



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARLON DE OLIVEIRA GOMES

O PROBLEMA DE BERNSTEIN

FORTALEZA

2013

MARLON DE OLIVEIRA GOMES

O PROBLEMA DE BERNSTEIN

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção de Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Luquézio Petrola de Melo Jorge.

Co-orientador: Prof. Dr. Luciano Mari

FORTALEZA

2013

MARLON DE OLIVEIRA GOMES

O PROBLEMA DE BERNSTEIN

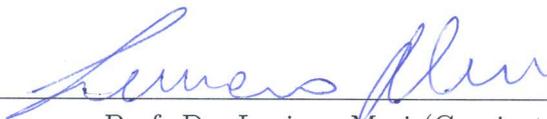
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovado em: 16 / 08 / 2013.

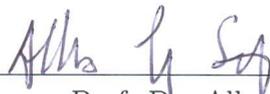
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Luciano Mari (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Alberto Giulio Setti
Università degli Studi dell'Insubria

À Jéssica, Júlia, Jaila, Lara e Laís, as mulheres de
minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha mãe, Jaila Gomes, por seu esforço em minha criação, às minhas irmãs, Lara e Laís Gomes, por terem sido minha fortaleza sempre que precisei.

À minha mulher, Jéssica Oliveira, por ter sido minha companheira pelos últimos sete anos, por ter aguentado o meu (frequente) mau humor, por ter compreendido as minhas madrugadas sem sono, os verões distantes e os domingos sem praia. Agradeço-a também por ter sido o ombro amigo em que me apoiei por tantas vezes, para falar de meus sonhos, meus anseios, meus lamentos, e por, em todos estes momentos, ter me dado a mão. Agradeço ainda por ter me dado o maior presente que ganhei até hoje, a nossa princesa, e por ser a mãe que você é para ela.

À minha filha Júlia, pela paciência, por tê-la privado de uma maior convivência com o pai enquanto escrevia estas notas, por ter alegrado a minha vida, e por me inspirar a fazer um trabalho cada vez melhor, na esperança de servir como bom espelho, meu muito obrigado.

Aos meus tios e tias, que me apoiaram durante esta caminhada, em especial à tia Alzeni e ao tio Beto, por terem sempre incentivado a minha formação, e por terem me acolhido sempre que chegava de malas cheias em sua casa. Aos meus primos (os quais não irei citar, por ser esta margem muito curta para contê-los), pelos momentos de diversão que tivemos. Ao meu falecido avô, José Gerardo, por ter sido exemplo de homem de fibra e integridade.

Agradeço especialmente aos professores Marcelo Mendes, Cícero Thiago, Israel Dourado, Valdenísio e Ângelo Papa, por me introduzirem no mundo das olimpíadas, mostando-me que matemática ia além da simples manipulação de símbolos para um lado para o outro, sem vocês não teria feito esta escolha que hoje me faz tão feliz.

Agradeço aos professores do departamento de Matemática da UFC, João Lucas Barbosa, Afonso Oliveira, Fábio Montenegro, Marcos Melo, Alexandre Fernandes, Pacelli Bessa e Abdênago Barros que durante esses 4 anos e meio têm contribuído para minha formação. Agradeço em especial aos professores Diego Moreira, por passar em suas aulas o profundo conhecimento que tem sobre o assunto e pelas inúmeras vezes que atendeu-me sempre que bati em sua porta, a Antônio Caminha, sem o qual não sei o que teria feito

para resolver os pepinos da minha graduação, a Francesco Mercuri, pelos excelentes cursos que ministrou enquanto nos visitou, e a Lev Birbrair pelas conversas sempre regadas a café, muitas risadas e um pouco de matemática. Agradeço ainda a Lev Birbrair e Diego Moreira pelos conselhos que me deram em relação ao doutorado.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Luquésio Petrola de Melo Jorge, por ter me acompanhado desde meu primeiro mês neste departamento. Pela confiança depositada em mim, pelos conselhos - matemáticos ou não -, pelas broncas, pela paciência, pela insistência, e sobretudo, por ter me passado um pouco do seu - quase enciclopédico - conhecimento, tendo sempre a porta aberta quando precisei, só posso dizer que não poderia ter feito uma melhor escolha de orientador.

Agradeço ainda ao meu coorientador, Luciano Mari, pelo seu interesse e sua ajuda neste último ano de meu mestrado, assistindo aos meus (longos) seminários, sempre dando sugestões ou apontando os erros, pelas discussões que tivemos sobre versões preliminares deste trabalho, e pelo vasto conjunto de idéias que me mostrou.

Agradeço também ao professor Alberto Setti, por ter aceitado participar da banca examinadora, por ter confiado em meu trabalho, e pelos conselhos que me deu em relação ao doutorado.

Um agradecimento especial aos antigos baianos, Alexandre Mota, Emanuel Viana, Luiz Paulo Moreira, Ramon Nunes, Rafael Rezende e ao nosso falecido colega José Leandro Pinheiro, pelas inúmeras risadas, pelo café mal feito, por aguentarem a minha implicância ao bater em suas portas para tirar dúvidas, pelas caronas, pelos jogos de pista no R.U, pelas hospedagens no Rio, e por tornarem esta rotina de estudos um pouco menos sofrível. Aos grandes amigos Adenilson Arcanjo, Diego Eloi e Vanderson Lima, faltam-me palavras pra descrever o quão importante foi o seu apoio nos últimos anos, a única coisa que posso dizer é muito obrigado. A todos vocês, saibam que se eu tivesse chegado até aqui sem conhecê-los, essa estrada toda faria menos sentido.

Aos novos baianos, Anderson Feitoza, Breno Sampaio, Gilson Granja, Henrique Blanco, José Eduardo Garcez, Léo Ivo Souza, Nicolas Santos, Rafael Alves, Renan Santos, Renivaldo Sena, Roger Oliveira, e Wanderlei Pereira, por todos os cafés no seu Evandro e pelo companheirismo, muito obrigado.

À Andrea por sempre ter me atendido com agilidade e competência.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"Regrets, I've had a few, but then again, too few to mention, I did what I had to do, and saw it through without exemption".
(Frank Sinatra)

RESUMO

O problema de Bernstein clássico, resolvido por S. Bernstein em 1915-1917 em seu artigo [12], pergunta se existe um gráfico mínimo completo em \mathbb{R}^3 além do plano. Bernstein mostrou que a resposta para este problema é não, utilizando métodos analíticos para o estudo de equações de curvatura prescrita. Veremos aqui como este problema está relacionado com a aplicação de Gauss deste gráfico, e como consequência desta relação iremos generalizar este teorema para uma classe de superfícies maior (não necessariamente gráficos), seguindo a prova dada por R. Osserman em [51]. Veremos a seguir generalizações deste teorema em dimensões maiores, seguindo essencialmente os métodos introduzidos por W. Fleming em [31], e refinados posteriormente por E. De Giorgi, em [20], F. Almgren, em [6], e J. Simons, em [62], que resolvem o problema para gráficos em \mathbb{R}^n , $n < 9$ mostrando que o único gráfico mínimo completo nesses espaços é o hiperplano. Mostraremos também que em dimensão $n \geq 9$, é possível construir gráficos mínimos completos em \mathbb{R}^n , seguindo a prova apresentada por E. Bombieri, E. Di Giorgi, e E. Giusti em [14]. Por fim, concluímos com uma extensão do teorema de Bernstein para a classe das subvariedades estáveis com respeito à segunda variação de volume, sob certas condições de crescimento de curvatura ou volume, e investigaremos ainda o caso que a variedade ambiente não é o espaço euclidiano.

Palavras-chave: Subvariedades Mínimas, Estabilidade, Conjuntos de perímetro finito

ABSTRACT

The classical Bernstein problem, solved by S. Bernstein in 1915-1917 in his article [12], asks if there is a complete minimal graph in \mathbb{R}^3 besides the plane. Bernstein showed that the answer to this question is no using analytical methods for study of equations of prescribed curvature. We will see here how this problem is related to the Gauss map of the graph, and as a consequence of this relationship we generalize this theorem to a larger class of surfaces (not necessarily graphs), following the proof given by R. Osserman in [51]. We will see next generalizations of this theorem in higher dimensions, following essentially the methods introduced by W. Fleming in [31], and later refined by E. De Giorgi, in [20], F. Almgren, in [6], and J. Simons, in [62]. In fact, they solve the problem for graphs in \mathbb{R}^n , $n < 9$, namely they prove that the only complete minimal graph in these spaces is the hyperplane. Following the proof given by E. Bombieri, E. De Giorgi, and E. Giusti, in [14], we also show that, in dimension $n \geq 9$, it is possible to construct complete minimal graphs in \mathbb{R}^n . At last, we conclude with an extension of Bernstein's Theorem to the class of submanifolds stable with respect to the second variation of volume, under certain conditions of curvature and volume growth, and yet we investigate the case in which the ambient manifold is not the Euclidean space.

Keywords: Minimal Submanifolds, Stability, Sets of finite perimeter.

SUMÁRIO

Introdução	11
1 Subvariedades Mínimas	14
1.1 Motivação	14
1.2 A primeira variação da área	19
1.3 Exemplos de superfícies mínimas	24
1.4 Consequências da primeira variação	31
1.5 A representação de Enneper-Weierstrass	35
1.6 A segunda variação e o conceito de estabilidade	42
2 O problema de Bernstein Clássico	51
2.1 A solução de J. Nitsche	52
2.2 A estimativa de curvatura de E. Heinz e a prova de L. Simon	59
2.3 A geometria da aplicação de Gauss e a Conjectura de Niremberg	62
3 Conjuntos de perímetro finito	66
3.1 Conjuntos de perímetro finito e funções de variação limitada	67
3.2 Os teoremas de Fleming e De Giorgi	77
4 O teorema de Bernstein em dimensão $n \leq 7$.	84
4.1 A equação de Simons	85
4.2 Hipersuperfícies mínimas fechadas em esferas	93
4.3 Estabilidade de variedades cônicas	99
5 O contraexemplo de Bombieri- De Giorgi- Giusti	110
5.1 Gráficos mínimos completos	110

6	Generalizações	119
6.1	Estabilidade revisitada	119
6.2	Imersões mínimas em 3-variedades de curvatura escalar não negativa	129
6.3	Estimativas L^p e o Teorema de Schoen-Simon-Yau	136
	Referências	140

Introdução

Em 1915, S. Bernstein demonstrou que se f é uma solução da equação da superfície mínima em todo o plano \mathbb{R}^2 , então o gráfico de f em \mathbb{R}^3 é um plano. A partir daí, o problema de mostrar que não existem soluções não triviais (i.e, cujos gráficos não são planos) da equação da superfície mínima em todo o espaço \mathbb{R}^n passou a ser conhecido como problema de Bernstein. Vários matemáticos importantes trabalharam neste problema, como R. Courant, J. Nitsche, R. Osserman, W. Fleming, F. Almgren, J. Simons, E. Bombieri, E. Giusti, e E. De Giorgi, e ainda assim a solução definitiva para esta questão só foi apresentada em 1969. O objetivo principal deste trabalho é fazer um compêndio dos resultados obtidos por estes matemáticos, e apresentar uma solução completa do problema de Bernstein em \mathbb{R}^n .

Já que todos os gráficos mínimos são estáveis com respeito à segunda variação de área, é natural nos perguntarmos se um resultado de tipo Bernstein é válido na classe das hipersuperfícies estáveis e completas em variedades Riemannianas. Respostas parciais para este problema têm sido obtidas desde o trabalho pioneiro de J. Simons em 1968. R. Schoen, L. Simon e S. T. Yau deram uma solução para este problema no caso em que a variedade ambiente é o espaço euclidiano, mostrando que hipersuperfícies mínimas estáveis e completas do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , $n \leq 6$ que satisfazem certas condições de crescimento de volume são hiperplanos. D. Fischer-Colbrie e R. Schoen mostraram em 1980 que estas condições de crescimento de volume eram naturalmente satisfeitas no caso de hipersuperfícies estáveis de dimensão 2, mostrando que a única hipersuperfície estável e completa de \mathbb{R}^n é o plano. Fischer-Colbrie e Schoen mostraram ainda um resultado tipo Bernstein no caso em que a variedade ambiente tem curvatura seccional positiva. Independentemente, os resultados de Fischer-Colbrie e Schoen foram obtidos por Do Carmo e Peng em 1982. A questão da existência de hipersuperfícies mínimas estáveis e completas não triviais em \mathbb{R}^n , para $n = 7, 8$, ainda é um problema em aberto. Finalizamos

o trabalho com uma discussão dos resultados de Schoen, Simon e Yau e Fischer-Colbrie, Schoen acima mencionados.

Capítulo 1: Subvariedades Mínimas

Neste capítulo estabelecemos as técnicas básicas necessárias para o estudo de subvariedades mínimas. A partir da primeira variação da área, derivamos a equação da superfície mínima, e mostramos uma série de exemplos. Ainda como consequência da primeira variação no espaço euclidiano, mostramos a harmonicidade de funções coordenada, a propriedade do fecho convexo e a monotonicidade. A fórmula de representação de Enneper-Weierstrass é apresentada a seguir, e finalizamos com uma discussão da segunda variação e do conceito de estabilidade.

Capítulo 2: O problema de Bernstein Clássico

No capítulo dois, apresentamos três demonstrações do problema de Bernstein, devidas a J. Nitsche, L. Simon e R. Osserman. A prova de Nitsche é a mais elementar que o autor tem conhecimento, e utiliza somente técnicas de funções de variáveis complexas, especificamente, o teorema de Liouville. A prova de L. Simon tem caráter mais analítico, e dá uma base para a demonstração da conjectura de Bernstein generalizada em dimensão menor que ou igual a 6, devida a Schoen, Simon e Yau. A prova de R. Osserman de fato generaliza o problema de Bernstein, através de um estudo da aplicação normal de Gauss de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 . Osserman mostra que toda superfície mínima completa de \mathbb{R}^3 cuja aplicação de Gauss omite uma vizinhança de um ponto da esfera \mathbb{S}^2 é um plano.

Capítulo 3: Conjuntos de Perímetro finito

Neste capítulo introduzimos a noção de conjuntos de perímetro finito e conjuntos minimais em \mathbb{R}^n , essencialmente desenvolvida por E. De Giorgi. Com estas técnicas, provamos o Teorema de Fleming, que associa a cada solução da equação da superfície mínima em \mathbb{R}^n um cone singular minimizante em \mathbb{R}^{n+1} . Concluimos com o Teorema de De Giorgi, que mostra que o cone de Fleming se escreve como um cilindro sobre um cone de dimensão menor, provando assim que a cada solução da equação da superfície mínima em \mathbb{R}^n está associado um cone singular minimizante em \mathbb{R}^n .

Capítulo 4: O teorema de Bernstein em dimensão $n \leq 7$.

Aqui seguimos as técnicas introduzidas por J. Simons para o estudo de hipersuperfícies

mínimas em espaços de curvatura seccional constante. Mostramos a equação de Simons, que calcula o laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental em função da norma do gradiente da segunda forma, e provamos uma desigualdade de tipo Kato para o laplaciano do quadrado da norma da segunda forma em espaços de curvatura seccional constante. Aplicamos estes resultados à imersões mínimas em esferas, e obtemos resultados de rigidez e quantização da norma da segunda forma fundamental. Relacionamos a estabilidade de um cone minimizante singular somente em 0, com o índice de sua interseção com a esfera, e aplicamos os resultados obtidos anteriormente para mostrar que não existem tais cones em dimensão menor que ou igual a 7. Por fim, mostramos um bom candidato a cone singular estável em \mathbb{R}^8 , o cone de Simons.

Capítulo 5: O contraexemplo de Bombieri - De Giorgi - Giusti. Neste capítulo mostramos que o cone de Simons é de fato estável, e concluimos com a prova da existência de uma solução global da equação da superfície mínima em \mathbb{R}^8 .

Capítulo 6: Generalizações Revisitamos a noção de estabilidade, apresentando diversas formulações equivalentes a este conceito, e utilizamos estas formulações para mostrar resultados de rigidez de hipersuperfícies mínimas estáveis em variedades tridimensionais de curvatura seccional constante. Por fim, mostramos estimativas para a norma L^p do quadrado da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície mínima estável em \mathbb{R}^n , $n \leq 6$, e a partir destas estimativas mostramos que as únicas hipersuperfícies mínimas estáveis que satisfazem certas condições de crescimento de volume em \mathbb{R}^n são os hiperplanos, se $n \leq 6$.

Capítulo 1

Subvariedades Mínimas

Neste capítulo, introduziremos as ferramentas necessárias para o estudo do problema de Bernstein Clássico. É assumido que o leitor tem familiaridade com os conceitos básicos de geometria diferencial, como a noção de superfícies no espaço euclidiano, a aplicação de Gauss de uma superfície, e o conceito de curvatura, além de ferramentas básicas como os teoremas da divergência e Gauss-Bonnet. Assumimos também certa familiaridade com conceitos de geometria riemanniana, especificamente, da geometria de subvariedades. Tudo de geometria riemanniana que é necessário para entender este capítulo pode ser encontrado em [23].

1.1 Motivação

O estudo de superfícies mínimas data do século XVIII, sendo iniciado por J. L. Lagrange, em seu trabalho 'Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies', em 1760, [39]. Neste artigo, Lagrange introduziu as técnicas que hoje são base para o Cálculo das variações, e um dos problemas estudados por ele foi o que hoje é conhecido como problema de Plateau¹: dada uma curva fechada, suave e retificável no espaço euclidiano tridimensional, encontrar a superfície orientável, com tipo topológico do disco e de menor área que tem esta curva como bordo.

Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um difeomorfismo que parametriza esta curva e seja D^2 o disco unitário centrado na origem de \mathbb{R}^2 . A ideia de Lagrange era considerar a classe de todas

¹Após o físico belga Joseph Plateau, que realizou diversos experimentos com filmes de sabão que indicaram que sob certas hipóteses, sempre existia solução. Este fato foi confirmado independentemente por J. Douglas e T. Radó, no início da década de 1930.

as funções suaves $u : \overline{D^2} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem $u|_{\mathbb{S}^1} = \gamma$. Os gráficos destas funções são superfícies em \mathbb{R}^3 (que podem admitir singularidades em seu interior), cujo bordo é γ .

Sabemos que a área de tal gráfico é dada por

$$A(\text{Graph}_u) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \quad (1.1)$$

Se este gráfico é um minimizante de área com respeito à sua fronteira, ao produzirmos variações que fixam a fronteira, em particular ele deve ser minimizante entre todas as superfícies geradas na variação.

Considere uma função suave $\eta : \overline{D^2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se anula na fronteira do disco, i. e., $\eta(x) = 0$, se $x \in \mathbb{S}^1$. Se t é um parâmetro real, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, iremos considerar as aplicações $\Psi(t, u, \eta) : \overline{D^2} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dadas por

$$\Psi(t, u, \eta) = u + t\eta$$

Já que η se anula na fronteira do disco, os gráficos das aplicações $\Psi(t, u, \eta)$ são superfícies cujo bordo é γ . A área de tais superfícies, vista como função do parâmetro t , vale

$$A(\text{Graph}_{u+t\eta}) = A(t) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2} \quad (1.2)$$

Já que queremos que Graph_u seja minimizante de área, devemos ter $A'(0) = 0$, para cada variação que fixa o bordo. Temos então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2} \right) = 0 &\Rightarrow \left(\int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u + t\nabla\eta, \nabla\eta \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2}} \right) \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \\ &\int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u, \nabla\eta \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0 \Rightarrow \\ & - \int_{\Omega} \eta \cdot \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Onde a última igualdade segue do teorema da divergência, já que η se anula na fronteira do disco.

Como a equação 1.3 é válida para qualquer η suave que se anula na fronteira, concluimos que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad (1.4)$$

A equação 1.4 é conhecida como equação da superfície mínima, e é condição necessária para que um gráfico seja um minimizante de área com relação à sua fronteira. Observe entretanto que esta condição garante tão somente que este gráfico é um ponto crítico do funcional de área, não garante a minimalidade.

Observação 1.1. *Não utilizamos em nenhum momento o fato de Ω ser um domínio de \mathbb{R}^2 . Desta forma, a equação do gráfico mínimo para uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a equação 1.4.*

Veremos que restringindo um pouco a classe de gráficos admissíveis como solução do problema, uma superfície que satisfaz 1.4 é realmente um minimizante de área.

Lema 1.2. *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a equação da superfície mínima e assumamos que Graph_u está orientada. Se $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$ é outra superfície orientada, que é cobordante a Graph_u no cilindro ², então*

$$A(\operatorname{Graph}_u) \leq A(\Sigma)$$

.

Demonstração. Considere a 2-forma definida no cilindro $\Omega \times \mathbb{R}$ dada por

$$\omega_p(X, Y) = \det(X, Y, N(u \circ \pi(p)))$$

onde $\pi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ é a projeção sobre Ω e $N(u \circ \pi(p))$ é o vetor normal unitário de \mathbb{R}^3 que define a orientação de Graph_u no ponto $\pi(p)$,

$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \cdot (-u_x, -u_y, 1) \quad (1.5)$$

Se $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ são os vetores coordenados de \mathbb{R}^3 no ponto p , isto é, $E_i(p) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \in T_p(\Omega \times \mathbb{R})$, tem-se

² Dizemos que duas superfícies orientadas, M_1 e M_2 de dimensão k são cobordantes no cilindro se existe uma $(k+1)$ -variedade orientada $N \subset \Omega \times \mathbb{R}$ cuja fronteira é a união disjunta destas duas superfícies, $\partial N = M_1 \cup M_2$, e a orientação induzida no bordo de N coincide com a orientação de M_1 e reverte a orientação de M_2 .

$$\begin{aligned}\omega_p(E_1, E_2) &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ \omega_p(E_1, E_3) &= \frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ \omega_p(E_2, E_3) &= \frac{-u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\end{aligned}$$

Assim,

$$\omega = \frac{dx \wedge dy + u_y \cdot dx \wedge dz - u_x dy \wedge dz}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \quad (1.6)$$

$$d\omega = E_2 \left(\frac{-u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + E_1 \left(\frac{-u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \quad (1.7)$$

Donde $d\omega = 0$, já que a u é solução da equação da superfície mínima.

Consideramos a restrição da 2-forma ω à superfície Σ . Observe que se X e Y são vetores unitários em $T_p\Sigma$, temos $|\omega_p(X, Y)| \leq 1$. Temos portanto,

$$\int_{\Sigma} \omega \leq \int_{\Sigma} d\Sigma = A(\Sigma) \quad (1.8)$$

Por outro lado, o Teorema de Stokes nos dá,

$$0 = \int_M d\omega = \int_{Graph_u} \omega - \int_{\Sigma} \omega \quad (1.9)$$

Por fim, como ω restrita a $Graph_u$ é a forma de área do gráfico, temos

$$A(Graph_u) = \int_{Graph_u} \omega = \int_{\Sigma} \omega \leq A(\Sigma) \quad (1.10)$$

□

Observação 1.3. Já que o único fato que utilizamos para demonstrar o 1.2 foi que a 2-forma ω era fechada, podemos generalizar o resultado para dimensão n , simplesmente definindo a n -forma em $\Omega \times \mathbb{R}$ dada por

$$\omega_p(X_1, X_2, \dots, X_n) = \det(X_1, X_2, \dots, X_n, N)$$

Corolário 1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a equação da superfície mínima em Ω . Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma superfície tal que $\partial\Sigma = \partial\text{Graph}_u$, então*

$$A(\text{Graph}_u) \leq A(\Sigma)$$

Demonstração. Considere a projeção sobre o cilindro $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$, dada por

$$(x, y, z) \mapsto (p(x, y), z)$$

Onde $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$ é a projeção do ponto mais próximo ao convexo Ω . Observe que π é uma aplicação Lipschitz, que é a identidade restrita a Ω . Mais ainda,

$$|\pi(x) - \pi(y)| \leq |x - y|$$

Deste modo, π possui derivada em quase todo ponto, e vale o teorema de mudança de variáveis,

$$A(\pi(\Sigma)) = \int_{\pi(\Sigma)} d\pi(\Sigma) = \int_{\Sigma} |\det(d\pi)| d\Sigma \quad (1.11)$$

$$A(\pi(\Sigma)) \leq \int_{\Sigma} d\Sigma = A(\Sigma) \quad (1.12)$$

Note ainda que $\partial\pi(\Sigma) = \partial\Sigma$, pois π é a identidade em $\overline{\Omega \times \mathbb{R}}$, donde $\partial\pi(\Sigma) = \partial\text{Graph}_u$. Pelo Lema 1.2, temos

$$A(\text{Graph}_u) \leq A(\pi(\Sigma))$$

Em vista de 1.12, o resultado segue. □

Observação 1.5. *A hipótese de convexidade do domínio Ω no 1.4 é necessária. De fato, é possível construir exemplos de domínios não convexos em que o gráfico mínimo não é o minimizante de área, utilizando soluções do problema de Plateau.*

O próximo corolário nos dá uma estimativa de extrínseca de quanto a área de uma superfície mínima pode crescer. Estimativas deste tipo serão úteis na prova do teorema de Bernstein. Denotamos o disco de raio R centrado na origem de \mathbb{R}^n por D_R e por B_R a bola de \mathbb{R}^{n+1} centrada na origem.

Corolário 1.6. *Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação da superfície mínima em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $D_R \subset \Omega$, então*

$$\text{Vol}_n(B_R \cap \text{Graph}_u) \leq \frac{n \text{Vol}_n(\mathbb{S}^n)}{2} R^n \quad (1.13)$$

Demonstração. Note que $\mathbb{S}^n \cap \text{Graph}_u$ divide \mathbb{S}^n em duas componentes, as partes abaixo e acima do gráfico, de modo que uma delas, vamos assumir a parte acima do gráfico (o outro caso é similar), possui área no máximo $\frac{n \text{Vol}_n \mathbb{S}^n}{2} R^n$, e fronteira $\text{Graph}_u \cap \mathbb{S}^n$. Pela observação 1.3, a superfície $\text{Graph}_u \cap B_R$ é a superfície de menor área com esta fronteira no cilindro $\pi(\text{Graph}_u \cap B_R) \times \mathbb{R}$, o que prova o resultado. \square

1.2 A primeira variação da área

Queremos generalizar a noção de superfícies mínimas para o caso de uma imersão isométrica $\varphi : M^m \rightarrow N^n$, onde M e N são variedades riemannianas. Em todo o que segue, identificaremos sempre um ponto p de M com sua imagem $\varphi(p)$, e vetor tangente a M em p com sua imagem pela diferencial da imersão em $\varphi(p)$, de modo que consideramos M uma subvariedade de N .

Precisamos fazer precisa a noção de variação introduzida por Lagrange já que não podemos somar pontos em N . Isto é feito da seguinte forma:

Definição 1.7. *Seja $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ uma imersão isométrica. Uma variação de M é uma aplicação*

$$F : M \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow N$$

tal que $F(p, 0) = p$, $\forall p \in M$ e $F(\cdot, t) : M \rightarrow N$ é uma imersão para cada $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Dizemos que esta variação tem suporte compacto se existe um compacto $K \subset M$ tal que $F(p, t) = p$, $\forall p \in K$. Se M possui bordo, ∂M , dizemos que F fixa o bordo se $F(p, t) = p$ $\forall p \in \partial M$.

Assim como no caso de gráficos em \mathbb{R}^n , queremos que a subvariedade M seja um ponto crítico do funcional de volume para toda variação com suporte compacto e que fixa o bordo. Denote por \bar{g} e $\bar{\nabla}$ a métrica e a conexão de Levi-Civita de N , respectivamente. Seja F uma variação de M com suporte compacto e que fixa o bordo. Seja $\{E_i\}$ um referencial ortonormal em $U \subset M$. Talvez reduzindo U , podemos completar este referencial a um

referencial ortonormal em N , $\{E_i, E_\alpha\}$. Defina $E_i(t) = dF(\cdot, t)(E_i)$. Considere ainda o referencial $\{E_i, E_t\}$ um referencial ortonormal em $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ (com a métrica produto), e denote por $F_t = dF(E_t)$.

Definição 1.8. *O campo F_t definido acima é dito o campo variacional da variação F .*

Denote ainda

$$g_{ij}(x, t) = \bar{g}(F_{E_i}(x, t), F_{E_j}(x, t))$$

Assim, o volume de cada subvariedade $F(M, t)$ é dado por

$$V_t := V(F(M, t)) = \int_M \sqrt{\det(g_{ij}(t))}$$

Vejamos qual é a condição necessária para que M seja um ponto crítico de cada variação.

Proposição 1.9. *Seja $F : M \times (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ uma variação com suporte compacto que fixa o bordo, cujo campo variacional é F_t . Temos então*

$$V'(0) = -m \int_M \bar{g}(F_t^\perp, H)$$

Demonstração. Denote por $g^{ij}(t)$ a inversa da métrica $g_{ij}(t)$. Definimos então a função $\nu : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\nu(p, t) = \sqrt{\det(g_{ij})(p, t)} \sqrt{\det g^{ij}(p, 0)} \quad (1.14)$$

Note que ν está bem definido, isto é, não depende do sistema de coordenadas escolhido na vizinhança de um ponto $p \in M$. Podemos então reescrever o volume de $F(M, t)$ por

$$V_t = \int_M \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij})(0)}$$

Diferenciando V_t temos

$$V'_t = \int_M \left(\frac{d}{dt} \nu(p, t) \right) \sqrt{\det(g_{ij})(0)} \quad (1.15)$$

Fixamos um referencial ortonormal na vizinhança $U \in M$ de um ponto p , isto é, $\{E_i\}_{i=1}^m$ tal que $g_{ij}(x, 0) = g(E_i, E_j)(x) = \delta_{ij}$, $\forall x \in U$. Temos então

$$\frac{d}{dt}\nu(p, t) = \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})(p, t)}} \cdot \frac{d}{dt}(\det(g_{ij})(p, t))\sqrt{\det(g^{ij})(p, 0)} \quad (1.16)$$

Vamos calcular $\frac{d}{dt}(\det(g_{ij}(p, t)))$. Seja S_m o grupo das permutações de $\{1, 2, \dots, m\}$, e denote por $|\sigma|$ o sinal da permutação $\sigma \in S_m$. Da definição de determinante temos

$$\det(g_{ij}(t)) = \sum_{\sigma \in S_m} |\sigma| g_{1\sigma(1)} g_{2\sigma(2)} \cdots g_{m\sigma(m)}(t)$$

Portanto, pela regra de Leibniz,

$$\frac{d}{dt}[\det(g_{ij})](t) = \sum_{l=1}^m \sum_{\sigma \in S_m} |\sigma| g_{1\sigma(1)} g_{2\sigma(2)} \cdots \left(\frac{d}{dt} g_{l\sigma(l)} \right) \cdots g_{m\sigma(m)}(t) \quad (1.17)$$

Já que tomamos um referencial ortonormal na vizinhança U de p , temos que a parcela

$$g_{1\sigma(1)} g_{2\sigma(2)} \cdots \left(\frac{d}{dt} g_{l\sigma(l)} \right) \cdots g_{m\sigma(m)}(0)$$

é nula para toda permutação σ exceto a identidade, donde a soma fica somente

$$\frac{d}{dt}[\det(g_{ij})](0) = \sum_{l=1}^k \left(\frac{d}{dt} g_{ll} \right) (0)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\det(g_{ij})](0) &= \sum_{l=1}^m \left(\frac{d}{dt} g_{ll} \right) (0) \\ &= \sum_{l=1}^m F_t(g_{ll})(0) \\ &= \sum_{l=1}^m F_t \bar{g}(E_l, E_l) \\ &= \sum_{l=1}^m 2\bar{g}(\nabla_{F_t} E_l, E_l) \end{aligned}$$

Pelo lema de Gauss, temos

$$\bar{\nabla}_{F_t} E_l - \bar{\nabla}_{E_l} F_t = [E_l, F_t] = 0$$

Donde,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\det (g_{ij})](0) &= 2 \sum_{l=1}^m [\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_l} F_t, E_l)] \\ &= 2 \sum_{l=1}^m [\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_l} F_t^T, E_l) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_l} F_t^\perp, E_l)] \\ &= 2[\operatorname{div}_M(F_t^T) - \sum_{l=1}^m \bar{g}(F_t^\perp, \bar{\nabla}_{E_l} E_l)] \\ &= 2[\operatorname{div}_M(F_t^T) - \bar{g}(F_t^\perp, \sum_{l=1}^m \bar{\nabla}_{E_l} E_l)] \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[\det (g_{ij})](0) = 2[\operatorname{div}_M(F_t^T) - m\bar{g}(F_t^\perp, H)] \quad (1.18)$$

Substituindo 1.18 e 1.16 na equação 1.15 temos

$$V'(0) = \int_M \operatorname{div}_M(F_t^T) - m \int_M \bar{g}(F_t^\perp, H)$$

Já que a variação F possui suporte compacto, F_t^T é um campo tangente a M com suporte compacto, e pelo teorema de Stokes,

$$\int_M \operatorname{div}_M(F_t^T) = 0$$

Donde segue o resultado. □

Proposição 1.10. *Uma subvariedade $M \subset N$ é um ponto crítico para o funcional de volume se e somente se o vetor curvatura média H se anula em todos os pontos $H \equiv 0$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, se $H \equiv 0$ então M é ponto crítico para cada variação F . Reciprocamente, se M é ponto crítico para toda variação F , e assumamos que $H(p) \neq 0$. Pela continuidade de H , existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $H(q) \neq 0$, $\forall q \in U$. Considere uma função $\eta \in C_0^\infty(U)$ tal que $\eta \geq 0$, $\eta(p) = 1$. Defina o campo $Y \in \Gamma(TM^\perp)$ por $Y(x) = \eta(x)H(x)$. Temos $\operatorname{supt}(N) \subset U$. Definimos então a variação $F(x, t) = \exp_x(tY(x))$, onde \exp é a aplicação exponencial de N . Para esta variação,

$$V'(0) = -m \int_M \bar{g}(Y, H) = - \int_U \eta \|H\|^2 < 0$$

um absurdo. □

A proposição acima justifica a seguinte

Definição 1.11. *Uma subvariedade $M \subset N$ é dita mínima se seu vetor curvatura média se anula em todos os pontos, $H \equiv 0$.*

Encerramos esta seção explorando um pouco mais o resultado da proposição 1.9

Corolário 1.12. *(Fórmula da primeira variação) Seja $M \subset N$ uma imersão mínima. Então para todo campo $X \in \Gamma(TN)$ com suporte compacto em M temos*

$$\int_M \operatorname{div}_M X = 0 \tag{1.19}$$

Demonstração. Temos

$$\int_M \operatorname{div}_M X = \int_M \operatorname{div}_M(X^T) + \int_M \operatorname{div}_M X^\perp$$

A primeira parcela do lado direito é nula pelo teorema de Stokes, enquanto a segunda é nula pois,

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}_M X^\perp &= \int_M \sum_i \bar{g}(E_i, \nabla_{E_i} X^\perp) \\ &= - \int_M \sum_i \bar{g}(\nabla_{E_i} E_i, X^\perp) \\ &= - \int_M \bar{g}(X^\perp, H) = 0 \end{aligned}$$

□

Observação 1.13. *É suficiente que tenhamos*

$$\int_M \operatorname{div}_M X = 0$$

para cada campo normal X com suporte compacto em M , já que a integral da parte tangente é sempre nula pelo teorema de Stokes.

Veremos nas seções seguintes consequências desta fórmula.

1.3 Exemplos de superfícies mínimas

Vimos na seção anterior que superfícies mínimas são superfícies cuja curvatura média se anula em todos os pontos. Os exemplos mais básicos de tais superfícies são os exemplos nos quais a segunda forma fundamental é identicamente nula, isto é, superfícies cuja aplicação normal de Gauss é constante. Isto significa que a única superfície mínima em \mathbb{R}^3 com segunda forma fundamental nula é o plano. Este foi o único exemplo apresentado pelo próprio Lagrange em [39], já que em sua época os conceitos de curvatura principal, aplicação de Gauss, e segunda forma fundamental ainda não estavam desenvolvidos³.

Em 1776, Mesnieur mostrou em [46] que a equação da superfície mínima era equivalente à $H = 0$ para gráficos. Desde então, passou-se a chamar de mínima qualquer superfície cujo vetor curvatura média se anula identicamente. No mesmo trabalho, ele mostrou dois exemplos não triviais de superfícies mínimas, que veremos abaixo.

Exemplo 1.14. (*O Helicóide*)

O helicóide é dado na forma paramétrica como o conjunto

$$X(s, t) = (s \cos(t), s \sin(t), t) \tag{1.20}$$

Onde os parâmetros t e s variam em \mathbb{R} . Mostraremos a seguir que o helicóide é mínimo.

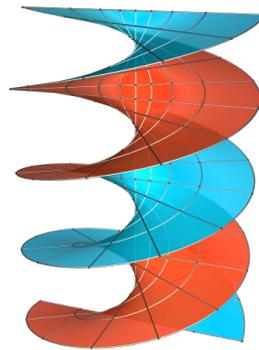


Figura 1.1: O helicóide. Créditos: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

³As curvaturas principais foram introduzidas por Euler no mesmo ano que Lagrange publicou seu artigo sobre o cálculo das variações.

Temos

$$X_t = (-s \sin(t), s \cos(t), 1)$$

$$X_s = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

Portanto o normal ao helicóide é

$$N(s, t) = \frac{1}{1 + s^2}(-\sin(t), \cos(t), -s)$$

Temos ainda

$$X_{tt} = (-s \cos(t), -s \sin(t), 0)$$

$$X_{ss} = (0, 0, 0)$$

Deste modo,

$$\langle N_s, X_s \rangle = -\langle N, X_{ss} \rangle = 0$$

$$\langle N_t, X_t \rangle = -\langle N, X_{tt} \rangle = \frac{1}{1 + s^2}(s \sin(t) \cos(t) - s \sin(t) \cos(t)) = 0$$

Portanto, o traço de dN é nulo, e o helicóide é mínimo.

Observamos ainda que o helicóide é completo, mergulhado, periódico na variável t e simplesmente conexo. Além disso, ele é uma superfície regrada, isto é, pode ser parametrizado na forma $X(s, t) = \alpha(t) + s\delta(t)$.

Mesnieur mostrou que o helicóide era mínimo assumindo que havia uma superfície mínima regrada, e transformando a equação $H = 0$ que envolve derivadas parciais de segunda ordem, em uma equação diferencial ordinária. Em 1842, Catalan mostrou em [16] que o helicóide é a única superfície mínima regrada e não planar.

Na figura 1.1, as retas $\alpha(t) + s\delta(t)$ para t fixado, estão demarcadas.

Exemplo 1.15. *(O Catenóide)*

No mesmo trabalho, Mesnieur procurou por exemplos de superfícies mínimas de revolução. Ele mostrou que a equação $H = 0$ reduzia-se neste caso a uma equação diferencial ordinária sobre a curva geratriz, e concluiu que a única solução que poderia ser

obtida nesta forma era a superfície de revolução da catenária, o catenóide. O catenóide é completo, mergulhado, e topologicamente um anel. Sua parametrização é dada por

$$X(s, t) = (\cosh(s) \cos(t), \sinh(s) \sin(t), s) \quad (1.21)$$

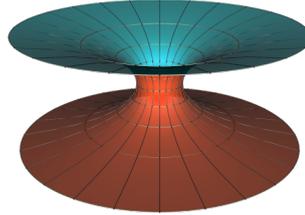


Figura 1.2: O Catenóide. Créditos: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal

Mostremos que o catenóide é mínimo.

Temos

$$X_s = (\sinh(s) \cos(t), \cosh(s) \sin(t), 1)$$

$$X_t = (-\cosh(s) \sin(t), \sinh(s) \cos(t), 0)$$

Portanto, o normal em $X(s, t)$ é dado por

$$N(s, t) = \left(-\frac{\cos(t)}{\cosh(s)}, \frac{\sin(t)}{\cosh(s)}, \frac{\sinh(s)}{\cosh(s)} \right)$$

Temos ainda

$$X_{ss} = (\cosh(s) \cos(t), \sinh(s) \sin(t), 0)$$

$$X_{tt} = (-\cosh(s) \cos(t), -\sinh(s) \sin(t), 0)$$

Deste modo,

$$\langle N_s, X_s \rangle = -\langle N, X_{ss} \rangle = (\cos(t))^2 - \tanh(s)(\sin(t))^2$$

$$\langle N_t, X_t \rangle = -\langle N, X_{tt} \rangle = -(\cos(t))^2 + \tanh s(\sin(t))^2$$

Portanto, o traço de dN é nulo, e o catenóide é mínimo.

Exemplo 1.16. (A superfície de Scherk biperiódica) Apesar de muito trabalho de Monge, Legendre e Poisson, o próximo exemplo de superfície mínima só foi descoberto quase 70 anos depois da descoberta do helicóide e do catenóide por Mesnieur.

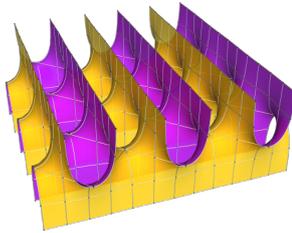


Figura 1.3: A superfície de Scherk biperiódica. Créditos: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal.

Em 1835, Scherk descobriu o próximo exemplo de superfície mínima completa assumindo que a equação da superfície mínima era satisfeita para uma função cujas variáveis eram separáveis, isto é, $u(x, y) = f(x) + g(y)$. Para uma u deste tipo, a equação 1.4 fica

$$[1 + (g'(y))^2]f''(x) + [1 + (f'(x))^2]g''(y) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = -\frac{g''(y)}{1 + (g'(y))^2} = \text{constante}$$

Integrando estas equações, obtemos

$$f(x) = \log \cos x \quad g(y) = -\log \cos y$$

Portanto, $u(x, y) = \log \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right)$. Esta solução está definida no quadrado $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. É possível provar, utilizando o princípio de reflexão de Schwarz, que esta solução se estende periodicamente aos quadrados alternados da lattice determinada pelo quadrado fundamental no plano.

Exemplo 1.17. (Enneper) A superfície de Enneper, descoberta em 1864 utilizando uma fórmula de representação para superfícies mínimas em termos de funções holomorfas (que veremos adiante), tem parametrização

$$X(s, t) = \left(s - \frac{s^3}{3} + st^2, t - \frac{t^3}{3} + ts^2, s^2 - t^2 \right)$$

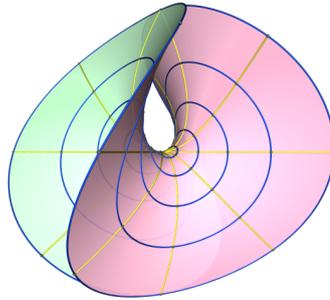


Figura 1.4: A superfície de Enneper. Créditos: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal.

Temos

$$X_s = (1 - s^2 + t^2, 2st, 2s)$$

$$X_t = (2st, 1 - t^2 + s^2, -2t)$$

Portanto, o normal em $X(s, t)$ é dado por

$$N(s, t) = \left(\frac{-2s}{1 + s^2 + t^2}, \frac{2t}{1 + s^2 + t^2}, \frac{1 - s^2 - t^2}{1 + s^2 + t^2} \right)$$

Note que

$$X_{ss} = (-2s, 2t, 2)$$

$$X_{tt} = (2s, -2t, -2)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \langle N_s, X_s \rangle &= \frac{4s^2}{1 + s^2 + t^2} + \frac{4t^2}{1 + s^2 + t^2} + \frac{2 - 2s^2 - 2t^2}{1 + s^2 + t^2} \\ &= \frac{2(1 + s^2 + t^2)}{1 + s^2 + t^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle N_t, X_t \rangle &= - \left(\frac{4s^2}{1+s^2+t^2} + \frac{4t^2}{1+s^2+t^2} + \frac{2-2s^2-2t^2}{1+s^2+t^2} \right) \\ &= - \frac{2(1+s^2+t^2)}{1+s^2+t^2} = -2\end{aligned}$$

Portanto, o traço de dN é nulo e a superfície de Enneper é mínima.

Exemplo 1.18. (O problema de Björling) Considere um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, uma curva analítica $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e um campo vetorial analítico unitário e normal a esta curva, $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $|n(t)| \equiv 1$, e $\langle \gamma'(t), n(t) \rangle = 0$. O problema de Björling consiste em encontrar uma superfície mínima $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $I \times \{0\} \subset \Omega$, que satisfaz as seguintes condições:

1. $X(t, 0) = \gamma(t)$, $t \in I$
2. $N(t, 0) = n(t)$, $t \in I$

Observamos que o teorema de Cauchy-Kovalewskaia⁴ implica que o problema de Björling sempre possui solução e que esta solução é (localmente) única. De fato esta solução possui uma representação integral em termos dos dados de γ e n , e isto possibilitou a descoberta de vários exemplos, dentre os quais destacamos o exemplo de Catalan⁵, obtido ainda antes da descoberta da fórmula de representação.

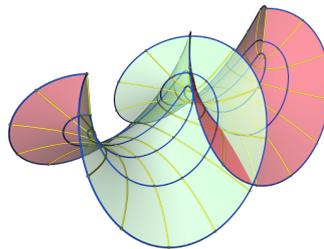


Figura 1.5: A superfície de Catalan, obtida resolvendo o problema de Björling para a cicloide. Créditos: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal.

⁴[27] p. 239

⁵Ver figura 1.5

Exemplo 1.19. (A superfície D de Schwarz)

A superfície D de Schwarz é obtida em seu domínio fundamental resolvendo o problema de Plateu para uma fronteira constituída de dois triângulos distintos, faces de um tetraedro regular. Então esta superfície é refletida ao longo de suas linhas de simetria, formando uma superfície triplamente periódica em \mathbb{R}^3 . A superfície de Schwarz tem papel importante na ciência dos materiais [45].

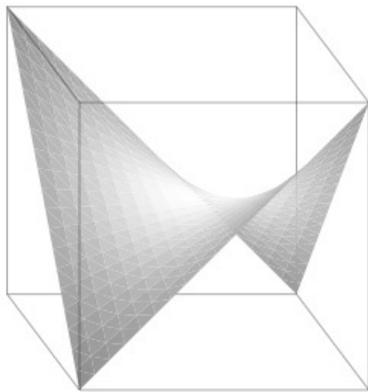


Figura 1.6: O domínio fundamental da superfície de Schwarz. Créditos: Danny Calegari, <http://lamington.files.wordpress.com/>.

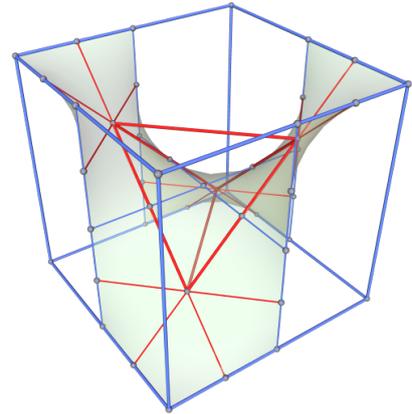


Figura 1.7: O domínio fundamental da superfície de Schwarz após 6 reflexões. Créditos: Matthias Weber, www.indiana.edu/~minimal.

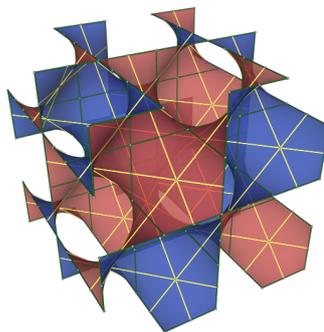


Figura 1.8: A superfície D de Schwarz triplamente periódica. Créditos: Matthias weber, www.indiana.edu/~minimal.

Para mais exemplos, referimos o leitor aos textos [19], [45], e ao Minimal Surface Archive, da universidade de Indiana, [37]. Uma discussão abrangente sobre o problema

de Björling pode ser encontrada em [21].

1.4 Consequências da primeira variação

Teorema 1.20. (*Harmonicidade das funções altura*) *A imersão $\varphi : M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é mínima se e somente se as funções altura $e_v : M \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $e_v(x) = \langle v, \varphi(x) \rangle$ são harmônicas, para cada direção $v \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Considere um referencial geodésico E_i em p , e ortonormal em uma vizinhança U de p .

$$\Delta_M e_v(p) = \nabla de_v(E_i, E_i)(p) = \sum_{i=1}^k E_i(de_v(E_i))(p) - \sum_{i=1}^k de_v(\nabla_{E_i} E_i)(p)$$

Como o referencial é geodésico em p , cada parcela da soma $\sum_{i=1}^k de_v(\nabla_{E_i} E_i)(p)$ é nula. Donde,

$$\begin{aligned} \Delta_M e_v(p) &= \sum_{i=1}^k \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i(p), v \rangle + \langle E_i, \bar{\nabla}_{E_i} v \rangle \\ \Delta_M e_v(p) &= \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{E_i} E_i(p), v \rangle + \langle A(E_i, E_i)(p), v \rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i} v \rangle \\ \Delta_M e_v(p) &= \langle H(p), v \rangle + \operatorname{div}_M v(p) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Já que v é um campo constante, $\operatorname{div}_M v = 0$, portanto $\Delta_M e_v(p) = \langle H(p), v \rangle$. Com isto, vemos que se toda função e_v é harmônica, então o vetor curvatura média H é ortogonal a qualquer direção de \mathbb{R}^n em cada ponto p . Assim, $H \equiv 0$. Reciprocamente, se H se anula em todo ponto, então toda função e_v é harmônica. □

Corolário 1.21. *Se $\varphi : M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão mínima e M é conexa sem fronteira, então M não é compacta.*

Demonstração. Com efeito, se M fosse compacta, cada função altura e_v , $v \in \mathbb{R}^n$ admitiria um ponto de máximo global. Mas e_v é harmônica, e pelo princípio do máximo forte, e_v é constante, de modo que M está contido no hiperplano $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, v \rangle = c\}$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Mas isto acontece para cada $v \in \mathbb{R}^n$, donde M deve ser um ponto. □

Como aplicação deste resultado, Osserman mostrou em [53] que uma superfície mínima deve estar contida no fecho convexo de sua fronteira. Apresentaremos uma prova curta deste resultado aqui. Relembre que o fecho convexo de um conjunto é definido da seguinte maneira:

Definição 1.22. *Seja U um subconjunto de \mathbb{R}^n . Definimos o fecho convexo de U , $\overline{C(U)}$, como o menor convexo que contém o conjunto U*

$$\overline{C(U)} = \bigcap_{\substack{H \text{ convexo} \\ H \supset U}} H$$

Note que se o conjunto U é compacto, o fecho convexo de U é a interseção de todos os semiespaços que o contém. Com isso, podemos mostrar o teorema de Osserman:

Teorema 1.23. *(Propriedade do fecho convexo) Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície mínima compacta com fronteira ∂M . Então $M \subset \overline{C(\partial M)}$.*

Demonstração. Considere a família \mathcal{F} , de todos os semiespaços $H(c, v) = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, v \rangle \geq c\}$ que contém ∂M . Se $H(c, v) \in \mathcal{F}$, consideramos a restrição da função altura com relação a este hiperplano, e_v , à superfície M . Já que esta função é harmônica, o seu máximo é atingido em ∂M , deste modo, $e_v(p) \leq c, \forall p \in M$, donde $M \subset H(c, v)$. Concluimos assim que M está contida em qualquer hiperplano que contenha a sua fronteira, e em particular, M está contida no fecho convexo da fronteira $\overline{C(\partial M)}$. \square

Uma das consequências mais importantes da primeira variação da área e da harmonicidade das funções altura é a fórmula de monotonicidade, que provaremos a seguir. Veremos nos capítulos seguintes as aplicações deste teorema.

Teorema 1.24. *(Monotonicidade) Seja M^k um superfície mínima em \mathbb{R}^n , $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $B_r(x_0)$ a bola de \mathbb{R}^n centrada em x_0 de raio r . A função $\theta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\theta(r) = \frac{\text{Vol}_k(M \cap B_r(x_0))}{r^k} \tag{1.23}$$

é não decrescente. Ademais, para $0 < r < R$ vale a seguinte igualdade

$$\theta(R) - \theta(r) \geq \int_{(B_R(x_0) \setminus B_r(x_0)) \cap M} \frac{|(x - x_0)^\perp|^2}{|x - x_0|^{k+2}} dx \tag{1.24}$$

Demonstração. Considere a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - x_0|$. Seja $x \in M$, e considere E_i um referencial ortonormal de M numa vizinhança do ponto x e geodésico em x . Considere ainda um referencial ortonormal de TM^\perp , $(E_\alpha)_{\alpha=1}^{n-k}$. Observe que

$$\nabla_M(f^2) = \sum_{i=1}^k 2(x^i - x_0^i)E_i = 2(x - x_0)^T \quad (1.25)$$

onde $x = \sum_{i=1}^k x^i E_i + \sum_{\alpha=1}^{n-k} x^\alpha E_\alpha$ e $x_0 = \sum_{i=1}^k x_0^i E_i + \sum_{\alpha=1}^{n-k} x_0^\alpha E_\alpha$. Deste modo,

$$\Delta_M(f^2) = 2\operatorname{div}_M(\nabla_M(f^2)) = 2k \quad (1.26)$$

Assim, denotando por $M_r = M \cap B_r(x_0)$ temos

$$2k\operatorname{Vol}_k(M_r) = 2 \int_{M_r} \operatorname{div}_M(x - x_0)^T$$

Pelo teorema de Stokes,

$$2k\operatorname{Vol}_k(M_r) = 2 \int_{\partial M_r} \langle (x - x_0)^T, \nu \rangle$$

Onde ν é o vetor normal à ∂M_r induzido pela orientação de M_r . Note que ∂M_r se decompõe em duas partes, $\partial M_r = (\partial M \cap B_r) \cup (\partial B_r \cap M)$ com interseção $\partial M \cap \partial B_r$. Portanto, a integral acima se escreve

$$2k\operatorname{Vol}_k(M_r) = 2 \int_{\partial B_r \cap M} \langle (x - x_0)^T, \nu \rangle + 2 \int_{\partial M \cap B_r} \langle (x - x_0)^T, \nu \rangle - 2 \int_{\partial M \cap \partial B_r} \langle (x - x_0)^T, \nu \rangle$$

Note que as duas últimas integrais se anulam, já que $(x - x_0)^T$ e ν são ortogonais em ∂M . Deste modo, temos somente

$$2k\operatorname{Vol}_k(M_r) = 2 \int_{\partial B_r \cap M} \langle (x - x_0)^T, \nu \rangle$$

Mas o vetor ν é unitário e normal à fronteira de $\partial B_r(x_0) \cap M$ em x e tangente a M em x , portanto, $\nu = \frac{1}{|(x - x_0)^T|} (x - x_0)^T$, assim a integral fica

$$2k\operatorname{Vol}_k(M_r) = 2 \int_{\partial B_r \cap M} |(x - x_0)^T| \quad (1.27)$$

Por outro lado, temos $M_r = \{x \in M; f(x) \leq r\}$. Portanto,

$$Vol(\{f \leq r\}) = \int_{\{f \leq r\}} dM = \int_{\{f \leq r\}} |\nabla_M f|^{-1} |\nabla_M f|$$

Deste modo, a fórmula da coárea aplicada a $|\nabla_M f|^{-1}$ nos dá

$$Vol_k(\{f \leq r\}) = \int_0^r \int_{\{f=\xi\}} |\nabla_M f|^{-1} d\xi \quad (1.28)$$

Donde,

$$\frac{d}{dr} Vol_k(M_r) = \frac{d}{dr} Vol_k(\{f \leq r\}) = \int_{\{f=r\}} |\nabla_M f|^{-1} \quad (1.29)$$

Da equação 1.25 concluímos que em $x \neq x_0$

$$\nabla_M f = \frac{1}{|x - x_0|} (x - x_0)^T$$

$$|\nabla_M f|^{-1} = \frac{|x - x_0|}{|(x - x_0)^T|} \quad (1.30)$$

Temos então

$$\theta'(r) = \frac{d}{dr} (r^{-k} Vol_k(M_r)) = \left\{ -\frac{1}{r^{k+1}} \int_{\{f=r\}} |x - x_0|^T + \frac{1}{r^k} \int_{\{f=r\}} \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|^T} \right\}$$

Como em $\{f = r\}$ temos $|x - x_0| = r$, podemos reescrever a equação acima

$$\theta'(r) = \frac{1}{r^{k+1}} \left\{ - \int_{\{f=r\}} |x - x_0|^T + \int_{\{f=r\}} \frac{|x - x_0|^2}{|(x - x_0)^T|} \right\}$$

$$\theta'(r) = \frac{1}{r^{k+1}} \int_{\{f=r\}} \frac{|x - x_0|^2 - (|(x - x_0)^T|^2)}{|(x - x_0)^T|}$$

$$\theta'(r) = \frac{1}{r^{k+1}} \int_{\{f=r\}} \frac{|(x - x_0)^\perp|^2}{|(x - x_0)^T|} \geq 0 \quad (1.31)$$

O que mostra que a função $\theta(r)$ é não decrescente. Mostraremos agora a igualdade 1.24. Integrando a equação 1.31, temos

$$\theta(R) - \theta(r) = \int_r^R \theta'(s) ds = \int_r^R \left\{ \int_{\{f=s\}} \frac{1}{s^{k+1}} \frac{|(x-x_0)^\perp|^2}{|(x-x_0)^T|} \right\} ds$$

Notando que em $\{f = s\}$ temos $|x - x_0| = s$, reescrevemos a equação acima como

$$\theta(R) - \theta(r) = \int_r^R \left\{ \int_{\{f=s\}} g \right\} ds$$

Onde $g : M \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$g(x) = \frac{1}{|x - x_0|^{k+1}} \cdot \frac{|(x - x_0)^\perp|^2}{|(x - x_0)^T|}$$

Aplicando a fórmula da coarea a g temos

$$\theta(R) - \theta(r) \geq \int_{M_R - M_r} g |\nabla_M f|$$

$$\theta(R) - \theta(r) \geq \int_{M_R - M_r} \frac{1}{|x - x_0|^{k+1}} \cdot \frac{|(x - x_0)^\perp|^2}{|(x - x_0)^T|} \cdot \frac{|(x - x_0)^T|}{|x - x_0|}$$

Onde a desigualdade segue do fato que g não é necessariamente L^1 . Isto nos dá a desigualdade 1.24

□

Corolário 1.25. *Se M é uma superfície mínima tal que a função theta em torno de um ponto x_0 é constante, então M é cônica em torno de x_0 , isto é, M é invariante por dilatações centradas em x_0 .*

Demonstração. Da equação 1.31 vemos que se $\theta(r)$ é constante, então $(x - x_0)^\perp \equiv 0$ em M . Isso nos diz que $(x - x_0)$ é sempre tangente a M no ponto x , donde M é invariante por dilatações centradas em x_0 . □

1.5 A representação de Enneper-Weierstrass

Iniciamos esta seção lembrando um teorema clássico de análise complexa:

Teorema 1.26. *(Teorema de Uniformização) Seja M^2 uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Então uma (e somente uma) das afirmações abaixo é verdadeira:*

1. M é conformemente equivalente ao plano complexo \mathbb{C}

2. M é conformemente equivalente ao disco unitário $D \subset \mathbb{C}$

3. M é conformemente equivalente à esfera de Riemann $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \approx S^2$

A prova deste resultado foge ao objetivo deste texto, e pode ser encontrada em [1], capítulo 10.

A ferramenta que apresentaremos agora foi um marco na teoria de superfícies mínimas, pela imensa gama de novos exemplos que ela forneceu. Vale lembrar, que quando Weierstrass encontrou esta parametrização em seu artigo [63], poucas superfícies além do plano, o helicóide e o catenóide tinham suas parametrizações conhecidas, somente os exemplos de Catalan, Enneper e Scherk.

Teorema 1.27. (*Enneper-Weierstrass*) *Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima orientável, simplesmente conexa e sem fronteira. Existem um domínio $\Omega = \mathbb{C}$ ou D , uma função holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, e uma função meromorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tais que se ξ é um polo de ordem m de g então, ξ é um zero de ordem no mínimo $2m$ de f e M pode ser representada por uma aplicação $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por*

$$x_k(\xi) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\xi \phi_k(z) dz \right\} + c_k \quad (1.32)$$

onde as funções ϕ_k são definidas por

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2) \quad (1.33)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \quad (1.34)$$

$$\phi_3 = fg \quad (1.35)$$

Reciprocamente, se f e g são funções como acima, as funções ϕ são holomorfas e as equações 1.32 definem uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Já que $M \subset \mathbb{R}^3$ é mínima, não é compacta, e pelo Teorema de Uniformização, é conformemente equivalente ao plano ou ao disco unitário. Existe portanto uma aplicação conforme $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega = \mathbb{C}$ ou D , isto é,

$$\left| \frac{\partial x_k}{\partial u} \right|^2 = \left| \frac{\partial x_k}{\partial v} \right|^2$$

$$\left\langle \frac{\partial x_k}{\partial u}, \frac{\partial x_k}{\partial v} \right\rangle = 0$$

onde $z = u + iv$ é a variável em Ω . Pelo teorema 1.20, as funções coordenada de x_k são harmônicas na variável z . Definindo

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \quad (1.36)$$

estas funções são holomorfas em Ω , com efeito, temos

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \phi_k}{\partial u} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 x_k}{\partial v^2} = \frac{\partial \operatorname{Im} \phi_k}{\partial v}$$

pois x_k é harmônica, enquanto que

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \phi_k}{\partial v} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial v \partial u} = -\frac{\partial \operatorname{Im} \phi_k}{\partial u}$$

pelo teorema de Schwarz.

Portanto, as funções ϕ_k definem 1-formas diferenciais fechadas $\phi_k dz$ em Ω , e como este domínio é simplesmente conexo, a integral

$$\int_0^\xi \phi_k(z) dz$$

não depende do caminho escolhido entre 0 e $\xi = (\xi_u, \xi_v)$. Escolheremos então o caminho que é a justaposição dos caminhos $\gamma_1(t) = (t\xi_u, 0)$ e $\gamma_2 = (\xi_u, t\xi_v)$, $0 \leq t \leq 1$.

Teremos então

$$\begin{aligned} \phi_k dz &= \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) (du + idv) \\ \phi_k dz &= \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} du + \frac{\partial x_k}{\partial v} dv \right) + i \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} dv - \frac{\partial x_k}{\partial v} du \right) \end{aligned}$$

Donde

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^\xi \phi_k(z) dz \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_1} \phi_k(z) dz \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_2} \phi_k(z) dz \right\}$$

Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_1} \phi_k(z) dz \right\} &= \int_0^1 \frac{\partial x_k}{\partial u}(\xi_u s, 0) du(\xi_u, 0) ds + \int_0^1 \frac{\partial x_k}{\partial v}(\xi_u s, 0) dv(\xi_u, 0) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial x_k}{\partial u}(\xi_u s, 0) \xi_u ds = x_k(\xi_u, 0) - x_k(0, 0) \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_2} \phi_k(z) dz \right\} &= \int_0^1 \frac{\partial x_k}{\partial u}(\xi_u, \xi_v s) du(0, \xi_v) ds + \int_0^1 \frac{\partial x_k}{\partial v}(\xi_u, \xi_v s) dv(0, \xi_v) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial x_k}{\partial v}(\xi_u, \xi_v s) \xi_v ds = x_k(\xi_u, \xi_v) - x_k(\xi_u, 0) \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^\xi \phi_k(z) dz \right\} = x_k(\xi_u, \xi_v) - x_k(0, 0)$$

Tomando as constantes $c_k = x_k(0)$, obtemos a equação 1.32.

Resta mostrar que as funções ϕ_k podem ser definidas como nas equações 1.33 - 1.35.

Para isto utilizamos a estrutura conforme da aplicação x . Note que

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \left| \frac{\partial x_k}{\partial u} \right|^2 - \left| \frac{\partial x_k}{\partial v} \right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial x_k}{\partial u}, \frac{\partial x_k}{\partial v} \right\rangle \end{aligned}$$

Então,

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \tag{1.37}$$

Observe que desde que as funções ϕ_k são holomorfas, seus conjuntos de zeros são isolados a menos que sejam identicamente nulas. Portanto, exceto no caso em que $\phi_3 \equiv 0$ e $\phi_1 = i\phi_2$, que corresponde ao caso em que a superfície é um plano, podemos definir as funções:

$$f = \phi_1 - i\phi_2 \quad \text{e} \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \tag{1.38}$$

Se escrevermos a equação 1.37 na forma

$$(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2$$

Encontramos

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2$$

Resolvendo as equações para ϕ_1 e ϕ_2 encontramos as equações 1.33-1.18. Note que o produto fg^2 não tem pólos, já que $\phi_1 + i\phi_2$ é holomorfa.

Reciprocamente, se f e g são funções que satisfazem o enunciado, temos que as ϕ_k são holomorfas em Ω e satisfazem a equação 1.37. Definido x_k como na equação 1.32, temos que estas funções satisfazem 1.36, e portanto as coordenadas x_k são harmônicas em Ω , donde M é uma imersão mínima, pelo teorema 1.20.

□

Observação 1.28. *A parametrização de Enneper-Weierstrass é isotérmica, isto é, se $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a representação de Enneper-Weierstrass de M , então*

$$|X_u| = |X_v| \quad e \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

Definição 1.29. *Dada uma superfície mínima, e uma tripla (Ω, f, g) tal que a representação de Enneper-Weierstrass 1.32 é satisfeita, dizemos que esta tripla é um dado de Enneper-Weierstrass de M .*

Exemplo 1.30. *(Representações das superfícies clássicas) No que segue, Ω é sempre um domínio simplesmente conexo do plano \mathbb{C} . As superfícies dos exemplos 1.14, 1.15, 1.16 e 1.17 têm os seguintes dados de Enneper-Weierstrass:*

Helicoide:

$$\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = \frac{1}{z^2}$$

Catenóide:

$$\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = \frac{i}{z^2}$$

Superfície de Scherk:

$$\Omega = B_1 \subset \mathbb{C}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = \frac{4}{1 - z^4}$$

Superfície de Enneper:

$$\Omega = \mathbb{C}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = 1$$

Veremos agora que a representação de Enneper-Weierstrass está profundamente ligada à geometria da superfície.

Proposição 1.31. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima que não é um plano, M simplesmente conexa, e suponha que M tem dados de Weierstrass (Ω, f, g) . Se π denota a projeção estereográfica em relação ao pólo norte $(0, 0, 1)$, $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\pi((0, 0, 1)) = \infty$ e $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação de Gauss de M , então*

$$g = \pi \circ N$$

Demonstração. Se $X : \Omega \rightarrow M$, $X(u + iv) = (x_1, x_2, x_3)$ é a representação de Enneper-Weierstrass de M , temos a partir das equações 1.32 que

$$2 \frac{\partial X}{\partial z} = 2(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} = 2(\operatorname{Re}(\phi_1), \operatorname{Re}(\phi_2), \operatorname{Re}(\phi_3)) + 2i(\operatorname{Im}(\phi_1), \operatorname{Im}(\phi_2), \operatorname{Im}(\phi_3))$$

Logo,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = 2(\operatorname{Re}(\phi_1), \operatorname{Re}(\phi_2), \operatorname{Re}(\phi_3)) \tag{1.39}$$

e

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -2(\operatorname{Im}(\phi_1), \operatorname{Im}(\phi_2), \operatorname{Im}(\phi_3)) \tag{1.40}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}, e_1 \right\rangle &= 4[\operatorname{Re}(\phi_3)\operatorname{Im}(\phi_2) - \operatorname{Re}(\phi_2)\operatorname{Im}(\phi_3)] \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}, e_2 \right\rangle &= 4[\operatorname{Re}(\phi_1)\operatorname{Im}(\phi_3) - \operatorname{Re}(\phi_3)\operatorname{Im}(\phi_1)] \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}, e_3 \right\rangle &= 4[\operatorname{Re}(\phi_2)\operatorname{Im}(\phi_1) - \operatorname{Re}(\phi_1)\operatorname{Im}(\phi_2)] \end{aligned}$$

Denotando por $\overline{\phi_k}$ a conjugada de ϕ_k , temos

$$\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} = 4(Im(\phi_2\bar{\phi}_3), Im(\phi_3\bar{\phi}_1), Im(\phi_1\bar{\phi}_2))$$

A partir das equações 1.33-1.34 temos

$$\begin{aligned}\phi_2\bar{\phi}_3 &= \frac{i|f|^2}{2}(\bar{g} + |g|^2g) \\ \phi_3\bar{\phi}_1 &= \frac{|f|^2}{2}(g - |g|^2\bar{g}) \\ \phi_1\bar{\phi}_2 &= -\frac{i|f|^2}{4}[1 - |g|^4 + (\bar{g}^2) - (g^2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Im(\phi_2\bar{\phi}_3) &= \frac{|f|^2}{2}(Re(\bar{g}) + |g|^2Re(g)) \\ Im(\phi_3\bar{\phi}_1) &= \frac{|f|^2}{2}(Im(g) - |g|^2Im(\bar{g})) \\ Im(\phi_1\bar{\phi}_2) &= -\frac{i|f|^2}{4}(1 - |g|^4)\end{aligned}$$

Desde que $Re(\bar{g}) = Re(g)$, $Im(\bar{g}) = -Im(g)$, e $[(\bar{g}^2) - (g^2)]$ é imaginário puro, temos

$$\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} = (1 + |g|^2)|f|^2(2Re(g), 2Im(g), |g|^2 - 1)$$

e

$$\left| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right| = |f|^2(1 + |g|^2)^2 \quad (1.41)$$

Donde

$$N = \frac{1}{1 + |g|^2}(2Re(g), 2Im(g), |g|^2 - 1)$$

e

$$\pi \circ N = (Re(g), Im(g))$$

□

Observação 1.32. A métrica em M escreve-se $ds^2 = |X_u||X_v|dz^2$. Da equação 1.41 temos então que

$$ds^2 = |f|^2(1 + |g|^2)^2 dz^2$$

A curvatura Gaussiana fica

Definição 1.33. *Considere uma superfície mínima $M \subset \mathbb{R}^3$, com dados de Enneper-Weierstrass (Ω, f, g) . Definimos a família associada a M como a família de superfícies M_t cujos dados de Enneper-Weierstrass são $(\Omega, e^{it}f, g)$, com parâmetro $t \in [0, 2\pi]$.*

Podemos ver a partir do exemplo 1.30 que o Helicóide e o Catenóide pertencem à mesma família associada. Este é um caso especial de superfícies associadas, pois o ângulo de rotação de f é $\frac{\pi}{2}$. Estas superfícies são chamadas superfícies conjugadas, pois suas funções coordenadas são conjugadas harmônicas, isto é, se M tem coordenadas (x_1, x_2, x_3) e $M_{\frac{\pi}{2}}$ tem coordenadas (y_1, y_2, y_3) , então as funções $x_i + iy_i$ são holomorfas. Note ainda que as superfícies de uma mesma família associada são isométricas, de acordo com a observação 1.32.

Corolário 1.34. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima simplesmente conexa com dados de Weierstrass (Ω, f, g) . Se M_t é uma superfície da família associada a M , então M_t e M possuem a mesma aplicação de Gauss.*

Demonstração. Isto segue da proposição anterior, já que na variação não há alteração na função meromorfa g . □

1.6 A segunda variação e o conceito de estabilidade

Na seção 1.2, vimos que superfícies mínimas são definidas como pontos críticos do funcional de volume. Queremos estudar agora aquelas superfícies que são realmente mínimos deste funcional, ou pelo menos mínimos relativos. Para isto, examinaremos as subvariedades $M \subset N$ para as quais se tem

$$V''(0) = \int_M \left(\frac{d^2}{dt^2} \nu(0) \right) \sqrt{\det(g_{ij})(0)} \geq 0$$

para toda variação normal de M com suporte compacto e que fixa o bordo.

Calculando $\nu''(t)$ temos

$$\frac{d^2}{dt^2} \nu(t) = \sqrt{\det(g^{ij})(0)} \frac{d^2}{dt^2} (\sqrt{\det(g_{ij})(t)})$$

Mas

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{\det(g_{ij})(t)}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})(t)}} \frac{d}{dt}(\det g_{ij}(t)) \right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{\det(g_{ij})(t)}) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1(\det(g_{ij})(t))^{-\frac{3}{2}}}{2} \left[\frac{d}{dt} \det(g_{ij})(t) \right]^2 + (\det g_{ij}(t))^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dt^2}(\det(g_{ij})(t)) \right\}$$

Em $t = 0$, temos $\det(g_{ij})(0) = 1$, já que o referencial tomado é ortonormal, de modo que a equação acima se escreve

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (\sqrt{\det(g_{ij})(t)}) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(g_{ij}(t)) \right]^2 + \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (\det(g_{ij})(t)) \right\}$$

Já que M é mínima, pela equação 1.18 temos

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (\sqrt{\det(g_{ij})(t)}) = -[\operatorname{div}_M(F_t^T)]^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (\det(g_{ij})(t)) \quad (1.42)$$

Derivando a equação 1.17 temos

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} [\det(g_{ij})(t)] = I + J$$

onde

$$I = \sum_{\sigma \in S_m} |\sigma| \left(\sum_{l=1}^m g_{1\sigma(1)} \cdots \left(\frac{d^2}{dt^2} g_{l\sigma(l)} \right) \cdots g_{m\sigma(m)} \right)$$

e

$$J = \sum_{\sigma \in S_m} |\sigma| \left(\sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^m g_{1\sigma(1)} \cdots \left(\frac{d}{dt} g_{l\sigma(l)} \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} g_{k\sigma(k)} \right) \cdots g_{m\sigma(m)} \right)$$

Note que em $t = 0$, as parcelas

$$g_{1\sigma(1)} \cdots \left(\frac{d^2}{dt^2} g_{l\sigma(l)} \right) \cdots g_{m\sigma(m)}$$

são nulas para qualquer permutação σ , exceto a identidade, donde

$$I = \sum_{l=1}^m \frac{d^2}{dt^2} g_{ll}$$

$$I = Tr(g''(0)) \quad (1.43)$$

Onde Tr denota o traço do operador. Já que $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. As parcelas

$$g_{1\sigma(1)} \cdots \left(\frac{d}{dt} g_{l\sigma(l)} \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} g_{k\sigma(k)} \right) \cdots g_{m\sigma(m)}$$

Anulam-se exceto para as permutações $\sigma = Id$ e $\sigma = (lk)$.⁶ Deste modo

$$J = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{d}{dt} g_{ll} \right) \left(\frac{d}{dt} g_{kk} \right) - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^m \left(\frac{d}{dt} g_{lk} \right) \left(\frac{d}{dt} g_{kl} \right) \quad (1.44)$$

Observe que desde que M é mínima,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [det(g_{ij})](t) = \sum_{l=1}^m g'_{ll}(0) = 0$$

Donde

$$\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [det(g_{ij})](t) \right)^2 = \sum_{l=1}^m (g'_{ll}(0))^2 + \sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^m g'_{ll}(0) g'_{kk}(0) = 0 \quad (1.45)$$

Somando as equações 1.45 e 1.44 obtemos

$$J = \sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^m g'_{ll}(0) g'_{kk}(0) - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^m g'_{lk}(0) g'_{kl}(0) - \sum_{l=1}^m g'_{ll}(0) g'_{ll}(0) - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^m g'_{ll}(0) g'_{kk}(0)$$

$$J = - \sum_{l,k=1}^m (g'_{lk}(0))^2$$

$$J = -|g'(0)|^2 \quad (1.46)$$

Vamos calcular agora $Tr(g''(0))$ e $|g'(0)|^2$.

⁶Denotamos por (lk) a permutação que troca l por k e deixa todos os outros termos fixos.

Lema 1.35. *Se $M \subset N$ é uma imersão mínima e F é uma variação normal de M com suporte compacto e que fixa o bordo, cujo campo variacional é F_t , temos*

$$|g'(0)|^2 = 4|\bar{g}(A(\cdot, \cdot), F_t)|^2 \quad (1.47)$$

$$tr(g''(0)) = 2 \{ |\bar{g}(A(\cdot, \cdot), F_t)|^2 + |\nabla_M^\perp F_t|^2 + tr(\bar{g}(R_N(\cdot, F_t)F_t, \cdot)) + div_M(\bar{\nabla}_{F_t} F_t) \} \quad (1.48)$$

Demonstração. Começamos com a equação 1.47. Denotando por $F_i = F_{E_i}$, $F_{tt} = \nabla_{F_t} F_t$ temos

$$g_{ij}(t) = \bar{g}(F_i, F_j)$$

$$g'_{ij}(t) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} F_i, F_j) + \bar{g}(F_i, \bar{\nabla}_{F_t} F_j)$$

$$g'_{ij}(t) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} F_t, F_j) + \bar{g}(F_i, \bar{\nabla}_{F_t} F_t)$$

$$g'_{ij}(t) = -\bar{g}(F_t, \bar{\nabla}_{F_i} F_j) - \bar{g}(F_t, \bar{\nabla}_{F_j} F_i)$$

Em $t = 0$, temos $F_i = E_i$ e $F_j = E_j$, portanto

$$g'_{ij}(0) = -\bar{g}(F_t, \bar{\nabla}_{E_i} E_j) - \bar{g}(F_t, \bar{\nabla}_{E_j} E_i)$$

$$g'_{ij}(0) = -2\bar{g}(F_t, \bar{\nabla}_{E_i} E_j) + \bar{g}(F_t, [E_i, E_j])$$

Já que ambos E_i e E_j são tangentes, também é $[E_i, E_j]$, e desde que F_t é normal a M , temos

$$g'_{ij}(0) = -\bar{g}(F_t, A(E_i, E_j))$$

Assim,

$$|g'_{ij}(0)|^2 = 4|\bar{g}(A(\cdot, \cdot), F_t)|^2$$

Passemos agora à equação 1.48.

$$g''_{ii}(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\bar{g}(F_i, F_i))$$

$$g''_{ii}(t) = \frac{d}{dt}(2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} F_i, F_i))$$

$$g''_{ii}(t) = 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} \bar{\nabla}_{F_t} F_i, F_i) + 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} F_i, \bar{\nabla}_{F_t} F_i)$$

$$g''_{ii}(0) = 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} \bar{\nabla}_{F_t} E_i, E_i) + 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, \bar{\nabla}_{F_t} E_i)$$

$$g''_{ii}(0) = 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} \bar{\nabla}_{E_i} F_t, E_i) + 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, \bar{\nabla}_{F_t} E_i)$$

Pela definição do tensor de curvatura de Riemann, e já que $[E_i, F_t] = 0$, temos

$$g''_{ii}(0) = 2\bar{g}(R_N(E_i, F_t)F_t, E_i) + 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{F_t} F_t, E_i) + 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, \bar{\nabla}_{F_t} E_i)$$

O último termo desta soma se escreve

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, \bar{\nabla}_{F_t} E_i) = \bar{g}((\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^T, (\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^T) + \bar{g}((\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^\perp, (\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^\perp)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \bar{g}((\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^T, (\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^T) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, \sum_{j=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, E_j) E_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, E_j) \bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, E_j) \\ &= \sum_{j=1}^m (\bar{g}(\bar{\nabla}_{F_t} E_i, E_j))^2 \\ &= \sum_{j=1}^m (-\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_i} E_j, F_t))^2 \\ &= \sum_{j=1}^m (-\bar{g}(A(E_i, E_j), F_t))^2 \end{aligned}$$

Enquanto que

$$\bar{g}((\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^\perp, (\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^\perp) = \sum_{\alpha=1}^{n-m} (\bar{g}((\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^\perp, E_\alpha))^2$$

$$\begin{aligned} |(\bar{\nabla}_{F_t} E_i)^\perp|^2 &= \sum_{\alpha=1}^{n-m} (\bar{g}((\bar{\nabla}_{E_i} F_t)^\perp, E_\alpha))^2 \\ &= |\bar{\nabla}_{E_i}^\perp F_t|^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} tr(g''(0)) &= 2tr_M(\bar{g}(R_N(\cdot, F_t)F_t, \cdot)) + 2div_M(F_{tt}) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\bar{g}(A(E_i, E_j), F_t))^2 + 2 \sum_{i=1}^m |\bar{\nabla}_{E_i}^\perp F_t|^2 \end{aligned}$$

Onde tr_M denota o traço da aplicação restrita ao espaço tangente de M . Finalmente, obtemos

$$tr(g''(0)) = 2 \{ |\bar{g}(A(\cdot, \cdot), F_t)|^2 + |\nabla_M^\perp F_t|^2 + tr_M(\bar{g}(R_N(\cdot, F_t)F_t, \cdot)) + 2div_M(\bar{\nabla}_{F_t} F_t) \}$$

□

Substituindo as equações do lema 1.35 na equação 1.42 e utilizando o fato que a variação é normal obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{\det(g_{ij})(0)}) &= 2\{-|\bar{g}(A(\cdot, \cdot), F_t)|^2 + |\nabla_M^\perp F_t|^2 \\ &\quad + tr_M(\bar{g}(R_N(\cdot, F_t)F_t, \cdot)) + div_M(\bar{\nabla}_{F_t} F_t)\} \end{aligned}$$

Utilizando que $\bar{g}(R_N(X, Y)Z, W) = -\bar{g}(R_N(X, Y)W, Z)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{\det(g_{ij})(0)}) &= 2\{-|\bar{g}(A(\cdot, \cdot), F_t)|^2 + |\nabla_M^\perp F_t|^2 \\ &\quad - tr_M(\bar{g}(R_N(\cdot, F_t)\cdot, F_t)) + div_M(\bar{\nabla}_{F_t} F_t)\} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Já que F fixa o bordo, tem suporte compacto e M é mínima, temos

$$\begin{aligned} \int_M div_M(F_{tt}) &= \int_M div_M(F_{tt}^T) + \int_M div_M(F_{tt}^\perp) \\ &= \int_{\partial M} \bar{g}(F_{tt}^T, \nu) - \int_M \bar{g}(F_{tt}^\perp, H) = 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Temos ainda

$$\int_M |\bar{\nabla}_M^\perp F_t|^2 = - \int_M \bar{g}(F_t, \Delta_M^\perp F_t) \quad (1.51)$$

onde Δ_M^\perp é o laplaciano do fibrado normal de M ,

$$\Delta_M^\perp X = \sum_{i=1}^m (\bar{\nabla}_{E_i}^\perp \bar{\nabla}_{E_i}^\perp X) - (\bar{\nabla}_{\nabla_{E_i} E_i}^\perp X)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} [\bar{g}(A(E_i, E_j), F_t)]^2 &= \bar{g}(A(E_i, E_j), F_t) \bar{g}(A(E_i, E_j), F_t) \\ &= \bar{g}(\bar{g}(A(E_i, E_j), F_t) A(E_i, E_j), F_t) \end{aligned}$$

Definimos então o operador de Simons,

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i,j=1}^m \bar{g}(A(E_i, E_j), X) A(E_i, E_j)$$

Donde obtemos

$$[\bar{g}(A(E_i, E_j), F_t)]^2 = \bar{g}(\tilde{A}(F_t), F_t) \quad (1.52)$$

Definição 1.36. *Se $M \subset N$ é uma subvariedade definimos o operador de estabilidade (ou operador de Jacobi) de M , $L : \Gamma(TN) \rightarrow \Gamma(TN)$ por*

$$LX = -\Delta_M^\perp X - tr_M[R_N(\cdot, X)\cdot] - \tilde{A}(X) \quad (1.53)$$

Um campo X para o qual se tem $LX = 0$ é dito campo de Jacobi de M .

Estamos agora em posição de enunciar o resultado principal dessa seção

Teorema 1.37. *(Fórmula da segunda variação)*

Seja $M \subset N$ uma subvariedade mínima. Então para toda F variação normal de M com suporte compacto e que fixa o bordo vale,

$$V''(0) = \int_M \bar{g}(LF_t, F_t) \quad (1.54)$$

Demonstração. Basta combinar a equação 1.42 com as equações 1.50, 1.51, 1.52, 1.53. \square

O teorema acima motiva a seguinte definição:

Definição 1.38. *Uma subvariedade mínima $M \subset N$ é dita estável se para toda variação normal F com suporte compacto em M e que fixa o bordo tem-se*

$$\int_M \bar{g}(LF_t, F_t) \geq 0 \quad (1.55)$$

Veremos nos capítulos seguintes que esta desigualdade possui consequências importantes quando se assume uma condição sobre a curvatura do espaço ambiente.

Deste ponto em diante, iremos assumir que $M^n \subset N^{n+1}$ é uma subvariedade mínima compacta⁷ com fibrado normal trivial, e N é orientável. Nesta situação, podemos identificar campos normais a M com funções, bastando para isto fazer uma escolha de uma direção normal positiva, isto é, um campo vetorial $\nu \in \Gamma(TN)$ tal que $\nu(x) \in T_x M^\perp$ para cada $x \in M$, e $|\nu(x)| = 1 \forall x \in M$. Identificamos então um campo X normal a M com a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_X(p) = \bar{g}(X(p), N(p))$$

Deste modo, variações normais de M com suporte compacto induzem funções com suporte compacto em M , e variações que fixam o bordo induzem funções que se anulam no bordo.

Faz sentido então considerar o operador $L : C_0^\infty(M) \rightarrow C_0^\infty(M)$ definido por

$$L\eta = -\Delta_M \eta - |A|^2 \eta - Ric_N(\nu, \nu)\eta \quad (1.56)$$

Note que este operador é uniformemente elíptico, deste modo consideramos a sua forma bilinear associada $I : H_0^1(M) \times H_0^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I(u, v) = \int_M g(\nabla_M u, \nabla_M v) - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))uv \, dx \quad (1.57)$$

Note que I é uma forma autoadjunta e portanto sua forma quadrática associada $Q(v) = I(v, v)$ tem espectro $\Sigma \subset \mathbb{R}$. Ademais, Σ consiste de uma sequência estritamente crescente de autovalores reais $\{\lambda\}_n$ tais que $\lambda_n \rightarrow +\infty$, e a dimensão de cada autoespaço é finita.

⁷Possivelmente com bordo.

Definição 1.39. *O índice de Morse (ou simplesmente índice) uma subvariedade mínima compacta M é definido como a soma das dimensões dos autoespaços correspondentes aos autovalores negativos de I . Se 0 é um autovalor de Q , definimos a nulidade como a dimensão do autoespaço correspondente, caso contrário dizemos que a nulidade é 0 .*

Observação 1.40. *A nulidade é o número de campos de Jacobi linearmente independentes de M que se anulam em ∂M .*

Note que se $M^n \subset N^{n+1}$ é uma imersão mínima estável com fibrado normal trivial então a forma bilinear I é positiva semidefinida, isto é, $I(v, v) \geq 0$. Deste modo, uma imersão mínima estável tem índice de Morse nulo, pois se λ fosse um autovalor negativo λ e u uma autofunção teríamos

$$I(u, u) = \int_M Lu \cdot u \, dx = \lambda \int_M u^2 \, dx < 0$$

O que contraria a hipótese de estabilidade. Finalizamos este capítulo com uma versão quantitativa desta observação.

Lema 1.41. *(A desigualdade de estabilidade) Seja $M \subset N$ uma hipersuperfície mínima e estável com fibrado normal trivial. Então para cada função $\eta \in H_0^1(M)$ tem-se*

$$\int_M (\inf_M Ric_N + |A|^2) \eta^2 \leq \int_M |\nabla_M \eta|^2 \quad (1.58)$$

Demonstração. Já que M é estável,

$$\int_M \eta L \eta = - \int_M \eta (\Delta_M \eta + |A|^2 \eta + Ric_N(\nu, \nu) \eta) \geq 0$$

$$\int_M \eta \Delta_M \eta + |A|^2 \eta^2 + Ric_N(\nu, \nu) \eta^2 \leq 0$$

$$\int_M (Ric_N(\nu, \nu) + |A|^2) \eta^2 \leq \int_M |\nabla_M \eta|^2$$

O resultado segue tomando o infimo sobre o tensor de Ricci. \square

Veremos nos capítulos seguintes que esta desigualdade possui consequências importantes quando se assume uma condição sobre a curvatura do espaço ambiente.

Capítulo 2

O problema de Bernstein Clássico

No capítulo 1, vimos que até a descoberta da fórmula de representação por Weierstrass em 1866, havia uma pequena quantidade de exemplos de superfícies mínimas completas, dentre as quais apenas o plano era um gráfico. E embora a fórmula de representação de Weierstrass tenha ajudado a encontrar um grande número de exemplos de superfícies mínimas completas desde então, nenhuma delas é um gráfico e isto não é coincidência. Em 1915 Bernstein provou em seu artigo [12] o seguinte teorema

Teorema 2.1. *(Bernstein) Se $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 que satisfaz a equação da superfície mínima 1.4 em todo o plano, então $u(x, y) = ax + by + c$, para constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Há uma grande quantidade de provas do teorema de Bernstein clássico, dentre as quais destacam-se quatro: a prova original de Bernstein, que pode ser encontrada em [12] ou [13], com algumas modificações¹ devidas a E. Hopf [36]; a prova dada por J. Nitsche em [48], baseada em um teorema de K. Jörgens [38] sobre soluções da equação de Monge-Ampère; a prova dada por L. Simon em [55]; a prova de R. Osserman em [52]. Veremos ainda uma outra prova do teorema clássico nos capítulos seguintes, esta dada por W. Fleming.

A prova original de Bernstein decorre de um teorema geométrico para superfícies de curvatura não positiva. Essencialmente, o resultado consiste em provar um princípio do máximo para equações do tipo Monge-Ampère. Com uma pequena modificação na

¹Na prova original, havia um erro de natureza topológica na prova deste teorema. Este erro foi corrigido independentemente por E. Hopf [36] e K. J. Mickle [47].

equação da superfície mínima, conseguimos transformá-la em uma equação de Monge-Ampère, e com ajuda de técnicas de variáveis complexas, o resultado de Bernstein é obtido. O leitor pode consultar as referências [13], [36] e [47], que juntas formam um relato completo da prova original deste teorema.

A prova de Nitsche impressiona pela simplicidade. Ela baseia-se essencialmente em uma mudança de coordenadas adequada de \mathbb{R}^2 , introduzida por H. Lewy, que associa a cada solução da superfície mínima uma solução da equação de Monge-Ampère. Utilizando o teorema de Jörgens para soluções inteiras desta última equação, prova-se o teorema de Bernstein. A prova de Simon tem a vantagem de não depender de métodos de variáveis complexas, e sugerir generalizações para outras dimensões, enquanto a prova de Osserman trata o problema de maneira mais geométrica, através de uma análise da aplicação de Gauss de uma superfície mínima. De fato, o resultado de Osserman responde a uma questão mais geral, a Conjectura de Niremberg, que veremos não seção 2.3. Apresentaremos estas últimas 3 provas a seguir.

2.1 A solução de J. Nitsche

Nesta seção apresentaremos a prova de Nitsche para o teorema de Bernstein. Começaremos reescrevendo a equação 1.4,

$$\operatorname{div} \left(\frac{p}{W}, \frac{q}{W} \right) = 0$$

Onde $W(x, y) = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$, $p = u_x$ e $q = u_y$. Temos então que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{W} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Denotando as derivadas de segunda ordem de u por $u_{xx} = r$, $u_{xy} = u_{yx} = s$ e $u_{yy} = t$ esta equação fica

$$\frac{r}{W} - \frac{p(pr + qs)}{W^3} + \frac{t}{W} - \frac{q(ps + qt)}{W^3} = 0$$

$$\frac{1}{W^3}(rW^2 - p^2r - pqs + tW^2 - q^2t - pqs) = 0$$

$$(1 + p^2)r + (1 + q^2)t - 2pqs = 0 \quad (2.2)$$

Esta é uma condição necessária e suficiente para que o gráfico de u seja uma superfície mínima. Examinaremos agora a equação 2.2 sob um outro ponto de vista.

Seja

$$N = (a, b, c) = \left(-\frac{p}{W}, -\frac{q}{W}, \frac{1}{W} \right)$$

o vetor normal ao gráfico no ponto $(x, y, u(x, y))$, e $dX = (dx, dy, pdx + qdy)$ uma 1-forma diferencial vetorial, e denote por conveniência $dz = pdx + qdy$. Considere a 1-forma diferencial vetorial $N \wedge dX = (\xi, \eta, \zeta)$, definida por

$$\xi = bdz - cdy$$

$$\eta = cdx - adz$$

$$\zeta = ady - bdx$$

Substituindo os valores de a, b e c , obtemos

$$\xi = -\frac{pq}{W}dx - \frac{(1 + q^2)}{W}dy \quad (2.3)$$

$$\eta = \frac{(1 + p^2)}{W}dx + \frac{pq}{W}dy \quad (2.4)$$

$$\zeta = \frac{q}{W}dx - \frac{p}{W}dy \quad (2.5)$$

Proposição 2.2. *As 1-formas ξ , η e ζ definidas acima são fechadas.*

Demonstração. Vejamos primeiramente a 1-forma ζ . Da equação 2.1, temos.

$$d\zeta = -\left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{W} \right) \right\} dx \wedge dy = 0$$

Portanto, ζ é fechada.

Passemos agora à forma ξ . Temos,

$$\begin{aligned} d\xi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(1 + q^2)}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{W} \right) \right\} dx \wedge dy \\ &= \left\{ \left[\frac{2qs}{W} - \frac{(1 + q^2)}{W^3}(pr + qs) \right] - \left[\frac{(sq + pt)}{W} - \frac{pq}{W^3}(ps + qt) \right] \right\} dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\xi &= \frac{1}{W^3} \{2W^2qs - (1+q^2)(pr+qs) - W^2(sq+pt) + pq(ps+qt)\} dx \wedge dy \\
&= \frac{1}{W^3} \{W^2qs - (1+q^2)qs - W^2pt - (1+q^2)pr + pq(ps+qt)\} dx \wedge dy \\
&= \frac{1}{W^3} \{p^2qs - W^2pt - (1+q^2)pr + pq(ps+qt)\} dx \wedge dy \\
&= \frac{p}{W^3} \{pqs - [(1+p^2)t + q^2t] - (1+q^2)r + pqs + q^2t\} dx \wedge dy \\
&= -\frac{p}{W^3} \{(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs\} dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

Já que u satisfaz a equação 2.2. Analogamente, concluimos que

$$d\eta = -\frac{q}{W^3} \{(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs\} dx \wedge dy = 0$$

□

Deste modo, concluimos que se o domínio Ω de u é simplesmente conexo, $N \wedge dX$ é exata. Em particular, existem funções

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que $\xi = dF$ e $\eta = dG$. Definimos a 1-forma $\theta = Fdx + Gdy$ em Ω , que também é fechada. Com efeito,

$$d\theta = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$d\theta = \left(-\frac{pq}{W} + \frac{pq}{W} \right) dx \wedge dy = 0$$

Como Ω é simplesmente conexo, θ é exata, donde existe uma função $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta = dv$. Deste modo, v satisfaz $v_x = F$, $v_y = G$, donde temos

$$v_{xx} = F_x = \frac{(1+p^2)}{W} \tag{2.6}$$

$$v_{xy} = F_y = \frac{pq}{W} \tag{2.7}$$

$$v_{yy} = G_y = \frac{(1+q^2)}{W} \tag{2.8}$$

Ademais, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3. *A função v definida acima satisfaz a equação de Monge-Ampère*

$$\det(D^2v) = 1$$

Demonstração. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2 &= \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{W} - \frac{(pq)^2}{W^2} \\ &= \frac{1+p^2+q^2+(pq)^2}{W^2} - \frac{(pq)^2}{W^2} \\ &= \frac{1+p^2+q^2}{W^2} = 1 \end{aligned}$$

□

Deste modo, se temos uma solução da equação da superfície mínima definida em todo o plano \mathbb{R}^2 , temos a ela associada uma solução da equação de Monge-Ampère, também definida em todo o \mathbb{R}^2 . Já que a curvatura Gaussiana do gráfico de v é dada por

$$K = \frac{\det(D^2v)}{(1+|\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+|\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Concluimos que $Graph_v$ é uma superfície completa de curvatura estritamente positiva e limitada por cima, $K \leq 1$. O próximo teorema, devido a K. Jörgens [38], classifica os gráficos com esta propriedade.

Teorema 2.4. *(Jörgens) Suponha que $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é solução da equação de Monge-Ampère,*

$$\det(D^2v) = v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2 = 1 \text{ em } \mathbb{R}^2 \tag{2.9}$$

então $v(x, y)$ é um polinômio quadrático.

Demonstração. A equação 2.9 implica que $v_{xx}v_{yy} = v_{xy}^2 + 1 \geq 0$, e portanto v_{xx} e v_{yy} têm o mesmo sinal. Assumiremos então que v é uma função convexa. Aplicando a desigualdade das médias, temos $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} \geq 2\sqrt{v_{xx}v_{yy}} \geq 2$.

Considere a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\phi(x, y) = (\mu(x, y), \nu(x, y))$$

Onde

$$\mu(x, y) = x + v_x(x, y) \quad e \quad \nu(x, y) = y + v_y(x, y)$$

Veremos que ϕ é um difeomorfismo de \mathbb{R}^2 . Note primeiramente que o determinante da mudança de coordenadas é

$$\det \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 1 + v_{xx} & v_{xy} \\ v_{xy} & 1 + v_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(x, y)} = (1 + v_{xx})(1 + v_{yy}) - (v_{xy})^2 = 2 + \Delta v \geq 4$$

Pelo teorema da função inversa, concluímos que ϕ é localmente invertível em torno de cada ponto de \mathbb{R}^2 . É suficiente então mostrar que ϕ é injetiva. Para isto, vamos estimar a diferença

$$|\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)|^2$$

Note que ϕ se escreve

$$\phi(x, y) = (x, y) + \nabla v(x, y)$$

Assim,

$$|\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)|^2 = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \nabla v(x_1, y_1) - \nabla v(x_2, y_2)|^2$$

Denotando por $S = \nabla v(x_1, y_1) - \nabla v(x_2, y_2)$, temos

$$|\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)|^2 = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|^2 + 2 \langle (x_1, y_1) - (x_2, y_2), S \rangle + |S|^2$$

Note que pelo teorema de Taylor, o fato de D^2v ser positiva definida implica que v é fortemente convexa, isto é,

$$\langle (x_1, y_1) - (x_2, y_2), S \rangle \geq 0$$

Assim,

$$|\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)|^2 \geq |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|^2$$

Donde ϕ é injetiva, e portanto, um difeomorfismo C^1 de \mathbb{R}^2 em si mesmo.

Denote por ψ a inversa de ϕ ,

$$\psi(\mu, \nu) = (x(\mu, \nu), y(\mu, \nu))$$

Cuja matrix jacobiana é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\mu, \nu)} = \left[\frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\mu, \nu)} = \frac{1}{2 + \Delta v} \begin{pmatrix} 1 + v_{yy} & -v_{xy} \\ -v_{xy} & 1 + v_{xx} \end{pmatrix}$$

Introduzimos a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$h(\mu, \nu) = (x - v_x(x, y), -y + v_y(x, y))$$

onde $(x, y) = \psi(\mu, \nu)$. A função h , vista como aplicação de \mathbb{C} , com coordenadas $z = \mu + i\nu$, é holomorfa. Com efeito,

$$\frac{\partial h}{\partial(\mu, \nu)} = \frac{\partial h}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mu, \nu)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial(\mu, \nu)} = \frac{1}{2 + \Delta v} \begin{pmatrix} 1 - v_{xx} & -v_{xy} \\ v_{xy} & -1 + v_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + v_{yy} & -v_{xy} \\ -v_{xy} & 1 + v_{xx} \end{pmatrix}$$

Já que v satisfaz Monge-Ampère, temos

$$\frac{\partial h}{\partial(\mu, \nu)} = \frac{1}{2 + \Delta v} \begin{pmatrix} v_{yy} - v_{xx} & -2v_{xy} \\ 2v_{xy} & v_{yy} - v_{xx} \end{pmatrix}$$

Portanto, $h = h_1 + ih_2$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial h_1}{\partial \mu} = \frac{\partial h_2}{\partial \nu} = \frac{v_{yy} - v_{xx}}{2 + \Delta v}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \nu} = -\frac{\partial h_2}{\partial \mu} = -2v_{xy}$$

O que mostra que h é holomorfa. Ora, mas isto implica que sua derivada complexa $h'(z)$ também é holomorfa. Da expressão de $h'(z)$,

$$h'(z) = \frac{\partial h_1}{\partial \mu} + i \frac{\partial h_2}{\partial \mu} = \frac{\partial h_2}{\partial \nu} - i \frac{\partial h_1}{\partial \nu}$$

Temos

$$|h'(z)|^2 = \left(\frac{\partial h_1}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial \mu}\right)^2$$

$$|h'(z)|^2 = \frac{\partial h_1}{\partial \mu} \frac{\partial h_2}{\partial \nu} - \frac{\partial h_2}{\partial \mu} \frac{\partial h_1}{\partial \nu} = \det \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(\mu, \nu)}$$

$$|h'(z)|^2 = \frac{(\Delta v)^2 - 4}{(2 + \Delta v)^2} = \frac{\Delta v - 2}{\Delta v + 2} \leq 1$$

Portanto, $h'(z)$ é uma função inteira e limitada, que pelo teorema de Liouville deve ser constante. Assim,

$$|h'(z)| = C = \frac{\Delta v - 2}{\Delta v + 2}$$

implica que Δv é constante. Além disso, de $\frac{\partial h_1}{\partial \mu}$ constante temos $v_{yy} - v_{xx}$ constante, o que combinado a Δv constante implica que cada uma das derivadas v_{xx} e v_{yy} são constantes. Por fim, de $\frac{\partial h_2}{\partial \mu}$ constante, obtemos v_{xy} constante, o que mostra que a hessiana de v é constante e portanto v é um polinômio quadrático.

□

Concluimos esta seção com uma prova do Teorema de Bernstein

Demonstração. (do Teorema de Bernstein) Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação da superfície mínima 1.4 em \mathbb{R}^2 , e considere a solução inteira da equação de Monge-Ampère $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ associada a u . Pelo Teorema de Jörgens D^2v é uma matriz constante. Em particular, a partir das equações 2.6 e 2.8, temos

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = \frac{1 + p^2}{W} + \frac{1 + q^2}{W} = \frac{1}{W} + W = \text{const.}$$

$$\nabla(\Delta v) = \nabla W \cdot \left(1 - \frac{1}{W^2}\right) = \nabla W \cdot (|\nabla v|^2) = 0$$

Donde concluimos que, nos pontos em que $\nabla v \neq 0$ (ou equivalentemente $W = 1$), $\nabla W = 0$. Pela continuidade de W , ou $W \equiv 1$ em \mathbb{R}^2 , ou $W \equiv c \neq 1$ em \mathbb{R}^2 . Em todo caso, $p^2 + q^2 = \text{const.}$ Por outro lado, $v_{xx} - v_{yy} = \text{const.}$, donde $p^2 - q^2 = \text{const.}$ e portanto ambas as funções p e q são constantes. Ora, mas isto diz que $u_{xx} = p_x$, $u_{xy} = p_y$ e $u_{yy} = q_y$ se anulam em todo o \mathbb{R}^2 , portanto u é uma função linear. □

Observação 2.5. *A hipótese de u estar definida em um domínio bidimensional é essencial nesta prova. Com efeito, utilizamos a estrutura da equação da superfície mínima em \mathbb{R}^3 de maneira substancial, e além disso, no teorema de Jörgens utilizamos o fato que uma solução da equação de Monge-Ampère em dimensão 2 é concava ou convexa, o que não é verdade em dimensão mais alta.*

2.2 A estimativa de curvatura de E. Heinz e a prova de L. Simon

A prova do teorema de Bernstein apresentada nesta seção é devida a L. Simon, [55], e se baseia numa estimativa de curvatura que foi provada por E. Heinz, em [35]. Tal método não depende de técnicas de variáveis complexas², e ilustra uma maneira de generalizar este resultado em dimensões superiores, e para imersões em espaços mais gerais que o espaço euclidiano. Veremos que estas técnicas serão úteis nos capítulos seguintes.

Lema 2.6. *(Heinz) Sejam $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação da superfície mínima em Ω , e f uma função não negativa e Lipschitz com suporte contido em $\Omega \times \mathbb{R}$. Existe uma constante C que depende somente de u para a qual se tem*

$$\int_{Graph_u} |A|^2 f^2 \leq C \int_{Graph_u} |\nabla_{Graph_u} f|^2 \quad (2.10)$$

Demonstração. Denote por ω a 2-forma de volume de $M = Graph_u$, e η a 2-forma de volume da esfera \mathbb{S}^2 . Observe que a aplicação normal de Gauss, N , de $Graph_u$ tem imagem contida num hemisfério. Podemos então tomar um ponto $p \in \mathbb{S}^2$ tal que $p \notin N(Graph_u)$. Como $\mathbb{S}^2 - \{p\}$ é contrátil, e η é fechada, pelo Lema de Poincaré existe uma 1-forma α definida em $\mathbb{S}^2 - \{p\}$, tal que $d\alpha = \eta$. Note ainda que a imagem da aplicação de Gauss está compactamente contida em $\mathbb{S}^2 - \{p\}$, de modo que a 1-forma α é uniformemente limitada por uma constante C_α em $N(Graph_u)$. Como u satisfaz a equação da superfície mínima temos,

²A prova original de Heinz se baseia em técnicas de variáveis complexas para provar esta estimativa. Não obstante, o leitor pode ver aqui que estas técnicas não são necessárias.

$$\begin{aligned}
|A|^2\omega &= -2K\omega = -2\det(dN)\omega = -2(N^*\eta) \\
&= -2(N^*d\alpha) = -2d(N^*\alpha)
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$|N^*\alpha| \leq C_\alpha|dN| = C_\alpha|A|$$

Denotando por $M = Graph_u$, temos pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
\int_M f^2|A|^2\omega &= -2 \int_M f^2 N^*\eta \\
&= -2 \int_M f^2 d(N^*\alpha) \\
&= -2 \left(\int_M d(f^2 N^*\alpha) - \int_M d(f^2) \wedge N^*\alpha \right) \\
&= -2 \left(\int_{\partial M} f^2 N^*\alpha - \int_M 2f df \wedge N^*\alpha \right)
\end{aligned}$$

Donde

$$\int_M f^2|A|^2\omega \leq 4C_\alpha \int_M f|\nabla_M f||A|\omega$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\int_M f^2|A|^2\omega \leq 4C_\alpha \left(\int_M f^2|A|^2\omega \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_M |\nabla_M f|^2\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Elevando ao quadrado e dividindo por $\int_M f^2|A|^2\omega$ obtemos o resultado. \square

Observação 2.7. *Este resultado pode ser estendido a qualquer superfície mínima conexa M cuja imagem da aplicação de Gauss omite a vizinhança de um ponto de S^2 . De fato, para uma tal superfície a imagem da aplicação de Gauss está contida num aberto U relativamente compacto de $S^2 - \{p\}$ e assim como no lema, existe uma 1-forma α definida em S^2 com $d\alpha = \eta$ que tem norma uniformemente limitada em U , portanto o argumento anterior aplica-se *ipsis litteris*. Omitimos esta prova aqui por que a apresentaremos, com um argumento diferente, na próxima seção.*

Proposição 2.8. *Se $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação da superfície mínima, $k > 1$ e $\Omega \supset D_{kR}$, então*

$$\int_{B_{\sqrt{k}R} \cap Graph_u} |A|^2 \leq \frac{C}{\log k} \quad (2.11)$$

Demonstração. Consideramos para cada $R > 0$ a função $\eta_R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq \sqrt{R} \\ 2 - 2 \frac{\log|x|}{\log R}, & \text{se } \sqrt{R} < |x| \leq R \\ 0, & \text{se } |x| > R \end{cases}$$

Se $\sqrt{R} < |x| \leq R$ temos

$$\nabla \eta_R(x) = -\frac{2x}{|x|^2 \log R}$$

$$|\nabla \eta_R(x)|^2 = \frac{4}{|x|^2 (\log R)^2}$$

Usando as η_R como funções teste na desigualdade 2.10 concluímos que

$$\int_{B_{\sqrt{R}} \cap Graph_u} |A|^2 \leq \int_{(B_R \setminus B_{\sqrt{R}}) \cap Graph_u} \frac{4}{|x|^2 (\log R)^2}$$

Para calcular a integral da direita, iremos dividir o conjunto $(B_R \setminus B_{\sqrt{R}}) \cap Graph_u$ em pedaços de acordo com a inclinação da função η_R . A ideia é tomar pedaços menores onde a inclinação é maior, e pedaços maiores onde a inclinação é menor, de modo que as integrais em cada pedaço se equilibrem. Tomaremos R tal que $\log \sqrt{R}$ seja um número inteiro positivo. Temos então

$$\begin{aligned} \int_{B_{\sqrt{R}} \cap Graph_u} |A|^2 &\leq \sum_{i=\frac{\log R}{2}}^{\log R} \frac{4}{(\log R)^2} \int_{(B_{e^{i+1}} \setminus B_{e^i}) \cap Graph_u} \frac{1}{|x|^2} \\ &\leq \sum_{i=\frac{\log R}{2}}^{\log R} \frac{4}{(\log R)^2} \int_{(B_{e^{i+1}} \setminus B_{e^i}) \cap Graph_u} \frac{1}{e^{2i}} \\ &\leq \sum_{i=\frac{\log R}{2}}^{\log R} \frac{4}{(\log R)^2 e^{2i}} \text{Vol}((B_{e^{i+1}} \setminus B_{e^i}) \cap Graph_u) \\ &\leq \sum_{i=\frac{\log R}{2}}^{\log R} \frac{4}{(\log R)^2 e^{2i}} \text{Vol}(B_{e^{i+1}} \cap Graph_u) \end{aligned}$$

Da estimativa 1.13 temos

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{\sqrt{R}} \cap Graph_u} |A|^2 &\leq \sum_{i=\frac{\log R}{2}}^{\log R} \frac{4}{(\log R)^2 e^{2i}} Vol_2(\mathbb{S}^2) e^{2i+2} \\
 &\leq \sum_{i=\frac{\log R}{2}}^{\log R} \frac{4}{(\log R)^2} Vol_2(\mathbb{S}^2) e^2 \\
 &\leq \frac{4}{(\log R)^2} Vol_2(\mathbb{S}^2) e^2 \frac{\log R}{2} \\
 &\leq \frac{C}{\log R}
 \end{aligned}$$

Onde $C = 2e^2 Vol_2(\mathbb{S}^2)$.

□

Como corolário, obtemos uma nova prova do teorema de Bernstein:

Demonstração. (do teorema de Bernstein) Pela proposição 2.8 para todo $R > 1$ temos

$$\int_{B_{\sqrt{R}} \cap Graph_u} |A|^2 \leq \frac{C}{\log R}$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, concluímos que $|A|^2 \equiv 0$, donde $Graph_u$ é um plano.

□

2.3 A geometria da aplicação de Gauss e a Conjectura de Niremberg

De acordo com a observação 2.7, podemos reescrever o teorema de Bernstein provado na seção 2.2 em termos da aplicação normal da superfície da seguinte forma

Teorema 2.9. (Bernstein) *Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima completa cuja imagem da aplicação normal de Gauss está contida em um hemisfério, então M é um plano.*

Foi conjecturado por Niremberg que este teorema poderia ser generalizado da seguinte maneira:

Conjectura 2.10. (Niremberg) *As normais de uma superfície mínima completa em \mathbb{R}^3 que não é um plano são densas em S^2 .*

Este teorema foi provado por Osserman em 1959, [51], e generalizado para superfícies mínimas bidimensionais em \mathbb{R}^n por Chern e Osserman em 1967, [17]. Aqui, apresentaremos a prova em \mathbb{R}^3 .

Lema 2.11. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima simplesmente conexa conformalmente equivalente ao plano complexo \mathbb{C} , isto é, uma superfície com representação de Weierstrass $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então ou M é um plano, ou a aplicação normal de Gauss de M omite no máximo 2 pontos de \mathbb{S}^2 .*

Demonstração. Caso M não seja um plano, podemos definir a função g da representação de Weierstrass, e g é então uma função meromorfa definida em todo o plano complexo. Pelo Pequeno Teorema de Picard, ou g omite no máximo dois pontos de \mathbb{S}^2 , ou g é constante. Pela proposição 1.31, isto implica que ou N omite no máximo dois pontos, ou N é constante, e neste último caso M é um plano. \square

Lema 2.12. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa que tem no máximo uma quantidade finita de zeros. Então existe um caminho divergente $C \subset D$ tal que*

$$\int_C |f| |dz| < \infty$$

Demonstração. Suponha inicialmente que f nunca se anula em D . Definimos então a função $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_0^z f(\zeta) d\zeta$$

Assim, F é um difeomorfismo conforme entre D e $F(D)$. Parametrizando $F(D)$ pelo teorema de uniformização, podemos obter uma função $G : D \rightarrow D$ inversa de F tal que $G(0) = 0$ (observe que G não pode estar definida em todo o plano complexo, pois neste caso, seria uma função inteira e limitada, portanto constante pelo teorema de Liouville). Podemos ainda estender analiticamente G a um disco $\{w : |w| < R\}$ de raio máximo $R < \infty$. Ora, mas isto quer dizer que existe um ponto w_0 , $|w_0| = R$, tal que G não pode ser estendida a uma vizinhança de w_0 . Seja L o segmento de reta tw_0 , $0 \leq t < 1$. Se $C = G(L)$ então C é um caminho divergente, caso contrário existiria uma sequência de pontos $x_n = G(t_n w_0)$, com $t_n \rightarrow 1$ sobre o caminho C que convergiria para um ponto x_0 em D . Mas isto implicaria $F(z_0) = w_0$, e já que $F'(z_0) = f(z_0) \neq 0$, a função G se estenderia a uma vizinhança de w_0 .

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \int_C |f(z)| dz &= \int_0^1 |f(G(tw_0))| |dz(G(tw_0))| dt \\
 &= \int_0^1 |F'(G(tw_0))| |G'(tw_0)| |w_0| dt \\
 &= \int_0^1 |(F \circ G)'(tw_0)| R dt \\
 &= \int_0^1 R dt = R \leq \infty
 \end{aligned}$$

Para o caso em que f possui um conjunto finito de zeros $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, cujas ordens são, respectivamente, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, definimos a função

$$\tilde{f}(z) = f(z) \prod_{i=1}^k \left(\frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right)^{\alpha_k}$$

que nunca se anula no disco. Pelo argumento acima, existe um caminho divergente de comprimento finito para \tilde{f} . Note que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right|^2 &= \left(\frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right) \left(\frac{1 - z_k \bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_k} \right) \\
 &= \frac{1 - z_k \bar{z} - \bar{z}_k z + |z_k|^2 |z|^2}{|z|^2 - z \bar{z}_k - z_k \bar{z} + |z_k|^2}
 \end{aligned}$$

Note ainda que para $|z| < 1$

$$\left| \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right|^2 > 1$$

Com efeito, se $\left| \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right|^2 \leq 1$ teríamos

$$\begin{aligned}
 1 - z_k \bar{z} - \bar{z}_k z + |z_k|^2 |z|^2 &\leq |z|^2 - z \bar{z}_k - z_k \bar{z} + |z_k|^2 \\
 1 - |z|^2 &\leq |z_k|^2 - |z_k|^2 |z|^2 \\
 (1 - |z|^2)(1 - |z_k|^2) &\leq 0
 \end{aligned}$$

Como $|z_k| < 1$, deveríamos ter $|z| \geq 1$, contradição.

Deste modo, concluímos que $|f| < |\tilde{f}|$ em D , e o resultado segue. \square

Teorema 2.13. (Osserman) *Se $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima completa que não é um plano, então a imagem da aplicação de Gauss de M é densa em \mathbb{S}^2 .*

Demonstração. Consideramos o recobrimento universal de M , $p : \widetilde{M} \rightarrow M$. Já que M é completa, seu recobrimento universal também é. Ademais, a composta $X \circ p$ também é uma imersão mínima, já que a aplicação de recobrimento é localmente uma isometria. Temos então que \widetilde{M} é mínima e simplesmente conexa, e pelo teorema 1.27, existe uma aplicação conforme $\widehat{X} : \Omega \rightarrow \widetilde{M}$, onde Ω é o disco unitário D ou o plano complexo \mathbb{C} .

Suponha que Ω é o disco unitário. Já que g não possui pólos, da definição de f , equação 1.38, vemos que f não possui zeros. Em particular, pelo lema 2.12, existe uma curva divergente C de comprimento finito em \widetilde{M} , o que contraria a hipótese de \widetilde{M} ser completa. Se $\Omega = \mathbb{C}$, então pelo lema 2.11 ou a imagem da aplicação de Gauss de \widetilde{M} omite no máximo 2 pontos de \mathbb{S}^2 ou \widetilde{M} é um plano. No primeiro caso, a aplicação de Gauss de \widetilde{M} é densa em \mathbb{S}^2 , e assim é a aplicação de Gauss da projeção M . No segundo caso, a segunda forma fundamental é nula, donde a aplicação normal de Gauss de \widetilde{M} é constante, e por conseguinte, a aplicação normal de Gauss de M é constante, e portanto M é um plano. \square

A título de informação, Osserman provou em [52] que se as normais de uma superfície mínima omitem a vizinhança de uma direção $v \in \mathbb{S}^2$ então vale uma estimativa de curvatura pontual, análoga à estimativa do Lema de Heinz, que possibilita ver este resultado sob um outro ângulo. Referimos o leitor a [54] para uma prova simples deste resultado. Posteriormente, Chern e Osserman generalizaram esta estimativa para imersões mínimas M^2 em \mathbb{R}^n cuja aplicação de Gauss generalizada omite uma vizinhança de uma direção. Para a prova, consulte [17].

Capítulo 3

Conjuntos de perímetro finito

Numa tentativa de resolver o problema de Plateau em um contexto mais amplo do que as soluções que foram dadas por J. Douglas, [25], e T. Radó, [56], em meados do século XX surgiram novos métodos para tratar o problema, todas elas baseadas em definições fracas de superfícies mínimas. Federer e Fleming definiram em [29] uma superfície mínima como uma corrente, um funcional linear limitado agindo no espaço das k -formas definidas sobre as superfícies. Almgren e Allard posteriormente introduziram o conceito de varifolds. Os trabalhos de Almgren e Allard podem ser encontrados em [7], [8] e [4]. Uma introdução mais moderna ao estudo de varifolds, orientada para o contexto de superfícies mínimas, pode ser encontrada em [19].

Aqui, adotaremos o ponto de vista introduzido por R. Cacciopoli e E. De Giorgi, no qual uma hipersuperfície é vista como a fronteira de um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , pois esta formulação foi a que impulsionou a solução do problema de Bernstein na década de 60. Observamos que embora as idéias de Cacciopoli e De Giorgi tenham sido fundamentais na solução do problema de Bernstein, sua formulação só serve para hipersuperfícies, sendo ambos os conceitos de correntes e varifolds mais adequados para tratar o problema de Plateau em codimensão arbitrária.

Neste sentido, veremos que a existência de uma solução para o problema de Bernstein em \mathbb{R}^n é equivalente a existência de um cone minimizante singular em \mathbb{R}^n , seguindo os trabalhos de Fleming e Di Giorgi.

3.1 Conjuntos de perímetro finito e funções de variação limitada

Nesta seção listaremos os resultados que iremos utilizar sobre funções de variação limitada. Os mais importantes deles serão provados, enquanto os resultados auxiliares terão suas referências indicadas.

Definição 3.1. *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n e considere uma função $f \in L^1(\Omega)$. Definimos a variação de f em Ω por*

$$\int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} g \, dx; g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ e } |g(x)| \leq 1 \, x \in \Omega \right\} \quad (3.1)$$

Exemplo 3.2. *Seja $f \in W^{1,1}(\Omega)$. Calcularemos a variação de f . Denotando por $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a derivada fraca de f na direção x_k , temos para um campo $g = (g^1, g^2, \dots, g^n) \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$*

$$\int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} g \, dx = - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g^k \, dx$$

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| < \infty \quad (3.2)$$

Onde ∇f denota o gradiente de f no sentido fraco.

Definição 3.3. *Uma função $f \in L^1(\Omega)$ é dita de variação limitada se $\int_{\Omega} |Df| < \infty$. Denotamos o espaço das funções de variação limitada em Ω por $BV(\Omega)$.¹*

Como vimos no exemplo 3.2, $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$. O próximo exemplo mostra que esta inclusão é estrita.

Exemplo 3.4. *Considere um aberto U de \mathbb{R}^n com fronteira C^2 , e um aberto limitado Ω . A restrição da função característica de U a Ω , $\chi_U|_{\Omega}$ (que de agora em diante será denotada somente por χ_U) está em $L^1(\Omega)$, já que*

$$\int_{\Omega} \chi_U = |U \cap \Omega| < \infty$$

¹Facilmente se mostra que $BV(\Omega)$ é um espaço vetorial com as operações naturais de soma e produto pontuais.

Mostraremos que χ_U não está em $W^{1,1}(\Omega)$. Como ∂U é uma hipersuperfície compacta de classe C^2 , existe uma vizinhança tubular

$$V_\delta(\partial U) = \{p + \delta v \in \mathbb{R}^n : p \in \partial U \text{ e } v \in (T_p \partial U)^\perp, |v| \leq 1\} \quad (3.3)$$

e uma projeção natural $\pi : V_\delta(\partial U) \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada ponto de $V_\delta(\partial U)$ o ponto de menor distância sobre ∂U , $p + v \mapsto p$.

Definimos funções $g_n : V_\delta(\partial U) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma. A cada ponto q de $V_\delta(\partial U)$ associamos a sua projeção $\pi(q) = p$ sobre ∂U . Temos então $q = p + v$, onde $|v| < 1$. Consideramos então uma função suave² $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que vale 1 no intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, decresce de maneira C^∞ em $[-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ e vale 0 fora do intervalo $[-1, 1]$. Definimos então $g_n(q) = \eta(n|v|)$. Tais funções estão em $C_0^\infty(\Omega)$. Observe ainda que $g_n(p) = 1$, $\forall p \in \partial U$, e $g_n(q) \rightarrow 0$, $\forall q \in \Omega \setminus \partial U$.

Suponha por contradição que $\chi_U \in W^{1,1}(\Omega)$. Existe então a derivada fraca na direção x_k , $f_k \in L^1(\Omega)$, isto é, para cada $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_U \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} dx &= - \int_{\Omega} f_k \cdot g dx \\ \int_U \frac{\partial g}{\partial x_k} dx &= - \int_{\Omega} f_k \cdot g dx \\ \int_U \operatorname{div}(0, \dots, \underbrace{g}_k, 0, \dots, 0) dx &= - \int_{\Omega} f_k \cdot g dx \end{aligned}$$

$$\int_{\partial U} g \cdot \nu_k d\mathcal{H}_{n-1} = - \int_{\Omega} f_k \cdot g dx \quad (3.4)$$

Onde $\nu(p) = (\nu_1(p), \dots, \nu_n(p))$ é o vetor normal a $T_p(\partial U)$ unitário, que induz orientação em ∂U . Se substituirmos na equação 3.4 as funções teste $\bar{g}_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por³ $\bar{g}_n(q) = \nu_k(\pi(q)) \cdot g_n(q)$ teremos

$$\int_{\partial U} (\nu_k)^2 d\mathcal{H}_{n-1} = - \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_k \cdot \bar{g}_n dx = 0 \quad (3.5)$$

Assim,

² A construção de uma tal função pode ser encontrada em [43], p. 430-432

³Note que onde π não está definida g_n é nula, de modo que esta definição faz sentido

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial U) = \sum_{k=1}^n \int_{\partial U} (\nu_k)^2 d\mathcal{H}_{n-1} = 0 \quad (3.6)$$

Um absurdo. Provaremos a seguir que χ_U está em $BV(\Omega)$.

Considere $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Pelo teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \chi_U \cdot \operatorname{div} g \, dx = \int_U \operatorname{div} g \, dx = \int_{\partial U} \langle g, \nu \rangle d\mathcal{H}_{n-1}$$

Observe que como $|\nu(x)| = 1$ para todo $x \in \partial U$, se $|g(x)| \leq 1$ tem-se

$$\int_{\partial U} \langle g, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial U \cap \Omega)$$

Donde

$$\int_{\Omega} |D\chi_U| = \sup \left\{ \int_{\Omega} \chi_U \cdot \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g(x)| \leq 1 \right\} \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial U \cap \Omega) \leq \infty$$

Portanto $\chi_U \in BV(\Omega)$. De fato, podemos dizer um pouco mais. Considere o campo vetorial $N(q) = g_1(q) \cdot \nu(\pi(q))$, definido e suave em todo o \mathbb{R}^n , além disso, $|N(q)| \leq 1$ em \mathbb{R}^n . Temos que se $g \in C_0^\infty(\Omega)$ e $|g(x)| \leq 1$, então para o campo gN temos

$$\int_U \operatorname{div} (gN) \, dx = \int_{\partial U} g \, d\mathcal{H}_{n-1}$$

De modo que

$$\int_{\Omega} |D\chi_U| \geq \sup \left\{ \int_{\partial U} g \, d\mathcal{H}_{n-1} : g \in C_0^\infty(\Omega), |g| \leq 1 \right\} = \mathcal{H}_{n-1}(\partial U \cap \Omega)$$

Donde $\int_{\Omega} |D\chi_U| = \mathcal{H}_{n-1}(\partial U \cap \Omega)$

Observação 3.5. De fato, o exemplo acima decorre do fato de as funções características dos abertos não serem absolutamente contínuas em quase toda direção de \mathbb{R}^n . Mais detalhes sobre isto podem ser encontrados em [28], seção 5.1, exemplo 2.

Iremos introduzir no espaço $BV(\Omega)$ uma norma. Se $f \in BV(\Omega)$ definimos

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_{L^1} + \int_{\Omega} |Df|$$

Vejam os que $\|\cdot\|_{BV}$ é realmente uma norma. Claramente, se $\|f\|_{BV} = 0$ temos $\|f\|_{L^1} = 0$, donde $f = 0$ em quase todo ponto. A homogeneidade é trivialmente verificada, enquanto a desigualdade triangular segue da desigualdade triangular de L^1 .

Veremos a seguir que funções BV são bem comportadas com respeito à convergência de L^1 .

Proposição 3.6. (*Semicontinuidade inferior*) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $BV(\Omega)$ que converge em $L^1_{loc}(\Omega)$ para uma função f . Então*

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| \quad (3.7)$$

Demonstração. Seja $g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ um campo com $|g(x)| \leq 1$. Então,

$$\int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} g dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j \cdot \operatorname{div} g dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j|$$

Onde a última desigualdade segue do Lema de Fatou. Portanto, o resultado segue tomando o supremo sobre todas as g que satisfazem as propriedades acima.

□

Observação 3.7. *Observe que a proposição 3.6 não prova que a função f está em $BV(\Omega)$. Para isto, é preciso limitar o conjunto das variações das funções f_j .*

É fácil ver entretanto, que na proposição 3.6 a igualdade não precisa ser atingida, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.8. *Considere $\Omega = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$, e defina $f_j = \frac{1}{j} \cdot \sin jx$ para $x \in \Omega$. Todas as f_j estão em $L^1(\Omega)$, e mais ainda,*

$$\int_{\Omega} |f_j| dx = \frac{1}{j} \int_0^{2\pi} |\sin jx| dx \leq \frac{2\pi}{j} \rightarrow 0$$

De modo que $f_j \rightarrow 0$ em L^1 . Por outro lado, como as f_j são suaves, temos

$$\int_{\Omega} |Df_j| = \int_0^{2\pi} |\cos jx| dx = 4$$

Veremos adiante casos em que é possível garantir a igualdade. Antes, mostremos que o espaço BV é completo.

Proposição 3.9. *$BV(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_{BV}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$. Pela definição da norma BV é claro que f_n é de Cauchy em $L^1(\Omega)$ e portanto converge em L^1 para uma aplicação f . Como f_n é de Cauchy em BV , em particular é limitada, e a proposição 3.6 garante que $f \in BV(\Omega)$.

Resta mostrar a convergência neste espaço. Para isto, é suficiente mostrar que

$$\int_{\Omega} |D(f_j - f)| \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty$$

Observe que $f_j \rightarrow f$ em L^1_{loc} , e portanto $f_j - f_k \rightarrow f_j - f$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Assim, já que f_j é de Cauchy em BV , temos que dado um $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$j, k \leq N \Rightarrow \|f_k - f_j\|_{BV} \leq \varepsilon$$

Em particular,

$$\int_{\Omega} |D(f_k - f_j)| \leq \varepsilon$$

Aplicando a proposição 3.6 à sequência $(f_j - f_k)_{j \in \mathbb{N}}$, temos

$$\int_{\Omega} |D(f_j - f)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D(f_k - f_j)| \leq \varepsilon$$

Já que ε é arbitrário, temos $f_j \rightarrow f$ em $BV(\Omega)$.

□

Teorema 3.10. *(Aproximação por funções suaves) Seja $f \in BV(\Omega)$. Existe uma sequência $\{f_j\} \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $f_j \rightarrow f$ em $L^1(\Omega)$, e*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| = \int_{\Omega} |Df| \quad (3.8)$$

Demonstração. Vide [34], teorema 1.17.

□

Teorema 3.11. *(Relich-Kondrachov para funções BV) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Lipschitz. A inclusão $BV_{\Omega} \subset L^1(\Omega)$ é compacta, isto é, toda sequência uniformemente limitada em $BV(\Omega)$ é relativamente compacta em $L^1(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha que f_j é uma sequência em $BV(\Omega)$ tal que $\|f_j\|_{BV} \leq M$. Pelo teorema 3.10, para cada j podemos escolher uma função $\tilde{f}_j \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\|f_j - \tilde{f}_j\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{j}$ e $\|\tilde{f}_j\|_{BV(\Omega)} \leq M+2$. Pelo teorema de Relich-Kondrachov para funções suaves⁴, \tilde{f}_j é uma sequência relativamente compacta em $L^1(\Omega)$, portanto existe uma subsequência convergindo para uma função f . Pela proposição 3.6, $f \in BV(\Omega)$. E já que as f_j aproximam as \tilde{f}_j , a subsequência associada em f_j converge em $L^1(\Omega)$ para f . \square

Provaremos agora um teorema estrutural sobre o espaço das funções BV_{loc} .

Teorema 3.12. (*Teorema Estrutural*) *Seja $f \in BV_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Existem uma única medida de Radon μ em Ω e um campo mensurável $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $|\nu(x)| = 1$ μ -quase sempre, tal que*

$$-\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Omega} \langle g, \nu \rangle \, d\mu$$

Para toda $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Considere a aplicação $\|Df\|_{\Omega} : C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|Df\|_{\Omega}(g) = -\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx$$

Esta aplicação é claramente linear em $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Já que $f \in BV_{loc}(\Omega)$, temos

$$\sup\{\|Df\|_{\Omega}(\phi); \phi \in C_0^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1\} = C(U) < \infty \quad (3.9)$$

Para todo aberto $U \subset\subset \Omega$. Portanto, $L(\phi) \leq C(U)\|\phi\|_{L^\infty}$, para $\phi \in C_0^1(U; \mathbb{R}^n)$. Este funcional estende-se por continuidade a um funcional linear limitado em $C_0(V; \mathbb{R}^n)$ de maneira única. O teorema de Riesz-Markov⁵ nos dá o resultado desejado. \square

Definição 3.13. *O gradiente no sentido BV de uma função $f \in BV_{loc}(\Omega)$ é definido por*

$$Df = \nu \mu$$

Denotaremos por $D_R(y)$ a bola de raio R centrada em y em \mathbb{R}^{n-1} . Quando $y = 0$, utilizaremos somente D_R . Sejam $C_R^+(y) = D_R(y) \times (0, R)$ e $C_R^- = D_R \times (0, R)$.

⁴Vide [27], cap. 5

⁵Vide [5], teorema 1.54

Teorema 3.14. (*Massari-Miranda - Teorema da divergência para funções BV*) Seja $f \in BV(C_R^+)$. Existe uma função $f^+ \in L^1(D_R)$ tal que H_{n-1} quase sempre em D_R vale

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-n} \int_{C_\rho^+(y)} |f(z) - f^+(y)| dz = 0 \quad (3.10)$$

Mais ainda, se $C_R = D_R \times (-R, R)$ então para cada $g \in C_0^1(C_R; \mathbb{R}^n)$ tem-se

$$\int_{C_R^+} f \operatorname{div} g dx = - \int_{C_R^+} \langle g, Df \rangle dx + \int_{D_R} f^+ g_n dH_{n-1} \quad (3.11)$$

Demonstração. Vide [34], lema 2.4. □

Definição 3.15. A função f^+ do teorema acima é chamada de traço de f em D_R .

Mais geralmente, temos o seguinte

Teorema 3.16. (*Existência do traço*) Assuma que U é um aberto limitado de \mathbb{R}^n com fronteira Lipschitz, denote por ν o normal exterior à fronteira. Existe um operador linear limitado

$$T : BV(U) \longrightarrow L^1(\partial U; H_{n-1})$$

Tal que

$$\int_U f \operatorname{div} g dx = - \int_U \langle g, Df \rangle dx + \int_{\partial U} T f \langle g, \nu \rangle dH_{n-1} \quad (3.12)$$

Para toda $f \in BV(U)$ e $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Veja [28], seção 5.3, teorema 1. □

Provamos ainda um lema,

Lema 3.17. Suponha que $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^{n-1} . Temos então

$$\int_{\Omega \times (-T, T)} |Df| \leq \int_{-T}^T \left\{ \int_{\Omega} |Df_t| \right\} dt \quad (3.13)$$

onde $f_t(y) = f(y, t)$ e a igualdade ocorre se f não depende de x_n .

Demonstração. Vide [34], lema 9.8. □

Deste ponto em diante, o estudo de funções BV será orientado na direção de conjuntos de perímetro finito. Para mais detalhes sobre a estrutura analítica destas funções, o leitor pode consultar as excelentes referências [5] e [28].

Vimos no exemplo 3.5 que se U é um aberto de \mathbb{R}^n com fronteira suave, a variação da função característica de U em Ω , $\int_{\Omega} |D\chi_U|$, é uma medida de quanto a fronteira de U intersecta Ω . Queremos estender esta noção de medida para conjuntos mais gerais de \mathbb{R}^n . Observe que na definição 3.1, para que a integral faça sentido é necessário apenas que Ω seja um conjunto mensurável de \mathbb{R}^n . Embora uma definição desta medida em todo conjunto mensurável de \mathbb{R}^n seja possível, iremos nos restringir ao caso de conjuntos borelianos.

Definição 3.18. *Seja E um conjunto boreliano e Ω um aberto de \mathbb{R}^n . Definimos o perímetro de E em Ω por*

$$P(E, \Omega) = \int_{\Omega} |D\chi_E|$$

Se E tem perímetro finito em qualquer aberto limitado Ω de \mathbb{R}^n , dizemos que E é um conjunto de perímetro localmente finito, ou conjunto de Cacciopoli. Isto é equivalente a dizer que $\chi_E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Provaremos agora a existência de conjuntos que minimizam este perímetro

Teorema 3.19. *(De Giorgi) Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n e $L \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de perímetro finito. Então existe um conjunto E , coincidindo com L fora de Ω tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_E| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_F| \tag{3.14}$$

Para cada conjunto F com $F = L$ fora de Ω .

Demonstração. Já que Ω é limitado, existe um número R tal que $\Omega \subset\subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$. Já que $F = L$ fora de Ω ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_F| = \int_{B_R} |D\chi_F| + \int_{\mathbb{R}^n - B_R} |D\chi_L| \tag{3.15}$$

É suficiente então mostrar a existência de um conjunto E em B_R que coincide com L fora de Ω tal que

$$\int_{B_R} |D\chi_E| \leq \int_{B_R} |D\chi_F| \quad (3.16)$$

Desde que $\int_{B_R} |D\chi_F|$ é limitado inferiormente por 0, e L é um conjunto admissível, temos

$$\inf \left\{ \int_{B_R} |D\chi_F|; F \text{ é um conjunto boreliano e } F \equiv L \text{ fora de } \Omega \right\} < \infty \quad (3.17)$$

Portanto, se $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência minimizante, então a sequência $\int_{B_R} |D\chi_{E_j}|$ é uniformemente limitada. Além disso, já que B_R é limitada a sequência χ_{E_j} é uniformemente limitada em $L^1(B_R)$. Portanto, χ_{E_j} é uma sequência limitada em $BV(B_R)$, e pelo teorema 3.11 converge em $L^1(B_R)$ para uma função f . Já que $\chi_{E_j} \rightarrow f$ para quase todo $x \in B_R$ e χ_{E_j} é igual a 0 ou 1 podemos assumir que f é uma função característica de um conjunto E que coincide com L fora de Ω . Pela semicontinuidade, temos a desigualdade desejada. \square

Definição 3.20. *Um conjunto boreliano E é dito minimal em um aberto limitado Ω se para todo conjunto F que coincide com E fora de Ω temos*

$$\int_{\Omega} |D\chi_E| \leq \int_{\Omega} |D\chi_F| \quad (3.18)$$

Definimos agora a noção de quanto um conjunto difere de um conjunto minimal.

Definição 3.21. *Seja $f \in BV(\Omega)$. Definimos*

$$\theta(f, \Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |Dg|; g \in BV(\Omega), \text{ spt}(g - f) \subset \Omega \right\} \quad (3.19)$$

$$\psi(f, \Omega) = \int_{\Omega} |Df| - \theta(f, \Omega) \quad (3.20)$$

Se $f = \chi_E$, denotamos as funções acima por $\theta(E, \Omega)$ e $\psi(E, \Omega)$. Se $\Omega = B_R$, denotamos por $\theta(f, R)$ e $\psi(f, R)$.

Observação 3.22. Note que se E é um conjunto minimal em Ω , então $\psi(E, \Omega) = 0$.

Definimos também a fronteira reduzida de um conjunto de perímetro finito,

Definição 3.23. Um ponto x pertence à fronteira reduzida de um conjunto de perímetro finito E , $\partial^* E$, se as seguintes condições são satisfeitas

1. $\int_{B(x, \rho)} |D\chi_E| > 0$ para todo $\rho > 0$;
2. O limite $\nu(x) = \lim \nu_\rho(x)$ existe, onde

$$\nu_\rho(x) = \frac{\int_{B(x, \rho)} D\chi_E}{\int_{B(x, \rho)} |D\chi_E|}$$

3. $|\nu(x)| = 1$

Um ponto que satisfaz as condições acima é dito regular. Se o ponto não satisfaz, dizemos que ele é singular.

Listamos agora alguns resultados auxiliares similares aos que já temos para superfícies mínimas.

Teorema 3.24. (Fórmulas de monotonia para conjuntos minimais) Seja E um conjunto minimal em B_R . Temos para cada $\rho < r < R$

$$\left\{ \int_{\partial B_1} |\chi_E(\rho x) - \chi_E(rx)| dH_{n-1} \right\}^2 \leq \left\{ \int_{B_r - B_\rho} \left| \left\langle \frac{x}{|x|^n}, D\chi_E \right\rangle \right| \right\}^2 \quad (3.21)$$

$$\leq 2 \int_{B_r - B_\rho} |x|^{1-n} \left\{ r^{1-n} \int_{B_r} |D\chi_E| - \rho^{1-n} \int_{B_\rho} |D\chi_E| \right\} \quad (3.22)$$

Em particular, para cada $\rho < r < R$, temos

$$\rho^{1-n} \int_{B_\rho} |D\chi_E| \leq r^{1-n} \int_{B_r} |D\chi_E| \quad (3.23)$$

Demonstração. Vide [34], observação 5.13 □

Observação 3.25. Note que a igualdade nas fórmulas acima ocorre se e somente se U difere em um conjunto de medida nula de um cone com vértice na origem. Com efeito, se ocorre igualdade, então tem-se

$$|\chi_E(\rho x) - \chi_E(rx)| = 0 \quad \text{em } \partial B_1 \quad (3.24)$$

Para cada $r, \rho < R$. Deste modo, se $x \in E$ então $\rho x \in E$, para quase todo $\rho < R$, donde a afirmação segue.

Lema 3.26. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n e seja $\{E_j\}$ uma sequência de conjuntos minimais em Ω . Suponha que existe um conjunto E tal que $\chi_{E_j} \rightarrow \chi_E$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Então E é um conjunto minimal em Ω . Além disso, se $L \subset\subset \Omega$ é um aberto tal que

$$\int_{\partial L} |D\chi_E| = 0$$

, então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_L |D\chi_{E_j}| = \int_L |D\chi_E| \quad (3.25)$$

Demonstração. Vide [34], lema 9.1 □

3.2 Os teoremas de Fleming e De Giorgi

Teorema 3.27. (Fleming) Suponha que existe f solução não trivial da equação da superfície mínima em todo o \mathbb{R}^n . Então existe um cone mínimo $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ estável e singular em 0.

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que $f(0) = 0$. Considere o conjunto $U = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; t < f(x)\}$. Já que f satisfaz a equação da superfície mínima, $\partial U = \text{Graph}(f)$ é uma superfície mínima, donde U é um conjunto minimal em \mathbb{R}^{n+1} , isto é, $\psi(U, K) = 0$ para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Considere para $t > 0$ os conjuntos

$$U_t = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}; ty \in U\} = \frac{1}{t}U$$

Fixe $R > 0$. Mostraremos que as funções $\chi_t = \chi_{U_t}$ são uniformemente limitadas em $BV(B_R)$. Note que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |D\chi_t| &= \sup \left\{ \int_{B_R} \chi_{U_t}(x) \operatorname{div} g(x) \, dx; \, g \in C_0^1(B_R), |g(x)| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_{B_R} \chi_U(tx) \operatorname{div} g(x) \, dx; \, g \in C_0^1(B_R), |g(x)| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_{B_{Rt}} \chi_U(z) t \operatorname{div} g(z) \, t^{-n} dz; \, g \in C_0^1(B_R), |g(z)| \leq 1 \right\} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$= t^{1-n} \int_{B_{Rt}} |D\chi_U| \quad (3.27)$$

Onde na equação 3.26 utilizamos a substituição $z = tx$. Deste modo, concluímos que U_t é minimal em B_R . Ademais, já que U é minimal, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |D\chi_t| &= t^{1-n} \int_{B_{Rt}} |D\chi_U| \\
&\leq \frac{1}{2} n \omega_n R^{n-1} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

A desigualdade 3.28 implica a limitação uniforme, assim tomando uma subsequência $t_k \rightarrow \infty$ as χ_{t_k} convergem em $L_{loc}^1(B_R)$ para uma função χ_{C_R} . Já que $\chi_t(x) = 0$ ou 1 , a função χ_{C_R} também é uma função característica de um conjunto $C_R \subset B_R$. Aplicando o lema 3.26, temos para cada R um conjunto C_R minimal em B_R .

Considere agora uma sequência estritamente crescente $R_k \rightarrow \infty$, $R_1 > 0$. Consideremos as funções $\chi_k = \chi_{C_{R_k}}$ em B_{R_1} . Passando a uma subsequência, podemos afirmar que esta sequência converge para uma função ϕ_1 em $L_{loc}^1(B_{R_1})$. Consideramos esta subsequência em $BV(B_{R_2})$, e novamente passando a uma subsequência temos a convergência para uma função ϕ_2 em $L_{loc}^1(B_{R_2})$. Continuando este processo diagonal, teremos ao fim uma subsequência que converge em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ para uma função $\phi \in BV_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$. Como limite de funções características, a própria ϕ é uma função característica de um conjunto C . Mostraremos a seguir que C é um cone. Ainda pelo lema 3.26, para quase todo R e para $\chi_{s_j} = \chi_{U_{s_j}}$ a sequência que converge para C temos

$$\int_{B_R} |D\chi_{s_j}| \rightarrow \int_{B_R} |D\chi_C| \quad (3.29)$$

Assim, se definirmos

$$p(t) = t^{1-n} \int_{B_t} |D\chi_U| = \int_{B_1} |D\chi_{U_t}| \quad (3.30)$$

Temos para quase todo $R > 0$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p(s_j R) = R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_C| \quad (3.31)$$

Pela fórmula de monotonia para funções BV , $p(t)$ é crescente em t . Se $\rho > R$, então para cada j existe um $m_j > 0$ tal que

$$s_j \rho < s_{j+m_j} R$$

Então,

$$p(s_j R) \leq p(s_{j+m_j} \rho) \leq p(s_{j+m_j} R)$$

De modo que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p(s_j \rho) = \lim_{j \rightarrow \infty} p(s_j R) = R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_C| \quad (3.32)$$

Assim provamos que

$$\rho^{1-n} \int_{B_\rho} |D\chi_C|$$

É independente de ρ , e assim, da fórmula de monotonia para funções BV , 3.24, concluímos que

$$\int_{\partial B_1} |\chi_C(\rho x) - \chi_C(r x)| dH_{n-1} = 0 \quad (3.33)$$

Para quase todo $\rho, r > 0$. Portanto o conjunto C difere somente num conjunto de medida nula de um cone com vértice na origem. Note também que de 3.28 e 3.31 existe uma constante q tal que

$$0 < \omega_{n-1} \leq q \leq \frac{n\omega_n}{2}$$

e

$$\int_{B_\rho} |D\chi_C| = q\rho^{1-n} \quad (3.34)$$

Provaremos agora que este cone deve ser não trivial. Suponha que através de todo processo de limite como o processo acima o cone resultante seja um semiespaço. Note que para todo $R > 0$,

$$\omega_{n-1} \leq (Rr_j)^{1-n} \int_{B_{Rr_j}} |D\chi_U| = R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_{U_{r_j}}| \rightarrow R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_C| \quad (3.35)$$

Note ainda que como C é um semiespaço,

$$R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_C| = \omega_{n-1} \quad (3.36)$$

Usando a monotonicidade de $R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_U|$, 3.24, temos de 3.35 que

$$R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_U| = \omega_{n-1} \quad (3.37)$$

Donde concluímos que U é um cone, portanto seu cone tangente no infinito é U mesmo, donde $C = U$, o que conclui que U é um semiespaço. Assim, o gráfico de f é um hiperplano.

□

Definição 3.28. *Um cone obtido pelo processo acima é dito cone tangente no infinito a U .*

Mostraremos agora que tal cone não existe em \mathbb{R}^3 provando assim o teorema de Bernstein em dimensão 2.

Teorema 3.29. *(Fleming) Suponha que $C^2 \subset \mathbb{R}^3$ é um cone minimizante regular, com vértice na origem 0. Então C é um plano.*

Demonstração. Como C é regular, a interseção com a esfera \mathbb{S}^2 é uma curva de Jordan Γ regular, sem autointerseções. Já que o cone é mínimo, e tem o tipo topológico de um disco, é uma solução do problema de Plateau para Γ . Pela regularidade interior de soluções do problema de Plateau, $0 \in C$ deve ser um ponto regular, assim, Γ deve ser um grande círculo, e C deve ser um disco. □

Observação 3.30. *Seja C um cone mínimo com vértice em 0 e seja $x_0 \in \partial C - \{0\}$. Para $t > 0$, seja $x_0 \in \partial C - \partial^* C$ um ponto singular de C . Então toda a semireta $\{tx_0; t > 0\}$ é composta de pontos singulares.*

Teorema 3.31. (De Giorgi) *Suponha que C é um cone minimizante em \mathbb{R}^n , com vértice em 0 , singular em $x_0 \neq 0$. Então existe um cone minimizante $Q \subset \mathbb{R}^n$, com vértice em 0 , tal que $Q = A \times \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é um cone minimizante com vértice em 0 .*

Demonstração. Podemos supor, a menos de uma rotação do espaço ambiente, que $x_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Considere os conjuntos

$$C_t = \{x \in \mathbb{R}^n; x_0 + t(x - x_0) \in C\} \quad (3.38)$$

Iremos fazer um processo de blow up destes conjuntos. Note que

$$\chi_{C_t}(x) = \chi_C(x_0 + t(x - x_0)) \quad (3.39)$$

Portanto, com a substituição $T_t(x) = x_0 + t(x - x_0)$ temos

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, \rho)} |D\chi_{C_t}| &= t^{1-n} \int_{B(x_0, \rho t)} |D\chi_C| \\ &\leq \rho^{n-1} \int_{B(x_0, 1)} |D\chi_C| \end{aligned} \quad (3.40)$$

Desta forma, a sequência

$$\rho^{1-n} \int_{B(x_0, \rho)} |D\chi_{C_t}| \quad (3.41)$$

É uma sequência crescente. Além disso, já que o lado direito da equação 3.40 não depende de t , podemos escolher uma sequência $t_j \rightarrow 0$ tal que $C_j := C_{t_j}$ converge para um cone mínimo Q , com vértice em x_0 . Note que desde que $0 \in C_t$ para todo t , então $0 \in Q$. Desta forma, pelo lema anterior toda a semireta partindo de x_0 e passando por 0 é composta de pontos singulares deste cone. Mostraremos que Q se escreve como $A \times \mathbb{R}$.

Seja $x \neq x_0 \in C_t$. Como C é um cone com vértice em 0 , temos $\langle x, D\chi_C \rangle = 0$, portanto $D_n\chi_C = -\langle x - x_0, D\chi_C \rangle$, portanto,

$$|D_n\chi_C| \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0|} |D\chi_C| \quad (3.42)$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0, \rho)} |D_n \chi_{C_t}| &= t^{1-n} \int_{B(x_0, \rho t)} |D_n \chi_C| \\
&\leq \frac{t^{2-n} \rho}{|x_0|} \int_{B(x_0, \rho t)} |D \chi_C| \\
&\leq \frac{n \omega_n \rho^n}{2|x_0|} t
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Deste modo concluímos que $D_n \chi_Q = \lim_{j \rightarrow \infty} D_n \chi_{C_{t_j}} = 0$.

Por outro lado, utilizando o teorema do valor médio aplicado a funções suaves que aproximam $F(h) = X_h(y) = X_Q(y, h), y \in D_R \subset \mathbb{R}^{n-1}$, temos

$$\int_{D_R} |\chi_{h_1} - \chi_{h_2}| dH_{n-1} \leq \int_{D_R \times [h_1, h_2]} |D_n \chi_Q| = 0 \tag{3.44}$$

Portanto, existe um conjunto $A \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para quase todo h_1 e h_2 temos

$$\chi_Q(y, h_2) = \chi_Q(y, h_1) = \chi_A(y) \tag{3.45}$$

Para quase todo $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Portanto, $Q = A \times \mathbb{R}$. Note ainda que A é um cone, pois

$$\chi_A(ty) = \chi_Q(ty, ts) = \chi_Q(y, s) = \chi_A(y) \tag{3.46}$$

Mostraremos a seguir que A é mínimo. Suponha por contradição que A não é mínimo. Então existem $\epsilon, R > 0$ e um conjunto E , coincidindo com A fora de um conjunto compacto $H \subset D_R$ tal que

$$\int_{D_R} |D \chi_E| \leq \int_{D_R} |D \chi_A| - \epsilon \tag{3.47}$$

Seja $T > 0$ e defina o conjunto

$$M = \begin{cases} E \times (-T, T), & \text{em } |x_n| < T \\ Q, & \text{em } |x_n| \geq T \end{cases}$$

Deste modo, temos $M = Q$ fora de $H \times [-T, T]$. Assim,

$$\int_{D_R \times [T, T]} |D\chi_Q| \leq \int_{D_R \times [-T, T]} |D\chi_M| = 2T \int_{D_R} |D\chi_E| \quad (3.48)$$

O que contradiz a equação 3.47 para R suficientemente grande. Note ainda que se A é trivial, então o ponto x_0 é regular.

□

Capítulo 4

O teorema de Bernstein em dimensão $n \leq 7$.

Em seu artigo [62], J. Simons derivou uma equação elíptica envolvendo a segunda forma fundamental para imersões mínimas de codimensão arbitrária em espaços de curvatura qualquer¹. Esta poderosa ferramenta tem sido utilizada em larga escala desde então, para mostrar resultados importantes na teoria de subvariedades, vide [18], [41], [3], [59]. Em particular, foi fundamental na extensão do teorema de Bernstein em dimensão $n \leq 8$ devida ao próprio Simons no mesmo artigo, como veremos neste capítulo, e na generalização deste resultado para superfícies estáveis, como veremos no capítulo 6.

Na seção 4.1, estabeleceremos uma versão da equação de Simons para hipersuperfícies mínimas em espaços de curvatura constante, e mostraremos uma desigualdade envolvendo o laplaciano e o gradiente da norma da segunda forma fundamental neste contexto. Na seção 4.2, utilizaremos esta equação para examinar o índice de imersões mínimas na esfera, e a partir desta análise provaremos alguns resultados de rigidez para estas imersões. Motivados pelos teoremas de Fleming e De Giorgi provados no capítulo anterior, faremos na seção 4.3 uma análise da estabilidade de cones mínimos em \mathbb{R}^{n+1} sobre subvariedades fechadas da esfera \mathbb{S}^n com codimensão um. Veremos que esta questão está relacionada ao índice destas subvariedades de \mathbb{S}^n , e a partir dos resultados de rigidez da seção 4.2, estabeleceremos critérios para a existência de um cone singular estável em \mathbb{R}^{n+1} , e mostraremos que estes não podem existir se $n \leq 7$, provando assim o teorema de Bernstein nestas dimensões.

¹Vide teorema 4.2.1 em [62]

4.1 A equação de Simons

Denotaremos por g, ∇, R a métrica, a conexão de Levi-Civita e a curvatura de M , e por $g, \bar{\nabla}, \bar{R}$, a conexão, e a curvatura de N . Se $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ é um referencial ortonormal numa vizinhança de $x \in M$, com $E_{n+1} = \nu$ normal a $T_p M$, denotaremos por $\{\theta^i\}_{i=1}^{n+1}$ o coreferencial dual a E_i , i.e, $\theta^i E_j = \delta_{ij}$, e $\theta^{n+1} = \alpha$. Com esta notação, a segunda forma fundamental, a , é um tensor simétrico de tipo $(2, 0)$ em M , dado por

$$a(X, Y) = -g(\bar{\nabla}_X \nu, Y)$$

Relembramos dois resultados sobre variedades de curvatura seccional constante. O leitor pode encontrar suas provas em [23], capítulo 4.

Lema 4.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina a aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \longrightarrow T_p M$ por*

$$g(R'(X, Y, Z), W) = g(X, W)g(Y, Z) - g(Y, W)g(X, Z) \quad (4.1)$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e só se $R = K_0 R'$.

Corolário 4.2. *Seja M^n uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante, e $\{E_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de $T_p M$. Denotando por $R_{ijkl} = g(R(E_i, E_j)E_k, E_l)$, temos*

$$R_{ijkl} = \begin{cases} K_0, & \text{se } i = k, j = l, i \neq j \\ -K_0, & \text{se } i = l, j = k, i \neq j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

Estudaremos as derivadas covariantes do tensor a . Denotando $a_{ij} = -g(\bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_j)$, podemos escrever

$$a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \theta^i \otimes \theta^j \quad (4.3)$$

Seja a_{\dots} o tensor definido por $a(X, Y, Z) = \nabla_Z a(X, Y)$, e escreva

$$a_{\dots} = \sum_{i,j,k=1}^n a_{i,j,k} \theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \quad (4.4)$$

Já que a é um tensor simétrico, a_{\dots} é simétrico nas duas primeiras entradas.

Note ainda que

$$\begin{aligned}
a_{ij,k} &= (\nabla_{E_k} a)(E_i, E_j) \\
&= E_k(a(E_i, E_j)) - a(\nabla_{E_k} E_i, E_j) - a(E_i, \nabla_{E_k} E_j) \\
&= -E_k(g(\bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_j)) + g(\bar{\nabla}_{\nabla_{E_k} E_i} \nu, E_j) + g(\bar{\nabla}_{E_i} \nu, \nabla_{E_k} E_j) \\
&= -g(\nabla_{E_k} \bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_j) - g(\bar{\nabla}_{E_i} \nu, \nabla_{E_k} E_j) + g(\bar{\nabla}_{\nabla_{E_k} E_i} \nu, E_j) + g(\bar{\nabla}_{E_i} \nu, \nabla_{E_k} E_j) \\
&= -g(\nabla_{E_k} \bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_j) + g(\bar{\nabla}_{\nabla_{E_k} E_i} \nu, E_j)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

E mais,

$$\begin{aligned}
a_{ij,k} &= \left\{ g(\bar{R}(E_k, E_i) \nu - \nabla_{E_i} \bar{\nabla}_{E_k} \nu - \bar{\nabla}_{[E_k, E_i]} \nu, E_j) \right. \\
&\quad \left. + g(\bar{\nabla}_{\nabla_{E_i} E_k} \nu + \bar{\nabla}_{[E_i, E_k]} \nu, E_j) \right\} \\
&= g(\bar{R}(E_k, E_i) \nu, E_j) + g(-\nabla_{E_i} \bar{\nabla}_{E_k} \nu + \bar{\nabla}_{\nabla_{E_i} E_k} \nu, E_j) \\
&= \bar{R}_{ki(n+1)j} + a_{kj,i}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Já que $i, j, k \leq n$, o corolário 4.2 garante que $\bar{R}_{ki(n+1)j} = 0$, portanto o tensor a_{\dots} é simétrico em todos os índices.

Definimos agora o tensor $a_{\dots, l}$, por $a_{\dots, l} = \nabla a_{\dots}$, ou

$$a_{\dots, l} = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij,kl} \theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^l \tag{4.7}$$

Calculamos $a_{ij,kl}$:

$$\begin{aligned}
a_{ij,kl} &= \nabla_{E_l} (a_{\dots}(E_i, E_j, E_k)) \\
&= E_l(a_{ij,k}) - a_{\dots}(\nabla_{E_l} E_i, E_j, E_k) - a_{\dots}(E_i, \nabla_{E_l} E_j, E_k) - a_{\dots}(E_i, E_j, \nabla_{E_l} E_k) \\
&= E_l(a_{ij,k}) - a_{\dots,k}(\nabla_{E_l} E_i, E_j) - a_{\dots,k}(E_i, \nabla_{E_l} E_j) - \nabla_{\nabla_{E_l} E_k} a(E_i, E_j)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Vejamos como o índice l se relaciona com os outros. Aplicando a regra de Leibniz à equação 4.8, temos

$$\begin{aligned}
a_{ij,kl} = & \{E_l E_k(a(E_i, E_j)) - E_l a(\nabla_{E_k} E_i, E_j) - E_l a(E_i, \nabla_{E_k} E_j) \\
& - E_k a(\nabla_{E_l} E_i, E_j) + a(\nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i, E_j) + a(\nabla_{E_l} E_i, \nabla_{E_k} E_j) \\
& - E_k a(E_i, \nabla_{E_l} E_j) + a(\nabla_{E_k} E_i, \nabla_{E_l} E_j) + a(E_i, \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_j) \\
& - \nabla_{E_l} E_k a(E_i, E_j) + a(\nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_i, E_j) + a(E_i, \nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_j)\}
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos simétricos em l e k , reescrevemos a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a_{ij,kl} = & \{-[E_l a(\nabla_{E_k} E_i, E_j) + E_k a(\nabla_{E_l} E_i, E_j)] - [E_l a(E_i, \nabla_{E_k} E_j) + E_k a(\nabla_{E_l} E_i, E_j)] \\
& + [a(\nabla_{E_l} E_i, \nabla_{E_k} E_j) + a(\nabla_{E_k} E_i, \nabla_{E_l} E_j)] + [E_l E_k a(E_i, E_j) - \nabla_{E_l} E_k a(E_i, E_j)] \\
& + [a(\nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i, E_j) + a(\nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_i, E_j)] + [a(E_i, \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_j) + a(E_i, \nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_j)]\}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Os três primeiros termos em colchetes são simétricos em k e l , então calculamos somente os 3 últimos:

$$\begin{aligned}
E_l E_k(E_i, E_j) - \nabla_{E_l} E_k a(E_i, E_j) &= (E_l E_k - \nabla_{E_l} E_k) a(E_i, E_j) \\
&= (E_k E_l + [E_l, E_k] - (\nabla_{E_k} E_l + [E_l, E_k])) a(E_i, E_j) \\
&= (E_k E_l - \nabla_{E_k} E_l) a(E_i, E_j)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Portanto, o 4º termo entre colchetes na equação 4.9 é simétrico. O próximo termo é

$$\begin{aligned}
a(\nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i + \nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_i, E_j) &= \{a(R(E_l, E_k) E_i + \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_i - \nabla_{[E_l, E_k]} E_i, E_j) \\
&+ a(\nabla_{(\nabla_{E_k} E_l + [E_l, E_k])} E_i, E_j)\} \\
&= a(R(E_l, E_k) E_i + \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_i + \nabla_{\nabla_{E_k} E_l} E_i, E_j)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

O último termo é análogo,

$$a(E_i, \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_j + \nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_j) = a(E_i, R(E_l, E_k) E_j + \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_j + \nabla_{\nabla_{E_k} E_l} E_j) \tag{4.12}$$

Usando as equações 4.10, 4.11 e 4.12 na equação 4.9 temos

$$\begin{aligned}
a_{ij,kl} &= \{ -[E_k a(\nabla_{E_l} E_i, E_j) + E_l a(\nabla_{E_k} E_i, E_j)] - [E_k a(E_i, \nabla_{E_l} E_j) + E_l a(\nabla_{E_k} E_i, E_j)] \\
&\quad + [a(\nabla_{E_k} E_i, \nabla_{E_l} E_j) + a(\nabla_{E_l} E_i, \nabla_{E_k} E_j)] + [(E_k E_l - \nabla_{E_k} E_l) a(E_i, E_j)] \\
&\quad + [a(+\nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_i + \nabla_{\nabla_{E_k} E_l} E_i, E_j)] + [a(E_i, \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_j + \nabla_{\nabla_{E_k} E_l} E_j)] \\
&\quad + a(R(E_l, E_k) E_i, E_j) + a(E_i, R(E_l, E_k) E_j) \} \\
&= a_{ij,lk} + a(R(E_l, E_k) E_i, E_j) + a(E_i, R(E_l, E_k) E_j) \\
&= a_{ij,lk} + \sum_{s=1}^n R_{lkis} a_{sj} + \sum_{s=1}^n R_{lkjs} a_{si} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Podemos ainda reescrever a equação 4.13 utilizando a equação de Gauss

$$a_{ij,kl} = a_{ij,lk} + \sum_{s=1}^n (\bar{R}_{lkis} - (a_{ki} a_{ls} - a_{li} a_{ks})) a_{sj} + \sum_{s=1}^n (\bar{R}_{lkjs} - (a_{ls} a_{kj} - a_{lj} a_{ks})) a_{si} \tag{4.14}$$

De posse destes resultados, provaremos agora uma versão simplificada da equação original de Simons.

Teorema 4.3. *Seja $M^n \subset N_c^{n+1}$ uma subvariedade mínima de um espaço de curvatura seccional constante c . Então*

$$\frac{1}{2} \Delta_M |A|^2 = |\nabla_M A|^2 + |A|^2 (nc - |A|^2) \tag{4.15}$$

Onde $|\nabla_M A|$ denota a norma do tensor $\nabla_M A$, $|\nabla_M A|^2 = \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij,k}^2$.

Demonstração. Vamos calcular $a_{ij,kk}$:

$$\begin{aligned}
a_{ij,kk} &= a_{ik,jk} \\
&= a_{ik,kj} + \sum_{s=1}^n (\bar{R}_{kjis} - (a_{ji} a_{ks} - a_{ki} a_{js})) a_{sk} + \sum_{s=1}^n (\bar{R}_{kjks} - (a_{ks} a_{jk} - a_{kk} a_{js})) a_{si} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{kk,ij} - \sum_{s=1}^n (a_{ji} a_{ks} - a_{ki} a_{js}) a_{sk} - \sum_{s=1}^n (a_{ks} a_{jk} - a_{kk} a_{js}) a_{si} + \sum_{s=1}^n (\bar{R}_{kjis} a_{sk} + \bar{R}_{kjks} a_{si}) \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Na igualdade 4.16, utilizamos a equação 4.14. Observe que pelo corolário 4.2, temos

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^n \bar{R}_{kjis} a_{sk} &= \bar{R}_{kji} a_{jk} + \bar{R}_{kjik} a_{kk} \\ \sum_{s=1}^n \bar{R}_{kjs} a_{si} &= \bar{R}_{kjk} a_{ji}\end{aligned}$$

Desta forma a equação 4.17 se escreve

$$\begin{aligned}a_{ij,kk} &= a_{kk,ij} + \bar{R}_{kji} a_{jk} + \bar{R}_{kjik} a_{kk} + \bar{R}_{kjk} a_{ji} \\ &\quad - \sum_{s=1}^n (a_{ji} a_{ks} - a_{ki} a_{js}) a_{sk} - \sum_{s=1}^n (a_{ks} a_{jk} - a_{kk} a_{js}) a_{si}\end{aligned}\quad (4.18)$$

Temos então

$$\begin{aligned}\Delta_M a_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ij,kk} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n a_{kk,ij} + \sum_{k=1}^n [\bar{R}_{kji} a_{jk} + \bar{R}_{kjik} a_{kk} + \bar{R}_{kjk} a_{ji}] \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{k,s=1}^n (a_{ji} a_{ks} - a_{ki} a_{js}) a_{sk} + \sum_{k,s=1}^n (a_{ks} a_{jk} - a_{kk} a_{js}) a_{si} \right\}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Novamente pelo lema 4.2 temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n [\bar{R}_{kji} a_{jk} + \bar{R}_{kjik} a_{kk} + \bar{R}_{kjk} a_{ji}] &= \bar{R}_{ij} a_{ji} + \left(\sum_{k=1}^n \bar{R}_{kij} a_{kk} \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \bar{R}_{kjk} a_{ji} \\ &= n c a_{ji} + \left(\sum_{k=1}^n \bar{R}_{kij} a_{kk} \right)\end{aligned}\quad (4.20)$$

Substituindo 4.20 na equação 4.19, e usando o fato que $\sum_k a_{kk} = 0$ (M é mínima) temos,

$$\Delta_M a_{ij} = n c a_{ji} + \left(\sum_{k=1}^n \bar{R}_{kij} a_{kk} \right) - \left\{ \sum_{k,s=1}^n (a_{ji} a_{ks} - a_{ki} a_{js}) a_{sk} + \sum_{k,s=1}^n (a_{ks} a_{jk} - a_{kk} a_{js}) a_{si} \right\}\quad (4.21)$$

Iremos calcular o laplaciano de $|A|^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_M|A|^2 &= \frac{1}{2}\Delta_M\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \Delta_M a_{ij}^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Delta_M a_{ij} + \sum_{i,j=1}^n |\nabla_M a_{ij}|^2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n a_{ji}\Delta_M a_{ij} &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left\{ nca_{ji} + \left(\sum_{k=1}^n \bar{R}_{kij} a_{kk} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left\{ \sum_{k,s=1}^n (a_{ji}a_{ks} - a_{ki}a_{js})a_{sk} + \sum_{k,s=1}^n (a_{ks}a_{jk} - a_{kk}a_{js})a_{si} \right\} \\
&= nc|A|^2 + \left(\sum_{i,k=1}^n a_{kk} \sum_{j=1}^n \bar{R}_{kij} \right) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left\{ \sum_{k,s=1}^n (a_{ji}a_{ks} - a_{ki}a_{js})a_{sk} + \sum_{k,s=1}^n (a_{ks}a_{jk} - a_{kk}a_{js})a_{si} \right\} \\
&= nc|A|^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_{kk} \sum_{i=1}^n \bar{R}_{kii} \right) - \sum_{i,j,k,s=1}^n a_{ij}a_{ji}a_{ks}a_{sk} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,s=1}^n a_{ij}a_{ki}a_{js}a_{sk} - \sum_{i,j,k,s=1}^n a_{ij}a_{ks}a_{jk}a_{si} + \sum_{i,j,k,s=1}^n a_{ij}a_{kk}a_{js}a_{si} \\
&= nc|A|^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_{kk} [(1-n)c] \right) - |A|^4 + \sum_{i,j,s=1}^n a_{ij}a_{js}a_{si} \left(\sum_{k=1}^n a_{kk} \right) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}a_{ks} [a_{ki}a_{js} - a_{jk}a_{si}]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Já que a é um tensor simétrico, a última soma é nula. Com efeito, se associarmos ao par ordenado (i, j, k, s) o termo

$$\sigma(i, j, k, s) = a_{ij}a_{ks} [a_{ki}a_{js} - a_{jk}a_{si}]$$

Podemos ver que $\sigma(i, j, k, s) = -\sigma(j, i, k, s)$ e $\sigma(i, j, k, s) = -\sigma(i, j, s, k)$. Deste modo, ao tomar a soma sobre todos os pares ordenados, eles se cancelam aos pares. Além disso, as duas somas envolvendo $\sum_k a_{kk}$ se anulam, já que M é mínima. Concluímos então que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Delta_M a_{ij} = |A|^2(nc - |A|^2) \tag{4.24}$$

Substituindo a equação 4.24 na equação 4.22, obtemos o resultado desejado. \square

Observação 4.4. *A equação original de Simons não assume nenhuma condição sobre o espaço ambiente, e é provada em codimensão arbitrária. Chern, Do Carmo, e Kobayashi reescreveram a fórmula de Simons em seu artigo [18], para o caso que o espaço ambiente era a esfera. Nomizu e Smyth provaram uma fórmula análoga para hypersuperfícies de curvatura média constante em [50]. Alencar e Do Carmo provaram em [3] uma fórmula para hypersuperfícies de curvatura média constante em esferas que pode facilmente ser modificada para o caso em que a variedade ambiente tem curvatura seccional constante c . Dentre as várias aplicações destas fórmulas, gostaríamos de citar o artigo de Lawson, [41]. Veremos nas seções seguintes como aplicar esta fórmula para resolver o problema de Bernstein.*

Finalizamos esta seção com uma desigualdade envolvendo o laplaciano da segunda forma fundamental. O conteúdo original desta desigualdade foi provado por Simons, para imersões mínimas de codimensão arbitrária em [62]. Aqui, provaremos uma versão para hypersuperfícies mínimas de espaços de curvatura constante.

Lema 4.5. *(Desigualdade de Simons) Suponha que $M^n \subset N_c^{n+1}$ é uma hypersuperfície mínima. Então*

$$\Delta_M |A|^2 \geq 2|A|^2(nc - |A|^2) + 2 \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla_M |A||^2 \quad (4.25)$$

Ou, de forma equivalente,

$$|A|\Delta_M |A| - |A|^2(nc - |A|^2) \geq \frac{2}{n} |\nabla_M |A||^2 \quad (4.26)$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que as desigualdades 4.25 e 4.26 são equivalentes. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \Delta_M |A|^2 &\geq +2|A|^2(nc - |A|^2) + 2 \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla_M |A||^2 \\ 2|\nabla_M |A||^2 + 2|A|\Delta_M |A| &\geq +2|A|^2(nc - |A|^2) + 2|\nabla_M |A||^2 + \frac{4}{n} |\nabla_M |A||^2 \\ 2|A|\Delta_M |A| - 2|A|^2(nc - |A|^2) &\geq \frac{4}{n} |\nabla_M |A||^2 \end{aligned}$$

Donde a afirmação segue. Pela equação 4.15, é suficiente mostrar que

$$\sum_{i,j,k=1}^n a_{ij,k}^2 \geq \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla_M |A||^2 \quad (4.27)$$

Seja $x \in M$, e escolha um referencial E_i de que diagonalize a segunda forma fundamental em x , isto é, $a_{ij}(x) = \lambda_i(x)\delta_{ij}$. Observe que

$$\begin{aligned} 2|A|\nabla_M |A| &= \nabla_M |A|^2 \\ 4|A|^2|\nabla_M |A||^2 &= (\nabla_M |A|^2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\nabla_{E_k} |A|^2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\nabla_{E_k} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right) \right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n 2a_{ij}a_{ij,k} \right)^2 \end{aligned}$$

Como o referencial diagonaliza a segunda forma fundamental em x ,

$$\begin{aligned} 4|A|^2|\nabla_M |A||^2 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n 2\lambda_i a_{ii,k} \right)^2 \\ 4|A|^2|\nabla_M |A||^2 &= 4 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ii,k} \right)^2 \\ |A|^2|\nabla_M |A||^2 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{ii,k}^2 \right) \quad (4.28) \\ |A|^2|\nabla_M |A||^2 &\leq |A|^2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ii,k}^2 \right) \\ |\nabla_M |A||^2 &\leq \sum_{i,k=1}^n a_{ii,k}^2 \quad (4.29) \end{aligned}$$

Na equação 4.28 utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como M é mínima, podemos reescrever a equação 4.29

$$\begin{aligned}
|\nabla_M |A||^2 &\leq \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ii,k}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii,i}^2 \\
&\leq \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ii,k}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{jj,i} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\leq \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ii,k}^2 + (n-1) \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{jj,i}^2 \right) \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
&\leq n \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ii,k}^2 \\
&\leq n \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik,i}^2 \\
&\leq \frac{n}{2} \left(\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik,i}^2 + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki,i}^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

A minimalidade foi usada em 4.30: $\sum_j a_{jj,i} = 0$. Na desigualdade 4.31 utilizamos o fato algébrico: $(\sum_{i=1}^n b_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n b_i^2$. Das equações 4.29 e 4.32 concluímos que

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla_M |A||^2 &\leq \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ii,k}^2 + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik,i}^2 + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki,i}^2 \\
&\leq \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij,k}^2
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

4.2 Hipersuperfícies mínimas fechadas em esferas

Nesta seção, se M é uma subvariedade de \mathbb{S}^n , denotaremos as conexões de \mathbb{R}^{n+1} , \mathbb{S}^n e M por $\overline{\nabla}$, $\overline{\nabla}$, e ∇ , respectivamente. O fibrado tangente e normal de M em \mathbb{S}^n serão denotados por TM e νM . A segunda forma fundamental de M , como subvariedade de \mathbb{S}^n será denotada por A , enquanto a segunda forma fundamental de \mathbb{S}^n como subvariedade de \mathbb{R}^{n+1} será denotada por \overline{A} .

Iniciaremos estudando a hipersuperfície mínima fechada mais simples de \mathbb{S}^n , a esfera \mathbb{S}^{n-1} totalmente geodésica.

Proposição 4.6. *Seja $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ o mergulho totalmente geodésico de \mathbb{S}^{n-1} . O índice de Morse de \mathbb{S}^{n-1} é 1, e a nulidade é n .*

Demonstração. Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal de M numa vizinhança U de um ponto p , de tal sorte que os $E_i(q) \in T_qM$, $1 \leq i \leq n-1$, e $E_n(q) \in \nu_qM$, $\forall q \in U$. Note que para qualquer hipersuperfície mínima M de \mathbb{S}^n e qualquer campo $X \in \Gamma(T\mathbb{S}^n)$ vale

$$\begin{aligned} tr_M[R_{\mathbb{S}^n}(\cdot, X)\cdot] &= \sum_{i=1}^{n-1} R_{\mathbb{S}^n}(E_i, X)E_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n g(X, E_j)R_{\mathbb{S}^n}(E_i, E_j)E_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n g(X, E_j)E_j \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$= (n-1)X \tag{4.34}$$

Onde na equação 4.33 utilizamos que \mathbb{S}^n tem curvatura seccional constante 1 (lema 4.1). Já que estamos admitindo que $A \equiv 0$, temos $\tilde{A} \equiv 0$, e a forma bilinear associada ao operador de Jacobi de $M = \mathbb{S}^{n-1}$ agindo nas seções normais de M é

$$I(V, W) = \int_M g(-\Delta_M V - (n-1)V, W)dx \tag{4.35}$$

Portanto os autoespaços da forma quadrática associada $Q(V) = I(V, V)$ são exatamente os mesmos que os do laplaciano $-\Delta_M$, e se λ é um autovalor de $-\Delta_M$, então $\lambda - (n-1)$ é o autovalor correspondente de Q . Como a codimensão é 1, podemos identificar campos normais a M e funções, como vimos anteriormente. Observe que já que M é fechada e conexa, as funções harmônicas em M são constantes, portanto $-\Delta_M$ tem um autoespaço 1-dimensional associado ao autovalor 0. O próximo autovalor de $-\Delta_M$ em \mathbb{S}^{n-1} é $(n-1)$, cujo autoespaço associado é o espaço das restrições dos funcionais lineares de \mathbb{R}^n a \mathbb{S}^{n-1} , cuja dimensão é n . Todos os autovalores restantes de $-\Delta_M$ são maiores do que n . Deste modo, Q tem um autovalor $-n$, cujo autoespaço associado é 1-dimensional, e o autovalor 0, cujo autoespaço associado tem dimensão n , e todos os autovalores restantes são positivos, portanto o índice de Q é 1, e a nulidade é n . \square

Nosso próximo objetivo é comparar o índice e a nulidade de uma hipersuperfície mínima fechada M em \mathbb{S}^n aos valores obtidos para o mergulho totalmente geodésico. Para isto, iremos precisar de alguns resultados preliminares.

Definição 4.7. *Definimos ξ como o espaço vetorial dos campos sobre \mathbb{S}^n que são projeções sobre \mathbb{S}^n de campos paralelos de \mathbb{R}^{n+1}*

$$\xi = \{Z \in \Gamma(T\mathbb{S}^n); Z = W^T; W \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1}), \overline{\nabla}W = 0\} \quad (4.36)$$

Lema 4.8. *Seja $Z \in \xi$. Dado $p \in \mathbb{S}^n$, existe uma função $\lambda : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $X \in T_p\mathbb{S}^n$ vale*

$$\overline{\nabla}_X Z = \lambda X \quad (4.37)$$

Demonstração. Suponha que $Z = W^T$, onde W é um campo paralelo de \mathbb{R}^{n+1} e T denota a projeção sobre o fibrado tangente de \mathbb{S}^n .

Temos então

$$\overline{\nabla}_X Z = (\overline{\nabla}_X Z)^T = (\overline{\nabla}_X W^T)^T = -(\overline{\nabla}_X W^\perp)^T = \lambda X$$

Onde a última igualdade segue do fato de a segunda forma fundamental de \mathbb{S}^n em \mathbb{S}^n é a matriz identidade, e $\lambda = \langle W^N, \nu \rangle$ onde ν é o campo normal unitário que dá a orientação de \mathbb{S}^n . \square

Lema 4.9. *Seja $Z \in \xi$. Sejam Z^T e Z^\perp as projeções de Z sobre TM e νM , respectivamente. Os campos Z^T e Z^\perp em M satisfazem*

$$\begin{cases} \nabla_X^\perp Z^\perp &= -A(X, Z^T) \\ \nabla_X Z^T &= -\overline{\nabla}_X Z^\perp + \lambda X \end{cases} \quad (4.38)$$

para cada campo X em M . Ademais, a função λ não depende do campo X .

Demonstração. Usando o lema 4.8 temos

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp Z^\perp &= (\overline{\nabla}_X Z^\perp)^\perp = (\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X Z^T)^\perp \\ &= (\lambda X - \overline{\nabla}_X Z^T)^\perp = 0 - A(X, Z^T) \end{aligned}$$

O que prova a primeira igualdade. Temos ainda

$$\nabla_X Z^T = (\bar{\nabla}_X Z^T)^T = (\bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X Z^\perp)^T = \lambda X - \bar{\nabla}_X Z^\perp$$

□

Lema 4.10. *Se $Z \in \xi$, então*

$$\Delta_M^\perp Z^\perp = -|A|^2 Z^\perp \quad (4.39)$$

Demonstração. Tome $\{E_i\}_{n-1}$ um referencial geodésico de M . Temos

$$\begin{aligned} \Delta_M^\perp Z^\perp &= \sum_{i=1}^{n-1} \nabla_{E_i}^\perp \nabla_{E_i}^\perp Z^\perp \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \nabla_{E_i} (A(E_i, Z^T)) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} [\nabla_{E_i} (A)(E_i, Z^T) + A(\nabla_{E_i} E_i, Z^T) + A(E_i, \nabla_{E_i} Z^T)] \end{aligned}$$

O segundo termo da igualdade acima é nulo, já que o referencial é geodésico. O primeiro termo é nulo por que \mathbb{S}^n tem curvatura seccional constante, donde a derivada covariante do tensor segunda forma fundamental é simétrica, e M é mínima. O último termo é

$$A(E_i, \nabla_{E_i} Z^T) = A(E_i, \lambda E_i - \bar{\nabla}_{E_i} Z^\perp) \quad (4.40)$$

$$= \lambda A(E_i, E_i) - A(E_i, \bar{\nabla}_{E_i} Z^\perp) \quad (4.41)$$

$$= \lambda A(E_i, E_i) - \sum_{j=1}^{n-1} A(E_i, g(\bar{\nabla}_{E_i} Z^\perp, E_j) E_j) \quad (4.42)$$

$$= \lambda A(E_i, E_i) + \sum_{j=1}^{n-1} A(E_i, E_j) g(Z^\perp, \bar{\nabla}_{E_i} E_j) \quad (4.43)$$

$$= \lambda A(E_i, E_i) + \sum_{j=1}^{n-1} A(E_i, E_j) g(\nu, \bar{\nabla}_{E_i} E_j) g(Z^\perp, \nu) \quad (4.44)$$

$$= \lambda A(E_i, E_i) + \sum_{j=1}^{n-1} g(A(E_i, E_j), \nu) g(\nu, \bar{\nabla}_{E_i} E_j) g(Z^\perp, \nu) \quad (4.45)$$

$$= \lambda A(E_i, E_i) + \sum_{j=1}^{n-1} [g(A(E_i, E_j), \nu)]^2 Z^\perp \quad (4.46)$$

O primeiro termo é anulado ao somarmos em i pela minimalidade de M , enquanto a soma em i do segundo termo é $|A|^2 Z^\perp$, o que conclui a prova. \square

Da discussão acima, o corolário abaixo é imediato.

Corolário 4.11. *Seja $Z \in \xi$. O operador de Jacobi de M (como subvariedade de \mathbb{S}^n),*

$$LX = -\Delta_M^\perp X - |A|^2 X - (n-1)X$$

agindo em Z^\perp se escreve

$$LZ^\perp = -(n-1)Z^\perp \tag{4.47}$$

A forma bilinear associada é

$$I(Z^\perp, W^\perp) = (1-n) \int_M g(Z^\perp, W^\perp) dx \tag{4.48}$$

Definição 4.12. *Denotaremos por ξ^\perp o espaço vetorial das seções de νM consistindo de elementos Z^\perp , onde $Z \in \xi$.*

$$\xi^\perp = \{Z^\perp; Z \in \xi\}$$

Com esta definição e o corolário 4.11, vemos facilmente que

Corolário 4.13. *A forma bilinear associada ao operador de Jacobi de M (como subvariedade de \mathbb{S}^n) restrita ao espaço vetorial ξ^\perp é negativa definida.*

Lema 4.14. *A dimensão do espaço vetorial ξ^\perp é maior que ou igual a 1. A igualdade ocorre se e somente se M é difeomorfa a \mathbb{S}^{n-1} , e M é totalmente geodésica.*

Demonstração. Já que os vetores de ξ geram o espaço $T_p \mathbb{S}^n$ em cada ponto, e M tem codimensão um em \mathbb{S}^n , a dimensão de ξ^\perp é no mínimo 1. Suponha que $\dim(\xi) = 1$. Considere o homomorfismo $T : \xi \rightarrow \xi^\perp$ que a cada campo $Z \in \xi$ associa a sua projeção sobre νM , $T(Z) = Z^\perp$. Se um campo $Z \in \ker(T)$ então $Z = Z^T$ em cada ponto de M .

Fixado $p \in M$, consideramos o homomorfismo $S_p : \xi \rightarrow \nu_p M$, definido por

$$S_p(Z) = Z^\perp(p)$$

Claramente, $\ker(T) \subset \ker(S_p)$. Por outro lado, $\dim(\ker(S_p)) = (n+1) - (n - (n-1)) = 1$, e de acordo com a nossa hipótese, $\ker(T) = \ker(S_p)$.

Desta forma, dado $Y \in T_p M$, existe $Z \in \xi$ tal que $Z(p) = Y$, e $Z^T = Z$ em M . Assim, de acordo com o lema 4.9 temos

$$A(X, Y)(p) = -\bar{\nabla}_X Z^\perp = 0 \quad (4.49)$$

Como p , X e Y são arbitrários, $A \equiv 0$ e M é totalmente geodésica. Mas a única hipersuperfície totalmente geodésica de S^n é S^{n-1} . \square

Teorema 4.15. *Seja $M^{n-1} \subset S^n$ uma hipersuperfície mínima fechada. O índice de Morse de M é maior ou igual a 1, e a igualdade ocorre se e somente se M é difeomorfa a S^{n-1} e M é totalmente geodésica.*

Demonstração. Isto é consequência direta do lema 4.14 \square

Teorema 4.16. *Seja M uma hipersuperfície fechada de S^n . Então a sua segunda forma fundamental satisfaz*

$$\int_M [|A|^2 - (n-1)] |A|^2 dx \geq 0 \quad (4.50)$$

Demonstração. Note que em S^n a desigualdade de Simons fica

$$\begin{aligned} \Delta_M |A|^2 &\geq 2|A|^2[(n-1) - |A|^2] + 2\left(\frac{n+1}{n-1}\right) |\nabla_M |A||^2 \\ 2|A|^2[|A|^2 - (n-1)] &\geq -\Delta_M |A|^2 + 2\left(\frac{n+1}{n-1}\right) |\nabla_M |A||^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$(4.52)$$

Integrando a última equação sobre M temos

$$\begin{aligned} 2 \int_M |A|^2 [|A|^2 - (n-1)] dx &\geq \int_M -\Delta_M |A|^2 dx + 2\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \int_M |\nabla_M |A||^2 dx \\ &\geq 2\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \int_M |\nabla_M |A||^2 dx \geq 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

\square

Naturalmente a igualdade na estimativa acima é atingida no caso de um mergulho de \mathbb{S}^{n-1} totalmente geodésico. Entretanto, há exemplos não triviais de hipersuperfícies que atingem o ínfimo, por exemplo, os produtos de esferas $\mathbb{S}^m(r) \times \mathbb{S}^m(r)$ em \mathbb{S}^{2m+1} , com $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Finalizamos esta seção com um corolário do teorema anterior

Corolário 4.17. *Seja M uma hipersuperfície mínima fechada em \mathbb{S}^{n-1} . Então ou M é um \mathbb{S}^{n-1} totalmente geodésico, ou $|A|^2 \equiv (n-1)$, ou $|A|^2(p) > (n-1)$, em algum ponto $p \in M$.*

Demonstração. Suponha que $|A|^2 \leq (n-1)$ em todo ponto de M . Então a desigualdade 4.50 nos dá

$$\int_M |A|^2(|A|^2 - (n-1)) = 0 \quad (4.54)$$

Neste caso, temos $|A|^2(|A|^2 - (n-1)) = 0$, e pela continuidade de $|A|^2$, ou temos $|A|^2 = 0$, e M é totalmente geodésica (e portanto é \mathbb{S}^{n-1}), ou $|A|^2 = (n-1)$.

Caso contrário, $|A|^2 > (n-1)$ em algum ponto de M . □

4.3 Estabilidade de variedades cônicas

Definição 4.18. *Seja M uma subvariedade de \mathbb{S}^n . O cone sobre M , CM , é o conjunto*

$$CM = \{tp; t \in [0, 1], p \in M\}$$

Para $\epsilon \in (0, 1)$, o cone ϵ -truncado sobre M , CM_ϵ , é o conjunto

$$CM = \{tp; t \in [\epsilon, 1], p \in M\}$$

Proposição 4.19. *Suponha que M é uma hipersuperfície mínima de \mathbb{S}^n , e $F(m, t)$ é uma função C^∞ em CM ou CM_ϵ . Denote por $F_t(p)$ a função em M definida por $F_t(p) = F(p, t)$. Então*

$$\Delta_{CM}F(p, t) = \frac{1}{t^2}\Delta_M F_t(p) + \frac{n-1}{t}\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(p, t) \quad (4.55)$$

Demonstração. Isto é simplesmente a fórmula do laplaciano em coordenadas polares. \square

Proposição 4.20. *Seja M uma hipersuperfície mínima fechada orientável em \mathbb{S}^n . Então $CM - \{0\}$ é uma hipersuperfície mínima orientável de \mathbb{R}^{n+1} . Para cada $\epsilon \in (0, 1)$, CM_ϵ é uma hipersuperfície mínima orientável compacta de \mathbb{R}^{n+1} .*

Demonstração. Sejam x_i as funções coordenadas numa vizinhança $U \subset M$ de um ponto $p \in M$. Já que o cone CM é invariante por dilatações, definimos a função $F_i(q, t) = tx_i(q)$, para $q \in U$, e observamos que estas funções são funções coordenada de CM no aberto $U \times (0, 1)$. Pela proposição anterior, temos

$$\Delta_{CM}x_i(p, t) = \frac{1}{t^2}\Delta_M(tx_i(p)) + \frac{n-1}{t}\frac{\partial tx_i}{\partial t} + \frac{\partial^2 x_i t}{\partial t^2} \quad (4.56)$$

Já que x_i não depende de t , o último termo da igualdade acima é nulo. Denotando por H o vetor curvatura média de N em \mathbb{R}^{n+1} , temos ainda que

$$\Delta_M x_i = \langle H, e_i \rangle = -(n-1)x_i$$

Da equação 4.56, temos

$$\Delta_{CM}x_i(p, t) = \frac{1}{t}(1-n)x_i + \frac{n-1}{t}x_i = 0$$

Pelo teorema 1.20, CM é mínimo. O mesmo se aplica a CM_ϵ . \square

Proposição 4.21. *Seja M uma hipersuperfície mínima fechada em \mathbb{S}^n . Seja $N(p, t)$ o campo normal unitário em CM_ϵ . Seja $F(p, t)$ uma função suave em CM_ϵ tal que $F(p, \epsilon) = F(p, 1) = 0$ para todo $p \in M$. Então $V(p, t) = F(p, t)N(p, t)$ é um campo normal a CM_ϵ que se anula na fronteira, e temos*

$$I(V, V) = \int_{M \times [\epsilon, 1]} g(-\Delta_M(F_t) - |A(p)|^2 F - t(n-1)\frac{\partial F}{\partial t} - t^2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, t^{n-3}F) \quad (4.57)$$

Onde a integração é tomada com respeito a medida produto.

Demonstração. Como a variedade ambiente é o espaço euclidiano, o termo de curvatura no operador de Jacobi de CM_ϵ se anula, e em codimensão um o operador de Simons é simplesmente $\tilde{A}(X) = |A|^2 X$. Desta forma, a forma bilinear associada ao operador de Jacobi é

$$I(V, V) = \int_{CM_\epsilon} g(-\Delta_{CM_\epsilon} F(p, t) - |A(p, t)|^2 F, F) dx \quad (4.58)$$

A proposição 4.19 e o fato que $|A(p, t)|^2 = \frac{1}{t^2} |A(p)|^2$ nos d o,

$$I(V, V) = \int_{CM_\epsilon} g(-\Delta_{CM_\epsilon} F_t - |A|^2 F - t(n-1) \frac{\partial F}{\partial t} - t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \frac{1}{t^2} F) dx \quad (4.59)$$

Já que a forma de volume em CM_ϵ   t^{n-1} vezes a forma de volume em $M \times [\epsilon, 1]$, o resultado segue.

□

Esta proposição nos motiva a definir dois operadores,

Definição 4.22. *Definimos os operadores $L_1 : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ e $L_2 : C^\infty[\epsilon, 1] \longrightarrow C^\infty[\epsilon, 1]$ por*

$$L_1(f) = -\Delta_M f - |A|^2 f \quad (4.60)$$

$$L_2(g) = -t^2 g'' - (n-1) t g' \quad (4.61)$$

Já que M é compacta e L_1 é uniformemente elíptico, podemos tomar uma seq ncia de autofunções em $C^\infty(M)$ ortogonais em $L^2(M)$, as quais correspondem os autovalores λ_i , de modo que temos

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$$

Ademais, para cada $f \in C^\infty(M)$ temos uma decomposição ( nica) $f = \sum_{i=1}^\infty b_i f_i$. O próximo lema mostra que o operador L_2 também pode ser diagonalizado em $C_0^\infty([\epsilon, 1])$.

Lema 4.23. *Existem funções g_i em $C_0^\infty([\epsilon, 1])$ que diagonalizam o operador L_2 neste espaço, e a cada g_i corresponde um autovalor δ_i , e os δ_i formam uma seq ncia estritamente crescente que diverge. De fato,*

$$g_k = t^{-\frac{n-2}{2}} \sin\left(-\frac{k\pi \log t}{\log \epsilon}\right) \quad (4.62)$$

$$\delta_k = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\log \epsilon}\right)^2 \quad (4.63)$$

Ademais, se $i \neq j$, então

$$\int_{\epsilon}^1 g_i g_j t^{n-3} dt = 0 \quad (4.64)$$

E se $g \in C_0^\infty([\epsilon, 1])$, então existem constantes unicamente determinadas c_i tais que $g = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i$.

Demonstração. Mostraremos que as g_k são autofunções. Para simplificar a notação, consideraremos a função $g \in C_0^\infty([\epsilon, 1])$ dada por

$$g(t) = t^a \sin(b \log t)$$

Onde $a = \frac{2-n}{2}$ e $b = \frac{k\pi}{\log \epsilon}$. Denote ainda $p = (n-1)$.

Assim, temos

$$L_2(g) = -t^2 g'' - ptg' \quad (4.65)$$

Vamos calcular as derivadas de g .

$$g' = at^{a-1}[\sin(b \log t) + t^{a-1}b \cos(b \log t)] \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{t}[t^a \sin(b \log t)] + t^{a-1}b \cos(b \log t) \\ &= \frac{a}{t}g + t^{a-1}b \cos(b \log t) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Da equação 4.66 temos

$$\begin{aligned} g'' &= (a-1)t^{a-2}[a \sin(b \log t) + b \cos(b \log t)] + t^{a-1} \left[\frac{ab}{t} \cos(b \log t) - \frac{b^2}{t} \sin(b \log t) \right] \\ &= \frac{(a-1)}{t}g' + bt^{a-2}[a \cos(b \log t) - b \sin(b \log t)] \end{aligned} \quad (4.68)$$

Sustituindo as equações 4.67 e 4.68 na equação 4.65, temos

$$\begin{aligned}
L_2(g) &= -t^2 \left[\frac{(a-1)}{t} g' \right] - t^a b [a \cos(b \log t) - b \sin(b \log t)] - ptg' \\
&= -t[(a-1) + p]g' - bt^a [a \cos(b \log t)] + b^2 t^a \sin(b \log t) \\
&= atg' - abt^a \cos(b \log t) + b^2 g
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$= at \left[\frac{a}{t} g + bt^{a-1} \cos(b \log t) \right] - abt^a \cos(b \log t) + b^2 g \tag{4.70}$$

$$= (a^2 + b^2)g \tag{4.71}$$

Na equação 4.69 utilizamos que $(a-1) + p = \frac{n-2}{2} = -a$, enquanto na equação 4.70 substituímos g' por sua expressão 4.67.

Desta forma, cada g_k é autofunção, com autovalor associado

$$\delta_k = a^2 + b^2 = \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\log \epsilon} \right)^2$$

Um cálculo simples², porém extenso, mostra que as g_k formam um sistema completo em $C_0^\infty([\epsilon, 1])$. □

Lema 4.24. *Com as hipóteses da proposição 4.21, podemos escolher $F(m, t)$ tal que $I(V, V) < 0$ em CM_ϵ se e somente se $\lambda_1 + \delta_1 < 0$.*

Demonstração. Já que $F(p, t)$ se anula na fronteira do cone, temos uma decomposição única para F ,

$$F(p, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij} f_i(p) g_j(t) \tag{4.72}$$

Pela proposição 4.21 temos

²O procedimento é análogo à demonstração que $h_k(x) = \sin(k\pi x)$ forma um sistema completo em $L^2([0, 1])$

$$\begin{aligned}
I(V, V) &= \int_{M \times [\epsilon, 1]} g\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} (h_{ij}L_1(f_i)g_j + h_{ij}f_2L_2(g_j)), t^{n-3} \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}f_i g_j\right) \\
&= \int_{M \times [\epsilon, 1]} g\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}[\lambda_i + \delta_j]f_i g_j, t^{n-3} \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}f_i g_j\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{\infty} h_{ij}h_{kl}[\lambda_i + \delta_j] \int_{M \times [\epsilon, 1]} f_i f_k g_j g_l t^{p-3} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{\infty} h_{ij}h_{kl}[\lambda_i + \delta_j] \left[\int_M f_i f_k dx \right] \left[\int_{\epsilon}^1 g_j g_l t^{p-3} dt \right] \tag{4.73}
\end{aligned}$$

Utilizando o fato que as funções f_i são ortogonais, e as funções g_i satisfazem a equação 4.64 podemos reescrever a equação 4.73

$$I(V, V) = \sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij}^2[\lambda_i + \delta_j] \left[\int_M f_i^2 dx \right] \left[\int_{\epsilon}^1 g_j^2 t^{p-3} dt \right] \tag{4.74}$$

Se $I(V, V) < 0$, então alguma soma $[\lambda_i + \delta_j] < 0$. Mas já que $\lambda_1 \leq \lambda_i$, e $\delta_1 < \delta_j$, isto implica $[\lambda_1 + \delta_1] < 0$. Por outro lado, se $\lambda_1 + \delta_1 < 0$, então basta tomarmos a variação $F(p, t) = f_1(p)g_1(t)$, que dá $I(V, V) = \lambda_1 + \delta_1$. \square

Portanto, a forma bilinear Q associada ao operador de Jacobi do cone CM_{ϵ} possui índice positivo se e somente se $\lambda_1 + \delta_1 < 0$. Já calculamos δ_1 no lema 4.23, iremos agora estimar λ_1 .

Lema 4.25. *Seja M uma hipersuperfície mínima fechada de \mathbb{S}^n . Então $\lambda_1 \leq (1 - n)$ a menos que M seja uma esfera \mathbb{S}^{n-1} totalmente geodésica, e neste caso, $\lambda_1 = 0$.*

Demonstração. Se M é uma esfera \mathbb{S}^{n-1} totalmente geodésica, então $L_1 = -\Delta_M$, donde $\lambda_1 = 0$ e todos os outros autovalores são estritamente positivos.

Suponha que M não seja totalmente geodésica. Em geral, temos a caracterização variacional de λ_1 como ínfimo dos quocientes de Rayleigh,

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{f \in C^{\infty}(M) \\ f \neq 0}} \frac{\int_M L(f) f dx}{\int_M f^2 dx} \tag{4.75}$$

Provaremos o teorema escolhendo uma sequência de f_i 's e passando ao limite de seus quocientes de Rayleigh. Considere as funções $f_{\epsilon} \in C^{\infty}(M)$ dadas por $f_{\epsilon} = (|A|^2 + \epsilon)^{\frac{1}{2}}$. Note que no limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_M f_\epsilon^2 dx = \int_M |A|^2 dx \neq 0 \quad (4.76)$$

Considere $\{E_k\}_{i=1}^{n-1}$ um referencial geodésico de M em p . Vamos calcular o laplaciano de f_ϵ . Note que

$$E_k(f_\epsilon) = \frac{1}{f_\epsilon} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,k}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \Delta_M f_\epsilon &= \sum_{k=1}^{n-1} E_k(E_k(f_\epsilon)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} E_k \left(\frac{1}{f_\epsilon} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} [a_{ij,k}^2 + a_{ij} a_{ij,kk}] \right) - \frac{1}{f_\epsilon^3} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,k} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,kk} \right) + \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \right) - \frac{1}{f_\epsilon^3} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,k} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Note que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,k} \right)^2 &\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \right) \\ &\leq |A|^2 \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \right) \end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em 4.77 temos

$$\begin{aligned} \Delta_M f_\epsilon &\geq \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,kk} \right) + \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \right) - |A|^2 \left(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,kk} \right) + \frac{1}{f_\epsilon^3} [f_\epsilon^2 |\nabla_M A|^2 - |A|^2 |\nabla_M A|^2] \\ &\geq \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,kk} \right) + \frac{\epsilon |\nabla_M A|^2}{f_\epsilon^3} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta_M f_\epsilon &\geq \frac{1}{f_\epsilon} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{ij,kk} \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{f_\epsilon} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \Delta_M a_{ij} \right)\end{aligned}\quad (4.78)$$

Substituindo a equação 4.24 na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_M f_\epsilon &\geq \frac{1}{f_\epsilon} |A|^2 [(n-1) - |A|^2] \\ -f_\epsilon \Delta_M f_\epsilon &\leq |A|^4 - (n-1)|A|^2\end{aligned}\quad (4.79)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}L_1(f_\epsilon) f_\epsilon &\leq |A|^4 - (n-1)|A|^2 - |A|^2 (f_\epsilon)^2 \\ &\leq |A|^4 - (n-1)|A|^2 - |A|^4 + \epsilon |A|^2 \\ &\leq -(n-1)|A|^2\end{aligned}\quad (4.80)$$

Por fim, concluimos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_M f_\epsilon^2 dx \right] \int_M L_1(f_\epsilon) f_\epsilon dx \leq (1-n) \quad (4.81)$$

O que prova o resultado. \square

Teorema 4.26. (Simons) *Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ uma subvariedade mínima fechada. Suponha que M não é uma esfera \mathbb{S}^{n-1} totalmente geodésica. Então, se $n \leq 6$, o cone $CM \subset \mathbb{R}^{n+1}$ não é estável.*

Demonstração. Já que M não é totalmente geodésica, os lemas 4.23 e 4.25 mostram que

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \delta_1 &\leq (1-n) + \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{\log \epsilon} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} [n^2 - 8n + 8] + \left(\frac{\pi}{\log \epsilon} \right)^2\end{aligned}\quad (4.82)$$

As raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 8x + 8$ são

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{32}}{2} < 7$$

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} > 1$$

Portanto, é possível escolher ϵ pequeno o suficiente para que $\lambda_1 + \delta_1 < 0$ se e somente se $2 \leq n \leq 6$. O lema 4.24 implica que para ϵ pequeno o suficiente o cone CM_ϵ não é estável. Desta forma, o cone CM não é estável, pois caso fosse, cada subdomínio de CM seria também estável. \square

Mostraremos agora o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.27. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a equação da superfície mínima em \mathbb{R}^n . Então, se $n \leq 7$, f é uma função linear.*

Demonstração. Parte 1: Suponha que exista uma solução da equação da superfície mínima em todo o \mathbb{R}^n , $n \leq 6$. Pelo teorema de Fleming, 3.27, existe então um cone singular estável C em \mathbb{R}^{n+1} . Há 2 casos,

Caso a: Suponha que C é regular fora da origem.

Então, o conjunto $M = \mathbb{S}^n \cap C$ é uma subvariedade de \mathbb{S}^n , e $C = CM$ é o cone sobre M . Pelo teorema de Simons, 4.26, tal cone não pode existir se $2 \leq n \leq 6$.

Caso b: C é singular em um ponto $x_0 \neq 0$.

Pelo teorema de Di Giorgi, existe um cone estável $Q_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com vértice em 0 tal que $Q_1 = A_1 \times \mathbb{R}$, onde A_1 é um cone minimizante em \mathbb{R}^n , com vértice em 0. Se A é regular fora de 0, o Teorema de Simons mostra que A é um hiperplano de \mathbb{R}^n , donde Q_1 é um hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} , um absurdo, já que toda a reta contendo $0, x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ é composta de pontos singulares de Q_1 . Desta forma, A_1 deve ser singular em um ponto $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq 0$.

Repetindo o argumento anterior, mostramos que existe um cone minimizante $A_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, singular em algum ponto $x_2 \neq 0$. Após no máximo 4 passos, chegamos a um cone estável $A_k \subset \mathbb{R}^3$, com vértice em 0. Pelo teorema de Fleming, 3.29, A_k deve ser um plano. Assim, todos os cones anteriores devem ser hiperplanos, o que mostra que o cone inicial C não é singular em x_0 , um absurdo.

Parte 2: Resta mostrar o caso $n = 7$. Note que se C é um cone estável em \mathbb{R}^8 com vértice em 0, e C possui um ponto singular, $x_0 \neq 0$, o teorema de Di Giorgi, 3.31, implica que existe um cone estável $A \subset \mathbb{R}^7$, com vértice em 0, o que contradiz a parte 1.

Resta estudar o caso em que o cone C é regular. Neste caso o cone C é o subgráfico de uma quasi-solução³ v . Sejam

$$P = \{x \in \mathbb{R}^7 : v(x) = +\infty\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R}^7 : v(x) = -\infty\}$$

Note que P e N são cones, já que C é um cone e v é uma função homogênea. Ademais, P e N são mínimos, estáveis e com vértice em 0. Se ambos P e N são não vazios, então ambos são hiperplanos, pelo que foi mostrado na parte 1, logo C é um hiperplano, absurdo. Desta forma, um destes cones deve ser vazio. Suponha sem perda de generalidade, que $P = \emptyset$.

Neste caso, v é localmente limitada por cima em \mathbb{R}^n , donde a função $f(x)$ satisfaz:

$$\sup_{D_r(x)} f(x) \leq \gamma r$$

Da estimativa a priori do gradiente, temos

$$\sup_{D_{\frac{r}{5}}} |Df| \leq \exp \left\{ c_5 \left(1 + \gamma - \frac{f(0)}{r} \right) \right\}$$

Tomando $R \rightarrow \infty$, concluímos que $\sup |Df| \leq K$, onde K é uma constante, e portanto f é uma função afim. \square

Observe que a análise feita no teorema 4.26 implica que podem existir cones mínimos estáveis em \mathbb{R}^n , para $n \geq 8$. Isto sugere que o teorema de Bernstein pode falhar em dimensão $n \geq 9$.

Para finalizar este capítulo, veremos o exemplo de uma hipersuperfície mínima $M \subset \mathbb{S}^7$ tal que para todo $\epsilon > 0$ o cone CM_ϵ sobre M é estável em \mathbb{R}^8 .

Teorema 4.28. *(O cone de Simons) Considere a variedade $M = \mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{2}}{2}) \subset \mathbb{S}^7$. Para todo $\epsilon > 0$, o cone CM_ϵ é estável com respeito à sua fronteira.*

Demonstração. Em M , temos $|A|^2 = 6$, donde $L_1(f) = -\Delta_M(f) - 6f$, e claramente $\lambda_1 = -6$. Para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\lambda_1 + \delta_1 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\log \epsilon}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

³ Vide cap. 16 em [34]

Portanto não é possível escolher uma variação V de CM_ϵ tal que $I(V, V) < 0$, donde CM_ϵ é estável. \square

Note que o argumento acima não é suficiente para concluir a estabilidade do cone de Simons. Com efeito, há campos admissíveis em CM que não são limite de campos admissíveis em CM_ϵ , quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Capítulo 5

O contraexemplo de Bombieri- De Giorgi- Giusti

O teorema 4.26 no capítulo anterior deixa aberta a questão da existência de um cone singular estável em dimensão maior que 7. O teorema 4.28 nos indica que o cone de Simons é um bom candidato, já que cada cone truncado CM_ϵ é estável. De fato, Bombieri, De Giorgi e Giusti contornaram esta dificuldade mostrando em [14] que CM é a fronteira de um conjunto minimal de \mathbb{R}^8 . Na seção 5.1 motivados pela estabilidade do cone de Simons, iremos procurar um gráfico mínimo completo e não trivial em \mathbb{R}^9 . Este resultado também é devido a Bombieri, De Giorgi, e Giusti, e pode ser encontrado no mesmo artigo.

5.1 Gráficos mínimos completos

Suponha que $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação da superfície mínima, e f não é linear. A estabilidade do cone de Simons,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^8; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\}$$

mostra que é natural esperar certa simetria do gráfico desta função. Iremos portanto procurar soluções que tenham as mesmas simetrias que o cone de Simons,

$$f(x_1, \dots, x_8) = F(u, v)$$

Onde $u = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}$ e $v = (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2)^{\frac{1}{2}}$. Vejamos como a equação da superfície mínima fica para uma f desta forma.

Se $i \leq 4$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= F_u \frac{\partial u}{\partial x_i} + F_v \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= F_u \frac{x_i}{u}\end{aligned}$$

Analogamente, para $5 \leq i \leq 8$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_v \frac{x_i}{v}$$

Portanto

$$\begin{aligned}1 + |\nabla f|^2 &= 1 + \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i=5}^8 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^4 F_u^2 \left(\frac{x_i^2}{u^2} \right) + \sum_{i=5}^8 F_v^2 \left(\frac{x_i^2}{v^2} \right) \\ &= 1 + F_u^2 + F_v^2 \\ &= 1 + |\nabla F|^2\end{aligned}$$

Definindo o campo $V = (V_1, \dots, V_8) = W \nabla f$, onde $W = (1 + |\nabla F|^2)^{-\frac{1}{2}}$, temos para $1 \leq i \leq 4$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(W \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_i} F_u \frac{x_i}{u} + W \frac{\partial F_u}{\partial x_i} \frac{x_i}{u} + W F_u \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{u} \right) \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} W^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (1 + F_u^2 + F_v^2) \right] \cdot F_u \frac{x_i}{u} + W \left[F_{uu} \frac{\partial u}{\partial x_i} + F_{uv} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] \frac{x_i}{u} + W F_u \left[\frac{1}{u} - x_i \frac{1}{u^2} \frac{x_i}{u} \right] \right\} \\ &= \left\{ -W^3 \left[F_u \frac{\partial F_u}{\partial x_i} + F_v \frac{\partial F_v}{\partial x_i} \right] F_u \frac{x_i}{u} + W F_{uu} \left(\frac{x_i}{u} \right)^2 + W F_u \left(\frac{u^2 - x_i^2}{u^3} \right) \right\} \\ &= \left\{ -W^3 \left[F_u F_{uu} \frac{\partial u}{\partial x_i} + F_u F_{uv} \frac{\partial v}{\partial x_i} + F_v F_{vu} \frac{\partial u}{\partial x_i} + F_v F_v v \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] F_u \frac{\partial x_i}{\partial u} \right. \\ &\quad \left. + W \left[F_{uu} \left(\frac{x_i}{u} \right)^2 + F_u \left(\frac{u^2 - x_i^2}{u^3} \right) \right] \right\} \\ &= \left\{ -W^3 \left[F_u^2 \left(\frac{x_i}{u} \right)^2 + F_v F_u F_{uv} \left(\frac{x_i}{u} \right)^2 \right] + W \left[\left(\frac{x_i}{u} \right)^2 F_{uu} + F_u \left(\frac{u^2 - x_i^2}{u^3} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

Analogamente, se $5 \leq i \leq 8$.

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \left\{ -W^3 \left[F_v^2 \left(\frac{x_i}{v} \right)^2 + F_u F_v F_{vu} \left(\frac{x_i}{v} \right)^2 \right] + W \left[\left(\frac{x_i}{v} \right)^2 F_{vv} + F_v \left(\frac{v^2 - x_i^2}{v^3} \right) \right] \right\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \sum_{i=5}^8 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \\ &= \left\{ -W^3 [F_u^2 F_{uu} + F_u F_v F_{uv} + F_v^2 F_{vv} + F_u F_v F_{vu}] \right. \\ &\quad \left. + W \left[F_{uu} + F_u \left(\frac{4u^2 - u^2}{u^3} \right) + F_{vv} + F_v \left(\frac{4v^2 - v^2}{v^3} \right) \right] \right\} \\ &= -W^3 [F_u^2 F_{uu} + F_v^2 F_{vv} + 2F_u F_v F_{uv}] + W \left[F_{uu} + F_{vv} + 3 \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) \right] \\ &= W^3 \left\{ -[F_u^2 F_{uu} + F_v^2 F_{vv} + 2F_u F_v F_{uv}] + W^{-2} \left[F_{uu} + F_{vv} + 3 \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) \right] \right\} \\ &= W^3 \left\{ -[F_u^2 F_{uu} + F_v F_{vv} + 2F_u F_v F_{uv}] + (1 + F_u^2 + F_v^2) \left[F_{uu} + F_{vv} + 2 \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) \right] \right\} \\ &= W^3 \left\{ -F_u^2 F_{uu} - F_v^2 F_{vv} - 2F_u F_v F_{uv} + F_{uu} + F_{vv} + 3(1 + F_u^2 + F_v^2) \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) \right. \\ &\quad \left. + F_u^2 F_{uu} + F_u^2 F_{vv} + F_v^2 F_{uu} + F_v^2 F_{vv} \right\} \\ &= [(1 + F_u^2) F_{vv} + (1 + F_v^2) F_{uu} - 2F_u F_v F_{uv}] + 3(1 + F_u^2 + F_v^2) \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) \end{aligned}$$

Definimos portanto o operador

$$\Theta(F) = [(1 + F_u^2) F_{vv} + (1 + F_v^2) F_{uu} - 2F_u F_v F_{uv}] + 3(1 + F_u^2 + F_v^2) \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) \quad (5.1)$$

Iremos utilizar o método de subsoluções-supersoluções para encontrar uma solução da equação $\Theta(f) = 0$. Considere os domínios

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u, v \geq 0\}$$

$$T_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq v < u\}$$

$$T_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u < v\}$$

A estratégia é construir funções F_1 e F_2 em T tais que

$$\begin{cases} \Theta(F_1) > 0 & \text{em Int}(T_1) \\ \Theta(F_1) < 0 & \text{em Int}(T_2) \end{cases} \quad (5.2)$$

E

$$\begin{cases} \Theta(F_2) < 0 & \text{em Int}(T_1) \\ \Theta(F_2) > 0 & \text{em Int}(T_2) \end{cases} \quad (5.3)$$

Além disso, iremos pedir

$$\begin{cases} 0 < F_1 < F_2 & \text{em } T_1 \\ F_2 < F_1 < 0 & \text{em } T_2 \\ F_1 = F_2 = 0 & \text{se } u = v \\ F_1(u, v) = -F_1(v, u) & \end{cases} \quad (5.4)$$

Podemos então construir funções f_1 e f_2 em \mathbb{R}^8 , definidas por $f_i(x) = F_i(u, v)$, para $i = 1, 2$, de modo se denotamos o operador da superfície mínima por Q , temos

$$\begin{cases} Q(f_1) > 0 & \text{em } S \\ Q(f_2) < 0 & \text{em } S \\ 0 < f_1 < f_2 & \text{em } S \end{cases} \quad (5.5)$$

Ademais,

$$\begin{cases} Q(f_1) < 0 & \text{em } \mathbb{R}^8 \setminus S \\ Q(f_2) > 0 & \text{em } \mathbb{R}^8 \setminus S \\ f_2 < f_1 < 0 & \text{em } \mathbb{R}^8 \setminus S \end{cases} \quad (5.6)$$

Além disso, $f_1 = f_2 = 0$ em ∂S . Considere agora $R > 0$, denote por D_R a bola de raio R centrada na origem de \mathbb{R}^8 , e seja f^R a (única) solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q(f) = 0 & \text{em } D_R \\ f = f_1 & \text{em } \partial D_R \end{cases} \quad (5.7)$$

Note que já que f_1 é invariante pela ação de $SO(3) \times SO(3)$, a solução f^R também deve ser, pela unicidade da solução. Deste modo podemos escrever

$$f^R(x) = F^R(u, v) \quad (5.8)$$

Note ainda que desde que $F_1(u, v) = -F_1(v, u)$, devemos ter, $F^R(u, v) = -F^R(v, u)$, já que o operador Θ é simétrico com relação a u e v , e a solução f^R é única. Desta forma, devemos ter $f^R \equiv 0$ em ∂S . Pelo princípio de comparação,

$$0 \leq f_1(x) \leq f^R(x) \leq f_2(x) \text{ em } S \cap D_R \quad (5.9)$$

De modo análogo mostramos que

$$f_2(x) \leq f^R(x) \leq f_1(x) \leq 0 \text{ em } D_R \setminus S \quad (5.10)$$

Desta forma concluímos que

$$|f_1(x)| \leq |f^R(x)| \leq |f_2(x)| \text{ em } D_R \quad (5.11)$$

Consideramos agora a sequência $\{f^h\}$, $h = 1, 2, \dots$, e $\rho > 0$ fixado. Da estimativa a priori do gradiente¹, temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D_\rho} |Df^h(x)| &\leq \exp \left\{ C \left(1 + \sup_{D_{\rho+1}} |f^h(x)| \right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ C \left(1 + \sup_{D_{\rho+1}} |f_2(x)| \right) \right\} \\ &\leq \tilde{C}(\rho) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Desde que a estimativa 5.12 é independente de h , pelo teorema de Ascoli-Arzelá podemos extrair uma subsequência que ainda denotaremos por $\{f^h\}$, convergendo uniformemente em conjuntos compactos de \mathbb{R}^8 para uma função f , solução da equação da superfície

¹Vide [34], teorema 13.5

mínima em \mathbb{R}^8 , e a função f satisfaz $|f(x)| \geq |f_1(x)|$ em \mathbb{R}^8 . Agora basta tomarmos f_1 com um crescimento adequado para mostrarmos que o gráfico de f não é um hiperplano.

Veremos como fazer todas estas construções a seguir.

Será útil decompor o operador Θ em dois operadores mais simples, $\Theta = \mathcal{E} + \mathcal{D}$, onde

$$\mathcal{E}(F) = F_u^2 F_{vv} + F_v^2 F_{uu} - 2F_u F_v F_{uv} + 3 \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) (F_u^2 + F_v^2) \quad (5.13)$$

$$\mathcal{D}(F) = F_{uu} + F_{vv} + 3 \left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v} \right) \quad (5.14)$$

Definimos em T as coordenadas

$$r = u^2 + v^2 \quad (5.15)$$

$$t = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \quad (5.16)$$

Note que estas coordenadas são 'quase' coordenadas polares, r é a raiz quadrada do raio, enquanto t é o cosseno do dobro do argumento de (u, v) . As coordenadas r e t são invariantes por homotetias. Observe ainda que $t > 0$ em $\text{Int}(T_1)$, $t < 0$ em $\text{Int}(T_2)$, e $t = 0$ em $u = v$. Escrevendo $G(r, t) = F(u, v)$, obtemos

$$\mathcal{E}(F) = 8(1 - t^2) \left\{ 2G_t^2 G_{rr} - 4G_t G_r G_{rt} + 2G_r^2 G_{tt} + \frac{9}{r} G_r G_t^2 - \frac{6t}{r^2} G_t^3 + 7r G_r^3 - 8t G_t G_r^2 \right\} \quad (5.17)$$

$$\mathcal{D}(F) = 64 \left(G_r - \frac{t}{r} G_t \right) + 16r \left[G_{rr} + \frac{1 - t^2}{r^2} G_{tt} \right] \quad (5.18)$$

A análise do operador \mathcal{E} feita na seção 3 de [14], nos motiva a tomar a função

$$G(r, t) = tr^{\frac{3}{2}}$$

Substituindo esta função nas equações 5.17 e 5.18 temos

$$\frac{1}{8} \mathcal{E}(F) = \frac{45}{8} r^{\frac{5}{2}} t^3 \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{8} \mathcal{D}(F) = \frac{11}{2} r^{\frac{1}{2}} t \quad (5.20)$$

Deste modo a função $F_1(u, v) = tr^{\frac{3}{2}} = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ satisfaz as condições 5.2, $F_1 = 0$ se $u = v$, e $F(u, v) = -F(v, u)$. Note ainda que $f_1(x) = F_1(u, v)$ possui crescimento cúbico em 4 direções de \mathbb{R}^8 ,

$$\frac{|f_1(x)|}{|x|^3} = \frac{|r^2 \cos(2\theta)|r}{r^3} = 1, \text{ se } \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \quad (5.21)$$

Deste modo, se $|f(x)| \geq |f_1(x)|$, então o gráfico de f não é um hiperplano. Falta somente mostrar a existência da função F_2 .

Consideramos a função $G(r, t) = rt + r^{\frac{3}{2}}g(t)$, onde g é uma função a ser determinada. Por simplicidade, iremos considerar g uma função ímpar de t : isto reduz nossos cálculos pela metade, já que só temos que provar uma das desigualdades em 5.3, e temos imediatamente $G(r, t) = 0$ em $t = 0$. Com G como acima, obtemos

$$\frac{1}{8}\mathcal{E}(F) = r^{\frac{5}{2}}M_1(t) + r^2M_2(t) + r^{\frac{3}{2}}M_3(t) - rt \quad (5.22)$$

Onde

$$M_1(t) = (1 - t^2) \left(6g(g')^2 - 6t(g')^3 + \frac{9}{2}g^2g'' \right) + \frac{189}{8}g^3 - 18tg^2g' \quad (5.23)$$

$$M_2(t) = (1 - t^2)(15gg' - 15t(g')^2 + 6tgg'') + \frac{117}{4}tg^2 - 24t^2gg' \quad (5.24)$$

$$M_3(t) = (1 - t^2)(9g - 10tg' + 2t^2g'') - 8t^3g' + \frac{15}{2}t^2g \quad (5.25)$$

Tomando $g(t) = t(1 + C|t|^{\lambda-1})$, $C > 0$, temos uma função ímpar de t . Tomando C grande o suficiente, e $\frac{21}{16} < \lambda < \frac{4}{3}$, podemos estimar M_1 , M_2 , e M_3 , de modo que

$$\frac{1}{8}\mathcal{E}(F) \leq -\tilde{C}(r^{\frac{5}{2}}t^{\lambda+rt}) \quad (5.26)$$

em $\text{Int}(T_1)$. Uma estimativa semelhante mostra que

$$\frac{1}{8}\mathcal{D}(F) \leq \bar{C}r^{\frac{1}{2}}t^{\lambda-2} \quad (5.27)$$

Note que estas duas últimas estimativas dependem da constante λ escolhida. Para eliminar a última dependência, faremos o seguinte truque. Seja $H(z)$ uma função monótona crescente em \mathbb{R} . Temos assim

$$\mathcal{E}(H(F)) = [H'(F)]^3 \mathcal{E}(F) \quad (5.28)$$

$$\mathcal{D}(H(F)) = [H'(F)\mathcal{D}(F)] + 16rH''(F) \left(G_r^2 + \frac{1-t^2}{r^2} G_t^2 \right) \quad (5.29)$$

Em nosso caso, temos

$$r \left(G_r^2 + \frac{1-t^2}{r^2} G_t^2 \right) \geq r + r^2 \quad (5.30)$$

Portanto, se tivermos $H'(z) \geq 1$ e $H''(z) \leq 0$, a equação 5.29 nos dá

$$\mathcal{D}(H(F)) \leq \bar{C} r^{\frac{1}{2}} t^{\lambda-2} H'(F) + 16(r + r^2) H''(F) \quad (5.31)$$

Donde

$$\Theta(H(F)) \leq -\tilde{C}(r^{\frac{5}{2}} t^\lambda + rt)[H'(F)]^3 + \bar{C} r^{\frac{1}{2}} t^{\lambda-2} H'(F) + 16(r + r^2) H''(F) \quad (5.32)$$

Se $r^2 t^2 \geq \hat{C} = \frac{\bar{C}}{\tilde{C}}$ obtemos $\Theta(H(F)) \leq 0$ da equação acima. Nos restringimos então ao caso $r^2 t^2 < \hat{C}$. Para mostrar que $\Theta(H(F)) \leq 0$ neste domínio, é suficiente mostrar que $\mathcal{D}(H(F)) \leq 0$. Para fazer isto, mostraremos que a expressão no lado direito de 5.31, isto é,

$$-\frac{H''(F)}{H'(F)} \geq \frac{C_1}{(r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{3}{2}})} t^{\lambda-2}. \quad (5.33)$$

Note que se $r \geq 1$, temos $F \leq C_2 r^{\frac{3}{2}} t$ e portanto,

$$F^{2-\lambda} + F^{2\lambda-1} \leq C_3 (r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{3}{2}}) t^{2-\lambda} \quad (5.34)$$

Para $r < 1$, temos uma desigualdade análoga,

$$F^{2-\lambda} + F^{2\lambda-1} \leq C_4 (r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{3}{2}}) t^{\lambda-2} \quad (5.35)$$

Já que $2 - \lambda > \frac{1}{2}$. Concluimos assim que se

$$-\frac{H''(z)}{H'(z)} \geq \frac{C_5}{z^{2-\lambda} + z^{2\lambda-1}} \quad (5.36)$$

Então a desigualdade 5.33 é satisfeita, para uma constante C_5 grande o suficiente. A equação 5.36 é válida se tomarmos

$$H'(z) = \exp\left(C_5 \int_z^\infty \frac{1}{t^{2-\lambda} + t^{2\lambda-1}} dt\right) \quad (5.37)$$

É uma escolha admissível, já que notando que $2 - \lambda < 1$ e $2\lambda - 1 > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{2\lambda} + t^{2\lambda-1}} dt < \infty \quad (5.38)$$

e $H(z) = \int_0^z H'(w) dw$. Com esta escolha, a função F_2 satisfaz todas as desigualdades que queremos, e completamos o processo de construção.

Provamos assim que

Teorema 5.1. *(Bombieri, De Giorgi, Giusti) Se $n \geq 8$, então existem soluções da equação da superfície mínima em R^n cujos gráficos não são hiperplanos.*

Demonstração. Construimos acima tal função f para $n = 8$. Para $n > 8$, basta tomarmos a função

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_8)$$

□

Capítulo 6

Generalizações

Nos capítulos anteriores examinamos imersões mínimas em \mathbb{R}^n e \mathbb{S}^n , espaços de curvatura constante em que podíamos simplificar em muito a análise do operador de estabilidade. Nesta última parte do trabalho iremos tratar de imersões em condições mais gerais.

Na seção 6.1, mostraremos uma série de condições equivalentes para a estabilidade, e na seção 6.2 utilizaremos estes resultados para mostrar um teorema de classificação para imersões mínimas estáveis em variedades com condições de curvatura prescrita. Na seção 6.3, utilizando a desigualdade de Simons, provaremos uma estimativa L^p para a norma da segunda forma fundamental de uma imersão mínima estável em \mathbb{R}^n . Utilizaremos esta estimativa para mostrar a versão de Schoen-Simon-Yau do teorema de Bernstein em subvariedades estáveis de \mathbb{R}^n , $n \leq 6$, com um controle de crescimento de volume.

6.1 Estabilidade revisitada

Em toda essa seção, a menos que especificado o contrário, $M \subset N$ é uma subvariedade mínima com codimensão um e fibrado normal trivial, L seu operador de Jacobi, e I e Q as formas bilinear e quadrática associadas, respectivamente.

Definição 6.1. *Seja $\Omega \subset M$ um aberto. O tom fundamental do operador de Jacobi em Ω é definido por*

$$\lambda_1(L, \Omega) = \inf\{Q(u); u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^1(\Omega)} = 1\} \quad (6.1)$$

Observação 6.2. *Para simplificar a notação, sempre que não houver perigo de confusão escreveremos simplesmente λ_1 .*

Veremos agora que o tom fundamental está ligado ao espectro de L no sentido clássico.

Lema 6.3. *O tom fundamental pode ser calculado por*

$$\lambda_1(L, \Omega) = \inf \left\{ \frac{Q(u)}{\|u\|_{L^1(\Omega)}} ; u \neq 0 \in H_0^1(\Omega) \right\} \quad (6.2)$$

Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$ é tal que

$$\frac{Q(u)}{\|u\|_{L^1(\Omega)}} = \lambda_1(L, \Omega)$$

Então u é suave e $Lu = \lambda_1 u$ no sentido clássico.

Demonstração. A primeira afirmação segue simplesmente da homogeneidade do termo $\frac{Q(u)}{\|u\|_{L^1(\Omega)}}$. Iremos mostrar que toda função que atinge este ínfimo é suave e satisfaz $L\eta = \lambda_1 \eta$. Novamente iremos assumir que η está normalizada, $\|\eta\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Consideramos uma função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} \phi \eta \, dx = 0 \quad (6.3)$$

Então vale

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Omega} (\eta + t\phi)^2 \, dx = 0 \quad (6.4)$$

Já que η é um minimizante de $\frac{Q(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Omega} |\nabla_M(\eta + t\phi)|^2 - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))(\eta + t\phi)^2 \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \bar{g}(\nabla_M \eta, \nabla_M \phi) - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))\eta \cdot \phi \, dx \end{aligned} \quad (6.5)$$

Já que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, a equação 6.5 vale para qualquer $\phi \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz 6.3. Em particular, dada uma $\psi \neq 0 \in H_0^1(\Omega)$ qualquer, a equação 6.5 é válida para a função $\phi = \psi - \eta \langle \psi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)}$. Portanto,

$$\int_{\Omega} \bar{g}(\nabla_M \eta, \nabla_M \phi) - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))\eta \cdot \phi \, dx = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \bar{g}(\nabla_M \eta, [\nabla_M \psi - \langle \psi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)} \nabla_M \eta]) - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu)) \eta \cdot (\psi - \langle \psi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)} \eta) dx &= 0 \\
\int_{\Omega} \bar{g}(\nabla_M \eta, \nabla_M \psi) - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu)) \eta \cdot \psi dx &= \langle \psi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)} Q(\eta) \\
\int_{\Omega} \bar{g}(\nabla_M \eta, \nabla_M \psi) - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu)) \eta \cdot \psi dx &= J\langle \psi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)} \\
I(\eta, \psi) &= J\langle \psi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Já que a última equação vale para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$, η é uma solução fraca de

$$L\eta = -J\eta \tag{6.6}$$

Pela regularidade de soluções de equações elípticas, η deve ser suave e satisfazer a equação 6.6 no sentido clássico. \square

Lema 6.4. *Se u é uma função suave em Ω que se anula em $\partial\Omega$ e $Lu = \lambda_1 u$, então u não se anula no interior de Ω .*

Demonstração. Note que se u é suave e satisfaz $Lu = \lambda_1 u$, então $|u| \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz $\int_{\Omega} |u|^2 = 1$ e $Q(|u|) = \lambda_1$, donde, pelo lema anterior $|u|$ é suave e satisfaz $L|u| = \lambda_1 |u|$. Como $|u| \geq 0$, e $|u|$ não é identicamente nula (já que u é uma autofunção), pela desigualdade de Harnack temos $|u| > 0$. \square

Proposição 6.5. *(Fischer-Colbrie, Schoen; [32]) Se $M \subset N$ é uma subvariedade mínima completa, não compacta e com fibrado normal trivial, então as condições abaixo são equivalentes:*

1. $\lambda_1(L, \Omega) \geq 0$ para cada domínio limitado $\Omega \subset M$.
2. $\lambda_1(L, \Omega) > 0$ para cada domínio limitado $\Omega \subset M$.
3. Existe uma função suave e positiva u em M tal que $Lu = 0$.

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$: Tome um domínio $\Omega_0 \subset M$ e escolha um domínio Ω_1 com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1$. Pelo lema 6.3, $\lambda_1(L, \Omega_0) \geq \lambda_1(L, \Omega_1)^1$. Seja u_0 a primeira autofunção de L em Ω_0 (que é suave pelo lema 6.3), e defina $u_1 \in C_0^\infty(\Omega_1)$ por

¹Claramente há uma inclusão de $H_0^1(\Omega_0)$ em $H_0^1(\Omega_1)$, de modo que o ínfimo em $\lambda_1(\Omega_1)$ é tomado sobre um conjunto maior de funções.

$$u_1(x) = \begin{cases} u_0(x), & \text{se } x \in \Omega_0 \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_1 \setminus \Omega_0 \end{cases}$$

Se $\lambda_1(L, \Omega_0) = \lambda_1(L, \Omega_1)$ então u_1 é uma autofunção associada a $\lambda_1(L, \Omega_1)$, o que contraria o lema 6.4, já que u_1 se anula em $\Omega_1 \setminus \Omega_0$. Isto mostra que $\lambda_1(L, \Omega_0)$ é estritamente maior que $\lambda_1(L, \Omega_1) \geq 0$, e em particular é positivo. Assim, $\lambda_1(L, \Omega)$ é positivo para qualquer Ω aberto limitado em M .

2 \Rightarrow 3: Se $\lambda_1(L, \Omega) > 0$ para cada domínio limitado Ω em M , então 0 não é autovalor de L e portanto o problema de Dirichlet

$$Lu = 0 \text{ em } \Omega$$

com $u \in H_0^1(\Omega)$ possui apenas a solução trivial. Pelo teorema de existência para equações elípticas para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única função $v \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca do problema de Dirichlet

$$Lu = f \text{ em } \Omega \tag{6.7}$$

Consideramos o aberto $\Omega = B_r(p) = \{q \in M; \text{dist}_M(p, q) < r\}$, e a função nele definida $f(x) = |A|^2(x) + Ric_N(\nu, \nu)(x)$. Seja $v_r \in H_0^1(B_r(p))$ a única solução fraca do problema 6.7. Deste modo, $u_r = v_r + 1$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } B_r(p) \\ u = 1 & \text{em } \partial B_r(p) \end{cases} \tag{6.8}$$

Onde a igualdade $u = 1$ em $\partial\Omega$ deve ser entendida no sentido do traço.

Considere o aberto $A_r = \{x \in B_r(p); u_r(x) < 0\}$ e suponha que A_r é não vazio. Já que $A_r \subset B_r(p)$ é um aberto limitado, para cada componente conexa V de A_r temos $\lambda_1(L, V) > 0$, por hipótese. Por construção, $Lu = 0$ em V e $u = 0$ em ∂V , donde

$$\int_V uLu = 0$$

o que implica que 0 é um autovalor de Q em V , contradição, já que $\lambda_1(L, V) > 0$. Isto mostra que $u \geq 0$ em $B_r(p)$, e novamente a desigualdade de Harnack implica que $u > 0$ em $B_r(p)$.

Definimos para cada $r > 0$ a função $w_r : B_r(p) \rightarrow \mathbb{R}$ por $w_r(q) = (u_r(p))^{-1}u_r(q)$. Claramente, $w_r \in \mathcal{C}^\infty$ é uma solução de $Lw_r = 0$, e além disso $w_r(p) = 1$, $w_r > 0$ em M . Seja $K \in B_{R_0}(p)$ um compacto, e assumamos que $r > 4R_0$. Pela desigualdade de Harnack,

$$\begin{aligned} \sup_K w_r &\leq \sup_{B_{R_0}} w_r \\ &\leq C \inf_{B_{R_0}} w_r \\ &\leq C \end{aligned} \tag{6.9}$$

A desigualdade 6.9 segue de $w_r(p) = 1$, e a constante C depende somente de R_0 . Pela estimativa de Schauder interior,

$$\|w_r\|_{C^{2,\alpha}(K)} \leq C' \tag{6.10}$$

E novamente a constante C não depende de r . Portanto, temos estimativas $C^{2,\alpha}$ uniformes em K para cada w_r , $r > 4R_0$. Assim, pelo teorema de Ascoli-Arzelá podemos escolher uma subsequência de funções $\{w_{r_k}\}_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente em $C^{2,\alpha}(K)$ para uma função w_K , com $w_K \geq 0$ e $w_K(p) = 1$. Novamente, a desigualdade de Harnack implica que $w_K > 0$.

Como K é arbitrário, podemos tomar uma exaustão de M por compactos $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$ e passar a uma subsequência tal que as w_K convergem uniformemente para uma função w em subconjuntos compactos de M . As estimativas elípticas garantem que $Lw = 0$ em M , e já que cada $w_K > 0$, temos $w \geq 0$, e além disso $w(p) = 1$. Por fim, o princípio do máximo forte implica que $w > 0$ em M , já que w não é identicamente nula em M .

3 \Rightarrow 1: Seja $u \in C^\infty(M)$ a solução de $Lu = 0$ em M , $u > 0$. Já que $u > 0$, a função $w = \log u$ está bem definida e é suave em M . Se $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal numa vizinhança de p e geodésico em p , temos

$$\begin{aligned} E_i(w)(p) &= \frac{1}{u} E_i(u)(p) \Rightarrow \\ \nabla_M w(p) &= \frac{1}{u} \nabla_M u(p) \end{aligned} \tag{6.11}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
E_i(dwE_i)(p) &= E_i\left(\frac{1}{u}duE_i\right)(p) \\
&= E_i\left(\frac{1}{u}\right)du(E_i)(p) + \frac{1}{u}E_i(du(E_i))(p) \\
&= -\frac{1}{u^2}[du(E_i)]^2(p) + \frac{1}{u}\nabla du(E_i, E_i)(p)
\end{aligned}$$

Onde a última igualdade segue do fato de $du(\nabla_{E_i}E_i)(p) = 0$, já que o referencial é geodésico em p . Deste modo, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_M w(p) &= -\frac{1}{u^2}|\nabla_M u|^2 + \frac{1}{u}\Delta_M u \\
&= -|\nabla_M w|^2 + \frac{1}{u}(-|A|^2u - Ric_N(\nu, \nu)u) \\
&= -|\nabla_M w|^2 - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))
\end{aligned} \tag{6.12}$$

A segunda igualdade segue da equação 6.11 e do fato que $Lu = 0$.

Considere então um domínio limitado Ω e $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Multiplicando a equação 6.12 por f^2 e integrando sobre Ω temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))f^2 + f^2|\nabla_M w|^2 dx &= -\int_{\Omega} f^2\Delta_M w dx \\
&= \int_{\Omega} g(\nabla_M(f^2), \nabla_M w) dx - \int_{\Omega} div_M(f^2\nabla_M w) dx \\
&= \int_{\Omega} 2fg(\nabla_M f, \nabla_M w) dx - \int_{\partial\Omega} f^2g(\nabla_M w, N) dx
\end{aligned}$$

Onde N é o vetor normal à $\partial\Omega$, e tangente a M que concorda com a orientação induzida no bordo. Note que $\int_{\partial\Omega} f^2g(\nabla_M w, N) dx = 0$, já que f possui suporte compacto. Tomando o valor absoluto no termo do lado esquerdo e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))f^2 dx + \int_{\Omega} f^2|\nabla_M w|^2 dx &\leq \int_{\Omega} (\sqrt{2}|f||\nabla_M w|)(\sqrt{2}|\nabla_M f|) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2f^2|\nabla_M w|^2 + 2|\nabla_M f|^2 dx
\end{aligned}$$

Por fim, rearranjando os termos da desigualdade acima temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_M f|^2 - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))f^2 &\geq 0 \\ \int_{\Omega} -f\Delta_M f - (|A|^2 + Ric_N(\nu, \nu))f^2 &\geq 0 \\ \int_{\Omega} fLf &\geq 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Como a desigualdade 6.13 é válida para toda função $f \in C_0^\infty(\Omega)$, então a forma bilinear associada I é definida semipositiva em Ω , donde $\lambda_1(L, \Omega) \geq 0$.

□

Observação 6.6. *A prova acima repete-se, ipso litteris, para o caso de um operador $L = -\Delta + V$, onde V é uma função suave em M , e $\lambda_1(L, \Omega)$ é definido de acordo com a equação 6.1.*

Proposição 6.7. *Se $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade mínima tal que sua aplicação de Gauss $G : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ está contida em um hemisfério, então M é estável.*

Demonstração. Considere um vetor fixo $W \in \mathbb{R}^{n+1}$, e considere M orientada. Seja $N : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um campo normal unitário e defina $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $v(p) = \langle N(p), W \rangle$. Vamos calcular $\Delta_M v(p)$. Considere um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ numa vizinhança de p . Com esse referencial, o laplaciano de v se escreve

$$\begin{aligned} \Delta_M v(p) &= \sum_{i=1}^n E_i(E_i(v)) \\ &= E_i(\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, W \rangle) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, W \rangle \end{aligned}$$

Já que $\bar{\nabla}_{E_i} N$ é um vetor tangente, temos

$$\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N = \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N) + \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, N \rangle \cdot N$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_M v(p) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \langle \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N), W \rangle + \langle \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, N \rangle \cdot N, W \rangle \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \langle \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N), W \rangle - \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \cdot v \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \langle \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N), W \rangle - v \left\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle E_j \right\rangle \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \langle \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N), W \rangle - v \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \langle \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N), W \rangle - v \sum_{j=1}^n (A(E_i, E_j))^2 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N), W \rangle \right\} - v |A|^2(p)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Novamente usando que $(\bar{\nabla}_{E_i} N)$ é um vetor tangente, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N) &= \nabla_{E_i} \left(\sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle E_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left\{ \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle \cdot \nabla_{E_i} E_j \right\} + \sum_{j=1}^n \left\{ E_i \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle \right\} \cdot E_j
\end{aligned}$$

Já que o referencial é geodésico em p , o primeiro somatório é nulo, donde

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N) &= E_i(-\langle N, \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle) E_j \\
&= -(\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle) E_j
\end{aligned}$$

Já que $\bar{\nabla}_{E_i} N$ é tangente e $\bar{\nabla}_{E_i} E_j$ é normal, temos $\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle = 0$. Temos então

$$\langle \nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_{E_i} N), E_j \rangle = \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle \tag{6.15}$$

Iremos mostrar que o termos do lado direito da equação 6.15 é nulo.

De M mínima sabemos que $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N \rangle \equiv 0$ em M . Derivando esta equação com respeito a E_j temos

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \langle \bar{\nabla}_{E_j} \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \bar{\nabla}_{E_j} N \rangle \right\} = 0 \tag{6.16}$$

Novamente usando o fato que $\bar{\nabla}_{E_i} E_i$ é normal e $\bar{\nabla}_{E_j} N$ é tangente, temos

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_j} \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N \rangle = 0 \quad (6.17)$$

Como em \mathbb{R}^{n+1} a curvatura é nula, $\bar{R}(E_k, E_i)E_i = 0$,

$$\bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_j} E_i - \bar{\nabla}_{E_j} \bar{\nabla}_{E_i} E_i - \bar{\nabla}_{[E_j, E_i]} E_i = 0 \quad (6.18)$$

Somando sobre i na equação 6.18 e utilizando a equação 6.17 obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_j} E_i - \bar{\nabla}_{[E_j, E_i]} E_i, N \rangle &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} (\bar{\nabla}_{E_i} E_j + [E_j, E_i]) - \bar{\nabla}_{[E_j, E_i]} E_i, N \rangle &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} E_j + (\bar{\nabla}_{E_i} [E_j, E_i] - \bar{\nabla}_{[E_j, E_i]} E_i), N \rangle &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} E_j + [E_i, [E_j, E_i]], N \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Mas já que E_i e E_j são tangentes, $[E_i, [E_j, E_i]]$ também é, e a equação acima implica

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} E_j, N \rangle = 0 \quad (6.19)$$

Combinando as equações 6.16 e 6.19, concluímos a prova da afirmação, donde segue da equação 6.14 que $\Delta_M v(p) = -|A|^2 v(p)$, $Lv = 0$. Finalmente, desde que a imagem da aplicação de Gauss de M está contida num hemisfério aberto, existe um W para o qual a aplicação v é positiva em M , e a proposição 6.5 conclui a prova.

□

Como consequência imediata, temos o

Corolário 6.8. *Se $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação da superfície mínima, então Graph_u é estável.*

Corolário 6.9. (Simons) Se $M^n \subset N^{n+1}$ é uma subvariedade mínima fechada e estável, e $Ric_N \geq 0$, então M é totalmente geodésica e $Ric_M(\nu, \nu) = 0$ em M .

Demonstração. Como M é compacta sem bordo, podemos utilizar a função constante $\eta = 1$ na desigualdade de estabilidade, 1.58 para obter

$$\int_M (Ric_N(\nu, \nu) + |A|^2) dx \leq 0$$

Donde a conclusão segue imediatamente. \square

Os corolários acima justificam considerar o seguinte problema: Sobre quais condições uma subvariedade mínima $M^n \subset N^{n+1}$, completa estável e com fibrado normal trivial é totalmente geodésica? Sob que condições podemos classificar as subvariedades com essas características?

Vimos no capítulo anterior que mesmo em \mathbb{R}^n há restrições. Veremos nas próximas seções algumas condições sobre as variedades M e N que dão respostas a estas perguntas, e obteremos resultados de tipo Bernstein.

Como aplicação da proposição 6.5, finalizamos esta seção com um teorema que relaciona a área da aplicação de Gauss de uma imersão mínima com a sua estabilidade, generalizando o resultado da proposição 6.7 em \mathbb{R}^3 . Este resultado é devido a Barbosa e do Carmo, e aqui seguimos a prova sugerida por Fischer-Colbrie e Schoen em [32].

Teorema 6.10. (Barbosa, do Carmo; [9]) Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima e denote por $G : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ sua aplicação de Gauss. Se Ω é um domínio em M e a área de $G(\Omega) \subset \mathbb{S}^2$ é menor que 2π , então Ω é estável.

Demonstração. Seja λ_1 o primeiro autovalor do laplaciano $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ em $G(\Omega)$, e f_1 a primeira autofunção. Considere a função $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h = f_1 \circ G$. Esta função é positiva (já que a primeira autofunção do laplaciano esférico é positiva). Note ainda que pela minimalidade, a aplicação $G : (M^2, g) \rightarrow (\mathbb{S}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}^2})$ é uma aplicação conforme. Consideramos então a métrica \tilde{g} em M , definida por $G^*(\mathbb{S}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}^2})$. Temos assim,

$$\Delta_{\tilde{g}} = -\frac{1}{K_M} \Delta_g$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{K_M} \Delta_g(f_1 \circ G) &= \Delta_{\tilde{g}}(f_1 \circ G) \\
&= (\Delta_{\mathbb{S}^2} f_1) \circ G \\
&= -\lambda_1(f_1 \circ G)
\end{aligned}$$

Assim,

$$-\Delta_M h + \lambda_1 K_M h = 0 \quad (6.20)$$

Desde que² $\lambda_1 > 2$, concluímos por um cálculo semelhante ao da proposição 6.5 que $\lambda_1(-\Delta_M + \lambda_1 K, \Omega) \geq 0$, donde Ω é estável. \square

6.2 Imersões mínimas em 3-variedades de curvatura escalar não negativa

Em 3-variedades, podemos reescrever o operador de Jacobi de modo que a curvatura escalar apareça seguindo um truque introduzido por Schoen e Yau em [61].

Lema 6.11. *Se $M \subset N$ é uma subvariedade mínima orientável de uma 3-variedade N orientada, então*

$$Ric_N(\nu, \nu) + |A|^2 = \frac{1}{2} \cdot (Scal_M + |A|^2) - K_M \quad (6.21)$$

Demonstração. Considere um referencial ortonormal em M , $E_1(p), E_2(p) \in T_p M$ e $E_3(p) = \nu(p)$. Vamos calcular a curvatura de Ricci em $p \in M$. Note que

$$Ric_M(E_1, E_1) = R_{1212} + R_{1313}$$

$$Ric_M(E_2, E_2) = R_{2121} + R_{2323}$$

$$Ric_M(\nu, \nu) = R_{1313} + R_{2323}$$

Já que $R_{2121} = R_{1212}$, temos

²Vide proposição 3.10, em [10]

$$\begin{aligned}
Scal_M &= Ric_M(E_1, E_1) + Ric_M(E_2, E_2) + Ric_M(E_3, E_3) \\
&= 2(R_{1212} + R_{1313} + R_{2323}) \\
&= 2Ric_M(\nu, \nu) + 2R_{1212}
\end{aligned}$$

Aplicando a equação de Gauss para a curvatura Gaussiana, $K_M(p)$, temos

$$\begin{aligned}
K_M(p) &= K_M(E_1, E_2) \\
&= K_N(E_1, E_2) + g(A(E_1, E_1), A(E_2, E_2)) - g(A(E_1, E_2), A(E_1, E_2)) \\
&= R_{1212} + \det(A) \\
&= R_{1212} - \frac{1}{2}|A|^2
\end{aligned}$$

Deste modo, concluímos que

$$Ric_M(\nu, \nu) = \frac{1}{2}(Scal_M - |A|^2) - K_M \quad (6.22)$$

Somando $|A|^2$ em cada lado obtemos a equação 6.21 □

Antes de prosseguirmos para o resultado central desta seção, faremos um estudo sobre a estabilidade de métricas completas no disco unitário $D \subset \mathbb{C}$.

Lema 6.12. (*Fischer-Colbrie, Schoen; [32]*) *Seja $D \subset \mathbb{C}$ o disco unitário, e denote por M , o disco D munido de uma métrica $ds^2 = \mu(z)|dz|^2$. Se ds^2 é uma métrica completa, $K_M = -\frac{1}{2} \log \mu$ a curvatura Gaussiana nesta métrica, $a \geq 1$, e $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não negativa, então não existe uma solução positiva de $Lu = -\Delta_M u + aK_M u - Pu = 0$ em D .*

Demonstração. Denote por dv o elemento de área de M , $dv = \mu dx dy$. Suponha que existe uma solução positiva $v \in C_0^\infty(M)$ de $Lu = 0$. Então, de acordo com a observação 6.6, para toda $u \in C_0^\infty(M)$, temos

$$\int_M |\nabla_M u|^2 + aK_M u^2 - Pu^2 dv \geq 0$$

Em particular, já que P é uma função não negativa,

$$\int_M |\nabla_M u|^2 + aK_M u^2 dv \geq 0$$

Além disso, já que $a \geq 1$,

$$\int_M |\nabla_M u|^2 + K_M u^2 dv \geq \int_M \left(\frac{1}{a} |\nabla_M u|^2 + K_M u^2 \right) dv = \frac{1}{a} \int_M (|\nabla_M u|^2 + aK_M u^2) dv \geq 0$$

Deste modo, se existe uma solução positiva para o operador L , o operador $-\Delta_M + K_M$ agindo em funções suaves com suporte compacto em M é positivo semidefinido, então de acordo com a proposição 6.5, para cada domínio limitado Ω , $\lambda_1(-\Delta_M + K, \Omega) \geq 0$.

Considere um domínio limitado $\Omega \subset M$ e $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$. Defina $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $h = \mu^{-\frac{1}{2}}$. Da definição de K_M , temos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_M h}{h} - \frac{|\nabla_M h|^2}{h^2} &= K_M \\ \Delta_M h &= K_M h + \frac{|\nabla_M h|^2}{h} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Denotando por $J(v) = \int_M |\nabla_M v|^2 + K_M v^2 dv$, temos

$$\begin{aligned} J(\xi h) &= \int_M (-\xi h (\Delta_M \xi h) + K_M (\xi h)^2) \\ &= \int_M [(-\xi \Delta_M \xi) h^2 - 2\xi h \langle \nabla_M h, \nabla_M \xi \rangle - (\xi)^2 h \Delta_M h + K_M (\xi h)^2] dv \\ &= \int_M [(-\xi \Delta_M \xi) h^2 - \frac{1}{2} \langle \nabla_M \xi^2, \nabla_M h^2 \rangle - \xi^2 (K_M h^2 + |\nabla_M h|^2) + K_M (\xi h)^2] dv \\ &= \int_M [(-\xi \Delta_M \xi) h^2 - \frac{1}{2} \langle \nabla_M \xi^2, \nabla_M h^2 \rangle] - \xi^2 |\nabla_M h|^2 dv \\ &= \int_M |\nabla_M \xi|^2 h^2 dv - \int_M |\nabla_M h|^2 \xi^2 dv \end{aligned} \quad (6.24)$$

Da definição de $\lambda_1(-\Delta_M + K_M, \Omega)$ e da equação 6.24, temos

$$\lambda_1(-\Delta_M + K_M, \Omega) \int_M (\xi h)^2 dv \leq \int_M |\nabla_M \xi|^2 h^2 dv - \int_M |\nabla_M h|^2 \xi^2 dv \quad (6.25)$$

Seja $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função que mede a distância a 0 na métrica ds^2 , e $B_R(0) = \{p \in M; \rho(p) < R\}$ a bola geodésica centrada na origem. Considere ainda uma função suave $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ que satisfaz

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \leq \frac{1}{2}R, \\ 0, & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

E ainda $|\zeta'(r)| \leq \frac{3}{R}$, para todo r . Definimos então a função Lipschitz ξ por $\xi(q) = \zeta(\rho(q))$. Por um argumento de aproximação, a desigualdade 6.25 é válida para ξ , portanto

$$\lambda_1(-\Delta_M + K_M, B_R(0)) \int_M (\xi h)^2 dv \leq \int_M |\nabla_M \xi|^2 h^2 dv - \int_M |\nabla_M h|^2 \xi^2 dv \quad (6.26)$$

Por fim, note que

$$\int_M |\nabla_M \xi|^2 h^2 dv \leq \int_M |\zeta'|^2 (\mu^{-\frac{1}{2}})^2 \mu dx dy \leq \frac{9}{R^2} \int_M dx dy = \frac{9}{R^2} \pi$$

Deste modo, escolhendo R suficientemente grande, o lado direito da desigualdade 6.26 será negativo, pois já que a métrica ds^2 é completa, μ não pode ser constante, donde $|\nabla_M h|^2$ não é identicamente nulo. Então, $\lambda_1(-\Delta_M + K_M, B_R(0)) < 0$, para R suficientemente grande, um absurdo.

□

O próximo teorema dá respostas à pergunta que fizemos no fim da seção passada, classificando as imersões mínimas estáveis e completas em 3-variedades com curvatura escalar positiva.

Teorema 6.13. *(Fischer-Colbrie, Schoen; [32]) Seja N uma 3-variedade completa, orientada, com curvatura escalar não negativa. Seja M uma subvariedade mínima de N , orientada, completa e estável. Então há duas possibilidades*

1. *Se M é compacta, então M é conformemente equivalente à esfera \mathbb{S}^2 ou M é um toro flat T^2 totalmente geodésico. Se $\text{Scal}_N > 0$, então M é conformemente equivalente a \mathbb{S}^2 .*
2. *Se M não é compacta, então M é conformemente equivalente ao plano complexo \mathbb{C} , ou ao cilindro A . Se M é um cilindro e sua curvatura total é finita, então M é flat e totalmente geodésico. Se a curvatura escalar de N é positiva, então M não pode ser um cilindro de curvatura total finita.*

Se a curvatura de Ricci de N é não negativa, então a hipótese de curvatura total finita em 2 pode ser removida.

Demonstração. Caso 1: Utilizando o lema 6.11, reescrevemos a desigualdade de estabilidade

$$\int_M \left\{ \frac{1}{2}(Scal_M + |A|^2) - K_M \right\} \eta^2 dx \leq \int_M |\nabla_M \eta|^2 dx \quad (6.27)$$

Já que a desigualdade acima vale para qualquer $\eta \in C_0^\infty(M)$, e M é compacta, podemos tomar $\eta \equiv 1$ em M , de modo que

$$\int_M \left\{ \frac{1}{2}(Scal_M + |A|^2) \right\} dx \leq \int_M K_M dx = 2\pi\chi(M)$$

Já que $Scal_M \geq 0$, temos $2\pi\chi(M) \geq 0$, e já que M é compacta e orientável, M é homomomorfa a \mathbb{S}^2 ou T^2 . Se M é um toro, então $\chi(M) = 0$ e

$$\int_M \frac{1}{2}(Scal_M + |A|^2) dx = 0$$

Donde, $Scal_M = |A|^2 \equiv 0$ em M , e M é flat e totalmente geodésica. Se $Scal_M > 0$, então $2\pi\chi(M) > 0$, e M é topologicamente uma esfera \mathbb{S}^2 .

Caso 2: Mostraremos inicialmente que o recobrimento universal de M é o plano complexo \mathbb{C} . Suponha, por contradição, que o recobrimento universal de M seja o disco unitário D . Já que M é estável, existe uma solução positiva de em M da equação

$$-\Delta_M u + K_M - \frac{1}{2}(Scal_M + |A|^2)u = 0$$

Passando ao recobrimento universal, existe uma solução positiva de $-\Delta_M u + K_M - \frac{1}{2}(Scal_M + |A|^2)u = 0$ em (D, ds^2) , onde ds^2 é a métrica induzida, o que implica que a métrica ds^2 não é completa, pelo lema 6.12.

Deste modo, o recobrimento universal de M é o plano complexo \mathbb{C} , e desde que M é parabólica M é conformemente equivalente ao plano \mathbb{C} ou ao cilindro A (Vide [11]). Mostraremos que se o último caso ocorre então M é flat e totalmente geodésica. Seja $|dz|^2$ a métrica flat de \mathbb{C} , $ds^2 = \mu(z)|dz|^2$ a métrica induzida de M , e $dv = \mu dx dy$ o elemento de volume. Considere um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\rho(z)$ a distância à z_0 na métrica induzida ds^2 . Denote por $B_R(z_0)$ a bola geodésica de centro R e raio z_0 na métrica ds^2 ,

e por $D_R(z_0)$ a bola de \mathbb{C} na métrica flat. Considere para cada R o cut off logarítmico $\eta_R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \rho(x) \leq \sqrt{R} \\ 2 - 2 \frac{\log \rho(x)}{\log R}, & \text{se } \sqrt{R} < \rho(x) \leq R \\ 0, & \text{se } \rho(x) > R \end{cases}$$

Utilizando a função η_R na desigualdade de estabilidade 6.27 temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R(z_0)} \left\{ \frac{1}{2} Scal_M + |A|^2 - K_M \right\} dv &\leq \int_{B_R(z_0) \setminus B_{\sqrt{R}}(z_0)} |\nabla_M \eta_R|^2 dv \\ &\leq \int_{D_R(z_0) \setminus D_{\sqrt{R}}(z_0)} |\nabla_M \eta_R|^2 dx dy \end{aligned}$$

Onde a última desigualdade segue da invariância conforme da integral de Dirichlet. Através de cálculos semelhantes aos da proposição 2.8 temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R(z_0)} \left\{ \frac{1}{2} Scal_M + |A|^2 - K_M \right\} dv &\leq \frac{C}{\log R} \\ \int_{B_R(z_0)} \left\{ \frac{1}{2} Scal_M + |A|^2 \right\} dv &\leq \int_{B_R(z_0)} K_M dv + \frac{C}{\log R} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Desde que a curvatura total de M é finita, podemos utilizar o teorema da convergência dominada e fazer $R \rightarrow \infty$, o que nos dá

$$\int_M \left\{ \frac{1}{2} Scal_M + |A|^2 \right\} dv \leq \int_M K_M dv \quad (6.29)$$

Já que M é topologicamente um cilindro, a desigualdade de Cohn-Vossen nos dá $\int_M K_M dv \leq 0$, donde concluimos que $Scal_M \equiv 0$ e M é totalmente geodésica. Deste modo, o operador de estabilidade de M se reduz a $-\Delta_M + K_M$. Já que M é estável, de acordo com a proposição 6.5, existe uma função w positiva em M satisfazendo $-\Delta_M w + K_M w = 0$. Considere a função $\tilde{w} = \log w$. Calculando o laplaciano de \tilde{w} temos

$$\begin{aligned} \Delta_M \tilde{w} &= -\frac{1}{w^2} |\nabla_M w|^2 + \frac{1}{w} \Delta_M w \\ &= -|\nabla_M \tilde{w}|^2 + K_M \end{aligned}$$

Escolhendo η_R como acima, podemos multiplicar a última equação por $(\eta_R)^2$ e integrar por partes para obter

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_M \tilde{w}|^2 (\eta_R)^2 dv &= \int_M (\eta_R)^2 K_M dv + 2 \int_M \eta_R \langle \nabla_M \eta_R, \nabla_M \tilde{w} \rangle dv \\ &\leq \int_M (\eta_R)^2 K_M dv + \frac{1}{4} \int_M |\nabla_M \tilde{w}|^2 (\eta_R)^2 + 4 \int_M |\nabla_M \eta_R|^2 dv \end{aligned}$$

Onde a última desigualdade segue das desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Hölder,

$$2|\eta_R| |\langle \nabla_M \eta_R, \nabla_M \tilde{w} \rangle| \leq \frac{1}{4} (\eta_R)^2 |\nabla_M \tilde{w}|^2 + 4 |\nabla_M \eta_R|^2$$

Portanto,

$$\frac{3}{4} \int_M |\nabla_M \tilde{w}|^2 (\eta_R)^2 dv \leq \int_M (\eta_R)^2 K_M dv + 4 \int_M |\nabla_M \eta_R|^2 \quad (6.30)$$

Usando novamente a invariância da integral de Dirichlet, e o fato que a energia do cut off logarítmico decresce com $\frac{1}{\log R}$, temos

$$\frac{3}{4} \int_M |\nabla_M \tilde{w}|^2 \leq \int_M K_M dv$$

Novamente pela desigualdade de Cohn-Vossen, concluímos que \tilde{w} é constante, donde w é constante e já que w uma solução positiva de $-\Delta_M w + K_M w = 0$, concluímos que $K_M \equiv 0$, donde M é flat.

Por fim, suponha que M é conformemente equivalente a um cilindro e que $Ric_N \geq 0$. Aplicando a desigualdade de estabilidade, 1.58, ao cut off logarítmico temos

$$\int_M (Ric_N(\nu, \nu) + |A|^2) (\eta_R)^2 \leq \int_M |\nabla_M \eta_R|^2$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ concluímos que M é totalmente geodésica. Ademais, $Ric_N(\nu, \nu) = 0$ em M . Já que

$$Ric_N(E_1, E_1) + Ric_N(E_2, E_2) = 2K_M \geq 0$$

A curvatura Gaussiana de M é não negativa, e já que M é um cilindro, $K_M \equiv 0$. \square

Corolário 6.14. *A única superfície mínima orientada, estável e completa em \mathbb{R}^3 é o plano.*

Observação 6.15. *Todas as quatro possibilidades do teorema 6.13 ocorrem; Por exemplo, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ tem curvatura escalar positiva e tem uma esfera \mathbb{S}^2 estável. $T^2 \times \mathbb{R}^2$ é flat e tem um toro T^2 estável. Podemos tomar em \mathbb{C} uma métrica de curvatura Gaussiana positiva e tomando o produto com \mathbb{R} construir uma métrica de curvatura escalar positiva em \mathbb{R}^3 tendo um plano \mathbb{C} estável. Similarmente, $A \times \mathbb{R}$ tem uma métrica flat com A estável.*

Observação 6.16. *O caso 1 no teorema 6.13 foi provado por Schoen e Yau em [61].*

Observação 6.17. *Em [32], foi conjecturado que a hipótese do cilindro ter curvatura total finita no caso 2 do teorema 6.13 era desnecessária. Em [11], teorema 1.3, esta conjectura foi provada.*

6.3 Estimativas L^p e o Teorema de Schoen-Simon-Yau

Teorema 6.18. *(Schoen, Simon, Yau; [59]) Suponha que $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície mínima orientável e estável. Para todo $p \in [2, 2 + \sqrt{\frac{2}{(n-1)}})$ e cada função Lipschitz ϕ com suporte compacto temos*

$$\int_M |A|^{2p} \phi^{2p} dx \leq C(n, p) \int_M |\nabla_M \phi|^{2p} \quad (6.31)$$

Demonstração. Já que M é estável, há uma estimativa natural para a expressão do lado esquerdo. Utilizamos a função teste $\eta = |A|^{1+q} f$ na desigualdade de estabilidade, para $q \geq 0$ (caso contrário η não é Lipschitz), onde f é uma função de suporte compacto a ser determinada, e obtemos

$$\begin{aligned} \int_M |A|^{2q+4} f^2 dx &\leq \int_M |f \nabla_M |A|^{1+q} + |A|^{1+q} \nabla_M f|^2 dx \\ &\leq \int_M |(1+q)f|A|^q \nabla_M |A| + |A|^{1+q} \nabla_M f|^2 dx \\ &\leq \int_M |A|^{2q} |(1+q)f \nabla_M |A| + |A| \nabla_M f|^2 dx \\ &\leq \left\{ \int_M |A|^{2q} [(1+q)^2 f^2 |\nabla_M |A||^2 + |A|^2 |\nabla_M f|^2] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_M 2(1+q)|A|^{2q} f g(\nabla_M |A|, \nabla_M f) dx \right\} \quad (6.32) \end{aligned}$$

O próximo passo é estimar a expressão do lado direito de 6.32. Utilizamos a desigualdade de Simons, 4.26 para limitar o termo envolvendo $|\nabla_M|A||^2$,

$$\begin{aligned} \frac{2}{n-1}|\nabla_M|A||^2 &\leq |A|\Delta_M|A| + |A|^4 \\ \frac{2}{n-1}|\nabla_M|A||^2|A|^{2q}f^2 &\leq f^2|A|^{2q+1}\Delta_M|A| + |A|^{2q+4}f^2 \end{aligned}$$

Integrando sobre M , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{n-1} \int_M |\nabla_M|A||^2 |A|^{2q} f^2 dx &\leq \int_M f^2 |A|^{2q+4} dx + \int_M f^2 |A|^{2q+1} \Delta_M |A| dx \\ &\leq \left\{ \int_M |A|^{2q+4} f^2 dx - 2 \int_M f |A|^{2q+1} g(\nabla_M f, \nabla_M |A|) dx \right. \\ &\quad \left. - (2q+1) \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx \right\} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Onde na última equação utilizamos o teorema da divergência:

$$\int_M FG \Delta_M H dx = - \int_M Fg(\nabla_M G, \nabla_M H) dx - \int_M Gg(\nabla_M F, \nabla_M H) dx$$

Combinando as estimativas 6.32 e 6.33, para $0 \leq q \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{n-1} - q^2 \right) \int_M |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 f^2 dx &\leq \left\{ \int_M |A|^{4+2q} f^2 dx - 2 \int_M f |A|^{1+2q} g(\nabla_M f, \nabla_M |A|) dx \right. \\ &\quad \left. - (1+2q) \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx \right\} + \left\{ \int_M |A|^{4+2q} f^2 dx \right. \\ &\quad + (1+2q) \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx + \int_M |A|^{2q+2} |\nabla_M f|^2 dx \\ &\quad \left. + 2(1+q) \int_M f |A|^{1+2q} g(\nabla_M f, \nabla_M |A|) dx \right\} \\ &\leq \int_M |A|^{2+2q} |\nabla_M f|^2 dx + 2q \int_M f |A|^{1+2q} g(\nabla_M f, \nabla_M |A|) dx \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade das médias, $2xy \leq \epsilon x^2 + \frac{y^2}{\epsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{n-1} - q^2 \right) \int_M |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 f^2 dx &\leq \left\{ \int_M |A|^{2q+2} |\nabla_M f|^2 + \epsilon q \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\epsilon} \int_M |\nabla_M f|^2 |A|^{2q+2} dx \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{n-1} - q^2 - \epsilon q \right) \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{q} \right) \int_M |\nabla_M f|^2 |A|^{2q+2} dx \quad (6.34)$$

A desigualdade 6.34 nos dá uma estimativa do termo envolvendo $|\nabla|A||^2$ em função de algo que não depende de derivadas de $|A|$. O passo final é eliminar a dependência de $|A|$ no lado direito da desigualdade. Aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz na equação 6.32, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q} f^2 dx &\leq \left\{ (1+q)^2 \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx + \int_M |A|^{2q+2} |\nabla_M f|^2 dx \right. \\
&\quad \left. 2(1+q) \int_M f |A|^{2q+1} |\nabla_M f| |\nabla_M |A|| dx \right\} \\
&\leq \left\{ (1+q)^2 \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx + \int_M |A|^{2q+2} |\nabla_M f|^2 dx \right. \\
&\quad \left. \int_M 2\{(1+q)f|A|^q |\nabla_M |A||\} \cdot \{|A|^{q+1} |\nabla_M f|\} dx \right\} \\
&\leq 2(1+q)^2 \int_M f^2 |A|^{2q} |\nabla_M |A||^2 dx + 2 \int_M |A|^{2q+2} |\nabla_M f|^2 dx \quad (6.35)
\end{aligned}$$

Onde na desigualdade 6.35 utilizamos a desigualdade das médias. Utilizando a desigualdade 6.34 para limitar a primeira parcela do lado direito de 6.35, temos para $\epsilon < \frac{2}{\frac{n-1}{q} - q^2}$,

$$\int_M |A|^{4+2q} f^2 dx \leq \left(2(1+q)^2 \left(1 + \frac{q}{\epsilon} \right) \frac{n-1}{2 - (n-1)q^2 - (n-1)\epsilon q} + 2 \right) \int_M |\nabla_M f|^2 |A|^{2q+2} dx \quad (6.36)$$

Tomando $p = q + 2$, $f = \phi^p$, então $2 \leq p < 2 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, e a desigualdade de Hölder nos dá

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{2p} \phi^{2p} dx &\leq C(n, p) \int_M |A|^{2p-2} \phi^{2p-2} |\nabla_M \phi|^2 dx \\
&\leq C(n, p) \left(\int_M |A|^{2p} \phi^{2p} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_M |\nabla_M \phi|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\left(\int_M |A|^{2p} \phi^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C(n, p) \left(\int_M |\nabla_M \phi|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6.37)
\end{aligned}$$

O que nos dá o resultado. □

Concluimos esta seção com a seguinte generalização do teorema de Bernstein:

Teorema 6.19. (Schoen, Simon, Yau; [59]) *Suponha que $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície mínima completa com fibrado normal trivial e estável, $n \leq 6$ e que exista uma constante $V \leq \infty$ tal que*

$$\sup_{R>0} \frac{\text{Vol}(B_R \cap M)}{R^{n-1}} \leq V \quad (6.38)$$

Onde B_R denota a bola centrada na origem e com raio R em \mathbb{R}^n . Então M é flat.

Demonstração. Para cada $r > 0$ seja $\phi_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < r \\ 2 - \frac{|x|}{r}, & \text{se } r \leq |x| < 2r \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2r \end{cases}$$

Consideramos a restrição de ϕ_r a M , e utilizamos a estimativa 6.31 aplicada a esta função teste

$$\int_{B_{2r} \cap M} |A|^{2p} \phi^{2p} dx \leq C(n, p) \int_{(B_{2r} \setminus B_r) \cap M} |\nabla_M \phi|^{2p} dx$$

Já que $\nabla_M \phi$ é a projeção de $\nabla \phi$ sobre o espaço tangente, temos $|\nabla_M \phi| \leq |\nabla \phi| \leq \frac{1}{r}$, portanto

$$\begin{aligned} \int_{B_{2r} \cap M} |A|^{2p} dx &\leq C(n, p) \int_{(B_{2r} \setminus B_r) \cap M} r^{-2p} dx \\ &\leq C(n, p) r^{-2p} \text{Vol}(B_{2r} \cap M) \\ &\leq \tilde{C}(V, n, p) r^{n-1-2p} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Onde na última desigualdade utilizamos a estimativa 6.38. Fazendo $2p = 4 + \sqrt{\frac{7}{5}} < 4 + \sqrt{\frac{8}{n-1}}$, temos

$$n - 5 - \sqrt{\frac{7}{5}} < 1 - \sqrt{\frac{7}{5}} < 0$$

Donde o termo do lado direito da desigualdade 6.39 vai para zero quando $r \rightarrow \infty$. Concluimos assim que $\int_M |A|^{2p} = 0$, e portanto tal superfície é totalmente geodésica. \square

REFERÊNCIAS

- [1] AHLFORS, L. V. *Conformal invariants: Topics in geometric function theory*. New York: McGraw-Hill, 1973. (McGraw-Hill series in higher mathematics).
- [2] ALENCAR, H. Minimal surfaces of \mathbb{R}^{2m} invariant by $SO(m) \times SO(m)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 337, n. 1, p. 123-141, 1993.
- [3] ALENCAR, H.; DO CARMO, M. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 120, n. 4, p. 1223-1129, 1994.
- [4] ALLARD, W. On the first variation of a varifold. *Ann. of Math.* v. 95, n. 2, p. 417-491, 1972.
- [5] AMBROSIO, L.; FUSCO, N.; PALLARA, D. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford: Clarendon Press, 2000. (Oxford Mathematical Monographs).
- [6] ALMGREN JR, F. J. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. *Ann. of Math.*, v. 84, p. 277-292, 1966.
- [7] ALMGREN JR., F. J. *The theory of varifolds - a variational calculus in the large for the k-dimensional area integrand*. Mimeographed notes. Princeton, 1965.
- [8] ALMGREN JR., F. J. Existence and regularity almost every where of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure. *Ann. of Math.* v. 87, n. 2, p. 321-391, 1968.
- [9] BARBOSA, J. L.; DO CARMO, M. On the size of a stable minimal surface in \mathbb{R}^3 . *Amer. J. Math.* v. 98, n. 2, p. 515-528, 1976.
- [10] BARBOSA, J. L.; DO CARMO, M. Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the Laplacian. *Math. Z.* v. 173, n.1, p. 13-28, 1980.

- [11] BÉRARD, P.; CASTILLON, P.; Inverse spectral positivity for surfaces. [arXiv:1111.5928v3 \[math.DG\]](#).
- [12] BERNSTEIN, S. N. Sur une théorème de géometrie et ses applications aux équations dérivées partielles du type elliptique. *Comm. Soc. Math. Kharkov* v. 15 p. 38-45, 1915-1917.
- [13] BERNSTEIN, S. N. Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen typus. *Math. Zeit.*, v. 26, p. 551-558, 1927.
- [14] BOMBIERI, E.; DI GIORGI, E.; GIUSTI, E. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.* v. 7, p. 243-268, 1969.
- [15] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer, 2010. (Universitext)
- [16] CATALAN, E. Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum. *J. Math. P. Appl.* v. 7, p.203-211, 1842.
- [17] CHERN, S. S.; OSSERMAN, R. Complete minimal surfaces in euclidian n-space. *J. d'Analyse Math.* v. 19, p. 15-34, 1967.
- [18] CHERN, S. S.; DO CARMO, M.; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. *Functional analysis and related fields*(F. Browder ed.), Springer-Verlag: Berlin, p.59-75, 1970.
- [19] COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. *A course in minimal surfaces*. Providence: AMS, 2011. (Graduate studies in mathematics ; v. 121)
- [20] DI GIORGI, E. Una estensione del teorema di Bernstein. *Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze Fis. Mat. III*, XIX, I, p. 78-85, 1965.
- [21] DIERKES, U.; HILDEBRANT, S.; SAUVIGNY, F. *Minimal surfaces*. Heildeberg: Springer, 2010. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; v.339)
- [22] DIERKES, U.; HILDEBRANT, S.; TROMBA, A. J. *Global analysis of minimal surfaces*. Heildeberg: Springer, 2010. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; v. 341)

- [23] DO CARMO, M. *Geometria riemanniana*, 4^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)
- [24] DO CARMO, M. *Superfícies mínimas*, 2^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Publicações Matemáticas)
- [25] DOUGLAS, J. Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.* v. 34, p. 731-756, 1932.
- [26] ENNEPER, A., Analytisch-geometrische untersuchungen. *Z. Math. u. Phys.* v.9, p.96-125, 1864.
- [27] EVANS, L. C. *Partial differential equations* 2nd ed. Providence: AMS, 2010. (Graduate studies in mathematics ; v. 19)
- [28] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. Boca Raton: CRC Press, 1992. (Studies in Advanced Mathematics)
- [29] FEDERER, H.; FLEMING, W. H. Normal and integral currents. *Ann. of Math* v. 72, p. 458-520, 1960.
- [30] FEDERER, H. *Geometric measure theory*. Berlin: Springer, 1969.
- [31] FLEMING, W. H. On the oriented Plateau problem. *Rendiconti Circolo Mat. Palermo* v.2, p. 1-22, 1962.
- [32] FISCHER-COLBRIE, D.; SCHOEN, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math* v. 33, p. 199-211, 1980.
- [33] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.; *Elliptic partial differential equations of second order* Berlin: Springer, 1998. (Classics in Mathematics)
- [34] GIUSTI, E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Boston: Birkhäuser, 1984. (Monographs in mathematics ; v. 80)
- [35] HEINZ, E. Über die lösungen der minimalflächengleichung. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math-Phys.* K1, II, p. 51-56, 1952.

- [36] HOPF, E. On S. Bernstein's theorem on surfaces $z(x, y)$ of nonpositive curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.* v.1, n.1, p.80-85, 1950.
- [37] INDIANA UNIVERSITY. *Minimal Surface Archive*. Disponível em <<http://www.indiana.edu/~minimal/archive/index.html>>. Acesso em: 03 jun. 2013.
- [38] JÖRGENS, K. Über die lösungen der differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. *Math. Ann.* v.127, p. 130-134, 1954.
- [39] LAGRANGE, J. L. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. *Miscellanea Taurinensia* v. 2, p.173-195. 1760-1761.
- [40] LAWSON, H. B. *Lectures on minimal submanifolds*, vol. 1. Berkeley: Publish or Perish, 1980.
- [41] LAWSON, H. B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann. of Math.* v. 89, n. 2, p. 187-197, 1969.
- [42] LEONI, G. *A first course in Sobolev spaces*. Providence: AMS, 2009. (Graduate studies in mathematics; v. 105)
- [43] LIMA, E. L. *Curso de análise*, vol. 2, 10^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)
- [44] MASSARI, U.; MIRANDA, M.; A remark on minimal cones. *Boll. Un. Mat. Ital.*, v. 6, n. 2-A, p. 123-125, 1983.
- [45] MEEKS III, W. H.; PEREZ, J. The classical theory of minimal surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, v. 48, n. 3, p. 325-407, 2011.
- [46] MESNIEUR, J. M. B. C., Memoire sur la courbure des surfaces. *Mémoires de Savants Étrangers* v. 10, p.477-510, 1785 (apresentado à Academia em 1776).
- [47] MICKLE, E. J. A remark on a theorem of Serge Bernstein. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 1, p.86-89, 1950.

- [48] NITSCHKE, J. C. C. Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces. *Ann. Math.* v. 66, n. 2, p. 543-544, 1957.
- [49] NITSCHKE, J. C. C. *Lectures on Minimal Surfaces, vol. 1 : Introduction, fundamentals, geometry, and basic boundary value problems.* Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
- [50] NOMIZU, K., SMYTH, B., A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature. *J. Differential Geom.* v. 3, n. 3 p. 367-377, 1969.
- [51] OSSERMAN, R. Proof of a conjecture of Nirenberg. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 12, p. 233-239, 1959.
- [52] OSSERMAN, R. Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n . *Ann. of Math.* v. 80, p. 340-364, 1964.
- [53] OSSERMAN, R., The convex hull property of immersed manifolds. *J. Diff. Geom.*, v.6, p.267-270, 1971-1972.
- [54] OSSERMAN, R., *A survey of minimal surfaces.* 2nd ed., Dover, 1986.
- [55] OSSERMAN, R., Geometry V. In: SIMON, L. *The minimal surface equation.* Berlin: Springer, 1997. p. 239-272. (Encyclopedia of mathematical sciences, vol. 90.)
- [56] RADO, T. On the problem of Plateau. *Ann. of Math.* v.31 p.457-469, 1930.
- [57] SALSA, S. *Partial differential equations in action; from modelling to theory.* Dordrecht: Springer, 2008. (Universitext)
- [58] SCHERK, H. F., Bemerkung über die kleinste fläche innerhalb gegebener grenzen. *J. r. angew. Math.* v. 12, p. 185-208, 1835.
- [59] SCHOEN, R.; SIMON, L.; YAU, S.T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. *Acta. Math.*, v. 134, p. 275-288, 1975.
- [60] SCHOEN, R.; YAU, S.T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, v.65, n.1, p.45-76, 1979.

- [61] SCHOEN, R.; YAU, S.T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, *Ann. Math.*, v. 110, p.127-142, 1979.
- [62] SIMONS, J., Minimal varieties in riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, v. 88, p. 62-105, 1968.
- [63] WEIERSTRASS, K. Über die flächen deren mittlere krümmung überall gleich null ist. *Monatberichte der Berlinear Ak.* p. 612-625, 1866.
- [64] ZIEMER, W. P. *Weakly Differentiable Functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation*. New York: Springer-Verlag, 1989 (Graduate Texts in Mathematics; v. 120)