



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

**SAMUEL DOS SANTOS COSTA**

**PERCOLAÇÃO DIRECIONADA ISOTRÓPICA EM REDES HIERÁRQUICAS**

**FORTALEZA**

**2023**

SAMUEL DOS SANTOS COSTA

PERCOLAÇÃO DIRECIONADA ISOTRÓPICA EM REDES HIERÁRQUICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Orientador: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior

Coorientador: Prof. Dr. André Auto Moreira

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C875p Costa, Samuel dos Santos.  
Percolação Direcionada Isotrópica em Redes Hierárquicas / Samuel dos Santos Costa. – 2023.  
56 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior.

Coorientação: Prof. Dr. André Auto Moreira.

1. Redes hierárquicas. 2. Percolação. 3. Expoentes críticos. 4. Redes direcionadas isotropicamente. I. Título.

CDD 530

---

SAMUEL DOS SANTOS COSTA

PERCOLAÇÃO DIRECIONADA ISOTRÓPICA EM REDES HIERÁRQUICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Aprovada em: 23 de fevereiro de 2023

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. André Auto Moreira (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. André de Pinho Vieira  
Universidade de São Paulo (USP)

À minha família, em especial minha mãe e minha esposa que acreditaram e sempre me apoiaram a seguir os meus sonhos.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus pela proteção, saúde e energia para trilhar o curso de pós-graduação. A UFC, por todo o apoio institucional durante esses dois anos. Ao meu orientador e coorientador que me direcionaram durante minha trajetória na escrita da minha dissertação. Aos professores que integram o curso e agregaram conhecimento para execução do trabalho. À minha família, em especial minha mãe e esposa que acreditaram e sempre me apoiaram a seguir essa jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A persistência é o caminho do êxito.”

(CHAPLIN, 1997, p. 118)

## RESUMO

Apresentamos nesse trabalho um estudo da teoria da percolação em rede hierárquica com dois nós raízes. Primeiramente entenderemos o comportamento das redes hierárquicas não direcionadas. Para isso efetuamos o cálculo da probabilidade na geração seguinte  $P_{g+1}$  de se percorrer a rede de uma extremidade a outra, em que a rede na geração anterior  $g$  apresenta uma probabilidade  $P_g$  da ligação estar presente e uma probabilidade  $1 - P_g$  da ligação estar ausente. Também foi possível efetuar o cálculo dos expoentes críticos e da dimensão fractal do aglomerado percolante. O método aplicado foi então estendido para o caso onde essas redes apresentam ligações direcionadas, as chamadas redes direcionadas isotrópicas, sendo assim possível determinar os expoentes críticos e a dimensão fractal do aglomerado percolante dessas redes.

**Palavras-chave:** redes hierárquicas; percolação; expoentes críticos; redes direcionadas isotropicamente.



## ABSTRACT

We present a study of percolation theory considering hierarchical lattices with two root nodes. First, we understand the behavior of the undirected hierarchical lattices. For this purpose, we calculate the probability in the next generation  $P_{g+1}$  of traversing the network from one end to the other, in which the network in the previous generation  $g$  presents a probability  $P_g$  that the link is present and a probability  $1 - P_g$  that the link is absent. The critical exponents and the fractal dimension of the percolating cluster are also calculated. The applied method is then extended to the case where these networks present directed connections, the so-called isotropically directed lattice, thus being possible to also determine the critical exponents and the fractal dimension of its percolating cluster.

**Keywords:** hierarchical lattices; percolation; critical exponents; isotropically directed lattice.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Exemplo de percolação em redes quadradas de lado  $L = 5$ . Em (a) temos a de percolação de sítio e em (b) temos a percolação de ligação. Em nenhuma das duas o estado de percolação foi atingido, de forma que o sistema se encontra desconectado. . . . . 20
- Figura 2 – As redes hierárquicas com dois nós raízes descrevem modelos com interações pareadas dos vizinhos mais próximos, onde o número de estados de um nó pode ser arbitrário. Elas podem assumir diversas formas e diferem quanto às suas configurações estruturais a partir de  $g = 1$ . A rede (a) é conhecida como rede hierárquica diamante [1], a rede (b) é conhecida como pseudo fractal [2], e a rede (c) é a rede hierárquica de pontes de Wheatstone [3]. . . . . 21
- Figura 3 – Exemplo de uma rede particionada em SCCs onde os vértices 1, 2, 3 estão no mesmo SCC, assim como 4,6 e 5,7,8. Pois todos podem se alcançar através de um caminho de arestas. Note que como as ligações são direcionadas, nem sempre é possível ir e voltar ao mesmo ponto, por exemplo é possível ir de 3 para 5, mas não é possível ir de 5 para 3. Figura retirada de [4]. . . . . 22
- Figura 4 – Rede quadrada de  $L = 8$  onde cada par de vizinhos mais próximos é conectado por uma ligação direcionada [5]. Preto indica nós e ligações que compõem o maior componente fortemente conectado (GSCC), ou seja, o maior conjunto de nós que podem ser mutuamente alcançados uns dos outros. Vermelho indica nós e ligações fora do GSCC que podem ser alcançados a partir de nós no GSCC. Azul indica nós e ligações fora do GSCC de onde os nós no GSCC podem ser alcançados. O maior componente de saída/entrada (GOUT/GIN) inclui todos os nós do GSCC acrescidos dos nós vermelho/azul, respectivamente. Cinza indica nós e ligações fora de GIN e GOUT. Ligações saindo da caixa representam as conexões através da condição de contorno periódica. Figura retirada de [6]. . . . . 22
- Figura 5 – Probabilidades para  $g = 0$ , onde a probabilidade da ligação estar presente é  $P_0$  e da ligação estar ausente é  $1 - P_0$ . . . . . 23

- Figura 6 – Dado que uma rede hierárquica de geração  $g$  pode estar ou presente ou ausente, e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $2^4 = 16$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 16 apenas 7 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com isso a probabilidade em  $g + 1$  será a soma das probabilidades individuais dessas configurações que permitem a passagem. Por exemplo, caso as 4 ligações estejam presentes a probabilidade associada é  $P_g^4$  e caso apenas 3 ligações estejam presentes e uma ausente a probabilidade será  $P_g^3(1 - P_g)$ . Fazendo isso para essas 7 configurações, obtemos a probabilidade associada à geração seguinte como demonstrado na equação (2.5). . . . . 25
- Figura 7 – O gráfico apresenta como a probabilidade se comporta caso esteja posta acima de  $P_c$  ou abaixo. Vemos que para valores acima, a probabilidade vai a 1 à medida que se crescem as gerações, caso o valor da probabilidade seja menor que  $P_c$  ela vai a 0. Caso não fosse possível calcular analiticamente o expoente  $\nu$ , esse gráfico permitiria o cálculo numérico desse expoente, já que o mesmo descreve como  $P_g$  diverge do ponto crítico à medida que a geração  $g$  aumenta. . . . . 26
- Figura 8 – A figura apresenta um exemplo de rede hierárquica, na qual as suas configurações estruturais a cada geração  $g$  se assemelham à rede diamante, mas diferentemente dela, essa rede apresenta ligações direcionadas. Note que essa rede possui dois caminhos possíveis entre dois nós, sendo cada caminho representado por uma seta, indicando assim a única direção possível. . . . . 32
- Figura 9 – Na geração  $g = 0$  a rede da Figura 8 apresenta quatro probabilidades possíveis, uma quando as ligações apresentarem duas direções possíveis  $P_2$  (a), duas quando as ligações apresentarem apenas uma direção possível  $P_1/2$  (b) e por fim quando a ligação for ausente  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$  (c). . . . . 32

- Figura 10 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^4 = 256$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 256 apenas 63 permitem a passagem de uma extremidade à outra da rede, sem a probabilidade de voltar. Essa probabilidade é definida como  $P'_1/2$ . . . . . 33
- Figura 11 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^4 = 256$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 256 apenas 49 permitem a passagem de uma extremidade à outra da rede, com a probabilidade de ir e voltar. Essa probabilidade é definida como  $P'_2$ . . . . . 33
- Figura 12 – Diagrama de fases para percolação de ligações isotropicamente direcionada na rede hierárquica da figura 8. As direções das linhas indicam o fluxo do grupo de renormalização. A linha  $P_2 + P_1/2 = P_c$ , onde  $P_c = (\sqrt{5} - 1)/2$  representa o ponto crítico para a rede padrão. O grupo de renormalização mostra que qualquer ponto da reta é um ponto crítico, e  $S = (0, P_c)$  corresponde ao ponto crítico de percolação padrão, exibindo o mesmo comportamento invariante de escala que o ponto  $I$  localizado ao longo da linha crítica. . . . . 35
- Figura 13 – A rede consiste em uma única ligação entre dois nós finais (círculos abertos). Para essa rede existirá quatro probabilidades na geração anterior  $g$ , são elas  $P_g$ ,  $1 - P_g$ ,  $Q$  e  $(1 - Q)$ , que representam a probabilidade de uma ligação estar presente, ausente, de existir uma ligação de longo alcance e de não existir uma ligação de longo alcance, respectivamente. Caso haja a ligação de longo alcance, a probabilidade é  $Q$ , independente das demais ligações [7]. . . . . 40
- Figura 14 – A figura mostra como o autovalor  $\lambda_+$  cresce à medida que o valor de  $Q$  também cresce, sendo o menor valor para  $Q = 0$ , que resulta em  $\lambda_+ = 1$  e seu maior valor quando  $Q = 1/2$ , o que resulta em  $\lambda_+ = 2$ . . . . . 42

Figura 15 – A figura apresenta os tamanhos de sistema de até $N \approx 2^n \sim 10^{3010}$ nós. Ele evolui lentamente em uma descontinuidade em $P \rightarrow P_c = 1/2$ com $P_\infty(P_c) \approx 0.609793$ . A convergência é mais lenta logo abaixo de $1/2$ [7]. . . . .	42
Figura 16 – A figura apresenta uma rede hierárquica direcionada com transições descontínuas. . . . .	43
Figura 17 – A figura apresenta um exemplo de rede hierárquica, na qual as suas configurações estruturais a cada geração $g$ se assemelham a rede ponte de wheatstone, mas diferentemente dela, essa rede apresenta ligações direcionadas. Note que essa rede possui dois caminhos possíveis entre dois nós, sendo cada caminho representado por uma seta, indicando assim a única direção possível. . . . .	50
Figura 18 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração $g$ pode estar com ligações simples de probabilidade $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade $P_2$ ou ausentes de probabilidade $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração $g + 1$ é composta por 4 redes de geração $g$ , existem $4^5 = 1024$ configurações possíveis em $g + 1$ . No entanto, dessas 1024 apenas 254 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, sem a possibilidade de voltar. . . . .	50
Figura 19 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração $g$ pode estar com ligações simples de probabilidade $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade $P_2$ ou ausentes de probabilidade $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração $g + 1$ é composta por 4 redes de geração $g$ , existem $4^5 = 1024$ configurações possíveis em $g + 1$ . No entanto, dessas 1024 apenas 254 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com a possibilidade de ir e voltar. . . . .	51

- Figura 20 – Diagrama de fases para percolação de ligações isotropicamente direcionadas na rede hierárquica obtida como limite do processo exibido. Redner [8, 9] e Dorogovtsev [10] usaram o grupo de renormalização para resolver exatamente este modelo na rede hierárquica mostrada. As direções das linhas indicam o fluxo do grupo de renormalização. A linha  $P_2 + P_1/2 = P_c = 1/2$  coincide com a linha crítica para a percolação de ligações direcionadas isotropicamente na rede quadrada. O grupo de renormalização mostra que qualquer ponto da reta é um ponto crítico, e  $U = (0, 1/2)$  corresponde ao ponto crítico de percolação padrão, exibindo o mesmo comportamento invariante de escala que o ponto S localizado ao longo da linha crítica. Isso sugere a possibilidade de que a percolação de ligações direcionadas isotropicamente esteja em uma classe de universalidade da percolação padrão. Figura retirada de [6]. . . . 53
- Figura 21 – A figura apresenta a rede hierárquica pseudo fractal direcionada, a qual as suas configurações estruturais a cada geração  $g$  se assemelham a rede pseudo fractal, mas diferentemente dela, essa rede apresenta ligações direcionadas. Note que essa rede possui dois caminhos possíveis entre dois nós, sendo cada caminho representado por uma seta, indicando assim a única direção possível. 55
- Figura 22 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^3 = 64$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 64 apenas 15 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com a possibilidade de ir e voltar. 56
- Figura 23 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^3 = 64$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 64 apenas permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com a possibilidade de ir e voltar. . 56

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Para o caso de  $M_1$  apenas as configurações que permitem o transporte é que serão contabilizadas para o cálculo da massa, ou seja, as 7 configurações que foram utilizadas para determinar a equação (2.4). Note que estamos procurando as configurações que conectam os dois extremos, da esquerda e da direita, os sítios vazados mostrados na tabela acima. . . . . 28
- Tabela 2 – O cálculo de  $M_0$  é um pouco mais complexo pois envolve a análise dos 9 casos onde não existe o transporte, entre os sítios extremos da esquerda e da direita (figura 6). Nessa tabela contamos a massa pendente associada ao sítio à esquerda. Por simetria a massa associada ao sítio à direita deve obedecer a mesma relação. . . . . 28
- Tabela 3 – Para o cálculo da massa das cutting bonds, analisaremos as chamadas ligações essenciais, ou seja, as ligações que ao serem rompidas fazem com que não haja transporte na rede, cuja a massa é  $m_{cb}$ . Na primeira configuração que permite o transporte as quatro ligações estão presentes, com isso mesmo rompendo uma das quatro ligações o transporte não é interrompido, fazendo com que não haja ligações essenciais, logo  $m_{cb}$  é zero. Para o segundo caso onde existem três ligações presentes e uma ausente, existiram duas ligações essenciais e para o último caso, onde existem duas ligações presentes e uma ausente, existiram também duas ligações essenciais. . . . . 30
- Tabela 4 – A tabela apresenta a descrição de alguns casos referentes à massa média  $M_0$ , equação (3.21), onde essa média se refere ao SCC que incide na extremidade esquerda quando não há conexão indo ou voltando. A probabilidade reflete o número de ligações duplas, direcionada e vacância, e na coluna assinalada por “Massa” enumeremos o número de elementos do tipo  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , da geração anterior que compõem esse SCC do tipo  $M_0$  na geração seguinte. 37

Tabela 5 – A tabela apresenta a descrição de alguns casos referentes às massas médias  $M_1$  e  $M_3$ , equações (3.22) e (3.24). Quando só é possível atravessar em uma direção sem a possibilidade de voltar, a massa  $M_1$ , representa todas as ligações que podem ser atravessadas quando se percorre a rede de uma extremidade a outra, enquanto a massa  $M_3$  corresponde a todas as ligações que pertencem ao SCC que inclui a extremidade esquerda. A probabilidade reflete o número de ligações duplas, direcionada e vacância, e na coluna assinalada por “Massa” enumeramos o número de elementos do tipo  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , da geração anterior que compõem esse SCC do tipo  $M_1$  e  $M_3$  na geração seguinte. . . . 38

Tabela 6 – A tabela apresenta a descrição de alguns casos referentes à massa média  $M_2$ , equação (3.23), que se refere ao SCC que inclui as duas extremidades, sendo assim possível atravessar em ambas as direções. A probabilidade reflete o número de ligações duplas, direcionada e vacância, e na coluna assinalada por “Massa” enumeramos o número de elementos do tipo  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , da geração anterior que compõem esse SCC do tipo  $M_2$  na geração seguinte. 39



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	17
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	19
2.1	percolação	19
2.2	redes hierárquicas	20
2.3	redes direcionadas isotropicamente	21
2.4	expoentes geométricos da rede hierárquica diamante	23
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b>	31
3.1	expoentes geométricos da rede hierárquica diamante com ligações direcionadas	31
3.1.1	<i>probabilidade na geração superior</i>	31
3.1.2	<i>expoente do comprimento de correlação</i>	32
3.1.3	<i>dimensão fractal</i>	35
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	40
	<b>REFERÊNCIAS</b>	44
	<b>ANEXO A-REDES HIERÁRQUICAS ISOTROPICAMENTE DIRECIONADAS.</b>	49

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria da percolação se popularizou na comunidade da física e passou a ser intensamente estudada [11–22]. Ela possui uma ampla aplicação para diversos problemas como a compreensão de materiais condutores [23, 24], a fractalidade de litorais [25, 26], redes [27–29], turbulência [30, 31], modelos magnéticos [32–36], colóides [37, 38], entre outros. Portanto, as propriedades de percolação das redes são de interesse significativo.

As redes hierárquicas foram introduzidas na física estatística há mais de 40 anos [39–41], e desde então, essa técnica tem sido aplicada na compreensão de vários problemas de interesse físico [42–50]. Dentre as razões para tal interesse está a possibilidade de obter soluções exatas. Apesar de terem se passado algumas décadas da introdução de redes hierárquicas na física estatística, essa técnica ainda se mostra útil [50, 51]. Ao longo dos anos, grande parte dessa atenção tem sido focada nos casos limites de percolação padrão, em que as ligações em ambas as direções são presentes ou ausentes simultaneamente, e de percolação direcionada, na qual apenas ligações em uma direção preferencial são permitidas. Enquanto a percolação padrão representa um dos modelos mais simples para investigar fenômenos críticos em física estatística de equilíbrio [18], a percolação direcionada tornou-se um paradigma para investigar as transições de fase fora do equilíbrio [52]. Além disso, foi demonstrado que o caso isotrópico, onde as ligações em ambas as direções opostas estão presentes com a mesma probabilidade é um caso particular, com qualquer quantidade de anisotropia conduzindo o sistema para a mesma classe de universalidade como a de percolação direcionada [9, 53, 54].

O caso da percolação em redes direcionadas isotrópicas tem recebido menos atenção do que os demais [6]. Este modelo modificado de percolação deve ser particularmente relevante para a compreensão de um grande número de sistemas físicos. Por exemplo, da mesma forma que a percolação padrão mostrou estar relacionada a outros modelos em mecânica estatística [33], se espera que a percolação em redes direcionadas isotropicamente pode estar relacionada com sistemas estatísticos com interações não simétricas [55]. Isto demonstra que identificar os componentes conectados do sistemas com interações não simétricas pode elucidar questões sobre a controlabilidade [56] e observabilidade [57] desses sistemas. A percolação com ligações direcionadas também foi investigada no campo da dinâmica de tráfego [58]. Redner [8, 9, 59] formulou o problema da percolação em redes direcionadas isotropicamente como um modelo aleatório de circuito resistor-diodo-isolantes, no qual ligações direcionadas simples representam os diodos, permitindo que a corrente flua em apenas uma direção. As ligações duplas em direções

opostas são representadas por resistores e ligações ausentes representadas por isolantes [6]. O presente trabalho tem o objetivo de entender o comportamento de redes hierárquicas com dois nós raízes através da teoria de percolação. Calcular a probabilidade de se percorrer a rede de uma extremidade a outra e determinar os expoentes críticos e a dimensão fractal, bem como compreender o método usado em redes não direcionadas pode ser aplicado para redes direcionadas isotropicamente. A partir desse estudo, determinaremos os expoentes críticos e a dimensão fractal dos aglomerados percolantes críticos dessas redes.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 percolação

O conceito da percolação está relacionado com questões que surgem quando se considera a conectividade geométrica em objetos da natureza e a estrutura dos aglomerados (conjunto de objetos conectados) [60]. A percolação pode ser de dois tipos: percolação de sítios e percolação de ligações, como mostra a Figura 1). O modelo de percolação tem como variável fundamental a fração de ocupação  $P$ . Uma transição de fase ocorre quando a fração de ocupação  $P = P_c$  (onde  $P_c$  é conhecido como ponto crítico). Abaixo desse ponto, todos os agregados ocupam uma fração desprezível da rede [18].

Na percolação, a concentração de sítios ocupados  $P$  desempenha papel semelhante ao da temperatura na transição de fase magnética [33]. Por exemplo, considere  $P_\infty$  a probabilidade de um sítio (ou ligação) pertencer ao aglomerado infinito, isto é, àquele que atravessa a rede. Se  $P$  é pequeno ( $P < P_c$ ), então  $P_\infty = 0$ . Para ( $P > P_c$ ),  $P_\infty$  tem um comportamento semelhante ao da magnetização e cresce segundo uma lei de potência

$$P_\infty \sim (P - P_c)^\beta, \quad (2.1)$$

onde o expoente  $\beta$  descreve o comportamento crítico de  $P_\infty$  associado à transição de percolação e é por isso chamado de expoente crítico. Apesar de modelos de percolação definidos em diferentes redes implicarem em diferentes valores para  $P_c$ , o valor de  $\beta$  permanece o mesmo para todos eles, dependendo somente da dimensão do espaço. Tal fenômeno é chamado de *universalidade* e um expoente crítico serve para classificar transições de fase em classes de universalidade [61].

Outro expoente crítico que pode ser determinado, chamado  $\nu$ , caracteriza como o comprimento de correlação  $\xi$  diverge em  $P_c$ , na forma da seguinte relação  $\xi \sim |P - P_c|^{-\nu}$ . Podemos calcular também a dimensão fractal da rede estudada, para tal imagine uma rede de comprimento  $L$ , a massa  $M$  dessa rede escala com o tamanho linear  $L$  da seguinte forma  $M \sim L^d$  onde  $d$  é a dimensão euclidiana usual. Benoit Mandelbrot introduziu a "geometria fractal" [62] como uma descrição unificadora de fenômenos naturais que não são uniformes, mas ainda obedecem ao poder simples desta lei, assumindo a seguinte forma

$$M \sim L^{d_f}, \quad (2.2)$$

onde  $d_f$  é a dimensão fractal dos aglomerados percolantes críticos, neste caso  $M$  representa a

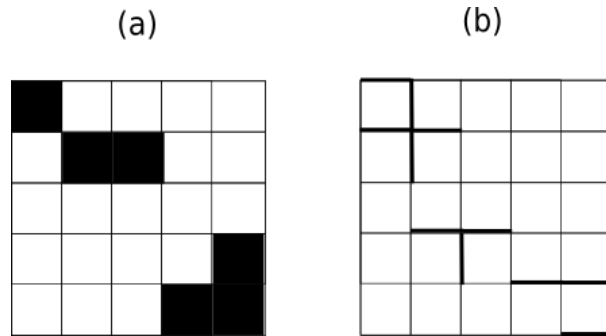


Figura 1 – Exemplo de percolação em redes quadradas de lado  $L = 5$ . Em (a) temos a de percolação de sítio e em (b) temos a percolação de ligação. Em nenhuma das duas o estado de percolação foi atingido, de forma que o sistema se encontra desconectado.

massa do cluster infinito(ou seja, do maior cluster da rede), que para redes em duas dimensões, por exemplo,  $d_f$  assume o valor aproximado de 1.89.

Na teoria da percolação, cutting bonds (ou "ligações de corte", em português) referem-se a ligações (ou arestas) em uma rede que, se removidas, dividem a rede em duas ou mais componentes desconectadas. Essas ligações são importantes porque, quando uma fração suficientemente grande de ligações são removidas, a rede pode se tornar completamente desconectada, ou seja, não haverá mais caminhos conectando uma parte da rede à outra. Para a massa das cutting bonds ( $M_{cb}$ ) temos uma relação um pouco diferente onde  $M_{cb} \sim L^{1/\nu}$ . Isso implica que

$$d_{f_{cb}} = \frac{1}{\nu}, \quad (2.3)$$

onde  $d_{f_{cb}}$  é a dimensão fractal das cutting bonds [63].

## 2.2 redes hierárquicas

Existem diversos tipos de redes hierárquicas, porém as mais estudadas e mais utilizadas são as redes com dois nós raízes que podem assumir diversas formas e diferem quanto às suas configurações estruturais a partir da primeira geração,  $g = 1$ , como mostra a Figura 2. Com isso percebe-se que existe uma infinidade de configurações possíveis, cada uma mais elaborada e complexa que a outra. Essas redes descrevem modelos com interações pareadas dos vizinhos mais próximos [50]. Cada ligação da geração inicial é convertida em uma configuração escolhida e a partir de então cada nó será ligado por uma configuração anterior. Com esse procedimento redes de diferentes dimensões efetivas podem ser obtidas [39]. Vale mencionar que redes hierárquicas com mais de dois nós raízes já foram estudadas, como por exemplo, na

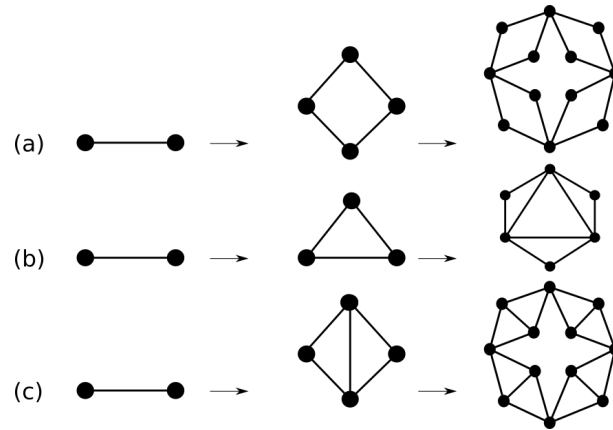


Figura 2 – As redes hierárquicas com dois nós raízes descrevem modelos com interações pareadas dos vizinhos mais próximos, onde o número de estados de um nó pode ser arbitrário. Elas podem assumir diversas formas e diferem quanto às suas configurações estruturais a partir de  $g = 1$ . A rede (a) é conhecida como rede hierárquica diamante [1], a rede (b) é conhecida como pseudo fractal [2], e a rede (c) é a rede hierárquica de pontes de Wheatstone [3].

investigação de percolação em redes Apolonianas [64].

### 2.3 redes direcionadas isotropicamente

A presença de ligações direcionadas com probabilidade  $P_1$  torna necessário o emprego de um conceito de agregado de sítios diferente da percolação clássica, o chamado agregado fortemente conectado, ou do inglês Strongly Connected Component (SCC) [65]. Um agregado é chamado fortemente conectado se existe um caminho em cada direção entre cada par de vértices do agregado. Ou seja, existe um caminho do primeiro vértice do par para o segundo e outro caminho do segundo vértice para o primeiro. O maior SCC de uma rede é definido como agregado gigante fortemente conectado, ou do inglês Giant Strongly Connected Component (GSCC) [66]. Um exemplo de uma rede particionada em SCCs pode ser encontrado na Figura 3, onde cada região marcada representa um SCC. Por exemplo, os vértices 1, 2 e 3 estão no mesmo SCC, pois todos podem ser alcançados através de um caminho de arestas [4].

A percolação de ligações direcionadas isotropicamente é o caso onde as ligações em direções opostas estão presentes com a mesma probabilidade. Foi conjecturado que este modelo é da mesma classe de universalidade que a percolação padrão [5, 53]. Porém esses trabalhos focaram nos conjuntos de nós que podem ser alcançados a partir de um determinado ponto. De fato, ao considerar as ligações direcionadas, é possível que o sítio A possa ser alcançado do sítio B, enquanto o sítio B não pode ser alcançado a partir do sítio A, o que portanto, exige uma redefinição de um cluster [6]. Definindo um aglomerado gigante formado por todos os locais

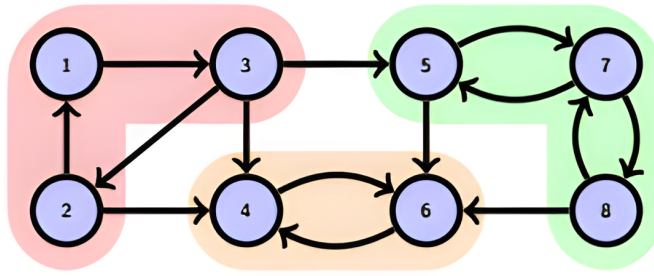


Figura 3 – Exemplo de uma rede particionada em SCCs onde os vértices 1, 2, 3 estão no mesmo SCC, assim como 4,6 e 5,7,8. Pois todos podem se alcançar através de um caminho de arestas. Note que como as ligações são direcionadas, nem sempre é possível ir e voltar ao mesmo ponto, por exemplo é possível ir de 3 para 5, mas não é possível ir de 5 para 3. Figura retirada de [4].

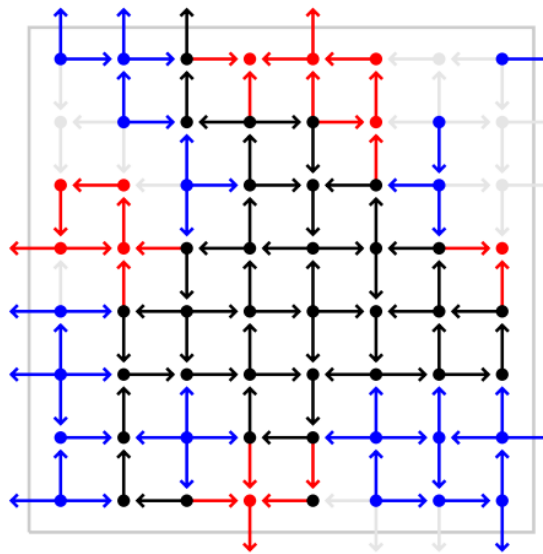


Figura 4 – Rede quadrada de  $L = 8$  onde cada par de vizinhos mais próximos é conectado por uma ligação direcionada [5]. Preto indica nós e ligações que compõem o maior componente fortemente conectado (GSCC), ou seja, o maior conjunto de nós que podem ser mutuamente alcançados uns dos outros. Vermelho indica nós e ligações fora do GSCC que podem ser alcançados a partir de nós no GSCC. Azul indica nós e ligações fora do GSCC de onde os nós no GSCC podem ser alcançados. O maior componente de saída/entrada (GOUT/GIN) inclui todos os nós do GSCC acrescidos dos nós vermelho/azul, respectivamente. Cinza indica nós e ligações fora de GIN e GOUT. Ligações saindo da caixa representam as conexões através da condição de contorno periódica. Figura retirada de [6].

que podem ser alcançados a partir de um determinado local seguindo as ligações direcionadas (GOUT) [66] é possível determinar o ponto crítico onde tal aglomerado é formado. Não há necessidade lógica para que esses dois pontos sejam os mesmos (GOUT e GSCC), deixando a possibilidade de duas transições de fase distintas existentes neste modelo [67].

Redner [8,9] e Dorogovtsev [10] resolveram exatamente a percolação de ligações direcionadas em uma rede hierárquica. Sendo as probabilidades  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  em uma dada geração do processo, os cálculos do grupo de renormalização permitem determinar as probabilidades



Figura 5 – Probabilidades para  $g = 0$ , onde a probabilidade da ligação estar presente é  $P_0$  e da ligação estar ausente é  $1 - P_0$ .

$P'_0$ ,  $P'_1$  e  $P'_2$ , da geração seguinte. Os estados invariantes de escala são os pontos fixos do grupo de renormalização. Surpreendentemente, esta rede hierárquica tem semelhanças com a rede quadrada [8, 9].

#### 2.4 expoentes geométricos da rede hierárquica diamante

Iremos nessa seção calcular o conjunto completo de expoentes geométricos na rede hierárquica diamante. Para ilustrar a técnica de solução de redes hierárquicas, chamada grupo de renormalização, vamos tratar primeiramente do problema de percolação clássica, isso é, sem ligações direcionadas. Em particular vamos tratar do problema da rede diamante.

Grupo de renormalização de redes hierárquicas é uma técnica usada em física estatística e matemática aplicada para estudar o comportamento de sistemas complexos, tal técnica consiste em quebrar um sistema em pedaços cada vez menores, criando uma hierarquia de escalas. Essa hierarquia é então usada para estudar o comportamento do sistema em diferentes níveis de resolução. No contexto dos modelos de rede, o grupo de renormalização envolve na construção de uma rede de tamanho crescente, com cada nível da rede representando uma versão mais granulada do sistema. Em cada estágio, as interações entre os sites vizinhos da rede são simplificadas, permitindo uma análise mais fácil das propriedades do sistema. Tal técnica tem sido usada para estudar uma variedade de sistemas físicos, incluindo fenômenos críticos, transições de fase e sistemas desordenados. Ele fornece uma ferramenta poderosa para entender o comportamento de sistemas complexos e tem aplicações em física, química e ciência dos materiais [68–71].

Nosso primeiro passo será determinar a probabilidade de encontrar as configurações que permitem o transporte de uma extremidade à outra da rede para a geração seguinte  $g + 1$ . Para isso, precisamos analisar a geração anterior  $g$ , onde temos duas probabilidades associadas  $P_0$  e  $Q_0 = 1 - P_0$  (Figura 5), que representam a chance de uma ligação presente e ausente respectivamente.

Na geração seguinte  $g + 1 = 1$ , por exemplo, a rede apresenta 4 ligações, cada uma



com duas opções, presente ou ausente, chegamos a  $2^4 = 16$  configurações possíveis. Mas dessas 16, apenas 7 permitem a passagem de uma ponta a outra da rede (ver Figura 6). Com isso, podemos dizer que a probabilidade  $P_1$  de que exista uma conexão, pode ser determinado na forma

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0^4 + 4P_0^3(1 - P_0) + 2P_0^2(1 - P_0)^2, \\ P_1 &= 2P_0^2 - P_0^4, \end{aligned} \quad (2.4)$$

com base nesses cálculos percebemos que para as gerações seguintes ( $g + 1$ ) obtemos uma relação que mantém uma dependência com a geração anterior ( $g$ ). Por exemplo, para a geração 2, temos  $P_2 = 2P_1^2 - P_1^4$  e assim por diante. Logo para qualquer geração seguinte temos

$$P_{g+1} = 2P_g^2 - P_g^4, \quad (2.5)$$

e podemos definir essa equação da seguinte forma  $P_{g+1} = F(P_g)$ , ou seja,  $P_{g+1}$  é função da probabilidade da geração anterior.

Existe um valor no qual a probabilidade será a mesma para todas as gerações, o chamado ponto crítico ( $P_c$ ). Para redes onde  $P > P_c$  encontramos uma convergência para  $P_g = 1$ , à medida que  $g$  aumenta. Para redes onde  $P < P_c$  temos uma convergência para zero à medida que  $g$  aumenta (ver Figura 7) [1]. Usando a equação (2.4) podemos calcular o valor de  $P_c$ . Para tal iremos definir  $P^*$  e com isso calcular as raízes desse polinômio

$$\begin{aligned} P^* &= 2P^{*2} - P^{*4}, \\ (P^* - 1)P^*(P^{*2} + P^* - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Analisando a equação (2.6) concluímos que existem raízes em  $P^* = 0$  e  $P^* = 1$ . Tais raízes não satisfazem à condição de ponto crítico, pois uma representa a probabilidades de todos os pontos da rede estarem conectados e a outra de todos os pontos estarem desconectados. Existem mais duas raízes, uma delas negativa, que para o caso estudado não nos interessa. Com isso chegamos ao seguinte valor para o ponto crítico

$$P_c = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618034. \quad (2.7)$$

À medida que a rede aumenta ( $g$  cresce) o número de passos ( $L(g)$ ) necessários para ir de uma extremidade à outra da rede aumenta, concluímos que  $L(g)$  cresce de maneira exponencial e obedece a seguinte relação  $L(g) = 2^g$ .

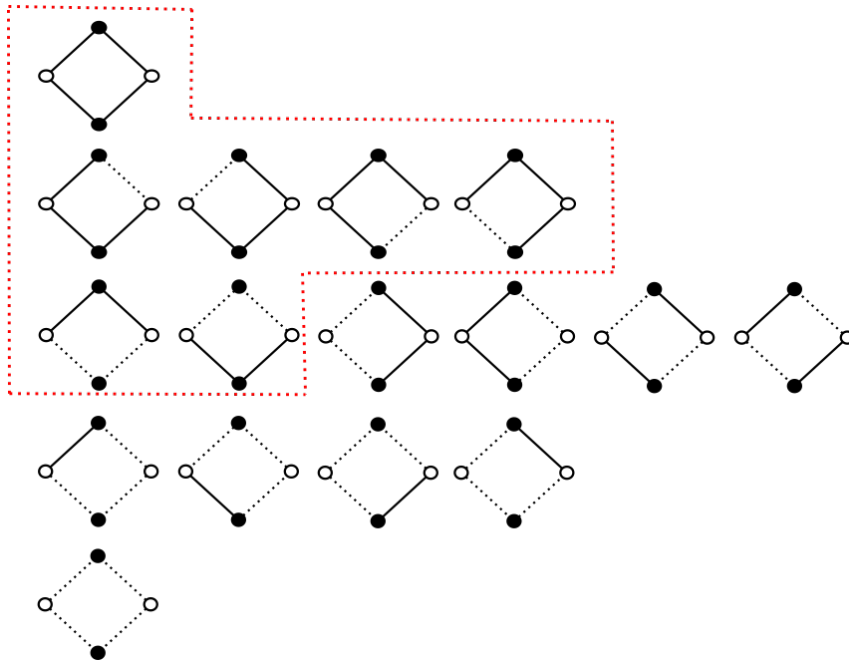


Figura 6 – Dado que uma rede hierárquica de geração  $g$  pode estar ou presente ou ausente, e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $2^4 = 16$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 16 apenas 7 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com isso a probabilidade em  $g + 1$  será a soma das probabilidades individuais dessas configurações que permitem a passagem. Por exemplo, caso as 4 ligações estejam presentes a probabilidade associada é  $P_g^4$  e caso apenas 3 ligações estejam presentes e uma ausente a probabilidade será  $P_g^3(1 - P_g)$ . Fazendo isso para essas 7 configurações, obtemos a probabilidade associada à geração seguinte como demonstrado na equação (2.5).

Vamos investigar agora como  $P_g$  diverge de  $P_c$  à medida que a geração aumenta.

Definindo  $\delta_g$  na forma

$$\delta_g = P_g - P^*, \quad (2.8)$$

analisando como a probabilidade se afasta (ou se aproxima) de  $P^*$ , obtemos que

$$P_{g+1} = P^* + \delta_{g+1}, \quad (2.9)$$

e da equação (2.5) temos

$$P^* + \delta_{g+1} = F(P_g) = F(P^* + \delta_g). \quad (2.10)$$

Usando série de Taylor temos

$$P^* + \delta_{g+1} = F(P^*) + \delta_g \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P=P^*} + \frac{\delta_g^2}{2} \left. \frac{d^2F}{dP^2} \right|_{P=P^*} + \dots, \quad (2.11)$$

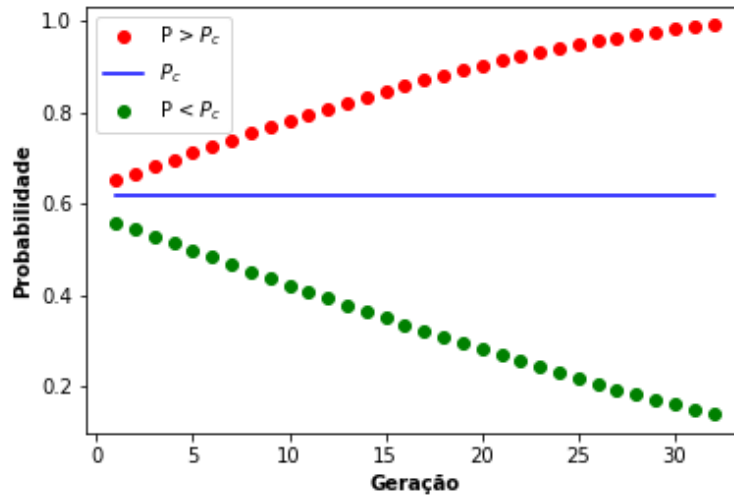


Figura 7 – O gráfico apresenta como a probabilidade se comporta caso esteja posta acima de  $P_c$  ou abaixo. Vemos que para valores acima, a probabilidade vai a 1 à medida que se crescem as gerações, caso o valor da probabilidade seja menor que  $P_c$  ela vai a 0. Caso não fosse possível calcular analiticamente o expoente  $\nu$ , esse gráfico permitiria o cálculo numérico desse expoente, já que o mesmo descreve como  $P_g$  diverge do ponto crítico à medida que a geração  $g$  aumenta.

para  $\delta_g \ll 1$ , isso implica que  $\delta_g^2 \ll \delta_g$ , logo podemos desconsiderá-lo. Lembrando ainda que  $F(P^*) = P^*$ , obtemos

$$\delta_{g+1} = \delta_g \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P=P^*}. \quad (2.12)$$

Sendo  $F = 2P^2 - P^4$ , a derivada fica

$$\frac{dF}{dP} = 4P(1 - P^2), \quad (2.13)$$

e aplicando os valores de  $P^*$ , temos que o único valor que não faz  $\delta_{g+1} = 0$  é  $P_c$ . Com isso chegamos à seguinte equação para  $\delta_{g+1}$

$$\delta_{g+1} = 4(P_c - P_c^3)\delta_g, \quad (2.14)$$

e substituindo o valor de  $P_c$ , chegamos ao seguinte resultado.

$$\frac{\delta_{g+1}}{\delta_g} = 6 - 2\sqrt{5} \approx 1.528. \quad (2.15)$$

A equação (2.15) significa que  $\delta_{g+1} > \delta_g$ , o que implica que a probabilidade se afasta do ponto crítico ( $P_c$ ) à medida que  $g$  aumenta, como tínhamos mencionado. Como  $\delta_{g+1}$  é multiplicado por um fator constante a cada geração, podemos pensar em uma forma de reescrever a equação (2.15), na forma

$$\delta_g = (6 - 2\sqrt{5})^g \delta_0, \quad (2.16)$$

e manipulando a equação de  $L(g)$ , obtemos que  $g = \frac{\ln(L(g))}{\ln 2}$ . Quando aplicado na equação (2.16), ela irá assumir a seguinte forma

$$\frac{\delta_g}{\delta_0} = (L(g))^{\log_2(6-2\sqrt{5})} = (L(g))^{y_g}, \quad (2.17)$$

onde  $y_g = \log_2(6 - 2\sqrt{5})$ .

Existe um comprimento  $L$  onde a rede estará com probabilidade próxima de 1 ou 0, ou seja, ela sempre conecta ou não conecta nunca. Supondo que existe uma geração  $g^*$ , onde  $\delta_{g^*} \approx 1$ , isso implica que

$$g^* \ln(6 - 2\sqrt{5}) = -\ln \delta_0, \quad (2.18)$$

onde esse  $g^*$  pode ser associado ao comprimento  $L$  na forma  $L = 2^{g^*}$ . Assim obtemos a relação entre o comprimento  $\xi$  e a distância inicial entre as probabilidades ( $\delta_0$ )

$$L \sim \delta_0^{-\nu}, \quad (2.19)$$

e com isso obtemos que o expoente crítico nesse caso será

$$\nu = \frac{1}{y_g} \approx 1.63528. \quad (2.20)$$

Outro expoente crítico que podemos determinar é a dimensão fractal  $d_f$ . Para o cálculo de  $d_f$  precisamos calcular primeiramente a massa, pois a mesma é proporcional a  $L^{d_f}$  (equação (2.2)). Para isso, temos que considerar tanto a “massa de ligação”  $m_1$ , proveniente das ligações presentes, quanto a “massa pendente”  $m_0$ , proveniente das ligações quebradas. Vamos usar as letras minúsculas  $m_1$  e  $m_0$  para as massas médias em uma geração  $g$ , e as letras maiúsculas  $M_1$  e  $M_0$  para as massas médias de uma geração  $g + 1$ .

Se consideramos a massa individual de cada configuração em uma geração  $g$ , juntamente com sua probabilidade e dividimos pela probabilidade em  $g + 1$ , obtemos as massas médias  $M_1$  e  $M_0$  em uma geração  $g + 1$ . No caso de  $M_1$  (ver tabela 1)

$$M_1 = \frac{1}{P_{g+1}} [4P_g^4 m_1 + 4P_g^3 (1 - P_g)(3m_1 + 2m_0) + 2P_g^2 (1 - P_g)^2 (2m_1 + 2m_0)], \quad (2.21)$$

$$M_1 = \frac{1}{P_{g+1}} [4P_g^2 (m_1 + m_0) + 4P_g^3 m_1 - 4P_g^4 (m_1 + m_0)].$$

Para  $M_0$  (ver tabela 2), obtemos

$$M_0 = \frac{1}{1 - P_{g+1}} [2P_g^2 (1 - P_g)^2 (4m_1 + 8m_0) + P_g (1 - P_g)^3 (2m_1 + 8m_0) + (1 - P_g)^4 (2m_0)],$$

$$M_0 = \frac{1}{1 - P_{g+1}} [2m_0 + 2P_g m_1 - P_g^2 (2m_1 + 4m_0) - 2P_g^3 m_1 + 2P_g^4 (m_1 + m_0)], \quad (2.22)$$

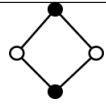
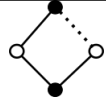
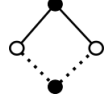
Diagrama	Probabilidade	Multiplicidade	Massa
	$P_g^4$	1	$4m_1$
	$P_g^3(1 - P_g)$	4	$3m_1 + 2m_0$
	$P_g^2(1 - P_g)^2$	2	$2m_1 + 2m_0$

Tabela 1 – Para o caso de  $M_1$  apenas as configurações que permitem o transporte é que serão contabilizadas para o cálculo da massa, ou seja, as 7 configurações que foram utilizadas para determinar a equação (2.4). Note que estamos procurando as configurações que conectam os dois extremos, da esquerda e da direita, os sítios vazados mostrados na tabela acima.

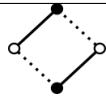
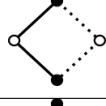
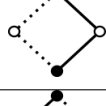
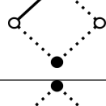
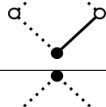

Diagrama	Probabilidade	Multiplicidade	Massa
	$P_g^2(1 - P_g)^2$	2	$m_1 + 2m_0$
	$P_g^2(1 - P_g)^2$	1	$2m_1 + 2m_0$
	$P_g^2(1 - P_g)^2$	1	$2m_0$
	$P_g(1 - P_g)^3$	2	$m_1 + 2m_0$
	$P_g(1 - P_g)^3$	2	$2m_0$
	$(1 - P_g)^4$	1	$2m_0$

Tabela 2 – O cálculo de  $M_0$  é um pouco mais complexo pois envolve a análise dos 9 casos onde não existe o transporte, entre os sítios extremos da esquerda e da direita (figura 6). Nessa tabela contamos a massa pendente associada ao sítio à esquerda. Por simetria a massa associada ao sítio à direita deve obedecer a mesma relação.

as equações (2.21) e (2.22) são válidas para qualquer  $P_g$ . No ponto crítico, temos que  $P_g = P_{g+1} = P_c$ , e com alguma álgebra chega-se a

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(3 - \sqrt{5}) & 2(3 - \sqrt{5}) \\ 3 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

onde os autovalores  $\lambda$  da matriz 2x2 são

$$\lambda_{\pm} = 7 - 2\sqrt{5} \pm \sqrt{73 - 32\sqrt{5}}. \quad (2.24)$$

Para ir de uma geração para a próxima, será necessário aplicar a matriz 2x2 da equação (2.23) novamente. Assim concluímos que

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} 4(3 - \sqrt{5}) & 2(3 - \sqrt{5}) \\ 3 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}^g \begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}_0, \quad (2.25)$$

e sendo  $V_+$  e  $V_-$  os autovetores associados, temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4(3 - \sqrt{5}) & 2(3 - \sqrt{5}) \\ 3 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}^g V_+ &= \lambda_+^g V_+, \\ \begin{pmatrix} 4(3 - \sqrt{5}) & 2(3 - \sqrt{5}) \\ 3 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}^g V_- &= \lambda_-^g V_-. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Supondo que o vetor  $(m_{10}, m_{00}) = \alpha_1 V_+ + \alpha_2 V_-$ , temos

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}_g = \lambda_+^g (\alpha_1 V_+ + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^g \alpha_2 V_-), \quad (2.27)$$

e supondo que  $\lambda_+ > \lambda_-$  implica que  $\frac{\lambda_-}{\lambda_+} < 1$ . No limite de  $g$  muito grande, podemos reescrever a equação (2.27) da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}_g = \alpha_1 \lambda_+^g V_+. \quad (2.28)$$

Com esse resultado, concluímos que o único autovalor que é relevante para o caso estudado é o maior,  $\lambda_+$ . Da equação (2.28) faremos surgir  $(2^g)^{d_f} = L^{d_f}$ , isso resulta em

$$\lambda_+ = 7 - 2\sqrt{5} + \sqrt{73 - 32\sqrt{5}} = 2^{\log_2(7 - 2\sqrt{5} + \sqrt{73 - 32\sqrt{5}})}, \quad (2.29)$$

$$d_f = \log_2 \left( 7 - 2\sqrt{5} + \sqrt{73 - 32\sqrt{5}} \right) \approx 1.89929, \quad (2.30)$$

onde o expoente crítico fractal  $d_f$  determina o tamanho do maior aglomerado de percolação [72].

Para o caso da massa das cutting bonds, o cálculo envolve analisar as chamadas ligações essenciais (as ligações que ao serem rompidas fazem com que não haja transporte na rede). Nem todas as configurações que permitem o transporte contêm essas ligações. Aqui vamos empregar a letra maiúscula  $M_{cb}$  para designar a massa média de cutting bonds em uma geração  $g + 1$  e a letra minúscula  $m_{cb}$  para a massa média de cutting bonds em uma geração  $g$ . Multiplicando a massa pela sua probabilidade associada, chegamos a seguinte equação para o

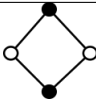
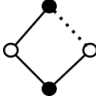
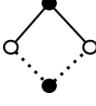
Diagrama	Probabilidade	Multiplicidade	Massa
	$P_g^4$	1	0
	$P_g^3(1 - P_g)$	4	$2m_{cb}$
	$P_g^2(1 - P_g)^2$	2	$2m_{cb}$

Tabela 3 – Para o cálculo da massa das cutting bonds, analisaremos as chamadas ligações essenciais, ou seja, as ligações que ao serem rompidas fazem com que não haja transporte na rede, cuja a massa é  $m_{cb}$ . Na primeira configuração que permite o transporte as quatro ligações estão presentes, com isso mesmo rompendo uma das quatro ligações o transporte não é interrompido, fazendo com que não haja ligações essenciais, logo  $m_{cb}$  é zero. Para o segundo caso onde existem três ligações presentes e uma ausente, existiram duas ligações essenciais e para o último caso, onde existem duas ligações presentes e uma ausente, existiram também duas ligações essenciais.

cálculo de  $M_{cb}$  (ver tabela 3)

$$M_{cb} = \frac{1}{P_{g+1}} [8P_g^3(1 - P_g)m_{cb} + 4P_g^2(1 - P_g)^2m_{cb}], \quad (2.31)$$

e para  $P_{g+1} = P_g = P_c$ , chegamos a seguinte relação

$$\frac{M_{cb}}{m_{cb}} = 4P_c(1 - P_c^2). \quad (2.32)$$

Comparando a equação (2.32) com a (2.14), observamos que

$$\frac{M_{cb}}{m_{cb}} = \frac{\delta_{g+1}}{\delta_g} = 6 - 2\sqrt{5}, \quad (2.33)$$

isso indica que

$$d_{f_{cb}} = \frac{1}{\nu} = \log_2(6 - 2\sqrt{5}) \approx 0.6115, \quad (2.34)$$

confirmando assim a conjectura do Coniglio [63], para o caso da rede diamante. Vale a pena mencionar que nossos cálculos (não mostrados aqui) para a rede hierárquica de pontes de Wheatstone e para o pseudo fractal também confirmam essa mesma relação.

### 3 RESULTADOS

#### 3.1 expoentes geométricos da rede hierárquica diamante com ligações direcionadas

Nessa seção calcularemos o conjunto completo de expoentes geométricos para a rede hierárquica da Figura 8 a qual nomeamos de rede hierárquica diamante com ligações direcionadas. A solução para outras redes, como a rede hierárquica de pontes de wheatstone com ligações direcionadas, pode ser encontrada no “Anexo A”. Primeiramente será preciso determinar a probabilidade na geração  $g$ , onde existem 4 possibilidades. Com probabilidade  $P_2$ , pode-se percorrer a ligação em ambas as direções. Alternativamente a ligação pode ser direcionada, isso é, pode-se percorrer em uma direção e não na outra. Como consideramos o caso isotrópico, as duas possíveis direções têm a mesma probabilidade  $P_1/2$ . Finalmente, a ligação pode ser uma vacância, onde não pode-se percorrer em nenhuma direção. Isso acontecerá com probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$  (ver Figura 9). Temos portanto 2 parâmetros independentes  $P_2$  e  $P_1$ . Para a geração  $g + 1$  precisamos, portanto, considerar 2 possibilidades,  $P'_2$  será a chance da geração seguinte poder ser atravessada em 2 direções, e  $P'_1/2$  será a possibilidade da rede ser atravessada apenas em uma direção específica.

##### 3.1.1 probabilidade na geração superior

Para a probabilidade  $P'_1/2$  temos que considerar todas as configurações que permitem ir de uma extremidade a outra da rede, mas não permitem voltar (ver Figura 10). Com isso chegamos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{P'_1}{2} = & 4P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 + 8P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 2P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 + 20P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 \\ & + 4 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 + 8P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 + 12 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2 + 5 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4, \quad (3.1) \\ \frac{P'_1}{2} = & \frac{P_1^2}{2} - \frac{3}{16}P_1^4 + 2P_1P_2 - \frac{3}{2}P_1^3P_2 - \frac{7}{2}P_1^2P_2^2 - 2P_1P_2^3. \end{aligned}$$

Para a probabilidade  $P'_2$  temos que considerar todas as configurações que permitem ir de uma extremidade a outra da rede e voltar (ver Figura 11). Com isso obtemos que

$$\begin{aligned} P'_2 = & P_2^4 + 2P_0^2P_2^2 + 4P_0P_2^3 + 8P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 8 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^3 \\ & + 16 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 + 8 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2 + 2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4, \quad (3.2) \\ P'_2 = & \frac{P_1^4}{8} + P_1^3P_2 + 2P_2^2 + 2P_1^2P_2^2 - P_2^4. \end{aligned}$$



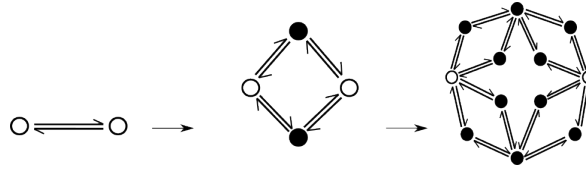


Figura 8 – A figura apresenta um exemplo de rede hierárquica, na qual as suas configurações estruturais a cada geração  $g$  se assemelham à rede diamante, mas diferentemente dela, essa rede apresenta ligações direcionadas. Note que essa rede possui dois caminhos possíveis entre dois nós, sendo cada caminho representado por uma seta, indicando assim a única direção possível.

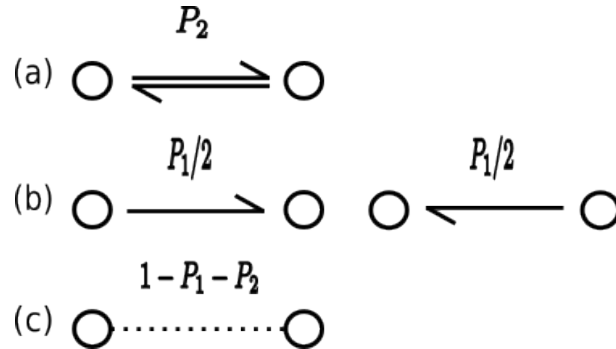


Figura 9 – Na geração  $g = 0$  a rede da Figura 8 apresenta quatro probabilidades possíveis, uma quando as ligações apresentarem duas direções possíveis  $P_2$  (a), duas quando as ligações apresentarem apenas uma direção possível  $P_1/2$  (b) e por fim quando a ligação for ausente  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$  (c).

Para determinar as raízes desses dois polinômios é preciso definir que  $P'_1 = P_1 = P_1^*$  e  $P'_2 = P_2 = P_2^*$ , com isso chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{P_1^*}{2} = \frac{P_1^{*2}}{2} - \frac{3}{16}P_1^{*4} + 2P_1^*P_2^* - \frac{3}{2}P_1^{*3}P_2^* - \frac{7}{2}P_1^{*2}P_1^{*2} - 2P_1^*P_2^{*3} \\ P_2^* = \frac{P_1^{*4}}{8} + P_1^{*3}P_2^* + 2P_2^{*2} + 2P_1^{*2}P_2^{*2} - P_2^{*4} \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde as únicas raízes entre 0 e 1 são  $P_{1C} = 2\sqrt{5} - 4 \approx 0.4721$  e  $P_{2C} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \approx 0.3819$ .

### 3.1.2 expoente do comprimento de correlação

As equações de transição para gerações superior podem ser escritas na forma geral

$$\frac{P'_1}{2} = \sum_{\Sigma n_i=4} A_{n_0, n_1, n_2} P_0^{n_0} \left(\frac{P_1}{2}\right)^{n_1} P_2^{n_2}, \quad (3.4)$$

$$P'_2 = \sum_{\Sigma n_i=4} B_{n_0, n_1, n_2} P_0^{n_0} \left(\frac{P_1}{2}\right)^{n_1} P_2^{n_2}, \quad (3.5)$$

onde os  $A_{n_0, n_1, n_2}$  e  $B_{n_0, n_1, n_2}$  podem ser encontrados a partir das equações (3.1) e (3.2). Como as probabilidades  $P'_1$  e  $P'_2$  são funções de duas variáveis, onde  $P'_1(P_1, P_2)$  e  $P'_2(P_1, P_2)$ , fazendo-se

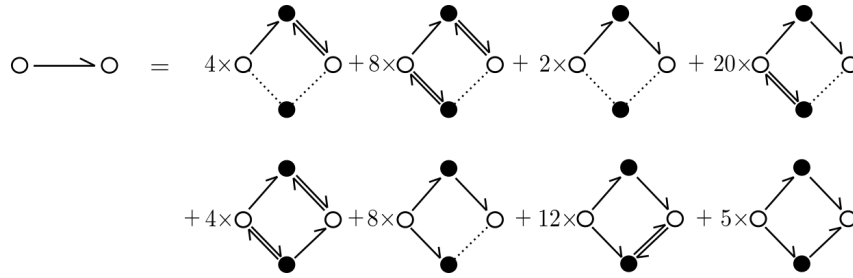


Figura 10 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^4 = 256$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 256 apenas 63 permitem a passagem de uma extremidade à outra da rede, sem a probabilidade de voltar. Essa probabilidade é definida como  $P'_1/2$ .

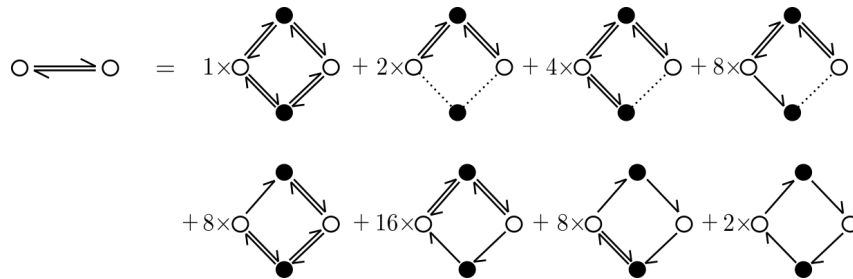


Figura 11 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^4 = 256$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 256 apenas 49 permitem a passagem de uma extremidade à outra da rede, com a probabilidade de ir e voltar. Essa probabilidade é definida como  $P'_2$ .

necessário a utilização de derivadas parciais. Utilizando a matriz Jacobiana que é dada pela equação

$$J(P_1, P_2) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

onde  $J_{11} = \frac{\partial P'_1}{\partial P_1}$ ,  $J_{12} = \frac{\partial P'_1}{\partial P_2}$ ,  $J_{21} = \frac{\partial P'_2}{\partial P_1}$  e  $J_{22} = \frac{\partial P'_2}{\partial P_2}$ . Calculando a derivada parcial  $J_{11}$  temos

$$J_{11} = 2 \sum_{\sum n_i=4} A_{n_0, n_1, n_2} \left[ \frac{n_1}{2^{n_1}} P_0^{n_0} P_1^{n_1-1} P_2^{n_2} - \frac{n_0}{2^{n_1}} P_0^{n_0-1} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \right], \quad (3.7)$$

$$J_{11} = \sum_{\sum n_i=3} P_0^{n_0} \left( \frac{P_1}{2} \right)^{n_1} P_2^{n_2} [(n_1 + 1)A_{n_0, n_1+1, n_2} - 2(n_0 + 1)A_{n_0+1, n_1, n_2}],$$

e expandindo a equação e substituindo os valores de  $P_{1C}$  e  $P_{2C}$  obtemos

$$J_{11} = 4P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2 + 8P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2^2 + 4P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^0 + 24P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 - 8P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 \quad (3.8)$$

$$+ 16P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^0 - 4P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 4P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0,$$

$$J_{11} = 2(5\sqrt{5} - 11). \quad (3.9)$$

Repetindo o mesmo processo para as demais derivas parciais, obtemos

$$J_{12} = \sum_{\Sigma n_i=3} P_0^{n_0} \left(\frac{P_1}{2}\right)^{n_1} P_2^{n_2} [2(n_2 + 1)A_{n_0, n_1, n_2+1} - 2(n_0 + 1)A_{n_0+1, n_1, n_2}], \quad (3.10)$$

$$J_{12} = 8P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^0 + 16P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 - 16P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 32P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^0 \quad (3.11)$$

$$- 24P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 8P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0,$$

$$J_{12} = 8(4\sqrt{5} - 9), \quad (3.12)$$

$$J_{21} = \sum_{\Sigma n_i=3} P_0^{n_0} \left(\frac{P_1}{2}\right)^{n_1} P_2^{n_2} \left[ \frac{(n_1 + 1)}{2} B_{n_0, n_1+1, n_2} - (n_0 + 1) B_{n_0+1, n_1, n_2} \right], \quad (3.13)$$

$$J_{21} = 8P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 12P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 4P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0, \quad (3.14)$$

$$J_{21} = 2(7 - 3\sqrt{5}), \quad (3.15)$$

$$J_{22} = \sum_{\Sigma n_i=3} P_0^{n_0} \left(\frac{P_1}{2}\right)^{n_1} P_2^{n_2} [(n_2 + 1)B_{n_0, n_1, n_2+1} - (n_0 + 1)B_{n_0+1, n_1, n_2}], \quad (3.16)$$

$$J_{22} = 4P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2 + 8P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2^2 + 16P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 + 16P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 \quad (3.17)$$

$$+ 32P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 8P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0,$$

$$J_{22} = 6(7 - 3\sqrt{5}), \quad (3.18)$$

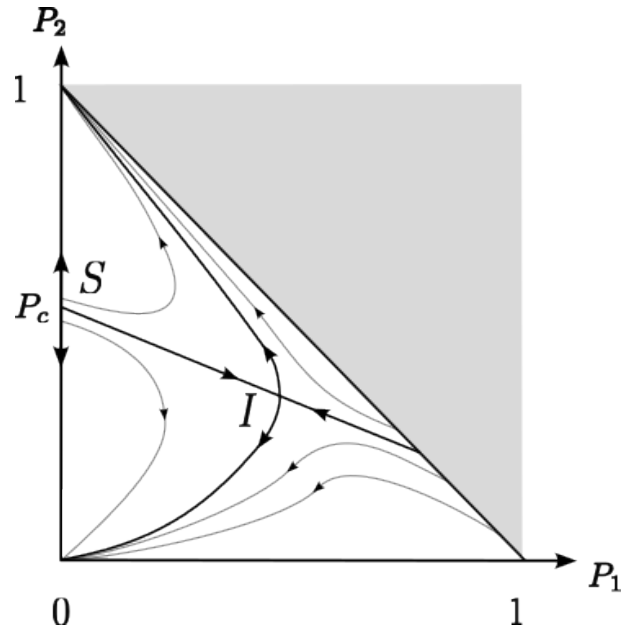


Figura 12 – Diagrama de fases para percolação de ligações isotropicamente direcionada na rede hierárquica da figura 8. As direções das linhas indicam o fluxo do grupo de renormalização. A linha  $P_2 + P_1/2 = P_c$ , onde  $P_c = (\sqrt{5} - 1)/2$  representa o ponto crítico para a rede padrão. O grupo de renormalização mostra que qualquer ponto da reta é um ponto crítico, e  $S = (0, P_c)$  corresponde ao ponto crítico de percolação padrão, exibindo o mesmo comportamento invariante de escala que o ponto  $I$  localizado ao longo da linha crítica.

e substituindo os valores de  $J_{11}$ ,  $J_{12}$ ,  $J_{21}$  e  $J_{22}$ , obtemos a seguinte matriz

$$J(P_{1C}, P_{2C}) = \begin{pmatrix} 2(5\sqrt{5} - 11) & 8(4\sqrt{5} - 9) \\ 2(7 - 3\sqrt{5}) & 6(7 - 3\sqrt{5}) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

onde seus autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6 - 2\sqrt{5} \approx 1.52786, \\ \lambda_2 &= 2(7 - 3\sqrt{5}) \approx 0.583592, \\ \vec{V}_1 &= \left( \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5}), 1 \right), \\ \vec{V}_2 &= (-2, 1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

O autovalor  $\lambda_1 > 1$  indica que qualquer desvio da condição crítica leva aos estados triviais  $P_1 = P_2 = 0$  e  $P_2 = 1$ . O autovalor  $|\lambda_2| < 0$  indica que desvios ao longo da linha crítica levarão o sistema de volta ao ponto crítico  $P_1 = P_{1C}$ ,  $P_2 = P_{2C}$ .

### 3.1.3 dimensão fractal

Para o cálculo da dimensão fractal, devemos considerar a massa associada a todas as configurações possíveis, ou seja,  $4^4 = 256$ , não apenas as que permitem a percolação, pois todas

contribuíram para a dimensão fractal. Para tal, se faz necessário definir quatro massas distintas  $m_0, m_1, m_2$  e  $m_3$  na geração  $g$ . Quando não é possível percorrer a rede em nenhuma das duas direções,  $m_0$  é a massa média de um SCC que incide em apenas um dos extremos da rede.  $m_1$  é a massa média de todas as ligações direcionadas que formam os caminhos em uma direção quando não existe o caminho na direção contrária.  $m_2$  é a massa média do SCC que conecta aos dois extremos, quando é possível percorrer em ambas as direções. Finalmente, quando existir o caminho em apenas uma direção, se apenas um dos nós terminais faz parte de um SCC na escala superior, as ligações desse caminho direcionado não necessariamente farão parte de um SCC superior, mas um SCC incidente ao terminal será adicionado ao SCC superior. Desta forma, definimos  $m_3$  a massa média de um SCC ligando apenas um extremo quando existe um caminho direcionado. Na geração seguinte  $g + 1$ , as massas médias são respectivamente  $M_0, M_1, M_2$  e  $M_3$ .

A massa média  $M_0$  está associada às configurações que não permitem a percolação, assim  $P'_0$  representa a probabilidade na geração seguinte de não haver um caminho que leve a outra extremidade da rede, ou seja, as configurações que não permitem a percolação na rede. Podemos assim escrever de forma geral a equação para  $M_0$ , que obedece a seguinte relação

$$M_0 P'_0 = \sum_j P_0^{n_{0j}} \left( \frac{P_1}{2} \right)^{n_{1j}} P_2^{n_{2j}} (H_{00j} m_0 + H_{01j} m_1 + H_{02j} m_2 + H_{03j} m_3), \quad (3.21)$$

onde  $n_{0j}, n_{1j}$  e  $n_{2j}$  são o números de vacância, direcionada e duplas (respectivamente) na configuração  $j$ . Os  $H_{0ij}$  representam, para a configuração  $j$ , quantas massas do tipo “ $i$ ” coalescem para formar a massa  $M_0$  na geração superior, onde a tabela 4 ilustra de que forma seus valores são calculados. Seguindo a mesma lógica, podemos escrever as demais massas médias como

$$M_1 \frac{P'_1}{2} = \sum_j P_0^{n_{0j}} \left( \frac{P_1}{2} \right)^{n_{1j}} P_2^{n_{2j}} (H_{10j} m_0 + H_{11j} m_1 + H_{12j} m_2 + H_{13j} m_3), \quad (3.22)$$

onde os  $H_{1ij}$  representam, para a configuração  $j$ , quantas massas do tipo “ $i$ ” coalescem para formar a massa  $M_1$  na geração superior e a tabela 5 ilustra de que forma seus valores são calculados

$$M_2 P'_2 = \sum_j P_0^{n_{0j}} \left( \frac{P_1}{2} \right)^{n_{1j}} P_2^{n_{2j}} (H_{20j} m_0 + H_{21j} m_1 + H_{22j} m_2 + H_{23j} m_3), \quad (3.23)$$

onde os  $H_{2ij}$  representam, para a configuração  $j$ , quantas massas do tipo “ $i$ ” coalescem para formar a massa  $M_2$  na geração superior e a tabela 6 ilustra de que forma seus valores são calculados. Por fim podemos escrever a expressão para a massa média  $M_3$

$$M_3 \frac{P'_1}{2} = \sum_j P_0^{n_{0j}} \left( \frac{P_1}{2} \right)^{n_{1j}} P_2^{n_{2j}} (H_{30j} m_0 + H_{31j} m_1 + H_{32j} m_2 + H_{33j} m_3), \quad (3.24)$$

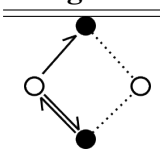
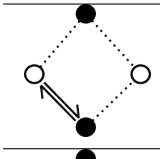
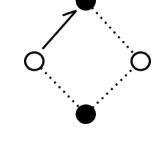
Diagrama	Probabilidade	Massa
	$P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2$	$m_0 + m_2 + m_3$
	$P_0^3 P_2$	$2m_0 + m_2$
	$P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right)$	$m_0 + m_3$

Tabela 4 – A tabela apresenta a descrição de alguns casos referentes à massa média  $M_0$ , equação (3.21), onde essa média se refere ao SCC que incide na extremidade esquerda quando não há conexão indo ou voltando. A probabilidade reflete o número de ligações duplas, direcionada e vacância, e na coluna assinalada por “Massa” enumeremos o número de elementos do tipo  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , da geração anterior que compõem esse SCC do tipo  $M_0$  na geração seguinte.

onde os  $H_{3ij}$  representam, para a configuração  $j$ , quantas massas do tipo “ $i$ ” coalescem para formar a massa  $M_0$  na geração superior, onde a tabela 5 ilustra de que forma seus valores são calculados.

Expandindo os somatórios das massas médias, simplificando e substituindo os valores de  $P_{1C}$  e  $P_{2C}$ , obteremos uma matriz  $4 \times 4$ , ao invés de uma  $2 \times 2$  como ocorreu para o caso não direcionado (equação (2.23))

$$\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 4\sqrt{5} & 0 & 7 - 3\sqrt{5} & 4\sqrt{5} - 8 \\ 50 - 22\sqrt{5} & 6 - 2\sqrt{5} & 28 - 12\sqrt{5} & 20\sqrt{5} - 44 \\ 130 - 58\sqrt{5} & 28 - 12\sqrt{5} & 56 - 24\sqrt{5} & 52\sqrt{5} - 116 \\ 25 - 11\sqrt{5} & 0 & 14 - 6\sqrt{5} & 11\sqrt{5} - 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Diagrama	Probabilidade	Massa 1	Massa 3
	$P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2$	$2m_0 + m_1 + 2m_2$	$m_0 + m_2 + m_3$
	$P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2$	$2m_0 + 2m_1 + m_2$	$m_0 + m_2 + m_3$
	$P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2$	$m_0 + m_1 + m_2 + m_3$	$2m_3$

Tabela 5 – A tabela apresenta a descrição de alguns casos referentes às massas médias  $M_1$  e  $M_3$ , equações (3.22) e (3.24). Quando só é possível atravessar em uma direção sem a possibilidade de voltar, a massa  $M_1$ , representa todas as ligações que podem ser atravessadas quando se percorre a rede de uma extremidade a outra, enquanto a massa  $M_3$  corresponde a todas as ligações que pertencem ao SCC que inclui a extremidade esquerda. A probabilidade reflete o número de ligações duplas, direcionada e vacância, e na coluna assinalada por “Massa” enumeramos o número de elementos do tipo  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , da geração anterior que compõem esse SCC do tipo  $M_1$  e  $M_3$  na geração seguinte.

Com esses resultados, chegamos aos seguintes autovalores e autovetores

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\approx 3.49037, \\
\lambda_2 &\approx 1.23678 + 0.234402 i, \\
\lambda_3 &\approx 1.23678 - 0.234402 i, \\
\lambda_4 &\approx 0.550788, \\
\vec{V}_1 &\approx (2.29737, 2.74911, 0.717333, 1), \\
\vec{V}_2 &\approx (0.783787 - 0.979368 i, -1.71461 + 0.862464 i, 1.58873 - 0.666891 i, 1), \\
\vec{V}_3 &\approx (0.783787 + 0.979368 i, -1.71461 - 0.862464 i, 1.58873 + 0.666891 i, 1), \\
\vec{V}_4 &\approx (1.40272, -0.832529, -1.38896, 1).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Assim como mostrado na equação (2.28) o único autovalor que é relevante para o caso estudado é o de maior valor (ou seja  $\lambda_1$ ). Reescrevendo o autovalor de forma que nos remeta ao número de passos necessários para ir de uma extremidade a outra da rede, podemos enfim determinar a dimensão fractal do aglomerado percolante

$$\lambda_1 \approx 2^{\log_2(3.49037)}, \tag{3.27}$$

$$d_f = \log_2(3.49037) \approx 1.80338. \tag{3.28}$$

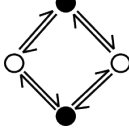
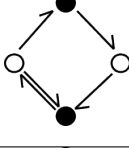
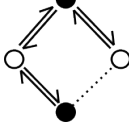
Diagrama	Probabilidade	Massa
	$P_2^4$	$4m_2$
	$\left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2$	$3m_1 + m_2$
	$P_0 P_2^3$	$2m_0 + 3m_2$

Tabela 6 – A tabela apresenta a descrição de alguns casos referentes à massa média  $M_2$ , equação (3.23), que se refere ao SCC que inclui as duas extremidades, sendo assim possível atravessar em ambas as direções. A probabilidade reflete o número de ligações duplas, direcionada e vacância, e na coluna assinalada por “Massa” enumeramos o número de elementos do tipo  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , da geração anterior que compõem esse SCC do tipo  $M_2$  na geração seguinte.

Podemos observar que o valor da dimensão fractal difere em algumas casas decimais (cerca de 0.1) do valor encontrado para a rede hierárquica não direcionada, a chamada rede diamante.



#### 4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O método empregado para a solução das redes aqui apresentadas e estudadas pode ser aplicado para uma rede que apresenta transições descontínuas (ver Figura 13). O artigo *Ordinary percolation with discontinuous transitions* [7] mostra a solução dessa rede. Note que em [7] usa-se o método das funções geradoras para encontrar as distribuições de tamanhos de agregados em cada geração. Aqui, usamos nossa abordagem que, como vimos, trata apenas da média desses tamanhos a cada geração. Confirmando a validade de nossa abordagem, obtivemos resultados equivalentes aos de [7].

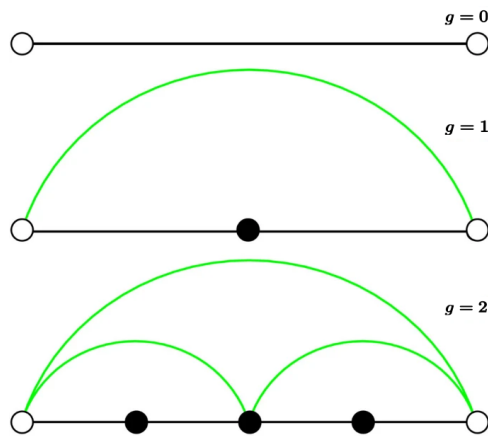


Figura 13 – A rede consiste em uma única ligação entre dois nós finais (círculos abertos). Para essa rede existirá quatro probabilidades na geração anterior  $g$ , são elas  $P_g$ ,  $1 - P_g$ ,  $Q$  e  $(1 - Q)$ , que representam a probabilidade de uma ligação estar presente, ausente, de existir uma ligação de longo alcance e de não existir uma ligação de longo alcance, respectivamente. Caso haja a ligação de longo alcance, a probabilidade é  $Q$ , independente das demais ligações [7].

Assim como feito anteriormente precisamos primeiramente determinar a probabilidade na geração  $g + 1$ . Para isso analisaremos a geração anterior  $g$ , onde temos quatro probabilidades associadas  $P_g$ ,  $1 - P_g$ ,  $Q$  e  $(1 - Q)$ , que representam a probabilidade de uma ligação estar presente, ausente, de existir uma ligação de longo alcance e de não existir uma ligação de longo alcance, respectivamente. Caso haja a ligação de longo alcance, a probabilidade é  $Q$ , independente das demais ligações e com isso chegamos a seguinte probabilidade

$$P_{g+1} = Q + (1 - Q)P_g^2, \quad (4.1)$$

e para  $P_{g+1} = P_g = P^*$  temos

$$P^{*2} - \frac{1}{1 - Q}P^* + \frac{Q}{1 - Q} = 0. \quad (4.2)$$

Resolvendo a equação (4.2) obtemos que  $P^*$  assume dois pontos fixos  $P^* = 1$  e  $P^* = \frac{Q}{1-Q}$ . Para o primeiro valor de  $P^*$ , a rede sempre apresenta um caminho que conecta as duas extremidades. Assim ficamos com

$$P^*(Q) = \frac{Q}{1-Q} \quad (Q \leq 1/2), \quad (4.3)$$

e a solução estável que corresponde ao ponto fixo que descreve a criticalidade da percolação nessa rede se encontra em  $0 < Q < 1/2$ . Note que para  $Q = 1/2$  obtemos  $P^*(Q) = 1$ .

Calculando a forma como a probabilidade diverge do ponto fixo, onde  $\delta_g = P_g - P^*$  muda de uma geração à outra, obtendo

$$\frac{\delta_{g+1}}{\delta_g} = 2Q, \quad (4.4)$$

onde essa razão é menor que um se  $Q < 1/2$ , logo esse ponto fixo é estável, com  $P \rightarrow P^*$  à medida que as gerações aumentam.

Para o cálculo das massas, devemos considerar tanto a “massa de ligação”  $m_1$ , proveniente das ligações presentes, quanto a “massa pendente”  $m_0$ , proveniente das ligações quebradas na geração  $g$ . Nesse caso a equação para  $M_1$  e  $M_0$  na geração seguinte  $g + 1$  pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_{g+1}M_1 &= QP_g^2(2m_1) + 2QP_g(1 - P_g)(m_1 + 2m_0) \\ &\quad + Q(1 - P_g)^2(2m_0) + (1 - Q)P_g^2(2m_1), \\ (1 - P_{g+1})M_0 &= (1 - Q)P(1 - P)(m_1 + 2m_0) + (1 - Q)(1 - P)^2(m_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

e para  $P_{g+1} = P_g = P^*(Q)$ , chegamos a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4Q & \frac{2-4Q}{1-Q} \\ Q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

e obtemos assim os seguintes autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 + 3Q - 4Q^2 \pm \sqrt{1 - 2Q + 9Q^2 - 24Q^3 + 16Q^4}}{2(1 - Q)}, \quad (4.7)$$

com o maior autovalor sendo  $\lambda_+$ , igual ao encontrado em [7], produzindo assim o chamado expoente fractal  $\lambda_+$  (ver Figura 14). Assintoticamente, os números de sítios e ligações dobram a cada geração, enquanto o tamanho dos agregados cresce a um fator de  $\lambda_+ < 2$  a cada geração. Desse modo, para redes muito grandes,  $g \rightarrow \infty$ , a fração ocupada pelo agregado percolante vai a zero.

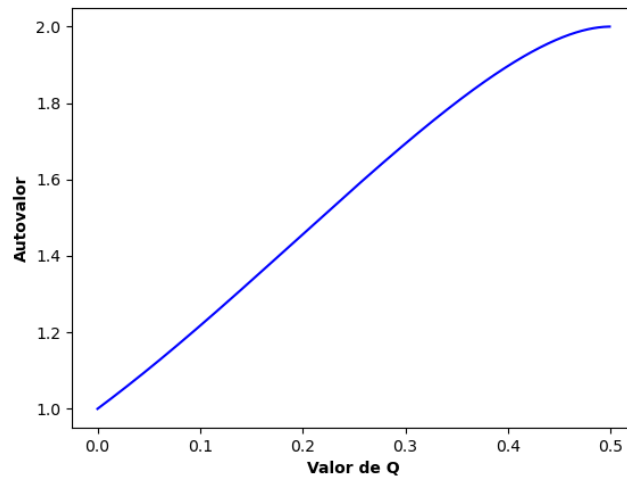


Figura 14 – A figura mostra como o autovalor  $\lambda_+$  cresce à medida que o valor de  $Q$  também cresce, sendo o menor valor para  $Q = 0$ , que resulta em  $\lambda_+ = 1$  e seu maior valor quando  $Q = 1/2$ , o que resulta em  $\lambda_+ = 2$ .

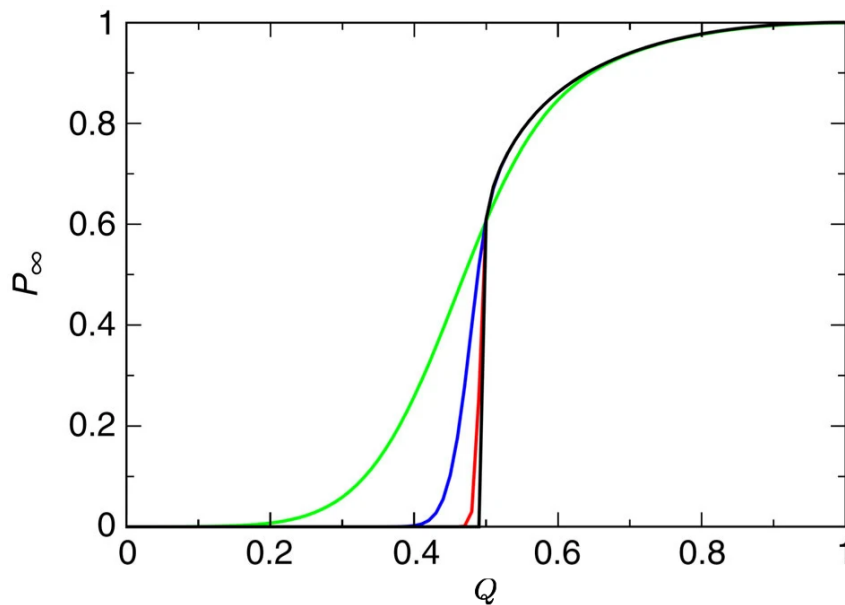


Figura 15 – A figura apresenta os tamanhos de sistema de até  $N \approx 2^n \sim 10^{3010}$  nós. Ele evolui lentamente em uma descontinuidade em  $P \rightarrow P_c = 1/2$  com  $P_\infty(P_c) \approx 0.609793$ . A convergência é mais lenta logo abaixo de  $1/2$  [7].

Pretendemos estender o método para a rede da Figura 16, a qual apresenta percolação isotrópica, denominando-a de rede hierárquica direcionada com transições descontínuas. Onde  $P'_2 \equiv P'_2(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$  é o polinômio que determina a probabilidade de uma ligação bidirecional na geração seguinte  $g + 1$ , dadas as probabilidades  $P_1$  e  $P_2$  de agregados direcionais e bidirecionais na geração anterior  $g$  e  $Q_1$  e  $Q_2$ , para as probabilidades da ligação de longo alcance ser uma ligação direcionada ou bidirecionada, da mesma forma temos  $P'_1 \equiv P'_1(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ .

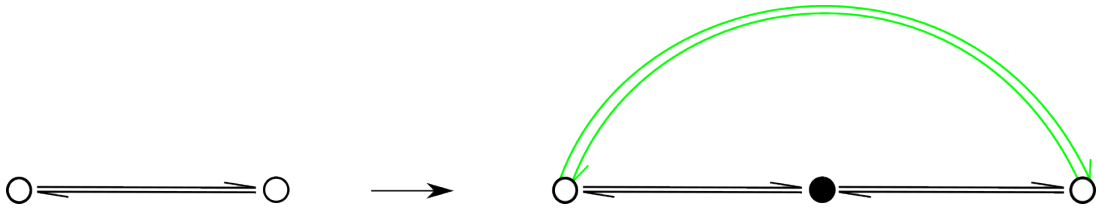


Figura 16 – A figura apresenta uma rede hierárquica direcionada com transições descontínuas.

Assim como feito no caso da rede diamante, vamos procurar os pontos fixos desse sistema e depois obter o fator  $\lambda_+$ , que descreve como os agregados crescem. A presença de 2 parâmetros  $Q_1$  e  $Q_2$ , abre a possibilidade de um comportamento crítico mais rico, possivelmente incluindo por exemplo, um ponto tricrítico onde a transição muda de contínua a descontínua.

Concluimos que o método empregado é eficiente tanto para a solução de redes que apresentam percolação padrão como em redes com percolação isotrópica. Onde foi possível obter alguns expoentes críticos para as redes hierárquicas anteriormente estudadas, entre eles o expoente crítico  $\nu$  que define como o comprimento de correlação  $\xi$  diverge em  $P_c$ , onde seu valor é igual em ambos os casos de percolação, uma vez que os pontos críticos do caso isotrópico podem ser relacionados com o caso padrão através da reta  $P_1/2 + P_2 = P_c$ , a divergência do ponto crítico é igual em ambos os casos de percolação. Já o expoente crítico fractal  $d_f$  determina o tamanho do maior aglomerado de percolação. Portanto, verificamos que o valor desse expoente é diferente em ambos os casos de percolação, o que já era esperado, pois mesmo as redes apresentando uma configuração estrutural semelhante, o número de ligações entre as duas é diferente, o que faz o tamanho do maior aglomerado não ser igual nas duas redes.

## REFERÊNCIAS

- [1] ANGULO, R. F.; MEDINA, E. Conductance distributions in random resistor networks. self-averaging and disorder lengths. *Journal of statistical physics*, Springer, v. 75, n. 1, p. 135–151, 1994.
- [2] DOROGOVTSEV, S. Renormalization group for evolving networks. *Physical Review E*, APS, v. 67, n. 4, p. 045102, 2003.
- [3] SILVA, L. *et al.* Criticality and multifractality of the potts ferromagnetic model on fractal lattices. *Phys. Rev. B*, v. 53, 03 1996.
- [4] MATEI, V. *Parallel Algorithms for Detecting Strongly Connected Components*. Tese (Doutorado) — Vrije Universiteit Amsterdam, 2016.
- [5] ZHOU, Z. *et al.* Crossover from isotropic to directed percolation. *Physical Review E*, APS, v. 86, n. 2, p. 021102, 2012.
- [6] NORONHA, A. W. D. *et al.* Percolation on an isotropically directed lattice. *Physical Review E*, APS, v. 98, n. 6, p. 062116, 2018.
- [7] BOETTCHER, S.; SINGH, V.; ZIFF, R. M. Ordinary percolation with discontinuous transitions. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 1, p. 1–5, 2012.
- [8] REDNER, S. Percolation and conduction in a random resistor-diode network. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 14, n. 9, p. L349, 1981.
- [9] REDNER, S. Directed and diode percolation. *Physical Review B*, APS, v. 25, n. 5, p. 3242, 1982.
- [10] DOROGOVTSEV, S. Randomly directed bond percolation: a position-space renormalisation group approach. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, IOP Publishing, v. 15, n. 26, p. L889, 1982.
- [11] FISHER, M. E.; ESSAM, J. W. Some cluster size and percolation problems. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 2, n. 4, p. 609–619, 1961.
- [12] FISHER, M. E. Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. *Physical Review*, APS, v. 124, n. 6, p. 1664, 1961.
- [13] KIRKPATRICK, S. Percolation and conduction. *Reviews of modern physics*, APS, v. 45, n. 4, p. 574, 1973.
- [14] STAUFFER, D. Scaling theory of percolation clusters. *Physics reports*, Elsevier, v. 54, n. 1, p. 1–74, 1979.
- [15] ESSAM, J. W. Percolation theory. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 43, n. 7, p. 833, 1980.
- [16] ISICHENKO, M. B. Percolation, statistical topography, and transport in random media. *Reviews of modern physics*, APS, v. 64, n. 4, p. 961, 1992.
- [17] SAHIMI, M. Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing. *Reviews of modern physics*, APS, v. 65, n. 4, p. 1393, 1993.

- [18] STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to percolation theory*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1994.
- [19] SAHIMI, M. *Applications of Percolation Theory, Taylor & Francis Ltd*. [S.l.]: London, 1994.
- [20] BUNDE, A.; HAVLIN, S. Percolation i. In: *Fractals and disordered systems*. [S.l.]: Springer, 1996. p. 59–114.
- [21] KING, P. *et al.* Percolation theory. *London Petrophysical Society Newsletter*, Citeseer, 2002.
- [22] STAUFFER, D. Classical percolation. In: *Quantum and Semi-classical Percolation and Breakdown in Disordered Solids*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 1–19.
- [23] VIGOLO, B. *et al.* An experimental approach to the percolation of sticky nanotubes. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 309, n. 5736, p. 920–923, 2005.
- [24] GRIMALDI, C.; BALBERG, I. Tunneling and nonuniversality in continuum percolation systems. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 6, p. 066602, 2006.
- [25] SAPOVAL, B.; BALDASSARRI, A.; GABRIELLI, A. Self-stabilized fractality of seacoasts through damped erosion. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 9, p. 098501, 2004.
- [26] SABERI, A. A. Percolation description of the global topography of earth and the moon. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 17, p. 178501, 2013.
- [27] DERÉNYI, I.; PALLA, G.; VICSEK, T. Clique percolation in random networks. *Physical review letters*, APS, v. 94, n. 16, p. 160202, 2005.
- [28] CALLAWAY, D. S. *et al.* Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Physical review letters*, APS, v. 85, n. 25, p. 5468, 2000.
- [29] KALISKY, T.; COHEN, R. Width of percolation transition in complex networks. *Physical Review E*, APS, v. 73, n. 3, p. 035101, 2006.
- [30] CARDY, J. The power of two dimensions. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 2, n. 2, p. 67–68, 2006.
- [31] BERNARD, D. *et al.* Conformal invariance in two-dimensional turbulence. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 2, n. 2, p. 124–128, 2006.
- [32] KASTELEYN, P.; FORTUIN, C. Phase transitions in lattice systems with random local properties. *Physical Society of Japan Journal Supplement*, v. 26, p. 11, 1969.
- [33] FORTUIN, C. M.; KASTELEYN, P. W. On the random-cluster model: I. introduction and relation to other models. *Physica*, Elsevier, v. 57, n. 4, p. 536–564, 1972.
- [34] DOTSENKO, V. S. *et al.* Self-avoiding surfaces in the 3d ising model. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 448, n. 3, p. 577–620, 1995.
- [35] DOTSENKO, V. S. *et al.* Critical and topological properties of cluster boundaries in the 3d ising model. *Physical review letters*, APS, v. 71, n. 6, p. 811, 1993.

- [36] SABERI, A. A.; DASHTI-NASERABADI, H. Three-dimensional ising model, percolation theory and conformal invariance. *EPL (Europhysics letters)*, IOP Publishing, v. 92, n. 6, p. 67005, 2011.
- [37] ANEKAL, S. G.; BAHUKUDUMBI, P.; BEVAN, M. A. Dynamic signature for the equilibrium percolation threshold of attractive colloidal fluids. *Physical Review E*, APS, v. 73, n. 2, p. 020403, 2006.
- [38] GNAN, N.; ZACCARELLI, E.; SCIORTINO, F. Casimir-like forces at the percolation transition. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 1–7, 2014.
- [39] BERKER, A. N.; OSTLUND, S. Renormalisation-group calculations of finite systems: order parameter and specific heat for epitaxial ordering. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 22, p. 4961, 1979.
- [40] KAUFMAN, M.; GRIFFITHS, R. B. Exactly soluble ising models on hierarchical lattices. *Physical Review B*, APS, v. 24, n. 1, p. 496, 1981.
- [41] GRIFFITHS, R. B.; KAUFMAN, M. Spin systems on hierarchical lattices. introduction and thermodynamic limit. *Physical Review B*, APS, v. 26, n. 9, p. 5022, 1982.
- [42] ANTENUCCI, F.; CRISANTI, A.; LEUZZI, L. Critical study of hierarchical lattice renormalization group in magnetic ordered and quenched disordered systems: Ising and blume–emery–griffiths models. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 155, n. 5, p. 909–931, 2014.
- [43] ALMEIDA, S. T.; NOBRE, F. D. Fixed-point distributions of short-range ising spin glasses on hierarchical lattices. *Physical Review E*, APS, v. 91, n. 3, p. 032138, 2015.
- [44] ÇAĞLAR, T.; BERKER, A. N. Chiral potts spin glass in  $d=2$  and 3 dimensions. *Physical Review E*, APS, v. 94, n. 3, p. 032121, 2016.
- [45] ROCHA-NETO, M. J. *et al.* The blume–capel model on hierarchical lattices: Exact local properties. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 494, p. 559–573, 2018.
- [46] CHANG, S.-C.; ROEDER, R. K.; SHROCK, R.  $q$ -plane zeros of the potts partition function on diamond hierarchical graphs. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing LLC, v. 61, n. 7, p. 073301, 2020.
- [47] GENZOR, J.; GENDIAR, A.; NISHINO, T. Phase transition of the ising model on a fractal lattice. *Physical Review E*, APS, v. 93, n. 1, p. 012141, 2016.
- [48] ZHANG, Y.; WANG, J. Fluctuation entropy and complexity of financial percolation model with random jump on gasket fractal lattice. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 531, p. 121754, 2019.
- [49] MARČETIĆ, D.; ELEZOVIĆ-HADŽIĆ, S.; ŽIVIĆ, I. Statistics of close-packed dimers on fractal lattices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 554, p. 124275, 2020.
- [50] MYSHLYAVTSEV, A.; MYSHLYAVTSEVA, M.; AKIMENKO, S. Classical lattice models with single-node interactions on hierarchical lattices: The two-layer ising model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 558, p. 124919, 2020.

- [51] KRYVEN, I.; ZIFF, R. M.; BIANCONI, G. Renormalization group for link percolation on planar hyperbolic manifolds. *Physical Review E*, APS, v. 100, n. 2, p. 022306, 2019.
- [52] MARRO, J.; DICKMAN, R. Nonequilibrium phase transitions in lattice models. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*, 2005.
- [53] JANSSEN, H.-K.; STENULL, O. Random resistor-diode networks and the crossover from isotropic to directed percolation. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 3, p. 3173, 2000.
- [54] HU, H. *et al.* Short-range correlations in percolation at criticality. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 4, p. 042106, 2014.
- [55] LIMA, F. W. Analysing and controlling the tax evasion dynamics via majority-vote model. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2010. v. 246, n. 1, p. 012033.
- [56] LIU, Y.-Y.; BARABÁSI, A.-L. Control principles of complex systems. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 88, n. 3, p. 035006, 2016.
- [57] SANTOLINI, M.; BARABÁSI, A.-L. Predicting perturbation patterns from the topology of biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 115, n. 27, p. E6375–E6383, 2018.
- [58] LI, D. *et al.* Percolation transition in dynamical traffic network with evolving critical bottlenecks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 112, n. 3, p. 669–672, 2015.
- [59] REDNER, S. Conductivity of random resistor-diode networks. *Physical Review B*, APS, v. 25, n. 9, p. 5646, 1982.
- [60] BUNDE, A.; HAVLIN, S. *Fractals and disordered systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- [61] PEREIRA, M. G. Aplicações da teoria da percolação à modelagem e simulação de reservatórios de petróleo. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.
- [62] MANDELBROT, B. B.; MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. [S.l.]: WH freeman New York, 1982. v. 1.
- [63] CONIGLIO, A. Cluster structure near the percolation threshold. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 15, n. 12, p. 3829, 1982.
- [64] AUTO, D. M. *et al.* Finite-size effects for percolation on apollonian networks. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 6, p. 066112, 2008.
- [65] CORMEN, T. *et al.* *Introduction to Algorithms, section 12.3. 3*. [S.l.]: MIT Press, 1990.
- [66] DOROGOVTSSEV, S. N.; MENDES, J. F. F.; SAMUKHIN, A. N. Giant strongly connected component of directed networks. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 2, p. 025101, 2001.
- [67] SCHWARTZ, N. *et al.* Percolation in directed scale-free networks. *Physical Review E*, APS, v. 66, n. 1, p. 015104, 2002.



- [68] ITO, K. R. Renormalization group methods on hierarchical lattices and beyond. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Oxford Academic, v. 92, p. 46–71, 1987.
- [69] ANTENUCCI, F.; CRISANTI, A.; LEUZZI, L. Critical study of hierarchical lattice renormalization group in magnetic ordered and quenched disordered systems: Ising and blume–emery–griffiths models. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 155, n. 5, p. 909–931, 2014.
- [70] LEVITAN, A. Renormalization group approach to percolation in hierarchical lattices. *arXiv preprint arXiv:2202.09436*, 2022.
- [71] BOSCO, F. d. A. R. *Propriedades geométricas do grupo de renormalização em redes hierárquicas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1988.
- [72] HAMBLY, B. M.; KUMAGAI, T. Diffusion on the scaling limit of the critical percolation cluster in the diamond hierarchical lattice. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 295, n. 1, p. 29–69, 2010.

## ANEXO A – REDES HIERÁRQUICAS ISOTROPICAMENTE DIRECIONADAS

### Expoentes Geométricos da Rede Hierárquica de Pontes de Wheatstone com Ligações Direcionadas

Calculamos o conjunto completo de expoentes geométricos para a rede hierárquica de pontes de Wheatstone da Figura 17. Como já visto, será preciso determinar a probabilidade na geração  $g$ , onde existem 4 possibilidades possíveis, uma quando as duas ligações estarão presentes  $P_2$ , duas quando apenas uma seta em apenas uma direção estará presente  $P_1/2$  e por fim quando a ligação for ausente  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$  (ver Figura 9), a rede estudada nessa seção apresenta 5 ligações e 4 nós. Temos 2 parâmetros independentes  $P_2$  e  $P_1$ . Para a geração  $g + 1$  precisamos, portanto, considerar 2 possibilidades,  $P'_2$  será a chance da geração seguinte poder ser atravessada em 2 direções, e  $P'_1/2$  será a possibilidade da rede ser atravessada apenas em uma direção específica.

Usando a Figura 18 podemos construir a expressão para a probabilidade  $P'_1/2$

$$\begin{aligned} \frac{P'_1}{2} = & 4P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 + 18P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 4P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^3 + 2P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 + 36P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 \\ & + 36P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^3 + 14P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 + 64P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2 + 14 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^2 \quad (\text{A.1}) \\ & + 25P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4 + 25 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4 P_2 + 10 \left(\frac{P_1}{2}\right)^5, \end{aligned}$$

usando a Figura 19 podemos construir a expressão para a probabilidade  $P'_2$

$$\begin{aligned} P'_2 = & P_2^5 + 2P_0^3 P_2^2 + 8P_0^2 P_2^3 + 5P_0 P_2^4 + 12P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 32P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^3 + 10 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^4 \\ & + 48P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 + 36 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^3 + 16P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2 + 52 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^2 + 2P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4 \quad (\text{A.2}) \\ & + 28 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4 P_2 + 6 \left(\frac{P_1}{2}\right)^5, \end{aligned}$$

simplificando as equações e fazendo  $P_1 = P_1 = P_{1C}^*$ ,  $P'_2 = P_2 = P_{2C}^*$  e  $P_0 = 1 - P_1 = P_{1C}^* - P_{2C}^*$ , é possível montar um sistema de equações e obtemos as seguintes raízes para a rede estudada

$$\begin{aligned} P_{1C}^* &= 0, P_{2C}^* = 0, \\ P_{1C}^* &= 0, P_{2C}^* = 1, \\ P_{1C}^* &= 0, P_{2C}^* = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$P_{1C}^* = 0.49142, P_{2C}^* = 0.25429.$$

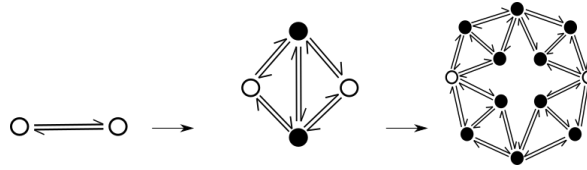


Figura 17 – A figura apresenta um exemplo de rede hierárquica, na qual as suas configurações estruturais a cada geração  $g$  se assemelham a rede ponte de wheatstone, mas diferentemente dela, essa rede apresenta ligações direcionadas. Note que essa rede possui dois caminhos possíveis entre dois nós, sendo cada caminho representado por uma seta, indicando assim a única direção possível.

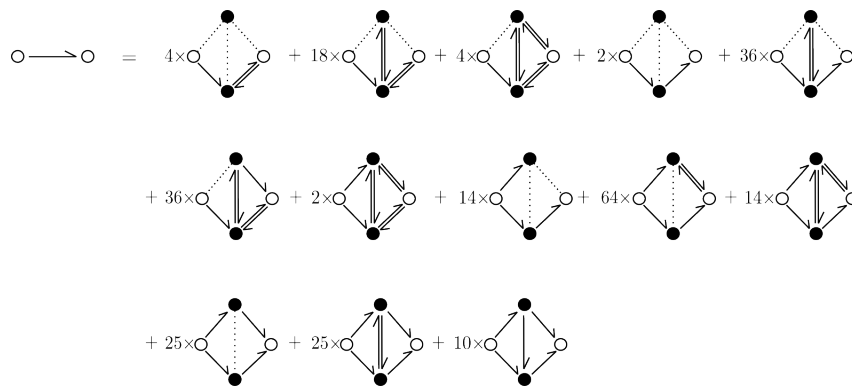


Figura 18 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^5 = 1024$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 1024 apenas 254 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, sem a possibilidade de voltar.

Os pontos  $P_{1C}^* = 0$ ,  $P_{2C}^* = 0$  e  $P_{1C}^* = 0$ ,  $P_{2C}^* = 1$  são triviais, já os pontos  $P_{1C}^* = 0$ ,  $P_{2C}^* = \frac{1}{2}$  correspondem a percolação padrão, ou seja, para o caso não direcionado. Os pontos relativos a percolação isotrópica são  $P_{1C} = 0.49142$ ,  $P_{2C} = 0.25429$  e  $P_{0C} = 0.25429$ . Os pontos correspondentes a percolação isotrópica estão sobre uma curva  $P_2 + P_1/2 = 1/2$ , que é mantida invariante pela transformação de grupo de renormalização, e portanto corresponde à linha crítica. esse resultado é compatível com os dados numéricos e com a argumentação heurística mais geral [6].

Os expoentes críticos associados aos pontos fixos não triviais podem ser calculados pela técnica padrão de linearização das relações de recorrência em torno dos pontos fixos. Logo será preciso determinar os autovalores e autovetores da matriz (3.6).

Expandindo as equações (3.7), (3.10), (3.13) e (3.16) para o sistema estudado nessa

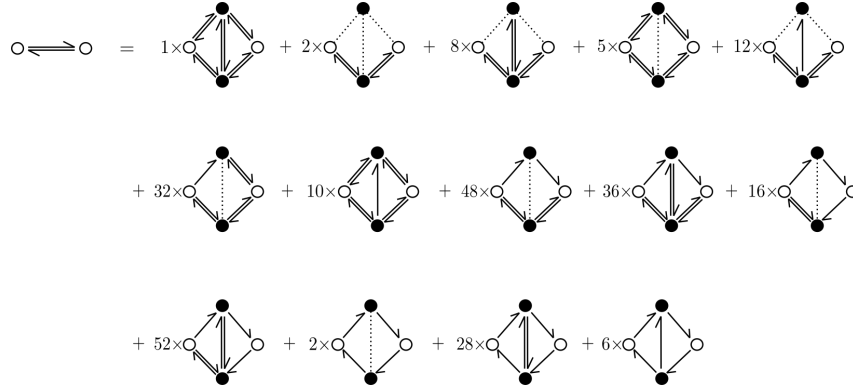


Figura 19 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^5 = 1024$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 1024 apenas 254 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com a possibilidade de ir e voltar.

seção, onde o somatório sobre os  $n_i$  será igual a 4

$$\begin{aligned}
 J_{11} = & 4P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2 + 18P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2^2 + 4P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2^3 + 4P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^0 \\
 & + 48P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 - 4P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^3 + 30P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^0 + 48P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 \\
 & - 30P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 + 44P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0 - 28P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 J_{12} = & 8P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^0 + 48P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 - 48P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 - 8P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^3 \\
 & + 60P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^0 - 60P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 + 72P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0 - 72P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2,
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 J_{21} = & 24P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 4P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^3 + 24P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 30P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 \\
 & + 4P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0 + 40P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2 + 13P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4 P_2^0 + 13P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4 P_2^2,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
 J_{22} = & 4P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2 + 18P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2^2 + 4P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^0 P_2^3 + 4P_0^3 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^0 \\
 & + 24P_0^2 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2 + 72P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^2 + 8P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right) P_2^3 + 96P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 \\
 & 60P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2^2 + 16P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2^0 + 88P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3 P_2 + 26P_0^0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^4 P_2^0.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Calculando primeiramente as derivadas parciais para a percolação padrão, temos  $P_1 = P_{1C} = 0$ ,  $P_2 = P_{2C} = \frac{1}{2}$  e  $P_0 = P_{0C} = \frac{1}{2}$ , os únicos valores que iram sobreviver na equação (A.4) são aqueles

onde o expoente de  $P_1$  é zero, fazendo ainda  $P_{2C} = P_{0C} = P$ , obtemos

$$\begin{aligned} J_{11} &= 4P^4 + 18P^4 + 4P^4, \\ J_{11} &= \frac{13}{8}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

repetindo o mesmo processo da equação anterior na equação (A.5) observamos que nenhum dos expoentes de  $P_1$  é zero, assim temos que

$$J_{12} = 0, \tag{A.9}$$

note que assim como na equação anterior, nenhum dos expoentes de  $P_1$  é zero na (A.6), com isso temos

$$J_{21} = 0, \tag{A.10}$$

seguindo o mesmo procedimento da equação (A.8) obtemos que

$$\begin{aligned} J_{22} &= 4P^4 + 18P^4 + 4P^4, \\ J_{22} &= \frac{13}{8}, \end{aligned} \tag{A.11}$$

substituindo na matriz Jacobiana, dada pela equação (3.6), chegamos na seguinte matriz

$$J(P_{1C}, P_{2C}) = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & 0 \\ 0 & \frac{13}{8} \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

onde seus autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{13}{8}, \\ \vec{V}_1 &= (0, 1), \\ \vec{V}_2 &= (1, 0). \end{aligned} \tag{A.13}$$

Agora iremos calcular o jacobiano para a percolação isotrópica, onde  $P_1 = P_{1C} = 0.49142$ ,  $P_2 = P_{2C} = 0.25429$  e  $P_0 = P_{0C} = 0.25429$ , obtemos assim o seguinte valor para  $J_{11}$

$$J_{11} = 0.550394, \tag{A.14}$$

repetindo o mesmo processo da equação anterior e assumindo que  $P_{2C} = P_{0C} = P$ , obtemos para  $J_{12}$ ,  $J_{21}$  e  $J_{22}$

$$J_{12} = 0, \tag{A.15}$$

$$J_{21} = 0.537303, \tag{A.16}$$

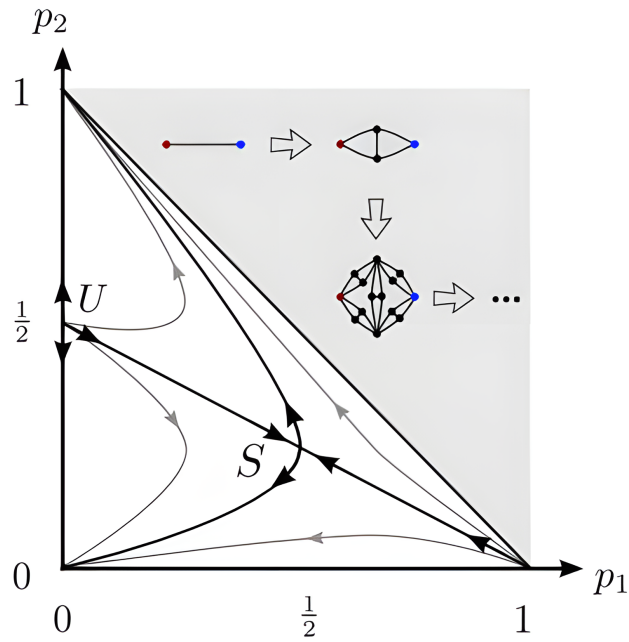


Figura 20 – Diagrama de fases para percolação de ligações isotropicamente direcionadas na rede hierárquica obtida como limite do processo exibido. Redner [8, 9] e Dorogovtsev [10] usaram o grupo de renormalização para resolver exatamente este modelo na rede hierárquica mostrada. As direções das linhas indicam o fluxo do grupo de renormalização. A linha  $P_2 + P_1/2 = P_c = 1/2$  coincide com a linha crítica para a percolação de ligações direcionadas isotropicamente na rede quadrada. O grupo de renormalização mostra que qualquer ponto da reta é um ponto crítico, e  $U = (0, 1/2)$  corresponde ao ponto crítico de percolação padrão, exibindo o mesmo comportamento invariante de escala que o ponto  $S$  localizado ao longo da linha crítica. Isso sugere a possibilidade de que a percolação de ligações direcionadas isotropicamente esteja em uma classe de universalidade da percolação padrão. Figura retirada de [6].

$$J_{22} = 1.625 = \frac{13}{8}, \quad (\text{A.17})$$

substituindo na matriz Jacobiana, dada pela equação (3.6), chegamos na seguinte matriz

$$J(P_{1C}, P_{2C}) = \begin{pmatrix} 0.550394 & 0 \\ 0.537303 & \frac{13}{8} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

onde seus autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{13}{8}, \\ \lambda_2 &= \frac{27697}{500000} = 0.55394, \\ \vec{V}_1 &= (0, 1), \\ \vec{V}_2 &= \left( \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

O expoente crítico  $v_u$  para a percolação padrão pode assim ser calculado

$$\frac{1}{v_u} = \frac{\ln \lambda_1}{\ln b} = \frac{\ln \frac{13}{8}}{\ln 2}, \quad (\text{A.20})$$

$$v_u = 1,428,$$

com isso verificamos que o expoente crítico  $v_s$  que corresponde a rede com percolação isotrópica é igual a  $v_u$ , um resultado compatível com o que mostram as simulações numéricas.

Como mostrado na Figura 20, dois desses pontos representam os casos triviais de uma rede totalmente desconectada  $P_0 = 1$  e uma rede totalmente conectada  $P_2 = 1$ . Outro ponto fixo é  $P_1 = 0$  com  $P_2 = 1/2$  representando o estado crítico para percolação padrão nesta rede hierárquica, enquanto o ponto S,  $P_1 = 0.49142$  com  $P_2 = 0.25429$ , é o estado crítico para a percolação de ligações direcionadas isotropicamente nesta rede hierárquica.

Para o cálculo da dimensão fractal da rede isotrópica, se fará necessário assim como na seção anterior definir quatro massas distintas na geração  $g$ ,  $m_0, m_1, m_2$  e  $m_3$ , na geração  $g + 1$  temos as seguintes massas  $M_0, M_1, M_2$  e  $M_3$ . Tais massas obedecem as mesmas relações das equações (3.21), (3.22), (3.23) e (3.24). Usando as mesmas técnicas de análise das massas médias da seção 3 podemos reescrever tais equações na forma matricial

$$\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.30258 & 0.0937224 & 0.236684 & 0.849658 \\ 1.76197 & 2.18101 & 1.13149 & 0.556010 \\ 1.01947 & 1.99918 & 2.21919 & 0.187445 \\ 0.778916 & 0.278005 & 0.547970 & 1.51855 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$\lambda_1 \approx 4.19528,$$

$$\lambda_2 \approx 1.25228 + 0.273216i,$$

$$\lambda_3 \approx 1.25228 - 0.273216i,$$

$$\lambda_4 \approx 0.521478,$$

$$\vec{V}_1 \approx (2.38593, 2.81907, 0.601686, 1),$$

$$\vec{V}_2 \approx (0.113655 - 1.0656i, -2.80732 + 2.47494i, 1.59255 - 1.01004i, 1),$$

$$\vec{V}_3 \approx (0.113655 + 1.0656i, -2.80732 - 2.47494i, 1.59255 + 1.01004i, 1),$$

$$\vec{V}_4 \approx (1.50519, -1.37062, -0.853061, 1).$$

(A.22)

Assim como feito anteriormente será necessário reescrevendo o maior autovalor de uma forma que nos remeta ao número de passos, podemos por fim determinar a dimensão fractal

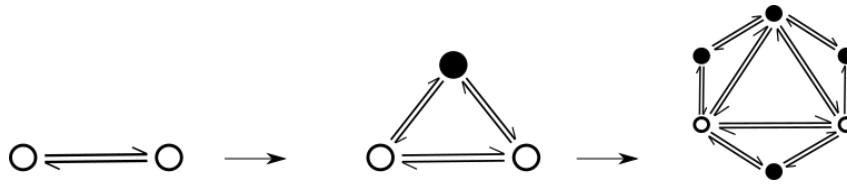


Figura 21 – A figura apresenta a rede hierárquica pseudo fractal direcionada, a qual as suas configurações estruturais a cada geração  $g$  se assemelham a rede pseudo fractal, mas diferentemente dela, essa rede apresenta ligações direcionadas. Note que essa rede possui dois caminhos possíveis entre dois nós, sendo cada caminho representado por uma seta, indicando assim a única direção possível.

do aglomerado percolante da rede isotrópica

$$\lambda_1 \approx 2^{\log_2(4.19528)}, \quad (\text{A.23})$$

$$d_f = \log_2(4.19528) \approx 2.06876. \quad (\text{A.24})$$

### Exponentes Geométricos da Rede Hierárquica Pseudo Fractal com Ligações Direcionadas

Nessa seção calcularemos os expoentes críticos da rede mostrada na Figura 21, como nas seções anteriores essa rede apresenta ligações direcionadas e 2 probabilidades distintas na geração seguinte  $g + 1$ ,  $P'_1/2$  e  $P'_2$ , bem como 4 probabilidades na geração  $g$ .

Usando a figura 22 podemos construir a expressão para a probabilidade  $P'_1/2$

$$\frac{P'_1}{2} = P_0^2 \frac{P_1}{2} + 4P_0 \frac{P_1}{2} P_2 + 5P_0 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 3 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3, \quad (\text{A.25})$$

usando a figura 23 podemos construir a expressão para a probabilidade  $P'_2$

$$P'_2 = P_0^2 P_2 + 3P_0 P_2^2 + P_2^3 + 4P_0 \frac{P_1}{2} P_2 + 6 \frac{P_1}{2} P_2^2 + 8 \left(\frac{P_1}{2}\right)^2 P_2 + 2 \left(\frac{P_1}{2}\right)^3, \quad (\text{A.26})$$

fazendo  $P_1 = P_1 = P_{1C}^*$ ,  $P'_2 = P_2 = P_{2C}^*$  e  $P_0 = 1 - P_{1C}^* - P_{2C}^*$ , obtemos as seguintes raízes para o sistema de equações

$$\begin{aligned} P_{1C}^* &= 0, P_{2C}^* = 0, \\ P_{1C}^* &= 0, P_{2C}^* = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Diferentemente das seções anteriores as raízes obtidas não apresentam valores entre 0 e 1, isso significa que a rede sempre apresentará ou não um caminho que conduz a outra extremidade, isso ocorre pois diferentemente da rede diamante e pontes de Wheatstone, a rede pseudo fractal apresenta a probabilidade de sempre haver ou não uma conexão direta entre as duas extremidades, fazendo com que a probabilidade tenda à 0 ou 1. Com isso a aplicação do mesmo método empregado anteriormente não será possível.



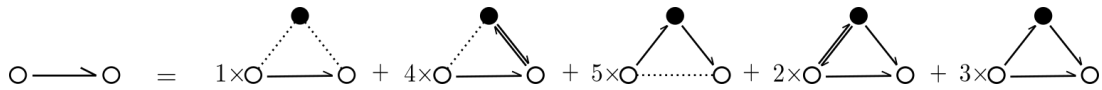


Figura 22 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^3 = 64$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 64 apenas 15 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com a possibilidade de ir e voltar.

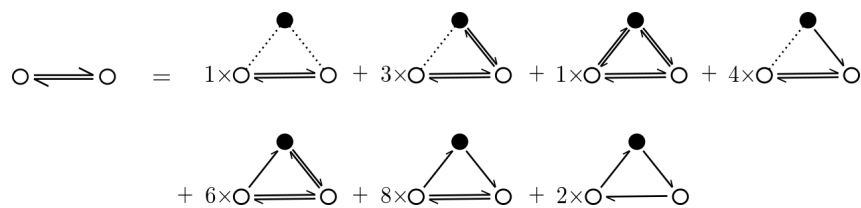


Figura 23 – Dado que uma rede hierárquica com ligações direcionadas de geração  $g$  pode estar com ligações simples de probabilidade  $P_1/2$ , ligações duplas de probabilidade  $P_2$  ou ausentes de probabilidade  $P_0 = 1 - P_1 - P_2$ , e que uma rede de geração  $g + 1$  é composta por 4 redes de geração  $g$ , existem  $4^3 = 64$  configurações possíveis em  $g + 1$ . No entanto, dessas 64 apenas 15 permitem a passagem de uma ponta à outra da rede, com a possibilidade de ir e voltar.