E$. Veja que A está bem definida, já que

$$\|Af\|^2 = \int_E |Af(x)|^2 d\mu = \int_E |a(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu \leq supess|a|^2 \int_E |f(x)|^2 d\mu < \infty$$

e ainda ganhamos que $\|Af\| \leq supess|a|\|f\|$.

Lema 1.33. *A é um operador linear densamente definido e fechado.*

Prova: É claro que $\mathcal{D}$ é um espaço vetorial e que A é linear. Vamos tomar $f \in \mathcal{H}$ qualquer e definamos

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad |a(x)| \leq n \\ 0, & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}$$

Então, veja que $|f_n(x)| \leq f(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quase todo ponto $x \in E$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que $f_n \longrightarrow f$ em $\mathcal{H}$, e daí $\mathcal{D}$ é denso. Tendo esta mesma sequência (f_n), seja $g = \lim_{n\to\infty} Af_n$. Vamos mostrar que $g \in \mathcal{H}$ e que $Af = g$.

$$\int_E |Af_n(x)|^2 dx \leq \int_E n^2 |f_n(x)| dx < \infty$$

Logo, $g \in \mathcal{H}$.

Lema 1.34. *Seja A como definido acima. Então, vale que:*

(I) $\|A\| = supess|a|$

(II) $A^* = \overline{A}$

Aqui, usamos um abuso de notação, já que $\overline{A}$ significa o operador A como o definido acima, mas, ao invés de a na definição do mesmo, usamos $\overline{a}$.

Prova: Sejam f, $g \in \mathcal{H}$, então:

$$\langle Af, g\rangle = \int_E a(x)f(x)\overline{g(x)}d\mu = \int_E f(x)\overline{\overline{a(x)}g(x)} = \langle f, \bar{A}g\rangle$$

Logo, $A^* = \bar{A}$.

Lema 1.35. *O operador A é autoadjunto no domínio $\mathcal{D}$. Se L_c^2 é o conjunto das funções $f \in \mathcal{H}$ as quais se anulam fora de um subconjunto limitado de E, então A é essencialmente autoadjunto em L_c^2.*

Prova: Inicialmente, veja que A é simétrico no seu domínio. Seja $z \notin \mathbb{R}$ e consideremos o operador R_z em $\mathcal{H}$ definido por

$$(R_z f)(x) := (z - a(x))^{-1} f(x)$$

Se $f \in \mathcal{D}$ é claro que

$$(z - A)R_z f = f$$

Portanto, $z \notin Spec(A)$ e R_z é o resolvente de A. Logo, A é fechado. Os subespaços de deficiência de A são ambos nulos, o que nos dá que A é autoadjunto. Agora, seja $f \in \mathcal{D}$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), \text{caso } |x| < n \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, para todo $x \in E$, temos que $f_n(x) \in L_c^2 \subset \mathcal{D}$ para todo n. Podemos agora usar o teorema da convergência dominada para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|Af_n - Af\| = 0$$

Logo, A é o fecho da sua restrição a L_c^2

A *imagem essencial* de uma função é o conjunto mais próximo do conjunto de valores que a função pode assumir, ou seja, os valores que a função assume a menos de um conjunto de medida nula, onde a mesma pode sofrer alguma alteração.

Lema 1.36. *O espectro de A é igual à imagem essencial de a, a qual é o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\mu(\{x/|a(x) - \lambda| < \epsilon\}) > 0$$

para todo $\epsilon > 0$. Se $\lambda \notin Spec(A)$, então

$$((\lambda - A)^{-1} f)(x) = (\lambda - a(x))^{-1} f(x)$$

para todo $x \in E$ e $f \in \mathcal{H}$ e ainda

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = (dist(\lambda, Spec(A)))^{-1}$$

Prova: Se λ não está na imagem essencial de a, então a função $r_\lambda(x) := (\lambda - a(x))^{-1}$ é limitada fora de um conjunto de medida nula, logo o operador multiplicação R_λ é limitado em L^2. É fácil ver que seu domínio é igual ao domínio de A e que $R_\lambda(\lambda - A) = 1$, 1 visto como a identidade no espaço L^2. Da mesma forma, podemos mostrar que $(\lambda - A)R_\lambda = 1$ também ocorre, logo, $\lambda \notin Spec(A)$. Reciprocamente, se λ estiver na imagem essencial de a, então os conjuntos

$$S_m := \{x; |\lambda - a(x)| < 2^{-m}\}$$

tem medida diferente de zero para todo m. Se a medida de S_m é infinita, então nós trocaremos S_m por um conjunto de medida finita e positiva. Se ϕ_m é a função característica de S_m, então $0 \neq \phi_m \in L^2$ e

$$\|(\lambda - A)\phi_m\| \leq 2^{-m}\|\phi_m\|$$

Daí, veja que o operador $(\lambda - A)$ não pode ter inverso limitado, então $\lambda \in Spec(A)$. Agora, como

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = Supess\{|\lambda - a(x)|^{-1}; x \in E\}$$

Segue que vale

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = (dist(\lambda, Spec(A)))^{-1}$$

Com essas ferramentas a mão, desejamos agora provar a versão do teorema espectral para cálculos funcionais. No próximo capítulo, nos deteremos a encontrar um conjunto onde faça sentido desenvolvermos o cálculo funcional.

Capítulo 2

O Cálculo Funcional e a Fórmula de Helffer-Strödjand

Dado um polinômio de grau n, $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

sabemos calcular o valor de $p(z)$, qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$. Na verdade dada uma função complexa f com uma lei de formação, sempre tem sentido perguntar o valor de $f(z)$. A mesma coisa não ocorre para um operador linear. Por exemplo, seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = x + y$, qual o valor de $f(T)$, onde $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$? É sempre possível calcular $f(T)$ para um operador definido em um domínio qualquer? O cálculo funcional é uma teoria que busca propriedades que uma determinada função deve possuir para que faça sentido falar sobre o valor de $f(T)$ para qualquer operador(ou determinada classe de operadores). Quando temos uma matriz quadrada $M_{n\times n}$ e a função $g(x) = x^2$, é claro que faz sentido encontrar o valor de $g(M)$(note que tal valor ainda é uma matriz). Seguindo um raciocínio indutivo, podemos calcular o valor de $p(M)$, onde p é o polinômio citado acima. Ainda com essa matriz, sabemos que faz sentido

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Agora, veja que a função exponencial acima pode ser aproximada por polinômios, o que nos leva a pensar que se f satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} p_n(M) = f(M)$$

então herdará também as mesmas propriedades e fará sentido falar no valor de $f(M)$. Podemos usar o mesmo raciocínio caso, no lugar de uma matriz M, tivermos um operador linear T.

Neste capítulo, H será um operador autoadjunto qualquer (limitado ou não), definido num espaço de Hilbert separável. Uma propriedade que já foi provada no capítulo anterior e que será crucial para nosso estudo neste capítulo é a desigualdade:

$$\|(z-H)^{-1}\| \leq |Im(z)|^{-1} \tag{2.1}$$

para todo $z \in \mathbb{R}$. Se $z \in \mathbb{C}$, então denotaremos $\langle z \rangle := (1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Lema 2.1. *Para todos x,$y \in \mathbb{R}^n$, vale que*

$$\langle x+y \rangle \leq 2\langle x \rangle \langle y \rangle$$

Prova: Se $x \in R^n$, sabemos que $\langle x \rangle := (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $|x|$ denota a norma usual do R^n. O que queremos provar é equivalente (basta elevar ambos os membros ao quadrado) a:

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right) \leq 4\left(1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

Veja que a equação acima ocorre se, e somente se:

$$1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \leq 4+4\sum_{i=1}^{n}x_i^2+4\sum_{i=1}^{n}y_i^2+4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)$$

o que ocorre já que

$$2\sum_{i=1}^{n}x_iy_j \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)$$

onde x_i's e y_i's são números reais.

Se $\beta \in \mathbb{R}$, então, definimos S^β por

$$S^\beta := \left\{f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ f \in C^\infty; |f^{(n)}(x)| = \left|\frac{d^n f}{dx^n}\right| \leq c_n \langle x \rangle^{\beta-n}\right\}$$

para algum $c_n < \infty$, todo $x \in \mathbb{R}$ e todo n inteiro não-negativo. Definamos também uma classe de funções dada pela família

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\beta<0} S^\beta \tag{2.2}$$

A família de funções $\mathcal{A}$, como definido acima, é uma álgebra sobre a "multiplicação pontual"e contém toda função racional cujo denominador não se anula em $\mathbb{R}$, o qual tem maior grau do que o seu numerador(basta notar que tais funções têm o tipo de decrescimento pedido na definição do nosso $\mathcal{A}$).

Em $\mathcal{A}$, podemos definir a norma

$$\|f\|_n := \sum_{r=o}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(r)}(x)| \langle x \rangle^{r-1} dx \tag{2.3}$$

para todos os inteiros $n \geq 1$. Note que se $\|f\|_n < \infty$, então $f' \in L^1(\mathbb{R})$ e daí $f \in C_0(\mathbb{R})$.

A fórmula de Helffer-Ströjand

Vamos agora introduzir um conceito que nos ajudará a provar o teorema espectral de uma maneira mais elegante. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função infinitamente diferenciável. Definimos uma extensão de f (a qual também é infinitamente diferenciável), $\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\tilde{f}(z) := \left(\sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r!} \right) \sigma(x,y) \tag{2.4}$$

onde $n \geq 1$ e

$$\sigma(x,y) := \tau \left(\frac{y}{\langle x \rangle} \right)$$

para alguma função $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que se comporta do seguinte modo

$$\tau(s) = \begin{cases} 1, \text{se } |s| < 1 \\ 0, \text{se } |s| > 2 \end{cases}$$

Veremos que a escolha de um n natural e uma função τ com essa propriedade não será relevante.

Lema 2.2. *A função $\tilde{f}$ é uma extensão de f e é infinitamente diferenciável quando vista como uma função de (x,y), mas não analítica.*

Prova: Caso $y = 0$, vemos que $z = x \in \mathbb{R}$. Além disso, $\sigma(x,y) = \tau(0) = 1$ e fazendo $r = 0$ em (2.4), veja que $\tilde{f}(z) = f(x)$, logo, $\tilde{f}$ é uma extensão de f. Como a expressão (2.4) vale para todo $n \geq 1$, segue que $\tilde{f}$ é infinitamente diferenciável.

Com isso em mãos, temos

$$\frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r!} \right) (\sigma_x + i\sigma_y) + \frac{1}{2} f^{(n+1)}(x) \frac{(iy)^n}{n!} \sigma \tag{2.5}$$

A expressão acima ainda nos dá que

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}\right| = O(|y^n|), \text{ quando } y \longrightarrow 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular $\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}\right| = 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Agora, dado um operador H autoadjunto e f qualquer em $\mathcal{A}$, definamos

$$f(H) := -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy \tag{2.6}$$

Com o lema abaixo, conseguiremos mostrar que $f(H)$ é limitado na norma $\|.\|_{n+1}$ para todo n e, assim, poderemos transferir nosso problema de um operador a priori não necessariamente limitado para um operador limitado.

Lema 2.3. *O operador $f(H)$, como descrito acima, é limitado e*

$$\|f(H)\| \leq c\|f\|_{n+1}$$

para toda $f \in \mathcal{A}$ e todo $n \geq 1$.

Prova: Se $z \notin \mathbb{R}$, então $z \notin Spec(H)$. Portanto, $(z-H)^{-1}$ é analítica na norma(lema 1.7) e tem norma limitada, segundo (2.1) acima. Considere os conjuntos:

$$U := \{(x,y); \langle x\rangle < |y| < 2\langle x\rangle\} \text{ e } V := \{(x,y); 0 < |y| < 2\langle x\rangle\}$$

Como $\|(z-H)^{-1}\| \leq |y|^{-1}$ e usando (2.5), vemos que

$$\left\|\frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}|f^{(r)}(x)|\left|\frac{(iy)^r}{r!}\right||y|^{-1}|\sigma_x + i\sigma_y| + \frac{1}{2}|f^{(n+1)}(x)|\left|\frac{(iy)^n}{n!}\right||y|^{-1}|\sigma|$$

Sempre que possível, incorporaremos a uma constante c todas as constantes que não dependem de n. Veja que só faz sentido avaliar $|\tau'|$ em U. Para a primeira parcela, considerando que $(x,y) \in U$, então $|y|^n < 2^n\langle x\rangle$. Para a segunda parcela, como não aparece τ', basta avaliarmos a expressão em V, o que nos dá $|y|^n < 2^n\langle x\rangle$. Lembrando que $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$, podemos limitar esta parcela por uma constante que não depende de n:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que , } \forall n \geq n_0 \text{ tenhamos } |\frac{2^n}{n!}| < \epsilon$$

e basta esolhermos a constante $C = max\{\epsilon, 1, 2, ..., \frac{2^{n_0}}{n_0!}\}$. Agora, veja que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle x\rangle^{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_i}(1 + x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\lambda}{2}.2.x_i\langle x\rangle^{\lambda-2}$$

Como $x_i < \langle x \rangle$, vem que

$$|\frac{\partial}{\partial x_i}\langle x \rangle^{\lambda}| < |\lambda| C \langle x \rangle^{\lambda - 1} \tag{2.7}$$

Daí, veja que

$$|\sigma_x + i\sigma_y| \leq |\sigma_x| + |\sigma_y|$$

Mas, ao derivarmos σ, precisamos usar a regra da cadeia e (2.6), a qual nos dará

$$|\sigma_x| = |\tau'||y|((\langle x \rangle^{-1})' = |\tau'||y|| - 1|\langle x \rangle^{-2} = |\tau'||y|\langle x \rangle^{-1}\langle x \rangle^{-1} < 2|\tau'|\langle x \rangle^{-1}$$

com relação à variável y, temos

$$|\sigma_y| = |\tau'|\langle x \rangle^{-1} < 2|\tau'|\langle x \rangle^{-1}$$

como podemos escrever $|\tau'| = |\tau'|\chi_U(x, y)$, chegamos à expressão:

$$|\sigma_x + i\sigma_y| \leq C\langle x \rangle^{-1}\chi_U(x, y)$$

Logo, substituindo na estimativa da norma acima

$$\left\| \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}}(z - H)^{-1} \right\| \leq c \sum_{r=0}^{n} |f^{(r)}(x)|\langle x \rangle^{r-2}\chi_U(x, y) + c|f^{(n+1)}(x)||y|^{n-1}\chi_V(x, y)$$

para todo $n \geq 1$. Podemos então integrar em y de modo a aparecer o que queremos:

$$\|f(H)\| \leq c\|f\|_{n+1}$$

e o resultado segue.

Continuando nossa busca por um bom conjunto onde consigamos desenvolver um cálculo funcional, para o qual $\mathcal{A}$ é o nosso principal candidato, temos uma certa dificuldade em lidar com os elementos deste conjunto explicitamente, mas conseguimos enxergar que o mesmo é um pouco mais "gordo"que o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. Na verdade, vale o lema abaixo:

Lema 2.4. *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{A}$ com a norma $\|\|_{n+1}$, para todo n.*

Prova: Seja $f \in S^\beta$ para algum $\beta < 0$. Dada $\phi \in C_c^\infty$ tal que $\phi(s) = 1$, se $|s| < 1$ e $\phi(s) = 0$, se $|s| > 2$. Façamos $\phi_m(s) = \phi(\frac{s}{m})$ e $f_m = \phi_m f$. Assim, construímos uma sequência de funções C_c^∞ e vamos mostrar que, para todo $n \geq 1$, f_m converge a f na norma $\|\|_{n+1}$:

$$\|f - f_m\|_{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^r}{dx^r}(f(x))(1 - \phi_m(x)) \right| \langle x \rangle^{r-1} dx.$$

Usando a regra de Leibnitz para derivação do produto e que

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\phi_m(x)\right| \leq c_k m^{-k}\chi_m(x) \leq c_k'\langle x\rangle^{-k}\chi_m(x)$$

para todo $k \geq 1$, onde χ é a função característica do conjunto $\{x; m < |x| < 2m\}$ Daí, chegamos que

$$\|f - f_m\|_{n+1} \leq c\sum_{r=0}^{n+1}\int_{2m>|x|>m}\left|\frac{d^r f}{dx^r}\right|\langle x\rangle^{r-1}dx$$

e como o lado esquerdo vai a 0 quando $m \longrightarrow \infty$, segue que f_m converge a f.

Lema 2.5. *Se $F \in C_c^\infty$ e $F(z) = O(y^2)$ quando $y \longrightarrow 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, então vale*

$$I = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy = 0 \tag{2.8}$$

Prova: Seja $suppF = \{z = x + iy; |x| < N$ e $|y| < N\}$ e definamos, para cada $\delta > 0$ bem pequeno, $\Omega_\delta = \{z = x + iy; |x| < N$ e $\delta < |y| < N\}$. Inicialmente, veja que F está definida num quadrado de lado N. Ao olharmos para o conjunto Ω_δ, conseguimos dois domínios distintos(retângulos abertos) e fazendo δ ir a zero, os dois retângulos cobrirão o nosso domínio, logo, podemos escrever:

$$I = -\lim_{\delta\to 0} I_\delta = -\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_\delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy$$

Sabemos que $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y})$, então podemos separar a integral I_δ em duas:

$$I_\delta = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_\delta}\frac{\partial F}{\partial x}(z-H)^{-1}dxdy + \frac{i}{2\pi}\int_{\Omega_\delta}\frac{\partial F}{\partial y}(z-H)^{-1}dxdy \tag{2.9}$$

Agora, considere os campos

$$\vec{X} = \frac{F(z)}{(z-H)}\vec{e_1} \text{ e } \vec{Y} = \frac{F(z)}{(z-H)}\vec{e_2}$$

e note que os normais aos campos são $\eta_x = \vec{e_2}$ e $\eta_y = -\vec{e_2}$. Calculando os divergentes, chegamos a:

$$Div\vec{X} = \frac{\partial F}{\partial x}(z-H)^{-1} + F(z)(z-H)^{-2} \text{ e } Div\vec{Y} = \frac{\partial F}{\partial y}(z-H)^{-1} + iF(z)(z-H)^{-2}$$

Vamos somar e subtrair a parcela $F(z)(z-H)^{-2}$ em (2.9), pondo uma parcela na primeira integral e a mesma multiplicada por i na segunda integral, de modo que aparecerá:

$$I_\delta = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_\delta}Div\vec{X}dxdy + \frac{i}{2\pi}\int_{\Omega_\delta}Div\vec{Y}dxdy$$

Usando o Teorema da Divergência:

$$I_\delta = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\delta} \vec{X}\eta_x dz + \frac{i}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\delta} \vec{Y}\eta_y dz$$

Com os normais em mãos, vemos que a primeira integral vai a zero e então:

$$I = \lim_{\delta\to 0}\frac{i}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\delta} \frac{F(z)}{(z-H)}dz$$

Sendo esta última uma integral sobre 8 segmentos de reta(lados dos dois retângulos), dos quais apenas dois são suporte da F. Utilizando (2.1), temos uma estimativa que pode juntar as duas integrais restantes numa só:

$$\|I\| \leq \lim_{\delta\to 0}\frac{i}{2\pi}\int_{-N}^{N}\Big(|F(x+\delta y)| + |F(x-i\delta y)|\Big)\delta^{-1}dx$$

Tal limite vai a zero, pelas condições satisfeitas por F no lema e então o resultado segue.

Veja que o teorema da divergência acima utilizado é na verdade uma extensão do teorema da divergência que conhecemos, considerando operadores como vetores.

Lema 2.6. *Se $f \in \mathcal{A}$ e $n \geq 1$, então o operador $f(H)$ independe da escolha de σ e n.*

Prova : Como C_c^∞ é denso em $\mathcal{A}$, basta provarmos para esta classe de funções. Seja $f \in C_c^\infty$ e com o intuito de simplificar a notação, definamos

$$\tilde{f}_{\sigma,n} := \tilde{f}(z) = \left(\sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x)\frac{(iy)^r}{r!}\right)\sigma(x,y)$$

Sejam σ_1 e σ_2 duas funções como no início do capítulo. Para $|y|$ bem pequeno, temos que essas funções coincidem e são iguais a 1 e daí, $\tilde{f}_{\sigma_1,n} - \tilde{f}_{\sigma_2,n} = \tilde{f}_{\sigma,n} = 0$ e, pelo lema anterior, $\tilde{f}_{\sigma,n}(H) = 0$ o que mostra a independência do parâmetro σ. Agora, para $m > n \geq 1$, $\tilde{f}_{\sigma,m} - \tilde{f}_{\sigma,n} = O(y^2)$ quando $|y| \to 0$ e então, pelo lema anterior, $\tilde{f}_{\sigma,n}(H)$ independe da escolha de n.

Lema 2.7. *Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $suppf \cap Spec(H) = \emptyset$, então $f(H) = 0$.*

Prova : Como $suppf$ é compacto, existe uma quantidade finita de bolas $\{B_r\}_{r=1}^k$ tais que $supp\tilde{f} \subset \bigcup_{r=1}^k B_r$ e não tocam o $Spec(H)$. Daí, existe um número finito de curvas $\{\gamma_r\}_{r=1}^n$ que são a fronteira de uma região U que contém o suporte da $\tilde{f}$ e que não tocam o espectro de H. Podemos então usar novamente o teorema da divergência como no lema (2.5) e chegar na seguinte expressão:

$$f(H) = -\frac{1}{\pi}\int_U \frac{\partial\tilde{f}(z)}{\partial\bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy = \frac{i}{2\pi}\sum_{r=1}^{n}\int_{\gamma_r}\tilde{f}(z)(z-H)^{-1}dz$$

A qual é zero, pois $\tilde{f}$ é zero em cada γ_r.

Lema 2.8. *Para quaisquer f,$g \in \mathcal{A}$, vale que*

$$(fg)(H) = f(H)g(H)$$

Prova : Sejam r, $h \in S^{\beta}$ para algum $\beta < 0$, dada $\phi \in C_c^{\infty}$ tal que $\phi(s) = 1$ se $|s| < 1$ e $\phi(s) = 0$ se $|s| > 2$, defina $\phi_m(s) = \phi(s/m)$. Se $h_m = \phi_m h$, $r_m = \phi_m r$ e $p_m = \phi_m^2 hr$, então como elas pertencem a C_c^{∞}, vale que

$$p_m(H) = h_m(H)r_m(H)$$

e por passagem de limite, já que vale o lema (2.4) e como hr é limitado(lema 2.3), temos

$$(hr)(H) = h(H)r(H)$$

Logo, basta fazermos a análise para funções contínuas com suporte compacto. Tomemos f e g em C_c^{∞}. Sejam ainda $L := supp(\tilde{g})$ e $K := supp(\tilde{f})$, então K e L são subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e ainda:

$$f(H)g(H) = -\frac{1}{\pi}\int_{K\times L}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{w}}(z-H)^{-1}(w-H)^{-1}dxdydudv$$

Como vale (i) em (1.7):

$$(z-H)^{-1}(w-H)^{-1} = (z-w)^{-1}(w-H)^{-1} - (z-w)^{-1}(z-H)^{-1}$$

daí, podemos separar a integral acima em duas integrais distintas:

$$f(H)g(H) = -\frac{1}{\pi}\int_{K\times L}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{w}}(z-w)^{-1}(w-H)^{-1}dxdydudv$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{K\times L}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{w}}(z-w)^{-1}(z-H)^{-1}dxdydudv$$

Agora, podemos utilizar uma versão da fórmula integral de Cauchy para funções infinitamente diferenciáveis(mais detalhes em [12]) e simplificar as equações, já que

$$-\frac{1}{\pi}\int_{K}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z-w)^{-1}dxdy = \tilde{f}(w) \text{ e } -\frac{1}{\pi}\int_{L}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{w}}(z-w)^{-1}dudv = \tilde{g}(z)$$

Daí,

$$f(H)g(H) = -\frac{1}{\pi}\int_{K\cup L}\left(\tilde{f}(z)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}\tilde{g}(z)\right)(z-H)^{-1}dxdy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{K\cup L}\frac{\partial \tilde{f}\tilde{g}}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy.$$

Por definição, temos

$$(fg)(H) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\widetilde{(fg)}}{\partial\bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy$$

Logo, o que precisamos mostrar é que

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial k}{\partial\bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy = 0$$

onde $k(z) := \tilde{f}(z)\tilde{g}(z) - \widetilde{(fg)}(z)$. Agora, como f e $g \in C_c^\infty$, $k \in C_c^\infty$ e o resultado segue do lema 2.5.

Lema 2.9. *Se $w \notin \mathbb{R}$ e $r_w := (w-z)^{-1}$, para todo $z \neq w$, então $r_w \in \mathcal{A}$ e*

$$r_w(H) = (w-H)^{-1}$$

Prova : Como $f(H)$ é independente da escolha de n e σ, podemos escolher $n = 1$. Vamos ainda assumir que $Im(w) > 0$ e

$$\sigma(z) := \tau\left(\frac{\lambda|y|}{\langle x\rangle}\right),$$

onde $\lambda \geq 1$ é suficientemente grande para que $w \notin supp(\sigma)$. Para $m > 0$ grande, definamos

$$\Omega_m := \{(x,y); |x| < m \text{ e } m^{-1}\langle x\rangle < |y| < 2m\}$$

A fronteira de Ω_m é formada por duas curvas fechadas e orientadas no sentido anti-horário, as quais são 6 segmentos de reta e duas curvas. Logo, podemos usar o teorema da divergência da mesma forma como no lema (2.5)(para o campo $\vec{X} = \tilde{r}_w(z)(z-H)^{-1}\vec{e_1}$), de modo a concluir que

$$r_w(H) = -\frac{1}{\pi}\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_m}\frac{\partial\tilde{r}_w}{\partial\bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy$$

$$= \frac{i}{2\pi}\lim_{m\to\infty}\int_{\partial\Omega_m}\tilde{r}_w(z)(z-H)^{-1}dz$$

Agora, vamos calcular

$$\lim_{m\to\infty}\|\int_{\partial\Omega_m}(r_w(z)-\tilde{r}_w(z))(z-H)^{-1}dz\|$$

Veja que $\partial\Omega_m$ é composta por seis segmentos de reta e duas curvas. Vamos então separar em casos.

1º Caso : Quando z está em uma linha vertical γ, então $\langle z\rangle = O(m)$ e $\langle x\rangle = O(m)$.

Usando uma extensão $\tilde{r}_w$ com $n = 1$ para a função $r_w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $r(x) := r_w(x + iy)$, temos que $\tilde{r}_w(x) = r_w(x) + r'_w(x)iy$, o que nos dá:

$$|r_w(z) - \tilde{r}_w(z)| \leq |(1 - \sigma(z))r_w(z)|$$

$$+\sigma(z)|r_w(z) - r_w(x) - r'_w(x)iy|$$
$$\leq c\chi_W(z)\langle x\rangle^{-1} + c\frac{|y^2|}{\langle x\rangle^3}$$

onde

$$\chi_W(z) := \begin{cases} 1, & \text{se } \langle x\rangle < \lambda|y| \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então,

$$\| \int_\gamma (r_w(z) - \tilde{r}_w(z))(z - H)^{-1}dz\|$$
$$\leq c\int_{\lambda^{-1}\langle m\rangle}^{2m} \frac{dy}{my} + c\int_{\lambda^{-1}\langle m\rangle}^{2m} \frac{ydy}{m^3}$$
$$= O(m^{-1})$$

2º Caso: Se γ' é uma das curvas $y = \pm\frac{\langle x\rangle}{m}$, então $\sigma(z) = 1$ para todo $z \in \gamma'$ e

$$|r_w(z) - \tilde{r}_w(z)| \leq c\frac{|y|^2}{\langle x\rangle^3}.$$

Chegamos a seguinte expressão:

$$\| \int_{\gamma'} (r_w(z) - \tilde{r}_w(z))(z - H)^{-1}dz\|$$

$$\leq c\int_{\gamma'} \frac{|y|^2}{\langle x\rangle^3}\frac{1}{|y|}|dz|$$
$$= cm^{-1}\int_{\gamma'} \langle x\rangle^{-2}|dz| = O(m^{-1})$$

3º Caso : Se z está em um dos segmentos horizontais γ'', então $\sigma(z) = 0$, já que $|y|$ e $\langle z\rangle$ são de ordem m. Daí,

$$\| \int_{\gamma''} (r_w(z) - \tilde{r}_w(z))(z - H)^{-1}dz\| \leq c\int_{\gamma''} \frac{dx}{m^2} = O(m^{-1}).$$

Agora, considerando as limitações que nós já temos

$$r_w(H) = \frac{i}{2\pi}\lim_{m\to\infty}\int_{\partial\Omega_m} r_w(z)(z - H)^{-1}dz.$$

A integração é holomórfica em $\partial\Omega_m$ e em $int(\Omega_m) \cap \mathbb{R}^-$, onde $\mathbb{R}^-$ é o semiplano negativo. Pelo Teorema de Cauchy, essa integral é zero. Porém, em $\mathbb{R}^+$- que é o semiplano positivo- a integração é meromórfica com um pólo simples em $z = w$. Portanto,

$$r_w(H) = -Res_{z=w}(r_w(z)(z-H)^{-1}) = (w-H)^{-1}$$

e o lema segue-se.

Lema 2.10. *Para todos os $f \in \mathcal{A}$, vale que*

$$\bar{f}(H) = f(H)^* \text{ e } \|f(H)\| \leq \|f\|_\infty$$

Prova : Como H é autoadjunto, podemos usar o teorema 1.32, que nos diz que

$$(\bar{z} - H)^{-1} = ((z-H)^{-1})^*.$$

Inicialmente, sabemos que

$$\tilde{f}(z) := \left(\sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x)\frac{(iy)^r}{r!}\right)\sigma(x,y).$$

Tomando o conjugado:

$$\bar{\tilde{f}}(z) = \left(\sum_{r=0}^{n} \overline{f^{(r)}(x)}\,\overline{\frac{(iy)^r}{r!}}\right)\sigma(x,y) = \bar{\tilde{f}}(z) = \left(\sum_{r=0}^{n} \bar{f}^{(r)}(x)\frac{(-iy)^r}{r!}\right)\sigma(x,y)$$

e ainda

$$\bar{\tilde{f}}(\bar{z}) = \left(\sum_{r=0}^{n} \bar{f}^{(r)}(x)\frac{(iy)^r}{r!}\right)\sigma(x,y).$$

Agora, veja que, por definição,

$$\tilde{\bar{f}}(z) = \left(\sum_{r=0}^{n} \bar{f}^{(r)}(x)\frac{(iy)^r}{r!}\right)\sigma(x,y)$$

Então vale a relação $\tilde{\bar{f}}(z) = \bar{\tilde{f}}(\bar{z})$. Derivando com respeito a $\bar{z}$:

$$\frac{\partial \tilde{\bar{f}}}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial \bar{\tilde{f}}}{\partial \bar{z}}(\bar{z}).$$

Logo,

$$\bar{f}(H) := -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{\bar{f}}(z)}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \bar{\tilde{f}}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}(z-H)^{-1}dxdy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right)}(\bar{z})(z-H)^{-1}dxdy$$

Fazendo a mudança de variável $z \longrightarrow \bar{z}$ (a qual tem jacobiano = 1), vem:

$$\bar{f}(H) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right)}(z)(\bar{z}-H)^{-1}dxdy$$

podemos agora usar o teorema 1.32 citado no início da prova

$$\bar{f}(H) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right)}(z)((z-H)^{-1})^{*}dxdy = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(z)(z-H)^{-1}\right)^{*}dxdy.$$

Um fato que vem da definição das integrais de Bochner é que se $H : L \longrightarrow \mathcal{H}$ é μ-Bochner integrável e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado, então Tf é μ-Bochner integrável e vale

$$T\int_L f d\mu = \int_L Tf d\mu$$

Sendo assim, temos que $(\int f)^* = \int f^*$ (mais detalhes no apêndice). Aplicando o mesmo à expressão acima, temos que $\bar{f}(H) = f(H)^*$ e o resultado segue. Seja agora $c > \|f\|_\infty$ e definamos

$$g(s) := c - (c^2 - |f(s)|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ para cada s}$$

então $g \in \mathcal{A}$ e, desenvolvendo, vale pontualmente que

$$f\bar{f} - 2cg + g^2 = 0$$

E como $\mathcal{A}$ é uma álgebra sobre a multiplicação pontual, em particular vale que

$$f(H)^*f(H) - cg(H) - cg(H)^* + g(H)g(H)^* = 0.$$

Daí,

$$f(H)^*f(H) - cg(H) - cg(H)^* + g(H)^*g(H) + c^2 = c^2 = f(H)^*f(H) + (c - g(H)^*)(c - g(H))$$

$$= f(H)^*f(H) + (c - g(H))^*(c - g(H)).$$

Logo, para v qualquer em $\mathcal{H}$, temos que

$$\|f(H)v\|^2 \leq \|f(H)v\|^2 + \|(c - g(H))v\|^2 = c^2\|v\|$$

e então $|f(H)| \leq \|f\|_\infty$ e o resultado segue.

Passamos agora à parte mais importante desta dissertação. Até agora, mostramos que o operador definido no início deste capítulo satisfaz algumas propriedades que precisamos que sejam satisfeitas pelo cálculo funcional, para funções definidas no nosso conjunto

$\mathcal{A}$. Quanto mais abrangente a definição deste conjunto de funções, maior a gama de funções onde poderemos definir nosso cálculo funcional. Desse modo, o que fazemos agora é estender a definição de $\mathcal{A}$ para $C_0(\mathbb{R})$. Para isso, vamos precisar de uma certa generalização do Teorema de Stone-Weirstrass:

Teorema 2.11. *Suponha que X é um espaço de Hausdorff localmente compacto e A uma sub-álgebra de $C_0(X, \mathbb{R})$. Então A é denso em $C_0(X, \mathbb{R})$ se, e somente se, A separa pontos e se nem todos os elementos de A zeram num mesmo ponto.*

Usando o teorema para o nosso conjunto $\mathcal{A}$ e $C_0(\mathbb{R})$, temos que $\mathcal{A}$ é denso em $C_0(\mathbb{R})$. Logo, podemos estender os resultados obtidos em $\mathcal{A}$, mas precisamos ainda verificar a unicidade do homomorfismo.

Teorema 2.12. *Seja H um operador não-limitado e autoadjunto definido num sub-conjunto denso de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, existe uma única aplicação linear $\delta : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que leva f em $f(H)$ tal que:*

(1) δ é multiplicativo.

(2) Temos $\bar{f}(H) = f(H)^*$, para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$.

(3) Temos $\|f(H)\| \leq \|f\|_\infty$, para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$.

(4) Se $w \notin \mathbb{R}$ e $r_w(s) := (w - s)^{-1}$ e então $r_w(H) = (w - H)^{-1}$.

(5) Se $f \in C_0(\mathbb{R})$ é tal que $supp f \cap Spec(H) = \emptyset$, então $f(H) = 0$.

Prova: Já sabemos, pelos lemas anteriores, que a aplicação δ existe, está bem definida e valem as propriedades, caso estivéssemos tomando como domínio o nosso conjunto $\mathcal{A}$. Porém, como $\mathcal{A}$ é um subespaço linear de $C_0(\mathbb{R})$, podemos usar o Teorema de Stone-Weierstrass para concluir que a nossa aplicação δ pode ser definida no domínio $C_0(\mathbb{R})$, herdando as mesmas propriedades, pois a boa definição da mesma vem de (3). Falta ainda mostrarmos a unicidade desta extensão. Suponhamos que δ e $\tilde{\delta}$ sejam duas dessas extensões. Seja

$$M := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_{w_i} ; \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ e } w_i \notin \mathbb{R} \right\}$$

e veja que, como vale (4), $\delta = \tilde{\delta}$ em M, o qual é um sebuspaço linear denso em $C_0(\mathbb{R})$ e então por (3) na verdade as duas aplicações se coincidiram em $C_0(\mathbb{R})$, logo, δ é única.

Um teorema muito importante, também conhecido como Teorema Espectral, nos dá uma correspondência interessante entre operadores autoadjuntos e operadores multiplicação do L^2.

Teorema 2.13. *Seja H um operador autoadjunto num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ o qual tem espectro S e suponha que $\mathcal{H}$ tem um vetor cíclico v. Então existe uma medida finita μ em S e um operador unitário*

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2 := L^2(S, d\mu)$$

com as seguintes propriedades:
(i) Se $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função $h(s) = s$, então o elemento $\xi \in \mathcal{H}$ é tal que $\xi \in Dom(H)$ se, e somente se, $h.U(f) \in L^2$.
(ii) $UHU^{-1}\varphi = h\varphi$, para todo $\varphi \in U(Dom(H))$.

Prova: Considere o funcional linear $\phi : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por:

$$\phi(f) := \langle f(H)v, v\rangle$$

Temos do teorema 2.12 que $\bar{f}(H) = f(H)^*$. Então, $\phi(\bar{f}) = \overline{\phi(f)}$, para todo f. Se $f \geq 0$, com $f \in C_0(\mathbb{R})$, fazendo $g = f^{\frac{1}{2}}$, veja que:

$$\phi(f) = \|g(H)v\|^2 \geq 0.$$

Agora, podemos usar o teorema da representação de Riesz para encontrar uma medida de Radon μ em $\mathbb{R}$ tal que:

$$\langle f(H)v, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$$

para todo $f \in C_0(\mathbb{R})$. Vimos pelo teorema anterior que se $Suppf \cap S = \emptyset$, então $f(H) = 0$ e daí, μ deve ter suporte em S. Definamos agora o operador inclusão $T : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2$. Daí, veja que

$$\langle Tf, Tg\rangle = \int_S f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) = \phi(f\bar{g}) =$$
$$= \langle g(H)^* f(H)v, v\rangle = \langle f(H)v, g(H)v\rangle$$

e isso ocorre ára quaisquer $f, g \in C_0()$. Definamos agora o subespaço linear

$$\mathcal{M} = \Big\{ f(H)v \in \mathcal{H}; f \in C_0(\mathbb{R}) \Big\}$$

Com a conta que fizemos acima, construímos uma isometria linear U que leva $\mathcal{M}$ em $C_0(\mathbb{R}) \subset L^2$ o qual satisfaz

$$U(f(H)v) = f$$

para todo $f \in C_0(\mathbb{R})$. Porém, $\mathcal{M}$ é denso em $\mathcal{H}$ já que v é cíclico e também sabemos que $C_0(\mathbb{R}$ é denso em L^2. Logo, U pode ser estendido a um mapa unitário $\tilde{U} : \mathcal{H} \longrightarrow L^2$. Sejam f_i, $f \in C_0(\mathbb{R})$, para i= 1, 2 e seja $\psi_i = f_i(H)v \in \mathcal{H}$. Note que:

$$\langle f(H)\psi_1, \psi_2\rangle = \langle (ff_1)(H)v, f_2(H)v\rangle$$

$$= \int_S ff_1\bar{f}_2 d\mu(x) = \langle m_f U\psi_1, U\psi_2\rangle$$

Como $f \in L^2$ e vimos que os r_w são uma espécie de polinômios em $C_0(\mathbb{R})$, podemos tomar $r_w := f$, pois se isso não acontece, podemos trabalhar com um argumento de densidade. Assim, o teorema acima nos dá que:

$$Ur_w(H)U^{-1}\xi = r_w\xi \tag{2.10}$$

para todo $\xi \in L^2$ e todo $w \notin \mathbb{R}$. Fica claro pela equação acima que U leva a imagem de $r_w(H)$ bijetivamente na imagem do operador multiplicação de r_w, ou seja, U é uma bijeção entre $Dom(H)$ e $Q = \{x \in L^2; x\phi(x) \in L^2\}$. Se $\xi \in L^2$ e se $\varphi = r_w\xi$, então $\varphi \in Dom(h)$ e como

$$Hr_w(H)U^{-1}\xi = wr_w(H)U^{-1}\phi - U^{-1}\xi$$

chegamos a

$$UHU^{-1}\varphi = UHU^{-1}r_w\xi = UHr_w(H)U^{-1}\xi$$

$$= wr_w\xi - \xi = h\varphi$$

e o resultado segue-se.

Integral de Bochner

Para que a integral

$$f(H) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z)(z-H)^{-1}dxdy$$

faça sentido, precisamos saber como "integrar" operadores e entender o porquê de tal integral ser ainda um operador. Para isso, vamos ver alguns resultados nessa direção. Já foi provado que o integrando da integral acima converge, e, portanto, faz sentido a integral acima, uma vez que sabemos o que significa integrar um operador. Começamos com uma função $f : [a, b] \longrightarrow E$, onde E é um espaço de Banach.

Definição 2.14. *Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em A se $\mathcal{A} \subset P(A)$ se : (i) $A \in \mathcal{A}$; (ii) Se $B \in \mathcal{A}$, então $B^c \in \mathcal{A}$;*

(iii) Se $B_1, B_2, B_3, ...B_k \in \mathcal{A}$*, então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$*.*

Um espaço mensurável é um par $(A, \mathcal{A})$, onde A é um conjunto e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de A. Se definimos uma medida μ neste espaço, a tripla $(A, \mathcal{A}, \mu)$ é chamada de um espaço de medida. A σ-álgebra de Borel de A é denotada por $\mathcal{B}(A)$ é a menor σ-álgebra que contém todos os subconjuntos de A. Os elementos desta σ-álgebra são chamados de conjuntos de Borel de A.

Definição 2.15. *Uma função* $f : A \longrightarrow C$ *é dita ser* $\mathcal{A}$*-mensurável se* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$*, para todo* $B \in \mathcal{B}(C)$*.*

Seja E um espaço de Banach e $(A, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função $f : A \longrightarrow E$ é dita ser $\mathcal{A}$*simples* se

$$f = \sum_{n=1}^{m} \chi_{A_n}.x_n$$

, onde $A_n \in \mathcal{A}$, χ_{A_n} é a função característica de A_n e $x_n \in E, \forall 1 \leq n \leq m$.

Definição 2.16. *Uma função* $f : A \longrightarrow E$ *é fortemente* $\mathcal{A}$*-mensurável se existe uma sequência de funções* $\mathcal{A}$*-simples* $f_n : A \longrightarrow E$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$*.*

Podemos acrescentar ao nosso espaço mensurável $(A, \mathcal{A})$ uma medida σ-*finita*, ou seja, existem $A_1, A_2, A_3, ...A_m$ tais que $A = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$ e $\mu(A_n) < +\infty$. De modo análogo podemos definir uma função $f : A \longrightarrow E$ μ-*simples* por:

$$f = \sum_{n=1}^{m} \chi_{A_n}.x_n$$

, onde $A_n \in \mathcal{A}$ e $\mu(A_n) < +\infty$. Dizemos que uma propriedade vale em μ-*quase todo ponto* (ou μ-q.t.p.) se a propriedade não é válida apenas em um subconjunto $B \in P(A)$ tal que $\mu(B) = 0$.

A integral de Bochner é a generalização natural da familiar integral de Lebesgue ao contexto de funções vetoriais. Em toda esta seção, $(A, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finita.

Definição 2.17. *Uma função* $f : A \longrightarrow E$ *é uma função -Bochner integrável se existe uma sequência de funções* μ*-simples* $f_n : AE$ *tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ *quase sempre*

2. $\lim_{n\to\infty} \int_A ||f_n - f|| d\mu = 0$

Note que f é fortemente μ-mensurável. As funções $||f_n - f||$ são μ-mensuráveis pelo cololário 1.13

Segue trivialmente das definições que toda função μ-simples é μ-Bochner integrável. Para $f = \sum_{n=1}^{N} 1_{A_n} x_n$, definimos

$$\int_A f d\mu := \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) x_n$$

É rotineiro checar que esta definição é independente da representação de f. Se f é μ-Bochner integrável, o limite

$$\int_A f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$$

existe em E e é chamado a integral de Bochner de f com respeito a μ. Novamente, é rotineiro checar que esta definição não depende da aproximação $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Se f é μ-Bochner integrável e g é uma μ-versão de f, então g é μ-Bochner integrável, e as integrais de Bochner de f e g coincidem. Em particular, na definição da integral de Bochner a função f não precisa ser definida em todo ponto; é suficiente que f esteja definida μ-quase sempre.

Se f é μ-Bochner integrável, então para todo $x^* \in E^*$ temos a identidade

$$\left\langle \int_A f d\mu, x^* \right\rangle = \int_A \langle f, x^* \rangle$$

Para funções μ-simples isto é trivial, e o caso geral segue por aproximação por funções μ-simples.

Proposição 2.18. *Uma função fortemente μ-mensurável $f : AE$ é μ-Bochner integrável se e somente se*

$$\int_A ||f|| d\mu < \infty$$

e neste caso temos

$$\left\| \int_A f d\mu \right\| \leq \int_A \|f\| d\mu$$

Demonstração. Assuma inicialmente que f é μ-Bochner integrável. Se as funções μ-simples f_n satisfazem as duas hipóteses da definição, então para n suficientemente grante teremos

$$\int_A \|f\| d\mu \leq \int_A \|f - f_n\| d\mu + \int_A \|f_n\| d\mu < \infty$$

Reciprocamente, seja f uma função fortemente μ-mensurável que satisfaz $\int_A \|f\| d\mu < \infty$. Sejam g_n funções μ-simples tais que $\lim_{n\to\infty} g_n = f$ μ-quase sempre, e defina

$$f_n = 1_{(\|g_n\| \leq 2\|f\|)} g_n$$

Então f_n é μ-simples, e claramente nós temos $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-quase sempre. Já que temos $\|f_n\| \leq 2\|f\|$ pontualmente, o teorema da convergência dominada pode ser aplicado, e obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| d\mu = 0$$

A desigualdade final é trivial para funções μ-simples, e o caso geral segue por aproximação. $\square$

Como uma aplicaçãop simples, note que se $f : A \longrightarrow E$ é uma função μ-Bochner integrável, então para cada $B \in \mathcal{A}$ a função truncada $1_B f : A \longrightarrow E$ é μ-Bochner integrável, a função restrição $f|_B : B \longrightarrow E$ é $\mu|_B$-Bochner integrável e temos

$$\int_A 1_B f d\mu = \int_B f|_B d\mu|_B$$

De agora em diante, ambas as integrais serão denotadas por $\int_B f d\mu$.

Via de regra, os resultados da teoria de integração a Lebesgue podem ser obtidos para a integral de Bochner dado que não haja hipóteses sobre não negatividade envolvidas. Por exemplos, não há análogos do Lema de Fatou e do teorema da convergência monótona, mas nós temos o seguinte análogo do teorema da convergência dominada:

Proposição 2.19. *(Teorema da convergência dominada) Seja $f_n : A \longrightarrow E$ uma sequência de funções, cada uma delas μ-Bochner integrável. Assuma que existe uma função $f : A \longrightarrow E$ e uma função μ-Bochner integrável $g : A \longrightarrow K$ tal que*

1. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *μ-quase sempre.*

2. $\|f_n\| \leq |g|$ *μ-quase sempre.*

Então f é μ-Bochner integrável e temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \|f_n - f\| d\mu = 0$$

Em particular temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$

Demonstração. Temos $\|f_n - f\| \leq 2|g|$ μ-quase sempre, e portanto o teorema segue do teorema da convergência dominada escalar. □

É imediato da definição de integral de Bochner que se $f : A \longrightarrow E$ é μ-Bochner integrável e T é um operador linear limitado de E para um outro espaço de Banach F, então $Tf : A \longrightarrow F$ é μ-Bochner integrável e

$$T \int_A f d\mu = \int_A T f d\mu$$

Essa identidade tem uma extensão útil para uma classe de operadores ilimitados. Um operador linear T, definido num subespaço $\mathcal{D(T)}$ de E e tomando valores um outro espaço de Banach f, é dito fechado se seu gráfico

$$\mathcal{G} = \{(\S, \mathcal{T}\S) : \S \in \mathcal{D(T)}\}$$

é um subespaço fechado de $E \times F$. Se T é fechado, então $\mathcal{D(T)}$ é um espaço de Banach com respeito a norma do gráfico,

$$\|x\|_{\mathcal{D(T)}} = \|x\| + \|Tx\|$$

e T é um operador limitado de $\mathcal{D(T)}$ para E. O teorema do gráfico fechado diz que se $T : E \longrightarrow F$ é um operador fechado e o domónio $\mathcal{D(T)}$ é o espaço E, então T é limitado.

Teorema 2.20. *(Hille) Seja $f : A \longrightarrow E$ uma função μ-Bochner integrável e seja T um operador linear fechado com domínio $\mathcal{D(T)}$ em E, tomando valores num espaço de Banach F. Assuma que f toma seu valores em $\mathcal{D(T)}$ μ-quase sempre e a função definida em μ-quase todo ponto $Tf : AF$ é μ-Bochner integrável. Então $\int_A f d\mu \int \mathcal{D(T)}$ e*

$$T \int_A f d\mu = \int_A T f d\mu$$

Demonstração. Começamos com uma simples observação que é consequência da proposição 1.16 e do fato que as funções coordenadas comutam com integrais de Bochner: se E_1 e E_2 são espaços de Banach e $f_1 : A \longrightarrow E_1$ e $f_2 : A \longrightarrow E_2$ são μ-Bochner integráveis, então $f = (f_1, f_2) : A \longrightarrow E_1 \times E_2$ é μ-Bochner integrável e

$$\int_A f d\mu = \left(\int_A f_1 d\mu, \int_A f_2 d\mu \right)$$

Pela observação anterior, a função $g : A \longrightarrow E \times F$, $g(\xi) = (f(\xi), Tf(\xi))$ é uma função μ-Bochner integrável. Mais ainda, já que g toma valores no gráfico $\mathcal{G}(\mathcal{T})$, temos $\int_A g(\xi) d\mu(\xi) \in \mathcal{G}(\mathcal{T})$. Por outro lado,

$$\int_A g(\xi) d\mu(\xi) = \left(\int_A f(\xi) d\mu(\xi), \int_A T f(\xi) d\mu(\xi) \right)$$

O resultado segue combinando estes dois fatos.

Referências Bibliográficas

[1] DAVIES, E. B.:*Spectral Theory and differential operators*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[2] REED, M. and SIMON, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics*, v. 1, London : Academic Press, 1980.

[3] RUDIN, W.:*Functional Analysis*. Simgapore: McGraw-Hill Science, 1991.

[4] RIESZ, F. and Sz.-NAGY, B. *Functional Analysis*. New York : Frederick Ungar Publishing, 1972.

[5] BREZIS,H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*. New York: Springer, 2010. (Universitext)

[6] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T.: *Linear Operators Part I: General Theory*. New York: Interscience Publishers, 1964.

[7] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T.: *Linear Operators Part II: Spectral Theory*. New York: Interscience Publishers, 1963.

[8] DAVIES, E. B. The Functional Calculus. *J. London Math. Soc.* (2) **52**, p. 166-176, 1995.

[9] STRICHARTZ, R. S. Analysis of the Laplacian on the Complete Riemannian Manifold *Journal of Functional Analysis* **52**, 48-79, 1983.

[10] THAYER, J.: *Operadores Autoadjuntos e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Impa, 1987.

[11] GONZÁLEZ-GAXIOLA, O. A Note on the Derivation of Fréchet and Gâteaux *Applied Mathmatical Science*, v. 3, n. 19, p 941-947, 2009.

[12] HORMANDER, L.: *An introduction to complex analysis of several variables.* Princenton N. J.: Van Nostrand, 1966.