

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA  
CAEN

**Mauricio Benegas**

TRÊS ENSAIOS EM ANÁLISE ECONÔMICA

FORTALEZA  
2006

MAURICIO BENEGAS

TRES ENSAIOS EM ANÁLISE ECONÔMICA

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Economia, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Economia.

Orientador: Prof. Emerson Luis Lemos Marinho

FORTALEZA  
2006

*Às mulheres da minha vida: Geisa e  
Anne Elize*

## AGRADECIMENTOS

A finalização e defesa de uma tese de doutorado, passa-nos a sensação do fim de uma jornada que começa com uma expectativa sobre o que representa uma pós-graduação. Minha sincera opinião é que se a expectativa for corretamente formada, então a conclusão de um doutorado passa ao largo de representar finalização, mas, diferentemente, caracteriza o início.

Nessa linha de raciocínio, me senti na obrigação de refletir cuidadosamente o significado de gratidão. Concluí que o conjunto de pessoas a quem devo os meus sinceros agradecimentos, é muito mais amplo do que me permite registrar, o espaço físico de que disponho. Assim sendo, as pessoas que serão citadas abaixo representam, numa escala pessoal, os principais contribuintes, não só para a minha formação acadêmica, mas também, e principalmente, pelo que eu vou representar para sociedade daqui por diante.

Antes de mais nada, agradeço a Deus por conceber minha existência e por dotar-me com a capacidade física e intelectual que permite minha localização no tempo e no espaço.

Aos meus pais, Edmundo Amado Benegas e Maria Elisa Benegas, minha eterna devoção e amor por intermediarem minha existência e por me ensinarem o significado prático de conceitos como caráter, honestidade, determinação, amizade, lealdade, etc.; numa palavra, é um grande privilégio ser filho desses dois.

Todos que passaram, ou estão passando, pelo duro treinamento exigido pela ciência sabem que manter um casamento em plena harmonia é por certo a tarefa mais difícil de todas (mais difícil do que entender a prova de existência de equilíbrio Walrasiano quando vista pela primeira vez), não por outro motivo, mas por que passamos em torno de quatro anos dividindo nossa atenção entre nossa família e uma rival implacável: a pós. Assim, o meu débito com minha esposa Geisa e minha filha Anne Elize, não pode ser pago em uma só vida. Elas são a melhor parte de mim.

Em sua belíssima crônica “O Valor da Amizade”, Vinícius de Moraes registra: “Eu poderia suportar, embora não sem dor, que tivessem morrido todos os meus amores, mas enlouqueceria se morressem todos os meus amigos!”. Tomo por assalto as palavras de Vinícius, quando tenho em mente o quarteto (mais do que fantástico) Márcio, Silvando, Adalberto e Haroldo, caras vocês são demais!

Desde a minha chegada à Fortaleza conheci pessoas extraordinárias, seja pelo *expertise* ou pelo caráter inominável. Cada qual contribuiu, de uma forma ou de outra, para o meu melhoramento como ser humano, num sentido tão amplo quanto possível. Aos colegas Cléber, Henrique, Francisco (Bibi), Dilson, Nicolino, Cristiano, Roberto e outros, agradeço as cavалares doses de vida. Aos professores Ivan Castelar e Ronaldo Arraes eu agradeço por me ensinarem o que é ser professor e pesquisador. Em grande parte, o meu entusiasmo pela academia é devido ao professor Flávio Ataliba, a ele eu agradeço pela constante motivação. Aos professores Kairat Minbaev, Paulo Neto e Sabastião Carneiro, agradeço por me ajudarem a entender que quando se fala em Microeconomia e Matemática falamos, em essência, do significado prático do que é “fazer ciência” em Economia. Por fim, mas não menos importante, sou grato ao corpo de funcionários do CAEN pela sempre pronta disposição; dentre estes não posso deixar de registrar meu muito obrigado à Carmem, Márcia, Terezinha e ao Constantino a quem eu parablenizo pela, mais do que justa, promoção.

Expresso com grande satisfação, os meus sinceros agradecimentos aos membros da banca examinadora, professores Emerson Marinho pela orientação mais do que acadêmica, Fávio Ataliba, Sebastião Carneiro e em especial aos membros convidados professores Francisco Soares e Humberto Moreira por se disporem a vir para Fortaleza e principalmente, pelas valiosas contribuições que fizeram em favor da melhoria dos artigos que compõe esta tese.

Gostaria de finalizar essa nota, não com agradecimentos mas com uma homenagem. Muito mais do que orientador o professor Emerson foi um companheiro que, com paciência ímpar, me ajudou a entender o verdadeiro significado do profissionalismo. Sua avidez pelo trabalho bem feito, me ensinou que o valor de um projeto científico está na relevância das questões que se levantam e na clareza das respostas que se propõe. Em muitas situações, eu me deparava com obstáculos que me pareciam intransponíveis, mas sempre que eu recorria ao seu talento e disposição, acabava com uma solução simples e criativa. Por isso e por tanto mais, sinto-me na expressa obrigação de declarar que este trabalho é devido muito mais ao professor Emerson Marinho do que a mim.

## RESUMO

Esta Tese estuda três problemas distintos entre si, embora conectados pelo instrumental. No primeiro ensaio é utilizado um modelo de progresso técnico endógeno para estudar as relações entre crescimento da produtividade agrícola e o processo de industrialização num contexto de economia aberta. O conceito de Vantagem Comparativa Dinâmica é exaustivamente utilizado e, adicionalmente, busca-se entender como a integração tecnológica entre os setores agrícola e industrial contribuí para a dinâmica do emprego na indústria. No segundo ensaio utilizou-se um modelo de equilíbrio geral do tipo agente representativo para analisar e comparar os efeitos da adoção de dois regimes de ajuste fiscal: o regime de superávit primário proporcional ao produto e o regime de déficit nominal zero. No modelo construído analisou-se os impactos de tais regimes sobre as alocações de equilíbrio bem como sobre o bem estar. Em ambos os casos, o efeitos de curto e de longo prazos são sempre comparados. Por último, o terceiro ensaio propõe demonstrações alternativas dos Lemas de Hotelling e de Shephard utilizando novas relações de dualidade na teoria da produção. As demonstrações propostas possuem duas vantagens, relativamente às demonstrações usuais, quais sejam, a não utilização do conhecido Teorema do Envelope e a validade da demonstração para pontos interiores ao conjunto de produção.

Palavras-Chaves: Vantagem Comparativa Dinâmica, *Learning-by-doing*, Superávit Primário, Déficit Nominal, Bem-Estar, Lema de Hotelling, Lema de Shephard, Função Distância Direcional.

## ABSTRACT

This Thesis studies three distinct problems between itself, even so connected for the instrument. In the first chapter a model of endogenous technical progress is used to study the relations between growth of the agricultural productivity and the process of industrialization in a context of open economy. The concept of Dynamic Comparative Advantage is exhaustingly used and, additionally, searches to understand as the technological integration between the sectors agricultural and industrial contributed for the dynamics of the employ in the industry. In the second chapter a model of general equilibrium was used to analyze and to compare the effect of two fiscal adjustment rules: the rule of primary superávit proportional to the product and the rule of zero nominal deficit . In the constructed model the rules it was analyzed the impacts of these rules on the optimal allocations as well as on the welfare. In both the cases, the effect of short and long runs always are compared. Finally, the third chapter considers an alternative proofs of the Hotelling's Lemma and Shephard's Lemma using new relations of duality in the theory of the production. The proofs proposals possess two advantages, relatively to the usual demonstrations, which are, not the use of the known Envelope Theorem and the validity of the demonstration for interior points to the production set.

**Key Words:** Dynamic Comparative Advantage, Learning-by-doing, Primary Superávit, Nominal Déficit, Welfare, Hotelling's Lemma, Shephard's Lemma, Directional Distance Function.

# Três Ensaio em Teoria Econômicã Aplicada

Mauricio Benegas

## Sumário

<b>1 Produtividade Agrícola e Industrialização em uma Economia Aberta.....</b>	<b>06</b>
1.1 Introdução.....	06
1.2 O Modelo.....	08
1.2.1 Tecnologia.....	08
1.2.2 Preferências.....	10
1.3 Análise da Economia Fechada.....	11
1.4 Análise da Economia Aberta.....	15
1.5 Análise de Bem-Estar.....	21
1.6 Conclusões e Extensões.....	24
Apêndice.....	26
Referências.....	27
<b>2 Ajuste Fiscal, Acumulação Ótima e Bem Estar: Um Modelo Dinâmico.....</b>	<b>30</b>
2.1 Introdução.....	30
2.2 O Modelo.....	34
2.3 Regimes de Ajuste Fiscal.....	35
2.3.1 Superávit Primário Proporcional ao Produto.....	35
2.3.2 Déficit Nominal Proporcional ao Produto.....	43
2.4 Choques Fiscais.....	50

2.4.1 Choques Fiscais no Regime de Superávit Primário Proporcional ao Produto.....	50
2.5 Análise de Bem-Estar.....	56
2.5.1 Análise da Trajetória da Utilidade Instantânea...	56
2.5.2 Análise da Utilidade Total Descontada.....	60
2.5.3 Bem-Estar nos Regimes de Superávit Primário e Déficit Nominal Zero.....	62
2.6 Sustentabilidade da Dívida Pública.....	66
2.6.1 Dívida Pública no Regime de Superávit Primário Proporcional ao Produto.....	67
2.6.2 Dívida Pública no Regime de Déficit Nominal Zero.....	68
2.7 Conclusões.....	70
Apêndice.....	71
Referências.....	78
<b>3 Dualidade, Oferta Líquida e a Função Distância Direcional.....</b>	<b>80</b>
3.1 Introdução.....	80
3.2 A Função Lucro e a Função Distância Direcional.....	81
3.2.1 A Função Lucro.....	81
3.2.2 A Função Distância Direcional.....	83

<b>3.3 Dualidades e Propriedades Diferenciais.....</b>	<b>86</b>
<b>3.3.1 Dualidades.....</b>	<b>86</b>
<b>3.3.2 Propriedades Diferenciais.....</b>	<b>90</b>
<b>3.4 Conclusões.....</b>	<b>96</b>
<b>Apêndice.....</b>	<b>97</b>
<b>Referências.....</b>	<b>101</b>

## Lista de Figuras

Figura 1: Diagrama de Fases

Figura 2: Superávit Primário vs Déficit Nominal Zero: Longo Prazo

Figura 3: Déficit Nominal Zero: Ajustamento Gradual

Figura 4: Ajustamento a um Choque em  $g$

Figura 5: Ajustamento a um Choque em  $\alpha$

Figura 6: Transição - Choque Temporário em  $g$

Figura 7: Correspondência de Produção

Figura 8: Função Distância Direcional e Funções Distância

# 1 Produtividade Agrícola e Industrialização em uma Economia Aberta

## 1.1 Introdução

Desde longa data o padrão de trocas internacionais tem sido reconhecido como um importante fator na contribuição ao crescimento econômico das nações<sup>1</sup>. As altas taxas de crescimento experimentadas por países como Coreia do Sul, Hong Kong, Taiwan e Japão<sup>2</sup>, entre o início dos anos sessenta e final dos anos oitenta, são frequentemente relacionadas às políticas de desenvolvimento "voltadas para fora", ou seja, que enfatizam setores produtivos com potencial exportador.

Apesar disso, a elaboração de modelos teóricos com o objetivo de analisar os efeitos de trocas internacionais sobre crescimento econômico, foi relativamente pobre até o final dos anos oitenta e início dos anos noventa.

Nesse mesmo período os trabalhos de Romer (1986,1990) e Lucas (1988) passam a incorporar progresso técnico endógeno como um importante fator de crescimento econômico e, principalmente, como um meio de explicar os diferenciais de taxas de crescimento entre países.

Em Chenery (1973) a importância de uma unificação entre teorias de crescimento econômico e padrão de trocas já era salientada. Para tanto o autor enfatiza que a noção de vantagem comparativa deveria incorporar elementos dinâmicos. Nas palavras do autor:

"A crítica principal que se faz a noção tradicional é que vantagem comparativa constitui conceito essencialmente estático que ignora uma variedade de elementos dinâmicos."

A noção de vantagem comparativa dinâmica apresenta-se, portanto, como o principal elemento de unificação entre o padrão de trocas internacionais e a moderna teoria do crescimento endógeno.

---

<sup>1</sup>Scandizzo (1999) oferece um bom *survey* sobre a discussão recente.

<sup>2</sup>Ver Summers e Heston (1988).

Nos trabalhos de Grossman e Helpman (1990), Young (1991) e Matsuyama (1990, 1992), a noção de vantagem comparativa dinâmica está constantemente presente em suas análises, mas uma definição precisa desse conceito e suas consequências diretas sobre a dinâmica do padrão de trocas só aparecem em Redding (1999).

A grande maioria dos trabalhos que combina crescimento endógeno e padrão de trocas é construída com base em um modelo de dois setores, um considerado tradicional (ou de baixa tecnologia) como, por exemplo, o setor agrícola e o outro de alta tecnologia, via de regra, o setor industrial.

Matsuyama (1992), considera uma economia com um setor agrícola (setor estagnante) e um outro de manufatura. Na agricultura não existe progresso técnico, enquanto na indústria o progresso técnico é endógeno via *learning-by-doing*. O autor concluiu que em economias abertas existe um *link* negativo entre produtividade na agricultura e emprego industrial, bem como um efeito perverso do primeiro sobre bem-estar.

No artigo de Carvalho e Barreto (2005), o progresso técnico da agricultura é endogenizado também via *learning-by-doing*. Os autores mostram que as conclusões de Matsuyama (1992) podem não ser sustentáveis no longo prazo devido a possibilidade de reversão de especialização induzida por vantagens comparativas.

Já Redding (1999) em seu modelo com dois setores - um de baixa tecnologia e outro de alta tecnologia, ambos com progresso técnico endógeno - mostra que, sob livre troca, pode haver redução de bem-estar intertemporal se o padrão inicial de vantagem comparativa indica que a economia não se especializa no setor no qual seu potencial de *learning-by-doing* é maior relativamente ao seu parceiro de troca. Neste sentido, o autor mostra que se a economia possui um potencial relativo de *learning-by-doing*, num setor que não aquele em que se observa vantagem comparativa inicial, então intervenção estratégica na direção de reverter o padrão de especialização, induzido por vantagem comparativa, aumenta o bem estar intertemporal.

Este trabalho pretende combinar as idéias de Matsuyama (1992) e Redding (1999), construindo um modelo com dois setores: agricultura e manufatura. Em ambos os setores o progresso técnico é endógeno através de

*learning-by-doing*. Além disso, é suposto que o progresso técnico na manufatura exerce influência positiva sobre o crescimento da produtividade na agricultura.

Na verdade, esta última suposição pretende acomodar avanços tecnológicos do tipo *land-saving* (provavelmente vindo majoritariamente da indústria através de avanços nas áreas biotecnológicas e químicas) e do tipo *labor-saving* (em maior grau como consequência do processo de *learning-by-doing* do setor, mas também através da indústria devido a inovações mecânicas).

No que se segue, além dessa introdução, o artigo está distribuído da seguinte maneira: na Seção 1.2 o modelo é formalmente descrito; na Seção 1.3 é feita a análise levando-se em consideração uma economia fechada. Na Seção 1.4, a mesma análise é realizada sob a hipótese de uma economia aberta. Na Seção 1.5, é feita uma análise de bem-estar sob hipótese de uma economia aberta. Finalmente, a Seção 1.6 apresenta as principais conclusões do trabalho bem como propõe extensões para pesquisa futura.

## 1.2 O Modelo

### 1.2.1 Tecnologia

O modelo consiste de uma economia com dois setores: um deles, considerado de alta tecnologia, como a indústria, por exemplo, e o outro de baixa tecnologia como a agricultura. Neste sentido o produto total na economia no período  $t$ , é dividido entre produção agrícola,  $y_t^a$ , e produção na indústria,  $y_t^m$ . A população é constante em  $L^3$ . Trabalho é o único fator de produção e a quantidade total disponível em todo tempo é normalizada para 1. O trabalho empregado na indústria será denotado por  $l_t$ . Assim  $1 - l_t$  é a quantidade de trabalho empregado na agricultura. Os bens industrializados são produzidos de acordo com os seguintes pressupostos tecnológicos:

$$y_t^m = m_t f(l_t) \tag{1.1}$$

---

<sup>3</sup>Matsuyama (1992) mostra que, em seu modelo, o tamanho da economia não afeta os resultados obtidos.

onde  $m_t$  indica o nível de produtividade da mão-de-obra empregada na indústria. É suposto que a tecnologia na indústria satisfaz produtividade marginal positiva, exibe retornos decrescentes à escala e possibilidade de inanição, ou seja,  $f' > 0$ ,  $f'' < 0$  e  $f(0) = 0$ . A produtividade na indústria evolui de acordo com um processo de *learning-by-doing*, tal que:

$$\dot{m}_t = \theta_m y_t^m \Rightarrow \dot{m}_t = \theta_m m_t f(l_t) \quad (1.2)$$

onde  $\theta_m > 0$  denota o potencial de *learning-by-doing* da economia no setor industrial.

No setor de bens agrícola, a produção satisfaz aos seguintes requerimentos tecnológicos:

$$y_t^a = a_t g(1 - l_t) \quad (1.3)$$

onde  $a_t$  indica o nível de produtividade da mão de obra empregada na agricultura. Da mesma forma que na manufatura, os requerimentos adicionais sobre a tecnologia da agricultura são,  $g' > 0$ ,  $g'' < 0$  e  $g(0) = 0$ . A produtividade na agricultura também evolui de acordo com um processo de *learning-by-doing* e além disso sofre influência positiva do crescimento na produtividade da indústria. Essa suposição acomoda simultaneamente as inovações tecnológicas dos tipos *land-saving* e *labor-saving*. Por simplicidade assume-se que esses efeitos são aditivamente separáveis. Desta forma tem-se que  $\dot{a}_t = \theta_a y_t^a + \theta y_t^m$ , onde  $\theta_a > 0$  denota o potencial de *learning-by-doing* do setor agrícola e  $\theta > 0$  indica o grau de integração tecnológica entre a agricultura e a manufatura.

A substituição das expressões (1.1) e (1.3) na equação de mudança da produtividade agrícola, dá origem a:

$$\dot{a}_t = \theta_a a_t g(1 - l_t) + \theta m_t f(l_t) \quad (1.4)$$

Será admitido que o efeito positivo do acúmulo de experiência no setor manufatureiro sobre a produtividade da agricultura é menos intenso do que

os efeitos isolados nos respectivos setores<sup>4</sup>, ou seja,  $\theta < \min\{\theta_a, \theta_m\}$ .

Por hipótese, existe pleno transbordamento de novas idéias e livre mobilidade do fator trabalho entre os dois setores da economia. Além disso, todos os mercados operam em regime de concorrência perfeita. Essas suposições são suficientes para garantir que, em equilíbrio, o valor da produtividade marginal é igual entre os setores, ou seja, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$a_t g'(1 - l_t) = p_t m_t f'(1 - l_t) \quad (1.5)$$

onde  $p_t$  é o preço relativo dos bens manufaturados tomando os bens agrícolas (alimentos) como *numéraire*.

### 1.2.2 Preferências

A economia é composta por agentes idênticos, cuja preferência intertemporal é dada por:

$$W = \int_0^{\infty} [\beta \log(c_t^a - \gamma) + c_t^m] e^{-\rho t} dt \quad (1.6)$$

onde  $c_t^a$  denota o consumo *per-capita* de bens agrícolas (alimento) e  $c_t^m$  o consumo *per-capita* de bens manufaturados. Os parâmetros  $\beta$ ,  $\rho$  e  $\gamma$  são supostos todos positivos, onde  $0 < \rho < 1$ , denota a taxa de desconto intertemporal.

O parâmetro  $\gamma$  representa nível de subsistência no consumo de alimentos. A inclusão de  $\gamma$  torna a utilidade do agente representativo não-homotética e conseqüentemente a elasticidade renda por alimentos será menor do que a unidade. Esta suposição é feita em função da Lei de Engel<sup>5</sup> segundo a qual o consumo de alimentos cresce absolutamente com a renda mas diminui em termos relativos. Entre os vários trabalhos que compravam empiricamente,

---

<sup>4</sup>De acordo com as especificações dadas em (1.2) e (1.4) *learning-by-doing* é ilimitado em ambos os setores. Para modelos com *learning-by-doing* limitado ver Young (1991) e Redding (1996).

<sup>5</sup>Atribuído à Ernst Engel por seu trabalho publicado em 1857.

podem ser descados os de Crafts (1980) e Selvanathan e Selvanathan (2004). Echevarria (2000) utiliza o modelo de Solow para analisar as implicações da Lei de Engel sobre crescimento e convergência em renda, e Steger (2000), com o mesmo propósito, utiliza um modelo do tipo Ramsey-Cass-Koopmans.

Duas hipótese sobre consumo de subsistência serão mantidas nesse trabalho: 1) os consumidores têm renda suficiente para adquirir mais do  $\gamma$  unidades de alimentos; 2) em todo momento a agricultura é suficientemente produtiva para providenciar consumo de subsistencia para todos os consumidores, ou seja:

$$a_t g(1) > \gamma L, \text{ para todo } t \quad (1.7)$$

### 1.3 Análise da Economia Fechada

Sob a hipótese de que a economia é fechada e observando que a utilidade do agente representativo é crescente no consumo de bens agrícolas e industriais a restrição orçamentária da economia deve ser satisfeita com igualdade, ou seja, prevalece a identidade  $L(c_t^a + p_t c_t^m) = y_t$ , onde  $Lc_t^a$  é o consumo agregado de bens agrícolas,  $Lc_t^m$  o consumo agregado de bens manufaturados e  $y_t$  é a renda agregada da economia, isto é,  $y_t = y_t^a + p_t y_t^m$ . Desta forma o problema do agente representativo na economia fechada é dado como segue.

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t^a, c_t^m\}} \int_0^{\infty} [\beta \log(c_t^a - \gamma) + c_t^m] e^{-\rho t} dt \\ & \text{sujeito a} \\ & c_t^a + p_t c_t^m = y_t/L \end{aligned}$$

Das condições de primeira ordem do problema acima obtém-se:

$$c_t^a = \gamma + \beta p_t c_t^m \quad (1.8)$$

Denotando consumo agregado por letras maiúsculas, a expressão (1.8) pode ser reescrita como:

$$C_t^a = \gamma L + \beta p_t C_t^m \quad (1.9)$$

Sob o pressuposto de que a economia é fechada devem ser satisfeitas as identidades  $C_t^m \equiv m_t f(l_t)$  e  $C_t^a \equiv a_t g(1 - l_t)$ . Usando esses fatos e a condição de equilíbrio dada pela equação (1.5), a equação (1.9) se reduz a:

$$g(1 - l_t) - \beta g'(1 - l_t) \frac{f(l_t)}{f'(l_t)} = \frac{\gamma L}{a_t} \quad (1.10)$$

Para demonstrações de resultados posteriores a equação (1.10) deve apresentar solução. No apêndice deste artigo prova-se a existência de uma solução para (1.10) e é providenciada uma condição suficiente para que essa solução seja única.

Antes de prosseguir com a análise deve ser notado que, a especificação do processo de learning-by-doing de acordo com o sistema de equações diferenciais (1.2) e (1.4), faz com que os níveis de produtividade em ambos os setores sejam funções do nível de emprego na indústria<sup>6</sup>, ou seja  $a_t = a(l_t)$  e  $m_t = m(l_t)$ .

Sob o regime de autarquia, o emprego na indústria cresce com a produtividade na agricultura e a participação do emprego nesta última declina ao longo do tempo. É o que mostra a Proposição 1 a seguir.

**Proposição 1** *Numa economia fechada e sob o regime de concorrência perfeita,  $l'(a_t) > 0$  e  $d(1 - l_t)/dt < 0$ .*

**Prova.** Observe que a equação (1.10) resulta das hipóteses de uma economia fechada e sob o regime de concorrência perfeita. Logo, rearranjando a

---

<sup>6</sup>Com efeito, a solução deste sistema para  $a_t$  e  $m_t$  é dada, respectivamente, pelas seguintes expressões  $a_t = a(n_t) = a_0 \exp\left(\theta_a \int_0^t g(1 - l_s) ds\right) + \theta m_0 \exp\left(\theta_m \int_0^t f(l_s) ds\right) \left\{ \int_0^t f(l_\tau) \exp\left(\int_t^\tau [\theta_m F(l_s) - \theta_a g(1 - l_s)] ds\right) d\tau \right\}$  e  $m_t = m(n_t) = m_0 \exp\left(\theta_m \int_0^t f(l_s) ds\right)$ .

equação (1.10), é possível obter uma relação explícita entre  $a_t$  e  $l_t$  tal que

$$a(l_t) = \frac{\gamma L}{g(1 - l_t) - \beta g'(1 - l_t) \frac{f(l_t)}{f'(l_t)}} \quad (1.11)$$

Portanto diferenciando (1.11) com respeito a  $l_t$  obtém-se:

$$a'(l_t) = \frac{(a_t)^2}{\gamma L} \left\{ g'(1 - l_t) \left[ 1 + \beta \left( 1 - \frac{f(l_t)f''(l_t)}{(f'(l_t))^2} \right) \right] - \beta g''(1 - l_t) \frac{f(l_t)}{f'(l_t)} \right\} \quad (1.12)$$

Portanto das hipóteses feitas sobre  $f(l_t)$  e  $g(1 - l_t)$  pode ser verificado que  $a'(l_t) > 0$ . Assim sendo, pelo teorema da função inversa, tem-se que,  $l_t = l(a_t)$  com  $l'(a_t) > 0$  para qualquer  $t$ .

Para mostrar a segunda desigualdade basta verificar que  $d(1 - l_t)/dt = -l'(a_t)\dot{a}_t$ . Desde que  $l'(a_t) > 0$  o resultado segue. ■

O resultado acima estabelece que sob autarquia, o emprego na indústria é crescente com a produtividade na agricultura ao longo do tempo. Assim a visão tradicional é aqui estabelecida formalmente: os ganhos de produtividade na agricultura se refletem positivamente sobre o emprego na indústria, ou seja, a revolução "verde" é pré-condição para a revolução industrial. Este resultado também foi observado por Matsuyama (1992).

As evidências do declínio da participação do emprego na agricultura também foram notadas por Clark (1940), Kusnetz (1966) e Chenery e Syrquin (1975). Esses autores verificaram que a participação do emprego na agricultura declina tanto em dados seccionais quanto em séries de tempo. Portanto, o emprego na agricultura diminui ao longo do tempo e, conseqüentemente, o produto nesse setor.

Outro ponto interessante é que no modelo de uma economia fechada e sob o regime de concorrência perfeita a especialização será assintoticamente incompleta. Este resultado é formalmente estabelecido na seguinte proposição.

**Proposição 2** *Sob regime autárquico especialização será assintoticamente incompleta, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} l_t = \bar{l}$  com  $\bar{l} \in (0, 1)$ .*

**Prova.** Considere  $\phi(l_t) = g(1 - l_t) - \beta g'(1 - l_t) \frac{f(l_t)}{f'(l_t)}$  das suposições feitas

sobre  $f$  e  $g$  a função  $\phi$  é contínua em  $l_t$ , portanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(l_t) = \phi\left(\lim_{t \rightarrow \infty} l_t\right)$ . Utilizando o resultado estabelecido no Apêndice a equação (1.10) possui uma única solução e portanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(l_t) = \gamma L \lim_{t \rightarrow \infty} a_t^{-1}$ . De acordo com o processo de *learning-by-doing* da produtividade agrícola especificado em (4),  $a_t$  tem crescimento ilimitado, conseqüentemente  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t^{-1} = 0$ . Combinando esses fatos tem-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(l_t) = \phi\left(\lim_{t \rightarrow \infty} l_t\right) = 0$  ou seja  $\lim_{t \rightarrow \infty} l_t = \bar{l}$  com  $\bar{l} \in [0, 1]$ . Entretanto observe que  $\phi(0) > 0$  e  $\phi(1) < 0$  portanto  $\bar{l} \in (0, 1)$ . ■

O resultado demonstrado no Apêndice mostra que numa economia fechada existe um nível de mão de obra empregado na indústria que satisfaz a condição de equilíbrio em (1.10). Além disso, esse nível de mão de obra pertence ao intervalo aberto  $(0, 1)$ , ou seja, a especialização será incompleta para qualquer período de tempo finito. Na Proposição 2 por outro lado, é demonstrado que especialização também será assintoticamente incompleta. Nesse sentido, sob autarquia, coexistem ambos os setores da economia, seja qual for o período analisado.

Por fim é possível mostrar que a participação do produto industrial é crescente com a produtividade na agricultura. De fato, denotando por  $s_m$  a participação do produto industrial tem-se que:

$$s_m = \frac{y_t^m}{y_t^a + y_t^m} = 1 / \left[ \left( \frac{m_t f(l(a_t))}{a_t g(1 - l(a_t))} \right)^{-1} + 1 \right] \quad (1.13)$$

Como  $m_t f(l(a_t))/a_t g(1 - l(a_t))$  é crescente em  $l$  e  $l'(a_t) > 0$  o resultado segue.

Os resultados obtidos sob regime autárquico, estabelecem formalmente a visão tradicional sobre a relação produtividade agrícola e industrialização, defendida dentre outros por Nurske (1953) e Rostow (1960). Além disso, esses resultados também foram estabelecidos por Matsuyama (1992) o que assegura certa robustez dos resultados encontrados. No entanto, no artigo deste autor, a produtividade da agricultura é considerada exógena e constante e, portanto, o emprego na indústria é também constante. Neste sentido, os resultados obtidos neste artigo constituem uma generalização dos resultados de Matsuyama (1992).

Na seção seguinte, a análise é estendida à economia aberta e, neste caso, os resultados até aqui encontrados podem ser replicados ou não.

## 1.4 Análise da Economia Aberta

Nesta seção serão analisadas as implicações sobre o emprego e a renda considerando uma economia aberta. A economia doméstica é pequena, por hipótese, de modo que a mesma não exerce qualquer influência sobre o preço relativo dos bens manufaturados. A economia do resto do mundo apresenta as mesmas características da economia doméstica. As variáveis da economia do resto do mundo serão representadas com acréscimos de asteriscos.

Os processos de *learning-by-doing* na indústria e na agricultura são, dados, respectivamente, por:

$$\dot{m}_t^* = \theta_m^* m_t^* f(l^*) \quad (1.14)$$

$$\dot{a}_t^* = \theta_a^* a_t^* g(1 - l^*) + \theta^* m_t^* f(l^*) \quad (1.15)$$

onde, tal como no caso da economia doméstica admite-se que  $\theta^* < \min\{\theta_a^*, \theta_m^*\}$ . Em adição, será assumido que o emprego na indústria é constante e igual  $l^*$ .

Supõe-se ainda que existe pleno transbordamento de novas idéias e livre mobilidade do fator trabalho entre os setores da economia do resto do mundo. Desta forma, similar a economia doméstica, em equilíbrio, o valor das produtividades marginais dos setores são iguais, isto é:

$$a_t^* g'(1 - l^*) = p_t m_t^* f'(l^*) \quad (1.16)$$

As suposições de transbordamento pleno de novas idéias e de livre mobilidade do fator de produção, não são verificados entre as economias<sup>7</sup>. Dividindo-se a equação (1.16) pela equação (1.5) tem-se:

---

<sup>7</sup>Existe um número considerável de trabalhos que testemunham empiricamente a presença de transbordamento internacional imperfeito, ver por exemplo Coe e Helpman (1995), Branstetter (1996) e Evenson e Singh (1997). Entretanto a inclusão dessa suposição não traria ganhos significativos à análise, apenas tornando-a mais complicada.

$$\frac{f(l_t)}{g'(1-l_t)} = \frac{a_t m_t^*}{m_t a_t^*} \frac{f(l^*)}{g'(1-l^*)} \quad (1.17)$$

A Proposição 3 abaixo estabelece a relação entre vantagem comparativa e padrão de especialização entre as economias doméstica e resto do mundo para um determinado período.

**Proposição 3** *Para certo  $t$  dado verifica-se*

$$l_t \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} l^* \Leftrightarrow \frac{a_t^*}{m_t^*} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{a_t}{m_t} \quad (1.18)$$

**Prova.** Rearranjando a equação (1.17) e avaliando em  $t$  dado, obtém-se:

$$\frac{a_t}{m_t} / \frac{a_t^*}{m_t^*} = \frac{\varphi(l_t)}{\varphi(l^*)} \quad (1.19)$$

onde  $\varphi = f'/g'$  é uma função decrescente de  $l^8$ . Portanto

$$\frac{a_t}{m_t} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{a_t^*}{m_t^*} \Leftrightarrow \varphi(l_t) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \varphi(l^*) \Leftrightarrow l_t \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} l^*. \blacksquare$$

Em palavras: a economia doméstica terá um participação do emprego industrial maior (menor) relativamente à economia do resto do mundo se, e somente se, a mesma tiver vantagem comparativa na indústria (agricultura). A seguir, a equação (1.17) será utilizada para analisar a dinâmica do emprego industrial na economia doméstica. Para tanto tomando o logaritmo natural de (1.17) e diferenciando-a com respeito ao tempo obtém-se a seguinte dinâmica para o emprego na indústria da economia doméstica:

$$h(l_t) \dot{l}_t = \left( \frac{\dot{a}_t}{a_t} - \frac{\dot{m}_t}{m_t} \right) - \left( \frac{\dot{a}_t^*}{a_t^*} - \frac{\dot{m}_t^*}{m_t^*} \right) \quad (1.20)$$

onde  $h(l_t) = f''(l_t)/f'(l_t) - g''(1-l_t)/g'(1-l_t) < 0$ .

---

<sup>8</sup>De fato,  $\varphi'(l) = [f''(l)g'(1-l) + f'(l)g''(1-l)]/(g'(1-l))^2 < 0$ .

Segundo Redding (1999), quando se estabelece uma dinâmica da produtividade em ambos os setores da economia por meio de um processo de *learning-by-doing* as taxas de crescimento de produtividade passam a relacionar-se diretamente com o padrão de especialização da economia num ambiente de trocas. Com isso vantagem comparativa passa a ser endógena e faz-se necessário uma definição precisa do que seja *vantagem comparativa dinâmica*. Nesse trabalho será utilizada a definição de vantagem comparativa dinâmica dada por Redding (1999). Segundo o autor, a economia doméstica possui uma vantagem comparativa dinâmica na agricultura se, e somente se:

$$\frac{d(a_t/m_t)/dt}{a_t/m_t} - \frac{d(a_t^*/m_t^*)/dt}{a_t^*/m_t^*} = \left( \frac{\dot{a}_t}{a_t} - \frac{\dot{m}_t}{m_t} \right) - \left( \frac{\dot{a}_t^*}{a_t^*} - \frac{\dot{m}_t^*}{m_t^*} \right) > 0 \quad (1.21)$$

A equação (1.21) dá a formalização do conceito de vantagem comparativa dinâmica simplesmente como o análogo dinâmico da noção estática de vantagem comparativa. Com essa definição chega-se à primeira conclusão importante sobre a análise da economia aberta: desde que  $h(l_t) < 0$ , de acordo com a equação (1.20) se a economia doméstica possui uma vantagem comparativa dinâmica na agricultura então o emprego na indústria decresce no tempo. Esse resultado generaliza a conclusão de Matsuyama (1992), para o caso em que existe dinâmica na produtividade da agricultura. Entretanto, deve ser notado que vantagem comparativa dinâmica como definida pela equação (1.21), depende crucialmente do modo como a dinâmica da produtividade, em ambos os setores, é especificada. Em particular os parâmetros que indicam potencial de *learning-by-doing* e o parâmetro que representa a integração tecnológica agricultura/indústria, possuem um papel central na análise.

A fim de tornar mais precisa a análise sobre a dinâmica do emprego industrial na economia doméstica, a especificação da dinâmica da produtividade de ambos os setores será incluída. Substituindo as equações (1.2), (1.4), (1.14) e (1.15) na equação (1.20), obtém-se:

$$h(l_t)\dot{l}_t = [\theta_a g(1 - l_t) - \theta_a^* g(1 - l^*)] + \left[ \theta \frac{m_t}{a_t} f(l_t) - \theta^* \frac{m_t^*}{a_t^*} f(l^*) \right] - [\theta_m f(l_t) - \theta_m^* f(l^*)] \quad (1.22)$$

Para  $\theta_a = \theta_a^* = \theta = \theta^* = 0$  a equação (1.22) se reduz à equação (12) de Matsuyama (1992) pág. 325. Ou seja a equação (1.22) generaliza o modelo de Matsuyama incorporando elementos que endogenizam vantagem comparativa, a saber, os parâmetros de potencial de *learning-by-doing* e de integração tecnológica agricultura/indústria. A Proposição 4 abaixo providencia as condições necessárias e suficientes para a direção da taxa de crescimento do emprego industrial na economia doméstica.

**Proposição 4** Para  $t \in [0, t)$  (onde  $t \leq \infty$ ) suponha que na economia doméstica prevaleça vantagem comparativa na agricultura, isto é,  $m_t/a_t < m_t^*/a_t^*$  para todo  $t \in [0, t)$ . Verificam-se as seguintes afirmações.

a) Dado  $\theta_a = \theta_a^*$  e  $\theta_m = \theta_m^*$  tem-se

$$\theta > \theta^* \text{ é necessário para } \dot{l}_t < 0$$

b) Dado  $\max\{\theta, \theta^*\} < \epsilon$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, tem-se

$$\theta_a > \theta_a^* \text{ e } \theta_m < \theta_m^* \text{ é suficiente para } \dot{l}_t < 0$$

c) Dado  $\max\{\theta, \theta^*\} < \epsilon$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, tem-se

$$\theta_a < \theta_a^* \text{ e } \theta_m > \theta_m^* \text{ é necessário para } \dot{l}_t > 0$$

**Prova.** a) Dado  $\theta_a = \theta_a^*$  e  $\theta_m = \theta_m^*$  e recorrendo à Proposição 3, tem-se  $l_t < l^*$ , logo das suposições feitas sobre as funções  $f$  e  $g$ , tem-se:

$$\theta_a [g(1 - l_t) - g(1 - l^*)] - \theta_m [f(l_t) - f(l^*)] > 0$$

uma vez que  $\theta_a > 0$  e  $\theta_m > 0$ . A seguir, por premissa do resultado e recorrendo-se novamente à Proposição 3, verifica-se que:

$$\frac{m_t}{a_t} f(l_t) <^* \frac{m_t^*}{a_t^*} f(l^*)$$

Portanto, afim de que  $\dot{l}_t < 0$  deve-se ter  $\theta > \theta^*$ , retomando que  $h(l_t) < 0$ .

b) Se o parâmetro de integração tecnológica agricultura/indústria é desprezível em ambas as economias, então, como  $l_t < l^*$ , segue que:

$$\theta_a > \theta_a^* \text{ e } \theta_m < \theta_m^* \text{ implicam } \dot{l}_t < 0.$$

c) Recorrendo ao mesmo argumento utilizado em b), a fim de que  $\dot{l}_t > 0$  deve-se ter  $\theta_a < \theta_a^*$  e  $\theta_m > \theta_m^*$ . ■

De posse do resultado acima é possível estabelecer condições sob as quais o emprego na indústria cresce/decrece com a produtividade agrícola. O item a) da Proposição 4, mostra que o efeito negativo da produtividade agrícola sobre o emprego na indústria, requer que a integração tecnológica agricultura/indústria seja baixo na economia do resto do mundo relativamente à economia doméstica. Qual seria a intuição para este resultado? Talvez o meio mais simples de pensar sobre isto, seja inferir quais seriam as consequências se o oposto fosse observado.

Se a integração tecnológica agricultura/indústria fosse alta no resto do mundo relativamente à economia doméstica, então é razoável supor que a agricultura no resto do mundo tornaria-se relativamente cada vez mais produtiva devido ao efeito de integração. Isto por sua vez levaria a economia do resto do mundo a depender cada vez menos da produção de alimentos gerada na economia doméstica, e esta, eventualmente, veria-se obrigada a industrializar-se<sup>9</sup>, podendo assim, haver uma reversão do padrão de especialização induzida por vantagem comparativa.

Este resultado generaliza as descobertas feitas por Matsuyama (1992) e Redding (1999). No primeiro, o autor mostra que sob a hipótese de que a produtividade na agricultura é exógena e constante em ambas as economias ( $\theta_a = \theta_a^* = 0$  e  $\dot{a} = \dot{a}^* = 0$ ), a economia doméstica se especializará assintoticamente em agricultura, se e somente se a mesma possuir uma vantagem comparativa inicial neste setor. Entretanto, como demonstrado no item a) da Proposição 4, é necessário que a integração agricultura/indústria seja relativamente baixa no resto do mundo.

Com relação ao trabalho de Redding (1999), o autor estabelece que even-

---

<sup>9</sup>Note que este resultado depende crucialmente da suposição de que o potencial para *learning-by-doing* tanto na indústria quanto na agricultura, sejam os mesmos para ambas as economias.

tualmente especialização induzida por vantagem comparativa pode ser revertida em função dos potenciais para *learning-by-doing* das economias. Neste trabalho, viu-se que esta reversão pode ocorrer mesmo quando os potenciais para *learning-by-doing* são iguais em ambas as economias.

Com relação ao item b) da Proposição 4, é estabelecido que se o efeito de integração é desprezível em ambas as economias, e se o potencial de *learning-by-doing*, na economia doméstica, é relativamente maior na agricultura e relativamente menor na indústria, então vantagem comparativa inicial na agricultura é necessário e suficiente para que a economia doméstica se especialize (assintoticamente) na produção de alimento. Para ver isso, observe que se  $\theta_a > \theta_a^*$  e  $\theta_m < \theta_m^*$  então, desde que o efeito de integração seja desprezível nas duas economias, tem-se que:

$$\frac{a_0}{m_0} > \frac{a_0^*}{m_0^*} \Leftrightarrow \dot{l}_t < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} l_t = 0 \quad (1.23)$$

Assim, a relação negativa entre a produtividade da agricultura e o emprego na indústria numa economia aberta, depende crucialmente, de que os potenciais de *learning-by-doing* em ambas as economias estejam alinhados com a vantagem comparativa observada inicialmente, ou seja, a agricultura na economia doméstica deve ser relativamente mais produtiva do que a agricultura no resto do mundo e, a indústria relativamente menos produtiva .

Finalmente o item c) da Proposição 3, revela que para que o emprego industrial cresça na economia doméstica sob vantagem comparativa na agricultura, é necessário que os potenciais de *learning-by-doing* contrariem a direção da vantagem comparativa, ou seja, a economia doméstica deve ter potencial de *learning-by-doing* relativamente maior na indústria e relativamente menor na agricultura. Este resultado simplesmente reverte o raciocínio subjacente ao empregado na análise do item b).

Existe, de curso, uma importante implicação neste caso: economias em desenvolvimento podem enfrentar um *trade-off* entre especializar-se de acordo com o padrão existente de vantagem comparativa (neste caso na produção de alimentos) e engessar em setores nos quais essas economias não possuem vantagem comparativa observada, mas podendo entretanto adquirí-la no futuro.

Isso se daria como resultado do potencial de crescimento da produtividade devido ao processo de *learning-by-doing*.

Todos esses fatos, além de generalizar resultados obtidos em trabalhos anteriores, também sugerem várias implicações de políticas voltadas ao desenvolvimento em economias menos desenvolvidas, onde, via de regra, o padrão de vantagem comparativa induz à especialização na agricultura. Se os potenciais de *learning-by-doing* nessas economias sugerem uma indústria produtiva, então intervenção estratégica na direção de inseri-las em atividades sem vantagens comparativas poderia fazer com que essa economia viesse a tê-las no futuro.

Reeding (1999), aponta uma experiência interessante sobre este ponto: a indústria siderúrgica Coreana. O autor revela que um estudo do Banco Mundial nos anos sessenta, apontava que qualquer consideração sobre a estruturação de uma indústria de siderurgia na Coreia figurava-se como "...uma proposição imatura e sem factibilidade econômica...", ou seja, não havia vantagem comparativa observada naquele setor. Entretanto o governo Coreano fundou, em 1973, a Pohang Iron and Steel Company (POSCO). Surpreendentemente, em 1988 a POSCO tornou-se a 11ª maior companhia siderúrgica do mundo, operando com 80 plantas individuais e com custos unitários que eram cerca de dois terços dos observados na indústria siderúrgica americana.

Assim se observa que quando a POSCO foi criada a Coreia não tinha qualquer vantagem comparativa naquele setor. Entretanto, seu potencial para ganhos em produtividade tornou possível não só a estruturação do setor como também passou a ser um país com indiscutível vantagem comparativa nesta atividade.

A seção seguinte é dedicada a analisar os impactos das vantagens comparativas sobre o bem-estar da economia doméstica relativamente à economia do resto do mundo.

## **1.5 Análise de Bem-Estar**

Nesta seção pretende-se inferir o impacto das vantagens comparativas sobre o nível de bem estar na economia aberta. Por simplicidade será suposto

a inexistência de uma mercado internaional de capitais. Denote por  $E_t = L(c_t^a + p_t c_t^m)$  o dispêndio agregado da economia doméstica cuja renda é dada por  $y_t = a_t g(1 - l_t) + p_t m_t f(l_t)$ . Usando a equação (1.5) a renda da economia doméstica pode ser escrita como:

$$y_t = a_t \left[ g(1 - l_t) + g'(1 - l_t) \frac{f(l_t)}{f'(l_t)} \right] \quad (1.24)$$

O problema do consumidor na economia doméstica é escolher seu consumo de bens agrícolas e manufaturados de modo a maximizar sua utilidade intertemporal sujeito à restrição de dispêndio agregado da economia. Especificamente o agente representativo resolve:

$$\begin{aligned} & \max_{c_t^A, c_t^M} \int_0^{\infty} [\beta \log(c_t^a - \gamma) + c_t^m] e^{-\rho t} dt \\ & \text{sujeito a} \\ & c_t^a + p_t c_t^m = E_t/L \end{aligned} \quad (1.25)$$

Das condições de primeira ordem do problema de maximização em (1.25), tem-se que os níveis de consumo per-capita de bens agrícola e manufaturados são respectivamente dados por:

$$c_t^a = \frac{\beta p_t E_t}{(1 + \beta)L} + \frac{\gamma}{(1 + \beta)} \quad (1.26)$$

$$c_t^m = \frac{E_t}{(1 + \beta)L} - \frac{\gamma}{(1 + \beta)p_t} \quad (1.27)$$

Substituindo-se as equações (1.26) e (1.27) na função objetivo obtém-se a utilidade indireta do agente respresentativo na economia doméstica. Denotando-a por  $W_H$  tem-se:

$$W_H = (1 + \beta) \int_0^{\infty} \log \left( \frac{E_t}{L} - \gamma \right) e^{-\rho t} dt + \Omega \quad (1.28)$$

onde  $\Omega = \beta \log\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) + \log\left(\frac{1}{1+\beta}\right) - \int_0^{\infty} \log(p_t) e^{-\rho t} dt$ . Sob a hipótese de que inexistente mercado de capitais internacional, a renda nacional deve ser igual ao dispêndio nacional em todo tempo, logo  $E_t = y_t$  para todo  $t$ . Usando este fato na equação (1.28) e utilizando a condição dada em (1.24), obtém-se:

$$W_H = (1 + \beta) \int_0^{\infty} \log\left(\frac{a_t \psi(l_t)}{L} - \gamma\right) e^{-\rho t} dt + \Omega \quad (1.29)$$

onde  $\psi(l_t) = g(1 - l_t) + g'(1 - l_t) \frac{f(l_t)}{f'(l_t)}$  e portanto  $\psi'(l_t) > 0$ <sup>10</sup>.

Utilizando o mesmo argumento acima e denotando por  $W_{RW}$  a utilidade indireta do agente representativo do resto do mundo verifica-se que:

$$W_{RW} = (1 + \beta) \int_0^{\infty} \log\left(\frac{a_t^* \psi(l^*)}{L^*} - \gamma\right) e^{-\rho t} dt + \Omega \quad (1.30)$$

onde  $L^*$  denota a população do resto do mundo. Para comparar os níveis de bem estar das economias vantagem comparativa será relacionada com o sinal da diferença  $[W_{RW} - W_H]$ . Para tanto, usando (1.29) e (1.30) tem-se:

$$W_H - W_{RW} = (1 + \beta) \int_0^{\infty} \log\left(\frac{a_t \psi(l_t) - \gamma L}{a_t^* \psi(l^*) - \gamma L^*}\right) e^{-\rho t} dt + \log\left(\frac{L^*}{L}\right) \quad (1.31)$$

Suponha que por todo o horizonte de planejamento prevaleça vantagem comparativa na agricultura para a economia doméstica, ou seja  $\frac{a_t}{m_t} > \frac{a_t^*}{m_t^*}$  para todo  $t$ , então, da Proposição 3 tem-se que  $l_t < l^*$  portanto  $\psi(l_t) < \psi(l^*)$  para todo  $t$ . Logo o efeito (direto) sobre o nível de emprego industrial na economia doméstica contribui para reduzir o bem-estar na economia doméstica relativamente à economia do resto do mundo. Entretanto esse efeito pode ser compensado pela presença dos níveis de produtividade da agricultura em cada país. Com efeito, retomando que, do processo de *learning-by-doing*, o nível de produtividade da agricultura em cada país dependem, também,

---

<sup>10</sup>De fato  $\psi'(l_t) = -\left[\frac{g'(1-l_t)f(l_t)f''(l_t)}{(f(l_t))^2} + \frac{g''(1-f(l_t))f(l_t)}{f'(l_t)}\right] > 0$ .

dos parâmetros que indicam potencial de aprendizagem (efeito próprio) e integração tecnológica agricultura/indústria (efeito cruzado). Logo a conclusão sobre o sinal da equação (26) não é direta, mas depende das suposições que se faça sobre a magnitude relativa de tais parâmetros. Por exemplo, satisfeita a condição suficiente  $\theta_a > \theta_a^*$  e  $\theta_m < \theta_m^*$  dado  $\max\{\theta, \theta^*\} < \epsilon$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, tem-se que a produtividade da agricultura na economia doméstica cresce mais rapidamente do que a produtividade deste setor na economia doméstica.

Pela proposição 4  $\dot{l}_t < 0$  com o que  $l_t \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ , com  $\psi(0) = g(1) < \infty$ . Por outro lado, pelo processo de *learning-by-doing* especificado para a produtividade agrícola (e supondo que o efeito de integração tecnológica é desprezível)  $a_t$  tem crescimento ilimitado. Disto e supondo que a taxa de desconto intertemporal é suficientemente baixa, conclui-se que  $W_H - W_{RW} > 0$ . Ou seja a economia doméstica, embora especializando-se (assintoticamente) no setor estagnante teria padrão de bem estar superior ao da economia do resto do mundo.

## 1.6 Conclusões e Extensões

Neste trabalho, construiu-se um modelo de crescimento endógeno em que modelo desenvolvido por Matsuyama (1992) é estendido de modo a permitir que haja progresso técnico endógeno na agricultura, bem como uma integração tecnológica entre este setor e a manufatura.

As especificações sobre a dinâmica da produtividade dos setores, mostraram ter implicações significativas sobre a noção tradicional (estática) de vantagens comparativas. A necessidade de uma noção de tal é requerida muito naturalmente do decurso das análises. No modelo proposto, a definição de Redding (1999) de vantagem comparativa dinâmica é incorporada à análise.

Sob a hipótese de regime autárquico a visão tradicional sobre a relação produtividade agrícola e industrialização é estabelecida formalmente, com quanto, verificou-se que a participação do emprego e da renda do setor industrial guarda relação positiva com a produtividade agrícola. Ademais, pode-se concluir que esse resultado é robusto, uma vez que o mesmo é obtido

por Matsuyama (1992), num modelo em que produtividade da agricultura é exógenamente dada.

Também foi mostrado que na análise da economia fechada, que especialização será incompleta tanto em assintoticamente quanto em tempo finito, resultado que depende, em grande parte, da especificação da utilidade intertemporal que acomoda a Lei de Engel.

As principais diferenças entre o modelo aqui proposto e o trabalho de Matsuyama (1992), aparecem na análise da economia aberta. Nesse contexto a conclusão de que existe um *link* negativo entre vantagem comparativa na agricultura e industrialização, de modo algum é direta, como no caso do trabalho do autor ora citado.

Como foi visto, existem várias condições subjacentes a esse resultado (vide Proposição 4). A primeira delas estende-se diretamente sobre a definição de vantagem comparativa dinâmica atribuída, em que, como estabelecido pela equação (1.21), a fim de que o emprego industrial na economia doméstica decresça no tempo, é suficiente que esta possua vantagem comparativa dinâmica na agricultura.

Isto posto, restou-se a questão: quais seriam os determinantes da evolução da vantagem comparativa na economia doméstica? Mostrou-se que, se os potenciais para *learnig-by-doing* na agricultura e na indústria são iguais entre a economia doméstica e a economia do resto do mundo, então uma integração tecnológica relativamente baixa na economia do resto do mundo é condição necessária para que o emprego na indústria doméstica, seja decrescente em função de vantagem comparativa na agricultura. Como foi salientado, é provável que, doutro modo, a economia do resto do mundo, dependeria cada vez menos da produção agrícola gerada na economia doméstica, e esta veria-se obrigada a industrializar-se.

Finalmente, a condição necessária para haja reversão induzida por vantagem comparativa é que, sob as hipótese de que a integração tecnológica é desprezível em ambas as economias e a economia doméstica possui uma vantagem comparativa na agricultura, o potencial para *learnig-by-doing* na economia doméstica seja relativamente maior na indústria e relativamente menor na agricultura. Este fato sugere que economias em desenvolvimento

eventualmente, poderiam estar enfrentando um *trade-off* entre especialização induzida por vantagem comparativa e engrossar no setor industrial devido ao potencial de ganhos em produtividade. Como um exemplo da evidência desse processo de reversão, foi relatado a experiência exitosa da indústria siderúrgica coreana.

Por fim uma análise relacionando, vantagem comparativa e bem-estar, foi conduzida, mostrando que em seguindo especialização induzida por vantagem comparativa, a economia doméstica teria nível de bem-estar maior que a economia do resto do mundo.

O trabalho traz várias suposições simplificadoras, as quais abrem possibilidades de extensões do modelo original. A primeira delas é a ausência de acumulação de capital físico<sup>11</sup>. A inclusão da dinâmica para capital físico induziria a otimização dinâmica de fato e uma análise mais completa, além de ajudar a relaxar a ausência de mercado internacional de capitais.

Uma última sugestão de extensão, seria a inclusão de um setor produzindo bens *non-tradeable* e verificar o impacto desta suposição sobre o processo de industrialização<sup>12</sup>.

## Apêndice:

### Prova da Existência de Solução para a Equação (10).

*Sob a hipótese de que a economia é fechada existe  $l_t \in (0, 1)$  que resolve a equação (10). Em adição, essa solução será única se  $|\phi'(l_t)| < |\gamma L a'(l_t)/a(l_t)^2|$  para qualquer  $l_t$ , onde  $\phi(l_t)$  é definida como na Proposição 2.*

**Prova.** Defina  $F(l_t) = \phi(l_t) - \gamma L/a(l_t)$ , das suposições feitas sobre  $g$  e  $f$  a função  $F$  é contínua. Além disso  $F(0) = \phi(0) - \gamma L/a(0)$ , mas  $\phi(0) = g(1)$ , e retomando a condição dada em (7) tem-se  $a(0)\phi(0) > \gamma L$ , logo  $F(0) > 0$ .

---

<sup>11</sup>No trabalho de Wong e Yip (1999), um modelo semelhante ao aqui apresentado, inclui acumulação de capital físico, entretanto duas outras suposições enfraquecem a estrutura do modelo: 1) como em Matsuyama (1992) a produtividade da agricultura é exógenamente dada; 2) as tecnologias exibem retornos constantes à escala.

<sup>12</sup>Em Eswaran e Kotwal (2002), é construído um modelo de economia aberta com setor de serviços, mas sem progresso técnico endógeno na indústria e sem setor agrícola.

Por outro lado  $F(1) = -\beta g'(0)f(1)/f'(1) - \gamma L/a(1)$ , portanto  $F(1) < 0$ . Concluí-se portanto que  $F$  é uma função contínua satisfazendo  $F(1) < 0 < F(0)$ , conseqüentemente pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $l_t \in (0, 1)$  tal que  $F(l_t) = 0$ . Assim a equação (10) possui solução em  $(0, 1)$ . A condição  $|\phi'(l_t)| < |\gamma L a'(l_t)/a(l_t)^2|$  é suficiente para garantir que  $F'(l_t) < 0$  para qualquer  $l_t$ , e portanto  $F$  possui uma única raiz. ■

## Referências

- [1] BOLDRIN, M. and J.A. Scheinkman (1988), Learning-by-doing, International Trade, and Growth: a note, em "*The Economy as an Evolving Complex System.*" SFI Studies in the Science of Complexity, Addison-Wesley, Reading, MA.
- [2] BRANSTETTER, L. (1996), Are Knowledge Spillovers International or Intranational in Scope ? Microeconomic Evidence from the US and Japan, *Working Paper nº 5800, NBER*, Cambridge, MA.
- [3] CARVALHO, R., F.A. Barreto (2005), Learning-by-doing, Produtividade Agrícola e Crescimento Econômico, *Revista Brasileira de Economia*, volume a sair.
- [4] CHENERY, H. and M. Syrquin (1975), *Patterns of Development, 1950-1970*, Oxford University Press, London.
- [5] CHENERY, H. (1973), Vantagem Comparativa e Medidas de Política para o Desenvolvimento, Em *Economia Internacional*, J.A.A. Savasini, P.S. Malan, W. Baer (org.), Série Anpec de Leituras de Economia, Ed.Saraiva, São Paulo, 1979.
- [6] CLARK, C. (1940), *The Conditions of Economic Progress*, MacMillan & Co. London.
- [7] COE, D. and E. Helpman (1995), International R&D Spillovers, *European Economic Review*, 39, 859-887.

- [8] CRAFTS, N.F.R. (1980), Income Elasticities of Demand and the Release of Labor by Agriculture During the British Industrial Revolution: a further appraisal, *Journal of European Economic History*, 9, 153-168.
- [9] ECHEVARRIA, C. (2000), Non-homothetic Preferences and Growth, *Journal of International Trade and Economic Development*, 9(2), 151-171.
- [10] ESWARAN, M. and A. Kotwal (2002), The Role of Service Sector in the Process of Industrialization, *Journal of Development Economics*, 68(2), 401-420.
- [11] EVENSON, R. and L. Singh (1997), Economic Growth, International Technological Spillovers and Public Policy: Theory and Empirical Evidence from Asia, *Yale University, Economic Growth Center, Center Discussion Papers 1997*, 21 páginas.
- [12] GROSSMAN, G.M. and E. Helpman (1990), Comparative Advantage and Lon-Run Growth, *American Economic Review*, 80(4), 796-815.
- [13] KUZNETS, S. (1966), *Modern Economic Growth*, Yale University Press, New Haven, CT.
- [14] LUCAS, R. (1988), On the Mechanics of Economic Development, *Journal of Monetary Economics*, 22, 3-42.
- [15] MATSUYAMA, K. (1991), Increasing Returns, Industrialization, and Indeterminacy of Equilibrium, *Quarterly Journal of Economics*, 106, 617-650.
- [16] MATSUYAMA, K. (1992), Agricultural Productivity, Comparative Advantage, and Conomic Growth, *Journal of Economic Theory*, 58(2), 317-334.
- [17] NURSKE, R. (1953), *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries*, Oxford University Press, New York.

- [18] REDDING, S. (1996), *Endogenous Innovation and Economic Growth*, Phd Thesis, University of Oxford.
- [19] REDDING, S. (1999), Dynamic Comparative Advantage and the Welfare Effects Trade, *Oxford Economic Papers*, 51(1), 15-39.
- [20] ROMER, P.M. (1986), Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy*, 94, 1002-1037.
- [21] ROMER, P.M. (1990), Endogenous Technological Change, *Journal of Political Economy*, 98, S71-S102.
- [22] ROSTOW, W.W. (1960), *The Stages of Economic Growth: A Non-Communist Manifesto*, Cambridge University Press, UK.
- [23] SCANDIZZO, P.L. (1999), Growth, Trade and Factor Endowment: A Survey, *Labour*, 13(2), 509-547.
- [24] SELVANATHAN, S. and E.A. Selvanathan (2004), Empirical Regularities in South African Consumption Patterns, *Applied Economics*, 36(20), 2327-2333.
- [25] STEGER, T.M. (2000), Economic Growth with Subsistence Consumption, *Journal of Development Economics*, 62(2), 343-361.
- [26] SUMMERS, R. and A. Heston (1988), A New Set of International Comparisons of Real Product and Price: estimates of 130 countries, *The Review of Income and Wealth*, 34, 1-25.
- [27] WONG, K. and C.K. Yip (1999), Industrialization, Economic Growth, and International Trade, *Review of International Economics*, 7(3), 522-540.
- [28] YOUNG, A. (1991), Learning-by-doing and the Dynamic Effects of International Trade, *Quarterly Journal of Economics*, 106, 369-405.

## 2 Ajuste Fiscal, Acumulação Ótima e Bem-Estar: Um Modelo Dinâmico

### 2.1 Introdução

A grande discussão atual na economia brasileira é sobre a questão de qual seria o melhor instrumento de política econômica que permita um rigoroso ajuste fiscal em consonância com a política de estabilização .

No bojo dessa discussão duas propostas parecem ter tido destaque no cenário nacional: a política de superávit primário crescente, adotada e defendida pela equipe econômica do governo atual e, uma outra política de déficit nominal zero, proposta por um parlamentar da câmara.

Economistas, autoridades políticas e sociedade civil de modo geral, têm expostos suas opiniões defendendo ou criticando ambas as propostas. Entretanto, até o momento, nenhuma análise mais aprofundada foi feita com o intuito de avaliar objetivamente os impactos desses regimes<sup>13</sup>. Tudo que se tem afirmado são impressões que se referem, principalmente, à performance fiscal sem a justa ênfase sobre os possíveis impactos sobre o lado real da economia e sobre o bem-estar social.

Neste sentido, o principal objetivo desse trabalho é avaliar os efeitos destes dois regimes de ajuste fiscal. A motivação principal para uma avaliação mais cuidadosa, é que a adoção de qualquer um desses regimes tem implicações não só na performance fiscal, mas principalmente no lado real da economia, através de seus impactos sobre o consumo e o investimento privados e, conseqüentemente, sobre o bem estar da sociedade.

Para tais objetivos, utiliza-se um modelo de equilíbrio geral do tipo agente representativo que permite entre outras coisas: a) avaliar os impactos das mudanças nos parâmetros de política (incluindo os regimes de ajuste fiscal) sobre o consumo e o investimento privados, tanto no curto como no longo prazo; 2) analisar como as mudanças nos instrumentos de política podem

---

<sup>13</sup>No trabalho de Rocha e Pichetti (2003), os autores investigam o sucesso de políticas de ajuste fiscal no Brasil durante o período de 1991 a 2000.

afetar tanto a trajetória de bem estar como também o bem estar social em todo o horizonte de planejamento dos agentes econômicos<sup>14</sup>.

Neste trabalho, são considerados como parâmetros de política os gastos públicos e a composição do orçamento que é dividido em gastos em custeio e em infraestrutura. Os outros parâmetros a serem considerados são as proporções do PIB (produto) que são destinadas para a manutenção dos níveis de superávit primário e de déficit nominal. Para cada um destes regimes são analisados os efeitos de curto e longo prazo, provocados por choques fiscais.

Esta abordagem permite desenvolver uma análise mais objetiva destes dois regimes de ajuste fiscal para os quais é possível avaliar resultados, em termos de alocação e bem-estar de curto e de longo prazo, bem como, entender quais seriam as consequências transitórias da mudança de um regime para o outro<sup>15</sup>.

O modelo utilizado neste trabalho baseia-se em Turnovsky e Fisher (1995) que analisam a resposta do lado real da economia à mudanças nos gastos públicos em custeio e em infraestrutura.

Não existem formas funcionais específicas, quer para preferências quer para a tecnologia de produção, entretanto, assume-se que o gasto público em consumo entra aditivamente separado do consumo privado e do lazer na utilidade do agente representativo. Por outro lado, o gasto público em infraestrutura entra multiplicativamente separado na tecnologia. Esta última suposição, baseia-se na formulação de Barro e Sala-i-Martin (1992), sem fazer, todavia, qualquer suposição funcional explícita.

Existem, no entanto, duas diferenças básicas entre o modelo aqui construído e o de Turnovsky e Fisher (1995). Primeiro, os gastos públicos e sua composição orçamentária, são tratados como parâmetros de política distintos. Com essa formulação, o modelo permite que se possa analisar, sepa-

---

<sup>14</sup>Essa abordagem também é utilizada por outros autores para analisar efeitos reais de políticas fiscais. Baxter e King (1993) calibram um modelo de ciclos reais pra obter a resposta, em termos da dinâmica transicional do consumo, investimento e emprego à choques na composição do gasto público.

<sup>15</sup>Não faz parte do escopo do trabalho investigar a otimalidade das políticas de ajuste ora mencionadas. A proposta do artigo é analisar quais seriam as consequências macroeconômicas de tais políticas uma vez que estas já tenham sido implantadas. Para detalhes sobre otimalidade de políticas fiscais veja por exemplo Chari e Kohe (1999).

radamente, os efeitos de aumentos do gasto público total e de mudanças da sua composição. Segundo, supõe-se que o policy-maker deriva as trajetórias ótimas de consumo e investimento privados restrito a um ou a outro regime de ajuste fiscal.

A princípio essa formulação pode parecer restritiva, uma vez que uma mudança de regime poderia exigir uma reprogramação da economia. Entretanto, em ambos os regimes as condições de ótimo são as mesmas e a distinção entre as soluções é exclusivamente paramétrica. Este fato permite que se possa analisar a transição de um regime de ajuste fiscal para outro, olhando diretamente para o equilíbrio de longo prazo, através de uma simples dinâmica comparativa.

A suposição mais forte do modelo proposto é certamente a ausência de moeda. Os argumentos para justificar essa hipótese são os seguintes: 1) a inclusão de moeda, elevaria a dimensão da dinâmica do modelo tornando sua solução demasiadamente complicada; 2) o interesse do trabalho é investigar apenas os efeitos reais de mudanças dos parâmetros de política, bem como os impactos sobre bem estar; 3) se a moeda fosse incluída no modelo, seu papel seria predominantemente de alternativa ao financiamento do déficit fiscal. O modelo, entretanto, é desenvolvido sob hipótese de equivalência Ricardiana de forma a admitir que a única fonte de financiamento do governo é a emissão de títulos públicos.

Em todos os resultados obtidos, observa-se que existe um trade-off intertemporal entre os regimes de superávit primário e de déficit nominal.

A implementação do regime de déficit nominal zero exige inicialmente um grau de sacrifício maior quando comparado ao regime de superávit primário. Entretanto, no equilíbrio de longo prazo a situação se inverte. Mostra-se que, partindo de um equilíbrio sob regime de superávit fiscal, a adoção da política de déficit nominal zero conduz a economia para um equilíbrio de estado estacionário em que os níveis de consumo e investimento privados são maiores.

O corolário imediato disto é que, na comparação dos níveis de bem-estar, num e noutro regime, existem considerações sobre efeitos iniciais e de estado estacionário na trajetória da utilidade instantânea do agente representativo.

Assim sendo, o resultado líquido dessa comparação depende crucialmente da taxa de desconto intertemporal e da velocidade com que a economia converge para o equilíbrio de estado estacionário.

Em sociedades para as quais a taxa de desconto intertemporal é muito baixa (alta valorização do futuro), o nível de bem-estar total descontado (utilizado no modelo como índice de bem-estar social) é maior sob o regime de déficit nominal zero. Por outro lado se a taxa de desconto intertemporal é muito alta (baixa valorização do futuro), então uma condição suficiente mas não necessária, para que o bem-estar seja maior sob déficit nominal zero, é que a economia convirja rapidamente para o equilíbrio de estado estacionário, do contrário o bem estar será maior sob o regime de superávit primário.

Finalmente desenvolve-se uma breve discussão sobre quais são as condições que garantem a sustentabilidade da relação dívida/produto sob ambos os regimes fiscais, como também, avaliar a performance de tais regimes com respeito à redução da relação dívida/produto. Entre os resultados obtidos, verifica-se que uma política de redução gradual de déficit nominal até que se atinja o valor zero só é sustentável se, durante a transição, a taxa de decréscimo do déficit nominal seja maior do que a taxa de crescimento do produto. Por outro lado, sustentabilidade da relação dívida/produto sob o regime de superávit primário, exige que a taxa de crescimento do produto seja maior do que a taxa de juros da economia. Por fim, ambos os regimes de ajuste fiscal conduzem à liquidação total da dívida pública consolidada, entretanto, sob superávit primário, isto acontece mais rapidamente.

Além desta introdução o trabalho possui a seguinte organização. Na seção 2.2 é apresentado o modelo teórico. A seção 2.3 analisa os experimentos de política de ajuste fiscal, caracterizando os equilíbrios de curto e longo prazo em ambos os regimes. Na seção 2.4 são analisados choques fiscais permanentes e não antecipados, bem como choques transitórios. Em cada caso caracteriza-se o equilíbrio de longo prazo bem como a dinâmica de transição. A seção 2.5 faz todas as análises de bem estar. A seção 2.6 discute a questão da sustentabilidade da dívida pública em cada regime e, finalmente, a seção 2.7 apresenta as principais conclusões do trabalho.

## 2.2 O Modelo

O modelo a ser desenvolvido baseia-se no artigo de Turnovsky e Fisher (1995) em que, numa economia fechada, agentes idênticos com vida infinita tomam decisões instantâneas sobre o consumo,  $c$ , e trabalho,  $l$ , num horizonte de planejamento infinito, sob a hipótese de concorrência perfeita<sup>16</sup>.

O governo arrecada imposto lump-sum,  $T$ , para financiar seus gastos em custeio,  $g_c$ , e gastos em infraestrutura,  $g_i$ .

Até este ponto o modelo é semelhante ao de Turnovsky e Fisher (1995). Duas modificações, entretanto, serão consideradas: a) uma regra explícita de como o gasto público total é distribuído entre gastos de custeio e infraestrutura, com objetivo de analisar como estes gastos afetam os equilíbrios de curto e longo prazo (estado estacionário); b) duas políticas de ajuste fiscal, discutidas na introdução, e as respectivas análises do impacto delas sobre as trajetórias do consumo privado, do capital físico, da oferta de trabalho e sobre o bem estar.

Neste sentido, descreve-se a seguir formalmente o modelo. A utilidade instantânea do agente representativo é dada por:

$$U(c, l, g_c) = u(c, l) + v(g_c) \quad (2.1)$$

onde  $u$  e  $v$  são funções estritamente côncavas satisfazendo<sup>17</sup>  $u_c > 0$ ,  $u_{cc} < 0$ ,  $u_l < 0$ ,  $u_{ll} < 0$ ,  $u_{cl} < 0$ ,  $v' > 0$  e  $v'' < 0$ .

Do lado da produção, a tecnologia é representada por uma função de produção neoclássica,  $F$ , através da qual o produto na economia,  $y$ , utilizando capital,  $k$ , e trabalho,  $l$ . Além disso será suposto que a tecnologia depende também dos gastos públicos em infraestrutura,  $g_i$ <sup>18</sup>. Particularmente, esta função de produção será definida, como em Barro (1990)<sup>19</sup>, na forma sepa-

---

<sup>16</sup>Para uma análise em economias abertas veja Agénor (2005).

<sup>17</sup>No que segue, a seguinte notação será adotada:  $u_x = \partial u / \partial x$  para  $x = c, l$  e  $u_{xy} = \partial^2 u / \partial x \partial y$  para  $x, y = c, l$ . De maneira semelhante tem-se  $f_x = \partial f / \partial x$  para  $x = k, l$  e  $f_{xy} = \partial^2 f / \partial x \partial y$  para  $x, y = k, l$ .

<sup>18</sup>Justificativas para essa modelagem podem ser encontradas em Aschauer (1988, 1989, 1990).

<sup>19</sup>Em seu artigo, Barro(1990) considera uma tecnologia Cobb-Douglas em que dados e , apresenta retornos decrescentes de escala.

rável:

$$F(k, l, g_i) = f(k, l)h(g_i) \quad (2.2)$$

onde  $f$  é uma função linearmente homogênea e  $f_k > 0$ ,  $f_{kk} < 0$ ,  $f_l > 0$ ,  $f_{ll} < 0$ ,  $h' > 0$  e  $h'' < 0$ .

O estoque de capital da economia evolui de acordo com a identidade macroeconômica básica,  $c + g_c + g_i + \dot{k} = f(k, l)h(g_i)$ . Fazendo  $g = g_c + g_i$ , a dinâmica do estoque de capital pode ser alternativamente escrita como:

$$\dot{k} = f(k, l)h(g_i) - c - g \quad (2.3)$$

Denotando por  $b$ , o estoque da dívida pública e por  $r$ , a taxa de juros da economia, a restrição orçamentária do governo é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{b} = rb + g - T \quad (2.4)$$

Será admitido que, uma proporção,  $\alpha \in (0, 1)$ , do gasto total é destinada aos gastos com custeio e o complementar em gastos com infraestrutura, ou seja:

$$g_c = \alpha g \quad (2.5)$$

$$g_i = (1 - \alpha)g \quad (2.6)$$

## 2.3 Regimes de Ajuste Fiscal

### 2.3.1 Superávit Primário Proporcional ao Produto

Inicialmente, será suposto que o governo adota uma política de ajuste fiscal em que o superávit primário,  $T - g$ , seja uma proporção,  $\beta \in (0, 1)$ , do produto. Formalmente, esta política é expressa como:

$$T - g = \beta f(k, l)h(g_i) \quad (2.7)$$

Sob a hipótese de concorrência perfeita, as trajetórias ótimas de consumo, investimento e emprego são obtidas por um planjador central através do seguinte problema de maximização:

$$\max_{(c,l)} \int_0^{\infty} [u(c, l) + v(g_c)] e^{-\rho t} dt \quad (2.8)$$

sujeito a

$$\dot{b} + \dot{k} = (1 - \beta)f(k, l)h(g_i) + rb - c - g$$

$$g_c = \alpha g$$

$$g_i = (1 - \alpha)g$$

$$k(0) = k_0$$

$$b(0) = b_0$$

onde  $\rho \in (0, 1)$  é a taxa de desconto intertemporal.

A primeira restrição de (2.8) é uma combinação das equações (2.3), (2.4) e (2.7). As restrições  $g_c = \alpha g$  e  $g_i = (1 - \alpha)g$  descrevem a regra de composição do orçamento público e, por fim, as duas últimas estabelecem as condições iniciais da economia.

O Hamiltoniano de valor corrente associado ao problema (2.8) é dado por:

$$H = u(c, l) + v(g_c) + \lambda [(1 - \beta)f(k, l)h(g_i) + rb - c - g]$$

onde  $\lambda$  é variável de coestado da economia ou a utilidade marginal da riqueza<sup>20</sup>.

---

<sup>20</sup>Deste ponto em diante essa variável será sempre tratada como utilidade marginal da riqueza.

As condições de primeira ordem do problemas são:

$$u_c = \lambda \quad (2.9)$$

$$u_l = -\lambda(1 - \beta)f_l(k, l)h(g_i) \quad (2.10)$$

$$\lambda(1 - \beta)f_k(k, l)h(g_i) = \rho\lambda - \dot{\lambda} \quad (2.11)$$

$$\lambda r = \rho\lambda - \dot{\lambda} \quad (2.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda \exp(-\rho t)k = 0 \quad (2.13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda \exp(-\rho t)b = 0 \quad (2.14)$$

onde (2.13) e (2.14) são as condições de transversalidade do problema.

A solução do sistema formado pelas equações (2.9) a (2.12) fornece as trajetórias ótimas do consumo, do trabalho, do capital e da utilidade marginal da riqueza. As trajetórias ótimas por sua vez serão funções dos parâmetros de política do modelo e portanto, o que permite avaliar os impactos das mudanças em tais parâmetros de política sobre a economia como um todo bem como sobre o bem-estar social.

Antes de passar a seção seguinte é oportuno observar que as equações (2.11) e (2.12) implica que  $r = \lambda(1 - \beta)f_k h$  e, portanto:

$$\frac{dr}{d\beta} < 0 \quad (2.15)$$

ou seja, como era de se esperar, uma aumento na proporção do produto destinada ao produto deve vir acompanhada por uma redução na taxa de juros da economia.

Na seção seguinte será caracterizado o equilíbrio de curto prazo da economia em termos dos parâmetros de política.

### *Análise do Equilíbrio de Curto Prazo*

As equações (2.9) e (2.10) fornecem implicitamente as soluções para o consumo,  $c$ , e a oferta de trabalho,  $l$ , como funções da utilidade marginal da riqueza,  $\lambda$ , do estoque de capital,  $k$ , e dos parâmetros de política,  $g$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Em outras palavras, tem-se que:

$$c = c(\lambda, k, g, \alpha, \beta)$$

$$l = l(\lambda, k, g, \alpha, \beta)$$

O restante desta seção é dedicada então a analisar o efeito de cada um dos termos  $\lambda$ ,  $k$ ,  $g$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  sobre  $c$  e  $l$ .

Da diferenciação total do sistema formado pelas equações (2.9) e (2.10) resulta que:

$$\begin{bmatrix} u_{cc} & u_{cl} \\ u_{cl} & u_{ll} + \lambda(1 - \beta)f_{ll}h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc \\ dl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda(1 - \beta)f_{kl}h \end{bmatrix} dk + \begin{bmatrix} 1 \\ -(1 - \beta)f_{lh} \end{bmatrix} d\lambda + \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda(1 - \alpha)(1 - \beta)f_{lh}' \end{bmatrix} dg + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda(1 - \beta)f_{lh}'g \end{bmatrix} d\alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda f_{lh} \end{bmatrix} d\beta$$

Fazendo uso do Teorema da função implícita, o sistema acima apresenta como solução<sup>21</sup>:

$$c_k = \frac{u_{cl}\lambda(1 - \beta)f_{kl}h}{\Delta} < 0, \quad c_\lambda = \frac{u_{ll} + \lambda(1 - \beta)f_{ll}h + u_{cl}(1 - \beta)f_{lh}}{\Delta} < 0$$

---

<sup>21</sup>A notação utilizada aqui é a mesma que foi explicada na nota 1.

$$c_g = \frac{u_{cl}\lambda(1-\alpha)(1-\beta)f_l h'}{\Delta} < 0, \quad c_\alpha = \frac{-u_{cl}\lambda(1-\beta)f_l h'g}{\Delta} > 0$$

$$c_\beta = \frac{-u_{cl}\lambda f_l h}{\Delta} > 0, \quad l_k = \frac{-u_{cc}\lambda(1-\beta)f_{kl}h}{\Delta} > 0$$

$$l_\lambda = \frac{-[u_{cc}(1-\beta)f_l h + u_{cl}]}{\Delta} > 0, \quad l_g = \frac{-u_{cc}\lambda(1-\alpha)(1-\beta)f_l h'}{\Delta} > 0$$

$$l_\alpha = \frac{u_{cc}\lambda(1-\beta)f_l h'g}{\Delta}, \quad l_\beta = \frac{u_{cc}\lambda f_l h}{\Delta} < 0$$

onde  $\Delta = u_{cc}[u_{ll} + \lambda(1-\beta)f_{ll}h] - c_{cl}^2 > 0$  é o determinante do sistema de equações (2.9) e (2.10). Os sinais de todas as derivadas parciais acima seguem as suposições feitas sobre a função utilidade e sobre a função de produção.

Com respeito aos sinais das mudanças em  $k$  e  $\lambda$ , as direções são as esperadas. Os sinais das mudanças nos gastos do governo e da composição do orçamento, dependem dos efeitos desses parâmetros sobre a tecnologia de produção.

No caso das decisões privadas de consumo e oferta de trabalho, a suposição de separabilidade aditiva da função utilidade implica que não existe impacto direto dos gastos do governo sobre essas variáveis. Este fato torna-se claro quando se supõe que não existe gasto em infraestrutura, ou seja  $g_i = 0$  e portanto  $\alpha = 1$ , ou seja, se não houver gastos em infraestrutura então não há impacto dos gastos do governo sobre a produção e portanto sobre o consumo e oferta de trabalho.

Finalmente, nota-se que, no curto prazo o consumo privado aumenta se o governo decide aumentar a proporção do produto destinada ao superávit primário. Intuitivamente, pode-se considerar que as mudanças em qualquer dos parâmetros de política, influenciam o consumo privado através de um efeito renda e um efeito substituição. No caso do parâmetro  $\beta$ , o efeito substituição predomina, pois de acordo com um aumento em (2.15) reduz a taxa de juros levando os agentes a reduzirem poupança e aumentar o consumo

Na seção seguinte serão caracterizados a dinâmica e o estado estacionário da economia.

### ***Análise do Equilíbrio de Longo Prazo***

Em relação ao equilíbrio de longo prazo (equilíbrio de estado estacionário), substituindo-se,  $c = c(\lambda, k, g, \alpha, \beta)$  e  $l = l(\lambda, k, g, \alpha, \beta)$ , obtidas anteriormente, nas equações (2.3) e (2.11), encontra-se o sistema dinâmico que governa as trajetórias de,  $k$ , e,  $\lambda$ . Após estas substituições, fazendo-se  $\dot{k} = \dot{\lambda} = 0$  obtém-se os valores do estoque de capital e da utilidade marginal da riqueza, denotados, respectivamente por  $\tilde{k}$  e  $\tilde{\lambda}$ , através da solução do seguinte sistema de equações:

$$f\left(\tilde{k}, l\left(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta\right)\right) = c\left(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta\right) + g \quad (2.16)$$

$$(1 - \beta)f_k\left(\tilde{k}, l\left(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta\right)\right)h(g_i) = \rho \quad (2.17)$$

A solução do sistema formado pelas equações (2.16) e (2.17), providencia o estado estacionário da economia como função dos parâmetros de política, ou seja:

$$\tilde{k} = \tilde{k}(g, \alpha, \beta)$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(g, \alpha, \beta)$$

Para analisar a dinâmica do sistema, lineariza-se as equações (2.3) e (2.11) na vizinhança de seus equilíbrios de estado estacionário.

A equação (2.3) após a linearização dá origem a:

$$\dot{k} = \omega_{11}\left(k - \tilde{k}\right) + \omega_{12}\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right) \quad (2.18)$$

onde  $\omega_{11} = f_k h + f_l l_k h - c_k$  e  $\omega_{12} = f_l l_\lambda h - c_\lambda > 0$ . Portanto o *locus*  $\dot{k}$ , é representado por uma reta negativamente inclinada no espaço  $k \times \lambda$ , como é

mostrado na Figura 1 abaixo.

Semelhantemente, a linearização da equação (2.11) na vizinhança de seu equilíbrio de estado estacionário resulta em:

$$\dot{\lambda} = -\tilde{\lambda}(1 - \beta)h\omega_{21} (k - \tilde{k}) - \tilde{\lambda}(1 - \beta)h\omega_{22} (\lambda - \tilde{\lambda}) \quad (2.19)$$

onde<sup>22</sup>,  $\omega_{21} = f_{kk} + f_{kl}l_k < 0$  e  $\omega_{22} = f_{kl}l_\lambda > 0$ . Portanto o *locus*  $\dot{\lambda} = 0$ , é representado por uma reata positivamente inclinada no espaço  $k \times \lambda$ , também mostrado na Figura 1.

Denotando por  $\mu_1$  e  $\mu_2$  os autovalores do sistema formado pelas equações (2.18) e (2.19), é mostrado no Apêndice A1, que  $\mu_1\mu_2 < 0$ , com  $\mu_1 < 0$  e  $\mu_2 > 0$ , além disso também é mostrado que  $\mu_2 > |\mu_1|$ . Assim sendo, o estado estacionário do sistema é caracterizado por um ponto de sela, como mostrado na Figura 1.

De acordo com as considerações acima, é demonstrado no Apêndice A2, que a solução estável do sistema linearizado (2.18) e (2.19) é dada por:

$$k(t) = \tilde{k} + (k_0 - \tilde{k}) \exp(\mu_1 t) \quad (2.20)$$

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda} + (k_0 - \tilde{k}) \left( \frac{\mu_1 - \omega_{11}}{\omega_{12}} \right) \exp(\mu_1 t) \quad (2.21)$$

onde  $\mu_1$  é autovalor negativo do sistema.

A combinação das equações (2.20) e (2.21) dá origem a equação que descreve o braço estável do sistema no espaço,  $k \times \lambda$ :

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda} + \left( \frac{\mu_1 - \omega_{11}}{\omega_{12}} \right) (k - \tilde{k}) \quad (2.23)$$

Dados  $\mu_1 < 0$ ,  $\omega_{11} > 0$  e  $\omega_{12} > 0$ , a reta que descreve o braço estável do sistema é negativamente inclinada e na Figura 1 é representada pela linha pontilhada *SS*. Para obter a equação do braço instável do sistema basta substituir em (2.21) a raiz estável,  $\mu_1$ , pela raiz instável,  $\mu_2$ . Assim a trajetória

---

<sup>22</sup>Para ver que  $\omega_{21} < 0$ , observe que,  $f_{kk} + f_{kl}l_k = f_{kk}(u_{cc}u_{ll} - u_{cl}^2) + \tilde{\lambda}(1 - \beta)h(f_{kk}f_{ll} - f_{k1}^2)$ , porém da homogeneidade linear de  $f$  tem-se  $f_{kk}f_{ll} - f_{k1}^2 = 0$  e, portanto, da estrita concavidade da função  $u$  tem-se  $f_{kk} + f_{kl}l_k < 0$ .

instável do sistema é expressa pela equação:

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda} + \left( \frac{\mu_2 - \omega_{11}}{\omega_{12}} \right) (k - \tilde{k}) \quad (2.24)$$

No Apêndice A2, é demonstrado que a equação (2.23) descreve uma reta que é positivamente inclinada e seu coeficiente angular é menor (em valor absoluto) do que o coeficiente angular da equação (2.22). Na Figura 1 o braço instável do sistema é representado pela linha pontilhada  $NN$ .

Por fim, dadas a característica do equilíbrio e as propriedades das equações dos braços estável e instável, permitem que o diagrama de fases seja construído, como mostra a Figura 1 a seguir.

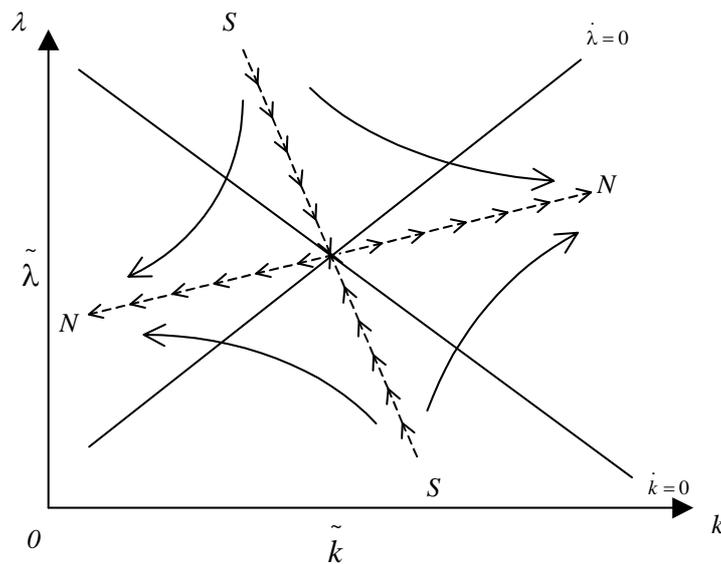


Figura 1: Diagrama de Fases

Caracterizados, os equilíbrios de curto e longo prazo, bem como a dinâmica para o equilíbrio de estado estacionário, a seção seguinte é destinada a caracterizar os resultados até aqui obtidos supondo contudo que a autoridade política adota o regime de déficit nominal ao invés de superávit primário.

### 2.3.2 Déficit Nominal Proporcional ao Produto

Nesta seção analisa-se a alternativa na qual o governo decide implementar um ajuste fiscal via controle do déficit nominal como proporção do produto.

Para tanto, inicialmente, supõe-se que, no curto-prazo, o governo tolera algum déficit nominal proporcional ao produto, mas que essa proporção deve cair no tempo até que se atinja déficit nominal zero.

Para tornar a análise mais tratável, serão analisados, no curto prazo, apenas os equilíbrios em que o governo apresenta um determinado nível de déficit nominal. No longo prazo, a análise será feita sob a hipótese de que o déficit nominal seja zero. Mais especificamente, se,  $\delta$ , representa a proporção do produto destinada a um teto do déficit nominal, então,  $\delta \in (0, 1)$ , no curto prazo e,  $\delta = 0$ , no longo prazo. Portanto, qualquer que seja o valor de,  $\delta$ , o déficit nominal como proporção do produto é definido como:

$$\begin{aligned} g + rb - T &= \delta y \\ &= \delta f(k, l)h(g_i) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Isto posto, a análise será conduzida admitindo-se, no início, algum déficit nominal. Em seguida, analisa-se o equilíbrio quando se supõe que o governo decide zerar este déficit.

Por fim, pretende-se investigar, como se dá a transição da economia, a partir de um equilíbrio sob déficit nominal positivo para um outro equilíbrio em que o governo adota uma política gradual de redução do déficit nominal até torná-lo zero. Nestes termos, o problema de otimização do agente representativo sob a política de déficit nominal é dado como segue:

$$\max_{(c,l)} \int_0^{\infty} [u(c, l) + v(g_c)] e^{-\rho t} dt \tag{2.26}$$

sujeito a

$$\dot{k} = (1 - \delta)f(k, l)h(g_i) + rb - c - g$$

$$g_c = \alpha g$$

$$g_i = (1 - \alpha)g$$

$$k(0) = k_0$$

$$b(0) = b_0$$

Observe que a única diferença neste problema de otimização em relação ao problema (2.8) é a primeira restrição. Esta restrição é exatamente a combinação da expressão (2.24), que define o déficit nominal, com a expressão (2.3) que descreve a lei de movimento do capital.

Portanto, as condições de primeira ordem do Halmitoniano associado ao problema (2.26) são as que se seguem:

$$u_c = \lambda \tag{2.27}$$

$$u_l = -\lambda(1 - \beta)f_l(k, l)h(g_i) \tag{2.28}$$

$$\lambda(1 - \beta)f_k(k, l)h(g_i) = \rho\lambda - \dot{\lambda} \tag{2.29}$$

$$\lambda r = \rho\lambda - \dot{\lambda} \tag{2.30}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda \exp(-\rho t)k = 0 \tag{2.31}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda \exp(-\rho t)b = 0 \tag{2.32}$$

Essas condições são exatamente as mesmas do modelo (2.8) em que se supôs superávit primário proporcional ao produto, a menos do parâmetro,  $\delta$ ,

no lugar de  $\delta$ . Na próxima seção desenvolve-se a análise de curto prazo.

### ***Análise do Equilíbrio de Curto Prazo***

Desde que, as condições de primeira ordem do problema (2.25) são as mesmas do problema (2.8), a caracterização do equilíbrio de curto-prazo nesse contexto pode ser obtida por analogia ao modelo de superávit primário.

Assim, os sinais das variações nos parâmetros de política,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , da utilidade marginal da riqueza,  $\lambda$ , e do estoque de capital,  $k$ , sobre  $c$  e  $l$  são os mesmos que foram obtidos na seção 2.3.1 (hipótese de superávit primário). A única diferença é que no lugar de,  $\beta$ , deve-se colocar,  $\delta$ . Observe, entretanto, que as intensidades dos efeitos dos parâmetros de política sobre as decisões privadas de consumo,  $c$ , e oferta de trabalho,  $l$ , são diferentes conforme sejam diferentes as magnitudes dos parâmetros  $\beta$  e  $\delta$ .

Denotando por,  $c_g^\beta$ , e,  $c_g^\delta$ , os efeitos do gasto público,  $g$ , sobre o consumo privado no caso de superávit primário e déficit nominal, respectivamente, tem-se que:

$$c_g^\beta = \frac{u_{cl}\lambda(1-\alpha)(1-\beta)f_l h'}{\Delta_\beta} < 0 \quad (2.33)$$

$$c_g^\delta = \frac{u_{cl}\lambda(1-\alpha)(1-\delta)f_l h'}{\Delta_\delta} < 0 \quad (2.34)$$

onde,  $\Delta_\beta = u_{cc}[u_{ll} + \lambda(1-\beta)f_{ll}h] - c_{cl}^2 > 0$  e  $\Delta_\delta = u_{cc}[u_{ll} + \lambda(1-\delta)f_{ll}h] - c_{cl}^2 > 0$ .

Oserve que se  $\beta > \delta$  então  $|c_g^\delta| > |c_g^\beta|$ . Intuitivamente, pode-se dizer que os efeitos, de curto prazo, de um aumento dos gastos públicos serão tão mais adversos ao consumo privado quanto mais agressiva for a política de ajuste fiscal. No curto prazo se a autoridade fiscal decide expandir os gastos totais, então uma política de superávit primário mais agressiva pode ser menos danosa ao consumo quando comparada a uma política déficit nominal mais branda. Com efeito, pode-se mostrar que  $\lim_{\beta \rightarrow 1, \delta \rightarrow 0} [|c_g^\delta| - |c_g^\beta|] > 0$ , ou seja, no caso limite em que o superávit primário seja máximo ( $\beta \rightarrow 1$ ) o impacto negativo sobre o consumo privado será menor quando comparado a

uma política de déficit nominal zero ( $\delta \rightarrow 0$ ).

Neste ponto é necessário observar, que o resultado acima não é um argumento a favor (ou contra) de uma ou outra política, pois é necessário levar em consideração os efeitos transitórios e os de longo prazo que serão discutidos nas próximas duas subseções.

### ***Análise do Equilíbrio de Longo Prazo: A Hipótese de Déficit Nominal Zero***

O equilíbrio de longo prazo (estado estacionário) é obtido resolvendo o sistema de equações (2.3) e (2.28) em que,  $\dot{k} = \dot{\lambda} = 0$ . Nesse caso, obtém-se que,  $\tilde{k} = \tilde{k}(g, \alpha, \delta)$ , e,  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(g, \alpha, \delta)$ . Desde que as condições de primeira ordem deste modelo são iguais ao do modelo (2.8), os sinais das derivadas de,  $\tilde{k}$ , e,  $\tilde{\lambda}$ , com relação aos parâmetros de política e,  $g$ ,  $\alpha$  e  $\delta$ , são os mesmos que são obtidos quando se considera a política de superávit primário, sendo necessário apenas substituir  $\beta$  por  $\delta$ . As respostas do estado estacionário à choques nos parâmetros de política serão discutidos com mais detalhes na seção 2.4.

Como será visto mais adiante tem-se que  $\partial\tilde{k}/\partial\delta < 0$  e  $\partial\tilde{\lambda}/\partial\delta < 0$ , implicando:

$$\tilde{k}(g, \alpha, \delta) < \tilde{k}(g, \alpha, 0) \text{ se } \delta \in (0, 1)$$

$$\tilde{\lambda}(g, \alpha, \delta) > \tilde{\lambda}(g, \alpha, 0) \text{ se } \delta \in (0, 1)$$

Portanto, se a autoridade fiscal decide implementar déficit nominal zero ( $\delta = 0$ ), o equilíbrio de longo-prazo consiste num nível de estoque de capital e perfil de consumo maiores relativamente aos da política de déficit nominal positivo.

Note que a mesma análise pode ser estendida à política de superávit primário em relação ao déficit nominal zero. O estoque de capital e o consumo privado são maiores do que no caso de superávit primário<sup>23</sup>. Na Figura 2 o

---

<sup>23</sup>Observe que  $\tilde{k}(\beta) < \tilde{k}(\delta)$ , quando  $\beta > \delta$ , pois  $\partial\tilde{k}/\partial\beta < 0$ , portanto, em particular

equilíbrio no caso de superávit primário é representado pelo ponto A e o de déficit nominal zero pelo ponto C.

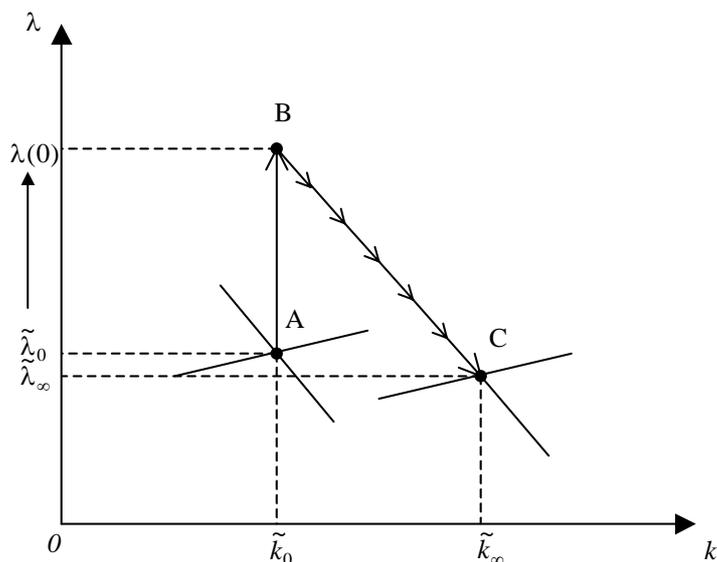


Figura 2: Superávit Primário versus Déficit Nominal Zero

Observe que, quando se está num equilíbrio sob hipótese de superávit primário e o governo decide adotar uma política de déficit nominal zero, ocorre a transição de equilíbrio do ponto A para o ponto C.

No entanto, inicialmente a variável *jump*,  $\lambda$  (utilidade marginal da riqueza), salta para o braço estável do novo equilíbrio de longo prazo (ponto B), implicando numa queda do consumo privado na mesma proporção. Desde que o modelo é de previsão perfeita, o estoque de capital inicialmente não se altera<sup>24</sup>.

Em seguida, a utilidade marginal da riqueza começa a cair (e, portanto, o consumo aumenta) e o estoque de capital cresce até alcançar o novo equilíbrio representado pelo ponto C. Neste novo equilíbrio, tanto os níveis de

---

tem-se  $\tilde{k}(\beta) < \tilde{k}(0)$ , no caso em que  $\beta \in (0, 1)$ . A análise é a mesma para o caso da utilidade marginal da riqueza apenas invertendo-se as desigualdades.

<sup>24</sup>A classe de modelos bidimensionais de previsão perfeita com equilíbrio do tipo sela, é caracterizado por uma variável que pode sofrer saltos (variável *jump*) e uma outra que evolui continuamente no tempo (variável *sluggish*). Neste modelo a variável *jump* é a utilidade marginal da renda. O estoque de capital é a variável *sluggish*.

investimento como o de consumo privado são maiores do que os do equilíbrio anterior.

A conclusão que se obtém é que no curto prazo a política de superávit primário afeta menos o consumo e o investimento que numa política de déficit nominal zero. Por outro lado, quando se considera o longo prazo este resultado se inverte embora o impacto inicial, na transição de um regime para o outro, sobre o consumo privado seja caracterizado por uma forte redução.

Neste sentido, existe um trade-off entre as duas políticas de ajuste no que se refere aos seus efeitos de curto e longo prazo. Na seção 2.5 será realizada análise semelhante a esta no sentido de se comparar impactos sobre bem estar.

### ***Transição Gradual de Déficit Nominal Positivo Para Déficit Nominal Zero***

O objetivo desta seção é mostrar qual a dinâmica de transição quando autoridade fiscal decide pela adoção de queda gradual até que se atinja déficit nominal zero, ou seja, fazendo com que o coeficiente de política,  $\delta$ , tenda para zero.

Supõe-se que o governo estabeleça a seguinte estratégia: a) a economia em,  $t = 0$ , se encontra num equilíbrio de estado estacionário em que o déficit nominal é uma proporção,  $\delta = \delta_0 \in (0, 1)$ , do produto; b) a partir daí o governo anuncia que começará a reduzir o déficit nominal diminuindo  $\delta$ , até que, em  $t = T$ , ele atinge valor zero ( $\delta = 0$ ).

A Figura 3 abaixo, ilustra uma representação pictórica de uma situação em que o governo adota reduções sucessivas do déficit nominal em dois estágios. Suponha que a economia repousa em seu equilíbrio de estado estacionário, que na Figura 3 abaixo é representado pelo ponto  $A_0$ . No primeiro estágio,  $t = 0$ , o governo anuncia a política de reduções sucessivas e, instantaneamente, a utilidade marginal da renda salta em direção ao novo braço estável, entretanto como os agentes descontam o efeito temporário (já que haverá uma nova redução no futuro), o salto da utilidade marginal da renda não alcança o braço estável e sim um ponto como  $B_0$ , estabelecido numa

região de instabilidade da economia. A partir de então a economia transita até o novo braço estável do ponto  $B_0$  até o ponto  $C_0$ , quando então a economia recupera-se gradualmente através do aumento do consumo e do investimento privados. Esse movimento está representado na Figura 3 pelo seguimento  $\overline{C_0A_1}$ , onde o ponto  $A_1$  representa o novo equilíbrio de longo prazo.

No segundo estágio o governo reduz novamente o déficit nominal mas desta vez em definitivo para o nível zero. A única diferença com respeito a dinâmica anterior é que o *jump* inicial na utilidade marginal da renda é menor uma vez que a data de zeragem do déficit nominal está mais próxima.

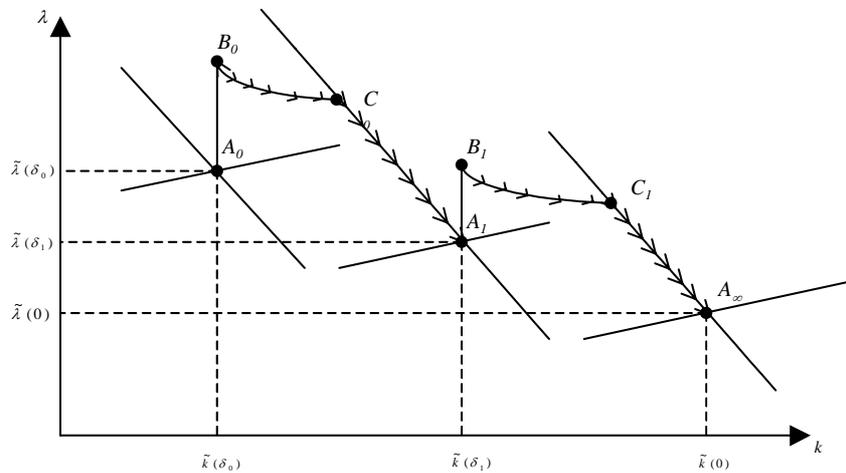


Figura 3: Déficit Nominal Zero: Ajustamento Gradual

De um modo geral, admitindo que o governo reduz continuamente o déficit nominal até o valor zero,  $\delta = 0$ , pode-se considerar que, durante a fase de transição, a utilidade marginal da riqueza sofre sucessivos saltos<sup>25</sup>, mas de intensidades cada vez menores, na medida em que se aproxima a data de "zeragem" do déficit nominal. Neste caso, esses sucessivos saltos da utilidade marginal da riqueza, representam os sacrifícios temporários do consumo privado que são necessários, vis-à-vis, o esforço fiscal para reduzir gradualmente o déficit nominal.

Na data de zeragem do déficit nominal,  $T$ , o novo equilíbrio de longo

<sup>25</sup>Relembre que a utilidade marginal da riqueza é a variável jump do modelo.

prazo<sup>26</sup>, apresenta um estoque de capital e consumo privados de longo prazo maiores relativamente ao equilíbrio inicial.

Durante a transição, o estoque de capital não muda, já que sob a hipótese de previsão perfeita, os agentes antecipam que os sucessivos aumentos na produtividade marginal do capital, irá culminar a posteriori, num aumento do investimento privado e, portanto, do estoque de capital no novo equilíbrio de curto-prazo.

## 2.4 Choques Fiscais

### 2.4.1 Choques Fiscais no Regime de Superávit Primário

#### *Choques Fiscais Permanentes e Não-Antecipados*

Nesta seção supõe-se que a autoridade fiscal altere os parâmetros de política e,  $g$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , permanentemente, e sem antecipar esses aumentos aos agentes econômicos. O objetivo é analisar, no caso de superávit primário, como se comportam o estoque de capital e a utilidade marginal da riqueza e, portanto, o consumo privado e o trabalho, quando o governo altera esses parâmetros. Em seguida estuda-se a dinâmica de ajustamento.

Utilizando o sistema formado pelas equações (2.16) e (2.17), é demonstrado no Apêndice A3 que os sinais das seguintes relações se mantêm:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} &> 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \beta} < 0 \\ \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial g} &< 0, \quad \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \beta} > 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Em outras palavras, quando o governo adota um regime de superávit primário, um aumento de seus gastos totais aumenta o estoque de capital e diminui a utilidade marginal da riqueza<sup>27</sup>. Em conseqüência, o consumo

<sup>26</sup>Como a redução de,  $\delta$ , é temporária (já que em  $T$   $\delta$  para de cair), este fato acontece antes que a economia alcance qualquer equilíbrio temporário, já que sob hipótese de previsão perfeita, os agentes descontam mudanças temporárias.

<sup>27</sup>Ferreira (1999), através de um modelo de gerações sobrepostas, mostra que os gastos públicos também afetam positivamente a taxa de crescimento do capital humano.

privado de longo prazo aumenta. Neste sentido, como já foi mostrado que no curto prazo o aumento dos gastos do governo reduz o consumo privado, os efeitos de curto e longo prazo apresentam direções opostas<sup>28</sup>.

Em relação à composição dos gastos públicos, um aumento de sua proporção destinado a consumo (custeio) reduz o estoque de capital de longo prazo, mas aumenta a utilidade marginal da riqueza e, portanto, reduz o perfil de consumo privado de longo prazo<sup>29</sup>. Quando se comparam estes resultados com os de curto prazo, novamente observa-se que os sinais destas relações são opostos.

Por fim um aumento do superávit primário (*ceteris paribus*) reduz o estoque de capital de longo prazo e aumenta a utilidade marginal da riqueza e, portanto reduz o consumo de longo prazo.

### ***Dinâmica de Ajustamento: Choque em $g$***

Como foi visto na seção anterior, um aumento nos gastos totais do governo eleva o estoque de capital de longo prazo da economia e reduz a utilidade marginal da riqueza. Será suposto na análise da dinâmica transacional que a utilidade marginal da riqueza é a variável *jump* do modelo e que o estoque de capital evolui gradualmente até o novo equilíbrio. Dadas essas suposições e considerando os resultados obtidos na análise sobre o estado estacionário, se a autoridade política decide por um aumento permanente dos gastos públicos totais então o novo equilíbrio deve se estabelecer à sudeste do equilíbrio inicial, com um estoque de capital maior e utilidade marginal da riqueza menor. Estes fatos, bem como a dinâmica do ajustamento, são ilustrados na Figura 4 abaixo<sup>30</sup>.

---

<sup>28</sup>Na verdade, será visto mais adiante que os efeitos opostos no curto e no longo prazo também se replicam na análise de bem-estar.

<sup>29</sup>Esses resultados também são encontrados em Barro (1990, 1991).

<sup>30</sup>As trajetórias instáveis são desconsideradas para melhor visualização.

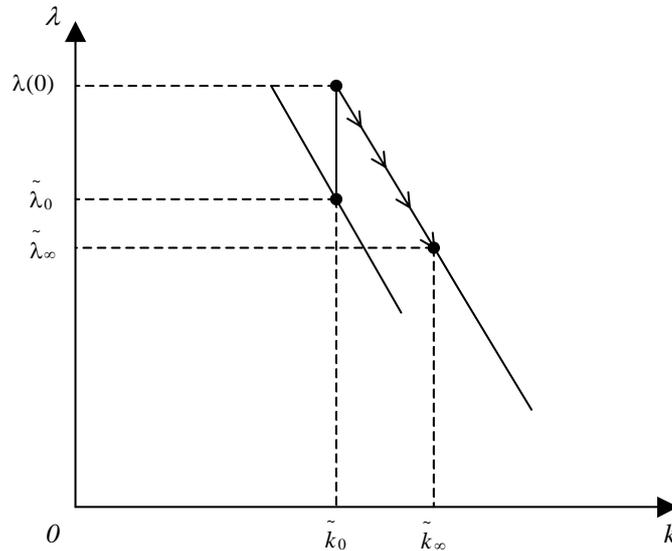


Figura 4: Ajustamento a um Choque em  $g$

Na Figura 4 acima, o equilíbrio inicial da economia é representado pelo ponto A. No momento em que o governo aumenta seus gastos o *jump* positivo na utilidade marginal da riqueza, representado pelo movimento de A até B, pode ser interpretado como o efeito de curto prazo do consumo privado, que cai com o aumento dos gastos do governo (efeito *crowding-out* direto). As condições de transversalidade garantem que o *jump* na utilidade marginal da renda deve alcançar a trajetória estável do novo estado estacionário da economia representado pelo ponto C. O movimento de B até C representa o ajuste gradual do estoque de capital em resposta ao aumento dos gastos do governo.

### *Choque em $\alpha$*

Na seção anterior foi visto que um aumento na proporção dos gastos totais destinados a gastos públicos em consumo, reduz o estoque de capital de longo prazo e aumenta a utilidade marginal da renda, reduzindo, portanto, o perfil do consumo no estado estacionário. Com isso a economia se move para um novo equilíbrio situado à noroeste do equilíbrio inicial como mostra a Figura

5 abaixo.

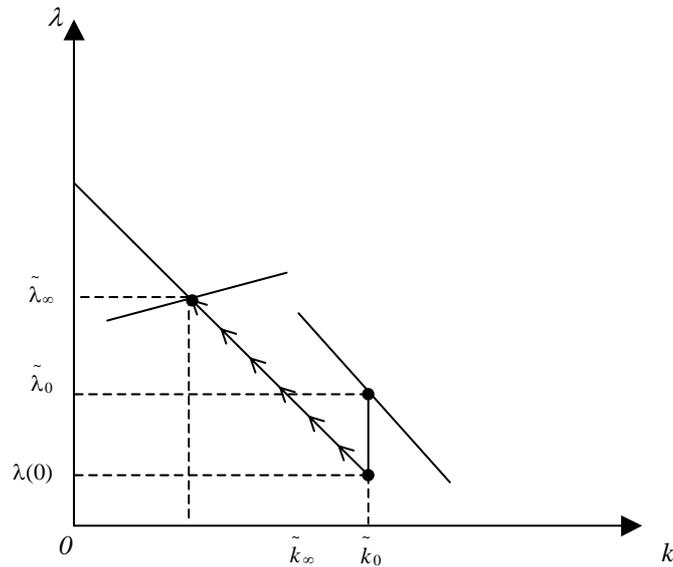


Figura 5: Ajustamento a um Choque em  $\alpha$

Na Figura 5, os pontos A, B, e C, têm a mesma interpretação dada na Figura 4. A diferença nesta situação é que desta vez o *jump* na utilidade marginal da riqueza é para baixo, representando o efeito de curto prazo sobre o consumo privado, que é de um aumento instantâneo. Por outro lado, como foi visto, o aumento da proporção do gasto do governo destinada a gasto em custeio implica num equilíbrio de longo prazo em que o estoque de capital é menor e a utilidade marginal da riqueza é maior, ou seja, há uma redução tanto do consumo quanto do investimento privados.

O efeito de um aumento inicial no consumo privado é dado pelo *jump* negativo da utilidade marginal da riqueza representado na Figura 5 pelo movimento de A até B. Quando a economia alcança o braço estável do novo equilíbrio de longo prazo, não o estoque de capital começa a cair gradualmente enquanto a utilidade marginal da renda sobe. Esse movimento é representado pela trajetória de B até C, que representa o novo estado estacionário da economia, no qual o estoque de capital e o consumo privado são ambos menores.

### *Choque em $\beta$*

A dinâmica de ajustamento para a proporção do produto destinada ao teto do superávit primário comporta-se exatamente como no caso de um aumento em  $\alpha$ , portanto a Figura 5 e sua respectiva análise, aplica-se também a este caso.

### *Choques Temporários*

#### *Choque em $g$*

Nessa seção será analisada a resposta das variáveis endógenas do modelo a aumento temporário dos gastos públicos totais. Mais precisamente será considerado o seguinte cenário: o governo aumenta o gasto público total em  $t = 0$ , e retorna ao nível inicial na data  $t = T$ . Sob hipótese de perfeita previsão os agentes antecipam o retorno do gasto total ao seu nível inicial, e, portanto não existem efeitos de longo-prazo. Haverá, entretanto, uma mudança instantânea na utilidade marginal da renda, em uma intensidade menor do que a observada nos casos de aumento permanente, uma vez que os agentes descontam a mudança temporária. Portanto existe somente dinâmica de transição, não havendo mudança no equilíbrio de longo-prazo.

Nesta seção será apresentada uma solução geométrica para os fatos descritos acima e no Apêndice A4 a solução analítica. A Figura 6 abaixo, mostra a solução geométrica.

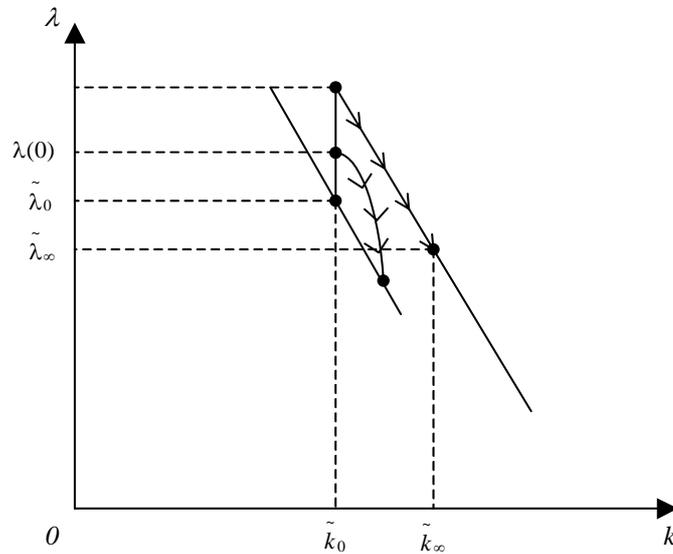


Figura 6: Transição - Choque Temporário em  $g$

Note que, de acordo com a Figura 6, não existe efeitos de longo prazo no caso de choque temporários apenas dinâmica transicional. Isto decorre do fato que, em modelo de previsão perfeita os agentes antecipam que o governo vai retomar o nível de gastos inicial em alguma data futura, e portanto todo efeito é puramente transitório. Especificamente, o movimento inicial é o *jump* na utilidade marginal da riqueza, só que desta vez os agentes descontam o efeito temporário do parâmetro de política e, portanto, o jump em  $\lambda$  não chega a alcançar o novo braço estável mas se estabelece em algum ponto como o ponto B na Figura 6. A partir do ponto B a economia converge de volta ao seu estado estacionário inicial representado pelo ponto A.

A análise de choques temporários para os demais parâmetros de política seguem exatamente o mesmo raciocínio empregado na análise acima, sendo, portanto, desnecessário detalhar as análises.

Cabe notar que análise de choques fiscais sob regime de déficit nominal proporcional ao produto também segue exatamente os mesmos argumentos utilizados nesta seção. As únicas observações a serem feitas é que  $\delta$  entra no lugar do parâmetro  $\beta$ , e que ao invés de aumentos,  $\delta$  sofre reduções.

## 2.5 Análise de Bem-Estar

Nesta seção serão realizadas análises sobre os efeitos de mudanças nos parâmetros de política sobre o bem-estar social representada pela utilidade do agente representativo. A análise será conduzida em duas etapas, a saber: na primeira, serão analisados os efeitos dos parâmetros de política  $g$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , sobre a trajetória da utilidade instantânea do agente representativo. Para isto, compare-se o bem estar no período inicial com o bem estar no equilíbrio de estado estacionário; na segunda, a mesma análise é realizada, mas utilizando a utilidade total descontada do agente representativo<sup>31</sup>.

Adicionalmente, realizam-se também comparações de bem estar entre os regimes de política de superávit primário como proporção do PIB e déficit nominal zero.

### 2.5.1 Análise da Trajetória da Utilidade Instantânea

Inicialmente, a análise é feita sob a hipótese de superávit primário. Assim, denote por,  $U(t) = u(c(t), l(t)) + v(g_c)$ , a utilidade instantânea do agente representativo no instante,  $t$ . Diferenciando,  $U(t)$ , com respeito a,  $g$ , obtém-se:

$$\frac{\partial U(t)}{\partial g} = u_c \left[ \frac{\partial c(t)}{\partial g} + \frac{u_l}{u_c} \frac{\partial l(t)}{\partial g} \right] + \alpha v'(g_c) \quad (2.36)$$

Substituindo as equações (2.9) e (2.10) na expressão (2.36) chega-se a:

$$\frac{\partial U(t)}{\partial g} = u_c \left[ \frac{\partial c(t)}{\partial g} - (1 - \beta) f_l h \frac{\partial l(t)}{\partial g} \right] + \alpha v'(g_c) \quad (2.37)$$

Agora, observe que diferenciando a equação (2.3) com respeito a,  $g$ , tem-se:

---

<sup>31</sup>Existem várias maneiras de abordar este problema. O caminho utilizado neste trabalho segue aproximadamente o que é feito no trabalho de Turnovsky e Fisher (1995). Entretanto, Stockman (2002), por exemplo, utiliza a teoria dos ciclos reais de negócios para analisar os efeitos de quatro tipos de ajuste fiscal sobre bem-estar.

$$\frac{\partial c(t)}{\partial g} = f_k h \frac{\partial k(t)}{\partial g} + f_l h \frac{\partial l(t)}{\partial g} + (1 - \alpha) h' f - \frac{\partial \dot{k}(t)}{\partial g} - 1 \quad (2.38)$$

Substituindo-se a equação (2.38) em (2.37), segue-se que:

$$\frac{\partial U(t)}{\partial g} = \alpha v'(g_c) - u_c + u_c \left[ f_k h \frac{\partial k(t)}{\partial g} - \frac{\partial \dot{k}(t)}{\partial g} + \beta f_l h \frac{\partial l(t)}{\partial g} \right] + (1 - \alpha) h' f \quad (2.39)$$

Na vizinhança do estado estacionário a trajetória do estoque de capital,  $k(t)$ , é descrita pela equação (2.20). Substituindo as derivadas de,  $k(t)$ , e,  $\dot{k}(t)$ , com respeito a,  $g$ , encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t)}{\partial g} = & \alpha v'(g_c) - u_c + u_c [f_k h (1 - \exp(\mu_1 t)) + \mu_1 \exp(\mu_1 t)] \frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} \\ & + \beta u_c f_l h \frac{\partial l(t)}{\partial g} + (1 - \alpha) h' f \end{aligned} \quad (2.40)$$

Por inspeção da equação (39), observa-se que o efeito de  $g$  sobre  $U(t)$  pode se dividido nos seguintes fatores:

- 1)  $\alpha v'(g_c) - u_c$ , que representa o efeito de *crowding-out* sobre o consumo privado;
- 2)  $u_c [f_k h (1 - \exp(\mu_1 t)) + \mu_1 \exp(\mu_1 t)] \frac{\partial \tilde{k}}{\partial g}$ , que representa o efeito dos gastos públicos totais sobre a acumulação intertemporal do capital (investimento privado). A contribuição deste efeito para o bem estar é ambígua;
- 3)  $\beta u_c f_l h \frac{\partial l(t)}{\partial g}$ , que representa o efeito dos gastos do governo sobre as decisões privadas da oferta de mão-de-obra. Este efeito contribui positivamente para o aumento de bem estar desde que,  $\beta u_c f_l h \partial l(t) / \partial g > 0$ ;

- 4)  $(1 - \alpha)h'f$ , que representa o efeito direto do aumento dos gastos do governo sobre o produto. Note que esse efeito é positivo, uma vez que para,  $\alpha \in (0, 1)$ , um aumento dos gastos públicos aumenta os gastos em infraestrutura que, por sua vez, tem impacto positivo sobre o produto.

A contribuição destes fatores pode melhor ser identificada quando são comparados os efeitos de um aumento dos gastos públicos sobre o bem estar na data zero e sobre o bem estar no equilíbrio de estado estacionário. Avaliando a equação (2.40) em,  $t = 0$ , chega-se a:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial g} = \alpha v'(g_c) - u_c + u_c \mu_1 \frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} + \beta u_c f_l h \frac{\partial l(0)}{\partial g} + (1 - \alpha)h'f \quad (2.41)$$

onde  $l(0) = l(\lambda(0), k_0, g, \alpha, \beta)$ .

De (2.35) tem-se que,  $\partial \tilde{k} / \partial g > 0$ , e pode ser mostrado que,  $\partial l(0) / \partial g < 0$ , portanto, desprezando os termos  $\alpha v'(g_c) - u_c$  e  $(1 - \alpha)h'f$ , que são apenas fatores que escalonam a utilidade instantânea, verifica-se que,  $\partial U(0) / \partial g < 0$ .

Por outro lado, no estado estacionário a expressão (2.37) produz:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial g} = u_c \left[ \frac{\partial \tilde{c}}{\partial g} - (1 - \beta) f_l h \frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} \right] + \alpha v'(g_c) \quad (2.42)$$

onde  $\tilde{c} = c(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta)$  e  $\tilde{l} = l(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta)$ .

Diferenciando a expressão (2.16) com respeito a  $g$  no equilíbrio de estado estacionário e substituindo o resultado na expressão (2.42) obtém-se:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial g} = \alpha v'(g_c) - u_c + u_c f_k h \frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} + \beta u_c f_l h \frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} + (1 - \alpha)h'f \quad (2.43)$$

Portanto, novamente excluindo-se os termos,  $\alpha v'(g_c) - u_c$ , e,  $(1 - \alpha)h'f$ , concluí-se que,  $\partial \tilde{U} / \partial g > 0$ , pois  $\partial \tilde{l} / \partial g > 0$ . Em resumo, o aumento dos gastos públicos reduz a utilidade inicialmente, mas possui efeito positivo sobre o bem-estar no equilíbrio de estado estacionário<sup>32</sup>.

---

<sup>32</sup>Observe que  $\partial \tilde{l} / \partial g = l_\lambda \partial \tilde{\lambda} / \partial g + l_k \partial \tilde{k} / \partial g + l_g$ , portanto  $\partial \tilde{l} / \partial g > 0$ .

Com respeito à variação na composição dos gastos públicos, procede-se de modo idêntico à análise feita anteriormente. Desta forma, para,  $t = 0$ , e para o equilíbrio de estado estacionário, obtém-se, respectivamente:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial \alpha} = (v' - fh')g + u_c \mu_1 \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \alpha} + \beta u_c f_l h \frac{\partial l(0)}{\partial \alpha} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \alpha} = (v' - fh')g + u_c f_k h \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \alpha} + \beta u_c f_l h \frac{\partial \tilde{l}}{\partial \alpha} \quad (2.45)$$

Desprezando o termo de escalonamento,  $(v' - fh')g$ , dado que,  $\partial \tilde{k}/\partial \alpha < 0$ , e que,  $\partial l(0)/\partial \alpha > 0$ , conclui-se que,  $\partial U(0)/\partial \alpha > 0$ . Por outro lado,  $\partial \tilde{U}/\partial \alpha < 0$ , pois  $\partial \tilde{l}/\partial \alpha < 0$ . Novamente observa-se que existe um trade-off intertemporal do bem-estar social, agora com respeito a regra de composição do orçamento público<sup>33</sup>.

A intuição desse resultado é que o aumento da proporção do gasto total do governo destinada ao gasto em consumo, aumenta o consumo privado no estágio inicial aumentando, assim, o bem-estar. Por outro lado, no estado estacionário, um aumento de  $\alpha$ , aumenta a utilidade marginal da riqueza e como consequência o consumo privado de estado estacionário. Em resumo, o aumento dos gastos do governo em custeio reduz o bem estar no equilíbrio de estado estacionário.

A análise do impacto da proporção do produto destinado ao superávit primário,  $\beta$ , dentro do mesmo raciocínio, é sintetizada nas seguintes expressões:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial \beta} = u_c \mu_1 \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \beta} + \beta u_c f_l h \frac{\partial l(0)}{\partial \beta} > 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \beta} = u_c f_k h \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \beta} + \beta u_c f_l h \frac{\partial \tilde{l}}{\partial \beta} < 0 \quad (2.47)$$

Portanto, a análise e as conclusões obtidas para,  $\alpha$ , são as mesmas para este caso.

No caso do déficit nominal proporcional ao PIB, os impactos dos parâmet-

---

<sup>33</sup>Para comprovar que  $\partial \tilde{l}/\partial \alpha > 0$  use a nota 8.

ros de política sobre utilidade instantânea no início do período e no equilíbrio de estado estacionário são os mesmos. No entanto, deve ser lembrado que as intensidades são diferentes pois no lugar de,  $\beta$ , deve-se colocar o parâmetro  $\delta$ .

### 2.5.2 Análise da Utilidade Total Descontada

Para analisar os efeitos de mudanças nos parâmetros de política sobre a utilidade total descontada, será considerada a trajetória estável da utilidade instantânea linearizada na vizinhança de seu estado estacionário. Segundo Turnovsky e Fisher (1995) e Turnovsky (1997), tem-se que:

$$U(t) \cong \tilde{U} + (U(0) - \tilde{U}) \exp(\mu_1 t)$$

Denotando por,  $W$ , a utilidade total descontada, tem-se que:

$$W = \int_0^{\infty} [\tilde{U} + (U(0) - \tilde{U}) \exp(\mu_1 t)] \exp(-\rho t) dt$$

Implicando que:

$$W = \frac{\tilde{U}}{\rho} + \frac{(U(0) - \tilde{U})}{\rho - \mu_1} \quad (2.48)$$

Na equação (2.48) o termo,  $\tilde{U}/\rho$ , representa o bem-estar instantâneo descontado pela taxa de desconto intertemporal,  $\rho$ . Este termo expressa o nível de bem-estar resultante caso o longo prazo fosse alcançado instantaneamente. O termo,  $(U(0) - \tilde{U}) / (\rho - \mu_1)$ , representa o ajustamento até o equilíbrio de longo-prazo, já que numa economia com acumulação de capital, o estado estacionário é alcançado gradualmente.

Diferenciando a expressão (2.48), com respeito a,  $g$ , obtém-se o impacto dos gastos públicos sobre o bem-estar social<sup>34</sup> ao longo de todo o horizonte de planejamento, de acordo com a seguinte expressão:

---

<sup>34</sup>Em modelos do tipo agente representativo a utilidade total descontada pode ser utilizada como índice de bem-estar social.

$$\frac{\partial W}{\partial g} = -\frac{\mu_1}{\rho(\rho - \mu_1)} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial g} + \frac{1}{(\rho - \mu_1)} \frac{\partial U(0)}{\partial g} \quad (2.49)$$

A substituição das expressões (2.44) e (2.45) em (2.49) resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial g} = & \frac{\alpha v'(g_c) - u_c}{\rho} + \frac{(1 - \alpha)h'f}{\rho} - \left[ \frac{\beta}{(1 - \beta)(\rho - \mu_1)} \right] u_c \mu_1 \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \beta} \\ & + \frac{\beta u_c f_l h}{(\rho - \mu_1)} \left[ \frac{\partial l(0)}{\partial g} - \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Observe que na expressão (2.50), além dos efeitos de *crowding-out* sobre o consumo privado, do efeito produtivo dos gastos em infraestrutura e do efeito sobre o investimento privado, o efeito dos gastos públicos totais sobre o bem-estar social também depende do efeito intertemporal sobre as decisões privadas de oferta de mão-de-obra.

Outra implicação interessante de (2.50) é que, se o governo abandona a política de superávit primário fazendo  $\beta = 0$ , então  $\alpha = (h'f - u_c) / (h'f - v')$ , é a regra de composição do orçamento público que maximiza o bem-estar social. Note que, se o agente representativo avalia consumo privado e consumo público igualmente, isto é, se  $u_c = v'$ , então a expressão obtida para a regra ótima de composição implica que  $\alpha = 1$ . Neste caso a regra ótima implica que todo o gasto público deve ser alocado em gastos em custeio, ou seja,  $g = g_c$ .

As derivações dos efeitos de  $\alpha$  e  $\beta$  seguem a mesma lógica empregada acima. Os resultados não são relevantes para o principal objetivo nesta seção de análise de bem-estar que é comparar bem-estar no dois regimes, portanto os detalhes serão omitidos. Também serão omitidas as análises considerando o regime de déficit nominal zero por serem exatamente as mesmas que foram feitas nesta seção bastando substituir  $\beta$  por  $\delta$ .

### 2.5.3 Bem-Estar nos Regimes de Superávit Primário e Déficit Nominal Zero

Nesta seção compara-se o bem estar social sob os dois regimes de política de ajustamento fiscal: superávit primário e déficit nominal zero. Será adotada a seguinte notação:  $U(t)^{SP}$ , denota a utilidade instantânea do agente representativo quando o regime de ajuste é superávit primário;  $W^{SP}$ , denota o bem-estar social sob superávit primário;  $U(t)^{DN}$ , é a utilidade instantânea sob déficit nominal zero; finalmente,  $W^{DN}$ , representa o bem-estar social sob o regime de déficit nominal zero.

Isto posto, desde que,  $U(t)^{SP} = u(c(\beta, t), l(\beta, t)) + v(g_c)$ , sua diferenciação com respeito a,  $\beta$ , produz a seguinte expressão:

$$\frac{\partial U(t)^{SP}}{\partial \beta} = u_c \frac{\partial c(t)}{\partial \beta} + u_l \frac{\partial l(t)}{\partial \beta} \quad (2.51)$$

Note que a expressão do lado direito de (2.51) é positiva, uma vez que,  $u_c > 0$ ,  $\partial c(t)/\partial \beta > 0$ ,  $u_l < 0$  e  $\partial l(t)/\partial \beta < 0$ . Portanto  $U(t)^{SP}$  cresce quando  $\beta$  aumenta.

No caso de déficit nominal zero, ou seja,  $\delta = 0$ , tem-se  $U(t)^{DN} = u(c(0, t), l(0, t)) + v(g_c)$ . Portanto, chega-se a seguinte relação:

$$U(t)^{SP} = u(c(\beta, t), l(\beta, t)) + v(g_c) > u(c(0, t), l(0, t)) + v(g_c) = U(t)^{DN} \quad (2.52)$$

Ou seja, para  $t$  finito a utilidade instantânea é maior sob o regime de superávit primário quando comparada a utilidade instantânea sob regime de déficit nominal zero. Em particular tem-se que:

$$U(0)^{SP} > U(0)^{DN} \quad (2.53)$$

Em outras palavras, a relação em (2.53) mostra que, o regime de ajuste fiscal baseado na acumulação sucessivas de superávits primários numa proporção,  $\beta$ , do produto, inicialmente é preferível ao regime baseado em déficit nominal zero. Entretanto, é importante considerar essa mesma comparação

em relação aos resultados de estado estacionário, ou seja, cabe questionar: se por um lado o bem-estar inicial é maior sob regime de superávit primário, o que se pode afirmar com respeito ao longo prazo ? Para responder a essa questão observe que:

$$\tilde{U}^{SP} = u(\tilde{c}(\beta), l(\beta)) + v(g_c) \quad (2.54)$$

e

$$\tilde{U}^{DN} = u(\tilde{c}(0), l(0)) + v(g_c) \quad (2.55)$$

De acordo com a expressão (2.47) obtida na seção 2.5.1 tem-se que:

$$\frac{\partial \tilde{U}^{SP}}{\partial \beta} = u_c f_k h \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \beta} + \beta u_c f_l h \frac{\partial \tilde{l}}{\partial \beta} \quad (2.56)$$

Para seguir com a análise, considere a expansão de Taylor de primeira ordem da expressão (2.54) para  $\beta$  próximo de zero. O procedimento resulta em:

$$\tilde{U}^{SP} \cong u(\tilde{c}(0), l(0)) + v(g_c) + \left( \frac{\partial \tilde{U}^{SP}}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \right) \beta \quad (2.57)$$

Utilizando as expressões (2.55) e (2.53) na equação (2.57), obtém-se:

$$\tilde{U}^{SP} - \tilde{U}^{DN} = \beta u_c f_k h \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \beta} < 0 \quad (2.58)$$

Portanto, como mostra a expressão (2.58) acima, no longo prazo, para valores de  $\beta$  suficientemente pequenos, a utilidade do agente é maior sob regime de déficit nominal zero relativamente ao regime de superávit fiscal. Assim sendo, observa-se novamente um *trade-off* entre os regimes quanto as suas consequências no curto e no longo prazo. Como já foi salientado quanto ao consumo e ao investimento privados, o regime de déficit nominal zero é mais severo à economia no curto prazo, mas conduz a níveis maiores dessas quantidades no longo prazo. Com relação à utilidade instantânea ocorre algo semelhante: no curto prazo o regime de superávit primário é preferível mas no longo prazo o regime de déficit nominal zero é melhor.

Para avaliar bem estar social, e conveniente utilizar o fluxo descontado das utilidades instantâneas do agente representativo. Como já foi visto o bem estar social pode portanto ser expresso como:

$$W = \frac{\tilde{U}}{\rho} + \frac{(U(0) - \tilde{U})}{\rho - \mu_1}$$

Usando a notação indicada no começo da seção, tem-se por construção que:

$$W^{SP} = -\frac{\mu_1}{\rho(\rho - \mu_1)}\tilde{U}^{SP} + \frac{1}{(\rho - \mu_1)}U(0)^{SP} \quad (2.59)$$

$$W^{DN} = -\frac{\mu_1}{\rho(\rho - \mu_1)}\tilde{U}^{DN} + \frac{1}{(\rho - \mu_1)}U(0)^{DN} \quad (2.60)$$

Portanto a diferença entre as expressões (2.59) e (2.60) resulta na seguinte equação:

$$W^{SP} - W^{DN} = -\frac{\mu_1}{\rho(\rho - \mu_1)}(\tilde{U}^{SP} - \tilde{U}^{DN}) + \frac{1}{(\rho - \mu_1)}(U(0)^{SP} - U(0)^{DN}) \quad (2.61)$$

Observe que, a princípio, o sinal da expressão (2.61) é ambíguo, já que, como foi visto anteriormente, a utilidade instantânea no início é maior sob superávit primário, isto é,  $U(0)^{SP} - U(0)^{DN} > 0$ , mas quando se considera valores em estado estacionário e  $\beta$  suficientemente pequeno então a utilidade instantânea é maior sob déficit nominal zero, ou seja,  $\tilde{U}^{SP} - \tilde{U}^{DN} < 0$ . Portanto não se pode tirar conclusões imediatas sobre que regime de ajuste fiscal providencia um bem estar social maior.

A questão central é que a expressão (2.61), envolve, simultaneamente, julgamentos de curto e longo prazo em termos da utilidade do agente representativo. Assim o resultado líquido depende de qual efeito, se de curto ou de longo prazo, é predominante.

Intuitivamente, pode-se esperar que em se tratando de sociedades com baixa taxa de impaciência ( $\rho$  pequeno) deveriam prevalecer os efeitos de longo prazo, e o inverso para o caso em que a taxa de impaciência seja muito alta.

De fato, tomando-se o limite da expressão (2.61) com  $\rho$  tendendo para zero verificasse que o segundo termo converge para  $-(1/\mu_1) (U(0)^{SP} - U(0)^{DN})$ , que é positivo, por outro lado, o primeiro termo do lado direito decresce ilimitadamente já que  $\tilde{U}^{SP} - \tilde{U}^{DN} < 0$  e  $-\mu_1/[\rho(\rho - \mu_1)] \rightarrow \infty$ . Deste modo concluí-se que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (W^{SP} - W^{DN}) < 0 \quad (2.62)$$

A expressão (2.62) confirma o que se espera intuitivamente, ou seja, sociedades para as quais a taxa de impaciência é baixa, atribuem um peso maior aos efeitos de longo prazo, o que por sua vez, favorece a implantação do regime de ajuste fiscal baseado no déficit nominal zero, para o qual os benefícios de longo prazo são maiores.

O mesmo não ocorre quando se considera uma taxa de impaciência alta, pois fazendo-se,  $\rho = 1$ , em (57) e tomando,  $\mu_1 = -|\mu_1|$ , obtém-se:

$$W^{SP} - W^{DN} = \frac{|\mu_1|}{(1 + |\mu_1|)} (\tilde{U}^{SP} - \tilde{U}^{DN}) + \frac{1}{(1 + |\mu_1|)} (U(0)^{SP} - U(0)^{DN}) \quad (2.63)$$

Logo a expressão (2.63) novamente impossibilita uma conclusão direta sobre que regime de ajuste conduz um nível de bem estar social maior. Entretanto, é interessante notar que, neste contexto, o efeito líquido sobre bem-estar, é representado por uma média ponderada das diferenças entre níveis de utilidade instantânea iniciais e entre os níveis de utilidade instantânea de estado estacionário, onde o fator de ponderação depende da magnitude da velocidade de convergência para o estado estacionário da economia.

Supondo o caso limite, em que a economia converge instantaneamente para o equilíbrio de estado estacionário, ou seja  $|\mu_1| \rightarrow \infty$ , tem-se que, o diferencial entre os níveis de bem estar social em (2.63), só leva em consideração efeitos de longo prazo, já que a economia despreza completamente efeitos iniciais, isto porque o fator que pondera os diferenciais de longo prazo tende para a unidade, e portanto sob a hipótese de que,  $\beta$ , é suficientemente pequeno, concluí-se que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1, |\mu_1| \rightarrow \infty} (W^{SP} - W^{DN}) < 0$$

No outro extremo, considerando-se que a economia permaneça eternamente em suas condições iniciais, ou seja  $|\mu_1| = 0$ , então sob a hipótese de que a taxa de impaciência é máxima, o diferencial entre os níveis de bem estar social em (2.63), só leva em consideração efeitos iniciais, uma vez que, neste caso, o fator que pondera os efeitos iniciais tende para unidade. Com isso concluí-se que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1, |\mu_1| \rightarrow 0} (W^{SP} - W^{DN}) > 0$$

Note que os resultados acima sugerem que políticos que priorizam resultados de curto prazo tenderam a adotar o regime de superávit primário como instrumento de ajuste fiscal. Essa escolha entretanto, pode levar a uma piora no bem-estar social, caso a sociedade em questão possua uma taxa de impaciência muito baixa. Desta forma, o regime de ajuste fiscal, como parâmetro de política, pode sofrer interferência de ciclos políticos, na medida em que, a adoção do regime de déficit nominal zero, embora melhor no longo prazo, pode conduzir a grandes sacrifícios no curto prazo<sup>35</sup>.

## 2.6 Sustentabilidade da Dívida Pública

Nesta seção será discutido em detalhes a questão da sustentabilidade da dívida interna levando-se em consideração os dois regimes de ajuste fiscal, começando pelo regime de superávit primário. Em seguida será feita uma comparação entre as duas políticas apontando-se as principais vantagens e desvantagens relativas<sup>36</sup>.

---

<sup>35</sup>Sobre ciclos políticos e ajuste fiscal veja Alesina e Drazen (1991a), Alesina e Drazen (1991b) e Drazen (2002).

<sup>36</sup>Esta seção utiliza alguns dos argumentos apresentados em Blanchard (1990) e Blanchard et.al. (1990).

### 2.6.1 Dívida Pública no Regime de Superávit Primário Proporcional ao Produto

A dinâmica da dívida pública,  $b(t)$ , num determinado período de tempo,  $t$ , é definida pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{b}(t) = r(t)b(t) - (g(t) - T(t)) \quad (2.64)$$

onde  $r(t)$  é a taxa de juros que incide sobre o estoque da dívida  $b(t)$ .

Sob a hipótese de que o governo mantém um superávit primário como proporção do produto, ou seja,  $T(t) - g(t) = \beta y(t)$ , tem-se substituindo esta última expressão em (2.64) que a dívida pública é governada pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{b}(t) - r(t)b(t) = -\beta y(t) \quad (2.65)$$

Dividindo ambos os lados de (2.65) por  $y(t)$ , tem-se:

$$\frac{\dot{b}(t)}{y(t)} - r(t)\frac{b(t)}{y(t)} = -\beta \quad (2.66)$$

Denotando por,  $D(t) = b(t)/y(t)$ , a relação dívida/produto no período,  $t$ , e supondo que o produto da economia cresça a uma taxa instantânea,  $\gamma(t)$ , a equação (2.66) implica na seguinte dinâmica para a relação  $D(t)$ :

$$\dot{D}(t) + [\gamma(t) - r(t)] D(t) = -\beta \quad (2.67)$$

A solução da equação diferencial (2.67) fornece a seguinte trajetória da relação dívida/produto:

$$D(t) = D(0) \exp \left\{ - \int_0^t [\gamma(s) - r(s)] ds \right\} - \beta \int_0^t \exp \left\{ - \int_{\tau}^t [\gamma(s) - r(s)] ds \right\} d\tau \quad (2.68)$$

onde,  $D(0) = b_0/y(0)$ , denota a relação dívida/produto inicial. Observe que a condição para que esta trajetória não seja explosiva é que a taxa instantânea de crescimento do produto,  $\gamma(s)$ , seja maior que a taxa de juros,  $r(s)$ , que

incide sobre o estoque da dívida pública.

Para efeitos de simplificação, suponha que,  $\bar{\gamma}$ , e,  $\bar{r}$ , com  $\bar{\gamma} > \bar{r}$ , sejam, respectivamente, as taxas médias de crescimento do produto e dos juros de forma que,  $\bar{\gamma} = t^{-1} \int_0^t \gamma(s) ds$ , e  $\bar{r} = t^{-1} \int_0^t r(s) ds$ . Substituindo estes valores em (2.68), obtém-se:

$$D(t) = \left[ D(0) + \frac{\beta}{\bar{\gamma} - \bar{r}} \right] \exp [ - (\bar{\gamma} - \bar{r}) t ] - \frac{\beta}{\bar{\gamma} - \bar{r}} \quad (2.69)$$

Observe que a trajetória de,  $D(t)$ , em (2.69), estabelece que, para um dado valor de  $\beta$ , a manutenção de um superávit primário nessa proporção, conduziria, no longo-prazo, a uma dívida consolidada negativa de tamanho  $[\beta / (\bar{\gamma} - \bar{r})] \tilde{y}$ , onde,  $\tilde{y}$ , é o produto de longo-prazo. Isto sugere que em algum período de tempo finito, a manutenção sistemática do superávit primário nesta proporção, conduziria a liquidação total da dívida pública consolidada. Evidentemente, que quanto maior o valor de,  $\beta$ , mais rapidamente a dívida convergirá para zero.

O período de tempo,  $t'$ , necessário para liquidar a dívida pode ser calculado encontrando um valor para,  $t$ , de forma que,  $D(t) = 0$  em (66). Esse período de tempo é igual a:

$$t' = \frac{\ln \{ 1 + [(\bar{\gamma} - \bar{r}) D(0) / \beta] \}}{(\bar{\gamma} - \bar{r})} \quad (2.70)$$

A título de exemplo, suponha que no período sob consideração, espere-se que a taxa de crescimento do produto seja em média 4% ao ano e que a taxa de juros seja de 2%. Suponha ainda que na data inicial a relação dívida/produto seja de 50%. Finalmente, supondo que o governo mantenha um superávit primário de 4% do produto, o período de tempo,  $t'$ , seria de aproximadamente 11 anos.

## 2.6.2 Dívida Pública no Regime de Déficit Nominal Zero

Nesta seção será analisada a sustentabilidade da dívida interna sob a hipótese de que o governo adota uma política gradual de sucessivas reduções do déficit nominal como proporção do produto.

Será suposto que em todo  $t$  administra um déficit nominal que é uma proporção  $\delta(t) \in (0, 1)$  do produto. Desta forma tem-se que  $g(t) - T(t) + r(t)b(t) = \delta(t)y(t)$ . Usando esta fato em (2.64) chega-se a:

$$\dot{b}(t) = \delta(t)y(t) \quad (2.71)$$

onde, será admitido que  $\dot{\delta}(t) < 0$  para qualquer  $t$ . Ou seja, o governo mantém déficit nominal numa proporção do produto que decresce no tempo. Mais especificamente, isto pode ser modelado fazendo-se,  $\dot{\delta}(t)/\delta(t) = -\phi$ , onde,  $\phi > 0$ .

Dividindo cada termo de (2.71) por,  $y(t)$ , e lembrando que a taxa de crescimento instantânea do produto é,  $\gamma(t)$ , as considerações acima implicam que a dinâmica da relação dívida/produto é governada pela equação diferencial a seguir:

$$\dot{D}(t) + \gamma(t)D(t) = \delta_0 \exp(-\phi t) \quad (2.72)$$

onde  $\delta_0$  é a proporção inicial. A solução da equação (2.72) é dada por:

$$D(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \gamma(s) ds \right\} \left[ D(0) + \delta_0 \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^\tau [\phi - \gamma(s)] ds \right\} d\tau \right] \quad (2.73)$$

Observe que a condição para que a relação dívida/produto não seja explosiva é que a taxa de decrescimento da proporção do produto destinada ao déficit nominal,  $\phi$ , seja maior do que a taxa de crescimento do produto,  $\gamma(s)$ . Considerando a taxa média de crescimento do produto,  $\bar{\gamma}$ , a solução em (2.73) será dada por:

$$D(t) = D(0) \exp(-\bar{\gamma}t) + \frac{\delta_0}{\phi - \bar{\gamma}} \exp(-\bar{\gamma}t) - \frac{\delta_0}{\phi - \bar{\gamma}} \exp(-\phi t) \quad (2.74)$$

implicando que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$ .

Ou seja, diferentemente do que ocorre com a dívida interna no regime de superávit primário proporcional ao produto, a dívida pública sob déficit

nominal só será liquidada assintoticamente.

## 2.7 Conclusões

A proposta inicial desse trabalho era de analisar quais são os efeitos macroeconômicos da adoção dos regimes de ajuste fiscal que estão, atualmente, no cerne do debate atualmente. Para tanto utilizou-se um modelo de equilíbrio geral do tipo agente representativo que é uma variante do modelo construído por Turnvosky e Fisher (1995).

Em todos os resultados obtidos no trabalho, observa-se que existe um claro trade-off intertemporal entre o regime de superávit primário e o regime de déficit nominal zero. Como foi mostrado, o regime de déficit nominal zero exige reduções iniciais de consumo privado, que podem ser vistas como o sacrifício do lado real, vis-a-vis, o esforço fiscal necessário para a implantação de tal regime.

Com respeito ao equilíbrio de longo prazo, a situação se inverte e observa-se que, tanto consumo quanto investimento privados, são maiores sob déficit nominal zero relativamente às alocações de equilíbrio observadas no regime de superávit primário.

Uma consequência natural destes fatos é que, inicialmente, o regime de déficit nominal zero geral um nível de bem-estar instantâneo é menor do que o observado sob regime de superávit primário. No longo prazo, entretanto, o bem-estar instantâneo é maior sob o regime de déficit nominal zero.

Assim, como ficou comprovado no texto, se a utilidade total descontada for utilizada como índice de bem-estar social, então efeito líquido de uma comparação dos dois regimes em termos de bem-estar social, depende de efeitos iniciais e de estado estacionário da utilidade instantânea do agente representativo. Especificamente viu-se que se a sociedade atribui uma ponderação suficientemente alta aos efeitos de longo prazo, então se a proporção do produto destinada ao superávit primário for suficientemente pequena, o bem estar social será melhor sob regime de déficit nominal zero.

Noutra direção se a sociedade em questão atribui uma baixa ponderação ao futuro então, se a velocidade de convergência para o estado estacionário

da economia for suficientemente alta então novamente o bem estar social será maior sob regime de déficit nominal zero. Se, entretanto, a velocidade de convergência for muito baixa então o regime de superávit primário proporciona um nível de bem estar social maior.

Finalmente, foi desenvolvido também alguma discussão sobre sustentabilidade da dívida pública e sobre a performance fiscal de cada um dos regimes de ajuste fiscal analisados. Entre os resultados encontrados, viu-se que a condição para que a relação dívida/produto não seja explosiva sob regime de superávit primário é que a taxa de crescimento do produto seja maior do que a taxa de juros, um resultado recorrente na literatura de finanças públicas. Por outro lado, no regime de déficit nominal que seja proporcional ao produto e decaia no tempo exige que a taxa de decrescimento do déficit nominal seja maior do que a taxa de crescimento do produto, isto durante a transição até zerar, completamente o déficit nominal. Com relação a performance fiscal, foi notado que o regime de superávit fiscal pode, eventualmente, liquidar a dívida consolidada mais rapidamente do que o regime de déficit nominal decrescente até atingir-se valor zero.

Uma extensão do trabalho deveria considerar a inclusão de moeda no modelo construído. Isto sem dúvida alguma traria um grau de realismo bastante satisfatório sobretudo quando se tem a economia brasileira em mente, uma vez que toda a discussão refere-se a qual seria a melhor âncora fiscal à política monetária vigente no país<sup>37</sup>.

## Apêndice

### Apêndice A1: O Equilíbrio Dinâmico é do Tipo Sela

As equações (18) e (19) formam o sistema dinâmico do modelo, linearizado em torno do estado estacionário. Esse sistema pode ser representado como segue:

---

<sup>37</sup>Woodford (1996) , utilizando um modelo em tempo discreto, oferece uma discussão bastante rica sobre qual seria o papel efetivo do ajuste fiscal em políticas de estabilização de preços.

$$\dot{\mathbf{X}} = \Omega (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) \quad (\text{A1.1})$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} k \\ \lambda \end{bmatrix} \text{ e } \Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ -\tilde{\lambda}(1-\beta)h\omega_{21} & -\tilde{\lambda}(1-\beta)h\omega_{22} \end{bmatrix}$$

Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  os autovalores da matriz  $\Omega$ . Das relações de Girard tem-se que:

$$\mu_1\mu_2 = \det(\Omega) = -\tilde{\lambda}(1-\beta)h(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21})$$

portanto  $\mu_1\mu_2 < 0$ , ou seja, os autovalores do sistema possuem sinais contrários com,  $\mu_1 < 0$  e  $\mu_2 > 0$ . Assim o equilíbrio de longo prazo é caracterizado por um ponto de sela.

Tem-se ainda que:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= \text{tr}(\Omega) = \omega_{11} - \tilde{\lambda}(1-\beta)h\omega_{22} \\ &= f_k h + f_l l_k h - c_k - \tilde{\lambda}(1-\beta)h f_{kl} l_\lambda \\ &= f_k h + f_l l_k h + \frac{u_{cl}}{u_{cc}} l_k - \tilde{\lambda}(1-\beta)h f_{kl} l_\lambda \\ &= f_k h + (f_l h u_{cc} + u_{cl}) \frac{l_k}{u_{cc}} - \tilde{\lambda}(1-\beta)h f_{kl} \left[ \frac{-(1-\beta)f_l h u_{cc} - u_{cl}}{\Delta} \right] \\ &= f_k h + (f_l h u_{cc} + u_{cl}) \frac{l_k}{u_{cc}} - \frac{\tilde{\lambda}(1-\beta)h f_{kl} u_{cc}}{u_{cc} \Delta} [-(1-\beta)f_l h u_{cc} - u_{cl}] \\ &= f_k h + (f_l h u_{cc} + u_{cl}) \frac{l_k}{u_{cc}} + [-(1-\beta)f_l h u_{cc} - u_{cl}] \frac{l_k}{u_{cc}} \\ &= f_k h + [f_l h u_{cc} + u_{cl} - f_l h u_{cc} + \beta f_l h u_{cc} - u_{cl}] \frac{l_k}{u_{cc}} \\ &= f_k h + \beta f_l l_k h \end{aligned}$$

Usando (17) tem-se que  $f_k h = \rho/(1-\beta)$ , logo:

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{\rho}{(1 - \beta)} + \beta f_l l_k h > 0$$

implicando  $\mu_2 > |\mu_1|$ .

## Apêndice A2: Derivação e Propriedades das Equações (2.20) e (2.21)

A solução do sistema representado pela equação (A1.1) pode ser decomposta como a soma da solução homogênea mais a solução de estado estacionário. Se  $\mathbf{X}_H$  representa a solução da parte homogênea então<sup>38</sup>:

$$\mathbf{X}_H = \mathbf{Q} \exp(\Lambda t) \mathbf{A}$$

onde  $\Lambda$  é a matriz diagonal dos autovalores de  $\Omega$ ,  $\mathbf{Q}$  é a matriz cujas colunas são os autovetores de  $\Omega$ ,  $\mathbf{A}$  é um vetor de constantes arbitrárias e  $\exp(\Lambda t) = \text{diag}(\exp(\mu_1 t), \exp(\mu_2 t))$ . Utilizando autovetores normalizados<sup>39</sup>, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_H &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\mu_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\mu_2 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 \exp(\mu_1 t) + A_2 \exp(\mu_2 t) \\ A_1 q_1 \exp(\mu_1 t) + A_2 q_2 \exp(\mu_2 t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Pela definição de autovetores segue que:

$$q_i = \frac{-\tilde{\lambda}(1 - \beta)h\omega_{21}}{\tilde{\lambda}(1 - \beta)h\omega_{22} + \mu_i} = \frac{\mu_i - \omega_{11}}{\omega_{12}} \quad (\text{A2.2})$$

para  $i = 1, 2$ . Por fim, as soluções estável e instável podem ser obtidas fazendo-se, respectivamente,  $A_2 = 0$  e  $A_1 = 0$  em (A2.1), e utilizando as condições iniciais do estoque de capital. Os resultados são exatamente as equações (2.20) e (2.21) do texto.

<sup>38</sup>Para detalhes veja de la Fuente (2000) ou Hirsh e Smale (1989).

<sup>39</sup>Se  $\mathbf{q}^i$  é o autovetor associado ao  $i$ -ésimo autovalor de  $\Omega$ , então uma normalização de  $\mathbf{q}^i$  é  $\mathbf{q}^i = (1, q_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Observe que as quantidades  $q_1$  e  $q_2$  representam as inclinações das equações dos braços estável e instável, respectivamente. Portanto por inspeção de (A1.3), é imediato que  $q_1 < 0$  e  $q_2 > 0$ . Por outro lado observe que:

$$\begin{aligned} q_2 - |q_1| &= \frac{(\mu_2 - \omega_{11}) - |\mu_1 - \omega_{11}|}{\omega_{12}} \\ &= \frac{\mu_2 + \mu_1 - 2\omega_{11}}{\omega_{12}} \\ &= \frac{tr(\Omega) - 2\omega_{11}}{\omega_{12}} \end{aligned}$$

Usando o Apêndice A1, tem-se:

$$q_2 - |q_1| = \frac{-[\omega_{11} + \tilde{\lambda}(1 - \beta)h\omega_{22}]}{\omega_{12}} < 0$$

como afirmado no texto.

### Apêndice A3: Demonstração das Relações em (2.35)

Primeiramente, observe que, usando o Teorems da Função Implícita, as relações indicadas em (2.35), podem ser obtidas resolvendo-se o sistema:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ (1 - \beta)h\omega_{21} & (1 - \beta)h\omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tilde{k} \\ d\tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 1 + c_g - f_l l_g h - (1 - \alpha)fh' \\ -(1 - \beta)[f_{kl} l_g h + (1 - \alpha)f_k h'] \end{bmatrix} dg + \\ &+ \begin{bmatrix} c_\alpha + fh'g - f_l l_\alpha \\ -(1 - \beta)[f_{kl} l_\alpha - f_k h'g] \end{bmatrix} d\alpha + \begin{bmatrix} c_\beta - f_l l_\beta h \\ f_k h - (1 - \beta)f_{kl} l_\beta h \end{bmatrix} d\beta \quad (\text{A3.1}) \end{aligned}$$

Denotando por  $D$  o Jacobiano das variáveis endógenas tem-se que  $D = (1 - \beta)h(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}) > 0$ . Utilizando expansão de Laplace, os efeitos sobre  $\tilde{\lambda}$  são imediatamente verificáveis. Resta demonstrar os efeitos sobre  $\tilde{k}$ ,

que, de curso, dependem apenas dos sinais dos determinantes do Jacobiano expandido.

Os seguintes fatos serão úteis para as demonstrações que se seguem.

**Fato 1:**  $f_{kl}\omega_{12} - f_l h \omega_{22} = -f_{kl}c_\lambda$

**Fato 2:**  $f_{kl}c_\lambda + \frac{u_{cl}}{u_{cc}}\omega_{22} = \frac{1}{u_{cc}}$

**Fato 3:**  $f_k f_l - f f_{kl} \geq 0$  (decorre da homogeneidade linear de  $f$ )

Resolvendo o sistema (A3.1) e usando os Fatos 1 e 2, o efeito de  $g$  sobre  $\tilde{k}$  é obtido de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} = \frac{(1 - \beta) \left[ \left( \omega_{22} - \frac{f_{kl} l g h}{u_{cc}} \right) + (1 - \alpha) l_\lambda h h' (f_k f_l - f f_{kl}) - f_k c_\lambda \right]}{D}$$

que é positivo de acordo com o Fato 3.

Seguindo o mesmo raciocínio os efeitos de  $\alpha$  e  $\beta$  sobre  $\tilde{k}$  são obtidos de maneira similar, tal que, utilizando os Fatos 1, 2 e 3, mostra-se que:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \alpha} < 0$$

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \beta} < 0$$

## 0.1 Apêndice 4: Solução Analítica dos Choques Transitórios<sup>40</sup>

Para derivar os efeitos dos choques transitórios descritos geometricamente na seção 2.4.1, será suposto que a oferta de mão de obra é constante a fim de tornar a solução mais tratável. Sob esta hipótese o sistema dinâmico que governa a economia torna-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k h & -1/u_{cc} \\ -\tilde{\lambda} f_{kk} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - \tilde{k} \\ \lambda - \tilde{\lambda} \end{bmatrix}$$

---

<sup>40</sup>O procedimento utilizado para demonstrar os fatos a seguir pode ser encontrado em Turnovsky (1997).

Será suposto que:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{X}}_1 & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ \tilde{\mathbf{X}}_0 & \text{para } t \geq T \end{cases}$$

onde

$$\tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} k_0 \\ \tilde{\lambda}_0 \end{bmatrix}$$

### Solução do Sistema

Empregando o mesmo mecanismo utilizado no Apêndice A2, obtém-se a seguinte solução para o sistema dinâmico:

**Fase 1:**  $0 \leq t \leq T$

$$k(t) = \tilde{k}_1 + A_1 \exp(\mu_1 t) + A_2 \exp(\mu_2 t)$$

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}_1 + u_{cc}\mu_2 A_1 \exp(\mu_1 t) + u_{cc}\mu_1 A_2 \exp(\mu_2 t)$$

**Fase 2:**  $t \geq T$

$$k(t) = \tilde{k}_0 + B_1 \exp(\mu_1 t) + B_2 \exp(\mu_2 t)$$

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}_0 + u_{cc}\mu_2 B_1 \exp(\mu_1 t) + u_{cc}\mu_1 B_2 \exp(\mu_2 t)$$

Observe que existem quatro constantes a serem determinadas no sistema. Para obter uma solução explícita para o sistema, a determinação das constantes arbitrárias resultará dos seguintes critérios:

1. Condição de transversalidade:

$$B_2 = 0$$

2. Ajustamento contínuo do estoque de capital a partir de seu nível inicial:

$$k_0 = \tilde{k}_1 + A_1 + A_2$$

3. Continuidade das trajetórias para qualquer  $t > 0$ , ou seja, em  $t = T$ , as soluções devem ser iguais.

Usando os itens 1 – 3 acima, as constantes arbitrárias do sistema são dadas por:

$$A_1 = -\frac{\exp(-\mu_2 T) (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0)}{u_{cc} (\mu_2 - \mu_1)}$$

$$A_2 = \frac{\exp(-\mu_2 T) (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0)}{u_{cc} (\mu_2 - \mu_1)}$$

$$B_1 = \frac{[\exp(-\mu_1 T) - \exp(-\mu_2 T)] (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0)}{u_{cc} (\mu_2 - \mu_1)}$$

$$B_2 = 0$$

Assim a solução explícita do sistema é dada por:

**Fase 1:**  $0 \leq t \leq T$

$$k(t) = k_0 + \frac{\exp(-\mu_2 T) [\exp(\mu_2 t) - \exp(\mu_1 t)] (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0)}{u_{cc} (\mu_2 - \mu_1)}$$

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}_1 + \frac{\exp(-\mu_2 T) [\exp(\mu_2 t) - \exp(\mu_1 t)] (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0)}{(\mu_2 - \mu_1)}$$

**Fase 2:**  $t \geq T$

$$k(t) = k_0 + \frac{[\exp(-\mu_1 T) - \exp(-\mu_2 T)] \exp(\mu_1 t) (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0)}{u_{cc} (\mu_2 - \mu_1)}$$

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}_0 + \frac{[\exp(-\mu_1 T) - \exp(-\mu_2 T)] \exp(\mu_1 t) (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_0)}{(\mu_2 - \mu_1)}$$

## Referências

- [1] AGENOR, Pierre-Richard (2005), Fiscal adjustment and labor market dynamics in an open economy, *Journal of Development Economics*, 78(1), 97-125.
- [2] ALESINA, A. and A. Drazen, (1991), Why are Stabilizations Delayed ?, *American Economic Review*, 81, 1170-1188.
- [3] ALESINA, A., R. Perotti and J. Tavares (1998), The Political Economy of Fiscal Adjustments, *Brooking Papers on Economic Activity*, 1, 197-266.
- [4] ASCHAUER, D.A. (1988), The Equilibrium Approach to Fiscal Policy, *Journal of Money, Credit and Banking* 20, 41-62.
- [5] ASCHAUER, D.A. (1989), Is Public Expenditure Productive ?, *Journal of Monetary Economics* 23, 177-200.
- [6] ASCHAUER, D.A. (1990), *Why is Infrastructure Important ?*, in: A.H. Munnell, ed., *Is There a Shortfall in Public Capital Investment* (Federal Reserve Bank of Boston, MA), 21-68.
- [7] BARRO, R.J., (1990) Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, *Journal of Political Economy* 98, S103-S125.
- [8] BARRO, R.J. (1991), Economic Growth in a Cross Section of Countries, *Quarterly Journal of Economics*, 106, 407-443.
- [9] BAXTER, M. and R.G. King (1993), Fiscal Policy in General Equilibrium, *American Economic Review* 83, 315-334.
- [10] BLANCHARD, O. (1990), Suggestions for a New Set of Fiscal Indicators, *OECD Economics Department Working Papers*.
- [11] BLANCHARD, O., J.C. Chouraqi, R.P. Hagemann, N. Sartor (1990), The Sustainability of Fiscal Policy: New Answers to an Old Question, *OECD Economic Studies*, 15, 7-36.

- [12] CHARI, V.V. and P.J. Kohe (1999), Optimal Fiscal and Monetary Policy, *NBER Working Paper W6891*.
- [13] DRAZEN, A. (2002), Fiscal Rules from a Political Economy Perspective, *Tel Aviv University Working Paper*.
- [14] FERREIRA, P.C. (1999), Inflationary Financing of Public Investment and Economic Growth, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 23(4), 539-563.
- [15] FUENTE, Angel de la (2000), *Mathematical Methods and Models for Economics*, Cambridge University Press: Cambridge UK.
- [16] HIRSH, M.W. and S. Smale (1989), *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press: San Diego.
- [17] ROCHA, F. e Pichetti, Paulo (2003), Fiscal Adjustment in Brazil, *Revista Brasileira de Economia*, 57(1), 239-252.
- [18] STOCKMAN, D.R. (2001), Balanced-Budget Rules: Welfare Loss and Optimal Policies, *Review of Economic Dynamics*, 4(2), 438-459.
- [19] TURNOVSKY, S.J. (1997), *Methods of Macroeconomic Dynamics*, MIT Press: Cambridge, MA.
- [20] TURNOVSKY, S.J. and W.H. Fisher (1995), The Composition of Government Expenditure and its Consequences for Macroeconomic Performance, *Journal of Economic Dynamics and Control* 19, 747-786.
- [21] WOODFORD, M. (1996), Control of the Public Debt: A Requirement for Price Stability ?, *NBER Working Paper 5684*.

## 3 Dualidade, Oferta Líquida e a Função Distância Direcional

### 3.1 Introdução

Dualidade na teoria microeconômica da produção, começou a ser explorada com os trabalhos de Shephard (1953, 1970, 1973)-o precursor da abordagem axiomática da teoria da produção. Os resultados descobertos por este autor e mais tarde aprimorados por McFadden (1978), Blackorby e Donaldson (1980) e Färe e Primont (1995), possibilitaram importantes aplicações na teoria da produção, sobretudo no que se refere a obtenção de funções oferta de produtos e funções demanda de insumos, através da derivação simples de funções valores tais como a função lucro e a função custo, sem que seja necessário realizar qualquer processo de otimização.

Entretanto a grande maioria dos resultados obtidos fazem uso extensivo do teorema do envelope, o que de certa forma exige que se conheça o processo de otimização subjacente ao processo produtivo. Neste artigo, porém, serão exploradas as novas relações de dualidade entre a função lucro e a função distância direcional estabelecidas mais, recentemente, por Chambers, Chung e Färe (1996, 1998). Entre os objetivos deste artigo, demonstra-se que os resultados de dualidade destes autores generalizam os de Färe e Primont (1995). O objetivo principal será usar esta dualidade para fornecer uma demonstração alternativa dos Lemmas de Hotelling e Shephard, sem fazer uso do teorema do envelope. Na verdade, como será visto, não será necessário nem mesmo o conhecimento do processo de otimização condicionada a tecnologia de produção. No Apêndice, demonstra-se também o Lema de Shephard usando o conceito de funções distância orientadas pelo insumo e produto, as quais são casos particulares da função distância direcional.

No que se segue, este artigo, além desta introdução, está distribuído da seguinte maneira: a Seção 3.2 define e apresenta as principais propriedades das funções lucro e distância direcional; na Seção 3.3 os principais resultados de dualidade entre a função distância direcional e a função lucro, de acordo

com Chambers, Chung e Färe (1996, 1998), são apresentados. Em adição, apresenta-se as demonstrações alternativas dos Lemas de Hotelling e Shephard, usando o conceito de função distância direcional que são os principais resultados deste artigo. Por último, a seção 3.4 apresenta as conclusões finais do artigo.

## 3.2 A Função Lucro e a Função Distância Direcional

Nesta seção serão formalmente definidas a função lucro e a função distância direcional. Além do mais, serão apresentadas as principais propriedades estruturais dessas funções.

### 3.2.1 A Função Lucro

Sejam  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  um vetor de insumos e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^M$  um vetor de produtos. A tecnologia de produção é uma correspondência  $P : \mathbb{R}_+^N \rightrightarrows \mathbb{R}_+^M$  definida como

$$P(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}; \mathbf{x} \text{ pode produzir } \mathbf{y}\} \quad (3.1)$$

que associa a cada vetor de insumos um subconjunto do  $M$ -ortante não negativo em que a produção é factível para este vetor de insumos. Observe que, para o caso de um único produto e um único insumo, o gráfico desta correspondência gera o conjunto de possibilidades de produção como mostra a ilustração da Figura 1. Denominando de  $T$  o gráfico da correspondência  $P(\mathbf{x})$ , o conjunto  $T$  pode então ser definido como:

$$T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \mathbf{y} \in P(\mathbf{x})\} \quad (3.2)$$

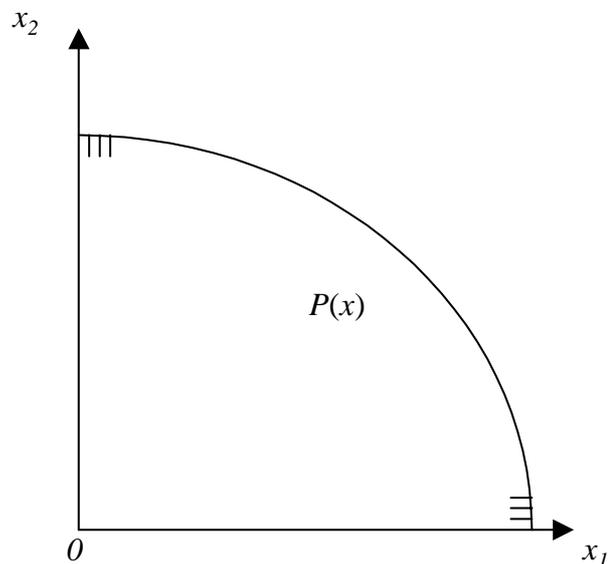


Figura 7: Correspondência de Produção

Os axiomas usuais descritos a seguir são necessários e suficientes para estabelecer o teorema da dualidade de Shephard (1970) a ser utilizado logo mais. Este axiomas são os seguintes<sup>41</sup>:

- P.1)  $P(\mathbf{x})$  é um conjunto fechado, limitado e convexo para qualquer  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$ ;
- P.2) Dados,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^M$  e  $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}$ , tem-se  $P(\mathbf{x}) \subseteq P(\mathbf{x}')$  - livre descarte de insumos;
- P.3) Dado  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$ , se,  $\mathbf{y} \in P(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{y} \geq \mathbf{y}'$ , então  $\mathbf{y}' \in P(\mathbf{x})$  - livre descarte de produtos;
- P.4) Se,  $\mathbf{y} \in P(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{x} = 0$ , então  $\mathbf{y} = 0$  - *no free lunch*;
- P.5)  $0 \in P(\mathbf{x})$  para qualquer  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  - inanição.

Definidos estes pressupostos tecnológicos, a função lucro é agora formalmente definida a seguir.

---

<sup>41</sup>Veja também Färe e Primont (1995).

**Definição 1** *Sejam  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  um vetor de insumos,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^M$  um vetor de produtos,  $P(\mathbf{x})$  a correspondência de produção,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^N$  e  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^M$  os vetores de preços dos insumos e dos produtos, respectivamente. A função  $\pi : \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:*

$$\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0} \{\mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x}; \mathbf{y} \in P(\mathbf{x})\} \quad (3.3)$$

*é denominada de função lucro em  $(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ .*

A função lucro dispõe de uma série de propriedades usuais tais como homogeneidade de grau 1 em  $(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ , concavidade em  $(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ , não-decrescente em  $\mathbf{p}$  e não-crescente em  $\mathbf{w}$ .

### 3.2.2 A Função Distância Direcional

Numa sequência de trabalhos, Luenberger (1992a, 1992b, 1994, 1995 e 1996), define e estabelece as principais propriedades estruturais e algébricas da função benefício como sendo uma medida da disponibilidade de um agente trocar um certo nível de utilidade por uma certa cesta de mercadoria, relativamente a um vetor (de bens) referência. A adaptação desse dispositivo à teoria da produção é devido aos trabalhos de Chambers, Chung e Färe (1996, 1998) que renomearam a função benefício passando a chamá-la de função distância direcional. Desde então um grande número de trabalhos foram dedicados a explorar a estrutura e as várias aplicações da função distância direcional.

Utilizando a notação introduzida na seção anterior, a definição abaixo estabelece formalmente a estrutura da função distância direcional.

**Definição 2** *Sejam  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  um vetor de insumos,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^M$  um vetor de produtos,  $P(\mathbf{x})$  a correspondência de produção e,  $g = (-g_x, g_y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M$ , com  $g \neq 0$ , um vetor denominado vetor direção. A função  $\vec{D} : (\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M) \times (\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:*

$$\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+; (\mathbf{x} - \beta g_x, \mathbf{y} + \beta g_y) \in T\} \quad (3.4)$$

é denominada função distância direcional onde  $\beta$  é um parâmetro maior ou igual a zero.

Em temos ilustrativo, a Figura 2 abaixo, mostra como a função distância direcional é calculada.

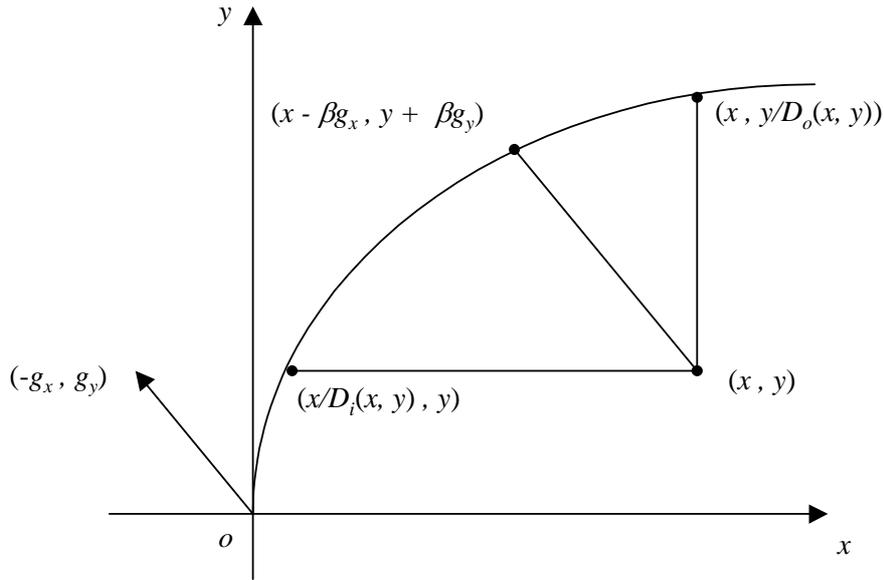


Figura 8: Função Distância Direcional e Funções Distância

No exemplo ilustrado acima o vetor direção é representado pelo seguimento  $\overline{OA}$  e a função distância direcional é dada por  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) = \overline{OB}/\overline{OA}$ . O Lema 1 a seguir estabelece as principais propriedades estruturais e algébricas da função distância direcional. As provas dos resultados abaixo podem ser encontrados em Luenberger (1992), Chambers, Chung e Färe (1996, 1998) e Briec (2000).

**Lema 1** *Suponha que a tecnologia satisfaça os axiomas P.1 – P.5. A função distância direcional satisfaz as seguintes propriedades:*

D.1) (Translação)  $\vec{D}(\mathbf{x} - \alpha g_x, \mathbf{y} + \alpha g_y; -g_x, g_y) = \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) - \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R};$

D.2) (Continuidade)  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  é semicontínua superior em  $(x, y);$

D.3) (Homogeneidade)  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\lambda g_x, \lambda g_y) = \lambda^{-1} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$ ,  $\forall \lambda > 0$ ;

D.4) (Monotonicidade) A função distância direcional é não-decrescente em  $\mathbf{x}$  e não-crescente em  $\mathbf{y}$ ;

D.5) (Convexidade)  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  é côncava em  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ;

D.6) (Completa caracterização)  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} \in P(x)$ .

Como estabelecido por Cahmbers, Chung e Färe (1996, 1998), a função distância direcional generaliza várias outras funções distâncias tais como as funções distância orientada pelo insumo e pelo produto de Shephard (1970)<sup>42</sup>. De acordo com estes autores, a relação entre a função distância direcional e as distâncias orientada pelo produto e pelo insumo de Shephard são, respectivamente, iguais a:

$$\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0, \mathbf{y}) = \frac{1}{D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})} - 1 \quad (3.5)$$

$$\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}, 0) = 1 - \frac{1}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (3.6)$$

onde  $D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e  $D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  são, respectivamente, as funções distância orientada pelo produto e pelo insumo<sup>43</sup>.

---

<sup>42</sup>A função distância direcional também generaliza a função Gauge de McFadden (1978), a função translação de Blackorby e Donaldson (1980) e a função distância afim de Färe e Lovell (1978).

<sup>43</sup>A função distância orientado pelo produto,  $D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , é definida como,  $D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{\theta \in \mathbb{R}_+ : (\mathbf{x}, \mathbf{y}/\theta) \in T\}$ . Em outras palavras, a função distância orientada pelo produto mede a máxima expansão proporcional do vetor de produtos  $\mathbf{y}$  de forma que este processo de produção ainda seja factível para um dado vetor de insumos  $\mathbf{x}$ . De maneira análoga, a função distância orientada pelo insumo,  $D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , é definida como  $D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\theta \in \mathbb{R}_+ : (\mathbf{x}/\theta, \mathbf{y}) \in T\}$ . Ela mede a máxima contração do vetor de insumos  $\mathbf{x}$  de maneira que ainda se possa produzir o vetor de produtos  $\mathbf{y}$ . Com referência ao exemplo dado na Figura 2, tem-se que  $D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{OE}/\overline{OF}$  e  $D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{OD}/\overline{OC}$ . As propriedades destas funções distância podem ser encontradas em Shephard (1970) e Färe e Primont (1995).

### 3.3 Dualidades e Propriedades Diferenciais

Nesta seção serão transcritos os principais resultados de dualidade envolvendo a função distância direcional e a função lucro, originalmente estabelecidos em Chambers, Chung e Färe (1996,1998) e Färe (2000). Também serão exploradas propriedades envolvendo derivadas de funções distância direcional encontradas em Hudgins e Primont (2004) e outras estabelecidas originalmente neste artigo.

#### 3.3.1 Dualidades

Os resultados apresentados a seguir mostram que a função distância direcional generaliza as dualidades entre as funções distância orientada pelo produto e insumo e as funções receita e custo, respectivamente. Färe e Primont (1995) mostram que os axiomas P.1 - P.5 são condições necessárias e suficientes para estabelecer o teorema da dualidade de Shephard<sup>44</sup> (1970) como um par de otimizações não condicionadas.

**Teorema 1 (Färe e Primont (1995))** *Suponha que a tecnologia satisfaça os axiomas P.1 - P.5, então sendo  $D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e  $D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  as funções distância orientada pelo produto e pelo insumo, respectivamente, tem-se que:*

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{y} \geq 0} \left\{ \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{y}}{D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\} \quad (3.6(a))$$

$$D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{p} \geq 0} \left\{ \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{y}}{R(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \right\} \quad (3.6(b))$$

e

$$C(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \inf_{\mathbf{x} \geq 0} \left\{ \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\} \quad (3.7(a))$$

$$D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{w} \geq 0} \left\{ \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{C(\mathbf{y}, \mathbf{w})} \right\} \quad (3.7(b))$$

---

<sup>44</sup>Shephard demonstra que se a tecnologia satisfaz os axiomas P.1 a P.5, então:  $C(y, w) = \inf_{x \geq 0} \{w^T x; D_i(x, y) \geq 1\}$  e  $R(x, p) = \sup_{y \geq 0} \{p^T y; D_o(x, y) \leq 1\}$ .

onde  $R(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  e  $C(\mathbf{y}, \mathbf{w})$  são, respectivamente, as funções receitas e custo de produção.

Vale salientar que os resultados de dualidade do Teorema 1 são casos especiais da dualidade existente entre a função distância direcional e a função lucro, como será demonstrado mais adiante. O Teorema 2 a seguir, devido à Chambers, Chung e Färe (1998) é o principal resultado de dualidade a ser explorado neste artigo.

**Teorema 2 (Chambers, Chung e Färe (1998))** *Suponha que a tecnologia satisfaça os axiomas P.1 - P.5, então:*

$$\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0} \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x} + \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x) \right\} \quad (3.8)$$

e

$$\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; g_x, g_y) = \inf_{(\mathbf{p}, \mathbf{w})} \left\{ \frac{\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) - (\mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x})}{\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x} \right\} \quad (3.9)$$

De posse do resultado acima e utilizando as equações (3.4) e (3.5) é possível mostrar que as relações de dualidade (3.6) e (3.7) constituem um caso particular da dualidade entre a função lucro e a função distância direcional. Este é o conteúdo do seguinte corolário.

**Corolário 1** *Sejam,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^N$  os vetores de insumos e de produtos, respectivamente,  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  a função distância direcional no vetor direção  $(-g_x, g_y)$ ,  $D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e  $D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , as funções distância orientada pelo produto e pelo insumo, respectivamente, e por fim,  $\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ ,  $R(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  e  $C(\mathbf{y}, \mathbf{w})$  as funções lucro, receita e custo, respectivamente. Então, verificam-se as seguintes condições:*

- a) *Se  $(-g_x, g_y) = (0, \mathbf{y})$  então as equações (3.8) e (3.9) implicam na relação de dualidade em (3.6);*
- b) *Se  $(-g_x, g_y) = (\mathbf{x}, 0)$  então as equações (3.8) e (3.9) implicam na relação de dualidade em (3.7).*

**Prova.** Desde que  $(-g_x, g_y) = (0, \mathbf{y})$ , substituindo-se a igualdade (3.4) em (3.9) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})} - 1 &= \inf_{(\mathbf{p}, \mathbf{w})} \left\{ \frac{\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) - (\mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x})}{py} \right\} \\ &= \inf_{(\mathbf{p}, \mathbf{w})} \left\{ \frac{\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) + \mathbf{w}^T \mathbf{x}}{\mathbf{p}^T \mathbf{y}} \right\} - 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_o(x, y) = \sup_{(\mathbf{p}, \mathbf{w})} \left\{ \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{y}}{\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) + \mathbf{w}^T \mathbf{x}} \right\} \quad (3.10)$$

No caso em que o vetor de insumos  $x$  minimiza o custo de produção  $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ , é demonstrado demonstra-se no Apêndice A1 que  $R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) + \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ . Nestes termos, a substituição desta última expressão em (3.10) implica que:

$$D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{(\mathbf{p}, \mathbf{w})} \left\{ \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{y}}{R(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \right\}$$

que é exatamente a segunda relação de (3.6). Para demonstrar a primeira relação de (3.6), semelhantemente, substitui-se  $(-g_x, g_y) = (0, \mathbf{y})$  e a expressão (3.4) em (3.8) para obter:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) &= \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0} \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x} + \left( \frac{1}{D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})} - 1 \right) \mathbf{p}^T \mathbf{y} \right\} \\ &= \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0} \left\{ \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{y}}{D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})} - \mathbf{w}^T \mathbf{x} \right\} \end{aligned}$$

Assim, para todo  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$ , tem-se que  $\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) \geq \mathbf{p}^T \mathbf{y} / D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}$  implicando  $\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) + \mathbf{w}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{p}^T \mathbf{y} / D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Logo, se  $\mathbf{x}$  minimiza o custo  $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ , então:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{y}}{D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

Isto implica que

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{y} \geq 0} \left\{ \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{y}}{D_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\}$$

que é exatamente a primeira expressão de (3.6). Com isso (3.6) fica completamente demonstrado. Para demonstrar a segunda relação de (3.7), considere agora  $(-g_x, g_y) = (\mathbf{x}, 0)$ . Então, substituindo (3.5) em (3.9) e empregando o mesmo raciocínio para demonstrar a segunda relação de (3.6), obtém-se:

$$D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{(\mathbf{p}, \mathbf{w})} \left\{ \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{C(\mathbf{y}, \mathbf{w})} \right\} \quad (3.11)$$

que coincide com a segunda expressão de (3.7).

Por outro lado, desde que  $(-g_x, g_y) = (0, y)$ , a substituição de (3.5) em (3.6) implica que:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) &= \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0} \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x} + \left( 1 - \frac{1}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right) \mathbf{w}^T \mathbf{x} \right\} \\ &= \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0} \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} - \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\} \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$ , tem-se que  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \geq \mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x} / D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  implicando  $\mathbf{p}^T \mathbf{y} - \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \leq \mathbf{w}^T \mathbf{x} / D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Logo, se  $y$  maximiza a receita  $\mathbf{p}^T \mathbf{y}$  então:

$$C(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \leq \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

Isto implica que

$$C(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \inf_{\mathbf{x} \geq 0} \left\{ \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\}.$$

Esta última expressão é exatamente a relação em (3.7(a)). Logo, as relações de (3.7) ficam demonstradas. ■

Em resumo, o Corolário 1 acima mostra que os resultados do Teorema 1 são casos particulares do Teorema 6. A seguir serão discutidas algumas das propriedades diferenciais da função distância direcional que serão utilizadas na demonstração dos Lemas de Hotelling e Shepard.

### 3.3.2 Propriedades Diferenciais

Nesta seção serão caracterizadas as propriedades diferenciais da distância direcional e algumas de suas implicações, entre elas, o principal resultado deste artigo. Em todo momento será assumido que a função distância direcional é duas vezes continuamente diferenciável em todos os seus argumentos<sup>45</sup>.

O primeiro resultado a ser estabelecido é atribuído a Hudgins e Primont (2004) que apresentam uma série de propriedades das derivadas parciais da função distância direcional com respeito aos vetores de insumos e produtos  $x$  e  $y$  e aos vetores direção  $g_y$  e  $g_x$ , respectivamente.

**Lema 2 (Hudgins e Primont (2004))** *Suponha que a função distância direcional,  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; g_x, g_y)$ , seja duas vezes continuamente diferenciável<sup>46</sup>, então:*

$$a) g_x^T \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) - g_y^T \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) = 1;$$

$$b) g_x^T \nabla_{g_x} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) + g_y^T \nabla_{g_y} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) = -1;$$

$$c) \left( \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y), -\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \right) \geq 0;$$

d) A matriz Hessiana,  $H_{\vec{D}}$ , é simétrica e negativa semidefinida, com:

$$H_{\vec{D}} = \begin{pmatrix} \nabla_{xx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) & \nabla_{xy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \\ \nabla_{yx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) & \nabla_{yy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \end{pmatrix}$$

No Lema acima tem-se que  $\nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  e  $\nabla_{g_x} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  são matrizes de dimensão  $N \times 1$ ,  $\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  e  $\nabla_{g_y} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  matrizes de dimensão  $M \times 1$ ,  $\nabla_{xx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  uma matriz de dimensão  $N \times N$ ,  $\nabla_{yy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  uma matriz de dimensão  $M \times M$ ,  $\nabla_{xy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  uma matriz de dimensão  $N \times M$  e  $\nabla_{yx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  de dimensão  $M \times N$ .

<sup>45</sup>Sobre as condições de diferenciabilidade da função distância direcional consulte Courtalt, Crettez e Hayek (2004).

<sup>46</sup>Ao longo do texto será adotada a seguinte notação:  $\nabla_{a_i} \vec{D}$  corresponde ao gradiente de  $\vec{D}$  com respeito ao argumento  $a$ ;  $\nabla_{a a_i} \vec{D}$  é a matriz Jacobiana de  $\nabla_a \vec{D}$  com respeito a  $a$  e  $\nabla_{a b_i} \vec{D}$  é a matriz Jacobiana de  $\nabla_a \vec{D}$  com respeito a  $b$ . No caso de funções vetoriais o símbolo  $\nabla$  continuará sendo utilizado para a Matriz Jacobiana.

Usando as propriedades (a) e (d) do Lema 2 acima é possível estabelecer um resultado cujo conteúdo será essencial para a obtenção do principal resultados deste artigo. Este corolário generaliza algumas das propriedades diferenciais da distância direcional do Lema 2.

**Corolário 2** *Suponha que  $x \in \mathbb{R}_+^N$  e  $y \in \mathbb{R}_+^M$  sejam, respectivamente, vetores de insumos e produtos e,  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$ , a função distância direcional com vetor diretor  $(-g_x, g_y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M$ . Então,  $\nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T = I_N$  e  $\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T = -I_M$ , onde  $I_N$  e  $I_M$  são, respectivamente, matrizes identidade de ordem  $N$  e  $M$  respectivamente,  $\nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T = \mathbf{0}_{(N \times M)}$  e  $\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T = \mathbf{0}_{(M \times N)}$ , onde  $\mathbf{0}_{(N \times M)}$  e  $\mathbf{0}_{(M \times N)}$  são, respectivamente, matrizes nulas de ordem  $N \times M$  e  $N \times M$ .*

**Prova.** Com efeito, do item (a) do Lema 2, tem-se que:

$$g_x^T \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T - g_y^T \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T = g_x^T \quad (3.12)$$

$$g_x^T \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T - g_y^T \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T = g_y^T \quad (3.13)$$

Em forma matricial, o sistema (3.12) e (13) pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T & \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T \\ -\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T & -\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Logo, a identidade em (3.14) requer que:

$$\begin{pmatrix} \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T & \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T \\ -\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_x^T & -\nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)g_y^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_N & \mathbf{0}_{(N \times M)} \\ \mathbf{0}_{(M \times N)} & I_M \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

o que demonstra os resultados do enunciado. ■

De posse destes resultados, pode-se agora estabelecer os principais resultados do artigo. O primeiro deles é a demonstração do Lema de Hotelling utilizando a dualidade entre a função lucro e a função distância direcional, sem fazer o uso direto do teorema do envelope. O ponto central para esta demonstração é o uso da propriedade de translação D.1 da função distância direcional.

**Proposição 5 (Lema de Hotelling)** *Suponha que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^M$  sejam, respectivamente, vetores de insumos e produtos,  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  a função distância direcional com vetor direção  $(-g_x, g_y)$  e,  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ , a função lucro nos preços  $(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ . Adicionalmente suponha que a tecnologia satisfaça os axiomas 1-5 com estrita convexidade, então:*

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{p}} \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \\ \nabla_{\mathbf{w}} \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \\ -\mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

**Prova.** Das condições de primeira ordem em (3.8) obtém-se:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x) = -\mathbf{p}^T \quad (3.17)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x) = \mathbf{w}^T \quad (3.18)$$

A diferenciação de (3.17) com respeito a  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{w}$  dá origem, respectivamente, a:

$$\begin{aligned} \left[ \nabla_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{y} + \nabla_{\mathbf{y}\mathbf{x}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x} \right] (\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x) + \\ \nabla_{\mathbf{y}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_y^T = -I_M \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \left[ \nabla_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{y} + \nabla_{\mathbf{y}\mathbf{x}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{x} \right] (\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x) + \\ \nabla_{\mathbf{y}} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_x^T = \mathbf{0}_{(M \times N)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dividindo (3.19) e (3.20) por,  $\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x$ , e após algumas manipulações

algébricas, tem-se que:

$$\nabla_{yy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_p \mathbf{y} + \nabla_{yx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_p \mathbf{x} = \frac{-1}{(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x)} \left( I_M + \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_y^T \right) \quad (3.21)$$

$$\nabla_{yy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_w \mathbf{y} + \nabla_{yx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_w \mathbf{x} = \frac{-1}{(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x)} \left( \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_x^T \right) \quad (3.22)$$

De maneira análoga, diferenciando (3.18) com respeito a  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{w}$ , após alguns rearranjos, obtém-se, respectivamente:

$$\nabla_{xy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_p \mathbf{y} + \nabla_{xx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_p \mathbf{x} = \frac{-1}{(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x)} \left( \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_y^T \right) \quad (3.23)$$

$$\nabla_{xy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_w \mathbf{y} + \nabla_{xx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \nabla_w \mathbf{x} = \frac{-1}{(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x)} \left( -I_N + \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_x^T \right) \quad (3.24)$$

A seguir, combinando as equações (3.21) a (3.24) obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{yy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) & \nabla_{yx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \\ \nabla_{xy} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) & \nabla_{xx} \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_p \mathbf{y} & \nabla_w \mathbf{y} \\ \nabla_p \mathbf{x} & \nabla_w \mathbf{x} \end{pmatrix} = \frac{-1}{(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x)} \times \begin{pmatrix} I_M + \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_y^T & \mathbf{0}_{(M \times N)} + \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_x^T \\ \mathbf{0}_{(N \times M)} + \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_y^T & -I_N + \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_x^T \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Observe que a expressão (3.25), pode ser reescrita como:

$$H_{\vec{D}} \begin{pmatrix} \nabla_p \mathbf{y} & \nabla_w \mathbf{y} \\ \nabla_p \mathbf{x} & \nabla_w \mathbf{x} \end{pmatrix} = \frac{-1}{(\mathbf{p}^T g_y + \mathbf{w}^T g_x)} \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_y^T & \nabla_y \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_x^T \\ \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_y^T & \nabla_x \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y) g_x^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -I_M & \mathbf{0}_{(M \times N)} \\ \mathbf{0}_{(N \times M)} & I_N \end{pmatrix} \right\} \quad (3.26)$$

onde,  $H_{\vec{D}}$ , é a matriz Hessiana da função distância direcional avaliada nas escolhas ótimas de  $y$  e  $x$ . Recorrendo ao Corolário 2 e usando a propriedade (d) do Lema 2, a equação (3.26) implica que:

$$\begin{pmatrix} \nabla_p \mathbf{y} & \nabla_w \mathbf{y} \\ \nabla_p \mathbf{x} & \nabla_w \mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{[(M+N) \times (M+N)]} \quad (3.27)$$

Para completar a demonstração observe que:

$$\begin{pmatrix} \nabla_p \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \\ \nabla_w \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p \mathbf{y} & \nabla_w \mathbf{y} \\ \nabla_p \mathbf{x} & \nabla_w \mathbf{x} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ -\mathbf{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \\ -\mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Portanto, usando (3.27) em (3.28) chega-se a:

$$\begin{pmatrix} \nabla_p \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \\ \nabla_w \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \\ -\mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \end{pmatrix}$$

■

Note que na demonstração acima, a única suposição mais forte utilizada foi a estrita convexidade da tecnologia, a fim de garantir que a função lucro seja bem definida.

A Proposição 1 possui duas implicações importantes. A primeira é que o resultado conhecido como Lema de Hotelling é demonstrado sem fazer uso do Teorema do Envelope e, assim, sem utilizar diretamente a estrutura do processo de otimização inerente ao problema de maximização de lucro restrita às condições tecnológicas. Na verdade, utiliza-se apenas as condições de primeira ordem levando em consideração a dualidade entre a função lucro e a função distância direcional. Segundo, mostra como a função distância direcional, através de sua dualidade com a função lucro e a propriedade de tranlação, é utilizada como uma forma de se obter a oferta líquida de produtos através das derivadas parciais da função lucro.

Em seguida, utilizando novamente o conceito de função distância direcional, demonstra-se agora o Lema de Shephard (1953, 1970), segundo qual as funções demanda e oferta condicionais são obtidas através das derivadas parciais com respeito aos preços dos insumos e dos produtos das funções custo

e receita, respectivamente. Desde que a função distância direcional generaliza as funções distância orientadas pelo produto e pelo insumo, apresenta-se também na do Apêndice A3, a demonstração deste mesmo resultado utilizando o conceito destas últimas.

**Proposição 6 (Lema de Shephard)** *Sejam  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^M$  os vetores de insumo e produto combinados sob a tecnologia  $T$ . Sejam ainda  $C(\mathbf{w}, \mathbf{y})$  e a função custo,  $R(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  a função receita e  $\vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -g_x, g_y)$  a função distância direcional. Tem-se então que:*

a) *Se  $(-g_x, g_y) = (\mathbf{x}, 0)$ , então  $\nabla_w C(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = x(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ ;*

b) *Se  $(-g_x, g_y) = (0, \mathbf{y})$ , então  $\nabla_p R(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = y(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ ;*

**Prova.** Substituindo a relação (3.5) na primeira expressão de (3.7(a)) tem-se que:

$$C(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \inf \left\{ (\mathbf{w}^T \mathbf{x}) (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \right\} \quad (3.29)$$

No Apêndice A2 mostra-se que, como  $(1 - \vec{D}(x, y; -x, 0))$  é homogênea de grau -1 nos insumos, obtém-se as seguintes igualdades :

$$\nabla_x (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \mathbf{x}^T = -(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) I_N \quad (3.30)$$

$$(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_{xx} (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \nabla_w \mathbf{x} = -2 \nabla_x (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x} \quad (3.31)$$

Das condições de primeira ordem do problema (3.29) decorre que:

$$\mathbf{w} (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) = - (\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_x (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \quad (3.32)$$

Diferenciando ambos os lados de (3.32) com respeito a  $w$ , chega-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{aligned} & (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) I_N + \mathbf{w} [\nabla_x (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0))]^T \nabla_w \mathbf{x} \quad (3.33) \\ = & -\nabla_x (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \mathbf{x}^T - \nabla_x (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x} \\ & - (\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_{xx} (1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \nabla_w \mathbf{x} \end{aligned}$$

Substituindo as equações (3.30) e (3.31) na expressão (3.33), obtém-se:

$$\left\{ \left[ \nabla_x(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0))\mathbf{w}^T \right]^T - \nabla_x(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0))\mathbf{w}^T \right\} \nabla_w \mathbf{x} = 0 \quad (3.34)$$

Na expressão (3.34) acima, a menos que a matriz  $\nabla_x(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0))\mathbf{w}^T$  seja simétrica ou nula, é necessário e suficiente que  $\nabla_w \mathbf{x} = 0$ . Nestas condições, desde que  $\nabla_w C(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x}$ , então para  $\nabla_w \mathbf{x} = 0$ , o item (a) fica demonstrado. A demonstração do item (b) é inteiramente análoga.

■

### 3.4 Conclusões

Este artigo estabelece demonstrações alternativas de resultados tradicionais na teoria microeconômica da produção. O uso da dualidade entre a função lucro e a função distância direcional permite que a última possa ser utilizada para estabelecer o Lema de Hotelling, resultado que obtém as ofertas líquidas de produtos através das derivadas parciais da função lucro com respeito aos preços dos insumos e dos produtos. Isto é possível graças a propriedade de translação atendida pela função distância direcional.

O trabalho também mostra que a função distância direcional generaliza as dualidades entre a função distância orientada pelo insumo e a função custo, e entre a função distância orientada pelo produto e a função receita. Baseado neste fato é demonstrado que a função distância direcional também pode ser utilizada para estabelecer o Lema de Shephard através do qual são obtidas as demandas e ofertas condicionais.

Todos os resultados ora citados, são estabelecidos sem fazer qualquer referência ao Teorema do Envelope, que é tradicionalmente o recurso mais utilizado para demonstrar tais resultados.

## Apêndice

### Apêndice A1: Demonstração de $\pi(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = R(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) - C(\mathbf{y}^*, w)$

Sejam

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \arg \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T} \{\mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x}\}$$

$$\mathbf{y}' = \arg \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T} \{\mathbf{p}^T \mathbf{y}\}$$

$$\mathbf{x}' = \arg \inf_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T} \{\mathbf{w}^T \mathbf{x}\}$$

Então, necessariamente,  $\pi(p, w) = R(p, x^*) - C(w, y^*) = R(p, x') - C(w, y')$ .

**Prova.** Com efeito, por premissa do resultado tem-se que

$$\pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \mathbf{p}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{w}^T \mathbf{x}^*$$

$$R(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{y}'$$

$$C(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}'$$

Das duas últimas igualdades, tem-se por construção que,  $\mathbf{p}^T \mathbf{y}' \geq \mathbf{p}^T \mathbf{y}^*$  e  $-\mathbf{w}^T \mathbf{x}' \geq -\mathbf{w}^T \mathbf{x}^*$ , implicando que  $\mathbf{p}^T \mathbf{y}' - \mathbf{w}^T \mathbf{x}' \geq \mathbf{p}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{w}^T \mathbf{x}^* = \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ . Isto é,  $R(\mathbf{p}, \mathbf{x}') - C(\mathbf{w}, \mathbf{y}') \geq \pi(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ . Por outro lado, desde que para qualquer  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$  tem-se  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \geq \mathbf{p}^T \mathbf{y} - \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ , então, em particular,  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \geq \mathbf{p}^T \mathbf{y}' - \mathbf{w}^T \mathbf{x}'$ . Ou seja,  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \geq R(\mathbf{p}, \mathbf{x}') - C(\mathbf{w}, \mathbf{y}')$ . Assim sendo, necessariamente, deve-se ter:

$$\pi(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = R(\mathbf{p}, \mathbf{x}') - C(\mathbf{w}, \mathbf{y}') = R(\mathbf{p}, \mathbf{x}^*) - C(\mathbf{w}, \mathbf{y}^*)$$

■

### Apêndice A2: Demonstração de (30) e (31)

Seja  $\psi(x, y) = 1 - \vec{D}(x, y; -x, 0)$ . Então,  $\psi(x, y)$  é homogênea de grau -1 em  $x$  e as seguinte relações são mantidas:

$$\text{a) } \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x}^T = -\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I_N$$

$$\text{b) } (\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_{xx} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_w \mathbf{x} = -2 \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x}.$$

**Prova.** Primeiramente, verifica-se que  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é homogênea de grau -1. Com efeito, a propriedade D.3 (homogeneidade de grau -1 no vetor direção) da função distância direcional permite escrever

$$\begin{aligned} \psi(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 1 - \vec{D}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}; -\lambda \mathbf{x}, 0) \\ &= 1 - \lambda^{-1} \vec{D}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0) \\ &= \lambda^{-1} [\lambda - \vec{D}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}; -x, 0)] \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Pela propriedade de translação, D.1, tem-se que,

$$\begin{aligned} \vec{D}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}; -x, 0) &= \vec{D}(\mathbf{x} - (1 - \lambda)\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0) \\ &= \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0) - (1 - \lambda) \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

Logo, substituindo-se (A2.2) em (A2.1), encontra-se

$$\begin{aligned} \psi(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \lambda^{-1} [1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)] \\ &= \lambda^{-1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

o que mostra a homogeneidade de grau -1 de  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  no vetor de insumos  $\mathbf{x}$ . Note que aplicando o teorema de Euler a,  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , e pré multiplicando ambos os lados do resultado por  $\mathbf{x}^T$  tem-se:

$$\mathbf{x}^T \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x}^T = -\mathbf{x}^T \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{A2.3})$$

o que implica em  $\mathbf{x}^T [\nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x}^T + \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I_N] = 0$ . Portanto, da suposição que  $\mathbf{x} \geq 0$ , decorre que

$$\nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x}^T = -\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I_N \quad (\text{A2.4})$$

ou seja,

$$\nabla_x(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -x, 0))\mathbf{x}^T = -(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -x, 0))I_N$$

o que demonstra o item a).

A seguir, diferenciando (A2.4) com respeito ao vetor de preços dos insumos, e pré multiplicando ambos os lados do resultado por  $\nabla_w \mathbf{x}^T$  obtém-se:

$$\nabla_w \mathbf{x}^T \nabla_{xx}^T \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \mathbf{x} = -2 \nabla_w \mathbf{x}^T \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{A2.5})$$

Transpondo ambos os lado de (A2.5), tem-se:

$$\mathbf{x}^T \nabla_{xx} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_w \mathbf{x} = -2 \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \nabla_w \mathbf{x} \quad (\text{A2.6})$$

Da equação (3.32) no texto, decorre que:

$$\nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\mathbf{w} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{w}^T \mathbf{x})} \quad (\text{A2.7})$$

Substituindo a equação (A2.7) na expressão (A2.6), chega-se a:

$$\mathbf{x}^T [(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_{xx} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_w \mathbf{x}] = 2 \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x} \quad (\text{A2.8})$$

Usando novamente o teorema de Euler, a equação (A2.8) implica que:

$$\mathbf{x}^T [(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_{xx} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_w \mathbf{x} + 2 \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x}] = 0$$

e portanto:

$$(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_{xx} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_w \mathbf{x} = -2 \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x} \quad (\text{A2.9})$$

O que demonstra b). Note ainda que, desde que,  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)$ , a expressão A2.9 se resume a:

$$(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \nabla_{xx}(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \nabla_w \mathbf{x} = -2 \nabla_x(1 - \vec{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\mathbf{x}, 0)) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x}$$

■

### Apêndice A3: Lema de Shephard

Sejam  $x \in \mathbb{R}_+^N$  e  $y \in \mathbb{R}_+^M$  os vetores de insumos e produtos combinados sob a tecnologia  $T$ . Sejam ainda,  $C(w, y)$ , a função custo,  $R(p, x)$ , a função receita,  $D_i(x, y)$ , a função distância orientada pelo insumo  $i$ ,  $D_0(x, y)$ , a função distância orientada pelo produto. Então:

$$\nabla_w C(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \quad (\text{A3.1})$$

$$\nabla_p R(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (\text{A3.2})$$

**Prova.** Utilizando (8) decorre das condições de primeira ordem que:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{x}}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{A3.3})$$

Diferenciando ambos os lados da equação (A3.3) com respeito a  $w$  obtém-se:

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{\nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x}^T + \nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x}}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \\ &\quad - \frac{\mathbf{w} \nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \nabla_w \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \mathbf{x} \nabla_{xx} D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_w \mathbf{x}}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

Decorre da homogeneidade de grau 1 em  $x$  da função distância orientada pelo insumo que:

$$\nabla_{xx} D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_w \mathbf{x} = 0 \quad (\text{A3.5})$$

$$\frac{\nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x}^T}{D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = I_N \quad (\text{A3.6})$$

Portanto, substituindo-se as equações (A3.5) e (A3.6) na equação (A3.4) encontra-se:

$$[\nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}^T - \mathbf{w} \nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \nabla_w \mathbf{x} = 0 \quad (\text{A3.7})$$

Färe e Primont (1995) mostram que,  $\nabla_x D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ . Desde que a matriz entre colchetes não seja nula e nem simétrica e,  $\mathbf{w} \geq 0$ , a equação (A3.7)

requer  $\nabla_w \mathbf{x} = 0$ . Por fim, notando que,  $\nabla_w C(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \nabla_w \mathbf{x}$ , o resultado segue.

A demonstração de que  $\nabla_p R(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  é inteiramente análoga observando, apenas, que a função distância orientada pelo produto é homogênea de grau 1 nos produtos. ■

## Referências

- [1] BLACKORBY, C. and D. Donaldson (1980), A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Inequality, *International Economic Review*, 21, 107-136.
- [2] BRIEC, W., B. Dervaux and H. Leleu (2000), Aggregation of Direcional Distance Functions and Industrial Efficiency, *Journal of Economics*, 79(3), 237-261.
- [3] CHAMBERS, R., Y. Chung and R. Färe (1996), Benefit and Distance Functions, *Journal of Economic Theory*, 70, 407-419.
- [4] CHAMBERS, R., Y. Chung and R. Färe (1998), Profit, Directional Distance Functions, and Nerlovian Efficiency, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98(2), 351-364.
- [5] COURTAULT, J.M., B. Crettez, and N. Hayek (2004.a), On the Differentiability of the Benefit Function, *Economics Bulletin*, 4(5), 1-6.
- [6] COURTAULT, J.M., B. Crettez, and N. Hayek (2004.b), On the Differentiability of the Benefit Function: correction and addendum, *Economics Bulletin*, 4(7), 1-3.
- [7] FARE, R. and C.A.K. Lovell (1978), Measuring the Technical Efficiency of Production, *Journal of Economic Theory*, 19, 150-162.
- [8] FARE, R. and D. Primont (1995), *Multi-Output Production and Duality: Theory and Applications*, Massachusetts: Kluwer.

- [9] FARE,R and S. Grosskopf (2000), Theory and Applications of Directional Distance Function, *Journal of Productivity Analysis*, 13, 93-103.
- [10] HUDGINS, L.B. and D.Primont (2004), Directinal Technology Distance Functions: Theory and Applications, *Working Paper Southern Illinois University*.
- [11] LUENBERGER, D.G. (1992.a), Benefit Functions and Duality, *Journal of Mathematical Economics*, 21, 461-481.
- [12] LUENBERGER, D.G. (1992.b), New Optimality Principles for Economic Efficiency and Equilibrium, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 75, 221-264.
- [13] LUENBERGER, D.G. (1994.a), Optimality and the Theory of Value, *Journal of Economic Theory*, 63, 147-169.
- [14] LUENBERGER, D.G. (1996), Welfare From a Benefit Viewpoint, *Economic Theory*, 7(3), 445-462.
- [15] MAS-COLELL, A. , M.D. Whinston and J.R. Green (1995), *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.
- [16] MCFADDEN, D. (1978), Cost, Revenue, and Profit Funcions. in Fuss, Melvyb and Daniel McFadden,(eds.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, Volume 1, Amsterdam: North-Holland
- [17] SHEPHARD, R.W. (1953), *Cost and Production Functions*, Princenton: Princenton University Press.
- [18] SHEPHARD, R.W. (1970), *Theory of Cost and Production Functions*, Princenton: Princenton University Press.
- [19] SHEPHARD, R.W. (1974), *Indirect Production Functions*, Mathematical Systems in Economics, N°10, Meisenhein Am Glan: Verlag Anton Hain.
- [20] VARIAN, H. (1992), *Microeconomic Analysis*, 3<sup>a</sup> Edition, Norton.