



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE DE SOUSA MOTA

UM BREVE ESTUDO SOBRE A MASSA GAUSS–BONNET–CHERN
DOS GRÁFICOS EUCLIDIANOS

FORTALEZA

2016

ALEXANDRE DE SOUSA MOTA

UM BREVE ESTUDO SOBRE A MASSA GAUSS–BONNET–CHERN
DOS GRÁFICOS EUCLIDIANOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA

2016

© 2016 por Alexandre de Sousa Mota



Esta obra é licenciada sob os termos da licença *Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0)*. A licença está disponível em https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pt_BR

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M871b Mota, Alexandre de Sousa.

Um breve estudo sobre a massa Gauss-Bonnet-Chern dos gráficos euclidianos / Alexandre de Sousa Mota. – 2016.
41 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016.

Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Desigualdade de Penrose. 2. Teorema da massa positiva. 3. Massa GBC. I. Título.

CDD 510

ALEXANDRE DE SOUSA MOTA

UM BREVE ESTUDO SOBRE A MASSA GAUSS–BONNET–CHERN
DOS GRÁFICOS EUCLIDIANOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Aprovada em: 07/06/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dr. Heudson Tosta Mirandola
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

À todas as pessoas, especialmente as mais pobres, que com seus impostos contribuíram para o financiamento das políticas públicas de assistência social, de assistência estudantil e de fomento a pesquisa, as quais foram decisivas para que eu pudesse sobreviver e superar a condição de extrema pobreza rural em que nasci.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Vó Luisa (em memória) e à mãe (Maria Regina), mulheres em situação de extrema pobreza rural e sem acesso a educação formal, que fizeram sacrifícios e tudo mais que estava ao seu alcance para incentivar a(os) filha(os) e a(os) neta(os) a estudarem. O vosso apoio e incentivo tiveram um papel fundamental no caminho que percorri até a conclusão dessa tese. Se em algum momento vocês projetaram em mim o sonho de frequentar a escola, que lhes foi negado, espero tê-lo realizado.

Ao pessoal do Liceu de Tauá, do período de 2002 à 2004, por se empenharem pessoalmente em oferecer apoio moral, orientação, dormida, comida e acesso excepcional e irrestrito, fora do horário escolar, aos recursos escolares (computador, internet, biblioteca etc). Isso influenciou significativamente a trajetória que me trouxe até essa tese. Em especial a Divane, Gomes, Reginaldo e Valéria, pela amizade que dura até os dias atuais.

Às amigas e amigos do Assentamento Angico e do bairro Aldeota, em Tauá-CE, e as primas Sulamita, Milianny, Meirilany, Milene e Liano, pela amizade, incentivo e doações no início da trajetória que me trouxe até essa tese.

À Joana, Dona Aurora e sua família, pela amizade e pela acolhida em Fortaleza.

À Lusía e ao Adonai, pela amizade, pela acolhida e pela doação da bicicleta, que encurtou as caminhadas diárias entre o Benfica e o Campus do Pici.

À Camila, Clarissa, Klara, Victor e Vitor pela amizade e a solidariedade nos momentos difíceis.

Às amigas e amigos do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial a Elaine, Fabiana, Grangeiro, Leandro, Renato, Renivaldo e Rodrigo pela companhia, paciência e solidariedade nos momentos difíceis.

Ao Fred pelo apoio, paciência e parceria durante a orientação dessa tese. Em especial, pela maneira compreensiva e gentil como conduziu a orientação.

Aos professores Feliciano Vitório, Heudson Mirandola, Jorge de Lira e Levi de Lima por aceitarem o convite para participarem da banca.

À Andrea, ao Erivan, ao Ícaro, à Jessyca e à Rocilda, pelo excelente trabalho na secretaria da Pós-Graduação e na Biblioteca da Matemática. Em especial à Diana Flor, por ter normalizado o texto de acordo com o guia de normalização do Sistema de Bibliotecas da UFC.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Eu sou do lugar dos esquecidos!

Sou da nação dos condenados!

Sou do sertão dos humilhados!

Saiba bem: conheço o meu lugar!

(Paráfrase da canção Conheço o Meu Lugar, de
Belchior.)

RESUMO

Nessa tese, investiga-se a massa Gauss-Bonnet-Chern (GBC) na classe dos gráficos euclidianos assintoticamente planos, de codimensão arbitrária, com um bordo fechado e planar, possivelmente vazio ou desconexo. Na investigação, foi obtida uma fórmula integral para esse invariante geométrico global, expressa em termos da curvatura GBC, da segunda forma fundamental e da transformação de Newton do gráfico, visto como subvariedade do espaço euclidiano; a contribuição do bordo para a massa também é quantificada através de uma fórmula integral, expressa em termos do ângulo de contato do gráfico com cada hiperplano que contem uma componente conexa do bordo e de uma curvatura média de alta ordem dessa componente, vista como subvariedade do hiperplano. Quando essa curvatura média é não-negativa, a fórmula pode ser aplicada para derivar uma versão parcial da conjectura da massa GBC positiva, nessa classe de gráficos. Por sua vez, quando o bordo é estrelado, satisfaz uma hipótese de convexidade apropriada e o ângulo de contato é reto, a fórmula pode ser combinada com a desigualdade de Alexandrov-Frenchel, para derivar a validade parcial da desigualdade de Penrose para essa noção de massa.

Palavras-chave: massa GBC; teorema da massa positiva; desigualdade de Penrose.

ABSTRACT

In this thesis, we investigate the Gauss-Bonnet-Chern (GBC) mass in the class of asymptotically flat Euclidean graphs, of arbitrary codimension, with a closed and planar boundary, possibly empty or disconnected. In the investigation, an integral formula was obtained for this geometric global invariant, expressed in terms of the GBC curvature, the second fundamental and the Newton transformation of the graph, seen as a submanifold of Euclidean space; the contribution of the boundary for the mass is also quantified through an integral formula, expressed in terms of the contact angle of the graph with each hyperplane that contains a connected component of the boundary and a higher order mean curvature of this component, seen as a submanifold of the hyperplane. When this mean curvature is non-negative, the formula can be applied to derive a partial version of the positive GBC mass conjecture, in that graph class. In turn, when the boundary is star-shaped, satisfies an appropriate convexity hypothesis and the contact angle is straight, the formula can be combined with the Alexandrov-Frenchel inequality to derive the partial validity of the Penrose inequality for this notion of mass.

Keywords: GBC mass; positive mass theorem; penrose inequality.

SUMÁRIO

1	A MASSA GBC	9
2	A MASSA GBC NA CLASSE DOS GRÁFICOS EUCLIDIANOS	12
2.1	Fórmulas de divergência para o campo gerador da massa GBC	17
2.2	Uma fórmula para a massa GBC	20
3	APLICAÇÃO: CONJECTURAS DA MASSA POSITIVA E DE PENROSE	27
	REFERÊNCIAS	38

1 A MASSA GBC

No artigo *A new mass for asymptotically flat manifolds* (Uma nova massa para variedades assintoticamente planas, em tradução livre) (GE *et al.*, 2014b), os autores Yuxin Ge, Guofang Wang e Jie Wu, inspirados na noção de massa ADM, advinda da Relatividade Geral (ARNOWITT *et al.*, 1961; ARNOWITT *et al.*, 2008), propuseram uma definição de massa para a classe das variedades riemannianas assintoticamente planas, a qual batizaram pelo nome de *massa Gauss–Bonnet–Chern* ou, abreviadamente, *massa GBC*. De fato, a definição proposta estende a noção de massa ADM.

Definição 1.1 (Variedade Riemanniana Assintoticamente Plana). *Uma variedade riemanniana assintoticamente plana (a taxa τ) é uma variedade riemanniana suave (M^n, g) , completa, possivelmente com bordo, que admite um número finito de fins, assintoticamente planos (a taxa τ , para algum número real positivo $\tau > 0$). Ou seja, é uma variedade riemanniana que admite a existência de um subconjunto compacto $K \subset M$, cujo complemento $M \setminus K = \sqcup_{i=0}^{l < \infty} E_i$ tem um número finito de componentes conexas E_i , cada uma delas munida com um difeomorfismo $\Phi_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{R_i}(0)$, $R_i > 0$, tal que, com respeito às coordenadas induzidas $x = (x_1, \dots, x_n)$, a métrica g satisfaz a seguinte condição assintótica:*

$$(g_{ij} - \delta_{ij})(x) = O_2(|x|^{-\tau}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \tau > 0, \quad (1.1)$$

onde δ e $|\cdot|$ denotam a métrica e a norma euclidiana canônicas, respectivamente. Cada componente conexa $(E_i, g|_{E_i})$ é um representante de um fim. Os difeomorfismos Φ_i são denominados difeomorfismo dos fins ou cartas dos fins.

Observação 1.2 (Notação Assintótica). *A notação $f(x) = O_k(|x|^{-s})$, $|x| \rightarrow \infty$, com $s \in \mathbb{R}$ um número real, significa que, f é uma função de classe C^k , em um aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , à valores reais, tal que, para $|x|$ suficientemente grande, vale a desigualdade:*

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |x|^{-s+|\alpha|} |\partial^\alpha f(x)| \leq C, \quad |x| \gg 1,$$

para alguma constante real positiva $C > 0$ e independente do ponto. Ou seja, para qualquer número real positivo $R_0 > 0$, existe uma constante real positiva $C \equiv C(R_0) > 0$, tal que, para todo ponto x no domínio de definição da função e fora da bola aberta de raio R_0 , $|x| \geq R_0$, vale a desigualdade. Aqui, ∂^α denota o operador derivada parcial canônico no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , em notação multi-índice.

Conforme proposto pelos autores no artigo (GE *et al.*, 2014b), a massa GBC é uma quantidade que pode ser definida da seguinte forma.

Definição 1.3 (Massa Gauss–Bonnet–Chern – Massa GBC). *A q -ésima massa Gauss–Bonnet–Chern (massa GBC) de um fim E , recolhido em uma variedade riemanniana suave (M^n, g) , assintoticamente plana e com dimensão $n \geq 3$, é dada pelo limite,*

$$m_{(q)}(E, g) := c(n, q) \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} P_{(q)}^{ijkl} g_{jk,l}(\mathbf{v}_e)_i dS_e, \quad (1.2)$$

onde $1 \leq q < \frac{n}{2}$ designa um número inteiro fixado;

$$c(n, q) = \frac{(n - 2q)!}{2^{q-1}(n-1)! \omega_{n-1}}$$

é uma constante de normalização; $\omega_{n-1} \equiv |\mathbb{S}^{n-1}|$ indica o volume da esfera redonda \mathbb{S}^{n-1} de raio unitário e dimensão $n - 1$; $S_r \equiv \Phi^{-1}(\mathbb{S}_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n)$ é uma esfera coordenada de raio r , induzida por um difeomorfismo Φ fixado no fim E (definição 1.1); \mathbf{v}_e e dS_e são o campo normal unitário, apontando pro fim, e o elemento de volume, respectivamente, ambos com respeito à métrica $\Phi^* \delta$, induzida pela métrica euclidiana canônica δ , e ao longo da esfera coordenada S_r ; $g_{jk,l}$, $\forall 1 \leq j, k, l \leq n$, denotam as derivadas parciais $\partial_l g_{jk} \equiv \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}$, com respeito às coordenadas induzidas pelo difeomorfismo fixado; $P_{(q)}^{ijkl}$ designa um polinômio de ordem $(q - 1)$ no tensor de curvatura de Riemann, tomando valores tensoriais, que, em notação de índices, pode ser definido pela expressão,

$$P_{(q)}^{ijkl} := \frac{1}{2^q} \delta_{b_1 \dots b_{2q-2} cd}^{a_1 \dots a_{2q-2} ij} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{a_{2s-1} a_{2s} b_{2s-1} b_{2s}} \right) g^{ck} g^{dl}, \quad (1.3)$$

aqui, $R_{ab}{}^{cd} = g^{cm} g^{dn} R_{abmn}$ indica o tensor metricamente equivalente ao tensor de Riemann totalmente covariante,

$$R_{abmn} = \langle \nabla_{[\partial_a, \partial_b]} \partial_m - [\nabla_{\partial_a}, \nabla_{\partial_b}] \partial_m, \partial_n \rangle_g, \quad (1.4)$$

∇ denota a conexão de Levi-Civita determinada pela métrica g ,

$$\delta_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p} := \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \delta_{b_1}^{\sigma(a_1)} \dots \delta_{b_p}^{\sigma(a_p)} \quad (1.5)$$

remete à delta de Kronecker generalizada (GE *et al.*, 2014b, p. 6), que é um tensor totalmente anti-simétrico, conforme se pode concluir da sua definição.

Observação 1.4 (Massa ADM). *Quando o inteiro $q = 1$, a massa GBC coincide com a massa ADM (GE *et al.*, 2014b, Seção 8).*

Observação 1.5. O polinômio $P_{(q)}$ é dito ser um tensor de curvatura, haja visto que, tal qual o tensor de curvatura de Riemann, satisfaz todas as simetrias algébricas e a identidade diferencial de Bianchi (GE et al., 2014b, Seção 3). Ademais, esse tensor de curvatura também é totalmente livre de divergência (GE et al., 2014b, Lema 3.1).

O tensor de curvatura $P_{(q)}$ está intimamente relacionado a q -ésima curvatura Gauss–Bonnet–Chern (curvatura GBC),

$$L_{(q)} := \frac{1}{2^q} \delta_{b_1 \dots b_{2q}}^{a_1 \dots a_{2q}} \left(\prod_{s=1}^q R_{a_{2s-1} a_{2s}}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right), \quad (1.6)$$

que é um polinômio de ordem q no tensor de curvatura de Riemann, a valores reais¹. A saber, essas curvaturas estão relacionadas pela identidade²,

$$L_{(q)} = P_{(q)}^{ijkl} R_{ijkl}.$$

Embora seja definida fazendo uso da carta fixada do fim escolhido, a massa GBC é, de fato, um *invariante geométrico*, quando a variedade (M^n, g) é assintoticamente plana a uma taxa $\tau > \frac{n-2q}{q+1}$ e tem q -ésima curvatura GBC integrável, conforme verificado em (GE et al., 2014b, Teorema 3.3).

¹ Para fins de comparação, pode-se verificar que $L_{(1)}$ é justamente a curvatura escalar.

² De fato, é justamente fazendo uso dessa relação, que Ge, Wang e Wu constroem a definição da massa GBC (GE et al., 2014b, Seção 3).

2 A MASSA GBC NA CLASSE DOS GRÁFICOS EUCLIDIANOS

Inspirado no trabalho de George Lam (LAM, 2011; LAM, 2010) e seus sucessores (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015; LIMA; GIRÃO, 2014; LIMA; GIRÃO, 2015; GE *et al.*, 2014b; LI *et al.*, 2014), nesse capítulo será estudada a massa GBC na classe dos gráficos euclidianos, isto é:

Definição 2.1 (Gráfico Euclidiano). *Uma variedade riemanniana suave (M^n, g) , com bordo (possivelmente vazio) e dimensão $n \geq 1$, é dita ser um gráfico euclidiano, quando pode ser realizada, isometricamente, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+m} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, como o gráfico de uma aplicação suave¹ $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a valores no espaço euclidiano \mathbb{R}^m , com dimensão $m \geq 1$, cujo domínio é um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com interior não-vazio, tal que o seu bordo $\partial\Omega$ (possivelmente vazio) é uma hipersuperfície suave. Ou seja, é uma variedade riemanniana que, a menos de um mergulho isométrico, pode ser identificada com o conjunto*

$$M^n \equiv \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, f(x) \in \mathbb{R}^m, m > n\},$$

munido com a métrica $g \equiv \bar{\delta}|_{TM}$ induzida pela métrica canônica do espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \bar{\delta})$.

Observação 2.2 (Carta Gráfica). *A aplicação $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ determina a carta gráfica (global)*

$$\begin{aligned} F = Id_\Omega \times f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow M^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

que, por sua vez, determina a topologia diferencial canônica do gráfico M^n . É possível checar que a sua inversa é a restrição ao gráfico da projeção no primeiro fator do produto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} F^{-1} = \pi_1|_M : M^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ (x, f(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Observação 2.3 (Coordenadas Gráficas). *A carta gráfica determina um sistema de coordenadas canônico (global) (x_1, \dots, x_n) sobre o gráfico M , associado às coordenadas cartesianas induzidas sobre o subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o qual recebe a alcunha de coordenadas gráficas. Associado*

¹ Quando o domínio tem bordo não-vazio, isso significa que a aplicação admite uma extensão suave, em uma vizinhança aberta do seu domínio.

a esse sistema de coordenadas, tem-se um referencial coordenado canônico (global) $\{\partial_i = (e_i, f_i^\alpha e_\alpha)\}_{i=1}^n$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ e $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ denotam as bases canônicas dos espaços euclidianos \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , restritas ao subconjunto Ω e a sua imagem $f(\Omega)$ pela aplicação f , respectivamente; $f_i^\alpha \equiv \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}$ designa as derivadas parciais das funções componentes da aplicação $f = f^\alpha e_\alpha$, com respeito à base canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^m .

A abordagem proposta por George Lam em sua tese (LAM, 2011) consiste em tomar uma exaustão por compactos, escolhidos adequadamente, em um gráfico euclidiano de codimensão um e aplicar o teorema de Stokes, obtendo assim uma fórmula explícita para a massa ADM nessa classe de variedades. Essa abordagem foi estendida, por Feliciano Vitório e Heudson Mirandola (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015), para o cenário em que o gráfico tem codimensão arbitrária (finita). O intento desse trabalho é aplicar essa abordagem para investigar a massa GBC nesse cenário.

Observação 2.4. *O caso especial da massa GBC $m_{(2)}$, no cenário em cujo o gráfico tem codimensão um, foi estudado no artigo em que Yuxin Ge, Guofang Wang e Jie Wu propuseram o conceito de massa GBC (GE et al., 2014b). Por sua vez, o caso da massa $m_{(2)}$, no cenário em que o gráfico tem codimensão qualquer (finita), foi estudado por Haizhong Li, Yong Wei e Changwei Xiong (LI et al., 2014). No primeiro cenário foi aplicada a abordagem desenvolvida por Lam (LAM, 2010; LAM, 2011), enquanto que no segundo foi aplicada a extensão da abordagem do Lam desenvolvida por Mirandola-Vitório (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015).*

Heuristicamente, do ponto de vista do teorema de Stokes, pode-se interpretar a integral

$$\oint_{S_r} P_{(q)}^{ijkl} g_{jk,l}(\mathbf{v}_e)_i dS_e,$$

na definição da massa GBC (definição 1.3), como sendo o fluxo total do campo

$$X_{(q)}^i \equiv P_{(q)}^{ijkl} g_{jk,l},$$

com respeito à métrica euclidiana, ao longo das esferas coordenadas S_r , escrito em termos de um referencial coordenado determinado por um difeomorfismo dos fins. Haja visto que, em princípio, os difeomorfismos dos fins não estão definidos em uma certa região compacta da variedade, esse raciocínio heurístico manifesta uma certa dificuldade para ser tornado preciso em toda sua generalidade, à saber, tem-se o problema da extensão do campo $X_{(q)}$ a toda a variedade.

No caso especial dos gráficos euclidianos, esse problema da extensão pode ser contornado de uma maneira muito simples. Para isso, basta definir o campo $X_{(q)}$ através da expressão acima, desde que se concorde em reescrevê-la em termos das coordenadas gráficas 2.3.

Definição 2.5 (Campo Gerador da Massa GBC). *Considere um gráfico euclidiano suave (M^n, g) , de dimensão $n \geq 3$. Para cada inteiro $1 \leq q < \frac{n}{2}$, pode-se definir um campo $X_{(q)} \in \Gamma(TM)$ através da expressão*

$$X_{(q)} := P_{(q)}^{ijkl} g_{jk,l} \partial_i, \quad (2.1)$$

escrita em termos do referencial coordenado canônico (Observação 2.3) determinado pela carta gráfica (Observação 2.2), onde $P_{(q)}^{ijkl}$ é o tensor de curvatura dado na definição da massa GBC (Definição 1.3). Haja visto que o fluxo desse campo nos fins gera a massa GBC, doravante será dito que ele é o campo gerador da massa GBC.

À primeira vista, essa expressão de definição do campo $X_{(q)}$ não tem um significado geométrico claro. Na proposição a seguir, estabelece-se a sua relação com a geometria extrínseca do gráfico, visto como uma subvariedade do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+m} . Porém, antes de enunciar essa proposição, faz-se conveniente introduzir um pouco mais de linguagem e notações, no intento de melhorar a comunicação.

Considere um gráfico euclidiano suave (M^n, g) , possivelmente com bordo, de dimensão $n \geq 3$. Para cada inteiro $1 \leq q < \frac{n}{2}$, denota-se por $T_{(2q-1)}$ o seu *tensor de Newton* de ordem $2q - 1$, que é um polinômio dessa ordem na *segunda forma fundamental* do gráfico, visto como uma subvariedade do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+m} , a qual (por definição) é dada por

$$B(X, Y) := (\bar{D}_X Y)^\perp, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), \quad (2.2)$$

onde \bar{D} denota a conexão de Levi-Civita do espaço euclidiano ambiente \mathbb{R}^{n+m} , determinada por sua métrica canônica $\bar{\delta}$. A saber, o tensor de Newton de ordem $2q - 1$ é o polinômio

$$T_{(2q-1)} = \frac{1}{(2q-1)!} \delta_{b_1 \dots b_{2q-1} j}^{a_1 \dots a_{2q-1} i} \left(\prod_{s=1}^{q-1} \langle B_{a_{2s-1} b_{2s-1}}, B_{a_{2s} b_{2s}} \rangle \right) B_{a_{2q-1} b_{2q-1}} g_{ik} dx^j \odot dx^k, \quad (2.3)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica canônica do espaço euclidiano ambiente \mathbb{R}^{n+m} , $B_a^b = g^{bc} B(\partial_a, \partial_c)$ e o símbolo \odot designa a simetrização do produto tensorial, e indica o fato de que o tensor de Newton é simétrico. Fixado o referencial global $\{\eta_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ para o fibrado normal $T^\perp M$ do gráfico

$M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, com cada campo desse referencial sendo dado por

$$\eta_\alpha = (-Df^\alpha, e_\alpha), \quad (2.4)$$

onde Df^α denota o gradiente euclidiano (com respeito à métrica euclidiana canônica) da componente da aplicação $f = (f^1, \dots, f^m)$, na direção e_α determinada pela base canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^m , em cujo o qual a aplicação toma valores; as projeções do tensor de Newton $T_{(2q-1)\alpha} = \langle T_{(2q-1)}, \eta_\alpha \rangle$, em cada uma das direções η_α fixadas, determinam uma família de tensores simétricos $\{T_{(2q-1)\alpha}\}_{\alpha=1}^m$, que sob a ação do isomorfismo musical suspenso \sharp , determinam a família de endomorfismos do fibrado tangente $\{T_{(2q-1)\alpha}^\sharp\}_{\alpha=1}^m$, cada um dos quais será denominado pela alcunha de *operador de Newton (de ordem $2q-1$) com respeito à direção η_α* , e pode ser descrito pela expressão

$$T_{(2q-1)\alpha}^\sharp = \frac{1}{(2q-1)!} \delta_{b_1 \dots b_{2q-1} j}^{a_1 \dots a_{2q-1} i} \left(\prod_{s=1}^{q-1} \langle B_{a_{2s-1} b_{2s-1}}, B_{a_{2s} b_{2s}} \rangle \right) B_{\alpha a_{2q-1} b_{2q-1}} \partial_i \otimes dx^j, \quad (2.5)$$

onde $B_{\alpha a}{}^b = g^{bc} \langle B(\partial_a, \partial_c), \eta_\alpha \rangle$ é determinado pelo endomorfismo do fibrado tangente, denominado *operador de forma com respeito à direção η_α* ,

$$B_\alpha^\sharp \cdot X := -(\bar{D}_X \eta_\alpha)^\top, \quad \forall X \in \Gamma(TM). \quad (2.6)$$

Posto isto, tem-se linguagem suficiente para enunciar a proposição.

Proposição 2.6. *Considere um gráfico euclidiano suave (M^n, g) , possivelmente com bordo. Se f^α (ou qualquer outro índice do alfabeto grego) denota cada uma das componentes da aplicação $f = (f^1, \dots, f^m)$ que o determina ², calculadas com respeito à base canônica $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ do espaço euclidiano onde a aplicação toma valores, então vale a identidade*

$$X_{(q)} = \frac{1}{2} (2q-1)! T_{(2q-1)\alpha}^\sharp \cdot \nabla f^\alpha, \quad (2.7)$$

onde cada $T_{(2q-1)\alpha}^\sharp$ designa o operador de Newton na direção ³ η_α ; ∇f^α denota o gradiente (com respeito à métrica g) da α -ésima componente do levantamento da aplicação f ao gráfico M , via carta gráfica ⁴ F , isto é, $\tilde{f} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é tal que $\tilde{f} = f \circ F^{-1}$, a qual será designada pelo mesmo símbolo sempre que não houver ambiguidade.

Para propósitos de organização do texto, faz-se conveniente agrupar no seguinte lema algumas identidades que serão usadas recorrentemente.

² Vide definição 2.1.

³ Vide equação (2.5) e a descrição que a precede no mesmo parágrafo.

⁴ Vide observação 2.2

Lema 2.7. Denotando-se as quantidades com respeito ao referencial coordenado canônico (Observação 2.3) com índices latinos ($1 \leq i, j, k, l, \dots \leq n$), e aquelas com respeito ao referencial normal especificado em (2.4) com índices gregos ($1 \leq \alpha, \beta, \dots \leq m$), conclui-se que, sob as mesmas hipóteses da Proposição 2.6, valem as seguintes identidades:

$$g_{jk} = \delta_{jk} + f_j^\alpha f_k^\alpha \quad (2.8)$$

$$g_{jk,l} = f_{jl}^\alpha f_k^\alpha + f_j^\alpha f_{kl}^\alpha \quad (2.9)$$

$$\nabla f^\alpha = g^{ij} f_j^\alpha \partial_i = U^{\alpha\beta} f_i^\beta \partial_i \quad (2.10)$$

$$U^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \langle \nabla f^\alpha, \nabla f^\beta \rangle_g, \quad (2.11)$$

onde $U^{\alpha\beta}$ denota a matriz inversa da métrica do fibrado normal $T^\perp M$, com respeito ao referencial normal especificado em (2.4); esta métrica é aquela que provém da métrica do espaço euclidiano ambiente onde o gráfico está mergulhado;

$$B(\partial_i, \partial_j) = f_{ij}^\alpha U^{\alpha\beta} \eta_\beta \quad (2.12)$$

$$B_{\alpha ij} = \langle B(\partial_i, \partial_j), \eta_\alpha \rangle = f_{ij}^\alpha \quad (2.13)$$

$$B_\alpha^\# \cdot \partial_i = B_{\alpha ij} g^{jk} \partial_k = f_{ij}^\alpha g^{jk} \partial_k \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} f_l^\alpha f_{ij}^\alpha = (\nabla f^\alpha)^k B_{\alpha ij} \quad (2.15)$$

$$R_{ijkl} = \langle B(\partial_i, \partial_k), B(\partial_j, \partial_l) \rangle - \langle B(\partial_i, \partial_l), B(\partial_j, \partial_k) \rangle \quad (2.16)$$

$$= U^{\alpha\beta} \left(f_{ik}^\alpha f_{jl}^\beta - f_{il}^\alpha f_{jk}^\beta \right), \quad (2.17)$$

onde a penúltima e a última igualdades são versões da equação de Gauss para o caso de gráficos euclidianos;

$$T_{(2q-1)\alpha}^\# \cdot \partial_j = \frac{1}{2^{q-1}(2q-1)!} \delta_{b_1 \dots b_{2q-1} j}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2q-1} i} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{\alpha_{2s-1} \alpha_{2s}}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right) B_{\alpha \alpha_{2q-1}}^{b_{2q-1}} \partial_i \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2q-1)!} L_{(q)} &= \frac{1}{(2q-1)! 2^q} \delta_{b_1 \dots b_{2q-1} b_{2q}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2q-1} \alpha_{2q}} \left(\prod_{s=1}^q R_{\alpha_{2s-1} \alpha_{2s}}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right) \\ &= U^{\alpha\beta} T_{(2q-1)\alpha} \cdot B_\beta, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $T_{(2q-1)\alpha}^\#$ é o operador de Newton especificado na equação (2.5).

Demonstração. As identidades (2.8-2.15) são obtidas por cálculo direto. Os detalhes podem ser encontrados no trabalho de Feliciano Vitória e Heudson Mirandola (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015, Seções 1 e 2). Por isso, não serão detalhadas aqui.

As identidades (2.16) e (2.17) são aplicações da equação de Gauss para subvariedades, no caso especial dos gráficos euclidianos, e da identidade (2.12), respectivamente.

Por fim, as identidades (2.18) e (2.19) são resultados da combinação da fórmula de Gauss, no caso especial de subvariedades euclidianas (2.16), com a expressão (2.5) para o operador de Newton com respeito à direção η_α . \square

Demonstração da Proposição 2.6. Combinando a expressão de definição do campo $X_{(q)}$ (2.5) e a identidade (2.9), obtém-se a identidade,

$$X_{(q)}{}^i = P_{(q)}{}^{ijkl} \left(f_{jl}^\alpha f_k^\alpha + f_j^\alpha f_{kl}^\alpha \right),$$

que combinada com as propriedades de antissimetria e de simetria do tensor de curvatura $P_{(q)}{}^{ijkl}$ e das derivadas parciais f_{kl}^α , com respeito ao par de índices (k, l) , respectivamente, e com a identidade (2.13), resulta nas identidades,

$$X_{(q)}{}^i = P_{(q)}{}^{ijkl} f_{jl}^\alpha f_k^\alpha = P_{(q)}{}^{ijkl} B_{\alpha jl} f_k^\alpha.$$

Pela definição (1.3) do tensor de curvatura $P_{(p)}{}^{ijkl}$, tem-se:

$$\begin{aligned} X_{(q)}{}^i &= \frac{1}{2^q} \delta_{b_1 b_2 \dots b_{2q-3} b_{2q-2} c d}^{a_1 a_2 \dots a_{2q-3} a_{2q-2} i j} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{a_{2s-1} a_{2s}}{}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right) g^{ck} g^{dl} B_{\alpha jl} f_k^\alpha \\ &= \frac{1}{2^q} \delta_{b_1 b_2 \dots b_{2q-3} b_{2q-2} c d}^{a_1 a_2 \dots a_{2q-3} a_{2q-2} i j} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{a_{2s-1} a_{2s}}{}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right) g^{dl} B_{\alpha jl} g^{ck} f_k^\alpha \end{aligned}$$

Usando as identidades (2.13) e (2.10)

$$= \frac{1}{2^q} \delta_{b_1 b_2 \dots b_{2q-3} b_{2q-2} c d}^{a_1 a_2 \dots a_{2q-3} a_{2q-2} i j} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{a_{2s-1} a_{2s}}{}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right) B_{\alpha j}{}^d (\nabla f^\alpha)^c$$

Permutando os pares de índices (i, j) e (c, d) , e usando a identidade (2.18)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^q} \delta_{b_1 b_2 \dots b_{2q-3} b_{2q-2} d c}^{a_1 a_2 \dots a_{2q-3} a_{2q-2} j i} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{a_{2s-1} a_{2s}}{}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right) B_{\alpha j}{}^d (\nabla f^\alpha)^c \\ &= \frac{1}{2} (2q-1)! \left(T_{(2q-1)}^\# \right)_c^i (\nabla f^\alpha)^c = \frac{1}{2} (2q-1)! \left(T_{(2q-1)}^\# \cdot \nabla f^\alpha \right)^i \end{aligned}$$

Daí, segue a proposição. \square

2.1 Fórmulas de divergência para o campo gerador da massa GBC

Seguindo o programa desenvolvido por George Lam (LAM, 2010; LAM, 2011) e seus sucessores (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015; LIMA; GIRÃO, 2014; LIMA; GIRÃO,

2015), precisa-se calcular a divergência do campo gerador $X_{(q)}$ (eq. 2.7) para aplicar o teorema de Stokes. De fato, serão calculadas duas fórmulas de divergência; uma é a divergência do campo $X_{(q)}$, com respeito à conexão de Levi-Civita da métrica canônica do gráfico (M^n, g) ; a outra é a divergência da projeção desse mesmo campo no domínio do gráfico, via aplicação inversa da carta gráfica (Observação 2.2), com respeito à conexão de Levi-Civita da métrica euclidiana canônica sobre o domínio do gráfico.

Proposição 2.8. *Nas hipóteses da Proposição 2.6, vale a identidade,*

$$\operatorname{div}_g X_{(q)} = \frac{1}{2}L_{(q)} + \frac{1}{2}(2q-1)! \left\langle \left(T_{(2q-1)\beta}^\# \circ B_\alpha^\# \right) \cdot \nabla f^\beta, \nabla f^\alpha \right\rangle_g. \quad (2.20)$$

Demonstração. Usando a expressão para o campo $X_{(q)}$ estabelecida na Proposição 2.6, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g X_{(q)} &= \frac{1}{2}(2q-1)! \operatorname{div}_g \left(T_{(2q-1)\alpha}^\# \cdot \nabla f^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2}(2q-1)! \left[\operatorname{div}_g \left(T_{(2q-1)\alpha} \right) \cdot \nabla f^\alpha + T_{(2q-1)\alpha} \cdot \nabla^2 f^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Com respeito às coordenadas gráficas, temos

$$\nabla^2 f^\alpha(\partial_i, \partial_j) = (\nabla df)_{ij} = f_{ij}^\alpha - f_k^\alpha \Gamma_{ij}^k$$

Identities (2.13) e (2.15)

$$\begin{aligned} &= B_{\alpha ij} - f_k^\alpha \left(\nabla f^\beta \right)^k B_{\beta ij} \\ &= \left(\delta_{\alpha\beta} - \langle \nabla f^\alpha, \nabla f^\beta \rangle \right) B_{\beta ij} \end{aligned}$$

Identity (2.11)

$$= U^{\alpha\beta} B_{\beta ij} = U^{\alpha\beta} B_\beta(\partial_i, \partial_j).$$

Logo, pela identidade (2.19), concluímos que

$$T_{(2q-1)\alpha} \cdot \nabla^2 f^\alpha = U^{\alpha\beta} T_{(2q-1)\alpha} \cdot B_\beta = \frac{1}{(2q-1)!} L_{(q)}. \quad (2.22)$$

Por sua vez, usando o fato de que as conexões ∇^\perp e ∇ , induzidas nos fibrados normal e tangente do gráfico, respectivamente, provêm da conexão de Levi-Civita \bar{D} do espaço euclidiano ambiente,

tem-se,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}_g T_{(2q-1)\alpha})_j &= \nabla_i (T_{(2q-1)\alpha})^i_j = \nabla_i \langle (T_{(2q-1)})^i_j, \eta_\alpha \rangle \\
&= \langle \nabla_i^\perp (T_{(2q-1)})^i_j, \eta_\alpha \rangle + \langle (T_{(2q-1)})^i_j, \nabla_i^\perp \eta_\alpha \rangle \\
&= \langle (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_j, \eta_\alpha \rangle + U^{\gamma\beta} (T_{(2q-1)\beta})^i_j \langle \eta_\gamma, \nabla_i^\perp \eta_\alpha \rangle \\
&= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + U^{\gamma\beta} (T_{(2q-1)\beta})^i_j \langle \eta_\gamma, \bar{D}_i \eta_\alpha \rangle
\end{aligned}$$

Expressão (2.4) para o referencial normal

$$= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + (T_{(2q-1)\beta})^i_j U^{\gamma\beta} f_k^\gamma f_{ik}^\alpha$$

Identities (2.10) e (2.13)

$$\begin{aligned}
&= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + (T_{(2q-1)\beta})^i_j (\nabla f^\beta)^k (B_\alpha)_{ik} \\
&= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + (T_{(2q-1)\beta})_{lj} g^{li} (B_\alpha)_{ik} (\nabla f^\beta)^k
\end{aligned}$$

Identidade (2.14)

$$\begin{aligned}
&= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + (T_{(2q-1)\beta})_{lj} (B_\alpha^\sharp)^l_k (\nabla f^\beta)^k \\
&= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + (T_{(2q-1)\beta})_{lj} (B_\alpha^\sharp \cdot \nabla f^\beta)^l \\
&= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + g_{jm} (T_{(2q-1)\beta})_l^m (B_\alpha^\sharp \cdot \nabla f^\beta)^l \\
&= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_{\alpha j} + \left((T_{(2q-1)\beta}^\sharp \circ B_\alpha^\sharp) \cdot \nabla f^\beta \right)^m g_{mj}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_g (T_{(2q-1)\alpha}) \cdot \nabla f^\alpha &= (\operatorname{div} T_{(2q-1)})_\alpha \cdot \nabla f^\alpha + \left\langle (T_{(2q-1)\beta}^\sharp \circ B_\alpha^\sharp) \cdot \nabla f^\beta, \nabla f^\alpha \right\rangle_g \\
&= \left\langle (T_{(2q-1)\beta}^\sharp \circ B_\alpha^\sharp) \cdot \nabla f^\beta, \nabla f^\alpha \right\rangle_g, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usou-se o fato de que, pela equação de Codazzi, os tensores de Newton (de todas as ordens) das subvariedade das formas espaciais, em particular, do espaço euclidiano, são livres de divergência, isto é, $\operatorname{div} T_{2q-1} = 0$ (CAO; LI, 2007, Lemas 3.1 e 3.2).

Portanto, substituindo os resultados (2.23) e (2.22) na identidade (2.21), resulta na proposição. \square

Proposição 2.9. *Nas mesmas hipóteses da Proposição 2.6 e usando o mesmo símbolo para denotar a projeção do campo $X_{(q)}$ no domínio do gráfico, via inversa da carta gráfica⁵ F , isto é,*

⁵ Veja observação 2.2

$X_{(q)} \equiv F_*^{-1}X_{(q)} = X_{(q)}^i e_i$, tem-se:

$$\operatorname{div}_e X_{(q)} = \frac{1}{2}L_{(q)} + \frac{1}{2}(2q-1)! \left\langle \left[T_{(2q-1)\beta}^\sharp, B_\alpha^\sharp \right] \cdot \nabla f^\beta, \nabla f^\alpha \right\rangle_g, \quad (2.24)$$

onde div_e denota o operador divergência, com respeito à métrica euclidiana; as quantidades do lado direito são calculada sobre o domínio do gráfico, via pullback pela carta gráfica.

Demonstração. Com respeito às coordenadas cartesianas, induzidas sobre o domínio do gráfico, tem-se:

$$\operatorname{div}_e X_{(q)} = \partial_i X_{(q)}^i. \quad (2.25)$$

Por outro lado, se o *pullback* (via carta gráfica F) da divergência do campo $X_{(q)}$ sobre o gráfico é denotado pelo mesmo símbolo, $\operatorname{div}_g X_{(q)} \equiv F^* (\operatorname{div}_g X_{(q)}) = \operatorname{div}_g X_{(q)} \circ F$, segue que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g X_{(q)} &= \nabla_i X_{(q)}^i = \partial_i X_{(q)}^i + \Gamma_{ij}^i X_{(q)}^j \\ &\boxed{\text{Identities (2.25) e (2.15)}} \\ &= \operatorname{div}_e X_{(q)} + (\nabla f^\alpha)^i B_{\alpha ij} X_{(q)}^j \\ &\boxed{\text{Simetria no par de índices } (i, j) \text{ em } B_{\alpha ij}} \\ &= \operatorname{div}_e X_{(q)} + (\nabla f^\alpha)^i g_{ik} B_{\alpha j}^k X_{(q)}^j \\ &\boxed{\text{Identidade (2.14)}} \\ &= \operatorname{div}_e X_{(q)} + (\nabla f^\alpha)^i g_{ik} \left(B_\alpha^\sharp \cdot X_{(q)} \right)^k \\ &= \operatorname{div}_e X_{(q)} + \left\langle B_\alpha^\sharp \cdot X_{(q)}, \nabla f^\alpha \right\rangle \\ &\boxed{\text{Proposição 2.6}} \\ &= \operatorname{div}_e X_{(q)} + \frac{1}{2}(2q-1)! \left\langle \left(B_\alpha^\sharp \circ T_{(2q-1)\beta}^\sharp \right) \cdot \nabla f^\beta, \nabla f^\alpha \right\rangle. \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 2.8, segue o resultado. □

2.2 Uma fórmula para a massa GBC

De posse da fórmula de divergência estabelecida na Proposição 2.9, pode-se aplicar o teorema de Stokes, de forma a obter uma fórmula para a massa GBC dos gráficos euclidianos. Porém, antes de enunciar a fórmula, é conveniente introduzir alguma linguagem que viabilize a comunicação.

Definição 2.10 (q -Curvatura Média). *Seja $\Sigma \subset \mathcal{M}^n$ uma hipersuperfície suave, orientável, de uma variedade riemanniana (\mathcal{M}^n, h) , e seja ξ um campo normal unitário ao longo de Σ , que determina uma escolha de orientação (escolhido para apontar para o exterior, sempre que fizer sentido). Para qualquer número inteiro q , $0 \leq q < n - 1$, a q -curvatura média da hipersuperfície Σ é definida como sendo a q -ésima função simétrica elementar das suas curvaturas principais. Alternativamente, se K denota a segunda forma fundamental da hipersuperfície $\Sigma \subset \mathcal{M}$, com respeito ao normal ξ , então a q -curvatura média é definida pela expressão,*

$$H_{(q)} := \frac{1}{q!} \delta_{b_1 b_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots a_q} \prod_{s=1}^q K_{a_s}{}^{b_s}, \quad 0 \leq q \leq n - 1, \quad (2.26)$$

onde $H_{(0)} = 1$, por convenção. A hipersuperfície Σ é dita ser q -convexa na média se $H_{(r)} \geq 0, \forall 0 \leq r \leq q$. Ela é dita ser estritamente q -convexa na média se vale a desigualdade estrita $H_{(r)} > 0, \forall 0 \leq r \leq q$.

Lema 2.11. *Sejam $\Sigma \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície suave no domínio de um gráfico euclidiano (M^n, g) e ξ um campo normal unitário ao longo desta, tais como descritos na Definição 2.10. Se cada uma de suas componentes conexas está em um conjunto de nível da aplicação f que determina o gráfico, então cada uma das componentes conexas da hipersuperfície $F(\Sigma) \subset M$ determinada pela carta gráfica⁶ F , está em um hiperplano do espaço euclidiano ambiente \mathbb{R}^{n+m} .*

Ademais, se $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ designa o ângulo de contato do gráfico M com cada um dos hiperplanos que o intersectam, ao longo das componentes conexas da hipersuperfície $F(\Sigma)$, então valem as identidades:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \quad (2.27)$$

e

$$\langle X_{(q)}, \xi \rangle = -\frac{1}{2} (2q - 1)! (\sin^2 \theta)^q H_{(2q-1)}, \quad \forall q \in \mathbb{Z}, 1 \leq q < \frac{n}{2}, \quad (2.28)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica canônica do espaço euclidiano; $H_{(2q-1)}$ denota a $(2q - 1)$ -curvatura média da hipersuperfície Σ com respeito ao campo normal unitário ξ ; e,

$$|Df|^2 = \sum_{\alpha=1}^m |Df^\alpha|^2.$$

Demonstração. Fixado um ponto $x \in \Sigma$, seja $\{\xi = e_1, e_A\}_{A=2}^n$ um referencial ortonormal adaptado para o espaço tangente $T_x \Sigma$, com respeito à métrica canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . A

⁶ Vide Observação 2.2.

menos de um movimento rígido, pode-se tomar esse referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$ como sendo o referencial canônico (global) do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Haja visto que cada uma das componentes conexas da hipersuperfície Σ está em algum conjunto de nível da aplicação f , segue que essa é constante ao longo da hipersuperfície. Logo, para $2 \leq A \leq n$, tem-se:

$$f_A^\alpha = 0, \quad f_1^\alpha = \langle Df^\alpha, \xi \rangle \implies Df^\alpha = f_1^\alpha e_1 = \langle Df^\alpha, \xi \rangle \xi.$$

Daí,

$$g_{11} = 1 + |Df|^2, \quad g_{1A} = 0, \quad g_{AB} = \delta_{AB}.$$

Seguindo as ideias de Luis Alias, Jorge de Lira, e Miguel Malacarne (ALÍAS *et al.*, 2006, Seção 4), conclui-se que no ponto $F(x) \in F(\Sigma)$, sem perda de generalidade, pode-se tomar o campo normal unitário ν ao longo da hipersuperfície $F(\Sigma)$, com respeito ao gráfico (M^n, g) e compatível com a orientação induzida por esse, como sendo o vetor tangente,

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df|^2}} (\xi, \langle Df^\alpha, \xi \rangle e_\alpha) \in T_{F(x)} M^n \subset T_{F(x)} \mathbb{R}^{n+m}. \quad (2.29)$$

Por sua vez, neste mesmo ponto pode-se tomar o campo normal unitário χ à hipersuperfície $F(\Sigma)$, com respeito ao hiperplano $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+m}$, que contém a componente conexa de $F(\Sigma)$, contendo o ponto $F(x)$, como sendo o vetor,

$$\chi = (\xi, 0) \in T_{F(x)} \Pi \subset T_{F(x)} \mathbb{R}^{n+m}.$$

Dessa forma,

$$\cos \theta = \langle \nu, \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df|^2}}.$$

Com respeito ao referencial canônico $\{e_i\}_{i=1}^n$ tem-se:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \xi^j = \langle \xi, e_j \rangle = \delta_j^1, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Disso e da Proposição 2.6, segue que,

$$\langle X_{(q)}, \xi \rangle = \delta_{ij} X_{(q)}^i \xi^j = X_{(q)}^1 = \frac{1}{2} (2q-1)! \left(T_{(2q-1)\alpha}^\# \right)_i^1 (\nabla f^\alpha)^i.$$

Como a métrica g é representada por uma matriz diagonal, com respeito a esse referencial, segue que sua inversa é dada por,

$$g^{11} = \frac{1}{1 + |Df|^2} = \cos^2 \theta, \quad g^{1A} = 0, \quad g^{AB} = \delta_{AB}.$$

Assim,

$$(\nabla f^\alpha)^i = g^{ij} f_j^\alpha = g^{i1} f_1^\alpha = \delta_1^i \cos^2 \theta \langle Df^\alpha, \xi \rangle.$$

Logo,

$$\langle X_{(q)}, \xi \rangle = \frac{1}{2} (2q-1)! \cos^2 \theta \langle Df^\alpha, \xi \rangle \left(T_{(2q-1)\alpha}^\# \right)_1^1. \quad (2.30)$$

Do resultado (2.18), obtém-se:

$$\left(T_{(2q-1)\alpha}^\# \right)_1^1 = \frac{1}{2^{q-1} (2q-1)!} \delta_{b_1 \dots b_{2q-1}}^{a_1 \dots a_{2q-1}} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{a_{2s-1} a_{2s}}^{b_{2s-1} b_{2s}} \right) B_{\alpha a_{2q-1}}^{b_{2q-1}}$$

Usando que a delta de Kronecker generalizada é totalmente antissimétrica (1.5)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^{q-1} (2q-1)!} \delta_{B_1 \dots B_{2q-1}}^{A_1 \dots A_{2q-1}} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{A_{2s-1} A_{2s}}^{B_{2s-1} B_{2s}} \right) B_{\alpha A_{2q-1}}^{B_{2q-1}} \\ &= \frac{1}{2^{q-1} (2q-1)!} \delta_{B_1 \dots B_{2q-1}}^{A_1 \dots A_{2q-1}} \left(\prod_{s=1}^{q-1} R_{A_{2s-1} A_{2s}}^{B_{2s-1} B_{2s}} \right) B_{\alpha A_{2q-1}}^{B_{2q-1}} \end{aligned}$$

onde, nessa última igualdade, a delta de Kronecker generalizada é interpretada como sendo um determinante (1.5) e tomou-se a sua expansão na $2q$ -ésima coluna.

Se os tensores de curvatura de Riemann das hipersuperfícies Σ e $F(\Sigma)$ são denotados por \tilde{R} e \hat{R} , respectivamente, e as suas respectivas segundas formas fundamentais por \tilde{K} e \hat{K} , com respeito aos campos normais unitários ξ e ν , respectivamente, então, pela equação de Gauss para subvariedades, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{AB}^{CD} &= \tilde{K}_A^C \tilde{K}_B^D - \tilde{K}_A^D \tilde{K}_B^C \\ \hat{R}_{AB}^{CD} &= R_{AB}^{CD} + \hat{K}_A^C \hat{K}_B^D - \hat{K}_A^D \hat{K}_B^C. \end{aligned}$$

Haja visto que $\langle e_A, e_B \rangle = \delta_{AB} = g_{AB}$, conclui-se que $\tilde{R}_{AB}^{CD} = \hat{R}_{AB}^{CD}$. Ademais, pelas identidades (2.29) e (2.27), segue que,

$$\hat{K}_A^B = \cos \theta \tilde{K}_A^B. \quad (2.31)$$

Logo,

$$\begin{aligned} R_{AB}^{CD} &= (1 - \cos^2 \theta) \left(\tilde{K}_A^C \tilde{K}_B^D - \tilde{K}_A^D \tilde{K}_B^C \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\tilde{K}_A^C \tilde{K}_B^D - \tilde{K}_A^D \tilde{K}_B^C \right) \end{aligned}$$

Daí, combinando este resultado com o fato de que a delta de Kronecker generalizada é totalmente antissimétrica, conclui-se:

$$\left(T_{(2q-1)\alpha}^\# \right)_1^1 = \frac{1}{(2q-1)!} (\sin^2 \theta)^{q-1} \delta_{B_1 \dots B_{2q-1}}^{A_1 \dots A_{2q-1}} \left(\prod_{s=1}^{q-1} \tilde{K}_{A_{2s-1}}^{B_{2s-1}} \tilde{K}_{A_{2s}}^{B_{2s}} \right) B_{\alpha A_{2q-1}}^{B_{2q-1}}.$$

Pela escolha do referencial $\{\eta_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ para o fibrado normal $T^\perp M$ (eq. 2.4), tem-se:

$$\eta_\alpha = (-Df^\alpha, e_\alpha) = (-\langle Df^\alpha, \xi \rangle \xi, e_\alpha) \in T_{F(x)}^\perp M.$$

Donde segue que,

$$B_{\alpha C}^D = -\langle Df^\alpha, \xi \rangle \tilde{K}_C^D.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left(T_{(2q-1)\alpha}^\# \right)_1^1 &= -(\sin^2 \theta)^{q-1} \langle Df^\alpha, \xi \rangle \frac{1}{(2q-1)!} \delta_{B_1 \dots B_{2q-1}}^{A_1 \dots A_{2q-1}} \left(\prod_{s=1}^q \tilde{K}_{A_{2s-1}}^{B_{2s-1}} \tilde{K}_{A_{2s}}^{B_{2s}} \right) \\ &= -(\sin^2 \theta)^{q-1} \langle Df^\alpha, \xi \rangle H_{(2q-1)}, \end{aligned}$$

onde nesta última igualdade $H_{(2q-1)}$ denota a $(2q-1)$ -curvatura média da hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, com respeito ao campo normal unitário ξ , conforme a Definição (2.10).

Substituindo esse resultado na equação (2.30), obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle X_{(q)}, \xi \rangle &= -\frac{1}{2} (2q-1)! (\sin^2 \theta)^{q-1} \cos^2 \theta \langle Df^\alpha, \xi \rangle^2 H_{(2q-1)} \\ &= -\frac{1}{2} (2q-1)! (\sin^2 \theta)^q H_{(2q-1)}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usou-se a identidade,

$$\cos^2 \theta \langle Df^\alpha, \xi \rangle^2 = \frac{1}{1 + |Df|^2} |Df|^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta,$$

o que conclui a prova do lema. □

Definição 2.12 (Aplicação Assintoticamente Plana). *Uma aplicação suave $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cujo domínio Ω admite (pelo menos) um fim, é dita ser uma aplicação assintoticamente plana (a uma taxa τ), para algum τ real positivo ($\tau > 0$), se vale a expansão assintótica*

$$f^* \delta(u, v)(x) = O_2(|x|^{-\tau}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \forall x \in \Omega, \forall u, v \in \mathbb{R}^n \text{ unitários}, \quad (2.32)$$

onde δ e $|\cdot|$ denotam a métrica e a norma euclidianas canônicas.

Observação 2.13. *As definições de aplicação assintoticamente plana enunciadas por George Lam (LAM, 2011, Definição 10), Feliciano Vitória e Heudson Mirandola (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015, Definição 1.2) são casos particulares desta.*

Posto isto, tem-se todos os ingredientes necessários para estabelecer a fórmula para a massa GBC.

Teorema 2.14 (Fórmula para a Massa GBC). *Seja (M^n, g) um gráfico euclidiano de uma aplicação suave⁷ $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ assintoticamente plana⁸ a uma taxa $\tau > \frac{n-2q}{q+1}$, com dimensão $n \geq 3$ e $1 \leq q < \frac{n}{2}$ um número inteiro, cuja fronteira $\Sigma = \partial\Omega$ (possivelmente vazia) é uma hipersuperfície orientável, fechada⁹, com um número finito de componentes conexas. Se o gráfico é completo e tem curvatura GBC¹⁰ $L_{(q)}$ integrável, o domínio Ω tem um fim, e cada uma das componentes conexas da sua fronteira Σ está em algum conjunto de nível da aplicação f , então sua q -ésima massa GBC satisfaz a fórmula:*

$$m_q(M, g) = \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \left(L_{(q)} + (2q-1)! \left\langle \left[T_{(2q-1)\beta}^\#, B_\alpha^\# \right] \cdot \nabla f^\beta, \nabla f^\alpha \right\rangle_g \right) \frac{1}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2} (2q-1)! c_q(n) \oint_\Sigma (\sin^2 \theta)^q H_{(2q-1)} dS, \quad (2.33)$$

onde $T_{(2q-1)\beta}^\#$ e $B_\alpha^\#$ denotam os operadores de Newton e de forma¹¹, respectivamente, com respeito às direções determinadas pelo referencial do fibrado normal $T^\perp M$, especificado em (2.4); $H_{(2q-1)}$ e dS denotam a $(2q-1)$ -curvatura média¹² da hipersuperfície Σ , com respeito à normal exterior, e a sua medida riemanniana induzida, ambas calculadas com respeito à métrica euclidiana; $c_q(n)$ designa a constante de normalização descrita na definição da massa GBC¹³; e θ denota o ângulo de contato entre o gráfico M e cada um dos hiperplanos que contém as componentes conexas do seu bordo, descrito no Lema 2.11.

Observação 2.15. *O significado geométrico da hipótese de que as componentes conexas da fronteira $\Sigma = \partial\Omega$ são conjuntos de nível, é que o bordo do gráfico é planar, isto é, cada uma de suas componentes conexas está em algum hiperplano do espaço euclidiano ambiente \mathbb{R}^{n+m} . Essa é uma hipótese técnica, que se faz necessária devido à dificuldade de controlar, geometricamente, a parte tangente do gradiente ∇f^α do levantamento das componentes da aplicação f .*

⁷ Veja Definição 2.1.

⁸ Veja Definição 2.12.

⁹ Ou seja, compacta e sem bordo.

¹⁰ Veja Equação 1.6.

¹¹ Vide identidades (2.5) e (2.6), respectivamente.

¹² Definição 2.10

¹³ Definição 1.3

Demonstração. Haja visto que a aplicação f é assintoticamente plana à taxa τ dada acima, a carta gráfica correspondente $F = \text{Id}_\Omega \times f$ determina um difeomorfismo global para o gráfico M , com respeito ao qual a métrica g do gráfico admite a expansão assintótica (1.1). De fato, em termos das coordenadas gráficas, tem-se:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_i^\alpha f_j^\alpha = \delta_{ij} + f^* \delta(e_i, e_j),$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica do espaço euclidiano restrita ao domínio Ω . Logo, pela definição de aplicação assintoticamente plana (Definição 2.32) conclui-se a afirmação. Combinando isso com o fato de que o gráfico é uma variedade completa, segue que o mesmo é uma variedade riemanniana assintoticamente plana (à taxa τ), com a mesma quantidade de fins que Ω (no caso, um).

Dado que Ω tem um fim, conclui-se que as esferas coordenadas euclidianas S_r de raio suficientemente grande estão inteiramente contidas em Ω , e as regiões $\Omega_r = \bar{B}_r \cap \Omega$ limitadas pela fronteira $\Sigma = \partial\Omega$ e essas esferas coordenadas S_r determinam uma exaustão por compactos para Ω . Assim, se ν_e e ξ denotam os campos normais unitários, com respeito a métrica euclidiana, ao longo das hipersuperfícies S_r e Σ , respectivamente, apontando para o exterior da região Ω_r , então, pelo teorema de Stokes, obtém-se:

$$\int_{\Omega_r} \text{div}_e X_{(q)} dV_e = \oint_{S_r} \langle X_{(q)}, \nu_e \rangle_e dS_e + \oint_{\Sigma} \langle X_{(q)}, \xi \rangle_e dS_e.$$

Passando ao limite, pela construção (2.1) do campo $X_{(q)}$ e pela definição (1.2) da massa GBC, obtém-se:

$$\begin{aligned} m_q(M, g) &= c_q(n) \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \langle X_{(q)}, \nu_e \rangle_e dS_e \\ &= c_q(n) \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \text{div}_e X_{(q)} dV_e - \oint_{\Sigma} \langle X_{(q)}, \xi \rangle_e dS_e \right) \end{aligned}$$

Usando o fato de que a família $\{\Omega_r\}$ é uma exaustão por compactos para Ω

$$= c_q(n) \left(\int_{\Omega} \text{div}_e X_{(q)} dV_e - \oint_{\Sigma} \langle X_{(q)}, \xi \rangle_e dS_e \right)$$

Usando que $dV_g = \sqrt{\det g} dV_e$ (teorema de mudança de varáveis)

$$= c_q(n) \left(\int_M (F^{-1})^* (\text{div}_e X_{(q)}) \frac{1}{\sqrt{\det g}} dV_g - \oint_{\Sigma} \langle X_{(q)}, \xi \rangle_e dS_e \right).$$

Logo, substituindo os resultados (2.24) e (2.28) nessa última igualdade, obtém-se a fórmula (2.33). \square

3 APLICAÇÃO: CONJECTURAS DA MASSA POSITIVA E DE PENROSE

Uma das conjecturas mais notáveis em Relatividade Geral Matemática é a conjectura da massa positiva (KHURI); seja do ponto de vista físico, pela sua importância para os fundamentos teóricos da Relatividade Geral, seja do ponto de vista matemático, pela sua aplicação na resolução do problema de Yamabe (LEE; PARKER, 1987), por exemplo. Assim, é natural questionar se vale a versão dessa conjectura para a massa GBC (Definição 1.3).

Conjectura 3.1 (Conjectura da Massa GBC Positiva). *Qualquer variedade riemanniana de dimensão $n \geq 3$, assintoticamente plana ¹ a uma taxa $\tau > \frac{n-2q}{q+1}$, com $1 \leq q < \frac{n}{2}$ inteiro, cuja curvatura Gauss–Bonnet–Chern ² $L_{(q)}$ é não-negativa (e integrável), tem massa GBC ³ não-negativa. Além disso, vale a rigidez, isto é, a menos de isometrias, o espaço euclidiano canônico é a única variedade riemanniana com massa zero.*

Observação 3.2 (Conjectura da Massa ADM Positiva). *Levando-se em conta a observação 1.4, quando o inteiro $q = 1$, conclui-se que essa conjectura é exatamente a conjectura da massa ADM positiva, que motiva a conjectura para as demais massas GBC. Esta, por sua vez, é conhecida ser válida para variedades com dimensão $3 \leq n \leq 7$ (SCHOEN; YAU, 1979) (uma prova simplificada é apresentada em (SCHOEN, 1989, Seção 4)). A restrição na dimensão está na técnica empregada na prova e se deve ao fato de que hipersuperfícies minimizando área podem apresentar um conjunto singular em dimensão $n > 7$. Também é conhecida ser válida sem essa restrição na dimensão, quando a variedade é conformemente plana (SCHOEN; YAU, 1988, Seção 4) ou spin (WITTEN, 1981; PARKER; TAUBES, 1982) (veja também (BARTNIK, 1986, Seção 5)).*

A massa GBC é sensível à presença de uma certa classe de hipersuperfícies mínimas, descrita nas seguintes definições.

Definição 3.3 (Hipersuperfície de Separação). *Escolhido um fim particular $E_k \subset M$ de uma variedade assintoticamente euclidiana M , seja $S = \partial\Omega$ uma hipersuperfície fechada, suave, possivelmente desconexa, que é bordo de um conjunto aberto $\Omega \subset M$, contendo todos os outros fins, exceto o escolhido. Uma hipersuperfície assim é dita ser uma hipersuperfície de separação do fim escolhido; o fecho $\overline{\Omega}$ do aberto Ω e o seu complemento $M \setminus \overline{\Omega}$ são ditos serem um domínio*

¹ Definição 1.1

² Equação 1.6

³ Definição 1.3

interior e um domínio exterior relativos ao fim escolhido e determinados pela hipersuperfície S , respectivamente. Uma hipersuperfície de separação S' é dita encerrar a hipersuperfície S se essa está no domínio interior determinado por aquela, ou seja, se $S \subset \overline{\Omega'}$, com $\Omega' \subset M$ um aberto tal como descrito acima.

Definição 3.4 (Hipersuperfície de Separação Periférica ⁴). *Uma hipersuperfície de separação S é dita ser periférica em uma certa classe \mathcal{C} se ela encerra todas as outras hipersuperfícies de separação que estão na classe \mathcal{C} , ou seja, se nenhuma outra hipersuperfície de separação na classe \mathcal{C} intersecta o domínio exterior determinado por ela (a hipersuperfície S).*

Definição 3.5 (Hipersuperfície Minimizante Exterior da Área ⁵). *Uma hipersuperfície de separação S , em uma certa classe \mathcal{C} , é dita ser minimizante exterior da área se ela minimiza o funcional área entre todas as hipersuperfícies de separação na classe \mathcal{C} , que estão no seu domínio exterior, ou seja, se ela minimiza o funcional área entre todas as hipersuperfícies de separação homólogas, que estão na classe \mathcal{C} e no domínio exterior determinado por ela (a hipersuperfície S).*

Definição 3.6 (Horizonte). *Uma hipersuperfície de separação que está na classe das hipersuperfícies mínimas, isto é, que tem curvatura média nula, com respeito ao normal apontando para o domínio exterior, é dita ser um horizonte com respeito ao fim escolhido ⁶.*

Observação 3.7. *Na literatura, costuma-se empregar a palavra horizonte para se referir a essa classe de hipersuperfícies de separação, porque, em Relatividade Geral, no contexto de dados iniciais simétricos no tempo, cada componente conexa de um horizonte periférico, corresponde ao horizonte aparente de um buraco negro (MARS, 2009, Seção 5).*

A classe de hipersuperfícies mínimas à qual a massa GBC é sensível é aquela determinada pelos horizontes minimizantes exteriores da área, com respeito a um fim escolhido. Isso é quantificado na desigualdade de Penrose riemanniana para a massa GBC, que pode ser pensada como sendo um refinamento da conjectura da massa positiva na presença de buracos negros. Esse é o conteúdo da conjectura de Penrose riemanniana para a massa GBC.

⁴ *outermost hypersurface*, no jargão na língua inglesa.

⁵ *outer area minimizing*, no jargão na língua inglesa.

⁶ É importante destacar que, por definição, um horizonte periférico também é um horizonte minimizante exterior da área.

Conjectura 3.8 (Conjectura de Penrose Riemanniana para a Massa GBC). *Qualquer variedade riemanniana (M^n, g) de dimensão $n \geq 3$, assintoticamente plana⁷ a uma taxa $\tau > \frac{n-2q}{q+1}$, com $1 \leq q < \frac{n}{2}$ inteiro, cuja q -ésima curvatura GBC⁸ é não-negativa (e integrável), e que admite um horizonte minimizante exterior da área $\Sigma \subset M$, possivelmente desconexo, de área total $|\Sigma|$, satisfaz a desigualdade de Penrose riemanniana para a massa GBC (Definição 1.3):*

$$m_q(M, g) \geq \frac{1}{2^q} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}},$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária com sua métrica canônica. Ademais, essa desigualdade é rígida, no sentido de que, se a igualdade é atingida, então o domínio exterior determinado pelo horizonte, com respeito ao fim escolhido, é necessariamente isométrico ao domínio exterior determinado pelo único horizonte minimizante exterior da área no q -ésimo espaço de Schwarzschild riemanniano, com parâmetro de massa $m = \sqrt[q]{m_q(M, g)}$, isto é, a variedade riemanniana $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}, g_{Sch}^q)$, munida com a q -ésima métrica de Schwarzschild,

$$g_{Sch}^q = \left(1 + \frac{m}{2r^{\frac{n-2q}{q}}} \right)^{\frac{4q}{n-2q}} (dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}),$$

onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ denota a métrica canônica sobre a esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} ; e $m \in \mathbb{R}_+$ designa a constante denominada parâmetro de massa.

Observação 3.9 (Otimidade da Desigualdade Penrose). *Pode-se verificar que a q -ésima massa GBC do q -ésimo espaço de Schwarzschild riemanniano é a q -ésima potência do parâmetro de massa, ou seja, $m_q = (m)^q$ (GE et al., 2014a, Exemplo 4.5) (veja também (GE et al., 2014b, Seção 6)). Também pode ser verificado, que a q -ésima curvatura GBC é identicamente nula $L_{(q)} \equiv 0$ e que a esfera $\mathbb{S}_{r_0} \equiv \{r_0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$, com $r_0 \equiv (\frac{m}{2})^{\frac{q}{n-2q}}$, tem área $|\mathbb{S}_{r_0}| = \omega_{n-1} (2^{\frac{2q}{n-2q}} r_0)^{n-1}$ e é o único horizonte periférico, com respeito a quaisquer um dos fins escolhidos (GE et al., 2014a, Exemplo 4.5). Dessa forma, uma vez que um fim foi escolhido, o q -ésimo espaço de Schwarzschild riemanniano satisfaz a identidade:*

$$m_q = \frac{1}{2^q} \left(\frac{|\mathbb{S}_{r_0}|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}}.$$

Logo, a desigualdade de Penrose riemanniana para a massa GBC é ótima, no sentido de que a igualdade é realizada.

⁷ Definição 1.1

⁸ Equação 1.6

A versão fraca de ambas conjecturas, isto é, as desigualdades sem a rigidez, são válidas em uma certa classe de gráficos euclidianos assintoticamente planos e de codimensão um (GE *et al.*, 2014b). Quando $q = 2$, os autores Changwei Xiong, Haizhong Li, e Yong Wei provaram que essa classe, onde a versão fraca das conjecturas vale, na verdade é maior e inclui gráficos euclidianos de codimensão qualquer (desde que finita) com fibrado normal plano (LI *et al.*, 2014, Teoremas 1 e 4).

Por sua vez, a versão forte da conjectura da massa positiva, isto é, a desigualdade com a rigidez, é conhecida ser válida numa classe de variedades riemannianas assintoticamente planas, que também são conformemente planas e satisfazem uma hipótese de convexidade para a curvatura GBC (GE *et al.*, 2014a, Teoremas 1.1 e 1.2). Uma desigualdade tipo Penrose, porém mais fraca, também é conhecida ser válida nessa classe de variedades (GE *et al.*, 2014a, Teorema 1.3 e Exemplo 4.5).

Observação 3.10 (Conjectura de Penrose Riemanniana para Massa ADM). *Levando-se em conta a observação 1.4, quando o inteiro $q = 1$, conclui-se que essa conjectura é exatamente a conjectura de Penrose para a massa ADM, que motiva a conjectura para as demais massas GBC. Esta, por sua vez, é conhecida ser válida na sua versão forte em dimensão 3 (BRAY, 2001, Teorema 1). Também é válida na sua versão fraca em dimensão $4 \leq n \leq 7$ e, ainda nesse caso, na sua versão forte quando a variedade é spin (BRAY; LEE, 2009, Teorema 1.3). A restrição na dimensão está na técnica empregada na prova, que faz uso do teorema da massa ADM positiva. Logo, tem as mesmas restrições, quando a dimensão $n > 7$. Ademais, a versão fraca da desigualdade é conhecida ser válida, sem essa restrição na dimensão, quando a variedade tem um único fim e é isometricamente equivalente a um gráfico euclidiano assintoticamente plano, com fibrado normal plano e com bordo planar e vertical, isto é, o ângulo de contato do gráfico com cada hiperplano que contém uma componente conexa do bordo é reto (LAM, 2011, Corolário 20) (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015, Teorema 1.8).*

Aplicando a fórmula (2.33) para a massa GBC, pode-se ampliar o conhecimento sobre o domínio de validade das conjecturas da massa positiva e de Penrose.

Proposição 3.11. *Seja (M^n, g) um gráfico euclidiano de uma aplicação suave⁹ $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ assintoticamente plana¹⁰ a uma taxa $\tau > \frac{n-2q}{q+1}$, com dimensão $n \geq 3$ e $1 \leq q < \frac{n}{2}$ um número inteiro, cuja o domínio Ω tem um único fim e a fronteira $\Sigma = \partial\Omega$, possivelmente vazia, é uma*

⁹ Veja Definição 2.1

¹⁰ Veja Definição 2.12

hipersuperfície orientável, fechada, com um número finito de componentes conexas, cada uma das quais está em algum conjunto de nível da aplicação f , ou seja, o bordo é planar. Sejam também $\{T_\alpha^\sharp\}_{\alpha=1}^m$ e $\{B_\alpha^\sharp\}_{\alpha=1}^m$ as famílias dos operadores de Newton (2.5) e operadores de forma (2.6) do gráfico, respectivamente, com respeito ao referencial (global) do fibrado normal do gráfico, especificado em (2.4). Se o gráfico é completo, sua q -ésima curvatura GBC $L_{(q)}$ é integrável e essas famílias de operadores comutam entre si, isto é,

$$\left[T_\alpha^\sharp, B_\beta^\sharp\right] = T_\alpha^\sharp \circ B_\beta^\sharp - B_\beta^\sharp \circ T_\alpha^\sharp \equiv 0, \quad \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq m. \quad (3.1)$$

Então, a sua q -ésima massa GBC satisfaz a fórmula,

$$m_q(M, g) = \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \frac{L_{(q)}}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2} (2q-1)! c_q(n) \oint_\Sigma (\sin^2 \theta)^q H_{(2q-1)} dS, \quad (3.2)$$

onde a notação tem o mesmo significado indicado no Teorema 2.14. Em particular, combinando a fórmula de Ricci para subvariedades com um resultado devido a Krzysztof Andrzejewski, Wojciech Kozłowski e Kamil Niedzialomski (ANDRZEJEWSKI *et al.*, 2016, Teorema 2.5), segue que essa fórmula é válida quando o gráfico tem fibrado normal plano.

Demonstração. Nestas condições, o gráfico (M^n, g) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.14. Assim, usando a notação desse teorema e a condição (3.1) de que as famílias dos operadores de Newton e dos operadores de forma são comutantes entre si, segue que a q -ésima massa GBC desse gráfico satisfaz a fórmula (3.2).

Em particular, a fórmula de Ricci para subvariedades, quando aplicada ao caso de gráficos euclidianos, se traduz na identidade

$$R_{\alpha\beta}^\perp = \left[B_\alpha^\sharp, B_\beta^\sharp\right], \quad (3.3)$$

que relaciona o tensor de curvatura R^\perp do fibrado normal e o comutador dos operadores de forma B_α^\sharp , onde $R_{\alpha\beta}^\perp$ denota a família de operadores $R_{\alpha\beta}^\perp : TM \rightarrow TM$, tal que

$$\langle R_{\alpha\beta}^\perp(X), Y \rangle_g = \langle R^\perp(X, Y) \eta_\alpha, \eta_\beta \rangle_U, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

onde U e $\{\eta_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ denotam a métrica (induzida) e o referencial (2.4) do fibrado normal do gráfico, respectivamente. Do ponto de vista do Teorema 2.5 em (ANDRZEJEWSKI *et al.*, 2016), os operadores de Newton T_α^\sharp são polinômios nos operadores de forma B_α^\sharp , com respeito ao produto de composição. Logo, pela identidade (3.3) acima, conclui-se que os comutadores $\left[T_\alpha^\sharp, B_\beta^\sharp\right]$ são lineares nos operadores $R_{\alpha\beta}^\perp$. Portanto, quando o gráfico tem fibrado normal plano, isto é, $R^\perp \equiv 0$, segue que os comutadores $\left[T_\alpha^\sharp, B_\beta^\sharp\right]$ são identicamente nulos. Daí, segue a conclusão. \square

Dessa proposição, segue a seguinte versão do Teorema da Massa Positiva para a massa GBC.

Teorema 3.12 (da Massa GBC Positiva). *Se um gráfico euclidiano (M^n, g) satisfaz as hipóteses da Proposição 3.11 e tem um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira $\Sigma = \partial\Omega$ é vazia ou tem $(2q - 1)$ -curvatura média não-negativa $H_{(2q-1)} \geq 0$, com respeito ao normal exterior e à métrica euclidiana no domínio, então a sua q -ésima massa GBC $m_q(M, g)$ é não-negativa sempre que a sua q -ésima curvatura GBC $L_{(q)}$ também o for, ou seja, nessas hipóteses,*

$$L_{(q)} \geq 0 \implies m_q(M, g) \geq 0.$$

Ademais, $m_q(M, g) = 0 \implies L_{(q)} = 0$ e, adicionalmente, quando a fronteira Σ é não vazia também vale a identidade $H_{(2q-1)} \sin^{2q} \theta = 0$.

Demonstração. A hipótese adicional de que a fronteira Σ é vazia ou tem $(2q - 1)$ -curvatura média não-negativa, $H_{(2q-1)} \geq 0$, garante que a integral sobre a fronteira Σ , que contribui para a q -ésima massa GBC na fórmula (3.2), é identicamente nula ou não-negativa. Daí, segue que, se o gráfico tem q -ésima curvatura GBC $L_{(q)}$ não-negativa, então sua q -ésima massa GBC $m_q(M, g)$ também é não-negativa.

Por sua vez, haja visto que, por hipótese, os integrandos na fórmula 3.2 são todos não negativos, quando a q -ésima massa GBC é nula, segue que eles também são nulos. \square

Em particular, nas hipóteses desse teorema, quando a q -ésima massa GBC é nula, pode-se derivar uma dualidade interessante, relacionando o ângulo de contato e a curvatura média, ao longo da fronteira do gráfico.

Corolário 3.13 (Dualidade Ângulo-Curvatura Média na Fronteira). *Nas hipóteses do teorema 3.12 e na hipótese adicional de que a q -ésima massa GBC é nula, quando o ângulo de contato nunca é nulo ($\theta \neq 0$), ou seja, quando o gráfico, ao longo cada componente conexa da fronteira, nunca tangencia o hiperplano que a contém, a fronteira é $(2q - 1)$ -mínima na métrica euclidiana, isto é, a $(2q - 1)$ -curvatura média é identicamente nula ($H_{(2q-1)} \equiv 0$); por sua vez, quando $(2q - 1)$ -curvatura média nunca é nula ($H_{(2q-1)} \neq 0$), o ângulo de contato é identicamente nulo ($\theta \equiv 0$).*

No cenário do teorema acima, também vale a seguinte versão da desigualdade de Penrose para a massa GBC.

Teorema 3.14 (Desigualdade de Penrose para a Massa GBC). *Se um gráfico euclidiano (M^n, g) satisfaz as hipóteses da Proposição 3.11, tem fronteira $\Gamma = \partial M$ não vazia e é vertical ao longo dela, isto é, o ângulo de contato do gráfico com cada hiperplano que contém uma componente conexa da fronteira é reto, então a fronteira do gráfico ∂M é um horizonte minimizante exterior da área totalmente geodésico e a sua q -ésima massa GBC satisfaz a fórmula,*

$$m_q(M, g) = \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \frac{L^{(q)}}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2} (2q-1)! c_q(n) \oint_{\Sigma} H_{(2q-1)} dS, \quad (3.4)$$

onde a notação tem o mesmo significado indicado no Teorema 2.14.

Além disso, se cada componente conexa do bordo Σ do domínio é estrelada¹¹ e $(2q-1)$ -convexa na média, com respeito ao plano que a contém, isto é,

$$H_{(r)} \geq 0, \quad \forall 0 \leq r \leq 2q-1,$$

então vale a sequência de desigualdades:

$$m_q(M, g) = \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \frac{L^{(q)}}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \frac{1}{\binom{n-1}{2q-1} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(2q-1)} dS_e \quad (3.5)$$

$$\geq \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \frac{L^{(q)}}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{\binom{n-1}{2q-2} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(2q-2)} dS_e \right)^{\frac{n-2q}{n-2q+1}} \quad (3.6)$$

$$\vdots \quad (3.7)$$

$$\geq \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \frac{L^{(q)}}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{\binom{n-1}{0} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(0)} dS_e \right)^{\frac{n-2q}{n-1}} \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \frac{L^{(q)}}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}} \quad (3.9)$$

$$\geq \frac{1}{2} c_q(n) \int_M \frac{L^{(q)}}{\sqrt{\det g}} dV_g + \frac{1}{2^q} \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}}, \quad (3.10)$$

com as igualdades ocorrendo nas primeiras $2q-1$ desigualdades se, e somente se, cada uma das componentes da fronteira do domínio é uma esfera redonda, $\Sigma_i \equiv \mathbb{S}_{r_i}^{n-1}$, $r_i > 0, \forall 1 \leq i \leq l$; por sua vez, a igualdades ocorre na última desigualdade se, somente se, a fronteira do domínio (equivalentemente, a fronteira do gráfico) for conexa.

Portanto, neste cenário, sempre que a q -ésima curvatura GBC do gráfico for não-negativa, vale a desigualdade de Penrose, ou seja,

$$L_{(q)} \geq 0 \implies m_q(M, g) \geq \frac{1}{2^q} \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}}. \quad (3.11)$$

¹¹ Isso significa que cada componente conexa de Σ é fronteira de um aberto estrelado no espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

A igualdade é atingida se, e somente se, o gráfico tiver curvatura GBC identicamente nula $L_{(q)} \equiv 0$ e o horizonte totalmente geodésico Γ é uma esfera canônica conexa.

Demonstração. Haja visto que o domínio do gráfico M é tal que cada uma das componentes conexas do seu bordo Σ estão em algum conjunto de nível da aplicação f , segue que o gráfico tem bordo $\Gamma = \partial M$ planar, ou seja, cada uma das componentes conexas do bordo do gráfico está em algum hiperplano do espaço euclidiano ambiente \mathbb{R}^{n+m} . Logo, se θ denota o ângulo de contato entre o gráfico e os hiperplanos, ao longo das componentes conexas do bordo Γ , as segundas formas fundamentais \hat{K} e \tilde{K} de cada componente conexa do bordo, com respeito aos campos normais unitários apontando para o fim, calculados na métrica do gráfico e na métrica euclidiana do hiperplano, respectivamente, satisfazem a relação (2.31)

$$\hat{K} = \cos \theta \tilde{K}.$$

Assim, a hipótese de que o bordo do gráfico é vertical ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$), garante que ele seja totalmente geodésico, $\hat{K} \equiv 0$. Argumentando como em (LAM, 2011, pg. 50), concluímos que o bordo é hipersuperfície minimizante exterior da área. Portanto, o bordo Γ é um horizonte minimizante exterior da área totalmente geodésico. Dessa hipótese adicional de verticalidade, também conclui-se que a fórmula (3.4) é uma consequência imediata da fórmula (3.2).

Haja visto que a fronteira Σ do domínio tem um número finito de componentes conexas $\Sigma = \sqcup_{i=1}^l \Sigma_i$ e é uma hipersuperfície estrelada e $(2q-1)$ -convexa na média, por um resultado devido a Pengfei Guan e Junfang Li (GUAN; LI, 2009, Teorema 2), que generaliza a clássica desigualdade de Alexandrov-Frenchel, conclui-se que para cada uma das componentes conexas Σ_i vale a desigualdade,

$$\left(\frac{\int_{\Sigma_i} H_{(r)} dS_e}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{(r)} dS_e} \right)^{\frac{1}{n-r-1}} \geq \left(\frac{\int_{\Sigma_i} H_{(r-1)} dS_e}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{(r-1)} dS_e} \right)^{\frac{1}{n-r}}, \forall 0 \leq r \leq 2q-1,$$

onde a igualdade vale se, e somente se, Σ_i é uma esfera redonda. Ou seja, vale a rigidez para essa desigualdade. Usando o fato que a s -curvatura média total da esfera unitária canônica satisfaz a identidade,

$$\oint_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{(s)} dS_e = \binom{n-1}{s} \omega_{n-1}, \forall 1 \leq s \leq n-1,$$

pode-se reescrever essa desigualdade na forma,

$$\frac{1}{\binom{n-1}{r} \omega_{n-1}} \int_{\Sigma_i} H_{(r)} dS_e \geq \left(\frac{1}{\binom{n-1}{r-1} \omega_{n-1}} \int_{\Sigma_i} H_{(r-1)} dS_e \right)^{\frac{n-r-1}{n-r}}, \forall 0 \leq r \leq 2q-1.$$

Assim, reescrevendo o coeficiente constante que precede a integral de fronteira na fórmula (3.4) na forma,

$$\frac{1}{2}(2q-1)! c_q(n) = \frac{1}{2^q} \frac{1}{\binom{n-1}{2q-1} \omega_{n-1}},$$

conclui-se que essa integral de fronteira satisfaz as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2q-1)! c_q(n) \oint_{\Sigma} H_{(2q-1)} dS_e &= \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \frac{1}{\binom{n-1}{2q-1} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(2q-1)} dS_e \\ &\geq \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{\binom{n-1}{2q-2} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(2q-2)} dS_e \right)^{\frac{n-2q}{n-2q+1}} \\ &\geq \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{\binom{n-1}{2q-3} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(2q-3)} dS_e \right)^{\frac{n-2q}{n-2q+2}} \\ &\vdots \\ &\geq \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{\binom{n-1}{1} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(1)} dS_e \right)^{\frac{n-2q}{n-2}} \\ &\geq \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{\binom{n-1}{0} \omega_{n-1}} \oint_{\Sigma_i} H_{(0)} dS_e \right)^{\frac{n-2q}{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^q} \sum_{i=1}^l \left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}} \\ &\geq \frac{1}{2^q} \left(\sum_{i=1}^l \frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}} = \frac{1}{2^q} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^q} \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2q}{n-1}}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usa-se o fato de que para uma quantidade finita de números reais não-negativos $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq l$, vale a desigualdade,

$$\sum_{i=1}^l (x_i)^s \geq \left(\sum_{i=1}^l x_i \right)^s, \quad \forall 0 \leq s \leq 1 \text{ expoente real},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, no máximo um único número real x_i é positivo; na última igualdade utilizou-se a hipótese de que o horizonte Γ é planar, equivalentemente, a hipótese de que cada uma das componentes conexas Σ_i está em algum conjunto de nível, para inferir que o horizonte e sua projeção no domínio do gráfico são isométricos e, portanto, tem a mesma área, $|\Sigma| = |\Gamma|$. Também conclui-se que nas $2q-1$ primeiras desigualdades as igualdades ocorrem se, e somente se, cada uma das componentes conexas Σ_i é uma esfera redonda; e que na

última desigualdade a igualdade ocorre se, e somente se, o bordo do domínio (equivalentemente, o horizonte Γ) é conexo.

Portanto, pela fórmula (3.4), segue que são válidas as desigualdades indicadas no enunciado, com as suas respectivas caracterizações nas situações em que ocorrem as igualdades. \square

Dessa prova, pode-se derivar uma relação entre a verticalidade do bordo e sua geometria extrínseca.

Corolário 3.15 (Verticalidade do Bordo e sua Geometria Extrínseca). *Quando cada componente conexa do bordo é estritamente convexa na média, com respeito ao plano que a contém, isto é, a curvatura média, com respeito ao normal exterior e à métrica euclidiana no plano, é estritamente positiva, a sua verticalidade é equivalente ao fato do bordo ser totalmente geodésico, com respeito a métrica do gráfico.*

Observação 3.16 (Otimidade da Desigualde de Penrose para Gráficos). *É um fato conhecido na literatura (veja (GE et al., 2014b, Exemplo 6.1), por exemplo), que a métrica no domínio exterior $\{\rho > \rho_0 \equiv (2m)^{\frac{q}{n-2q}}\}$ do q -ésimo espaço riemanniano de Schwarzschild $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}, g_{Sch}^q)$, pode ser reescrita na forma,*

$$g_{Sch}^q = \left(1 - \frac{2m}{\rho^{\frac{n-2q}{q}}}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ denota a métrica canônica sobre a esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} e $m \in \mathbb{R}_+$ designa o parâmetro de massa. Daí, segue que o domínio exterior, com seu bordo, $\{\rho \geq \rho_0 \equiv (2m)^{\frac{q}{n-2q}}\}$, pode ser realizado como um gráfico no espaço euclidiano canônico \mathbb{R}^{n+1} , determinado pela aplicação $f : \mathbb{R}^n \setminus \{|x| < \rho_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz a equação diferencial,

$$\frac{df}{d\rho} = \left(\frac{\rho^{\frac{n-2q}{q}}}{2m} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \rho = |x| \geq \rho_0.$$

Também pode ser verificado, que esse gráfico tem bordo planar e é vertical, estrelado e estritamente convexo com respeito ao plano que o contém, isto é, a sua segunda forma fundamental, com respeito ao normal exterior e à métrica euclidiana no plano, é positiva definida. Assim, pelo corolário 3.15, segue que o bordo é $(2q - 1)$ -convexo na média. Haja visto que a q -ésima curvatura GBC é identicamente nula, segue que todas as hipóteses do teorema 3.14 são realizadas. Portanto, pela observação 3.9, segue que a desigualdade 3.11 é ótima. Isso é particularmente

interessante quando comparado com a desigualdade obtida pelos autores em (GE et al., 2014a, Exemplo 4.5).

REFERÊNCIAS

- ALÍAS, L. J.; LIRA, J. H. S. de; MALACARNE, J. M. Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces. **Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu**, Cambridge University Press, v. 5, n. 4, p. 527–562, Oct. 2006. ISSN 1475-3030, 1474-7480.
- ANDRZEJEWSKI, K.; KOZŁOWSKI, W.; NIEDZIAŁOMSKI, K. Generalized Newton transformation and its applications to extrinsic geometry. **Asian Journal of Mathematics**, v. 20, n. 2, p. 293–322, 2016. ISSN 10936106, 19450036.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. **Physical Review**, v. 122, n. 3, p. 997–1006, May 1961. ISSN 0031-899X.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. The dynamics of general relativity. **General Relativity and Gravitation**, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, Sep. 2008. ISSN 0001-7701, 1572-9532.
- BARTNIK, R. The mass of an asymptotically flat manifold. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 39, n. 5, p. 661–693, Sep. 1986. ISSN 1097-0312.
- BRAY, H. L. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. **Journal of Differential Geometry**, v. 59, n. 2, p. 177–267, Oct. 2001. ISSN 0022-040X.
- BRAY, H. L.; LEE, D. A. On the Riemannian Penrose inequality in dimensions less than eight. **Duke Mathematical Journal**, v. 148, n. 1, p. 81–106, May 2009. ISSN 0012-7094, 1547-7398.
- CAO, L.; LI, H. R-Minimal submanifolds in space forms. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 32, n. 4, p. 311–341, Nov. 2007. ISSN 0232-704X, 1572-9060.
- GE, Y.; WANG, G.; WU, J. The Gauss–Bonnet–Chern mass of conformally flat manifolds. **International Mathematics Research Notices**, v. 2014, n. 17, p. 4855–4878, 2014. ISSN 1687-0247, 1073-7928.
- GE, Y.; WANG, G.; WU, J. A new mass for asymptotically flat manifolds. **Advances in Mathematics**, v. 266, p. 84–119, Dec. 2014. ISSN 0001-8708.
- GUAN, P.; LI, J. The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains. **Advances in Mathematics**, v. 221, n. 5, p. 1725–1732, Aug. 2009. ISSN 0001-8708.
- KHURI, M. RTG seminar lecture notes: the positive mass theorem of general relativity. Disponível em: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.577.8516>. Acesso em: 30 mar. 2023.
- LAM, M.-K. G. The graph cases of the Riemannian positive mass and Penrose inequalities in all dimensions. **ArXiv.org**, Oct. 2010.
- LAM, M.-K. G. **The graph cases of the Riemannian positive mass and Penrose inequalities in all dimensions**. Tese (Doutorado) – Duke University, 2011.
- LEE, J. M.; PARKER, T. H. The Yamabe problem. **Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society**, v. 17, n. 1, p. 37–91, July 1987. ISSN 0273-0979, 1088-9485.
- LI, H.; WEI, Y.; XIONG, C. The Gauss–Bonnet–Chern mass for graphic manifolds. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 45, n. 4, p. 251–266, Apr. 2014. ISSN 0232-704X, 1572-9060.

LIMA, L. L. de; GIRÃO, F. The ADM mass of asymptotically flat hypersurfaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 367, n. 9, p. 6247–6266, Oct. 2014. ISSN 0002-9947, 1088-6850.

LIMA, L. L. de; GIRÃO, F. Positive mass and Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic hypersurfaces. **General Relativity and Gravitation**, v. 47, n. 3, p. 23, Mar. 2015. ISSN 0001-7701, 1572-9532.

MARS, M. Present status of the Penrose inequality. **Classical and Quantum Gravity**, v. 26, n. 19, p. 193001, Oct. 2009. ISSN 0264-9381, 1361-6382.

MIRANDOLA, H.; VITÓRIO, F. The positive mass theorem and Penrose inequality for graphical manifolds. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 23, n. 2, p. 273–292, 2015. ISSN 10198385, 19449992.

PARKER, T.; TAUBES, C. H. On Witten's proof of the positive energy theorem. **Communications in Mathematical Physics**, v. 84, n. 2, p. 223–238, June 1982. ISSN 0010-3616, 1432-0916.

SCHOEN, R.; YAU, S. Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature. **Inventiones mathematicae**, v. 92, n. 1, p. 47–71, 1988. ISSN 0020-9910, 1432-1297.

SCHOEN, R.; YAU, S.-T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. **Communications in Mathematical Physics**, v. 65, n. 1, p. 45–76, Feb. 1979. ISSN 0010-3616, 1432-0916.

SCHOEN, R. M. Variational theory for the total scalar curvature functional for riemannian metrics and related topics. *In*: GIAQUINTA, M. (ed.). **Topics in Calculus of Variations**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989. v. 1365, p. 120–154. ISBN 978-3-540-50727-7 978-3-540-46075-6.

WITTEN, E. A new proof of the positive energy theorem. **Communications in Mathematical Physics**, v. 80, n. 3, p. 381–402, 1981. ISSN 0010-3616, 1432-0916.