UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELAINE SAMPAIO DE SOUSA CARLOS

A GEOMETRIA DOS SÓLITONS DE RICCI COMPACTOS

FORTALEZA

2013

ELAINE SAMPAIO DE SOUSA CARLOS

A GEOMETRIA DOS SÓLITONS DE RICCI COMPACTOS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

FORTALEZA

2013

Carlos, Elaine Sampaio de Sousa

R369g A geometria dos sólitons de Ricci compactos/ Elaine Sampaio de Sousa Carlos - Fortaleza, 2013.

57 f.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Depto de Matemática, Fortaleza, 2013.

1 - Geometria Diferencial

CDD 516.36

À minha avó Tereza (in memoriam) por todo amor e carinho a mim dedicados e pelos ensinamentos que jamais esquecerei.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter sido minha fonte inesgotável de força, revigorando-me para enfrentar os obstáculos e concededo-me a oportunidade de concluir este trabalho.

À minha família por estar ao meu lado em todos os momentos, especialmente minha tia Alzenir, meu principal exemplo de pessoa e profissional e minha mãe Maria Sampaio pelo apoio e amor incondicionais.

Aos meus amigos, em especial Fabiana Alves, Leonardo Tavares, Rafael Diógenes, Raquel Costa e Renivaldo Sodré com os quais pude e posso contar em todos os momentos. Às minhas amigas Monique Araújo e Rakely Barbalho, que conheci no início da graduação e ainda tenho o privélio de tê-las em meu ciclo de amizade torcendo por mim e ajudando-me apesar da distância.

Também agradeço aos meus colegas de pós-graduação em matamática da UFC, Adriano, Airton, André, Davi, Disson, Francisco Chaves, Janiele, João Francisco, João Nunes, Loester, Oslenne, Raimundo, Renato, Robério, Rondinelle, Selene, Tiarlos, Wanderlley e a todos os outros que, direta ou indiretamente, estiveram comigo ao longo desta caminhada.

Não poderia deixar de agradecer ao professor Nilton José, meu orientador na graduação, o primeiro a me incentivar a tentar fazer mestrado em matemática.

Um agradecimento especial ao professor Ernani Ribeiro, por me incentivar a persistir no momento em que pensei em desistir e também pela orientação, compreensão e paciência durante a elaboração deste trabalho. Agradeço ainda aos professores Abdênago Barros e José Nazareno por aceitarem participar da banca.

À Andrea e à Jéssica pela competência e agilidade.

À CAPES e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

"Você nunca sabe a força que tem, até que sua única alternativa é ser forte.
(Johnny Depp)

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a geometria dos sólitons de Ricci compactos, os quais correspondem às soluções auto-similires do fluxo de Ricci. Além disso, essas variedades podem ser vistas como uma generalização das métricas de Einstein. Neste trabalho, mostraremos que todo sóliton de Ricci compacto tem curvatura escalar positiva. Além disso, mostraremos que o seu grupo fundamental é sempre finito. Em particular, apresetaremos uma prova feita por Perelman [19] que todo sóliton de Ricci compacto é do tipo gradiente.

Palavras-chave: Sólitons de Ricci, métricas de Einstein, Fluxo de Ricci.

Abstract

The aim of this work is to study the geometry of the compact Ricci soliton, which correspond to self-similar solution of the Ricci flow. These manifolds are natural generalization to Einstein metrics. Here we shall prove that every compact Ricci soliton has positive scalar curvature. Moreover, we show that its fundamental group is finite. Finally, we prove that every compact Ricci soliton must be gradient.

Keywords: Ricci solitons, Einstein metrics, Ricci flow.

Conteúdo

Introdução

Em 1982, Hamilton introduzia o conceito de fluxo de Ricci em [13]. Mais precisamente, Hamilton definiu o fluxo de Ricci

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$$

para estudar variedades tridimensionais compactas com curvatura de Ricci positiva. Nas últimas décadas, Hamilton provou vários teoremas importantes sobre fluxo de Ricci e lançou os fundamentos para o método de abordagem da conjectura de Poincaré e a conjectura de geometrização de Thurston via fluxo de Ricci.

Nas equações diferenciais parciais existe um conceito fundamental que é o de reescalonar e aplicar a fórmula da monotonicidade para obter soluções auto-similares. No fluxo de Ricci, tais soluções são chamadas de sólitons de Ricci.

Neste trabalho iremos estudar a geometria dos sólitons de Ricci compactos. O primeiro resultado que apresentaremos foi provado por G. Perelman [19] através do seguinte teorema.

Teorema 0.1 *Todo sóliton de Ricci compacto é gradiente.*

O Teorema acima mostra que existe uma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$ chamada de potencial de Perelman tal que o campo que define o sóliton pode ser dado pelo gradiente de f.

Na sequência, considerando tal teorema, demonstraremos a seguinte proposição.

Proposição 0.1 *Todo sóliton de Ricci compacto estacionário ou expansivo tem curvatura escalar constante.*

Através desta proposição chegaremos à conclusão de que todo sóliton de Ricci compacto estacionário ou expansivo é trivial.

Dando prosseguimento ao nosso estudo sobre os sólitons de Ricci compactos, demonstraremos através de uma proposição que todo sóliton de Ricci contrátil em variedades de dimensão dois (Hamilton [12]) é trivial.

Além disso exibiremos alguns exemplos se sólitons de Ricci e então concluiremos que sólitons de Ricci compactos não triviais existem apenas em dimensão maior ou igual a quatro (Cao [5]).

Também encontramos uma relação entre o campo inicial X e o campo ∇f obtido por Perelman. Para chegarmos a essa relação usaremos o Teorema da decomposição de Hodge-de Rham em [1] e provaremos o seguinte teorema.

Teorema 0.2 *Seja (M^n, g, X, λ) um sóliton de Ricci compacto. Então o potencial de Perelman é igual ao pontencial de Hodge-de Rham, a menos de uma constante.*

Finalmente, mostraremos que o grupo fundamental de um sóliton de Ricci compacto é finito (Fernandez-Lopes [11]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar uma série de resultados de geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto. Indicamos como leitura complementar [2], [7] e [9].

1.1 Alguns conceitos sobre tensores

Consideremos V um espaço vetorial de dimensão finita e V^* o espaço dual de V. Denotaremos os valores da aplicação $V^* \times V \to \mathbb{R}$ por

$$(\omega, X) \mapsto \langle \omega, X \rangle \quad \textit{ou} \quad (\omega, X) \mapsto \omega(X)$$

para $\omega \in V^*$, $X \in V$.

Definição 1.1 *Um $k-$tensor covariante em V é uma aplicação multilinear*

$$F : V \times ... \times V \to \mathbb{R}.$$

Similarmente, um $l-$tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$F : V^* \times ... \times V^* \to \mathbb{R}.$$

E um tensor do tipo (l, k), também chamado de um tensor $k-$covariante e $l-$contravariante, é uma aplicação multilinear

$$F : V^* \times ... \times V^* \times V \times ... \times V \to \mathbb{R}.$$

A estrutura de produto interno sobre os espaços tangentes a uma variedade Riemanniana torna possível visualizar tensores de diferentes maneiras. Veremos isso com o tensor Hessiano e o tensor de Ricci. Mas a observação fundamental é que uma aplicação bilinear pode ser interpretada como uma aplicação linear quando se tem uma estrutura de produto interno, como mostra o seguinte lema, cuja demonstração pode ser vista em [2].

Lema 1.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Existe um isomorfismo entre o espaço dos $(l+1,k)-$tensor $T_k^{l+1}(V)$ e o espaço das aplicações multilineares*

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V.$$

Assim, em todo este trabalho sempre que falarmos $(l+1,k)-$tensor, iremos trabalhar com este na forma de uma aplicação multilinear como vimos no lema anterior. Além disso, em todo o texto usaremos a convenção de Einstein para soma, que consiste em omitir o sinal do somatório quando temos índices cruzados repetidos, por exemplo

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j E_j$$

é equivalente a $y_i = x_i^j E_j$.

1.2 Operadores diferenciais e curvaturas

Em tudo o que segue (M, g) denotará uma variedade Riemannnina n-dimensional com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Definição 1.2 *Definamos a **derivada covariante** de um $(1,r)-$tensor S, como sendo o $(1,r+1)-$tensor $\nabla S : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} \nabla S(X, Y_1, .., Y_r) &= (\nabla_X S)(Y_1, \dots, Y_r) \\ &= \nabla_X(S(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} S(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_r). \end{aligned}$$

Dizemos que um tensor S é **paralelo** se $\nabla S \equiv 0$. Observe que uma métrica Riemanniana g é um tensor paralelo, pois

$$(\nabla g)(X, Y_1, Y_2) = \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0,$$

para quaisquer $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.3 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* ***gradiente*** *de f é o campo diferenciável ∇f, definido sobre M por*

$$g(\nabla f, X) = D_X f = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.1 *Sejam $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então*

(1) $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$.

(2) $\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$.

Além disso, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.2 *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$g(\nabla f, v)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.1}$$

Em particular, se p é um ponto de máximo ou de mínimo local para f, então $\nabla f(p) = 0$.

Para uma prova da proposição acima, veja [2].

Agora, observe que, se tomarmos $p \in M$, $v \in T_pM$ e considerarmos $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, pela proposição acima temos que

$$\begin{aligned} g(\nabla(\phi \circ f), v) &= \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= (\phi' \circ f) g(\nabla f, v)(p). \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f$.

Definição 1.4 *Dada uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, dizemos que $p \in M$ é* ***um ponto crítico*** *de f se $\nabla f(p) = 0$. Em particular, segue da Proposição 1.2 que todo ponto de máximo ou de mínimo local de f é um ponto crítico de f.*

Corolário 1.1 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.*

Proposição 1.3 *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\nabla f = g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Em particular,

$$|\nabla f|^2 = g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Definição 1.5 *Seja X um campo vetorial diferenciável em M. A* ***divergência*** *de X é uma função diferenciável $div\, X : M \to \mathbb{R}$, dada para $p \in M$ por*

$$(div\, X)(p) = tr\,\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{1.2}$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

De maneira similar à definição anterior, podemos definir a divergência de um $(1, r)-$tensor S como sendo o $(0, r)-$tensor

$$\begin{aligned}(div\, S)(v_1, \dots, v_r) &= tr\,\{w \mapsto (\nabla_w S)(v_1, \dots, v_r)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} g\Big((\nabla_{e_i} S)(v_1, \dots, v_r), e_i\Big),\end{aligned}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM. Lembre que um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ para todo $1 \le i, j \le n$. Para a construção de um referencial geodésico em uma vizinhança de p, veja Capítulo 3 de [9].

Definição 1.6 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Laplaciano** de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = div\,(\nabla f). \tag{1.3}$$

Definição 1.7 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Hessiano** de f é o campo de operadores lineares $(Hess\,f)_p : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por*

$$(Hess\,f)_p\,(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue da definição da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de $p \in M$, então

$$(Hess\,f)_p\,(X) = \nabla_X \nabla f.$$

Proposição 1.4 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $p \in M$, então $(Hess\,f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Proposição 1.5 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\Delta f = tr\,(Hess\,f). \tag{1.4}$$

Prova: É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$. Para tanto, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$\begin{aligned} tr\,(Hess\,f)_p &= \sum_{i=1}^{n} g((Hess\,f)_p(e_i), e_i)(p) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i)(p) \\ &= div\,(\nabla f)(p) = \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

Definição 1.8 *Seja (M, g) uma variedade Riemannina. O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)-$tensor $Rm : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} Rm\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,Z} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor Rm como um $(0,4)-$tensor, definido por $Rm : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathcal{C}^\infty(M)$

$$Rm\,(X,Y,Z,W) = g(Rm\,(X,Y)Z,W).$$

Proposição 1.6 *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(1) $Rm\,(X,Y,Z,W) = -Rm\,(Y,X,Z,W) = Rm\,(Y,X,W,Z)$.

(2) $Rm\,(X,Y,Z,W) = Rm\,(Z,W,X,Y)$.

(3) *Primeira identidade de Bianchi*

$$Rm\,(X,Y)Z + Rm\,(Y,Z)X + Rm\,(Z,X)Y = 0.$$

(4) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_Z Rm)(X,Y,W) + (\nabla_X Rm)(Y,Z,W) + (\nabla_Y Rm)(Z,X,W) = 0.$$

Para uma prova veja Capítulo 3 de [20].

Definição 1.9 *Seja $P \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente. A **curvatura seccional** de P em p é dada por*

$$sec\,(X,Y) = \frac{g(Rm\,(X,Y)Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - g(X,Y)^2},$$

onde $X,Y \in P$ são dois vetores linearmente independentes de T_pM. Lembre que esta definição não depende da escolha dos vetores (veja Capítulo 4 de [9]).

Observe que, se $\{e_1,e_2\}$ é uma base ortonormal de P, então

$$sec\,(e_1,e_2) = g(Rm\,(e_1,e_2)e_2,e_1).$$

Definição 1.10 *Definimos o **tensor curvatura de Ricci** $Ric : \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathcal{C}^\infty(M)$ como sendo o traço do tensor curvatura de Riemann, i.e.,*

$$Ric\,(Y,Z) = \mathrm{tr}\,\{X \mapsto Rm\,(X,Y)Z\},$$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$Ric(v,w) = \sum_{i=1}^{n} g(Rm\,(e_i,v)w,e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(Rm\,(e_i,w)v,e_i) = Ric(w,v).$$

Assim Ric é uma forma bilinear simétrica, donde também pode ser definido como o $(1,1)-$tensor simétrico

$$Ric\,(v) = \sum_{i=1}^{n} Rm\,(v,e_i)e_i.$$

Se (M,g) satisfaz $Ric\,(v) = kv$, ou equivalentemente, $Ric\,(v,v) = kg(v,v)$ onde $k : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função em M, então (M,g) é dita uma **variedade de Einstein**.

Definição 1.11 *A* ***curvatura escalar*** *de uma variedade é a função* $R : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$R = tr\,Ric.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\begin{aligned} R &= tr\,Ric \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(Ric\,(e_j),e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g(Rm\,(e_i,e_j)e_j,e_i) \\ &= 2\sum_{i<j} g(Rm\,(e_i,e_j)e_j,e_i). \end{aligned}$$

Portanto,

$$R = 2\sum_{i<j} sec\,(e_i,e_j). \tag{1.5}$$

A proposição seguinte mostra alguns resultados importantes que serão bastante úteis no decorrer deste trabalho.

Proposição 1.7 *Em uma variedade Riemanniana* M^n*, vale.*

1. *Segunda Identidade de Bianchi contraída 2 vezes*

$$dR = 2div\,Ric. \tag{1.6}$$

2. *Quando* $n = 2$, *vale*

$$Ric = \frac{R}{2}g. \tag{1.7}$$

3. *Identidade de Ricci*

$$\nabla_i \nabla_j Z_k - \nabla_j \nabla_i Z_k = R_{ijks} Z_s. \tag{1.8}$$

Prova: Para uma prova do item 1 veja [2].

Para o segundo item, vamos considerar $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal para T_pM e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, assim

$$\begin{aligned} Ric(X,Y)(p) &= Ric(X_1e_1 + X_2e_2, Y_1e_1 + Y_2e_2) \\ &= X_1Y_1Ric(e_1,e_1) + X_1Y_2Ric(e_1,e_2) + X_2Y_1Ric(e_2,e_1) + X_2Y_2Ric(e_2,e_2). \end{aligned}$$

Como $Ric(e_1, e_2) = \langle Rm(e_1, e_1)e_2, e_1\rangle + \langle Rm(e_2, e_1)e_2, e_2\rangle = 0$, logo

$$Ric(X,Y)(p) = X_1Y_1R_{2112} + X_2Y_2R_{1221}$$

.

E, pela equação (1.5), teremos

$$\begin{aligned} Ric(X,Y)(p) &= (X_1Y_1 + X_2Y_2)sec(e_1,e_2) \\ &= (X_1Y_1 + X_2Y_2)\frac{R}{2} \\ &= \frac{R}{2}g(X,Y)(p). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

E para obtermos a Identidade de Ricci, basta considerarmos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e usarmos a definição (1.8) em coordenadas, ou seja

$$\nabla_i \nabla_j Z_k - \nabla_j \nabla_i Z_k = R_{ijks} Z_s.$$

Assim, finalizamos a demonstração da proposição.

$\square$

1.3 Campos de Killing

Definição 1.12 *Seja α um tensor e X um campo completo (esta definição estende-se ao caso em que X não é completo e somente define um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos locais), a* ***derivada de Lie*** *de α com respeito a X é dada por*

$$\mathcal{L}_X\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_t^*\alpha - \alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\alpha,$$

onde φ_t^* é o difeomorfismo induzido pelo φ_t.

Proposição 1.8 *A derivada de Lie com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então $\mathcal{L}_X f = D_X f$.*

(2) *Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

(3) *Sejam α e β tensores, então $\mathcal{L}_X(\alpha\otimes\beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\otimes\beta + \alpha\otimes(\mathcal{L}_X\beta)$.*

(4) *Se α é um $(0,r)-$tensor, então para quaisquer $Y_1,\ldots,Y_r \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\alpha)(Y_1,\ldots,Y_r) &= D_X\alpha(Y_1,\ldots,Y_r)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\ldots,Y_{i-1},[X,Y_i],Y_{i+1},\ldots,Y_r)\\ &= (\nabla_X\alpha)(Y_1,\ldots,Y_r)\\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\ldots,Y_{i-1},\nabla_{Y_i}X,Y_{i+1},\ldots,Y_r).\end{aligned}$$

Para uma prova veja Capítulo 13 de [17].

Observação 1.1 Se $\varphi : M \to M$ é um difeomorfismo, α um tensor e $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X\alpha) = \mathcal{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\alpha).$$

Se $f : M \to \mathbb{R}$, então

$$\varphi^*(\nabla_g f) = \nabla_{\varphi^*g}(f\circ\varphi).$$

Se $\varphi(t) : M \to M$ é uma família a $1-$parâmetro de difeomorfismos e α é um tensor, então
$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)^*\alpha) = \mathcal{L}_{X(t)}\varphi(t)^*\alpha,$$
onde
$$X(t_0) \doteq \frac{\partial}{\partial t}\Big(\varphi(t_0)^{-1} \circ \varphi(t)\Big)\Big|_{t=t_0} = \Big(\varphi(t_0)^{-1}\Big)_* \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)\Big|_{t=t_0}.$$

Definição 1.13 *Dizemos que um campo X de vetores diferenciável sobre (M, g) é de* ***Killing*** *se $\mathcal{L}_X g = 0$. Se X é um campo de Killing completo, então o grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos φ_t que são gerados por X é um grupo a $1-$parâmetro de isometrias de (M, g).*

Proposição 1.9 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing, então X é completo.*

Para uma prova veja Capítulo 9 de [18].

1.4 Variedades Kähler

No capítulo seguinte, veremos alguns exemplos de sólitons de Ricci compactos, os quais são definidos em **variedades Kähler**. Para entendermos tais exemplos, primeiro, precisamos entender como é caracterizada esta classe de variedades.

Definição 1.14 *Uma* ***variedade complexa*** *M^n de dimensão complexa n é uma variedade suave de dimensão (real) $2n$ munida de um atlas formado por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$, satisfazendo a condição de que sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ a mudança de coordenadas*
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
é uma função holomorfa de n variáveis complexas. Neste caso, cada $\varphi : U_\alpha \to \mathbb{C}$ é uma ***carta coordenada holomorfa****, ou ainda um* ***sistema de coordenadas coplexas*** *em M^n e o conjunto das $\varphi_{\alpha' s}$ é um* ***atlas complexo*** *para M^n.*

Como toda função holomorfa é analítica, então toda variedade complexa é, de fato, uma variedade real analítica, ou seja, se $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ é uma carta coordenada holomorfa em M^n, com $\varphi = (z_1, ..., z_n)$ e $z_j = x_j + iy_j$ para $1 \leq j \leq n$, então $\varphi = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ é uma carta coordenada analítica de M^n, vista como variedade analítica real.

Exemplo 1.1 *O n-espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, com o atlas formado pela aplicação identidade, é uma variedade complexa de dimensão n.*

Exemplo 1.2 *Se M é uma variedade complexa de dimensão (complexa) n e $U \subset M$ é um aberto não-vazio, então U também é uma variedade complexa de dimensão n, quando munido do atlas induzido.*

Definição 1.15 *Uma **estrutura quasi-complexa** J em uma variedade diferenciável de dimensão $2n$ M é a escolha, para cada $p \in M$, de uma estrutura complexa $J_p : T_pM \to T_pM$, a qual é diferenciável no seguinte sentido: para cada $p \in M$ existem coordenadas locais $(x_1, ..., x_{2n})$ definidas numa vizinhança U de p em M e tais que a matriz de J_p com respeito à base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{2n}} \right\}$ de T_pM tem a forma*

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p = J_{kl}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \right)_p ,$$

*com $J_{kl} \in C^\infty(U)$ para todos $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq 2n$. Nesse caso, diremos que M é uma **variedade quasi-complexa** e que as funções J_{kl} são as componentes de J com respeito às coordenadas $(x_1, ..., x_{2n})$.*

Observação 1.2 *Se M^n é uma variedade diferenciável de dimensão n, o **fibrado tangente complexificado** de M^n é o produto tensorial*

$$TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} (M \times \mathbb{C}),$$

com espaço de seções claramente isomorfo à complexificação $\mathfrak{X}(M)^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{X}(M)$.

Observação 1.3 *Suponha agora que M^n é quasi-complexa com estrutura quasi-complexa J. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$, pondo $(JX)_p = J_pX_p$ para cada $p \in M$ obtemos* *um campo* $JX \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que a aplicação*

$$\begin{aligned} J \ : \ & \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \\ & X \mapsto JX \end{aligned}$$

define uma estrutura complexa no espaço vetorial real $\mathfrak{X}(M)$.

A proposição a seguir garante que toda variedade complexa é uma variedade quasi-complexa, cuja demonstração encontra-se em [3].

Proposição 1.10 *Se* M *é uma variedade complexa de dimensão (complexa)* n *e* $(z_1, ..., z_n)$ *é um sistema de coordenadas complexas para* M *definido em um certo* $V \subset M$*, então, para* $p \in V$*, o operador linear* $J_p : T_pM \to T_pM$ *tal que*

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \quad e \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p$$

independe das coordenadas $z_k = x_k + iy_k$ *escolhidas e define uma estrutura quasi-complexa em* M.

Agora, ao longo dessa seção, M denotará uma variedade complexa de dimensão (complexa) n e estrutura quasi-complexa J.

Uma métrica Riemanniana $\langle .,. \rangle$ em M é **Hermitiana** se

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Toda variedade complexa M pode ser munida de uma métrica Hermitiana qualquer $\langle .,. \rangle$ em M. Para isto, basta denirmos um $(0,2)-$tensor g em M da seguinte maneira.

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \langle JX, JY \rangle,$$

temos g claramente suave, simétrico e positivo definido, além disso

$$\begin{aligned} g(JX, JY) &= \langle JX, JY \rangle + \langle J^2X, J^2Y \rangle \\ &= \langle JX, JY \rangle + \langle -X, -Y \rangle \\ &= g(X, Y) \end{aligned}$$

assim, g é Hermitiana.

Uma **variedade Hermitiana** é uma variedade complexa munida de uma métrica Hermitiana. Nesse caso, se ω é o 2-tensor em M dado para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle,$$

então ω é uma 2-forma em M, denominada a **forma Kähler** de M.

Observação 1.4 *Como ω é claramente suave, basta mostrarmos que ω é alternada, isto é, $\omega(X,X) = 0$. De fato,*

$$\begin{aligned} \omega(X,X) &= \langle JX, X\rangle = \langle J^2X, JX\rangle = \langle -X, JX\rangle \\ &= -\omega(X,X). \end{aligned}$$

Logo, $\omega(X,X) - 0$.

Definição 1.16 *Se M é uma variedade complexa com estrutura quasi-complexa J, uma **métrica Kähler** em M é uma métrica Hermitiana g em M cuja forma Kähler é fechada. Nesse caso, (M, J, g) é uma **variedade Kähler**.*

Proposição 1.11 *Se M é uma variedade Hermitiana com estrutura quasi-complexa J e conexão de Levi-Civita ∇, então M é Kähler se e só se $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Para uma prova, veja capítulo 2 de [3].

Observação 1.5 *Sendo M uma variedade Kähler, temos que ω é paralela, logo $(\nabla_X\omega)(Y,Z) = 0$ para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Por outro lado, temos que*

$$\begin{aligned} (\nabla_X\omega)(Y,Z) &= X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\ &= X\langle JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X JY, Z\rangle + \langle JY, \nabla_X Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \nabla_X JY, Z\rangle = \langle J\nabla_X Y, Z\rangle.$$

Portanto,

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y.$$

Capítulo 2

Sólitons de Ricci compactos

2.1 Definições e fórmulas em sólitons de Ricci

O conceito de sóliton de Ricci foi introduzido por Hamilton [12] por volta dos anos 80. Os sólitons de Ricci são generalizações naturais de métricas Einstein e correspondem a soluções autosimilares do fluxo de Ricci.

Neste capítulo tentaremos entender a geometria dos sólitons de Ricci, para isso M^n será considerada uma variedade completa e conexa de dimensão n e quando for mencionado que M^n é uma variedade compacta significará que é fechada.

Definição 2.1 *Uma métrica Riemanniana g em uma variedade diferenciável M^n de dimensão n é chamada um* ***sóliton de Ricci*** *se existe um campo vetorial diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que o tensor de Ricci da métrica g satisfaz a equação*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g em relação ao campo X e $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, se X é um campo vetorial gradiente, então temos um sóliton de Ricci satisfazendo a equação

$$Ric + Hess f = \lambda g. \tag{2.2}$$

para alguma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$ que, ocasionalmente, é chamada de ***função potencial do sóliton de Ricci****. Este sóliton é chamado* ***sóliton***

de Ricci gradiente *ou, simplesmente,* ***sóliton gradiente****.*

A equação fundamental do sóliton de Ricci (2.1) pode ser reescrita em função da conexão de Levi-Civita usando o lema seguinte.

Lema 2.1 *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g) temos*

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i, \tag{2.3}$$

onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita da métrica g, para qualquer campo vetorial X.

Prova: Sejam os campos vetoriais $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Usando a regra do produto e a compatibilidade com a métrica Riemanniana na conexão de Levi-Civita, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g(Y,Z) &= X(g(Y,Z)) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z) \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle - \langle [X,Y], Z\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y - [X,Y], Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z - [X,Z]\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\mathcal{L}_X g(Y,Z) = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle$$

Assim, em coordenadas, temos

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i. \tag{2.4}$$

□

Portanto, podemos usar o Lema 2.1 juntamente com a equação (2.1) para obtermos

$$R_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i) = \lambda g_{ij} \tag{2.5}$$

e quando $X = \nabla f$, temos

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \lambda g_{ij} \tag{2.6}$$

Quando M^n for uma variedade complexa teremos um **sóliton de Ricci Kähler** definido da seguinte forma.

Definição 2.2 *Uma métrica Kähler $g_{\alpha\overline{\beta}}$ em uma variedade complexa M^n de dimensão complexa n é chamada um **sóliton de Ricci Kähler** se existe um campo vetorial holomorfo X em M^n tal que o tensor de Ricci $R_{\alpha\overline{\beta}}$ da métirca $g_{\alpha\overline{\beta}}$ satisfaz a equação*

$$R_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha X_{\overline{\beta}} + \nabla_{\overline{\beta}} X_\alpha) = \lambda g_{\alpha\overline{\beta}}$$

*para alguma constante (real) λ. Se X é um campo gradiente então temos um **sóliton de Ricci Kähler gradiente** satisfazendo*

$$R_{\alpha\overline{\beta}} + \nabla_\alpha \nabla_{\overline{\beta}} f = \lambda g_{\alpha\overline{\beta}} \quad e \quad \nabla_\alpha \nabla_\beta f = 0$$

onde f é a função potencial $f : M^n \to \mathbb{R}$.

Um sóliton de Ricci é chamado **expansivo**, **estacinário** ou **contrátil** se a constante $\lambda \in \mathbb{R}$ é, respectivamente, negativa, nula ou positiva.

Na próxima proposição iremos trabalhar com algumas consequências da equação (2.6).

Proposição 2.1 *Seja $(M, g, \nabla f, \lambda)$ um sóliton de Ricci gradiente, então valem as seguintes equações:*

$$R + \Delta f = \lambda n \tag{2.7}$$

$$\nabla_i R = 2R_{ij}\nabla^j f \tag{2.8}$$

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = R_{ijks}\nabla^s f \tag{2.9}$$

$$R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = constante \tag{2.10}$$

$$\Delta R = \langle \nabla R, \nabla f \rangle + 2\lambda R - 2|Ric|^2. \tag{2.11}$$

Prova: Como $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente, então tomamos o traço da equação fundamental do sóliton (2.6) para obtermos

$$R + \Delta f = \lambda n.$$

Para provarmos o segundo item, calculamos o divergente da equação (2.6) e aplicamos a Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes e encontramos

$$\frac{1}{2}dR + div\nabla^2 f = 0. \tag{2.12}$$

Por outro lado, a Fórmula de Bochner cuja demonstração pode ser vista em [8] nos diz que

$$div(\nabla^2 f) = Ric(\nabla f) + \nabla\Delta f.$$

Aplicando este fato à equação (2.12) obtemos

$$\frac{1}{2}\nabla_i R + R_{ij}\nabla^j f + \nabla_i \Delta f = 0. \tag{2.13}$$

Agora derivando a equação (2.7) obtemos

$$\nabla_i R + \nabla_i \Delta f = 0 \Rightarrow \nabla_i R = -\nabla_i \Delta f.$$

Substituindo a expressão acima na equação (2.13) encontramos

$$\frac{1}{2}\nabla_i R + R_{ij}\nabla^j f - \nabla_i R = 0.$$

Portanto,

$$\nabla_i R = 2R_{ij}\nabla^j f.$$

O que prova o segundo item.

Prosseguindo com a demonstração, pela equação (2.6) temos que

$$R_{ik} = \lambda g_{ik} - \nabla_i \nabla_k f.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} &= \nabla_j(\lambda g_{ik} - \nabla_i \nabla_k f) - \nabla_i(\lambda g_{jk} - \nabla_j \nabla_k f) \\ &= -\nabla_j \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_j \nabla_k f \\ &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f. \end{aligned}$$

Usando a identidade de Ricci, obtemos a terceira equação (2.9).

Agora consideremos a expressão

$$R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f.$$

Derivando tal expressão, encontramos

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) = \nabla R + \nabla|\nabla f|^2 - 2\lambda\nabla f.$$

Usando a equação (2.8) temos

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) = 2Ric(\nabla f) + \nabla|\nabla f|^2 - 2\lambda\nabla f. \tag{2.14}$$

Agora observe que, dado $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla|\nabla f|^2, Y\rangle &= Y(|\nabla f|^2) \\ &= 2\langle \nabla_Y \nabla f, \nabla f\rangle \\ &= 2Hessf(Y, \nabla f) \\ &= 2Hessf(\nabla f, Y) \\ &= 2\left\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, Y\right\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f}\nabla f.$$

Usando essa igualdade juntamente com a equação (2.6) em (2.14), obtemos

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) = 2Ric(\nabla f) + 2\nabla_{\nabla f}\nabla f - 2\lambda\nabla f = 0,$$

portanto,

$$R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = constante.$$

Finalmente, para obtermos a equação (2.11), calculamos o divergente da equação (2.8) e encontramos

$$\begin{aligned} \Delta R &= 2div(Ric(\nabla f)) && (2.15) \\ &= 2(divRic)(\nabla f) + 2\langle \nabla^2 f, Ric\rangle. && (2.16) \end{aligned}$$

Pela equação (2.6), temos

$$\nabla^2 f = \lambda g - Ric.$$

Usando isto em (2.19), deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta R &= 2(divRic)(\nabla f) + 2\left\langle \lambda g - Ric, Ric\right\rangle \\ &= 2(divRic)(\nabla f) + \lambda\langle g, Ric\rangle - 2\langle Ric, Ric\rangle \\ &= 2(divRic)(\nabla f) + 2\lambda R - 2|Ric|^2 \\ &= (dR)(\nabla f) + 2\lambda R - 2|Ric|^2, \end{aligned}$$

o que implica

$$\Delta R = \langle \nabla R, \nabla f \rangle + 2\lambda R - 2|Ric|^2.$$

Assim finalisamos a prova da proposição. $\square$

A teoria dos fluxos de Ricci foi utilizada por G. Perelman para demonstrar a conjectura de Poincaré. Dentro dessa teoria temos o estudo dos sólitons de Ricci que representam os pontos estacionários do fluxo. A conexão entre sólitons de Ricci e o fluxo de Ricci fica evidenciada pelo seguinte resultado.

Teorema 2.1 *Se* $\left(M^n, g_0, f_0, -\dfrac{\lambda}{2}\right)$ *é um soliton gradiente com o campo gradiente* $\nabla_{g_0} f_0$ *completo, então existe uma solução* $g(t)$ *do fluxo de Ricci, isto é,*

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)),$$

com $g(0) = g_0$*, difeomorfismos* $\phi(t)$ *com* $\phi(0) = Id_M$*, funções* $f(t)$ *com* $f(0) = f_0$*, definido para todo* t*, tal que* $\tau(t) = \lambda t + 1 > 0$*, sastifazendo:*

(1) $\phi(t) : M^n \to M^n$ *é uma família a* 1 *parâmetro de difeomorfismos gerados por* $X(t) = \dfrac{1}{\tau(t)}(\nabla_{g_0} f_0)$*, isto é,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t)(x) = \frac{1}{\tau(t)}(\nabla_{g_0} f_0)(\phi(t)(x));$$

(2)

$$g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g_0;$$

(3)

$$f(t) = f_0 \circ \phi(t) = \phi(t)^*(f_0);$$

(4)

$$Ric(g(t)) + \nabla_{g(t)}\nabla_{g(t)} f(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0,$$

onde $\nabla_{g(t)} f(t)$*, é o gradiente de* $f(t)$ *com a métrica* $g(t)$*.*

Para uma prova veja [2].

O Teorema (2.1) diz que dado um sóliton de Ricci gradiente com ∇f completo, existe uma solução do Fluxo de Ricci que é igual ao soliton gradiente em algum instante e mais ainda, a solução é ainda um soliton de Ricci gradiente para todo t no intervalo de definição da solução.

A seguir exibiremos alguns exemplos clássicos de sólitons de Ricci gradiente.

1. *Sóliton Gaussiano*: $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f, \lambda)$ onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por, com $f = \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e g é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$ é um sóliton de Ricci gradiente chamado sóliton Gaussiano.

2. *Sóliton Charuto*: $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, \nabla_\Sigma f, \lambda)$ com

$$g_\Sigma = \frac{g}{1 + x^2 + y^2},$$

   onde g é a métrica canônica do $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x,y) = -log(1 + x^2 + y^2)$ é um sóliton de Ricci estacionário chamado de sóliton charuto. Tal sóliton também é conhecido na física como buraco negro de Witten.

3. *Sóliton de Bryant*: Para $n \geq 3$, temos que $(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty), g, \nabla f, \lambda)$ onde

$$g = dr^2 + \Phi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

   é um sóliton de Ricci rotacionalmente simétrico com curvatura seccional positiva conhecido como sóliton de Bryant.

4. *Sóliton de Ricci cilíndrico contrátil*: Consideremos o produto da esfera shrinking com a reta, isto é, $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$, $t \in (-\infty, 0)$, $n \geq 3$, onde $g(t) = 2(n-2)|t| g_{\mathbb{S}^{n-1}} + dr^2$.

   Se tomarmos

$$f(\theta, r, t) = \frac{r^2}{4|t|}, \theta \in \mathbb{S}^{n-1}, r \in \mathbb{R}, t < 0,$$

   então temos que $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, g, \Delta f, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente contrátil.

5. *Sóliton de Ricci compacto em uma variedade Kähler*: Para a dimensão real igual a quatro, o primeiro exemplo de sóliton contrátil compacto foi construído no início dos anos 90 por Koiso [16] e, independentemente, por Cao [4] na superfície compacta complexa $\mathbb{CP}^2 \# (-\mathbb{CP}^2)$, onde $(-\mathbb{CP}^2)$ denota o espaço projetivo complexo com a orientação contrária.

2.2 Teorema de Perelman

Em [19], Perelman provou que um sóliton de Ricci compacto é sempre gradiente. Mais precisamente, provou que existe uma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que o campo que define o sóliton pode ser dado pelo gradiente de f. Esta função é conhecida como potencial de Perelman. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2 *(Perelman [19]) Todo soliton de Ricci compacto é gradiente.*

Prova: Podemos considerar a equação do soliton de Ricci da seguinte forma

$$R_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i) = \lambda g_{ij}, \tag{2.17}$$

onde ω é a 1-foma associada ao campo X, isto é, $\omega(.) = \langle ., X \rangle = X^\flat$.

Considerando λ em (2.17), façamos um cálculo independente para uma função $f : M^n \to \mathbb{R}$ genérica,

$$\begin{aligned} g^{jk}\nabla_k\{2(R_{ij} + \nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij})e^{-f}\} &= g^{jk}\{2\nabla_k R_{ij} + 2\nabla_k\nabla_i\nabla_j f\}e^{-f} \\ &\quad + g^{jk}\{2(R_{ij} + \nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij})\}\nabla_k(e^{-f}) \\ &= \{2g^{jk}\nabla_k R_{ij} + 2g^{jk}\nabla_k\nabla_i\nabla_j f\}e^{-f} \\ &\quad - \{2g^{jk}R_{ij}\nabla_k(f) + 2g^{jk}\nabla^2_{ij} f\nabla_k(f) \\ &\quad - 2\lambda g^{jk} g_{ij}\nabla_k f\}e^{-f}. \end{aligned}$$

Usando a identidade de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned} g^{jk}\nabla_k\{2(R_{ij}\nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij})e^{-f}\} &= \{\nabla_i R + 2g^{jk}\nabla_i\nabla_k\nabla_j f + 2R_{is}\nabla^s f\}e^{-f} \\ &\quad - \{2R_{ik}\nabla^k f + 2g^{jk}\nabla^2_{ij} f\nabla_k f - 2\lambda\nabla_i f\}e^{-f} \\ &= \nabla_i\{R + 2\Delta f - |\nabla f|^2 + 2\lambda f\}e^{-f}. \end{aligned}$$

Podemos considerar a existência de uma função $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$R + 2\Delta f - |\nabla f|^2 + 2\lambda f = C,$$

onde C é uma constante e $\lambda > 0$. Tal existência é garantida pela minimização do funcional de Perelman $\mathcal{W}$ definida em [19], juntamente com uma estimativa de Sobolev em [21], para maiores detalhes veja [10].

Portanto, podemos garantir que

$$g^{jk}\nabla_k\{(Ric + Hessf - \lambda g)e^{-f}\} = 0.$$

Dessa forma, se considerarmos o tensor

$$T_i = (\nabla_k f - \omega_k)g^{kj}(R_{ij} + \nabla^2_{ij}f - \lambda g_{ij})e^{-f},$$

temos que

$$\begin{aligned} g^{li}\nabla_l T_i &= (\nabla_l\nabla_k f - \nabla_l\omega_k)g^{kj}g^{li}(R_{ij} + \nabla^2_{ij}f - \lambda g_{ij})e^{-f} \\ &= (2\nabla_l\nabla_k f - \nabla_l\omega_k - \nabla_k\omega_l)g^{kj}g^{li}(R_{ij} + \nabla^2_{ij}f - \lambda g_{ij})\frac{e^{-f}}{2}, \end{aligned}$$

usando a equação (2.17), obtemos

$$g^{li}\nabla_l T_i = g^{kj}g^{li}(2\nabla_l\nabla_k f + 2R_{lk} - 2\lambda g_{lk})(R_{ij} + \nabla^2_{ij}f - \lambda.)$$

Logo,

$$divT = |Ric + Hessf - \lambda g|^2 e^{-f}.$$

Portanto, $0 \leq |Ric + \nabla^2 f - \lambda g|^2 e^{-f} = divT$. Integrando $|Ric + \nabla^2 f - \lambda g|^2 e^{-f}$ e usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$Ric + Hessf = \lambda g.$$

Assim $(M, g, \nabla f, \lambda)$ é um soliton gradiente com potencial f. $\square$

Pelo Teorema acima podemos concentrar nosso estudo nos sólitons de Ricci gradiente. E com a seguinte proposição, poderemos restrigir tal estudo aos sólitons de Ricci gradiente contráteis.

Proposição 2.2 *Todo sóliton de Ricci compacto estacionário ou expansivo tem curvatura escalar constante.*

Prova: Suponhamos que R atinja seu valor mínimo no ponto $p \in M$ e representemos por $R(p) = R_{min}$. Assim

$$\nabla R_{min} = 0 \quad e \quad \Delta R_{min} \geq 0.$$

Integrando sobre M a equação (2.7), temos

$$\int_M R d\mu + \int_M \Delta f d\mu = \int_M n\lambda d\mu.$$

Como M é variedade compacta sem bordo, pelo Teorema de Stokes temos que

$$\int_M \Delta f d\mu = 0,$$

portanto

$$\int_M R d\mu = n\lambda vol(M),$$

o que implica em

$$n\lambda = \frac{1}{vol(M)} \int_M R d\mu \geq \frac{1}{vol(M)} \int_M R_{min} d\mu = Rmin, \tag{2.18}$$

com igualdade se, e somente se, a curvatura escalar for constante. Desta forma temos que

$$n\lambda - R_{min} \geq 0.$$

Agora consideremos a equação (2.11) dada por

$$\Delta R = \langle \nabla R, \nabla f \rangle + 2\lambda R - 2|Ric|^2.$$

Como

$$|\overset{\circ}{Ric}|^2 = |Ric|^2 - \frac{(tr(Ric))^2}{n} = |Ric|^2 - \frac{R^2}{n}.$$

Portanto, substituindo esta última equação em (2.11), encontramos

$$\begin{aligned} \Delta R &= \langle \nabla R, \nabla f \rangle + 2\lambda R - 2|\overset{\circ}{Ric}|^2 - \frac{2R^2}{2} \\ &\leq \langle \nabla R, \nabla f \rangle + 2\lambda R - \frac{2R^2}{n} \\ &= \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{2R}{n}(n\lambda - R). \end{aligned}$$

Aplicando no ponto de mínimo p, temos

$$0 \leq \Delta R(p) \leq \frac{2R_{min}}{n}(\lambda n - R_{min}).$$

Logo, $R_{min} \geq 0$.

Sendo o sóliton expansivo ou estacionário, então $\lambda \leq 0$. Dessa forma, temos

$$0 \geq \lambda n \geq R_{min} \geq 0.$$

Assim, ocorre a igualdade na equação (2.18). Portante R é constante.

$\square$

Como consequência, teremos que todo sóliton de Ricci compacto estacionário ou expansivo é trivial. Assim, concluímos que sólitons de Ricci compactos (não triviais) são contráteis, ou seja, $\lambda > 0$. Além disso, como

$$0 \leq \Delta R(p) \leq \frac{2R_{min}}{n}(\lambda n - R_{min})$$

e $R \geq R_{min} \geq 0$, pelo princípio do máximo forte, R não será constante se atingir seu máximo no bordo. Portanto $R > 0$.

Agora, para sólitons de Ricci compactos de dimensão dois, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3 *Todo sóliton de Ricci em uma superfície compacta é trivial.*

Prova: Seja (Σ, g, X, λ) um sóliton de Ricci contrátil com Σ compacta. Pelo teorema de Perelman, temos que o sóliton é gradiente, logo satisfaz a equação

$$Ric = \lambda g + Hess f$$

para alguma constante $\lambda > 0$ e f diferenciável em Σ. Escolhamos, sem perda de generalidade, $\lambda = 1$. Como Σ é compacta, existe um ponto $p \in \Sigma$ para o qual $\nabla f = 0$. Além disso, sabemos que $(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X, Y) = 2Hess f(X, Y)$ e que, em dimensão dois, $Ric = \frac{1}{2}Rg$.

Agora, consideremos J uma estrutura quase complexa em $T\Sigma$ definida pela rotação de 90° no sentido anti-horário e $\{e_1, e_2\}$ referencial geodésico em Σ.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{J(\nabla f)}g)(e_1,e_2) &= \langle \nabla_{e_1} J(\nabla f), e_2\rangle + \langle e_1, \nabla_{e_2} J(\nabla f)\rangle \\
&= \langle J(\nabla_{e_1} \nabla f), e_2\rangle + \langle e_1, J(\nabla_{e_2} \nabla f)\rangle \\
&= \langle J^2(\nabla_{e_1} \nabla f), J(e_2)\rangle + \langle J(e_1), J^2(\nabla_{e_2} \nabla f)\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_1} \nabla f, e_1\rangle - \langle e_2, \nabla_{e_2} \nabla f\rangle \\
&= Hess(e_1,e_1) - Hess(e_2,e_2) \\
&= \frac{1}{2}Rg_{11} - g_{11} - \frac{1}{2}Rg_{22} + g_{22} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $J(\nabla f)$ é um campo de Killing. Assim segue, pelo Lema 0.1 em [6], que g é rotacionalmente simétrica, isto é, $g = dr^2 + h(r)^2 d\theta^2$, $0 \le r \le A < \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Além disso $h(0) = h(A) = 0$ e $h'(0) = -h'(A) = 1$

Podemos considerar $f = f(r)$ e, usando que a curvatura de Gauss é $K_g = -\dfrac{h''}{h}$. Substituindo na equação do sóliton de Ricci, encontramos

$$-\frac{h"}{2h} = 1 + f" \qquad -\frac{h"}{2h} = 1 + \frac{h'f'}{h}$$

Dessa forma, temos que

$$f'' = \frac{h'f'}{h}.$$

Assim, concluímos que

$$\frac{f'}{h} = a = constante,$$

ou seja, $f' = ah$.

Logo,

$$-\frac{h'}{2h} = \frac{h'f'}{h} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{h"}{2h} = h'a + 1$$

multiplicando a última igualdade por hh', obtemos

$$-\frac{h'h"}{2} = (h')^2 ha + hh'$$

e integrando sobre $[0, A]$, encontramos

$$-\frac{1}{2}\int_0^A h'h" dr = a\int_0^A h(h')^2 dr + \int_0^A hh' dr.$$

O que implica em

$$-\frac{(h')^2}{4}\Big|_0^A = a\int_0^A h(h')^2 dr + \frac{h^2}{2}\Big|_0^A.$$

Então,

$$-\frac{(h'(A))^2}{4} + \frac{(h'(0))^2}{4} = a\int_0^A h(h')^2 dr + \frac{(h(A))^2}{2} - \frac{(h(0))^2}{2}$$

Portanto,

$$a\int_0^A h(h')^2 dr = 0.$$

Logo, $a = 0$. Então $f' = 0$, implicando que f é constante e portanto o sóliton é trivial. Assim, finalisamos a prova da proposição.

$\square$

No caso de dimensão três, sólitons de Ricci compactos também são triviais. Tal fato pode ser verificado em [14].

2.3 Decomposição de Hodge-de Rham para sólitons de Ricci

Através do seguinte teorema podemos encontrar uma relação entre o campo inicial X e o campo ∇f obtido por Perelman.

Teorema 2.3 *Seja $\big(M^n, g, X\big)$ um sóliton de Ricci compacto. Então o potencial de Perelman é igual ao potencial de Hodge-de Rham, a menos de uma constante.*

Prova: Consideremos um campo vetorial X em uma variedade Riemanniana compacta M^n, usando o teorema de decomposição de Hodge-de Rham [23], podemos decompor X como a soma de um campo vetorial Y, de divergente nulo, e o gradiente de uma função h, isto é,

$$X = Y + \nabla h,$$

onde $divY = 0$ e h é uma função conhecida como *potencial de Hodge-de Rham.*

Então, considerando a 1-forma $X^\flat$ e aplicando o teorema de Hodge-de Rham, é possível decompor $X^\flat$ de forma única como

$$X^\flat = d\alpha + \delta\beta + \gamma, \tag{2.19}$$

onde α é uma 0-forma, β é uma 2-forma, γ é uma 1-forma harmônica e $\Delta = d\delta + \delta d$ é o operador de Laplace-Beltrani.

Para chegarmos ao resultado desejado, consideremos $Y = (\delta\beta + \gamma)^\sharp$ e $(d\alpha)^\sharp = \nabla h$.

Agora, notemos que, se (M^n, g, X, λ) é um sóliton de Ricci compacto, pelo Teorema (2.2) é um sóliton gradiente, então satisfaz a equação (2.7), isto é,

$$R + \Delta f = \lambda n,$$

onde f é o pontecial de Perelman.

Mas, pela equação (2.19), temos que $divX = \Delta h$. Assim,

$$R = \lambda n - \Delta h.$$

Das duas últimas equações, deduzimos que $\Delta(f-h) = 0$. Agora, aplicando o Teorema de Hopf, concluímos que $f = h + c$ onde c é uma constante. Com isso finalizamos a demonstração do teorema. $\square$

2.4 Grupo fundamental

Sólitons de Ricci generalizam variedades Einstein, então é natural perguntarmos se resultados clássicos como o teorema de Myers para variedades Einstein de curvatura escalar positiva também valem no caso de sólitons de Ricci. Isto leva-nos às seguintes perguntas:

1. Se M é compacta, então tem $\pi_1(M)$ finito?

2. A completude de (M, g) implica na compacidade de M?

Tais perguntas são respondidas pelos teoremas a seguir.

Teorema 2.4 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$\mathcal{L}_X g + Ric \geq \lambda g$$

para algum campo vetorial diferenciável X *em* M *e alguma constante positiva* λ. *Então* M *é compacta se, e somente se,* $||X||$ *é limitada em* (M^n, g).

Prova: Se M é compacta então $||X||$ é limitada. Reciprocamente, supondo $||X||$ limitada, tomemos q um ponto em M^n e consideremos uma geodésica $\gamma : [0, +\infty) \to M$ partindo de q e parametrizada pelo comprimento de arco. Então ao longo de γ vale

$$\mathcal{L}_X g(\gamma', \gamma') = 2g(\nabla_{\gamma'} X, \gamma') = 2\frac{d}{dt}[g(X, \gamma')].$$

Por outro lado,

$$Ric \geq \lambda g - \mathcal{L}_X g,$$

assim

$$\begin{aligned} \int_0^T Ric(\gamma', \gamma')dt &\geq \lambda \int_0^T g(\gamma', \gamma')dt - 2\int_0^T \frac{d}{dt}[g(X, \gamma')]dt \\ &= \lambda T - 2g(X, \gamma'(T)) + 2g(X, \gamma'(0)) \end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$2g(X_{\gamma(T), \gamma'(T)}) \leq |2g(X_{\gamma(T)}, \gamma'(T))| \leq ||X_{\gamma(T)}|| ||\gamma'(T)|| = ||X_{\gamma(T)}||$$

O que implica em

$$-2g(X_q, \gamma'(T)) \geq -||X_q||.$$

Logo,

$$\int_0^T Ric(\gamma', \gamma')dt \geq \lambda T + 2g(X_q, \gamma'(0)) - \parallel X_{\gamma(T)} \parallel .$$

Assim

$$\int_0^\infty Ric(\gamma', \gamma')dt = +\infty.$$

Então, pelo teorema de Ambrose [15], M é compacta.

□

Usando este teorema poderemos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.5 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta satisfazendo*

$$\mathcal{L}_X g + Ric \geq \lambda g \tag{2.20}$$

para algum campo vetorial diferenciável X em M e alguma constante positiva λ. Então o grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M é finito.

Prova: Seja $(\tilde{M}, \tilde{g})$ o recobrimento Riemanniano universal de (M, g) e seja $\tilde{X}$ o levantamento de X. Assim a projeção $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ é isometria local, dessa forma $||\tilde{X}||$ é limitada e a desigualdade acima também é válida para $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Então, pelo teorema anterior, $\tilde{M}$ é compacta logo o número de folhas do recobrimento é finito. Por outro lado, sendo $(\tilde{M}, \tilde{g})$ recobrimento universal, então $\tilde{M}$ é simplesmente conexo, então o número de elementos de $\pi_1(M)$ será igual ao número de folhas do recobrimento. Portanto, $\pi_1(M)$ é finito.

□

Como um sóliton de Ricci compacto satisfaz a igualdade em (2.20), concluímos assim que seu primeiro grupo fundamental é finito.

Referências

[1] AQUINO, C.; BARROS, A.; RIBEIRO JR., E. Some Applications of the Hodge-de Rham Decomposition to Ricci Solitons. *Results in Mathematics*, v. 60, p. 245-254, 2011.

[2] BATISTA, R. Rigidez de sólitons gradiente. 2010, 74 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Ceará, Pós-graduação em Matemática, Fortaleza, 2010.

[3] CAMINHA, A. Introdução à Geometria das Aplicações Harmônicas. 1. ed. São Paulo: XVI Escola de Geometria Diferencial, v. 1, p. 231, 2010.

[4] CAO, H. -D. Existence of gradient Kähler-Ricci solitons, *Elliptic and Parabolic Methods im Geometry*,(Minneapolis, MN, 1994), A K Peters, Wellesley, MA, (1996) 1-16.

[5] CAO, H.-D. Geometry of Ricci Solitons. *Chin. Ann. Math.*, v. 27B(2), p. 121-142, 2006.

[6] CHEN, X.; LU, P.; TIAN, G. A note on Uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 134, p. 3391-3393, 2006.

[7] CHOW,B; KNOPF, D. The Ricci flow: an introduction. Providence, RI, *American Mathematical Society*, 2004. (Mathematical survey and monographs, v. 110).

[8] CHOW, B.; LU, P.; Ni, L. Hamilton's Ricci Flow.*Graduate Studies in Mathematics*, v. 77, 2006.

[9] DO CARMO, M. P. Geometria Riemanniana. 3ª ed. Rio de Janeiro. IMPA, *Projeto Euclides*, 2005.

[10] EMINENTI, M; LA NAVE, G; MANTEGAZZA, C. Ricci solitons: the eqaution point of view. *Manuscripta maph.*, v. 127, p. 345-367, 2008.

[11] FERNANDEZ-LOPEZ, M.; GARCIA-RIO, E. A remark on compact Ricci solitons. *Math. Ann.*, v.340, p. 893-896, 2008.

[12] HAMILTON, R. S. The Ricci flow on surfaces. *Contemporary Mathematics*, v. 71, p. 237-261, 1988.

[13] HAMILTON, R. S. Three manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, v. 17, p.255-306. 1982.

[14] IVEY, T. Ricci solitons on compact three-manifold. *Diff. Geom. Appl.*, v. 3, p. 301-307. 1993.

[15] J. WRAITH, D. On a Theorem of Ambrose. *J. Aust. Math. Soc.*, v. 81, p. 149-152, 2006.

[16] KOISO, N. On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics. *Recentt Topics in Diff. Anal. Geom., Adv. Studies Pure Math.*, v. 18-I, p. 327-337, 1990.

[17] LEE, J. M. Introduction to smooth manifolds. New York, *Springer-Verlag*, 2002. (New Yourk Graduate Texts in Mathematics. v. 218.)

[18] O'NEILL, B. Semi-Riemannain geometry with applications to general relativity. New York, *Academic Press*, 1983.

[19] PERELMAN, G. The antropy formula for the Ricci flow and its geometrics applications. Prerpint, arXiv math/0211159, 2002.

[20] PETERSEN, P. Riemannian geometry.*Graduate Texts in Mathematics.*, v. 171, Springer-Verlag, New York. 1998.

[21] ROTHAUS, O. S. Logarithmic Sobolev inequalities and the spectrum of Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, v. 42, p. 110-120, 1981.

[22] WANG, X. J. and ZHU, X. H. Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class. *Adv. Math*, v. 188, p. 87-103, 2004.

[23] WARNER, F. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Group. *Springer-Verlag*, New York. 1983.

[24] WYLIE, W. Complete Shrinking Ricci Solitons have Finite Fundamental Group. *J. Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 136, p. 1803-1806, 2008.