



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

ARTHUR MENEZES LIMA

**REGULARIZAÇÃO DE UMA CORDA NEGRA PELO MÉTODO DE
SIMPSON-VISSER**

**FORTALEZA
2023**

ARTHUR MENEZES LIMA

REGULARIZAÇÃO DE UMA CORDA NEGRA PELO MÉTODO DE SIMPSON-VISSER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

FORTALEZA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L696r Lima, Arthur Menezes.

Regularização de uma corda negra pelo método de Simpson-Visser / Arthur Menezes Lima. – 2023.
128 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientação: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

1. Teoria da Relatividade Geral. 2. Regularização de Simpson-Visser. 3. Corda negra. 4. Buraco negro regular. 5. Buraco de minhoca atravessável. I. Título.

CDD 530

ARTHUR MENEZES LIMA

REGULARIZAÇÃO DE UMA CORDA NEGRA PELO MÉTODO DE SIMPSON-VISSER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 24/02/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (Coorientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dr. Matheus Nilton Vidal Nogueira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre forneceram todo o apoio que precisei em todas as minhas conquistas, seja pela minha educação, seja pelo apoio material que precisei para meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida e por todas as bênçãos derramadas sobre mim e minha família. Agradeço também aos meus pais, José Ribamar Vieira Lima e Luiza de Marilac Vieira de Menezes, primeiro pela educação que me foi dada e que permitiu ser a pessoa que sou hoje, certamente não estaria aqui fazendo este trabalho nem estaria estudando em uma universidade tão conhecida e concorrida como a UFC. Também agradeço aos recursos que foram dados para me ajudar nos meus estudos, já que sempre pude estudar em boas escolas e sempre tive o material escolar que precisei. Agradeço aos meus irmãos, Igor Menezes Lima e Italo Raffaello Menezes Canuto, tanto pela educação que recebi ao longo da minha vida que me foi dada também por vocês, por ter sempre cuidado de mim como um filho, já que sou o mais novo.

Deixo também minha gratidão à escola em que terminei o ensino médio, o Colégio da Imaculada Conceição, à Universidade Estadual do Ceará, na qual obtive minha graduação em Física e obtive grandes amigos que estão comigo até hoje. Também agradeço à Universidade Federal do Ceará pela oportunidade que estou tendo na pós-graduação em Física para obter o título de mestre. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, quero registrar os nomes de profissionais muito importantes ao longo da minha vida: professores Aduino Militão, Genário Sobreira Santiago, Silas Lenz Cesar, Wendel Macedo Mendes, Gislânia Maria de Souza Lima Mendes, Marcony Silva Cunha, Ricardo Renan Landim de Carvalho, Carlos William Paschoal, em especial, Geová Maciel de Alencar Filho, meu orientador, e Job Saraiva Furtado Neto, meu coorientador.

RESUMO

Neste trabalho será apresentada uma solução de corda negra regular a partir do método utilizado por Simpson-Visser para regularizar a solução de Schwarzschild. Assim como no trabalho de Simpson-Visser, nesta nova solução de corda negra pode-se representar tanto um buraco negro regular, como um buraco de minhoca, bastando mudar o valor de um parâmetro “ a ” utilizado na sua métrica. A regularização consiste em fazer uma mudança na variável radial da solução não regular para acrescentar o parâmetro “ a ” na nova coordenada de modo que a nova solução não possui singularidade se $a \neq 0$. Foi feita a análise dos tensores e invariantes de curvatura para se constatar a regularidade da solução, assim como foram analisadas as condições de energia do sistema, onde verificou-se que estas serão sempre violadas para todo o espaço, semelhante ao trabalho de Simpson-Visser. Também foi feita a análise das propriedades termodinâmicas da corda negra regular, na qual avaliou-se as modificações geradas com relação à solução original da corda negra, especificamente, calculou-se a temperatura de Hawking, a entropia, a sua capacidade térmica, e a energia livre de Helmholtz. Por fim, avaliou-se as possíveis órbitas circulares estáveis ou instáveis que poderiam ser possíveis para fótons e partículas massivas para comparar os resultados com os da corda negra não regular, buscando fazer um paralelo com o trabalho de Simpson-Visser.

Palavras-chave: Teoria da Relatividade Geral; regularização de Simpson-Visser; corda negra; buraco negro regular; buraco de minhoca atravessável.

ABSTRACT

In this work, a regular black string solution will be presented from the method used by Simpson-Visser to regularize the Schwarzschild solution. As in Simpson-Visser's work, in this new black string solution, both a regular black hole and a wormhole can be represented by simply changing the value of a parameter "a" used in its metric. The regularization consists of changing the radial variable of the non-regular solution to add the parameter "a" in the new coordinate so that the new solution does not have singularity if $a \neq 0$. The analysis of the tensors and curvature invariants was carried out to verify the regularity of the solution, as well as the energy conditions of the system were analyzed, where it was verified that these will always be violated for the whole space, similar to the work of Simpson-Visser. An analysis of the thermodynamic properties of the regular black string was also carried out, in which the modifications generated by the original solution of the black string were evaluated, specifically, the Hawking temperature, entropy, its heat capacity, and the Helmholtz free energy. Finally, the possible stable or unstable circular orbits that could be possible for photons and massive particles were evaluated to compare the results with those of the non-regular black string, seeking to make a parallel with the work of Simpson-Visser.

Keywords: General Theory of Relativity; Simpson-Visser regularization; black string; regular black hole; traversible wormhole.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Buraco de minhoca ligando dois “universos” diferentes. Imagem tirada do trabalho original de Morris e Thorne, 1988.	44
Figura 2 – Buraco de minhoca ligando dois pontos do mesmo universo. Imagem retirada do artigo original de Morris e Thorne, 1988.	44
Figura 3 – Geometria espacial do buraco de minhoca geral com a coordenada “z” em função de “r” e “l”. Fonte: Morris e Thorne, 1988.	56
Figura 4 – Geometria espacial do buraco de minhoca de Schwarzschild com $B=2$. Fonte: Nogueira, 2022.	58
Figura 5 – Função $f(r)$ da solução regularizada de Simpson-Visser para alguns valores específicos de a . Considera-se $m = 0,25$. Fonte: próprio autor.	76
Figura 6 – Relação entre as leis de buracos negros com as leis da termodinâmica. Fonte: Wald, 1984.	84
Figura 7 – Temperatura de Hawking em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.	85
Figura 8 – Entropia em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.	87
Figura 9 – Capacidade térmica em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.	88
Figura 10 – Energia livre de Helmholtz em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.	89
Figura 11 – Energia potencial efetiva para partículas não massivas. Consideram-se $m = 0,25$ e $L = 1$. Fonte: próprio autor.	92
Figura 12 – Energia potencial efetiva para partículas massivas. Consideram-se $m = 0,25$ e $L = 0,866$. Fonte: próprio autor.	94
Figura 13 – Função $f(r)$ da solução regularizada para alguns valores específicos de a . Consideram-se $\alpha = 2$ e $b = 1$. Fonte: próprio autor.	100
Figura 14 – Temperatura de Hawking em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.	108
Figura 15 – Entropia em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.	109
Figura 16 – Capacidade térmica em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.	110
Figura 17 – Energia livre de Helmholtz em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.	111

Figura 18 –Energia potencial efetiva para partículas não massivas. Consideram-se $\alpha = 2$,
 $b = 1$, e $L = 1$. Fonte: próprio autor. 113

Figura 19 –Energia potencial efetiva para partículas massivas. Consideram-se $\alpha = 2$, $b =$
 1 , e $L = 1$. Fonte: próprio autor. 114

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REVISÃO DE RELATIVIDADE GERAL	16
2.1	Princípio da Equivalência	16
2.2	Cálculo tensorial	18
2.3	Métrica de um espaço curvo	21
2.4	Tensor de curvatura de Riemann	26
2.4.1	<i>Tensor de Riemann</i>	27
2.4.2	<i>Tensor e escalar de Ricci</i>	30
2.5	Tensor momento-energia	31
2.5.1	<i>Tensor momento-energia</i>	31
2.5.2	<i>Condições de energia</i>	33
2.6	Equações de campo de Einstein	34
3	BURACOS NEGROS REGULARES E BURACOS DE MINHOCA ATRA- VESSÁVEIS	37
3.1	Buracos negros regulares	37
3.1.1	<i>Buraco negro regular de Bardeen</i>	39
3.2	Introdução à solução do wormhole de Morris-Thorne	42
3.2.1	<i>Buraco de minhoca de Schwarzschild: não atravessável</i>	44
3.2.2	<i>Condições necessárias para criar um buraco de minhoca atravessável</i>	45
3.3	Solução matemática de um buraco de minhoca atravessável	46
3.3.1	<i>Curvatura do buraco de minhoca</i>	47
3.3.2	<i>Equação de Einstein para o buraco de minhoca</i>	51
3.4	Análise da solução	54
3.4.1	<i>Geometria espacial do buraco de minhoca de Morris-Thorne</i>	54
3.4.2	<i>Buraco de minhoca geral de Morris-Thorne</i>	55
3.4.3	<i>Ausência de horizontes de eventos</i>	58
3.4.4	<i>Tempo de travessia e gravidade de maré</i>	59
3.4.5	<i>Condições da matéria-energia na garganta</i>	68
3.5	Conclusão de Morris-Thorne	71

4	REGULARIZAÇÃO DE SIMPSON-VISSER	72
4.1	Métrica de Simpson-Visser	72
4.2	Tensores de curvatura de Simpson-Visser	77
4.3	Invariantes de curvatura	80
4.4	Tensor momento-energia e condições de energia	81
4.5	Aplicações da solução de Simpson-Visser	83
4.5.1	<i>Termodinâmica da solução de Simpson-Visser</i>	84
4.5.2	<i>Órbitas circulares da solução de Simpson-Visser</i>	89
5	REGULARIZAÇÃO DE SIMPSON-VISSER PARA UMA CORDA NEGRA	96
5.1	Solução de um buraco negro cilíndrico	96
5.2	Regularização da solução de uma corda negra	100
5.2.1	<i>Mudança de coordenada na métrica</i>	101
5.2.2	<i>Tensores e invariantes de curvatura</i>	102
5.2.3	<i>Tensor momento-energia da corda negra e condições de energia</i>	105
5.3	Aplicações da solução regular de uma corda negra	107
5.3.1	<i>Termodinâmica da corda negra regular</i>	107
5.3.2	<i>Órbitas circulares na corda negra regular</i>	111
6	CONCLUSÃO	115
	REFERÊNCIAS	118
	APÊNDICE A – ESTRUTURAS DE CARTAN E AS “TETRADAS”	124

1 INTRODUÇÃO

Buracos negros são soluções das equações de Einstein nas quais existe a presença de uma superfície chamada de horizonte de eventos na qual qualquer matéria ou até mesmo luz que a atravesse só pode descrever uma trajetória de via-única, nada pode viajar para fora do horizonte sem violar a causalidade [1]. Este tipo de solução é muito importante em Relatividade, pois pode definir o tipo de geometria criada quando o corpo sofre um colapso, como uma estrela ou um aglomerado de estrelas [2]. Estas soluções têm ganhado muita relevância nos últimos anos devido à evolução tecnológica, que pode ser evidenciada pela comprovação das ondas gravitacionais pelo LIGO [3], e pelas primeiras imagens de buracos negros supermassivos [4,5].

Uma solução específica que podemos ter de buraco negro é a chamada corda negra, que pode ser gerada a partir do colapso de uma matéria que possua simetria cilíndrica, portanto, este tipo de buraco negro também possui esta simetria. Uma característica que difere esta solução daquelas que possuem simetria esférica é a presença da constante cosmológica negativa, isto é, se trata de um espaço-tempo assintoticamente *anti de Sitter* [6]. As cordas negras são importantes principalmente no contexto cosmológico, quando se estuda os defeitos topologicamente estáveis [2], e no contexto de dimensões extras, uma vez que a corda negra é solução das equações de Einstein em dimensões extras (acima das 4 de espaço-tempo comuns) [7].

Entretanto, em Relatividade Geral, todas as soluções exatas para buracos negros conhecidas possuem singularidade, sendo algo inerente às soluções básicas das equações de Einstein, o que cria um sério problema a ser tratado [8]. Como tentativa de resolver este problema, alguns modelos de buracos negros regulares, ou seja, sem singularidades, foram propostos, sendo o trabalho de Bardeen [9] o pioneiro, além de outros como [10–12]. Estas soluções são muito importantes, pois com elas podemos entender o processo de colapso gravitacional em seus estágios finais, o que não é possível quando existe singularidade na origem. Uma outra questão interessante que precisa ser resolvida é o fato de que elas são soluções das equações de Einstein com fontes exóticas, ou seja, não existem fontes fisicamente razoáveis que estejam associadas a elas [8].

Espaços-tempo dos chamados buracos de minhoca conquistaram a imaginação e a curiosidade tanto da classe científica como do público em geral pelo fato de descrever geometrias que funcionam como pontes ligando “universos” diferentes, por exemplo, ou podendo

servir como passagens interestelares conectando regiões distantes do espaço-tempo [13, 14]. Seu estudo teve início com os resultados obtidos por Einstein e Rosen, em 1935, conhecidos como pontes de Einstein-Rosen. Alguns anos depois, em 1988, Morris e Thorne fazem um “renascimento” da ideia de buraco de minhoca definindo soluções para este tipo de geometria onde este poderia ser atravessável por naves espaciais com a presença de humanos. Depois, Visser, em 1996, e Lobo, 2016, deram continuidade a esses trabalhos sempre buscando aperfeiçoá-los [1, 14–17].

Mas o mais interessante nessas soluções, principalmente a de Morris-Thorne, é a chamada condição de *flaring out* que ocorre na chamada garganta do buraco de minhoca e gera uma violação da condição nula de energia [17]. Fisicamente, temos que a tensão radial na garganta deste é extremamente alta, chegando a ultrapassar a densidade de massa-energia, caracterizando a chamada matéria exótica. Essa condição, apesar de ser mostrada para uma geometria esfericamente simétrica e estática, pode ser generalizada para qualquer tipo de *wormhole* atravessável [16]. Vários trabalhos tem sido publicados para tentar diminuir a violação da condição de energia como soluções dinâmicas para os buracos de minhoca [18], solução no vácuo do mundo de brana [19], entre outros, entretanto, as soluções que têm recebido mais atenção são aquelas que possuem modificações na gravitação, como aquelas que usam a gravidade $f(R)$, em que soluções exatas podem ser obtidas para a geometria dos buracos de minhoca e algumas delas são possíveis de se obter com matéria barotrópica, eliminando o problema da matéria exótica nesses casos [20].

No intuito de desenvolver uma solução regular de buraco negro, Simpson e Visser publicaram, em 2019 [21], um trabalho buscando uma solução regular através de uma modificação da solução de Schwarzschild, apresentando a seguinte métrica como candidata a gerar esta solução:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)} + (r^2 + a^2) d\Omega^2, \quad (1.1)$$

onde “a” representa um parâmetro ajustável, e “m” é uma constante que está relacionada à massa da matéria que irá gerar esse espaço-tempo curvo. Esta métrica tem uma propriedade interessante de interpolar uma solução regular de buraco negro com um buraco de minhoca atravessável do tipo Morris-Thorne e se reduz à solução de Schwarzschild quando o parâmetro a é nulo [21]. Além disso, Simpson e Visser encontraram expressões para a temperatura de Haw-

king da solução regular e as órbitas circulares para fótons (esfera de fótons) e para partículas massivas (ISCO), encontrando resultados semelhantes aos da solução de Schwarzschild, mas com um fator de correção do tipo $\sqrt{1 - a^2/k^2}$, em que k é uma constante múltipla de m . No caso da temperatura, $k = 2m$ [21].

Após a publicação desse trabalho, diversos outros surgiram na mesma linha de tratar uma solução não regular já conhecida e fazer a regularização de Simpson-Visser. O próprio Simpson publicou um trabalho com a mesma regularização para buracos negros de Reissner-Nordstrom e Kerr-Newman [22], estudo de acreção de disco fino para a solução de Simpson-Visser pode ser encontrado em [23], pode-se usar essa solução para verificar a impossibilidade da existência de buracos de minhoca atravessáveis em gravitação semiclássica [24], além de trabalhos com gravitação modificada [25], lentes gravitacionais [26–28], incluindo o uso do teorema de Gauss-Bonnet para determinar a deflexão da luz e analisar os efeitos do meio de matéria escura [29], com campos fantasma [30,31], com análises das oscilações epicíclicas [32], estudo dos modos quasinormais dos três estados (buraco negro, buraco de minhoca e buraco de minhoca unidirecional) da solução de Simpson-Visser [33, 34], uso de imagens recentes da escala do horizonte e suas sombras (imagem de telescópio do Horizonte de eventos de Sagitário A) para estudar várias soluções de buracos negros (incluindo a de Simpson-Visser) [35], o desenvolvimento de novas soluções de *black-bounce* mais gerais com algumas mudanças na métrica [36], entre outros.

Entretanto, não existia nenhum trabalho na literatura em que esse método tenha sido usado em uma corda negra para regularizá-la, uma vez que soluções de corda negra possuem singularidade na origem [2]. Até pode-se encontrar soluções regulares para corda negra através de outros métodos de regularização, como o usado em [37], entretanto, estas soluções não realizam a mesma interpolação entre buraco negro e buraco de minhoca, como vemos nos trabalhos do tipo *black-bounce*.

Portanto, o intuito deste trabalho é aplicar o método de regularização de Simpson-Visser à solução de uma corda negra. Especificamente, este trabalho pretende analisar a métrica e suas características para verificar a presença da interpolação entre buraco negro e buraco de minhoca, avaliar as grandezas associadas à curvatura e verificar se a solução de fato será regular. Além disso, deve-se avaliar as condições de energia do sistema através da análise das equações de Einstein e do tensor momento-energia. Após a análise da solução, faremos algumas aplicações, sendo uma delas o estudo termodinâmico da corda negra regular, com o

cálculo e a análise da temperatura de Hawking, capacidade térmica, entropia, e a energia livre de Helmholtz, e a segunda é o cálculo das órbitas circulares estáveis ou instáveis para partículas massivas e não massivas. Este trabalho também foi feito em um artigo que foi publicado recentemente por mim e meus orientadores e que pode ser acessado em [38].

O trabalho está dividido em 4 capítulos (além da introdução e da conclusão): no primeiro faremos uma revisão básica de Relatividade Geral, apresentando os principais conceitos e equações matemáticas relativas à geometria diferencial e à matéria e energia. Após a apresentação da teoria básica da Relatividade, no capítulo seguinte será apresentado os principais conceitos de buraco negro regular e buraco de minhoca, uma vez que eles fazem parte dos resultados deste trabalho. Em seguida, apresentaremos o método de Simpson-Visser através da análise da métrica desta solução, dos tensores e invariantes de curvatura, e das condições de energia do sistema. Depois faremos as mesmas aplicações citadas no parágrafo anterior, ou seja, a termodinâmica do buraco negro regular e órbitas circulares para partículas massivas e não massivas. Por fim, apresentaremos a solução básica de uma corda negra e faremos os mesmos procedimentos da regularização de Simpson-Visser que fizemos no capítulo anterior para a solução de uma corda negra. Por fim, é importante mencionar que o termo regularização que será usado durante todo o trabalho será sempre no sentido de criar uma solução regular para buracos negros através da remoção da singularidade desta. Logo, não devemos confundir com o uso deste termo em outros contextos como em Teoria Quântica de Campos.

2 REVISÃO DE RELATIVIDADE GERAL

Antes de introduzir o conceito de buracos negros regulares e buracos de minhoca, e o método de Simpson-Visser para a regularização de uma solução de buraco negro, buscando os seus resultados matemáticos e analisando suas principais propriedades, é necessário fazer uma revisão dos principais conceitos de Relatividade Geral que serão necessários para estas análises.

Neste capítulo, serão revisados principalmente os conceitos básicos que vão nos dar o entendimento de como funciona a gravitação e que irão definir os fundamentos matemáticos da Teoria da Relatividade Geral (TRG), como o Princípio da Equivalência e os fundamentos básicos de geometria diferencial. O primeiro princípio a ser tratado é o da equivalência.

2.1 Princípio da Equivalência

Este princípio é a base para o entendimento matemático da Teoria da Relatividade Geral (TRG) e ele teve início ainda na Mecânica Clássica quando se tinha uma distinção entre a massa inercial, que mede a resistência da partícula à aceleração (definida como a razão entre a força e a aceleração através da segunda lei de Newton), e a massa gravitacional, que seria uma propriedade intrínseca da matéria, análoga à carga elétrica e que está associada a atração gravitacional. Havia ainda a diferença entre massa gravitacional ativa, a que gera o campo, e passiva, que sofre a ação do campo, mas devido à simetria na equação da lei da Gravitação Universal (em que a magnitude da força gravitacional é dada por Gmm'/r^2) estas massas são equivalentes, enquanto que na TRG, só há massa ativa, a fonte do campo. O que Newton percebeu e conseguiu medir com boa precisão é que as massas inercial e gravitacional são as mesmas (usando as unidades adequadas), ou seja, a massa que gera o campo gravitacional é a mesma que define a tendência de inércia da partícula. Isto, que foi dado como um axioma por Newton, é chamado de princípio da equivalência na forma fraca [39].

De acordo com Rindler (2006), a equivalência entre as massas inercial e gravitacional era algo misterioso, visto que a princípio não havia qualquer ligação entre a massa inercial e a gravitacional, ou seja, a massa inercial pode existir sem nenhuma necessidade da presença de gravidade, logo, a proporcionalidade entre elas seria apenas uma incrível coincidência, mas não seria necessária (a teoria de Newton funcionaria perfeitamente se esse princípio não fosse válido). Mas isso muda quando analisamos a TRG, ou seja, a equivalência entre inércia e gra-

vidade é algo muito mais forte.

Einstein pensou nesse princípio como sendo mais universal e que deveria haver uma lei que conectasse as duas coisas, onde ele acreditava que inércia e gravidade no fundo eram a mesma coisa [39]. Ele definiu que não é possível realizar um experimento em que se possa distinguir um referencial local livre de rotação em queda livre sob um campo gravitacional uniforme e um outro referencial livre de campos gravitacionais, onde “local” se refere a um referencial localizado em uma região tão pequena que não é possível verificar mudanças no campo gravitacional consideráveis (o campo é aproximadamente uniforme). Outra forma de enunciar o princípio da equivalência é a seguinte: um referencial uniformemente acelerado em relação a um referencial inercial é equivalente a um outro referencial em repouso sob a ação de um campo gravitacional local (uniforme) [40].

Podemos entender o Princípio da Equivalência de Einstein como sendo a impossibilidade de distinguir um referencial que esteja em repouso sob a ação de um campo gravitacional uniforme com um outro que esteja acelerado ou um referencial em queda livre de um outro que seja inercial. Por exemplo, se uma pessoa estiver dentro de um foguete e sentir uma força a puxando para baixo, ela não saberá se essa força é devido a gravidade local ou se é a própria aceleração do foguete para cima que está gerando esse efeito. De modo análogo, se essa mesma pessoa estiver no foguete e não sentir nenhuma força atuando sobre ela, não há como saber se ela está em um local bem distante da Terra onde não há gravidade ou se está na gravidade terrestre, porém em queda livre, caindo em direção ao centro da Terra com a mesma aceleração do campo gravitacional. Este princípio pode parecer bem simples, mas é partir dele que podemos definir as bases de uma teoria gravitacional para a relatividade. Portanto, as leis da gravitação são definidas a partir do princípio de que a gravidade é equivalente a um referencial acelerado.

Mas é importante fazer uma consideração sobre uma possível interpretação equivocada deste princípio: se existe a equivalência entre um campo gravitacional e um referencial acelerado, somos levados a pensar que a existência da gravidade é apenas aparente, pois no referencial que está acelerado, a pessoa que está nele sente a presença do campo, mas, para quem está fora deste referencial, não há campo nenhum, aquela pessoa está sentindo o efeito da aceleração do seu referencial, não de um campo gravitacional, o que poderia nos levar a conclusão de que o campo gravitacional só existe para alguns referenciais, porém sempre poderíamos definir um referencial no qual o campo não existe. Isso só seria verdade se o campo for bem especial, por isso que em um caso geral não existirá nenhum referencial em que um

campo gravitacional desapareça por completo em toda a sua extensão [41]. Isso está associado à localidade do princípio da equivalência, isto é, quando consideramos o campo gravitacional em toda a extensão do espaço-tempo, a equivalência deste com um referencial acelerado não é válida.

A partir deste princípio, pode-se estudar o movimento de um corpo em relação a um dado referencial acelerado e com isso entender como a gravidade vai atuar sobre esse corpo simplesmente estudando a ação da aceleração sobre o corpo, já que existe a equivalência entre os dois e com isso chegar a conclusões interessantes como a de que um corpo que se move de forma retilínea e uniforme em relação a referencial inercial, se moverá numa trajetória curvilínea em relação ao referencial acelerado, o que também é válido até mesmo para um raio de luz, mostrando que a trajetória da luz pode ser curvada pela ação da gravidade [41]. Portanto, o espaço-tempo é localmente plano ou Minkowskiano (Relatividade Restrita), porém é globalmente curvo ou pseudo-Riemanniano [39].

2.2 Cálculo tensorial

Antes de definirmos o que são os tensores e suas propriedades, é importante termos uma motivação para isso. Na Relatividade Geral, além do PE, tem-se também o chamado Princípio da Covariância Geral, que pode ser derivado do primeiro. Segundo ele, uma equação física será válida para um campo gravitacional geral se duas condições forem obedecidas: 1) se ela se manter verdadeira na ausência de campos gravitacionais (ela concorda com as leis da Relatividade Restrita), e 2) se ela for covariante de forma geral, ou seja, se ela se manter invariante por uma transformação geral de coordenadas [42]. Esta última condição é muito importante para que se busque estudar grandezas tensoriais.

Uma vez que é necessário observar se uma equação se mantém invariante por transformação geral de coordenadas, é preciso saber como as componentes de uma grandeza que constitui a equação se transformam, pois estas não necessariamente se mantêm iguais, mas sim a equação inteira. Existem várias formas diferentes nas quais estas componentes podem se transformar, em alguns casos, como o campo eletromagnético, as propriedades da transformação são parcialmente uma questão de definição do mesmo. Mas, existe uma forma relativamente simples de definir as principais grandezas de interesse físico, que, caso não fosse possível, seria muito difícil tornar as equações invariantes após uma transformação de coordenadas [42]. Daqui em diante, apenas por uma questão de vício de linguagem, será mencionado

que as grandezas físicas devem se transformar de tal forma, porém deve ficar claro que a grandeza em si não deve se transformar, justamente por ela ser uma grandeza física, por isso ela deve ser sempre a mesma para qualquer observador já que a física não muda de um observador para outro, o que irá se transformar são as componentes que caracterizam essa grandeza em um dado sistema de coordenadas.

O tipo mais simples de transformação é a das grandezas escalares, que são aquelas que não mudam de forma quando se faz uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x'$. Alguns exemplos, são números puros, como o 0 ou o π , e o tempo próprio $d\tau$. A próxima transformação mais simples é dos vetores, onde temos dois tipos a serem definidos. O primeiro deles é o contravariante, que pode ser representado por V^μ , em que, após uma transformação de coordenadas do tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, ele se transforma da seguinte forma:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (2.1)$$

Um exemplo é o diferencial dx^μ , uma vez que $dx'^\mu = \partial x'^\mu / \partial x^\nu dx^\nu$. A segunda forma é a do vetor covariante que se transforma como:

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu. \quad (2.2)$$

Um exemplo importante de um vetor covariante é o gradiente, pois

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}. \quad (2.3)$$

Com essas definições, pode-se imediatamente generalizar as mesmas para os tensores [42].

Um conjunto de n^p quantidades $T^{\mu_1 \dots \mu_p}$, em que $\mu_i = 1, \dots, n$, associado a um sistema de coordenadas X, representa as componentes de um tensor contravariante de ordem p se o correspondente do mesmo num sistema de coordenadas X' for da forma:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\nu_p}} T^{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (2.4)$$

Analogamente, um conjunto de n^q quantidades $T_{\mu_1 \dots \mu_q}$, associado a X, representa as componentes de um tensor covariante de ordem q se o seu correspondente em X' for da forma:

$$T'_{\mu_1 \dots \mu_q} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\mu_q}} T_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (2.5)$$

Por fim, podemos definir um tensor de n^{p+q} quantidades $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$, associado a X, que representa

as componentes um tensor misto contravariante de ordem p e covariante de ordem q , se seu correspondente em X' for:

$$T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{v_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{v_q}} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (2.6)$$

Um exemplo importante de tensor misto do tipo $(1, 1)$, ou seja, de ordem contravariante 1 e covariante 1, é o delta de Kronecker δ_v^μ . Caso um tensor misto tenha ordem p contravariante e q covariante, chamaremos o mesmo de tensor misto do tipo (p, q) . É importante notar que os vetores também são tensores de ordem 1. No caso do escalar, ele é um tensor de ordem 0 [43].

Com relação à álgebra tensorial, pode-se definir sucintamente as principais operações feitas com os tensores:

- Adição: a soma (ou subtração) de dois tensores de mesma ordem e mesmo tipo resulta também em um tensor do mesmo tipo. Exemplo: $A_v^\mu \pm B_v^\mu = C_v^\mu$.
- Multiplicação: também chamado de produto direto, o produto das componentes de dois tensores de quaisquer tipo é também um tensor, ou seja, a justaposição de dois tensores forma um tensor. Exemplo: $A_v^\mu B_\lambda = C_{v\lambda}^\mu$. Veja que a ordem contravariante do tensor resultante é a soma das ordens dos outros dois tensores, assim como para a ordem covariante.
- Contração: dado um tensor misto, se for usado um mesmo índice contravariante e covariante (ou seja, se houver uma soma em um dos índices de “cima” com um dos de “baixo”), obtêm-se um tensor que possuirá apenas os índices restantes que não foram somados (se o tensor original possui ordem (p, q) , o resultante terá ordem $(p-1, q-1)$). Exemplo: $A_{\mu\nu}^\mu = A_\nu$.

Outro ponto importante é a simetria ou anti-simetria. Um conjunto de quantidades $A_{\mu\nu}$ (não necessariamente componentes de um tensor) é dito ser simétrico se $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ e anti-simétrico se $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ [44].

Daqui em diante, serão usadas algumas convenções para os índices usados nas componentes de tensores: índices gregos, no contexto da Relatividade Geral, correspondem às coordenadas de espaço-tempo, onde 0 corresponde ao tempo, e 1, 2, e 3 correspondem às coordenadas espaciais; índices latinos correspondem às coordenadas espaciais apenas, ou seja, são os índices de 1 a 3. Outro ponto importante é a convenção de soma: índices iguais em um mesmo

termo em posições opostas, ou seja, um índice contravariante e outro covariante, indicam uma soma implícita nestes índices. Por exemplo: $A^\mu B_\mu$ equivale à $\sum_\mu A^\mu B_\mu$. Logo, o termo $A^\mu B_\nu$ não possui soma, pois os índices são distintos.

2.3 Métrica de um espaço curvo

Agora que foi introduzido o Princípio da Equivalência (PE) de Einstein e já vimos que o espaço-tempo deve ser curvo, é preciso entender como podemos descrever esse tipo de espaço-tempo. Para tal, é essencial definir um tensor que é chamado de métrica.

Seja na geometria ou no cálculo, é essencial para o seu entendimento a noção, por mais elementar que seja, de distância entre dois pontos, ou estudar as “vizinhanças” de um ponto do espaço. Como exemplo temos o cálculo do comprimento de arco, que depende da noção de distância. Logo, é natural que, para trabalharmos com geometrias mais complexas e generalizadas, deve-se também generalizar o conceito de distância, independente do tipo de espaço a ser trabalhado [45].

Em geometria elementar, define-se o produto interno entre dois vetores \mathbf{U} e \mathbf{V} como sendo $\sum_{i=1}^m U_i V_i$, onde U_i e V_i são as componentes dos vetores \mathbf{U} e \mathbf{V} , respectivamente, no espaço \mathbb{R}^m em um sistema de coordenadas ortonormais. Mas para um espaço curvo, que é uma variedade diferenciável, o produto interno é definido pela métrica com os vetores do espaço tangente à variedade. Considere agora que um conjunto M seja uma variedade diferenciável. A métrica Riemanniana g em M é um campo tensorial do tipo (0,2) que precisa obedecer aos seguintes axiomas para todo ponto em M :

- 1) $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
- 2) $g_p(U, U) \geq 0$, onde a igualdade só válida quando $U = 0$, especificamente.

Aqui, p é um ponto qualquer de M , e U e V são vetores que pertencem ao espaço tangente de M ($T_p M$). Em resumo, temos que a métrica deve ser simétrica, positiva definida e da forma bilinear [46].

Segundo Nakahara (2003), a métrica é considerada pseudo-Riemanniana quando ela satisfaz o axioma 1) e

- 2') Se $g_p(U, V) = 0$ para todo U pertencente ao espaço tangente de M , então $V = 0$.

Para mais informações sobre os conceitos de variedade diferenciável, espaço tangente e outros conceitos de geometria diferencial, pode-se encontrá-las em [47].

Uma forma mais simples de se entender o que representa a métrica é a de que ela é responsável por atribuir uma regra para as distâncias entre um par de pontos vizinhos no espaço para todos os pontos do mesmo, que é chamado de espaço métrico. Ou seja, pode-se determinar a distância infinitesimal quadrática entre dois pontos quaisquer pela forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.7)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor métrico e x^μ são as coordenadas do espaço métrico [39]. Ou seja, a métrica determina a geometria do espaço que está sendo trabalhado, pois a distância entre dois pontos depende do formato do mesmo.

Assim, o produto interno agora terá uma definição mais geral do que no caso do espaço euclidiano, sendo definido como $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$, onde a métrica pode ser escrita como produto interno dos vetores de base do sistema de coordenadas dos vetores \mathbf{U} e \mathbf{V} , por exemplo, $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$ [43]. Veja que a métrica não precisa necessariamente ser ortonormal ou mesmo ortogonal. Para que essa definição seja válida, basta que a métrica $g_p(U, V)$ que definimos faça um mapeamento desses vetores em um número real, o que implica em $g_p(U, V) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ [47]. Algumas propriedades importantes da métrica são:

- $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, que é devido à simetria da métrica.
- $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$, em que $g^{\mu\nu}$ é a inversa da métrica $g_{\mu\nu}$ e δ_ν^μ é o delta de Kronecker, que é definido por da seguinte forma: para $\mu = \nu$, $\delta_\nu^\mu = 1$, e para $\mu \neq \nu$, $\delta_\nu^\mu = 0$.
- $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ e $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, ou seja, a métrica tem a propriedade de “descer” e “subir” índices através do produto interno com um tensor qualquer [47].

Por fim, é importante definir duas métricas importantes, inclusive para os resultados deste trabalho: a métrica de Minkowski, e a de Schwarzschild, que são métricas de espaço-tempo relativísticas. Mas para começar, é interessante definir a métrica mais simples que é a do espaço euclidiano.

Considere um conjunto de pontos em “ n ” dimensões que define o \mathbb{R}^n . Estes pontos podem ser representados por n-uplas dadas por (x_1, \dots, x_n) , em que cada x_i , com $i = 1, \dots, n$, é um número real. O espaço métrico associado a este conjunto é tal que a distância entre dois pontos quaisquer, dados por $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, pode ser dada por $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, entre outras formas, onde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica chamada de eucli-

diana [48]. Vê-se claramente que essa é a forma da distância entre duas extremidades de um segmento de reta, em coordenadas cartesianas.

Colocando esta expressão na forma diferencial, obtemos o resultado para se definir o tensor métrico do espaço euclidiano:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.8)$$

onde, por questão de simplicidade, consideram-se apenas 3 dimensões. Da definição do tensor métrico da equação (2.7), e observando que

$$\sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} dx_i dx_j, \quad (2.9)$$

pode-se fazer a seguinte comparação:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.10)$$

onde aqui se usou a seguinte convenção que se seguirá por todo este trabalho: índices latinos vão representar coordenadas unicamente espaciais, e as letras gregas serão usadas para as coordenadas de espaço-tempo.

Na forma matricial, esta métrica nada mais é do que a matriz identidade 3×3 , o que pode ser facilmente generalizado para n dimensões, ou seja, a métrica será a matriz identidade de ordem n . No caso da Relatividade Restrita, o elemento infinitesimal quadrático é invariante sob transformações de Lorentz, dadas por

$$x' = \gamma(x - vt), t' = \gamma(t - vx/c^2), y' = y, z' = z, \quad (2.11)$$

em que as transformações inversas são

$$x = \gamma(x' + vt'), t = \gamma(t' + vx'/c^2), y = y', z = z', \quad (2.12)$$

se ele for da seguinte forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.13)$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz. Considerando x^μ da forma $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, usando novamente a equação (2.7), obtêm-se que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

em que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$. Esta é a chamada métrica de Minkowski para o espaço-tempo da Relatividade Restrita [47]. Pelo PE, visto na seção anterior, um referencial, no contexto da Relatividade Geral, é localmente plano e globalmente curvo, isto implica que para um determinado ponto onde a curvatura nas suas vizinhas é desprezível, a métrica de Minkowski é válida para o mesmo, conseqüentemente, as equações da Teoria da Relatividade Restrita também são, desde que se considere apenas uma região muito pequena em torno dele [39]. Este processo será explicado mais adiante quando forem definidas as “tetradas” ortonormais.

Por fim, é interessante definir uma métrica extremamente importante da TRG, que representa o espaço-tempo de Schwarzschild. O que se segue foi tirado de [49].

Uma aplicação bem importante da TRG é a de um campo gravitacional que seja esfericamente simétrico, ou seja, a métrica do seu espaço-tempo deve possuir tal simetria. Isto porque uma métrica dessa forma pode descrever diversas situações relevantes para a Física, como o campo gravitacional da Terra ou do Sol (com boa aproximação), sendo útil para descrever também o movimento de planetas, entre outras aplicações. Concentraremos em soluções fora do corpo que gera o campo, ou seja, no vácuo, que no caso de um planeta, seria da superfície do mesmo para fora, porém, esta solução também funciona bem para um tipo bem particular de sistema: o buraco negro.

Como veremos no capítulo 3, a única solução possível em RG no vácuo onde se tem simetria esférica é a de Schwarzschild. Nela, vamos trabalhar em coordenadas esféricas, isto é, $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$. Pode-se assumir que ela também deve ser estática, ou seja, independente do tempo. Logo, teremos as seguintes simetrias: $\theta \rightarrow -\theta$, $\phi \rightarrow -\phi$, $t \rightarrow -t$. Isto implica que se fizermos uma reversão dessas coordenadas, a métrica não será alterada. Como exemplo, vamos considerar a reversão temporal. Considerando apenas os termos da métrica que dependem do tempo, teremos:

$$g_{00}c^2dt^2 + g_{0i}cdtdx^i + g_{i0}dx^i cdt = g_{00}c^2d(-t)^2 + g_{0i}cd(-t)dx^i + g_{i0}dx^i cd(-t). \quad (2.15)$$

Facilmente vê-se que para esta igualdade ser válida, $g_{i0} = g_{0i} = 0$. Repetindo esse raciocínio para θ e ϕ , chega-se a conclusão de que $g_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$, onde $\mu, \nu = 0, 2, 3$. Para μ ou ν sendo 1, também teremos o mesmo resultado, pois, se o outro índice for diferente de 1,

usando o mesmo raciocínio envolvendo a reversão da coordenada respectiva deste outro índice, teremos o mesmo resultado que encontramos para os outros índices, ou seja, o termo da métrica que multiplica os diferenciais com o índice 1 e o outro índice distinto deverá ser nulo. Logo, a métrica terá a forma a seguir:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 \quad (2.16)$$

No próximo capítulo, os cálculos para encontrar esses termos serão feitos para um caso geral, sem ser no vácuo, mas também consideraremos o caso particular em que se está no vácuo e a métrica será determinada, por isso não há necessidade de fazer os cálculos aqui, mas é interessante mostrar o seguinte passo: pode-se reescrever o termo $g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2$ por $e^{2\gamma}r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$. Definindo o termo entre parênteses por $d\Omega^2$, vamos ter o termo $e^{2\gamma(r)}r^2d\Omega^2$. Pode-se fazer a seguinte mudança de variável: $\bar{r} = e^\gamma r$. Desta forma, obtemos:

$$d\bar{r} = \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right) e^\gamma dr. \quad (2.17)$$

Logo, pode-se reescrever a métrica da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{-2\gamma}g_{11}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2d\Omega^2. \quad (2.18)$$

Agora, basta fazer uma renomeação de variável: $\bar{r} \rightarrow r$. Com isso, temos que $g_{22} = r^2$ e $g_{33} = r^2\text{sen}^2\theta$. Desta forma, podemos reescrever a métrica por:

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + g(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.19)$$

As funções $f(r)$ e $g(r)$ podem ser encontradas resolvendo-se as equações de Einstein no vácuo. Fazendo este procedimento, que pode ser encontrado em [39], temos que a métrica de Schwarzschild será dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.20)$$

A constante $2GM/c^2$, que é o raio de Schwarzschild, pode ser obtida da relação $g_{00} = -(1 + 2\Phi/c^2)$, onde Φ é o potencial Newtoniano ($-GM/r$).

Um resultado importante e que será utilizado ao longo deste trabalho é determinar as componentes da métrica inversa, $g^{\mu\nu}$, nos casos especiais em que a métrica é ortogonal. Isto será suficiente para o nosso trabalho, pois todas as métricas que serão abordadas nos próximos

capítulos serão ortogonais, independente de ter simetria esférica ou cilíndrica, como veremos. Para determinarmos tais componentes, usaremos a propriedade que relaciona a métrica com a sua inversa: $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta_{\nu}^{\mu}$. Além disso, vamos usar a condição da ortogonalidade da métrica: $g_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$.

Podemos começar com o primeiro índice da métrica sendo o temporal, isto é, $\mu = 0$. Pela relação entre as métricas, vamos obter:

$$g^{0\nu}g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^0. \quad (2.21)$$

Agora vamos analisar o índice λ . Sabemos que se $\lambda = 0$, $\delta_{\lambda}^0 = 1$, e se $\lambda \neq 0$, $\delta_{\lambda}^0 = 0$. Logo, para $\lambda = 0$:

$$g^{0\nu}g_{\nu 0} = g^{00}g_{00} = 1 \rightarrow g^{00} = \frac{1}{g_{00}}, \quad (2.22)$$

onde usamos a condição de ortogonalidade da métrica $g_{0\nu} = 0$, se $\nu \neq 0$. Agora vamos considerar $\lambda = i \neq 0$:

$$g^{0\nu}g_{\nu i} = g^{0i}g_{ii} = 0 \rightarrow g^{0i} = 0, \quad (2.23)$$

onde novamente usamos a ortogonalidade da métrica e o termo $g^{0i}g_{ii}$ não possui soma em i , pois a soma implícita estava no índice ν . Seguindo esse mesmo raciocínio para os outros índices em μ , chegaremos ao seguinte resultado:

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1/g_{\mu\nu}, & \text{se } \mu = \nu \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (2.24)$$

Vemos, portanto, que a métrica inversa também será ortogonal e as componentes da diagonal principal da representação matricial serão as inversas das respectivas componentes da métrica, ou seja, $g^{00} = g_{00}^{-1}$, e assim por diante. Por exemplo, com relação à métrica de Minkowski, a inversa dela será ortogonal, tal que, se $\mu = \nu$, $\eta^{\mu\mu} = 1/\eta_{\mu\mu}$. Logo, vamos ter: $\eta^{00} = 1/\eta_{00} = 1/(-1) = -1$; $\eta^{ii} = 1/\eta_{ii} = 1/1 = 1$, com $i = 1, 2, 3$. Ou seja, $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Para métricas não ortogonais, este resultado claramente não se aplica.

2.4 Tensor de curvatura de Riemann

Agora que já foi definida a forma da métrica de um espaço-tempo e o que ela representa, é necessário definir os tensores que determinam a geometria do mesmo. Como a

geometria do espaço-tempo está representada pela métrica, é de se esperar que estes tensores serão definidos, direta ou indiretamente, em função desta, que é exatamente o que veremos nesta seção.

2.4.1 Tensor de Riemann

O tensor responsável por quantificar a curvatura de um espaço métrico é chamado de tensor de curvatura de Riemann. Normalmente este tensor surge quando se analisa algumas propriedades que dependem da curvatura do espaço como o comutador da derivada covariante [49].

A conexão afim, ou conexão de Christoffel (também chamada de símbolos de Christoffel) está diretamente ligada à geometria de espaço-tempo e pode ser escrita em termos da métrica. Podemos ver isso calculando a equação da geodésica, que consiste na trajetória na qual um campo vetorial é transportado paralelamente ao longo da mesma [49]. Mas também pode-se defini-la como sendo o ponto crítico do funcional que determina a distância entre dois pontos numa superfície curva [39]. Logo, se o funcional é dado por:

$$D = \int_C ds \quad (2.25)$$

em que $ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$, então:

$$\delta \left(\int_C ds \right) = 0 \quad (2.26)$$

Ao resolver esta equação (resolvendo as equações de Euler-Lagrange), obtem-se a equação da geodésica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (2.27)$$

onde

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}), \quad (2.28)$$

é a conexão de Christoffel. Os passos detalhados da demonstração desta podem ser encontrados em [50].

Definida a conexão afim, podemos definir o tensor de Riemann. Como pode ser visto em [49], o comutador da derivada covariante atuando em um tensor contravariante de or-

dem 1 está diretamente ligado à curvatura do espaço. A derivada covariante é uma diferenciação que possui duas propriedades muito importantes: transforma tensores em outros tensores e se reduz a diferenciação parcial comum, ∂_μ , na ausência de campo gravitacional [42]. Podemos fazer uma rápida demonstração de como ela consegue criar uma lei de transformação para a diferenciação de um tensor que corresponderá a um outro tensor, conforme [42]. Como foi visto na subseção (2.2), a componente de um vetor contravariante possui a seguinte lei de transformação:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (2.29)$$

e a derivada parcial se transforma por:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (2.30)$$

Se fizermos a diferenciação de uma componente de um vetor, a sua lei de transformação será:

$$\frac{\partial V'^\lambda}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} V^\beta \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta. \quad (2.31)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.31) é o termo esperado para a lei de transformação do termo do lado esquerdo caso este fosse um tensor, porém, vemos que ele não é o único termo da expressão, o que nos leva a concluir que a diferenciação parcial de um vetor contravariante não se transforma como um tensor. Mas, é possível determinar como os símbolos de Christoffel se transformam fazendo as devidas transformações na equação (2.28). Chega-se na seguinte expressão:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}, \quad (2.32)$$

que também pode ser escrita como:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (2.33)$$

Os detalhes dessas operações podem ser encontrados em [42]. Dadas essas transformações, segue que:

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} V'^{\nu} = \left[\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} V^{\gamma} \quad (2.34)$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} V'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} V^{\gamma} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} V^{\alpha}. \quad (2.35)$$

Logo:

$$\frac{\partial V'^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} + \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} V'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} V^{\gamma} \right). \quad (2.36)$$

Portanto, o termo entre parênteses se transforma como um tensor do tipo (1, 1). Este tensor é definido como derivada covariante atuando em um vetor contravariante e pode ser escrita na forma a seguir:

$$\nabla_{\mu} V^{\lambda} \equiv \frac{\partial V^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V^{\nu}. \quad (2.37)$$

No caso de um vetor covariante, cuja transformação é dada por:

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu}, \quad (2.38)$$

temos que:

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial V_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\beta} \quad (2.39)$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} V_{\gamma} + \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\gamma}. \quad (2.40)$$

Assim, temos que:

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} V'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} V_{\gamma} \right). \quad (2.41)$$

Claramente, vemos que a lei de transformação definida em (2.41) é a de um tensor do tipo (0, 2). Essa é a forma da derivada covariante atuando em um vetor covariante, que podemos definir por:

$$\nabla_{\mu} V_{\nu} \equiv \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda} = \partial_{\mu} V_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda}. \quad (2.42)$$

Seguindo esse raciocínio pode-se deduzir uma expressão mais geral para a derivada covariante

atuando em tensor misto do tipo (p, q) , porém não há necessidade de deduzirmos tal expressão para este trabalho. A derivada covariante atua como uma generalização da derivada parcial ∂_μ em espaços curvos e que recupera esta quando estamos na ausência de campo gravitacional (no espaço de Minkowski, por exemplo).

Uma vez definida a derivada covariante, pode-se determinar o comutador desta atuando em vetor contravariante, obtendo o seguinte resultado:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu}V^\rho, \quad (2.43)$$

em que

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}, \quad (2.44)$$

é o tensor de curvatura de Riemann [49]. Em [49], também aparece, no lado direito da equação (2.43), o chamado tensor de torção, $T^\lambda_{\mu\nu}$, definido por $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, entretanto, não será necessário neste trabalho trabalhar em espaços com torção, o que pode ser visto facilmente pela definição que usamos para os símbolos de Christoffel em (2.28), pois eles são simétricos nos índices inferiores, o que obviamente torna o tensor de torção nulo. Logo, para espaços com torção, a definição dos símbolos de Christoffel será diferente.

Da própria definição do mesmo, nota-se algumas propriedades importantes:

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\rho\lambda\mu\nu}; R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\nu\mu}; R_{\lambda\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\rho}; R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\nu\rho\mu} + R_{\lambda\mu\nu\rho} = 0, \quad (2.45)$$

onde $R_{\lambda\rho\mu\nu} = g_{\lambda\sigma}R^\sigma_{\rho\mu\nu}$.

2.4.2 Tensor e escalar de Ricci

Vimos que é possível contrair dois índices, um contravariante e outro covariante, de um tensor. Desta forma, pode-se fazer contrações com o tensor de Riemann, visto que ele é um tensor do tipo $(1, 3)$. Deste modo, pode-se fazer a seguinte contração:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.46)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é definido como tensor de Ricci. Este é um tensor simétrico: $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Também é possível contrair os índices deste usando a métrica para “subir” um dos seus índices:

$$R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R, \quad (2.47)$$

em que R é definido como escalar de Ricci ou curvatura escalar [49].

Estes tensores são essenciais para podermos introduzir a chamada equação de campo de Einstein, na qual será possível estudar a curvatura do espaço-tempo da Relatividade Geral.

2.5 Tensor momento-energia

Já fizemos as principais definições que são necessárias para se estudar as propriedades geométricas do espaço (no contexto da RG, o espaço-tempo), mas existe um outro elemento importante do ponto de vista físico que ainda não definimos. É comum se dizer que na TRG, a matéria curva o espaço-tempo. Na seção (2.6) veremos que isso é verdade, logo, os “ingredientes” dessa equação estão na própria afirmação: matéria e curvatura do espaço-tempo. A curvatura está bem descrita pelos tensores que vimos na seção passada, mas falta definir como será descrita a matéria (ou campos). É nesse contexto que se faz necessário introduzir o tensor momento-energia.

2.5.1 Tensor momento-energia

O tensor momento-energia, definido por $T_{\mu\nu}$, é um tensor do tipo (0, 2). Ele não deve ser confundido com o 4-vetor momento-energia, P^{μ} , que é do tipo (1, 0) [47]. Uma forma mais geral do mesmo pode ser dada por

$$T_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} \rho c^2 & S_j \\ S_i & \pi_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

onde ρc^2 é a densidade de massa-energia do sistema, S_i é o fluxo de energia do mesmo, e π_{ij} são os termos de tensão, uma generalização do conceito de pressão [1, 47]. Lembrando que os índices i e j variam de 1 a 3, logo a matriz acima é do tipo 4×4 , ela está apenas compactada.

No caso da matéria ser um fluido perfeito, por exemplo, pode-se escrever o tensor momento-energia de uma forma mais direta:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_{\mu} U_{\nu} + p g_{\mu\nu} \quad (2.49)$$

onde U_{μ} é a 4-velocidade do fluido, e p é a pressão do fluido no referencial próprio deste [49]. Considerando um referencial em que a matéria está em repouso (um referencial local), vamos

ter $U_{\hat{\mu}} = (-c, \vec{0})$. O índice com “chapéu” é apenas para indicar que estamos no referencial próprio ou local. Neste referencial, a métrica é localmente Minkowskiana, ou seja, podemos substituir $g_{\mu\nu}$ por $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Mais detalhes sobre esse processo de trabalhar no referencial local serão discutidos no apêndice A, onde definiremos as “tetradas” ortonormais. Logo:

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U_{\hat{\mu}} U_{\hat{\nu}} + p \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (2.50)$$

Fazendo $\hat{\mu} = \hat{\nu} = \hat{0}$, temos:

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) c^2 - p = \rho c^2 \quad (2.51)$$

onde vemos que o resultado definido em (2.48) de fato se aplica neste caso. Para $\hat{\mu} = \hat{i}$ e $\hat{\nu} = \hat{j}$, tem-se:

$$T_{\hat{i}\hat{j}} = p \delta_{\hat{i}\hat{j}} \quad (2.52)$$

isto é, os únicos termos que não são nulos são os da diagonal principal e estes são todos iguais (as pressões são as mesmas em todas as direções). Se um dos índices for $\hat{0}$ e o outro \hat{i} , a componente do tensor momento-energia também será nula. Logo, os únicos termos não nulos serão os da diagonal principal.

Uma característica importante deste tensor é a sua lei de conservação. Existem determinados tipos de transformações como translações espaço-temporais, transformações de fase, etc, que mantêm a densidade Lagrangiana do sistema invariante. Para cada tipo de simetria contínua dessas obtêm-se uma lei de conservação, ou seja, tem-se uma grandeza conservada, resultado chamado de Teorema de Noether [51].

Nosso foco não é demonstrar ou entrar em detalhes dos seus resultados, mas a partir dele pode-se deduzir uma lei de conservação para o tensor momento-energia a partir de translações espaço-temporais:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.53)$$

A demonstração detalhada pode ser encontrada em [51]. Entretanto, segundo [47], este resultado é válido somente para a Relatividade Restrita. Para adaptá-la à Relatividade Geral, deve-se substituir a derivada parcial pela derivada covariante:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.54)$$

A partir desta equação, pode-se chegar à conservação da energia e do 4-momento linear do sistema [51].

2.5.2 Condições de energia

Às vezes existem situações em que precisamos resolver as equações de campo de Einstein (que será vista na próxima seção) sem conhecer a matéria que faz parte do sistema. Isso leva a uma situação muito arbitrária, ou seja, $T_{\mu\nu}$ a princípio poderia assumir qualquer valor dependendo da métrica que seja escolhida para o sistema, e esta pode assumir qualquer valor. Geralmente a fonte de matéria é conhecida (como por exemplo um campo elétrico) e não precisamos nos preocupar com isso, mas também é importante estudar propriedades das equações de Einstein para fontes quaisquer. Por isso, se faz necessário impor algumas condições de energia que $T_{\mu\nu}$ deve obedecer para diminuir a arbitrariedade dessa escolha, já que precisamos de fontes que sejam “realistas”, que possam ser encontradas na natureza [49].

As condições de energia são restrições invariantes por mudança de coordenadas impostas ao tensor momento-energia. Para isso, é preciso construir escalares a partir do mesmo através de contrações de $T_{\mu\nu}$ com vetores do tipo-tempo ou do tipo-luz [49]. Isso implica que as condições de energia serão válidas para qualquer referencial, como era de se esperar. Os vetores podem ser classificados de três formas distintas com relação ao seu “tipo”:

- $g(U, U) = g_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} > 0$, tipo-espaço.
- $g(U, U) = 0$, tipo-luz.
- $g(U, U) < 0$, tipo-tempo. Aqui estamos supondo uma métrica com assinatura do tipo $(-, +, +, +)$, ou seja, com o sinal de menos na coordenada de tempo e com sinal positivo nas coordenadas do espaço [46].

Agora podemos enunciar as condições de energia para o tensor momento-energia, onde vamos considerar como exemplo o caso em que este é escrito numa base em que o termo $T_{00} = \rho c^2$, e $T_{ii} = p_i$, como no caso de um fluido perfeito:

- Condição fraca: esta condição afirma que $T_{\mu\nu} t^{\mu} t^{\nu} \geq 0$, para todo vetor t^{μ} do tipo-tempo. Como consequência, tem-se que $\rho \geq 0$ e $\rho c^2 + p_i \geq 0$, onde p_i é um termo de pressão correspondente ao termo T_{ii} do tensor momento-energia.

- Condição nula: temos que $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ para todo vetor nulo (tipo-luz) l^μ . Equivalentemente, chega-se a $\rho c^2 + p_i \geq 0$. Vemos que ela é menos restritiva que a primeira, já que ela limita por baixo as pressões ($p_i \geq -\rho c^2$), mas não impõe uma limitação para a densidade ρ .
- Condição dominante: esta é uma junção da condição fraca ($T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$) com a restrição adicional de que o vetor $T^{\mu\nu}t_\mu$ não pode ser do tipo-espaço, ou seja, $T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu t^\mu t^\lambda \leq 0$, o que nos leva a $\rho c^2 \geq |p_i|$, portanto, a densidade de massa-energia não só deve ser positiva como também deve ser maior ou igual ao módulo da pressão p_i . Esta condição pode ser interpretada como sendo a impossibilidade do fluxo de matéria de viajar acima da velocidade da luz.
- Condição dominante nula: ela impõe exatamente as mesmas restrições da condição dominante, exceto que nela deve-se usar um vetor nulo l^μ , isto é, teremos $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ e $T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu l^\mu l^\lambda \leq 0$. Ela leva à mesma restrição para a densidade de massa-energia que deve ser maior ou igual ao módulo de p_i , porém também leva a $\rho c^2 = -p_i$, ou seja, pode-se ter uma densidade negativa.
- Condição forte: esta condição afirma que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T_\lambda^\lambda t^\sigma t_\sigma$, o que implica em $\rho c^2 + p_i \geq 0$ e $\rho c^2 + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0$. Vê-se que esta condição é mais restrita do que a condição nula, o que significa que se ela for verdadeira, a condição nula também será. Ela também leva ao resultado de que a gravitação precisa ser atrativa. [49, 52]

Logo, se alguma solução para o tensor momento-energia violar qualquer uma dessas condições, ela não é permitida fisicamente, ou seja, ela estará associada a algum tipo de matéria que é não consistente com a física do Modelo Padrão de partículas e, portanto, possivelmente não deve existir no mundo real, a menos que seja feita uma nova teoria para a gravitação ou para o próprio Modelo Padrão. Veremos mais adiante que esse problema irá ocorrer com a matéria que deve gerar buracos negros regulares e buracos de minhoca atravessáveis.

2.6 Equações de campo de Einstein

Assim como na teoria eletromagnética de Maxwell as equações de Maxwell governam como os campos elétrico e magnético reagem à presença de carga e corrente elétricas, as equações de Einstein governam como a métrica reage à presença de momento e energia, ou seja, como a matéria ou um campo irá curvar o espaço-tempo ao seu redor. Esta equação

precisou ser postulada e testada experimentalmente para ser validada, embora existam alguns argumentos plausíveis que podem ser utilizados para a sua determinação como o uso da ação de Einstein-Hilbert para derivar as suas equações de movimento [49].

Primeiro é preciso definir o chamado tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.55)$$

A equação de Einstein irá relacionar este tensor com o tensor momento-energia através de uma proporcionalidade:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

Aqui vemos explicitamente que a equação relaciona como a curvatura do espaço-tempo é afetada pela presença de matéria e energia, pois de um lado da equação temos os tensores que envolvem a geometria do espaço-tempo (como o tensor de Ricci) e do outro lado temos o tensor momento-energia, que como vimos, possui as propriedades da matéria e energia do sistema [1].

Outro ponto interessante é sua similaridade com a equação de Newton da Gravitação Universal dada pela equação de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.57)$$

pois aqui temos derivadas de segunda ordem do potencial gravitacional no primeiro membro e do outro lado a densidade de massa do sistema, enquanto na equação de Einstein, temos também derivadas de segunda ordem, porém da métrica (pois o tensor de Ricci envolve o tensor de Riemann que possui termos da derivada dos símbolos de Christoffel, conforme (2.44), e estes possui derivadas da métrica, segundo (2.28)), e no segundo membro, também temos a presença da densidade de massa embutida no tensor momento-energia, ou seja, a métrica está relacionada com a gravidade (que pode ser evidenciada pela relação de g_{00} com o potencial Newtoniano vista na seção sobre métrica), e o tensor momento-energia, com a densidade da matéria [49].

Um resultado interessante é o do caso específico em que não há a presença de $T_{\mu\nu}$, ou seja, a solução da equação de campo de Einstein no vácuo. Neste caso, tem-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (2.58)$$

Multiplicando esta equação por $g^{\rho\mu}$:

$$R_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\rho}R = 0. \quad (2.59)$$

Contraindo ρ com ν :

$$R_{\nu}^{\nu} = \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\nu}R, \quad (2.60)$$

mas como $R_{\nu}^{\nu} = R$ e $\delta_{\nu}^{\nu} = 4$, então teremos:

$$R = 0 \rightarrow R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.61)$$

Esta é a equação que se usa para encontrar a métrica de Schwarzschild, como veremos no próximo capítulo, e que é útil para descrever um buraco negro sem rotação e sem carga (ver [1]).

3 BURACOS NEGROS REGULARES E BURACOS DE MINHOCA ATRAVESSÁVEIS

Nosso principal objetivo neste trabalho de dissertação é realizar um método para regularizar uma solução de buraco negro que é o conhecido por corda negra, e que realiza uma interpolação entre buraco negro regular e buraco de minhoca. Porém, antes de analisarmos o método e fazer a aplicação dele à corda negra, precisamos entender antes o que é um buraco negro regular e um buraco de minhoca.

Para analisarmos um buraco negro regular, primeiro vamos entender o que é um buraco negro e suas principais propriedades, e depois entender sobre sua regularidade, o que está diretamente ligado à singularidade presente na curvatura deste.

Para o estudo dos buracos de minhoca, será dado uma introdução à ideia de viagem interestelar, indicando o porquê de se buscar um buraco de minhoca para realizá-la em vez de usar um buraco negro, por exemplo. Após essa introdução, trabalharemos a solução obtida por Morris-Thorne para formar um buraco de minhoca atravessável, explanando todos critérios que devem ser levados em conta para esta solução, analisando a solução matemática, em específico, determinando as grandezas de curvatura, o tensor momento-energia, resolvendo a equação de Einstein, e com esses resultados avaliar as condições para que ele seja atravessável como o tempo de viagem e avaliando a gravidade de maré aplicada a um viajante durante à travessia. Além disso, vamos mostrar os problemas encontrados pelos autores que a princípio tornaria a criação do buraco de minhoca impossível a menos que seja introduzida alguma modificação dos conhecimentos em física teórica que conhecemos hoje, como uma teoria de gravitação quântica ou outras modificações na gravidade.

3.1 Buracos negros regulares

Buracos negros são soluções das equações de Einstein para uma geometria de espaço-tempo na qual existe a presença de uma superfície chamada de horizonte de eventos na qual qualquer matéria ou até mesmo luz que atravesse-a só pode descrever uma trajetória de via única, ou seja, elas podem entrar do meio exterior para dentro da região delimitada pelo horizonte, mas não podem mais sair, nem mesmo a luz pode viajar para fora do horizonte sem violar a causalidade. Também podemos definir o horizonte de eventos como o contorno de uma superfície que possui curvas causais (do tipo-tempo ou do tipo-nulo) em que o passado/futuro

são infinitos, ou seja, todo o passado e todo o futuro estão definidos neste contorno, o horizonte de eventos [1]. De modo mais simples, tudo o que entra em um buraco negro estará preso para sempre dentro dele, pois não haverá mais como escapar da região delimitada pelo horizonte de eventos.

Este tipo de solução é muito importante em Relatividade, pois pode definir o tipo de geometria criada quando o corpo sofre um colapso, como uma estrela ou aglomerado de estrelas em que a sua massa tende a se concentrar em um volume muito pequeno. Além disso, buracos negros tem sido usados para buscar compreender melhor a relação entre geometria e o mundo quântico, como com os estudos sobre radiação Hawking [2].

As soluções básicas de buracos negros para o espaço-tempo na Relatividade Geral possuem singularidades na sua curvatura, ou seja, regiões em que nenhuma noção de espaço-tempo clássico pode ser utilizada, portanto são regiões não preditivas. Este problema normalmente é ignorado, pois as singularidades se encontram dentro do horizonte de eventos do buraco negro, portanto, como a região física de interesse está fora do horizonte de eventos, as singularidades não afetarão em nada nossas análises. Entretanto, quando estamos trabalhando com a evaporação de buracos negros com a emissão de radiação Hawking, estas singularidades não podem ser ignoradas quando estamos nos estágios finais da evaporação, e a descrição correta do espaço-tempo nessas condições é crucial para responder a determinadas questões que envolvem a relação da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica que estão associadas a essa evaporação ou para descrever o estágio final de um buraco negro após a evaporação [53].

Portanto, as singularidades no espaço-tempo indicam regiões em que a teoria de Einstein falha ao descrever e que possivelmente poderão ser bem descritas com o uso de uma teoria quântica para a gravitação. Porém, é possível desenvolver soluções regulares para buracos negros, isto é, soluções sem singularidades. Por exemplo, soluções com métricas esféricamente simétricas, estáticas, assintoticamente planas, e com centros regulares podem ser encontradas e que podem contornar esses problemas e elucidar problemas de evaporação de buracos negros [54].

O trabalho pioneiro neste sentido foi o obtido por Bardeen, em 1968 [9], em que ele avaliou que a singularidade na origem destas soluções estava associada ao colapso da matéria neste ponto, portanto ele propôs uma métrica que gerasse uma solução não-singular na origem. A diferença básica nessa solução é que ela não era uma solução de vácuo como as que normalmente são usadas como a de Schwarzschild, portanto essa solução precisava de um tensor

momento-energia não nulo para gerá-la [55].

Para se avaliar se uma solução é regular ou não, deve-se avaliar a sua curvatura e analisar se existem pontos de alta curvatura, ou seja, pontos em que há divergência nas grandezas que medem a curvatura do espaço-tempo. Normalmente se utiliza invariantes de curvatura para fazer essa análise como a contração de Ricci ou o escalar de Kretschmann, definidos, respectivamente, por $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e por $R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho}$ [56]. Ou seja, podemos avaliar a regularidade da solução a partir do tensor de Riemann e dos invariantes derivados deste. Por exemplo, a solução de Schwarzschild não é regular, pois o seu escalar de Kretschmann é igual à $48M^2/r^6$, onde estamos supondo que o seu horizonte é $2M$. Logo, tem-se claramente uma divergência, portanto, uma singularidade, em $r = 0$ [57].

Como a singularidade ocorre na origem, o método que vamos adotar para verificar se uma dada solução é regular será avaliar as componentes do tensor de Riemann e os invariantes de curvatura em $r = 0$, se não houver divergências, então a solução não possui singularidades e será regular. No caso de fazermos uma mudança de variável do tipo $\bar{r}^2 = r^2 + a^2$, em que a é um parâmetro real, então o valor mínimo, que corresponde ao centro, será $\bar{r} = a$, pois este é o valor da nova coordenada \bar{r} quando $r = 0$. Logo, para esta nova coordenada, vamos avaliar as grandezas de curvatura em $\bar{r} = a$ (essa mudança de coordenada será melhor trabalhada no capítulo 5 quando estivermos lidando com a corda negra).

Uma outra análise importante que se pode fazer com essas grandezas de curvatura é se uma dada solução é assintoticamente plana. Isto pode ser feito avaliando o limite assintótico das componentes do tensor de Riemann e dos invariantes de curvatura, ou seja, vamos fazer o limite em que r tende ao infinito. Para que a solução seja assintoticamente plana é preciso que estas grandezas tendam a decrescer para representar um campo fraco e no limite em que $r \rightarrow \infty$, todas elas devem tender a zero [21]. Claro que isso também pode ser feito analisando o limite assintótico da métrica e verificando se a métrica de Minkowski é recuperada.

Para melhor exemplificar essa análise, vamos abordar a seguir um exemplo de solução regular para um buraco negro, a de Bardeen.

3.1.1 *Buraco negro regular de Bardeen*

A solução de Bardeen para um buraco negro regular é considerada a primeira solução regular construída em Relatividade Geral, sendo por isso muito importante para esse tipo de estudo. Ela consiste em uma métrica esfericamente simétrica com massa variável, tendo a mesma forma da solução de Schwarzschild, porém com a massa dependente de r de acordo com a

expressão a seguir:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

onde $m(r) = M[r^3/(r^2 + r_0^2)^{3/2}]$, com M sendo a massa do sistema (em unidades que fazem $G=c=1$), e r_0 um parâmetro de comprimento [58]. É imediato que podemos recuperar a solução de Schwarzschild fazendo $r_0 = 0$, ou seja, a solução perde a regularidade quando este parâmetro é nulo.

Algo interessante nesta solução é que o custo da regularidade da solução é a violação das condição forte de energia. Para soluções envolvendo rotação, ocorre a violação da condição fraca de energia, independente da função usada para $m(r)$, desde que elas obedeçam a condição de que $m(r) \propto r^3$ quando $r \rightarrow 0$ [59].

Para verificarmos que essa solução realmente é regular, vamos primeiro analisar os invariantes de curvatura e aplicar a condição que foi definida nesta seção para verificar a regularidade da solução. A contração de Ricci e o escalar de Kretschmann desta solução são dados, respectivamente, por:

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{18M^2r_0^4(13r^4 - 4r^2r_0^2 + 8r_0^4)}{(r^2 + r_0^2)^7}; \quad (3.2)$$

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{12M^2(4r^8 - 12r^6r_0^2 + 47r^4r_0^4 - 4r^2r_0^6 + 8r_0^8)}{(r^2 + r_0^2)^7}. \quad (3.3)$$

Agora vamos avaliá-los na origem do sistema de coordenadas, em $r = 0$:

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{144M^2}{r_0^6}; \quad (3.4)$$

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{96M^2}{r_0^6}. \quad (3.5)$$

Logo, vemos que essas quantidades são finitas se $r_0 \neq 0$, o que caracteriza uma solução regular. O mesmo pode ser concluído se fizermos a mesma análise para o escalar de Ricci também, que é dado por:

$$R = \frac{6Mr_0^2(4r_0^2 - r^2)}{(r^2 + r_0^2)^{7/2}}. \quad (3.6)$$

Por questão de completude, podemos também verificar que as condições de energia são violadas para esta solução. Para isso, vamos determinar os termos do tensor momento-energia através da equação de Einstein. As componentes não nulas do tensor de Einstein são:

$$G^0_0 = G^1_1 = -\frac{6Mr_0^2}{(r^2 + r_0^2)^{5/2}}; \quad (3.7)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = 3Mr_0^2 \frac{(3r^2 - 2r_0^2)}{(r^2 + r_0^2)^{7/2}}. \quad (3.8)$$

Como veremos ao longo deste trabalho, é mais conveniente trabalhar com os índices desta forma, um contravariante e outro covariante (ver seção 4.2). Também veremos (na seção 4.4) que o tensor momento energia terá a forma: $T^0_0 = -\rho$, $T^1_1 = p_{\parallel}$, $T^2_2 = T^3_3 = p_{\perp}$, sendo p_{\parallel} a pressão radial do sistema, e p_{\perp} , a pressão lateral. Apesar de $T^0_0 = T^1_1$, é importante diferenciá-los na notação, pois, como vimos na seção 2.5.1, o termo T^0_0 está associado à densidade de massa-energia, enquanto que o termo T^1_1 está associado com uma pressão, que é a pressão radial, a qual será bastante discutida quando estivermos analisando os buracos de minhoca atravessáveis.

Segundo [58], esta solução é regular devido ao fato de que ela é do tipo *de Sitter* próximo da origem, região de alta densidade. A presença do núcleo *de Sitter* acaba gerando a violação da condição forte de energia [59]. Vamos constatar esta violação agora através da solução das equações de Einstein para determinarmos T^{μ}_{ν} . De acordo com a equação (2.56), as equações de Einstein são, considerando $G = c = 1$, $G^{\mu}_{\nu} = 8\pi T^{\mu}_{\nu}$. Logo, teremos:

$$\rho = \frac{3Mr_0^2}{4\pi(r^2 + r_0^2)^{5/2}}; \quad (3.9)$$

$$p_{\parallel} = -\frac{3Mr_0^2}{4\pi(r^2 + r_0^2)^{5/2}}; \quad (3.10)$$

$$p_{\perp} = 3Mr_0^2 \frac{(3r^2 - 2r_0^2)}{8\pi(r^2 + r_0^2)^{7/2}}. \quad (3.11)$$

De acordo com o que vimos na seção 2.5.2, a condição forte de energia leva a $\rho + p_{\parallel} + 2p_{\perp} \geq 0$ (o fator 2 multiplicando p_{\perp} aparece pelo fato da pressão lateral associada à T^2_2 ser a mesma da associada à T^3_3). Logo, substituindo os resultados encontrados para essas grandezas, vamos ter que:

$$\rho + p_{\parallel} + 2p_{\perp} = 6Mr_0^2 \frac{(3r^2 - 2r_0^2)}{8\pi(r^2 + r_0^2)^{7/2}}. \quad (3.12)$$

As constantes são positivas e o termo $(r^2 + r_0^2)$ também é positivo para todo r , porém o termo $(3r^2 - 2r_0^2)$ só é maior ou igual a zero se $r \geq \sqrt{2/3}r_0$. Portanto, para $r < \sqrt{2/3}r_0$, temos a violação da condição forte de energia, que ocorre exatamente na região próxima do centro, em $r = 0$, conforme foi comentado.

Pode-se verificar também a violação da condição nula de energia ao calcular $\rho + p_{\perp}$:

$$\rho + p_{\perp} = Mr_0^2 \frac{(9r^2 - 4r_0^2)}{8\pi(r^2 + r_0^2)^{7/2}}. \quad (3.13)$$

Vemos que, para $r < (2/3)r_0$, $\rho + p_{\perp} < 0$, violando, portanto, a condição nula de energia também.

3.2 Introdução à solução do wormhole de Morris-Thorne

É muito comum vermos em filmes ou histórias de ficção científica o uso de “portais” para poder fazer viagens para lugares muito distantes do nosso planeta. Uma possibilidade usada para este fim é o buraco negro. Entretanto, um buraco negro não é uma opção viável para realizar viagens interestelares. Vejamos algumas objeções importantes do seu uso para este tipo de viagem:

- 1- Se uma pessoa se aproximar do horizonte de eventos de um buraco negro, ela passará a ser atraída para o seu interior com uma aceleração relativa entre a cabeça e os pés muito forte, chamada de gravidade de maré. Podemos aproximar essa aceleração por $(10 \text{ gravidades terrestres}) \times (L/1m) \times (M/10^4 \text{ massas solares})^{-2}$. Logo, se a massa do buraco negro não for da ordem de 10^4 massas solares, o viajante certamente morreria devido à gravidade de maré (em um buraco negro supermassivo, isso poderia ser contornado pelo fato de o horizonte de eventos ser muito grande, com isso é possível entrar nele em um ponto em que a gravidade de maré será fraca, uma vez que ele está muito afastado do centro do buraco).
- 2- O buraco negro possui o chamado horizonte de eventos, que é uma fronteira na qual tudo que entra nele não pode mais retornar, ou seja, tem-se região em que tudo que está no seu interior está isolado do meio exterior. Portanto, ele não permite uma travessia de via-dupla (viagem de ida e volta), apenas uma via (de ida).

- 3- Um outro problema seria o que há no outro lado do buraco negro. As extensões analíticas das soluções de Einstein indicam que na outra extremidade do buraco negro deva existir um local com um “anti-horizonte de eventos”, no qual o que sai dele não pode mais entrar (um buraco branco, por exemplo). Porém, esses anti-horizontes são muito instáveis a qualquer pequena perturbação, como a emissão de ondas de luz o que transformaria o anti-horizonte em um horizonte de eventos fechando a passagem devido a sua instabilidade.
- 4- A métrica de Kerr para um buraco negro rotativo admite a presença de “túneis” que permitiriam uma passagem para outras regiões assintoticamente planas do espaço-tempo que poderiam ser úteis para viagens interestelares, mas isto certamente não deve existir na realidade por diversos motivos, como o fato de que essa solução não descreve com facilidade a região de dentro do horizonte de eventos, apenas a região exterior do horizonte e ainda que existam esses túneis, eles seriam também instáveis para pequenas perturbações (possuiriam os horizontes de Cauchy) e certamente se fechariam transformando-se numa singularidade se um humano tentasse atravessá-lo [16].

Concluindo, se buscamos algum tipo de espaço-tempo que permita viagens para outras galáxias, o buraco negro não é a melhor opção. Veremos a seguir um tipo de solução para as equações de Einstein que permite conexões de pontos distintos de espaço-tempo e que possibilita viagens interestelares: o *wormhole* (buraco de minhoca).

Um buraco de minhoca é uma solução das equações de Einstein que conecta duas regiões distintas de espaço-tempo. Ele pode conectar dois “universos” diferentes que sejam assintoticamente planos ou conectar duas regiões do mesmo universo, sendo que ambas as formas possuem as mesmas soluções das equações de Einstein (diferem apenas pela topologia). Com essa passagem de uma região para outra, seria possível conectar pontos extremamente distantes e encurtar essa distância, de modo a diminuir o tempo de viagem entre eles, sendo então um método alternativo para viagens interestelares rápidas. Os buracos de minhoca foram citados na literatura antes mesmo dos buracos negros [16].

A importância de se estudar a solução de um buraco de minhoca não é apenas pela possibilidade dele ser usado para viagens interestelares no futuro, mas também de forma acadêmica, pois é uma solução simples para quem está iniciando os estudos em Relatividade Geral [16].

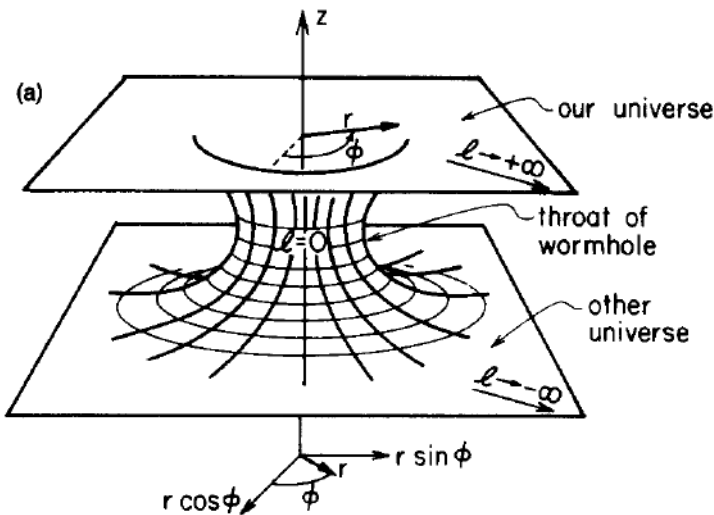


Figura 1: Buraco de minhoca ligando dois “universos” diferentes. Imagem tirada do trabalho original de Morris e Thorne, 1988.

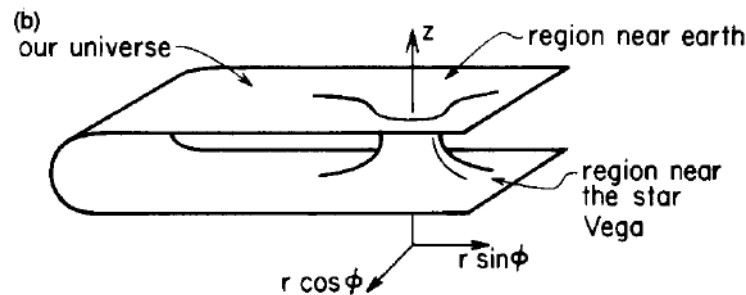


Figura 2: Buraco de minhoca ligando dois pontos do mesmo universo. Imagem retirada do artigo original de Morris e Thorne, 1988.

3.2.1 *Buraco de minhoca de Schwarzschild: não atravessável*

Um *wormhole* específico que é possível de se obter no vácuo (sem matéria e energia) é o de Schwarzschild (o vácuo aqui deve ser entendido como sendo a região de interesse onde está presente o buraco de minhoca, mas em algum ponto, por exemplo no seu centro, deve haver alguma matéria ou campo, pois se estivermos no vácuo completo, teríamos um espaço-tempo plano). Pelo teorema de Birkhoff, dada uma geometria que possua simetria esférica e que seja solução das equações no vácuo, esta geometria precisa ser, necessariamente, a de Schwarzschild [60]. Isto implica que este tipo de buraco de minhoca no vácuo é o único possível de se obter nessas condições (simetria esférica e no vácuo).

Porém, este não é uma opção viável para viagens humanas devido a três principais objeções:

- 1- A força gravitacional de maré gerado na garganta do buraco de minhoca seria muito forte e na mesma magnitude do buraco negro de Schwarzschild, ou seja, se a massa do

buraco de minhoca não for da ordem de 10^4 massas solares, o viajante certamente morrerá ao tentar atravessar a garganta do mesmo [16].

- 2- O *wormhole* de Schwarzschild é dinâmico, logo a sua garganta não é estática, ela parte de uma distância radial nula, atinge um raio máximo, conectando as regiões distintas de espaço-tempo e depois retorna a um raio nulo, em outras palavras, ela abre e fecha, de tal modo que não é possível atravessá-lo antes dela fechar, mesmo que o corpo pudesse viajar na velocidade da luz. Isto ocorre porque, apesar da métrica de Schwarzschild ser estática, a métrica nas coordenadas de Kruskal (uma extensão da métrica do espaço-tempo de Schwarzschild) está longe de ser estática, portanto, é inviável a passagem de uma “boca” à outra do buraco de minhoca sem a violação da causalidade [16, 61].
- 3- Esse tipo de *wormhole* possui o “anti-horizonte”, sendo portanto instável e tornando a travessia por ele muito mais difícil já que sua instabilidade o leva a se fechar e portanto o viajante ficaria preso dentro dele [16]. Além disso, ele também possui horizontes de eventos como veremos mais adiante.

Na próxima seção, serão definidas as condições necessárias para que um buraco de minhoca possa ter travessia humana.

3.2.2 *Condições necessárias para criar um buraco de minhoca atravessável*

Felizmente, é possível encontrar soluções exatas para *wormholes* atravessáveis e que são simples de se resolver. Entretanto, para que eles possam de fato permitirem travessia humana, é necessário impor alguns requisitos que precisam ser obedecidos:

- 1- A métrica precisa ser esfericamente simétrica e estática (independente do tempo), apenas por uma questão de simplicidade matemática.
- 2- A solução do mesmo precisa obedecer a equação de campo de Einstein.
- 3- A garganta do buraco de minhoca precisa conectar duas regiões assintoticamente planas de espaço-tempo, ou seja, regiões em que a métrica assume o comportamento plano (neste caso, do espaço-tempo de Minkowski) quando estamos a uma distância muito longa (no infinito), segundo [49].
- 4- Não pode haver um horizonte de eventos, como ocorre com buracos negros.

- 5- As forças gravitacionais de maré precisam ser muito pequenas para garantir que o viajante sobreviva.
- 6- O tempo próprio da viagem através do buraco de minhoca precisa ser relativamente pequeno (menos de 1 ano, por exemplo), assim como o tempo da viagem para quem está fora dele.
- 7- A matéria e os campos que devem gerar o buraco de minhoca no espaço-tempo devem ser fisicamente razoáveis com relação ao tensor momento-energia. Isto implica que o tipo de matéria ou de campo que estará ao longo do buraco deve respeitar as leis da física como as condições de energia, logo, deve-se evitar qualquer violação de algum princípio ou das condições de energia para $T_{\mu\nu}$.
- 8- A solução do *wormhole* deve ser estável sobre qualquer perturbação.
- 9- O buraco de minhoca deve ser possível de ser criado, isto é, a quantidade de matéria necessária deve ser menor que a presente no Universo, assim como o tempo de montagem deve ser menor que a idade do mesmo. Aspectos de gravitação quântica sugerem que é possível a sua construção [16].

Caso todos os requisitos anteriores sejam cumpridos, teremos um buraco de minhoca em que viagens interestelares serão possíveis de serem realizadas. É interessante verificar que as 4 primeiras condições são inerentes às restrições básicas que o buraco de minhoca deve obedecer, independente de ele ser atravessável ou não, embora a primeira possa ser negligenciada se quisermos uma solução mais geral. As condições 5 e 6 estão associadas à possibilidade de travessia humana, ou seja, são condições dispensáveis de uma forma geral, porém necessária para que um humano possa atravessar o buraco de minhoca por uma questão fisiológica (são os critérios de usabilidade). Por fim, a partir do critério 7, temos as condições de construção do buraco de minhoca, ou seja, o tipo de matéria que deve ser usado para construí-lo, que deve respeitar as leis da Física, e quais características essa construção deve seguir [16].

Vamos agora abordar os cálculos matemáticos para a solução de um buraco de minhoca atravessável.

3.3 Solução matemática de um buraco de minhoca atravessável

Todo o raciocínio utilizado daqui por diante segue de [16], e sempre que possível serão adicionadas outras referências. Para começar a encontrar a solução do wormhole e discutir

suas propriedades, precisamos encontrar a métrica do seu espaço-tempo. Como sabe-se que a métrica possui simetria esférica e é independente do tempo, pode-se usar as coordenadas esféricas ($x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$). Como foi visto em (2.3), esta métrica deve ser da forma expressa em (2.19), mais especificamente como:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{(1-b/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.14)$$

em que a função Φ é dependente apenas de r , e chamada de função “redshift”, pois como veremos mais adiante, ela está diretamente ligada ao efeito Doppler com relação ao desvio para o vermelho, e a função $b(r)$ é chamada de função “shape”, pois também veremos que ela está diretamente ligada à forma geométrica do buraco de minhoca.

Agora que a métrica foi obtida de uma forma geral, podemos usá-la para resolver a equação de Einstein. Deve-se, antes, encontrar os principais tensores que fazem parte desta equação.

3.3.1 Curvatura do buraco de minhoca

Para determinarmos as soluções das funções arbitrárias da métrica e poder estudar as propriedades do espaço-tempo deste buraco de minhoca, é necessário calcular as grandezas vistas no capítulo (2) para que a equação de Einstein possa ser resolvida. O primeiro tensor a ser determinado é o tensor de curvatura de Riemann definido em (2.44).

Como já temos a métrica, dada por $g_{\mu\nu} = \text{diag}[-e^{2\Phi}, (1-b/r)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2\theta]$, a métrica inversa será dada por $g^{\mu\nu} = \text{diag}[-e^{-2\Phi}, (1-b/r), r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2}\theta]$, conforme vimos em (2.3). Conhecidas a métrica e sua inversa, é possível determinar todos os símbolos de Christoffel e, conseqüentemente, todas as componentes do tensor de Riemann. Para exemplificar, podemos determinar o termo $R^0_{101} = \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 \Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{\alpha 0} \Gamma^\alpha_{11} - \Gamma^0_{\alpha 1} \Gamma^\alpha_{10}$. Neste trabalho, a componente temporal (t) será representada por 0, a radial (r), por 1, a polar (θ), por 2, e a axial (ϕ), por 3. O símbolo de Christoffel Γ^0_{10} , por exemplo, é:

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2} g^{0\rho} (\partial_1 g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho 1} - \partial_\rho g_{10}) = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{10}) = \Phi' = \frac{d\Phi}{dr}. \quad (3.15)$$

Note que, da equação (2.28), $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$. Logo, $\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \Phi'$. Vamos calcular também o termo Γ^1_{11} , para mostrar um outro exemplo:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(2\partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2r^2}(1-b/r)\frac{(b'r-b)}{(1-b/r)^2} = \frac{1}{2r}\frac{(b'r-b)}{(r-b)}. \quad (3.16)$$

Seguindo esse raciocínio, pode-se determinar todas as conexões de Christoffel não nulas que serão úteis para calcular R_{101}^0 , que são exatamente os que determinamos nos dois exemplos anteriores:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{01}^0 = \Phi'(r); \Gamma_{11}^1 = \frac{(b'r-b)}{2r(r-b)}. \quad (3.17)$$

Logo:

$$R_{101}^0 = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 - (\Gamma_{01}^0)^2 \quad (3.18)$$

$$R_{101}^0 = -\Phi'' + (b'r-b)[2r(r-b)]^{-1}\Phi' - (\Phi')^2. \quad (3.19)$$

Outras duas componentes do tensor de Riemann são, para exemplificar:

$$R_{313}^1 = (b'r-b)\text{sen}^2\theta/2r; R_{323}^2 = (b/r)\text{sen}^2\theta. \quad (3.20)$$

A base de vetores que está sendo utilizada é tal que $\Delta\vec{s} = c\Delta t\vec{e}_0 + \Delta r\vec{e}_1 + \Delta\theta\vec{e}_2 + \Delta\phi\vec{e}_3$. Mas podemos simplificar os cálculos utilizando uma base ortonormal de vetores que é a do “referencial próprio” ou referencial local. Quando tem-se uma métrica global curva, pode-se escrevê-la como somas e diferenças de termos quadráticos que estão associados a observadores em um referencial inercial local, ou seja, pode-se dividir um espaço curvo como vários referenciais inerciais (planos) localizados num dado ponto, e quando somamos todos os diferentes referenciais inerciais locais, tem-se o espaço global curvo. Esse processo é denominado de “tetradas” ortonormais [62]. Basicamente, o que temos é que qualquer métrica global pode ser escrita localmente como a métrica de Minkowski, e quando considera-se o conjunto de todos os referenciais locais, obtêm-se novamente a métrica global. As “tetradas” vão relacionar a base ortonormal com a base do espaço curvo, a qual já foi definida em $\Delta\vec{s}$. Definimos, portanto, as seguintes bases:

$$\hat{e}_0 = e^{-\Phi}\vec{e}_0; \hat{e}_1 = (1-b/r)^{1/2}\vec{e}_1; \hat{e}_2 = r^{-1}\vec{e}_2; \hat{e}_3 = r^{-1}\text{sen}^{-1}\theta\vec{e}_3. \quad (3.21)$$

Pode-se verificar que essa base de fato é ortonormal analisando a métrica definida em (3.14). Vejamos:

$$ds^2 = c^2 dt^2 \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 + dr^2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + d\theta^2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + d\phi^2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3. \quad (3.22)$$

Comparando com (3.14), temos que:

$$\|\vec{e}_0\| = e^\Phi; \|\vec{e}_1\| = (1 - b/r)^{-1/2}; \|\vec{e}_2\| = r; \|\vec{e}_3\| = r \sin\theta \quad (3.23)$$

Portanto, os vetores ortonormais serão o próprio vetor de base dividido pela sua norma (versor), resultando exatamente em (3.21).

Nesta nova base, a métrica passa a ter a forma da métrica de Minkowski da Relatividade Restrita:

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}_{\hat{\mu}} \cdot \hat{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]. \quad (3.24)$$

Com essa mudança, as componentes do tensor de Riemann ficam muito mais simples:

$$R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}}^{\hat{0}} = -R_{\hat{1}\hat{1}\hat{0}}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{0}\hat{1}}^{\hat{1}} = -R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}}^{\hat{1}} = (1 - b/r) \{-\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2\} \quad (3.25)$$

$$R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}}^{\hat{0}} = -R_{\hat{2}\hat{2}\hat{0}}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{0}\hat{2}}^{\hat{2}} = -R_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}}^{\hat{2}} = -(1 - b/r) \Phi' / r \quad (3.26)$$

$$R_{\hat{3}\hat{0}\hat{3}}^{\hat{0}} = -R_{\hat{3}\hat{3}\hat{0}}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{0}\hat{3}}^{\hat{3}} = -R_{\hat{0}\hat{3}\hat{0}}^{\hat{3}} = -(1 - b/r) \Phi' / r \quad (3.27)$$

$$R_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}}^{\hat{1}} = -R_{\hat{2}\hat{2}\hat{1}}^{\hat{1}} = R_{\hat{1}\hat{1}\hat{2}}^{\hat{2}} = -R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}}^{\hat{2}} = (b'r - b) / 2r^3 \quad (3.28)$$

$$R_{\hat{3}\hat{1}\hat{3}}^{\hat{1}} = -R_{\hat{3}\hat{3}\hat{1}}^{\hat{1}} = R_{\hat{1}\hat{1}\hat{3}}^{\hat{3}} = -R_{\hat{1}\hat{3}\hat{1}}^{\hat{3}} = (b'r - b) / 2r^3 \quad (3.29)$$

$$R_{\hat{3}\hat{2}\hat{3}}^{\hat{2}} = -R_{\hat{3}\hat{3}\hat{2}}^{\hat{2}} = R_{\hat{2}\hat{2}\hat{3}}^{\hat{3}} = -R_{\hat{2}\hat{3}\hat{2}}^{\hat{3}} = b/r^3. \quad (3.30)$$

onde os índices $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, correspondem as coordenadas \hat{t} , \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$, respectivamente. O uso do

“chapéu” nas coordenadas é para indicar que a base usada é a do referencial local.

Usando a definição do tensor de Ricci em (2.46) e usando as coordenadas do referencial local, pode-se calcular suas componentes nesta base:

$$R_{\hat{0}\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}}^{\hat{0}} + R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}}^{\hat{1}} + R_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}}^{\hat{2}} + R_{\hat{0}\hat{3}\hat{0}}^{\hat{3}} = 2(1 - b/r)\Phi'/r - (1 - b/r)\{-\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1}\Phi' - (\Phi')^2\}; \quad (3.31)$$

$$R_{\hat{1}\hat{1}} = (b'r - b)/r + (1 - b/r)\{-\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1}\Phi' - (\Phi')^2\}; \quad (3.32)$$

$$R_{\hat{2}\hat{2}} = R_{\hat{3}\hat{3}} = -(1 - b/r)\Phi'/r + (b'r - b)/2r^3. \quad (3.33)$$

O escalar de Ricci pode ser calculado agora a partir destas componentes do tensor de Ricci e da métrica inversa $g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ (que é igual a $\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$):

$$R = \eta^{\hat{0}\hat{0}}R_{\hat{0}\hat{0}} + \eta^{\hat{1}\hat{1}}R_{\hat{1}\hat{1}} + \eta^{\hat{2}\hat{2}}R_{\hat{2}\hat{2}} + \eta^{\hat{3}\hat{3}}R_{\hat{3}\hat{3}} = -4(1 - b/r)\Phi'/r + 2b'/r^2 + 2(1 - b/r)\{-\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1}\Phi' - (\Phi')^2\}, \quad (3.34)$$

onde $\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$, que pode ser deduzido de $\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\lambda}} = \delta_{\hat{\lambda}}^{\hat{\mu}}$.

Agora que já temos todos valores das componentes do tensor de Ricci e também calculamos o escalar de Ricci, podemos determinar o tensor de Einstein.

Vamos seguir o mesmo procedimento anterior para determinar o tensor de Einstein, ou seja, usar a sua definição nas coordenadas do referencial local. Logo, pode-se escrevê-lo da seguinte forma:

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}R. \quad (3.35)$$

Para exemplificar, será determinado a componente $G_{\hat{0}\hat{0}}$:

$$\begin{aligned} G_{\hat{0}\hat{0}} &= R_{\hat{0}\hat{0}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{0}\hat{0}}R = 2(1 - b/r)\Phi'/r - (1 - b/r)\{-\Phi'' - (\Phi')^2 + \\ &\quad (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1}\Phi'\} - 2(1 - b/r)\Phi'/r + b'/r^2 + \\ &\quad (1 - b/r)\{-\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1}\Phi' - (\Phi')^2\} = b'/r^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Seguindo este raciocínio, temos as outras componentes:

$$G_{\hat{1}\hat{1}} = -b/r^3 + 2(1 - b/r)\Phi'/r; \quad (3.37)$$

$$G_{\hat{2}\hat{2}} = G_{\hat{3}\hat{3}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{(b'r - b)}{2r^2(r - b)}\right). \quad (3.38)$$

Agora está faltando apenas determinar o tensor momento-energia para finalmente chegarmos nas equações de campo de Einstein.

3.3.2 Equação de Einstein para o buraco de minhoca

Já vimos, pelo teorema de Birkhoff, que se a métrica possui simetria esférica, então a única solução para o vácuo desta é a de Schwarzschild, porém já foi visto que o buraco de minhoca de Schwarzschild não é atravessável. Isto implica que, para haver um *wormhole* atravessável, precisa haver matéria ou campos não nulos ao longo do buraco de minhoca.

Portanto, é preciso que o tensor momento-energia seja não nulo. Como este é proporcional ao tensor de Einstein, pela equação de campo de Einstein, só existem 4 componentes do tensor momento-energia não nulos, tais que os índices são iguais, e temos que ter $T_{\hat{2}\hat{2}} = T_{\hat{3}\hat{3}}$, já que o mesmo vale para $G_{\hat{2}\hat{2}}$ e $G_{\hat{3}\hat{3}}$.

Devido ao fato de estarmos usando a base ortonormal onde o observador é estático, as componentes do tensor momento-energia serão simplesmente:

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho(r)c^2; T_{\hat{1}\hat{1}} = -\tau(r); T_{\hat{2}\hat{2}} = T_{\hat{3}\hat{3}} = p(r) \quad (3.39)$$

onde $\rho(r)c^2$ é comumente chamado de densidade de massa-energia ou simplesmente densidade de energia do sistema, $\tau(r)$ é a tensão exercida na direção radial (no sentido negativo da coordenada), e $p(r)$ é a pressão medida nas direções laterais (que são ortogonais à radial). Devido à simetria esférica as outras componentes desaparecem [1].

No caso de um fluido perfeito, por exemplo, teríamos $-\tau = p$, pois, como foi visto em (2.5), os termos de tensão são todos iguais, e são exatamente os termos da diagonal principal da segunda linha em diante (o primeiro é precisamente a densidade de massa-energia), e no caso de um campo elétrico radial com intensidade $E(r)$, teríamos $\rho c^2 = \tau = p = E^2/8\pi$. Vamos agora relacionar todos esses resultados na equação de Einstein.

Seguindo as coordenadas das “tetradas”, pode-se encontrar a solução da equação de Einstein (2.56) com os tensores definidos anteriormente. Para a parte temporal, o resultado da equação de Einstein é bem simples:

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\hat{0}\hat{0}} \rightarrow b'/r^2 = 8\pi Gc^{-4} \rho c^2 \rightarrow b' = 8\pi Gc^{-2} r^2 \rho. \quad (3.40)$$

Usando a equação de Einstein para \hat{r} , e para $\hat{\theta}$ ou $\hat{\phi}$, já que as duas serão iguais, pode-se determinar os seguintes resultados respectivamente:

$$\Phi' = (-8\pi Gc^{-4} \tau r^3 + b)/[2r(r-b)] \quad (3.41)$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - 2(p + \tau)/r. \quad (3.42)$$

Para encontrar esta última, deve-se usar a equação (3.41) para eliminar Φ' , que aparece na componente do tensor de Einstein $G_{\hat{2}\hat{2}}$ ou $G_{\hat{3}\hat{3}}$, bastando derivá-la em relação a r . Também deve-se eliminar o termo $(\Phi')^2$, que aparece nas mesmas componentes, substituindo Φ' pelo resultado de (3.41). Após esses procedimentos, chega-se a:

$$\Phi'' + (\Phi')^2 = \frac{[b' - 8\pi Gc^{-4}(\tau' r^3 + 3\tau r^2)]}{2r(r-b)} + \frac{(b - 8\pi Gc^{-4} \tau r^3)(3b + 2rb' - 4r - 8\pi Gc^{-4} \tau r^3)}{[2r(r-b)]^2}. \quad (3.43)$$

Substituindo o resultado de (3.43) em (3.25), acha-se o resultado:

$$G_{\hat{2}\hat{2}} = \frac{-8\pi Gc^{-4}}{2r^2} (\tau' r^3 + 3\tau r^2) + \frac{\Phi'}{2r^2} (b'r - 8\pi Gc^{-4} \tau r^3) + \frac{8\pi Gc^{-4} \tau}{2}. \quad (3.44)$$

Substituindo na equação de Einstein para $\hat{\theta}$, isto é, $G_{\hat{2}\hat{2}} = 8\pi Gc^{-4} T_{\hat{2}\hat{2}}$, obtêm-se:

$$p = \frac{-(\tau' r^3 + 3\tau r^2)}{2r^2} + \frac{\Phi'}{2r^2} (\rho c^2 r^3 - \tau r^3) + \frac{\tau}{2}. \quad (3.45)$$

Por fim, basta isolar o termo τ' para obter a equação (3.42).

Pode-se mostrar que a última equação é simplesmente uma equação de equilíbrio hidrostático de um fluido passando pelo buraco de minhoca. Isso mostra uma importante relação entre as equações de campo e o equilíbrio de forças do material que está presente no buraco de minhoca devido ao gradiente de tensão radial do mesmo, além das pressões laterais e da atração gravitacional. E tudo isso, na realidade, está associado à lei da conservação de energia e momento, que leva a uma conservação automática da fonte de matéria ou campo, sendo uma

necessidade dinâmica para o sistema (para mais informações, consultar [60]).

Um problema que nos deparamos é que temos 3 equações de campo, porém temos 5 variáveis dependentes de r : b , Φ , ρ , τ , e p . Para resolver este problema, uma forma seria especificar o tipo de matéria ou campo que gera o buraco de minhoca para encontrarmos as equações de estado da tensão radial e das pressões laterais em função da densidade ρ , ou seja, teremos que derivar 2 equações para $\tau(\rho)$ e $p(\rho)$. Assim, passa-se a ter 5 equações (as 3 que já tínhamos mais as outras 2 equações de estado) e 5 variáveis.

Um exemplo é a de uma estrela de nêutrons, onde teríamos $-\tau(\rho) = p(\rho) =$ (equação de estado da teoria nuclear) (ver [60]). Outro exemplo é o de um buraco-negro com carga elétrica de tal forma que o campo elétrico é radial, dado por $(Q/r^2)\hat{e}_1$. Como vimos, neste caso teremos $\tau = p = \rho c^2$, como pode ser visto também em [60].

Entretanto, a estratégia que será usada para resolver este problema será diferente. Para que o buraco de minhoca atenda às especificações descritas anteriormente a fim de garantir que ele seja atravessável, podemos impor condições às funções $b(r)$ e $\Phi(r)$ e analisar o tensor momento-energia de modo que ele também seja consistente com a natureza (fisicamente razoável). Logo, é interessante reescrever as equações de campo das seguintes formas:

$$\rho = \frac{c^2}{8\pi G r^2} b' \quad (3.46)$$

$$\tau = \frac{c^4}{8\pi G} [b/r - 2(r-b)\Phi'] \quad (3.47)$$

$$p = \frac{r}{2} [(\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau, \quad (3.48)$$

pois assim conseguimos escrever exatamente as funções que precisam ser determinadas de uma maneira mais direta.

Desta forma, ajustando a função $b(r)$, pode-se determinar ρ na equação (3.46), ajustando também a função $\Phi(r)$, encontramos τ na equação (3.47), e, finalmente, usando todos esses resultados, podemos determinar $p(r)$, na equação (3.48). Resumindo, em vez de buscarmos equações de estado para τ e para p , o que será feito é ajustar as próprias funções que fazem parte da métrica de acordo com a geometria do buraco de minhoca que procuramos, sempre levando em conta os critérios definidos em (3.2.2), e partir delas determinar as componentes do tensor momento-energia, também levando em conta as mesmas condições descritas em (3.2.2). Logo, o trabalho aqui será o oposto do usual, que seria, dado o tensor momento-energia, determinar a métrica. No nosso caso, teremos as informações da métrica para com elas determinar o tensor

momento-energia.

3.4 Análise da solução

3.4.1 Geometria espacial do buraco de minhoca de Morris-Thorne

Temos interesse em determinar a forma geométrica do *wormhole* no espaço-tempo. Para isso, podemos considerar a princípio apenas a geometria espacial deste, ou seja, analisando uma solução estática. Como a métrica é esfericamente simétrica, podemos fazer $\theta = \pi/2$ sem perda significativa de informação e considerar apenas a fatia equatorial do espaço. Com isso, determina-se o chamado diagrama de mergulho. Com essas condições, de (3.14), vamos ter:

$$ds^2 = (1 - b/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.49)$$

A ideia agora é inserir essa fatia do *wormhole* em um espaço euclidiano, isto é, usar coordenadas euclidianas para representar essa fatia bidimensional do espaço do buraco de minhoca. Para representar uma superfície curva é necessário usar um espaço euclidiano de 3 dimensões, ou seja, vamos precisar de um sistema de 3 coordenadas que consiga reproduzir essa superfície. Para isso, utilizaremos as coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Como estamos considerando uma seção equatorial da superfície curva, pode-se fazer uma correspondência das coordenadas r e ϕ das coordenadas do buraco de minhoca com as coordenadas r e ϕ da fatia equatorial do espaço euclidiano, ou seja, em $z = 0$, entretanto, é necessário esticar esta fatia para fora do plano em que $z = 0$, já que a superfície do *wormhole* é curva, considerando a simetria axial do sistema. Logo, é preciso considerar a variação (deformação) de z fora do plano xy , de forma que ele dependa apenas da coordenada r , ou seja, $z = z(r)$ [60]. Desta forma temos:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.50)$$

que, devido à simetria axial, podemos reescrever (3.50) como:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.51)$$

Como a coordenada r da fatia equatorial coincide com a que estamos usando no espaço euclidiano tridimensional, assim como a coordenada ϕ , podemos comparar (3.49) com (3.51):

$$1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = (1 - b/r)^{-1} \quad (3.52)$$

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (3.53)$$

A partir deste resultado, podemos determinar a forma como z varia com a distância r integrando a equação (3.53), determinando a forma do buraco de minhoca. A função $b(r)$ determina, portanto, a forma (geometria) espacial do buraco de minhoca, sendo por isso chamada de função *shape*. Algumas observações devem ser feitas: os sinais de mais ou menos indicam que existe uma parte da geometria em que sua representação por z é crescente e outra que é decrescente e elas não se misturam, ou seja, devemos dividir o buraco em duas regiões: uma região superior, e outra inferior, que, como veremos adiante, serão distinguidas pelo sinal da coordenada local de distância l . Outro ponto é que, como iremos detalhar na seção (3.4.2), se $b = r$, a derivada diverge, o que significa que a reta tangente à curva $z(r)$ será vertical, implicando em uma descontinuidade neste ponto que será muito importante para definirmos a chamada condição de *flaring out*.

3.4.2 Buraco de minhoca geral de Morris-Thorne

Todo buraco de minhoca possui um raio mínimo b_0 tal que $r = b = b_0$. Este ponto é chamado de “garganta” do buraco de minhoca. Neste ponto, a inclinação de uma reta tangente é vertical, logo a derivada diverge.

Para evitar algumas divergências que ocorrem quando trabalhamos com a coordenada r , é interessante definir a coordenada radial no referencial local, l , através do seu diferencial:

$$dl = \pm [1 - b(r)/r]^{-1/2} dr. \quad (3.54)$$

Este resultado está relacionado com as “tetradas”, pois foi visto que quando vamos trabalhar no referencial local, a métrica passa a ter a mesma forma de Minkowski localmente, logo, o termo $(1 - b/r)^{-1} dr^2$, da métrica definida em (3.14), corresponde, no referencial local, a dl^2 , simplesmente (veja mais detalhes no Apêndice A).

A coordenada l do referencial estático é dada pela integração de (3.54):

$$l = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{[1 - b(r)/r]^{1/2}}. \quad (3.55)$$

Precisamos que l seja finito através do espaço-tempo, conseqüentemente o termo do integrando não pode divergir, o que nos leva a impor a seguinte condição:

$$1 - b/r \geq 0 \rightarrow b(r) \leq r \quad (3.56)$$

Como as duas regiões de espaço-tempo devem ser assintoticamente planas, ou seja, $dz/dr \rightarrow 0$, isto implica em:

$$b/r \rightarrow 0, \text{ quando } l \rightarrow \pm\infty, \quad (3.57)$$

além de que a função *redshift* deve tender a zero.

Dois resultados importantes que podemos deduzir para analisar o comportamento de $z(r)$ são as relações de z e r com l por meio de suas derivadas em relação a l , ou seja, este é o comportamento de z em relação ao referencial local:

$$\frac{dz}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b}{r}}; \frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \quad (3.58)$$

A segunda relação segue diretamente de (3.54) substituindo B por $b(r)$ e a primeira é obtida pela regra da cadeia, visto que $dz/dl = (dz/dr)(dr/dl)$. Podemos usar estes resultados para uma análise gráfica de $z(l)$, como mostra a figura a seguir.

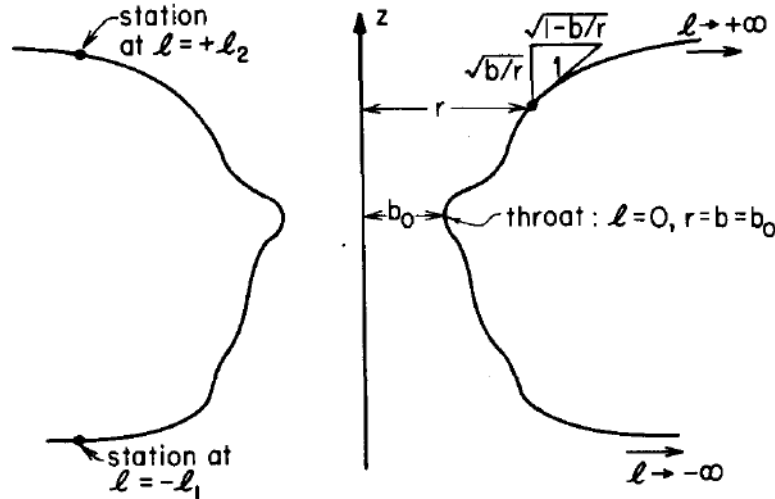


Figura 3: Geometria espacial do buraco de minhoca geral com a coordenada “ z ” em função de “ r ” e “ l ”. Fonte: Morris e Thorne, 1988.

Como exemplo, podemos considerar novamente o buraco de minhoca de Schwarzschild, apenas para visualizarmos estes resultados de forma analítica.

Para este caso, deve-se considerar o buraco de minhoca no vácuo e podemos fazer $b = B$, onde B é uma constante. Além disso, devemos considerar a solução em uma região de vácuo, ou seja, devemos ter $\rho = \tau = p = 0$. Com isso, usando as equações (3.40) e (3.41),

teremos:

$$b' = 0 \rightarrow b = B = \text{constante}; \quad (3.59)$$

$$\Phi' = \frac{B}{2r(r-B)} \rightarrow \Phi = \frac{B}{2} \int \frac{dr}{r(r-B)} = \frac{1}{2} \ln(1 - B/r). \quad (3.60)$$

Substituindo esses valores em (3.14), obtêm-se:

$$ds^2 = -(1 - B/r)c^2 dt^2 + (1 - B/r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.61)$$

Observe que esta é exatamente a solução de Schwarzschild, desde que $B = 2GM/c^2$. Também teremos a presença de um horizonte de eventos em $r = B$. Usando a expressão anterior para dz/dr e integrando-a, temos que:

$$z(r) = \pm 2B(r/B - 1)^{1/2}. \quad (3.62)$$

Os sinais de mais ou menos indicam que z possui dois comportamentos distintos, um acima do plano $z=0$, e outro abaixo deste. Desta forma, podemos definir duas regiões, o “universo de cima” e o “universo de baixo”. Isso porque se um viajante tentasse atravessá-lo, embora este buraco de minhoca não seja atravessável, ele teria que entrar por uma das regiões para chegar à outra, por isso é importante distinguir bem essas duas regiões.

Podemos mostrar que dz/dr diverge em $r = B$, isto é, $dz/dr \rightarrow \infty$. A verificação é direta:

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=B} = \lim_{r \rightarrow B} \left(\frac{r}{B} - 1 \right)^{-1/2} \rightarrow \infty \quad (3.63)$$

Se usássemos o sinal de “-”, teríamos como resultado da derivada $-\infty$, ou seja, ela continuaria sendo vertical e ainda vemos uma descontinuidade abrupta de $+\infty$ para $-\infty$.

Usando agora a coordenada do referencial local definida em (3.55), teremos:

$$l = \pm \int \frac{dr}{[1 - B/r]^{1/2}} = \pm [\sqrt{r(r-B)} + B \ln(\sqrt{r/B} + \sqrt{r/B - 1})]. \quad (3.64)$$

Esta integral pode ser resolvida reescrevendo o integrando por $[r/(r-B)]^{1/2}$ e fazendo a mudança de variável $r = B \sec^2 \alpha$, o que resultará numa integral de $\sec^3 \alpha$ que pode ser resolvida por inte-

gral por partes.

É fácil verificar que no limite em que r tende ao infinito e, conseqüentemente, $l \rightarrow \pm\infty$, $dz/dr \rightarrow 0$. Isto implica que no infinito a curvatura tende a se anular e o espaço tende a ficar plano, já que a derivada ir à zero implica que a curva tende a um máximo, e portanto ela deve se tornar cada vez mais “suave” à medida que r cresce indefinidamente. Isto era exatamente o esperado, pois precisamos de um espaço assintoticamente plano.

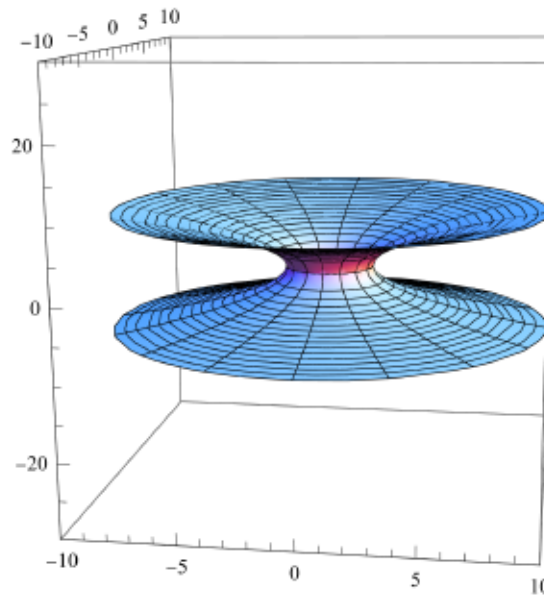


Figura 4: Geometria espacial do buraco de minhoca de Schwarzschild com $B=2$. Fonte: Nogueira, 2022.

3.4.3 Ausência de horizontes de eventos

Com o advento da TRG, é possível obter resultados em que determinadas regiões permitem a entrada de um corpo, mas não permitem sua saída, regiões essas denominadas de horizontes de eventos. Uma característica interessante é que essas regiões não foram previstas por Newton e a Lei da Gravitação Universal não é capaz de prevê-las corretamente. Uma explicação para isto é que a teoria de Newton é linear com relação à determinação da gravidade, pois ela depende diretamente da massa da partícula que cria o campo, ou seja, dobrando-se a massa, dobra-se o campo. Entretanto, como a Relatividade Geral não é linear, a relação entre a matéria e a gravidade não é tão simples, até porque não só a matéria curva o espaço-tempo, mas a energia também. Assim, devemos levar em conta outros fatores além da massa, como por exemplo, a pressão interna de uma estrela. Logo, uma teoria não linear leva a uma geometria mais complexa e efeitos inesperados e radicais, como é o caso do horizonte de eventos [62]. É

importante ressaltar que algumas soluções mais básicas da RG podem ser lineares com relação à massa como é o caso da solução de Schwarzschild, entretanto a equação de Einstein de uma forma geral é uma equação não-linear e apenas considerando simetrias na métrica, como é o caso da solução mencionada, é que podemos resolvê-la analiticamente, porém a estrutura da equação na qual ela é determinada não simples como na solução Newtoniana.

Em qualquer espaço-tempo assintoticamente plano e estático, é fácil identificar um horizonte de eventos, uma superfície não-singular do espaço-tempo tal que $g_{00} = 0$, ou seja, o tempo-próprio desaparece para uma coordenada finita de tempo. Como pode ser visto em [62], na região em que ocorre o horizonte de eventos, o cone de luz está com uma das suas retas exatamente sobre a delimitação do horizonte, sendo portanto uma região em que apenas a luz poderá estar sobre ela, e o cone é aberto apenas para dentro da superfície do horizonte, logo, para sair dele, seria necessário violar a causalidade uma vez que eventos fora do cone, do tipo espaço, não são causais.

No nosso caso, $g_{00} = -e^{2\Phi}$. Logo, para que não haja horizontes, é preciso impor que Φ seja finito para todo r , pois neste caso, teremos a garantia de que $e^{2\Phi}$ não será nula.

3.4.4 Tempo de travessia e gravidade de maré

Vamos supor que uma nave espacial precisa sair de uma estação localizada em $l = -l_1$ e precisa chegar em outra estação em $l = +l_2$, conforme a figura anterior. O sinal de menos em l_1 indica que a região do buraco de minhoca é a inferior, que definimos como o “universo de baixo”. O sinal de positivo em l_2 indica que a estação está na região superior do *wormhole*, ou seja, cada estação está em lados opostos do buraco, por exemplo, uma estação pode estar próxima da Terra e outra numa outra galáxia. Suponha ainda que $v(r)$ seja a velocidade da nave medida por um observador estático e que a nave estará em repouso nas estações. Assim, podemos fazer as definições:

$$v = 0, \text{ se } l = -l_1 \text{ ou } l = l_2 \quad (3.65)$$

$$v > 0, \text{ se } -l_1 < l < +l_2 \quad (3.66)$$

No referencial local podemos definir v da seguinte forma:

$$v(r) = \frac{dl}{e^{\Phi} dt} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} e^{\Phi} dt} \quad (3.67)$$

Usando as coordenadas do referencial local $e^\Phi dt$ e dl , pode-se fazer a seguinte manipulação:

$$ds^2 = -c^2 d\tau_T^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + dl^2 = e^{2\Phi} dt^2 (v^2 - c^2), \quad (3.68)$$

onde τ_T é o tempo próprio do viajante e usou-se a expressão (3.67) para dl . Manipulando o termo entre parênteses:

$$-c^2 d\tau_T^2 = -c^2 \gamma^{-2} e^{2\Phi} dt^2 \rightarrow \gamma d\tau_T = e^\Phi dt, \quad (3.69)$$

onde $\gamma \equiv [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$. Agora, podemos substituir $e^\Phi dt$, determinado em (3.69), em (3.67) para encontrar o seguinte resultado:

$$\gamma v = \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} d\tau_T}. \quad (3.70)$$

Desejamos também que os efeitos gravitacionais nas estações sejam bem pequenos, isto é, que as estações estejam distantes o suficiente do buraco de minhoca de tal forma que a atração gravitacional sobre elas seja próxima da atração gravitacional da Terra. Portanto, precisamos impor 3 condições básicas:

- 1- O espaço-tempo nas estações deve ser aproximadamente plano, ou seja, $b/r \ll 1$.
- 2- O *redshift* gravitacional deve ser pequeno, ou seja, a variação do comprimento de onda de um raio de luz devido ao efeito Doppler deve ser muito pequena. Segue de [60] que

$$E = |g_{00}|^{1/2} E_{local} = \text{constante}, \quad (3.71)$$

em que E é a energia num ponto distante (no “infinito”), e E_{local} é a energia medida por um observador local, inercial. No caso de um raio de luz, sabe-se que $E_{local} = h\nu_{local} = hc/\lambda_{local}$. Desta forma, como essa expressão se conserva devido à lei de conservação da energia, podemos comparar suas energias de acordo com (3.71). Considerando um referencial na estação e outro num ponto bem distante, de tal forma que seu referencial seja Minkowskiano, teremos que $|g_{00}|^{1/2} = e^\Phi$, na estação, e $|g_{00}|^{1/2} = |\eta_{00}|^{1/2} = 1$, no referencial no “infinito”. Definindo λ o comprimento de onda local na estação, e λ' o comprimento de onda no “infinito”, tem-se:

$$e^\Phi \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} \rightarrow \lambda' = e^{-\Phi} \lambda. \quad (3.72)$$

Desta forma, definindo o *redshift* por $(\lambda' - \lambda)/\lambda = \Delta\lambda/\lambda$, obtemos:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = e^{-\Phi} - 1. \quad (3.73)$$

Como queremos que esse valor seja bem pequeno, podemos considerar a expansão da série de Taylor para a exponencial só até primeira ordem, tendo como resultado o seguinte: $e^{-\Phi} - 1 \approx \lambda - \Phi - \lambda \approx -\Phi \ll 1$.

- 3- A “aceleração da gravidade” nas estações deve ser da ordem da gravidade da Terra $g_{Terra} = 9,8 \text{ m/s}^2$. Será seguido o raciocínio de [62] que foi desenvolvido para a métrica de Schwarzschild para encontrar a gravidade local, porém este será adaptado para a métrica definida em (3.14). Primeiro, temos que, no referencial local, pode-se medir a gravidade local de um corpo inicialmente em repouso aproximadamente por:

$$\Delta l \approx -\frac{1}{2}g_{local}\Delta t_{local}^2, \quad (3.74)$$

onde já vimos que $dl = (1 - b/r)^{-1/2}dr$ (pode-se considerar apenas o sinal positivo de dl para exemplificar), o que nos leva a $\Delta l \approx (1 - b/r)^{-1/2}\Delta r$, e $dt_{local} = e^{\Phi}dt$, ou seja, $\Delta t_{local} \approx e^{\Phi}\Delta t$. Podemos supor essa fórmula pelo próprio PE, pois vimos que no referencial local, pode-se supor que a gravidade é equivalente a referencial acelerado uniformemente, portanto a fórmula Newtoniana para a aceleração, que é o caso de (3.74), é uma boa aproximação para este caso. Também vimos no item anterior que $E = e^{\Phi}E_{local}$, mas também é possível definir a energia por:

$$\frac{E}{mc^2} = e^{2\Phi} \frac{dt}{d\tau}, \quad (3.75)$$

onde m é a massa do corpo cuja energia é E . Da Relatividade Restrita, temos que $E_{local} = \gamma_{local}mc^2$. Como a partícula está inicialmente em repouso, $\gamma_{local} = 1$, o que implica em $E = e^{\Phi(r_0)}mc^2$, onde r_0 é a distância radial inicial do corpo. Substituindo este valor para a energia em (3.75):

$$e^{\Phi(r_0)}d\tau = e^{2\Phi(r)}dt \quad (3.76)$$

que leva a $d\tau^2 = e^{-2\Phi(r_0)}e^{4\Phi(r)}dt^2$. Mas, como $ds^2 = -c^2d\tau^2$, temos que:

$$d\tau^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - (1 - b/r)^{-1} c^{-2} dr^2 = e^{-2\Phi(r_0)} e^{4\Phi(r)} dt^2. \quad (3.77)$$

Após algumas manipulações algébricas em (3.77), chega-se em:

$$\frac{dr}{dt} = (1 - b/r)^{1/2} e^{(\Phi(r) - \Phi(r_0))} (e^{2\Phi(r_0)} - e^{2\Phi(r)})^{1/2} c. \quad (3.78)$$

Derivando a equação (3.78) em relação a t e usando a regra da cadeia para as derivadas de $\Phi(r)$ e de $b(r)$ em relação a t , ou seja, $d\Phi/dt = \Phi'(dr/dt)$ e $db/dt = b'(dr/dt)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} = & e^{2(\Phi(r) - \Phi(r_0))} [(b - rb') / (2r^2) (e^{2\Phi(r_0)} - e^{2\Phi(r)}) + \\ & (1 - b/r) \Phi' (e^{2\Phi(r_0)} - e^{2\Phi(r)}) - (1 - b/r) \Phi' e^{2\Phi(r)}] c^2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Expandindo r em série de Taylor até segunda ordem, temos:

$$\Delta r \approx \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=t_0} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2r}{dt^2} \right|_{t=t_0} \Delta t^2, \quad (3.80)$$

onde t_0 é o instante de tempo inicial em que $r(t_0) = r_0$. Essa expansão é considerada uma boa aproximação pelo fato de querermos relacionar Δr com o referencial local em que Δt é pequeno, logo podemos supor essa aproximação. Substituindo r por r_0 em (3.78) e em (3.79), obtêm-se:

$$\Delta r \approx -\frac{1}{2} (1 - b/r_0) e^{2\Phi(r_0)} \Phi' c^2 \Delta t^2. \quad (3.81)$$

Agora podemos retornar à expressão que deduzimos para Δl , (3.74), e substituí-la por $(1 - b/r_0)^{-1/2} \Delta r$, e Δt_{local} por $e^{2\Phi(r_0)} \Delta t$ para obter a expressão:

$$\Delta r \approx -\frac{1}{2} (1 - b/r_0)^{1/2} e^{2\Phi(r_0)} g_{local} \Delta t^2. \quad (3.82)$$

Comparando (3.82) com (3.81) e substituindo r_0 por um r genérico, obtemos:

$$g_{local} = (1 - b/r)^{1/2} \Phi'(r) c^2. \quad (3.83)$$

Também podemos incluir o sinal de menos na expressão para a gravidade para indicar que ela é atrativa e, portanto, está relacionada com o sentido oposto ao de r : $g_{local} =$

$-(1 - b/r)^{1/2} \Phi' c^2$. Da primeira condição, ou seja, que $b/r \ll 1$, temos: $g_{local} \approx -\Phi' c^2$.

Resumindo:

$$b/r \ll 1; |\Phi| \ll 1; |\Phi' c^2| \leq g_{Terra}. \quad (3.84)$$

Além disso, precisamos que os tempos de viagem sejam pequenos (menor que 1 ano), tanto para quem viaja, como para quem fica nas estações. Para o tempo do viajante, basta calcularmos o tempo próprio do mesmo, $\Delta\tau_T$, e impor a nossa condição:

$$\Delta\tau_T = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{\gamma v} \leq 1 \text{ ano}. \quad (3.85)$$

Para quem fica nas estações, a princípio teríamos que calcular o tempo local Δt_{local} , mas como sabemos que os efeitos gravitacionais nas estações são pequenos, temos que $|\Phi| \ll 1$, ou seja:

$$\Delta t_{local} = e^\Phi \Delta t \approx (1 + \Phi) \Delta t \approx \Delta t. \quad (3.86)$$

Isto implica que podemos calcular o intervalo de tempo nas estações usando a nossa coordenada t definida inicial para o referencial global:

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v e^\Phi} \leq 1 \text{ ano}. \quad (3.87)$$

Isto ocorre porque quando os efeitos gravitacionais são pequenos, pode-se aproximar o referencial de um referencial inercial, e neste caso, a coordenada t coincide com o próprio tempo medido ali e com o tempo próprio. Isso muda quando passamos a trabalhar com um espaço curvo.

Vamos agora abordar a questão das acelerações sobre o viajante. Antes de calcularmos a aceleração da nave e a aceleração de maré sobre o viajante, precisamos definir os vetores de base ortonormais do referencial do viajante fazendo uma transformação de Lorentz com relação aos vetores de base do referencial local:

$$\hat{e}_{\hat{0}'} = \mathbf{u} = \gamma \hat{e}_{\hat{0}} \mp \gamma(v/c) \hat{e}_{\hat{1}}; \hat{e}_{\hat{1}'} = \mp \gamma \hat{e}_{\hat{1}} + \gamma(v/c) \hat{e}_{\hat{0}} \quad (3.88)$$

$$\hat{e}_{\hat{2}'} = \hat{e}_{\hat{2}}; \hat{e}_{\hat{3}'} = \hat{e}_{\hat{3}} \quad (3.89)$$

onde \mathbf{u} é a razão entre a quadri-velocidade \mathbf{U} pela velocidade da luz, c .

Agora, precisamos determinar a aceleração do viajante. Para isso, definiremos a quadri-aceleração por $a^{\hat{\alpha}'} = u^{\hat{\beta}'} \nabla_{\hat{\beta}'} u^{\hat{\alpha}'} c^2$. Como a aceleração só deve ser radial, as componentes laterais (angulares) serão nulas $a_{\hat{2}'} = a_{\hat{3}'} = 0$.

Como $a^\alpha u_\alpha = 0$, usando o fato de que $\mathbf{u} = \hat{e}_{\hat{0}'}$, teremos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \hat{e}_{\hat{0}'} = a_{\hat{0}'} = -a^{\hat{0}'} = 0$. Logo, podemos escrever a aceleração como $\mathbf{a} = a \hat{e}_{\hat{1}'}$, ou seja, ela possui unicamente componente radial. A maneira mais simples de encontrar o valor da aceleração é calculando a componente temporal da aceleração no referencial original do sistema, ou seja, usando as coordenadas (ct, r, θ, ϕ) . Temos que:

$$a_0/c^2 = u^\mu \nabla_\mu u_0 = u^0 (-\Gamma_{00}^1 u_1) + u^1 (\partial_1 u_0 - \Gamma_{10}^0 u_0), \quad (3.90)$$

onde, da expressão para $\hat{e}_{\hat{0}'}$ em (3.88), e das relações de $\hat{e}_{\hat{0}'}$ e $\hat{e}_{\hat{1}'}$, da equação (3.21):

$$u_0 = -\gamma e^\Phi; u_1 = \mp \gamma (v/c) (1 - b/r)^{-1/2} \quad (3.91)$$

e, usando a métrica para determinar as componentes contravariantes u^0 e u^1 :

$$u^0 = \gamma e^{-\Phi}; u^1 = \mp \gamma (v/c) (1 - b/r)^{1/2}. \quad (3.92)$$

Portanto, sabendo que $\Gamma_{10}^0 = \Phi'$ e que $\Gamma_{00}^1 = (1 - b/r) \Phi' e^{2\Phi}$, temos:

$$a_0/c^2 = \pm \gamma (v/c) (1 - b/r)^{1/2} (\gamma e^\Phi)' \quad (3.93)$$

Mas:

$$a_0 = \mathbf{a} \cdot \hat{e}_0 = a \hat{e}_{\hat{1}'} \cdot \hat{e}_0 = -a \gamma (v/c) e^\Phi \quad (3.94)$$

Comparando os dois resultados, chegamos à seguinte expressão para “a”:

$$a = \mp (1 - b/r)^{1/2} e^{-\Phi} (\gamma e^\Phi)' c^2 = e^{-\Phi} \frac{d(\gamma e^\Phi)}{dl} c^2, \quad (3.95)$$

em que usou-se:

$$\frac{d}{dr} = \frac{dl}{dr} \frac{d}{dl} = \mp (1 - b/r)^{-1/2} \frac{d}{dl}. \quad (3.96)$$

Como essa aceleração não pode ser muito forte (desejamos que ela seja da ordem da gravidade terrestre), então devemos ter a seguinte restrição:

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d(\gamma e^{\Phi})}{dl} \right| \leq \frac{g_{Terra}}{c^2} \quad (3.97)$$

Também teremos a chamada gravidade de maré que é a aceleração relativa entre as partes do corpo do viajante devido ao desvio geodésico. Ela é dada por:

$$\Delta a^{\hat{\alpha}'} = -c^2 R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'} u^{\hat{\beta}'} \xi^{\hat{\gamma}'} u^{\hat{\delta}'}, \quad (3.98)$$

onde ξ é o vetor deslocamento entre dois pontos em que queremos medir a aceleração relativa entre eles, ou, de forma mais específica, é o vetor de separação ou desvio de duas geodésicas infinitesimalmente próximas [52]. Vamos agora demonstrar esta expressão que pode ser encontrada em mais detalhes em [52, 63]. Seja $\gamma_s(\tau)$ uma família de geodésicas em um espaço curvo, que são caracterizadas pelo rótulo s e pelo parâmetro τ . Podemos considerar que este parâmetro seja o tempo próprio. Portanto, pode-se mapear estas geodésicas por essas duas coordenadas, (s, τ) , e podemos também definir os seguintes campos vetoriais que atuam sobre essas geodésicas, a 4-velocidade $U^\mu \equiv (\partial/\partial\tau)^\mu$, que é tangente à família de geodésicas, e $\xi^\mu \equiv (\partial/\partial s)^\mu$, que é o vetor deslocamento entre geodésicas infinitesimalmente próximas. Pode-se determinar a taxa de variação desse vetor deslocamento para determinar a velocidade relativa entre as geodésicas vizinhas usando a seguinte expressão: $D\xi^\mu/d\tau = u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu c$, onde $D/d\tau$ é a notação usada para se referir a derivada covariante direcional em relação ao parâmetro τ . Portanto, a aceleração relativa entre as mesmas, definida como o desvio geodésico será a derivada direcional da velocidade relativa de ξ^μ : $D^2\xi^\mu/d\tau^2 \equiv \Delta a^\mu = u^\nu \nabla_\nu (u^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu) c^2$.

Antes de fazermos a demonstração da equação (3.98), é preciso mostrar a seguinte identidade:

$$U^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = (\partial/\partial\tau)^\nu (\partial_\nu \xi^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \xi^\lambda) = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tau} + U^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \xi^\lambda. \quad (3.99)$$

Mas, podemos manipular o primeiro termo do lado direito da equação (3.99):

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial s} \right)^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial \tau} \right)^\mu = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial s}. \quad (3.100)$$

Mas temos que $\partial/\partial s = (\partial/\partial s)^\nu \partial_\nu = \xi^\nu \partial_\nu$. Finalmente temos que:

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tau} = \xi^\nu \partial_\nu U^\mu. \quad (3.101)$$

No segundo termo do lado direito da equação (3.99) podemos renomear os índices inferiores da conexão de Christoffel fazendo a troca $\nu \leftrightarrow \lambda$. Desta forma, usando o resultado de (3.101) em (3.99), temos:

$$U^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = \xi^\nu \partial_\nu U^\mu + \xi^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^\mu U^\lambda = \xi^\nu (\partial_\nu U^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu U^\lambda) = \xi^\nu \nabla_\nu U^\mu, \quad (3.102)$$

onde foi usada a simetria dos índices inferiores dos símbolos de Christoffel.

Podemos agora determinar a aceleração relativa Δa^μ usando uma propriedade da derivada covariante que é equivalente à regra de Leibniz para a derivada parcial comum, ou seja, $\nabla_\mu (A^\nu B^\lambda) = (\nabla_\mu A^\nu) B^\lambda + A^\nu (\nabla_\mu B^\lambda)$, conforme [42]:

$$U^\nu \nabla_\nu (U^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu) = U^\nu \nabla_\nu (\xi^\lambda \nabla_\lambda U^\mu) = (U^\nu \nabla_\nu \xi^\lambda) \nabla_\lambda U^\mu + U^\nu \xi^\lambda (\nabla_\nu \nabla_\lambda U^\mu). \quad (3.103)$$

Desenvolvendo cada termo do lado direito da equação (3.103):

$$(U^\nu \nabla_\nu \xi^\lambda) \nabla_\lambda U^\mu = (\xi^\nu \nabla_\nu U^\lambda) \nabla_\lambda U^\mu \quad (3.104)$$

$$U^\nu \xi^\lambda (\nabla_\nu \nabla_\lambda U^\mu) = U^\nu \xi^\lambda (\nabla_\lambda \nabla_\nu U^\mu) + U^\nu \xi^\lambda R_{\rho\nu\lambda}^\mu U^\rho, \quad (3.105)$$

onde foi usada a equação (2.43) em (3.105) para o comutador das derivadas covariantes, por isso apareceu o tensor de Riemann na mesma. Substituindo esses resultados em (3.103), vamos obter:

$$U^\nu \nabla_\nu (U^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu) = (\xi^\nu \nabla_\nu U^\lambda) \nabla_\lambda U^\mu + U^\nu \xi^\lambda (\nabla_\lambda \nabla_\nu U^\mu) + U^\nu \xi^\lambda R_{\rho\nu\lambda}^\mu U^\rho. \quad (3.106)$$

Entretanto, devemos notar que:

$$\xi^\nu \nabla_\nu (U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu) = (\xi^\nu \nabla_\nu U^\lambda) \nabla_\lambda U^\mu + U^\lambda \xi^\nu (\nabla_\nu \nabla_\lambda U^\mu). \quad (3.107)$$

Fazendo a troca $\nu \leftrightarrow \lambda$, no segundo termo do lado direito de (3.107), temos:

$$\xi^\nu \nabla_\nu (U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu) = (\xi^\nu \nabla_\nu U^\lambda) \nabla_\lambda U^\mu + U^\nu \xi^\lambda (\nabla_\lambda \nabla_\nu U^\mu). \quad (3.108)$$

Substituindo (3.108) em (3.106), vamos obter:

$$U^\nu \nabla_\nu (U^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu) = \xi^\nu \nabla_\nu (U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu) + U^\nu \xi^\lambda R_{\rho\nu\lambda}^\mu U^\rho. \quad (3.109)$$

Porém, devemos impor que um ponto na geodésica não possui aceleração, isto é, $U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu = 0$. Como vamos estar no referencial do viajante, essa condição será claramente verdadeira já que o viajante está em repouso em relação ao seu próprio referencial, logo ele não possui aceleração. Usando esse fato, vamos finalmente obter:

$$U^\nu \nabla_\nu (U^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu) = U^\nu \xi^\lambda R_{\rho\nu\lambda}^\mu U^\rho = -R_{\rho\lambda\nu}^\mu U^\rho \xi^\lambda U^\nu, \quad (3.110)$$

onde usamos a anti-simetria dos dois últimos índices do tensor de curvatura. Logo, a aceleração de maré devido ao desvio geodésico será dada por:

$$\Delta a^\mu = u^\nu \nabla_\nu (u^\lambda \nabla_\lambda \xi^\mu) c^2 = -c^2 R_{\rho\lambda\nu}^\mu u^\rho \xi^\lambda u^\nu. \quad (3.111)$$

Agora é só adaptar os índices para usar esta expressão no referencial do viajante e recuperar a equação (3.98).

Como ξ deve ser puramente espacial, então $\xi_{\hat{0}} = 0$. Além disso, $u^{\hat{\alpha}'} = \delta_{\hat{0}'}^{\hat{\alpha}'}$, pois, a 4-velocidade no referencial do viajante obviamente será nula nas componentes espaciais já que ele está em repouso no seu próprio referencial, e a componente temporal é unitária, já aqui dividimos \mathbf{U} por c para obter \mathbf{u} . Desta forma, vamos obter o seguinte resultado:

$$\Delta a^{\hat{j}'} = -c^2 R_{\hat{\gamma}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'} \xi^{\hat{k}'}. \quad (3.112)$$

o termo temporal $\Delta a^{\hat{0}'}$ é nulo devido à anti-simetria de $R_{\hat{0}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'}$ nos dois primeiros índices, como vimos em (2.45). Podemos fazer uma transformação de Lorentz no tensor de curvatura para determinar suas componentes na base local:

$$R_{\hat{\gamma}'\hat{0}'\hat{\gamma}'\hat{0}'} = \frac{\partial x^{\hat{\mu}}}{\partial x^{\hat{\gamma}'}} \frac{\partial x^{\hat{\nu}}}{\partial x^{\hat{0}'}} \frac{\partial x^{\hat{\lambda}}}{\partial x^{\hat{\gamma}'}} \frac{\partial x^{\hat{\rho}}}{\partial x^{\hat{0}'}} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}}, \quad (3.113)$$

em que $x^{\hat{\mu}'}$ se relaciona com $x^{\hat{\mu}}$ de forma similar à (3.88) e à (3.89) trocando $e_{\hat{\mu}'}$ por $x^{\hat{\mu}'}$ e $e_{\hat{\mu}}$ por $x^{\hat{\mu}}$. Assim, temos que:

$$R_{\hat{\gamma}'\hat{0}'\hat{\gamma}'\hat{0}'} = \gamma^4 R_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}} + \gamma^4 \frac{v^2}{c^2} R_{\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}} + \left(\frac{\gamma v}{c}\right)^4 R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}} + \gamma^4 \frac{v^2}{c^2} R_{\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}}. \quad (3.114)$$

Usando as anti-simetrias do tensor de curvatura:

$$R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} = \gamma^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}}. \quad (3.115)$$

Finalmente:

$$R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} = R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}} = - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\Phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)}\Phi' - (\Phi')^2\right). \quad (3.116)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos encontrar as outras componentes que precisamos:

$$\begin{aligned} R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} = R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} &= \gamma^2 R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{0}} + \gamma^2 (v/c)^2 R_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}\hat{1}} = \\ &= \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r - b)\Phi' \right]. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Logo, teremos os resultados:

$$\Delta a^{\hat{1}'} = -c^2 R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} \xi^{\hat{1}'}; \Delta a^{\hat{2}'} = -c^2 R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} \xi^{\hat{2}'}; \Delta a^{\hat{3}'} = -c^2 R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} \xi^{\hat{3}'}. \quad (3.118)$$

Queremos que essas acelerações sejam da ordem da gravidade terrestre e que o vetor de deslocamento seja o comprimento de uma pessoa (2 metros, por exemplo), em cada uma de suas componente. Logo, teremos as condições:

$$|R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'}| = \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\Phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)}\Phi' - (\Phi')^2\right) \right| \leq \frac{g_{Terra}}{c^2 \times 2 \text{ m}} \quad (3.119)$$

$$|R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'}| = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r - b)\Phi' \right] \right| \leq \frac{g_{Terra}}{c^2 \times 2 \text{ m}}. \quad (3.120)$$

A primeira condição (3.119) impõe restrições para a função Φ , enquanto a segunda (3.120), impõe restrições para a velocidade v .

3.4.5 Condições da matéria-energia na garganta

As restrições impostas para $b(r)$ e $\Phi(r)$ acabam por impôr restrições para ρ , τ , e p . Mas podemos fazer uma análise específica, avaliando, por exemplo, a tensão radial τ na garganta do buraco de minhoca, obtendo o seguinte resultado:

$$\tau(b_0) \equiv \tau_0 = \frac{1}{8\pi Gc^{-4}b_0^2} \approx \frac{5 \times 10^{42} \text{ N}}{b_0^2} \quad (3.121)$$

Este valor é extremamente alto, portanto, a menos que b_0 também seja suficientemente grande para anular o efeito do numerador de (3.121), será pouco provável que alguma matéria ou energia consiga gerar essa tensão. Um aspecto importante é analisar a tensão nas vizinhanças da garganta do buraco de minhoca através da função de dimensionalidade definida a seguir:

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|}, \quad (3.122)$$

em que foram usadas as equações (3.46) e (3.47) para substituir ρ e τ na expressão para ζ .

Como o buraco de minhoca liga regiões assintoticamente planas, temos a chamada condição de *flaring out*, ou seja, deve haver um ponto mínimo na garganta, isto é, nas proximidades da garganta, a derivada segunda de r em relação a z deve ser positiva, logo:

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2} \rightarrow \frac{d^2r}{dz^2} \Big|_{r=b_0} = \frac{b - b'r}{2b^2} \Big|_{r=b_0} > 0. \quad (3.123)$$

Assim, podemos reescrever a função de dimensionalidade:

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|} \quad (3.124)$$

Na garganta do *wormhole*, a função dimensionalidade é:

$$\zeta_0 = \lim_{r \rightarrow b_0} \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - \lim_{r \rightarrow b_0} 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|} \quad (3.125)$$

Mas o primeiro limite de (3.125), pela condição de *flaring out*, deve ser positivo e o segundo limite tende a zero. Portanto:

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \rightarrow \tau_0 > \rho_0 c^2. \quad (3.126)$$

Essa condição é problemática, pois ela viola a condição nula de energia, uma vez que, como foi visto em (2.5.2), esta afirma que $\rho c^2 + p_1 = \rho c^2 - \tau \geq 0$, o que implica em $\tau \leq \rho c^2$. Também podemos ter a violação da condição fraca de energia, pois, calculando a componente em que os dois índices são temporais do tensor momento-energia no referencial do viajante, temos:

$$T_{\hat{0}\hat{0}'} = \gamma^2 T_{\hat{0}\hat{0}} \mp 2\gamma^2 (v/c) T_{\hat{0}\hat{1}} + \gamma^2 (v/c)^2 T_{\hat{1}\hat{1}} = \gamma^2 (\rho_0 c^2 - \tau_0) + \tau_0. \quad (3.127)$$

Se o viajante estiver se movendo muito rápido ($\gamma \gg 1$), poderemos ter $T_{\hat{0}\hat{0}'} < 0$, pois o termo que multiplica γ^2 é negativo, logo se o termo $\gamma^2(\rho_0 c^2 - \tau_0)$, em módulo, for maior que o segundo termo, τ_0 , o resultado da expressão será negativo, o que implicaria numa densidade de massa-energia negativa, violando, portanto, a condição fraca de energia. A matéria que possui essa propriedade ($\tau > \rho c^2$) é chamada de exótica. A presença de matéria exótica é algo geral, ou seja, ela ocorre também em buracos de minhoca não estáticos e não esfericamente simétricos.

Essas violações das condições de energia geram um problema no ponto 7 que definimos em (3.2.2), pois uma matéria exótica não pode ser considerada fisicamente razoável, pois ela não deveria existir dentro do contexto da Relatividade Geral. Entretanto, é importante ponderar alguns fatos que Morris-Thorne cita em seu artigo.

Apesar desses resultados serem problemáticos e a princípio inviabilizar a criação de um buraco de minhoca atravessável, o fato de violar as condições de energia podem ter explicações quânticas como o caso da criação de partículas na mecânica quântica e o da contração do horizonte de eventos de um buraco negro não rotativo (que violaria a segunda lei da termodinâmica dos buracos negros), descoberto por Hawking. Os físicos por muito tempo encaravam como algo praticamente irrefutável o fato de não poder haver uma densidade de energia negativa, o que leva a alguns princípios como o da massa positiva, que era a impossibilidade da matéria anti-gravitar, ou seja, a interação gravitacional deveria ser sempre atrativa, não podendo haver repulsão gravitacional, e a própria segunda lei que mencionamos, que afirma que o horizonte de eventos nunca pode diminuir, isto é, a área da superfície delimitada pelo horizonte não pode decrescer.

Entretanto, a descoberta de Hawking de que poderia haver liberações de energia em um buraco negro, chamada de evaporação do mesmo, devido à criação de partículas pelo campo gravitacional, gerando assim um fluxo de energia que provoca uma contração do buraco negro, criou um problema, pois viola a segunda lei da termodinâmica dos buracos negros. Mas a sua explicação vem de fora da Gravitação da TRG, pois esse fenômeno tem uma origem da teoria quântica, e apesar do buraco negro ter uma dimensão macroscópica muito maior que a escala de tempo de Planck, por exemplo, se o seu tempo de existência for muito grande, esses efeitos fazem a diferença criando esse fenômeno da evaporação do buraco negro [64]. Outros

fenômenos, como os da óptica não-linear envolvendo o campo eletromagnético, também acabam por violar condições de energia, entretanto podem ser explicados por um contexto quântico acrescido à Relatividade Geral.

Isto quer dizer que ao desenvolver uma teoria quântica para a gravitação, a nossa compreensão das leis da física podem ter mudanças, de tal forma que a matéria exótica não seria um problema do ponto de vista quântico, portanto uma viagem através de um buraco de minhoca poderia ser viável. O que Morris-Thorne salienta bem é que apesar da exotividade da matéria na garganta do *wormhole*, nada impede que esse tipo de matéria possa existir num contexto quântico para a gravitação, já que ainda não temos uma teoria completa da gravitação quântica, o que deixa este problema completamente em aberto.

Algo que pode ser feito para tentar diminuir o problema é limitar a matéria exótica da garganta do buraco de minhoca. Formas de diminuir o uso de matéria exótica incluem restringir a região em que a matéria exótica atua, como fazer ela diminuir rapidamente à medida que o viajante atravessa a garganta, cortar a matéria e energia a partir de um determinado raio (*cut off*), e delimitar a matéria numa região pequena em torno da garganta.

3.5 Conclusão de Morris-Thorne

A conclusão deste artigo é o de que as soluções de buracos de minhoca atravessáveis não só são um instrumento pedagógico para ensinar Relatividade Geral como também podem ser uma criação real por civilizações mais avançadas. Entretanto, devido aos problemas que aparecem na solução das equações de Einstein, como a presença de matéria exótica, na qual a tensão radial excede a densidade de massa-energia, além de, segundo [16], viagens de volta para o passado, a possível instabilidade do mesmo, e o fato de que a sua construção pode ser classicamente proibida, levam os autores a lançarem este problema como uma incerteza que só poderá ser resolvido com uma teoria quântica para a gravidade. Logo, o trabalho feito por Morris-Thorne é uma tentativa de se buscar passagens que conectem regiões bem distantes de espaço-tempo que podem permitir uma viagem interestelar, mas que depende do sucesso de uma teoria quântica para a gravidade para que se possa checar todos os problemas elencados ao longo deste trabalho e analisar se é possível resolvê-los e tornar viável a criação de um *wormhole* em que um ser humano possa atravessá-lo.

4 REGULARIZAÇÃO DE SIMPSON-VISSER

Agora que já definimos o que é um buraco negro regular e um buraco de minhoca atravessável, vamos introduzir um método de regularização de uma solução comum de buraco negro. Este método interessante foi obtido por Alex Simpson e Matt Visser, em um artigo de 2019 intitulado de “*black-bounce to traversable wormhole*”, [21], em que uma mesma métrica consegue representar tanto buracos negros regulares como buracos de minhoca atravessáveis do tipo Morris-Thorne, bastando mudar um parâmetro que é definido na própria métrica.

A partir desta métrica, é possível estudar toda sua geometria determinando os tensores e os invariantes de curvatura, e fazer diversas análises como das condições de energia, de esferas de fótons localizadas, das órbitas circulares estáveis que podem ser definidas neste espaço-tempo, entre outras aplicações.

Nosso ponto de partida será definir a métrica que Simpson e Visser utilizaram no artigo e, a partir dela, analisarmos suas propriedades, avaliar sua geometria através dos tensores e invariantes de curvatura para verificar sua regularidade, além de fazer algumas aplicações, que são algumas grandezas termodinâmicas (temperatura de Hawking, entropia, capacidade térmica, e energia livre de Helmholtz), e uma análise das órbitas circulares para partículas massivas e não massivas.

4.1 Métrica de Simpson-Visser

Já sabemos o que é um buraco negro regular, devemos buscar alguma métrica que possa representar uma geometria de espaço-tempo com as propriedades necessárias deste. Já vimos alguns exemplo de métricas de natureza não-singular que cumprem essa função, porém vamos trabalhar com uma candidata a representar esse tipo de solução definida em [21]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)} + (r^2 + a^2)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

onde “a” representa um parâmetro real ajustável, e “m” é uma constante que está relacionada à massa da matéria que irá gerar esse espaço-tempo (em unidades em que $G = 1$, essa constante seria a própria massa, mas não é o caso deste trabalho). Aqui estamos considerando $c = 1$, o que irá simplificar alguns cálculos.

Vemos facilmente que esta métrica é uma modificação da métrica de Schwarzschild e que esta pode ser recuperada fazendo-se $a = 0$, pois, neste caso vamos ter:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (4.2)$$

Mas essa pequena mudança traz consequências significativas como veremos no decorrer deste capítulo.

O primeiro ponto é que a solução de Schwarzschild não representa uma solução regular de buraco negro, como vimos na seção anterior, já que ela possui singularidade, e também não é um buraco de minhoca atravessável, pois possui horizonte de eventos, como foi explicado no capítulo anterior sobre buracos de minhoca de Morris-Thorne (3.2.1). Assim, para o nosso propósito de determinar buracos negros regulares ou buracos de minhoca atravessáveis, precisamos ter $a \neq 0$.

Também temos que a métrica é esfericamente simétrica e independente do tempo, o que confere uma propriedade básica dos buracos de minhoca de Morris-Thorne. Porém, este tipo de métrica não corresponde a um buraco negro regular tradicional como o de Bardeen [9], ou o de Bergmann-Roman [65], que realizam saltos no futuro para o próprio universo. Em vez disso, os buracos negros representados pela métrica definida em (4.1) realizam saltos no futuro para um outro universo, isto é, os diagramas de Carter-Penrose indicam a criação de universos paralelos tais que a solução de Simpson-Visser realiza saltos do nosso Universo para este outro universo [21].

Agora vamos analisar melhor esta métrica e entender como ela pode representar um tipo de solução ou outro. Primeiro, segundo [21], temos que as coordenadas deste espaço-tempo variam nos seguintes intervalos:

$$r \in] - \infty, \infty[; t \in] - \infty, \infty[; \theta \in [0, \pi]; \phi \in] - \pi, \pi]. \quad (4.3)$$

Vamos analisar inicialmente as curvas radiais nulas nesta métrica, ou seja, curvas realizadas pela luz ($ds^2 = 0$) fixando as coordenadas angulares ($d\theta = d\phi = 0$). Logo, vamos ter:

$$ds^2 = 0 = - \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)} \rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^2. \quad (4.4)$$

Logo:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right). \quad (4.5)$$

Vemos que no infinito esta expressão resulta de fato na velocidade dr/dt da luz, já que nesse limite, $dr/dt \rightarrow \pm 1$. Podemos analisar os cones de luz determinando dt/dr :

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Para r tendendo ao infinito, já vimos que o valor de dt/dr tende a ± 1 , o que condiz com o fato da métrica ser assintoticamente plana (que pode ser visto facilmente quando aplicamos o limite assintótico na métrica definida em (4.1)), já que esse resultado condiz com os cones de luz do espaço-tempo de Minkowski. Quando reduzimos o valor de r , o termo entre parênteses na equação (4.6) tende a diminuir quanto mais o termo $2m/\sqrt{r^2 + a^2}$ se aproxima de 1, o que implica no aumento de dt/dr . Quando $2m/\sqrt{r^2 + a^2} = 1$, temos que dt/dr diverge, característica comum quando estamos no horizonte de eventos. Dentro do horizonte, quando r se aproxima da origem o termo $2m/\sqrt{r^2 + a^2}$ aumenta implicando na diminuição de dt/dr , porém este troca de sinal e o cone tende a se fechar em torno da origem.

Para estudarmos os tipos de espaço-tempo gerados pela métrica, devemos avaliar o parâmetro “ a ” em relação ao horizonte “ $2m$ ” (aqui o termo horizonte se refere ao horizonte de eventos da solução de Schwarzschild). Logo, temos as seguintes possibilidades:

- 1- $a > 2m$: para todo $r \in] -\infty, \infty[$, vamos ter que:

$$a^2 > (2m)^2 \rightarrow \sqrt{r^2 + a^2} > \sqrt{r^2 + (2m)^2} \rightarrow 1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} > 1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + (2m)^2}}. \quad (4.7)$$

Mas:

$$r^2 > 0 \rightarrow \sqrt{r^2 + (2m)^2} > 2m \rightarrow 1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + (2m)^2}} > 0, \quad (4.8)$$

e também vamos ter:

$$r^2 = 0 \rightarrow \sqrt{r^2 + (2m)^2} = 2m \rightarrow 1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + (2m)^2}} = 0, \quad (4.9)$$

e o que nos leva a:

$$1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}} > 1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + (2m)^2}} \geq 0. \quad (4.10)$$

Portanto, podemos afirmar que:

$$\frac{dr}{dt} \neq 0, \quad (4.11)$$

pois o termo do lado esquerdo de (4.10) está relacionado à dr/dt e como ele é maior que o termo do lado direito que por sua vez é sempre maior ou igual a zero, então ele será certamente positivo, o que, pela equação (4.5), implica que dr/dt ou é positivo ou negativo, mas nunca será nulo. Isto implica que não há horizontes de eventos ao longo da trajetória da curva radial, pois, usando uma métrica ortogonal genérica, temos que a curva radial nula é:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 = 0 \rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{-g_{00}}{g_{11}}}, \quad (4.12)$$

onde g_{00} é negativo. No capítulo anterior, definimos na subseção (3.4.3) que o horizonte de eventos era uma região nula tal que $g_{00} = 0$. Pela equação (4.12), vemos que se $dr/dt \neq 0$, consequentemente teremos $g_{00} \neq 0$. Logo, essa geometria caracteriza um buraco de minhoca atravessável, pois, se não há um horizonte de eventos, pode-se fazer viagens de via-dupla, ou seja, de ida e volta, exatamente como se espera em um buraco de minhoca do tipo Morris-Thorne [21].

- 2- $a = 2m$: neste caso, vemos que quando r tende a zero, dr/dt tende a zero também:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{(2m)^2}} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Isto implica que $g_{00} = 0$, pois, como no caso da métrica de Simpson-Visser, $1/g_{11} = -g_{00}$, a equação (4.12) se torna $dr/dt = \pm g_{00}$, logo, se dr/dt é nulo em $r = 0$, g_{00} também será, portanto, existe um horizonte de eventos exatamente neste ponto. Mas, definindo que em $r = 0$ temos uma “garganta”, essa geometria corresponde a um buraco de minhoca com um ponto extremo na garganta, isto é, existe um horizonte de eventos exatamente na sua garganta, o que significa que ele não é atravessável, pois possui via-única, já que na garganta há um horizonte e não será possível atravessá-la [21].

- 3- $a < 2m$: para este caso, segue que:

$$a^2 < (2m)^2 \rightarrow (2m)^2 - a^2 > 0 \rightarrow \sqrt{(2m)^2 - a^2} \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Logo, definindo $r_{\pm} \equiv \pm \sqrt{(2m)^2 - a^2}$, vamos ter:

$$\sqrt{r_{\pm}^2 + a^2} = 2m \rightarrow \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=r_{\pm}} = \pm \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r_{\pm}^2 + a^2}} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Logo, temos um par de horizontes de eventos de mesmo comprimento, um para r positivo, e outro para r negativo. Aqui temos, portanto um buraco negro com horizontes de eventos maiores do que seria a garganta do buraco de minhoca, por isso essa geometria não caracteriza um buraco de minhoca [21].

A Figura 5 deixa essa análise bem clara, pois, neste exemplo, temos $2m = 0,5$ e vemos que, quando $a = 0,2$, isto é, ele é menor que a posição do horizonte, o gráfico de $f(r)$ cruza o eixo r em ponto ligeiramente menor que 0,5 (isto porque, na coordenada r , a posição do horizonte é dada por $\sqrt{(2m)^2 - a^2}$), indicando portanto a presença de um horizonte de eventos de um buraco negro. Quando $a = 0,5$, ou seja, ele é igual à posição do horizonte, o gráfico cruza o eixo r em $r = 0$, ou seja, exatamente na garganta do buraco de minhoca de via-única, e quando $a = 0,8$, isto é, ele é maior que a posição do horizonte, o gráfico não intercepta o eixo r , indicando que não há horizonte de eventos, se tratando portanto de uma solução de buraco de minhoca atravessável.

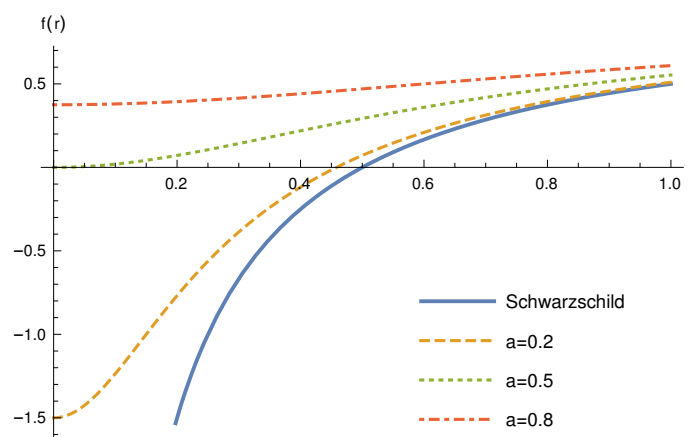


Figura 5: Função $f(r)$ da solução regularizada de Simpson-Visser para alguns valores específicos de a . Considera-se $m = 0,25$. Fonte: próprio autor.

Agora vamos analisar se este buraco negro é regular ou não avaliando a curvatura deste espaço-tempo.

4.2 Tensores de curvatura de Simpson-Visser

Precisamos agora avaliar se existem singularidades no espaço-tempo gerado pela métrica definida em (4.1). Vamos, portanto, calcular os tensores de Riemann, de Ricci e o de Einstein. Começemos pelo tensor de Riemann. Usando o mesmo procedimento utilizado na subseção (3.3.1) para calcular o tensor de Riemann da métrica de Morris-Thorne, vamos obter os seguintes resultados para as conexões de Christoffel não nulas:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{mr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1}; \quad (4.16)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{mr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right); \Gamma_{11}^1 = -\frac{mr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1}; \quad (4.17)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right); \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right); \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{r}{r^2 + a^2} = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3; \quad (4.19)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta; \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \quad (4.20)$$

Agora é possível calcular todas as componentes não nulas do tensor de Riemann. Para exemplificar, vamos determinar a componente R_{101}^0 :

$$R_{101}^0 = -\partial_1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 - (\Gamma_{10}^0)^2 \quad (4.21)$$

$$R_{101}^0 = -m \left\{ \frac{[(r^2 + a^2)^{3/2} - 2m(r^2 + a^2)] - r^2[3(r^2 + a^2)^{1/2} - 4m]}{[(r^2 + a^2)^{3/2} - 2m(r^2 + a^2)]^2} \right\} - \frac{2(mr)^2}{(r^2 + a^2)^3} \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-2}. \quad (4.22)$$

Vemos que o cálculo desta componente é extremamente exaustivo, por isso é importante usar algum recurso computacional para encontrar as componentes destes tensores da Relatividade Geral. Fazendo algumas manipulações na equação acima, obtemos o resultado:

$$R_{101}^0 = \frac{2m^2(r^2 + a^2) + 3mr^2\sqrt{r^2 + a^2} - m(r^2 + a^2)^{3/2} - 6m^2r^2}{[(r^2 + a^2)^{3/2} - 2m(r^2 + a^2)]^2}. \quad (4.23)$$

Poderíamos agora seguir o mesmo raciocínio de Morris-Thorne e trabalhar na base local realizando as “tetradas” ortonormais. Porém, é interessante notar que se “levantarmos” o segundo índice do tensor de Riemann, o seu valor será o mesmo que encontraríamos na base ortonormal pelo fato da métrica usada aqui ser ortogonal. Consultando o Apêndice A, na equação (A.15), vamos ter, para o exemplo que calculamos agora:

$$R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}}^{\hat{0}} = (\Lambda^{-1})_0^{\hat{0}} R_{101}^0 \Lambda_{\hat{1}}^1 \Lambda_{\hat{0}}^0 \Lambda_{\hat{1}}^1 = (\Lambda_{\hat{1}}^1)^2 R_{101}^0. \quad (4.24)$$

Como será discutido no Apêndice A, os termos da “tetrada” são determinados pela própria métrica e são aqueles termos que tornam a base ortogonal do nosso sistema unitárias, para gerar uma base ortonormal. Isso implica que $\Lambda_{\hat{1}}^1 = 1/\sqrt{g_{11}}$. Logo temos que:

$$R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}}^{\hat{0}} = \frac{1}{g_{11}} R_{101}^0. \quad (4.25)$$

Mas, vimos na seção 2.3 que $g^{11} = 1/g_{11}$. Logo:

$$R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}}^{\hat{0}} = g^{11} R_{101}^0. \quad (4.26)$$

Mas, $R^{01}_{01} = g^{11} R_{101}^0$, pois a métrica inversa também será ortogonal (ver a seção 2.3). Finalmente:

$$R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}}^{\hat{0}} = R^{\hat{0}\hat{1}}_{\hat{0}\hat{1}} = R^{01}_{01}. \quad (4.27)$$

Na base local, podemos “subir” o índice latino (coordenada espacial) sem alterar nada porque a métrica local é a de Minkowski, onde essa propriedade pode ser usada, já que $T^i = \eta^{iv} T_v = \eta^{ii} T_i = T_i$, em que não há soma envolvendo o índice i , pois aqui ele está fixo. Seguindo esse raciocínio para as outras componentes não nulas e independentes do tensor de Riemann, podemos generalizar esse resultado:

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}_{\hat{\lambda}\hat{\rho}} = R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}, \quad (4.28)$$

com as condições de que $\mu = \lambda$, $\nu = \rho$, e que a métrica seja ortogonal, que são satisfeitas no caso da solução de Simpson-Visser.

Por isso, vamos trabalhar com o tensor de Riemann na forma $R^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}$. Como $g^{11} = 1/g_{11}$, então:

$$g^{11} = 1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}. \quad (4.29)$$

Logo, encontra-se o seguinte valor para $R^{01}{}_{01}$:

$$R^{01}{}_{01} = \frac{m(2r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.30)$$

As outras componentes são:

$$R^{02}{}_{02} = R^{03}{}_{03} = -\frac{mr^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}; \quad (4.31)$$

$$R^{12}{}_{12} = R^{13}{}_{13} = \frac{m(2a^2 - r^2) - a^2\sqrt{r^2 + a^2}}{(r^2 + a^2)^{5/2}}; \quad (4.32)$$

$$R^{23}{}_{23} = \frac{2mr^2 + a^2\sqrt{r^2 + a^2}}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.33)$$

Agora vamos avaliar a regularidade destas componentes. Primeiro vamos avaliar essas componentes quando r tende a zero:

$$R^{01}{}_{01} \rightarrow -\frac{m}{a^3}; R^{02}{}_{02} = R^{03}{}_{03} \rightarrow 0; R^{12}{}_{12} = R^{13}{}_{13} \rightarrow \frac{2m - a}{a^3}; R^{23}{}_{23} \rightarrow \frac{1}{a^2}. \quad (4.34)$$

Vemos aqui que se $a \neq 0$, todas as componentes do tensor de Riemann são finitas, portanto, não possuem singularidade. Também podemos avaliar todas essas componentes quando $|r| \rightarrow \infty$ e analisar se essas componentes de fato tendem a enfraquecer e tender a zero como se espera no limite assintótico:

$$R^{01}{}_{01} \rightarrow \frac{2m}{r^3}; R^{02}{}_{02} = R^{03}{}_{03} \rightarrow -\frac{m}{r^3}; R^{12}{}_{12} = R^{13}{}_{13} \rightarrow -\frac{m}{r^3} - \frac{a^2}{r^4}; R^{23}{}_{23} \rightarrow \frac{2m}{r^3} + \frac{a^2}{r^4}. \quad (4.35)$$

Portanto, vemos todas as componentes tendem a diminuir quando r aumenta já que temos termos do tipo $1/r^3$ ou $1/r^4$ nas expressões acima e no limite assintótico, todos tendem a zero. O mesmo irá ocorrer naturalmente com o escalar de Ricci, com a contração de Ricci e com o escalar de Kretschmann.

O tensor de Ricci pode ser calculado a partir das componentes do tensor de Rie-

mann:

$$R^0_0 = R^{10}_{10} + R^{20}_{20} + R^{30}_{30} = \frac{m(2r^2 - a^2) - 2mr^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = -\frac{ma^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.36)$$

Lembrando que $R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = R^{\nu\mu}_{\rho\lambda}$ (2.45), por isso podemos trocar R^{10}_{10} por R^{01}_{01} , por exemplo. Seguindo esse raciocínio:

$$R^1_1 = \frac{a^2(3m - \sqrt{r^2 + a^2})}{(r^2 + a^2)^{5/2}}; R^2_2 = R^3_3 = \frac{2ma^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.37)$$

O escalar de Ricci é a contração do tensor de Ricci:

$$R = R^\mu_\mu = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 = \frac{2a^2(3m - \sqrt{r^2 + a^2})}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.38)$$

Agora também podemos calcular as componentes do tensor de Einstein:

$$G^0_0 = R^0_0 - \frac{1}{2}\delta^0_0 R = \frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - 4m)}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.39)$$

Essa expressão pode ser derivada de (2.58), pois:

$$G^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha} \left(R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\nu} R \right) = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R. \quad (4.40)$$

As outras componentes do tensor de Einstein serão:

$$G^1_1 = -\frac{a^2\sqrt{r^2 + a^2}}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = -\frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2}; G^2_2 = G^3_3 = \frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - m)}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.41)$$

4.3 Invariantes de curvatura

Para finalizar a análise da regularidade dessas soluções, é preciso também avaliar os chamados invariantes de curvatura, ou seja, grandezas escalares que estão associadas à curvatura do espaço-tempo. A primeira delas já calculamos que é o escalar de Ricci:

$$R = \frac{2a^2(3m - \sqrt{r^2 + a^2})}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.42)$$

O outro escalar importante é contração de Ricci:

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{a^4[4(\sqrt{r^2+a^2}-3m/2)^2+(3m)^2]}{(r^2+a^2)^5}. \quad (4.43)$$

Outro escalar importante é o de Kretschmann:

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{4}{(r^2+a^2)^5} \{ \sqrt{r^2+a^2}[8ma^2(r^2-a^2)] + 3a^4(r^2+a^2) + 3m^2(3a^4+4r^4-4r^2a^2) \}. \quad (4.44)$$

Já sabemos que no limite assintótico estes escalares tendem a enfraquecerem e tendem a zero, agora precisamos determinar o limite quando $r \rightarrow 0$ de cada um deles. Vamos obter os seguintes resultados:

$$R \rightarrow \frac{2(3m-a)}{a^3}; R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \rightarrow \frac{4(a-3m/2)^2+9m^2}{a^6}; \quad (4.45)$$

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} \rightarrow \frac{4(3a^6+9m^2a^4-8ma^5)}{a^{10}}. \quad (4.46)$$

Portanto, os invariantes de curvatura também não possuem singularidades e representam uma solução regular para o sistema, seja um buraco negro, seja um buraco de minhoca.

4.4 Tensor momento-energia e condições de energia

Já temos as grandezas associadas à geometria do espaço-tempo, porém, para resolvermos as equações de Einstein, ainda é preciso determinar o tensor momento-energia desse sistema. Para adequar a notação deste trabalho com a do artigo base deste capítulo, usaremos a mesma notação feita na seção 3.1.1 para a pressão radial e a pressão lateral. Assim, que as componentes do tensor momento-energia são:

$$T^0_0 = -\rho; T^1_1 \equiv p_{\parallel}; T^2_2 = T^3_3 = p_{\perp}. \quad (4.47)$$

Uma forma de justificarmos essa definição será mostrada a seguir. Quando definimos as componentes do tensor momento-energia, estávamos no referencial local, onde tínhamos, por exemplo, $T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho$. Como estamos trabalhando na base coordenada, temos que buscar as expressões corretas para essas componentes. Uma forma de fazer isso é observar que, se as componentes do tensor de Riemann são iguais tanto na base que estamos trabalhando como na base local, então as componentes do tensor de Ricci e o escalar de Ricci também serão iguais nas duas bases.

Como o tensor de Einstein na forma de um tensor do tipo (1, 1) só depende do tensor de Ricci, do escalar de Ricci, e do delta de Kronecker, ele também será igual nas duas bases, já que o delta de Kronecker é o mesmo independente de ser na base local ou não. Então vamos ter:

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi GT^\mu{}_\nu; G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} = 8\pi GT^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \quad (4.48)$$

$$G^\mu{}_\nu = G^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \rightarrow 8\pi GT^\mu{}_\nu = 8\pi GT^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \rightarrow T^\mu{}_\nu = T^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}, \quad (4.49)$$

ou seja, as componentes do tensor momento-energia também são iguais nas duas bases. Logo, se $T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho$, então $T^{\hat{0}}{}_{\hat{0}} = \eta^{\hat{0}\hat{0}}T_{\hat{0}\hat{0}} = -\rho = T^0{}_0$, e, para os termos de pressão, $T^{\hat{i}}{}_{\hat{i}} = \eta^{\hat{i}\hat{i}}T_{\hat{i}\hat{i}} = T_{\hat{i}\hat{i}} = T^i{}_i$ (aqui o índice i não está somado). Os termos $T_{\hat{i}\hat{i}}$ são exatamente as pressões radial e lateral. Concluimos assim nossa demonstração para justificar a definição feita na equação (4.47).

Aqui é importante ressaltar que estamos trabalhando fora do horizonte de eventos, isto é, com $\sqrt{r^2 + a^2} > 2m$. Também é importante ressaltar que este resultado só é válido para o caso em que as componentes do tensor de Riemann, escritos na forma $R^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}$, são iguais nas duas bases. Consequentemente, não é um resultado geral.

Usando as equações de Einstein, vamos obter os seguintes resultados:

$$G^0{}_0 = 8\pi GT^0{}_0 \rightarrow \rho = -\frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - 4m)}{8\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad (4.50)$$

$$G^1{}_1 = 8\pi GT^1{}_1 \rightarrow p_{\parallel} = -\frac{a^2\sqrt{r^2 + a^2}}{8\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad (4.51)$$

$$G^2{}_2 = 8\pi GT^2{}_2 \rightarrow p_{\perp} = \frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - m)}{8\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.52)$$

Como foi visto (2.5.2), a condição nula de energia implica em $\rho + p_{\parallel} \geq 0$. Podemos verificar se ela é válida usando as equações (4.50) e (4.51):

$$\rho + p_{\parallel} = -\frac{a^2(2\sqrt{r^2 + a^2} - 4m)}{8\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}} = -\frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - 2m)}{4\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.53)$$

Mas estamos supondo que $\sqrt{r^2 + a^2} > 2m$, o que implica em $\sqrt{r^2 + a^2} - 2m > 0$. Logo, como os demais termos são positivos porém todo o termo na fração é multiplicado por -1, temos que o lado direito de (4.53) é negativo, ou seja, $\rho + p_{\parallel} < 0$, o que implica na violação da condição nula de energia.

Vamos considerar a região interior do horizonte de eventos, isto é, $\sqrt{r^2 + a^2} < 2m$. Como o sinal dos termos temporal e radial da métrica inverte o sinal, temos uma reversão das características do tipo-tempo e do tipo-espaço, ou seja, temos que $T^0_0 = p_\perp$, e $T^1_1 = -\rho$ [21]. Assim vamos ter que adaptar a equação de Einstein para essas duas componentes:

$$G^0_0 = 8\pi GT^0_0 \rightarrow p_\perp = \frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - 4m)}{8\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}} \quad (4.54)$$

$$G^1_1 = 8\pi GT^1_1 \rightarrow \rho = \frac{a^2\sqrt{r^2 + a^2}}{8\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.55)$$

Logo:

$$\rho + p_\parallel = \frac{a^2(\sqrt{r^2 + a^2} - 2m)}{4\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.56)$$

O termo entre parênteses em (4.56) agora é negativo e todo o restante é positivo, portanto, $\rho + p_\parallel < 0$ novamente, isto é, a condição nula de energia continua sendo violada. Podemos generalizar esse resultado para ambos os casos (dentro e fora do horizonte de eventos):

$$\rho + p_\parallel = -\frac{a^2|\sqrt{r^2 + a^2} - 2m|}{4\pi G(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (4.57)$$

Esse resultado já era esperado para o caso do buraco de minhoca de Morris-Thorne, como vimos no capítulo passado, porém a novidade aqui é que ele também é válido no caso de um buraco negro regular, ou seja, todas as soluções possíveis de se obter com a métrica definida em (4.1) terão a violação das condições de energia, embora sejam regulares (sem singularidades).

4.5 Aplicações da solução de Simpson-Visser

Agora que já determinamos a solução de Simpson-Visser através da regularização da solução de Schwarzschild e analisamos o comportamento da sua métrica avaliando os tensores e invariantes de curvatura e a interpolação de um buraco negro regular e um buraco de minhoca do tipo Morris-Thorne a depender do parâmetro “a”, podemos avançar as análises desta métrica fazendo algumas aplicações básicas. Vamos estudar as propriedades termodinâmicas do buraco negro regular gerado por essa solução e as possíveis órbitas circulares estáveis ou não estáveis de partículas massivas e não massivas (fótons). Começemos pela termodinâmica da solução de Simpson-Visser.

4.5.1 Termodinâmica da solução de Simpson-Visser

Como foi mencionado na seção (3.4.5), a área da superfície delimitada pelo horizonte de eventos de um buraco negro tende sempre a aumentar ou permanecer igual, o que dá origem à Segunda Lei da Termodinâmica de Buracos Negros. Isto é análogo à Segunda Lei da Termodinâmica para a entropia, pois a entropia de um determinado sistema de partículas também não pode decrescer, ou seja, $\delta S \geq 0$. Poderíamos imaginar que isso fosse apenas uma coincidência ou algo superficial, uma vez que no caso da área de um buraco negro, esta lei possui um rigor matemático relativo à própria Relatividade Geral, enquanto que a segunda Lei da Termodinâmica não é uma lei da natureza, mas sim consequência do fato de se estar trabalhando estatisticamente com um número muito grande de graus de liberdade num sistema físico. Entretanto, é possível encontrar um paralelo entre as leis dos buracos negros com as demais leis da Termodinâmica, mostrando que essa relação é de fato algo fundamental e não apenas uma coincidência [63].

Isto fica bem evidente quando analisamos algumas expressões matemáticas que mostram a equivalência entre grandezas da Relatividade Geral com as da Termodinâmica, conforme pode ser mostrado na Figura (6). Vemos que a energia interna E das partículas é equivalente à massa M do buraco negro. Porém, essa equivalência não é apenas pelas propriedades semelhantes que elas possuem nas expressões matemáticas, mas também do ponto de vista físico, pois sabemos que massa e energia são equivalentes no contexto relativístico.

BLACK HOLES AND THERMODYNAMICS		
LAW	CONTEXT	
	Thermodynamics	Black Holes
Zeroth	T constant throughout body in thermal equilibrium	κ constant over horizon of stationary black hole
First	$dE = TdS + \text{work terms}$	$dM = \frac{1}{8\pi} \kappa dA + \Omega_H dJ$
Second	$\delta S \geq 0$ in any process	$\delta A \geq 0$ in any process
Third	Impossible to achieve $T = 0$ by a physical process	Impossible to achieve $\kappa = 0$ by a physical process

Figura 6: Relação entre as leis de buracos negros com as leis da termodinâmica. Fonte: Wald, 1984.

Dadas essas relações termodinâmicas associadas às grandezas de um buraco negro, podemos então definir inicialmente a temperatura, conhecida por Temperatura de Hawking, que pode ser dada pela seguinte expressão:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (4.58)$$

onde κ é a gravidade superficial que é dada por $-g'_{00}(r_H)/2$ [66]. Para mais informações sobre como deduzir e interpretar esta e outras grandezas termodinâmicas, consultar [63, 67, 68].

Sabendo que $g_{00} = -(1 - 2m/\sqrt{r^2 + a^2})$, pode-se calcular a temperatura de Hawking da solução de Simpson-Visser:

$$T_H = \frac{\sqrt{(2m)^2 - a^2}}{16\pi m^2} = T_{HS} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HS}^2}}, \quad (4.59)$$

onde $T_{HS} = 1/(8\pi m) = 1/(4\pi r_{HS})$ é a temperatura de Hawking da solução comum de Schwarzschild (quando $a = 0$) [69], e $r_{HS} = 2m$ é a posição do horizonte de eventos da solução de Schwarzschild. É interessante notar que a solução possui um termo de correção do tipo $\sqrt{1 - a^2/k^2}$ em que $k = 2m$, mas ela recupera a solução usual de Schwarzschild quando fazemos $a = 0$, exatamente como era esperado, portanto sendo um resultado consistente. Também é interessante notar que no valor limite que a pode alcançar, que é $a = r_{HS}$, a temperatura tende a zero, ou seja, quando se tem um buraco de minhoca extremo, em que a garganta coincide com o horizonte de eventos, a temperatura é nula na garganta. A Figura 7 mostra o comportamento da temperatura de Hawking em função da posição do horizonte de eventos r_{HS} para alguns valores específicos de a , onde é possível verificar o que foi analisado neste parágrafo.

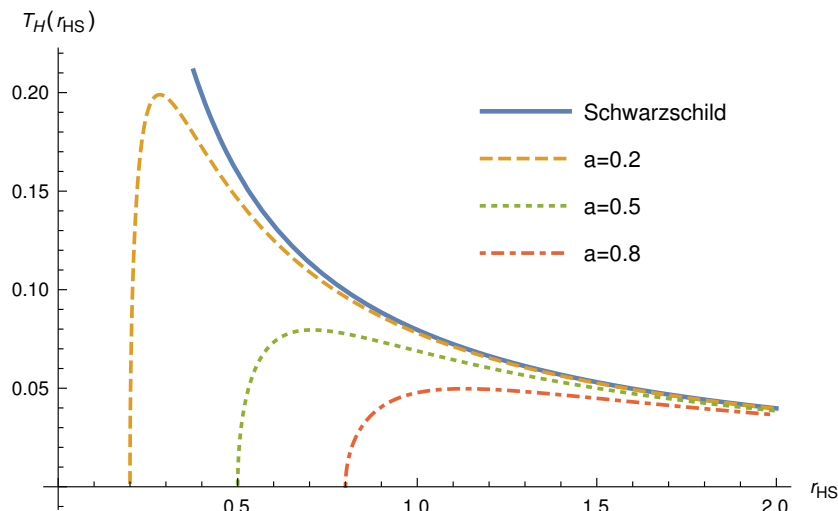


Figura 7: Temperatura de Hawking em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.

Agora pode-se calcular a entropia e a capacidade térmica, respectivamente, da solução de Simpson-Visser regular usando as expressões $dS = dm/T_H$ e $C_V = dm/dT_H$ [66]. Começando pela entropia, devemos integrar a expressão dada para dS e notar que $m = \sqrt{r_H^2 + a^2}/2$,

uma vez que $r_H = \sqrt{(2m)^2 - a^2}$. A estratégia é colocar todos os termos em função de r_H e integrar a expressão resultante. Logo, comecemos determinando dm em função de dr_H :

$$dm = \frac{r_H dr_H}{2\sqrt{r_H^2 + a^2}}. \quad (4.60)$$

Agora precisamos escrever T_H em função de r_H (não confundir r_H com r_{HS} , pois r_H é a posição do horizonte de eventos da solução de Simpson-Visser, enquanto que r_{HS} é a posição do horizonte na solução de Schwarzschild). De (4.59), temos que:

$$T_H = \frac{r_H}{4\pi(r_H^2 + a^2)}. \quad (4.61)$$

Agora podemos calcular a entropia integrando a expressão dm/T_H :

$$S = 2\pi \int \sqrt{r_H + a^2} dr_H = S_S \left[\sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HS}^2}} + \frac{a^2}{r_{HS}^2} \ln \left(\frac{\sqrt{r_{HS}^2 - a^2} + r_{HS}}{a} \right) \right], \quad (4.62)$$

onde $S_S = \pi r_{HS}^2$ é a entropia da solução de Schwarzschild [69]. Este resultado é obtido fazendo uma mudança de variável em r_H no integrando de (4.62) mudando-a para $atg\theta$, o que resultará em uma integral de $\sec^3\theta$, que pode ser resolvida pelo método de integral por partes. Aqui percebemos que a correção não é tão trivial como no caso da temperatura de Hawking, pois além do fator $\sqrt{1 - a^2/r_{HS}^2}$, temos um logaritmo que depende de r_{HS} . Primeiro, vemos que a solução é consistente com a solução não regular, pois quando $a \rightarrow 0$, a entropia tende a S_S . Para $a < r_{HS}$, à medida que a se aproxima de r_{HS} , o valor da entropia cai rapidamente, tal que no limite $a \rightarrow r_{HS}$, a entropia cai a zero, como podemos ver na figura abaixo. A figura também mostra um comportamento diferente da entropia em relação à temperatura de Hawking, pois no caso desta, ela possui o valor da solução de Schwarzschild para $a = 0$ e, para $a > 0$, seu valor decai monotonicamente até zero em $a = r_{HS}$. No caso da entropia, ela também possui o valor da solução de Schwarzschild em $a = 0$, porém quando comecemos a aumentar o valor de a , a entropia também cresce até atingir um valor máximo. Após esse ponto ser atingido, ela decai rapidamente até atingir o valor nulo em $a = r_{HS}$. Para $a > r_{HS}$, o valor da entropia não é válido, pois temos um buraco de minhoca sem horizonte de eventos. A Figura 8 mostra a entropia em função de r_{HS} para alguns valores específicos de a .

Agora podemos calcular a capacidade térmica:

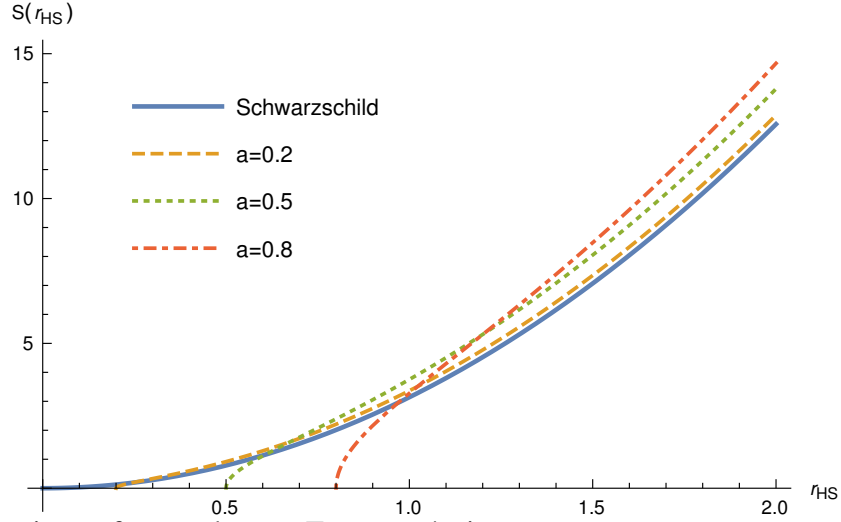


Figura 8: Entropia em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.

$$C_V = \frac{dm}{dr_H} \frac{dr_H}{dT_H} = \frac{r_H}{2\sqrt{r_H^2 + a^2}} \frac{4\pi(r_H^2 + a^2)^2}{(a^2 - r_H^2)}. \quad (4.63)$$

Como $C_{VS} = -2\pi r_{HS}^2$, onde C_{VS} é a capacidade térmica da solução de Schwarzschild [69], temos que:

$$C_V = -2\pi \frac{r_H (r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r_H^2 - a^2)} = C_{VS} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HS}^2}} \left(1 - \frac{2a^2}{r_{HS}^2}\right)^{-1}. \quad (4.64)$$

Aqui notamos novamente a consistência do resultado com relação à solução usual de Schwarzschild quando $a = 0$. Porém temos um fator de correção diferente dos que vimos para a temperatura de Hawking e para a entropia. O mesmo fator $\sqrt{1 - a^2/r_{HS}^2}$ aparece em todas elas, porém aqui temos um fator adicional que é o $(1 - 2a^2/r_{HS}^2)^{-1}$ que gera um efeito muito interessante, pois esse termo será positivo para todos valores de a no intervalo de 0 a $r_{HS}/\sqrt{2}$. Em $r_{HS}/\sqrt{2}$, esse fator diverge, pois o termo entre parênteses é nulo, mas como ele está elevado a -1 , a expressão será divergente, o que gera um problema para uma interpretação física do mesmo, pois além da divergência existe uma descontinuidade, já que quando a tende a $r_{HS}/\sqrt{2}$ pela esquerda ele tende a $+\infty$ e quando ele tende a este valor pela direita, o resultado é $-\infty$. Porém, quando $a > r_{HS}/\sqrt{2}$, o valor do fator que mencionamos troca de sinal, o que implica na inversão de sinal da própria capacidade térmica. Quando ocorre esta mudança de sinal, temos uma transição de fase, que neste caso é uma transição não suave, uma vez que ocorre uma assíntota vertical e, portanto, uma descontinuidade, semelhante ao que ocorre no caso da regularização da solução BTZ [70].

O sinal de C_V é importante para avaliarmos a estabilidade termodinâmica do buraco

negro, pois, se $C_V > 0$, isto implica que o buraco negro será termodinamicamente estável, e se $C_V < 0$, teremos uma solução instável [71]. Portanto, na solução usual, como a capacidade térmica será sempre negativa, o buraco negro é instável, mas na solução regularizada, a solução é instável apenas se $0 \leq a < r_{HS}/\sqrt{2}$, pois a capacidade térmica é negativa, e é estável se $r_{HS}/\sqrt{2} < a \leq r_{HS}$, já que neste intervalo a capacidade térmica é positiva. Por fim, quando a tende para r_{HS} , a capacidade térmica tende à zero. A Figura 9 mostra o comportamento da capacidade térmica em função de r_{HS} para alguns valores específicos de a .

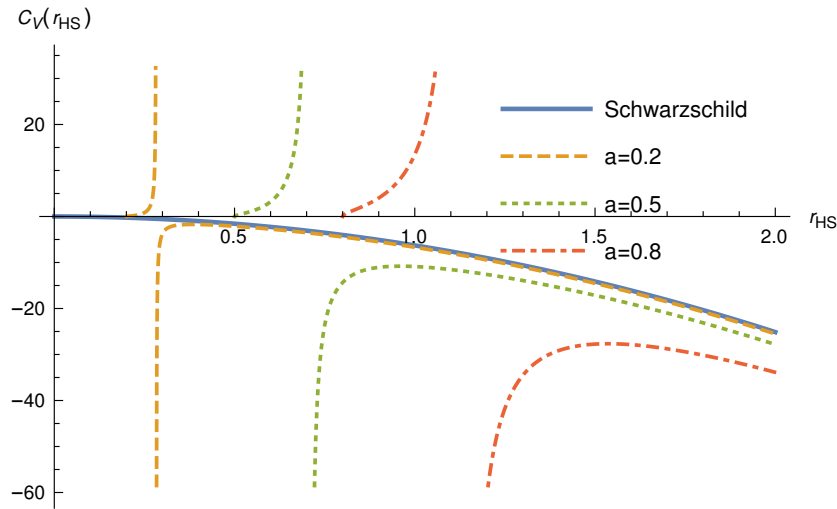


Figura 9: Capacidade térmica em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.

Por fim, vamos avaliar a energia livre de Helmholtz, dada por $F = m - T_{HS}S$ [70].

Substituindo seus valores e deixando tudo em função de r_{HS} , vamos obter:

$$F = \frac{\sqrt{r_H^2 + a^2}}{2} - \frac{r_H}{4\pi(r_H^2 + a^2)}S = \frac{r_{HS}}{2} - \frac{\sqrt{r_{HS}^2 - a^2}}{4\pi r_{HS}^2}S = F_S \left\{ 2 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HS}^2}} \left[\sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HS}^2}} + \frac{a^2}{r_{HS}^2} \ln \left(\frac{\sqrt{r_{HS}^2 - a^2} + r_{HS}}{a} \right) \right] \right\}, \quad (4.65)$$

onde $F_S = r_{HS}/4$ é a energia de Helmholtz da solução usual (isso pode ser determinado por substituição direta, pois $m - T_{HS}S_S = r_{HS}/2 - 1/(4\pi r_{HS})\pi r_{HS}^2 = r_{HS}/4$). O resultado continua consistente, pois quando $a \rightarrow 0$, $S \rightarrow S_S$ e recuperamos o resultado usual F_S . Aqui, também temos uma dependência não trivial da solução de F com relação à a e r_{HS} , e quando $a \rightarrow r_{HS}$, ao contrário das outras grandezas, F não tende a zero, mas sim para $2F_S$. A Figura 10 mostra o comportamento da energia livre de Helmholtz em função r_{HS} para alguns valores específicos de a . Vemos, nesta figura, que $F > 0$ em todos os casos exemplificados. A energia livre de

Helmholtz está relacionada com a estabilidade global da solução, enquanto a capacidade térmica indica a estabilidade local. A solução é globalmente estável se $F < 0$ e globalmente instável se $F > 0$ [72], que é o nosso caso, logo, temos que a solução, de forma global, é instável.

Um comentário geral que ocorre em todas as grandezas calculadas nesta seção é que todas elas tendem aos seus valores usuais, isto é, aos resultados válidos para a solução de Schwarzschild ($a = 0$), quando $r_{HS} \rightarrow \infty$. Isto porque, neste limite, a razão a/r_{HS} tende a zero, ou seja, este termo passa a ser desprezível, gerando o efeito análogo ao de fazer $a = 0$, que, como vimos, faz com que recuperemos os resultados da solução de Schwarzschild.

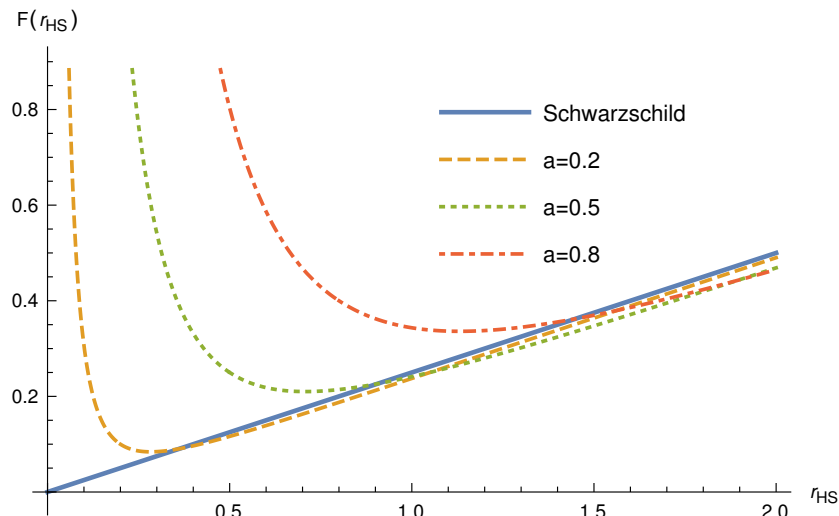


Figura 10: Energia livre de Helmholtz em função de r_{HS} . Fonte: próprio autor.

4.5.2 Órbitas circulares da solução de Simpson-Visser

Um resultado importante que podemos encontrar é o das órbitas circulares possíveis para esta solução, isto é, se é possível uma partícula massiva ou a própria luz realizar uma trajetória circular em torno do buraco negro regular ou buraco de minhoca de Simpson-Visser, dependendo do valor de a . Uma forma de avaliarmos isto é definindo a energia potencial efetiva (V_{eff}) do sistema formado pelo buraco negro regular/buraco de minhoca e uma partícula massiva ou um fóton. Após a determinação desta energia potencial, pode-se aplicar a condição básica para que uma órbita possa ser circular, ou seja, que seja um ponto de equilíbrio (ou, em termos matemáticos, um ponto em que a derivada em relação à coordenada radial da energia potencial seja nula), conforme [21, 73]. Existem dois tipos básicos de órbitas circulares, a órbita estável e a instável. A órbita estável é aquela em que, nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, a concavidade da função é positiva, ou seja, $V''_{eff} > 0$, e a instável, sua concavidade é negativa, portanto, $V''_{eff} < 0$ [74].

O raciocínio começa analisando a métrica, porém vamos diferenciar as coordenadas em relação ao tempo próprio:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + (r^2 + a^2) \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \text{sen}^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right]. \quad (4.66)$$

Devido à simetria esférica, podemos simplificar a nossa análise supondo $\theta = \pi/2$ e trabalhar com o problema equatorial. Definindo $(ds/d\tau)^2 \equiv \varepsilon$, podemos reescrever a equação (4.66):

$$\varepsilon = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + (r^2 + a^2) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \quad (4.67)$$

Agora é importante fazer duas definições que serão imprescindíveis para a análise da energia potencial efetiva que são a da energia por unidade massa, que será definida por E , e o momento angular por unidade de massa, que será definido por L . Segundo [60], podemos escrever essas grandezas pelas seguintes formas:

$$\frac{dt}{d\tau} = g^{00}E; \quad \frac{d\phi}{d\tau} = g^{33}L. \quad (4.68)$$

Portanto, sabendo que $g^{00} = 1/g_{00}$ e $g^{33} = 1/g_{33}$, e que $g_{00} = -(1 - 2m/\sqrt{r^2 + a^2})$ e $g_{33} = r^2 + a^2$, vamos obter os seguintes resultados para E e L :

$$E = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \frac{dt}{d\tau}; \quad L = (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (4.69)$$

Substituindo estes resultados em (4.67), obtemos:

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1} \left[-E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \right] + \frac{L^2}{r^2 + a^2}, \quad (4.70)$$

em que podemos isolar o termo $(dr/d\tau)^2$ e obter o resultado:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 + \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \left(\varepsilon - \frac{L^2}{r^2 + a^2} \right). \quad (4.71)$$

Seguindo o mesmo raciocínio de [21], podemos estabelecer a seguinte definição:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - V_{eff}(r), \quad (4.72)$$

logo, comparando a equação (4.71) com a (4.72), facilmente chegamos na expressão para V_{eff} :

$$V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \left(\frac{L^2}{r^2 + a^2} - \varepsilon\right). \quad (4.73)$$

Para a luz, como $ds^2 = 0$, vamos ter o valor 0 para $(ds/d\tau)^2$. Para uma partícula massiva, temos que $ds^2 = -d\tau^2$, logo $(ds/d\tau)^2 = -1$ [21]. Portanto, vamos ter $\varepsilon = 0$ para fótons, e $\varepsilon = -1$ para partículas massivas. Vamos começar analisando as possíveis órbitas circulares para fótons, também chamada de esfera de fótons. Fazendo $\varepsilon = 0$ na equação (4.73), vamos obter o valor da energia potencial efetiva para partículas não massivas:

$$V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \left(\frac{L^2}{r^2 + a^2}\right). \quad (4.74)$$

O próximo passo é impor a condição para se ter uma órbita circular que foi definida no início desta seção, ou seja, $V'_{eff}(r) = 0$:

$$V'_{eff}(r) = 2L^2 r \left(\frac{3m}{(r^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{1}{(r^2 + a^2)^2}\right) = \frac{2L^2 r}{(r^2 + a^2)^{5/2}} (3m - \sqrt{r^2 + a^2}) = 0. \quad (4.75)$$

Temos duas soluções possíveis. A primeira seria $r = 0$, porém essa solução não é razoável, pois não é possível haver uma órbita na origem do buraco negro ou na garganta do buraco de minhoca. Logo, devemos considerar apenas a segunda opção que é dada a seguir:

$$\sqrt{r^2 + a^2} = 3m \rightarrow r = \pm \sqrt{(3m)^2 - a^2}. \quad (4.76)$$

Considerando que o nosso universo seja aquele em a coordenada r é positiva, então vamos ter $r = \sqrt{(3m)^2 - a^2}$. Vemos, primeiramente que o resultado é consistente com o da solução de Schwarzschild quando fazemos $a = 0$, pois nela a posição da esfera de fótons é $r = 3m$ [62]. Também é importante notar que para este resultado ser possível, o argumento na raiz quadrada deve ser positivo para que r seja real. Logo, deveremos ter $a < 3m$, o que implica que podemos ter um buraco negro regular, qualquer que seja o parâmetro a , uma vez que o buraco negro regular corresponde a $0 < a < 2m$, podemos ter um buraco de minhoca de via-única, $a = 2m$, e também um buraco de minhoca tipo Morris-Thorne, desde que $2m < a < 3m$. Logo, para buracos de minhoca em que $a \geq 3m$, não é possível obter órbitas circulares para

fótons. Podemos agora analisar se essa órbita é estável ou instável analisando o sinal de V''_{eff} em $r = \sqrt{(3m)^2 - a^2}$:

$$V''_{eff}(r) = \frac{2L^2}{(r^2 + a^2)^{7/2}} [\sqrt{r^2 + a^2}(3r^2 - a^2) - 3m(4r^2 - a^2)] \quad (4.77)$$

$$V''_{eff}(r) \Big|_{r=\sqrt{(3m)^2 - a^2}} = -\frac{2L^2}{(3m)^6} [(3m)^2 - a^2]. \quad (4.78)$$

Como $(3m)^2 > a^2$, o resultado de (4.78) será sempre negativo, conseqüentemente, a órbita será instável, como podemos ver na Figura 11.

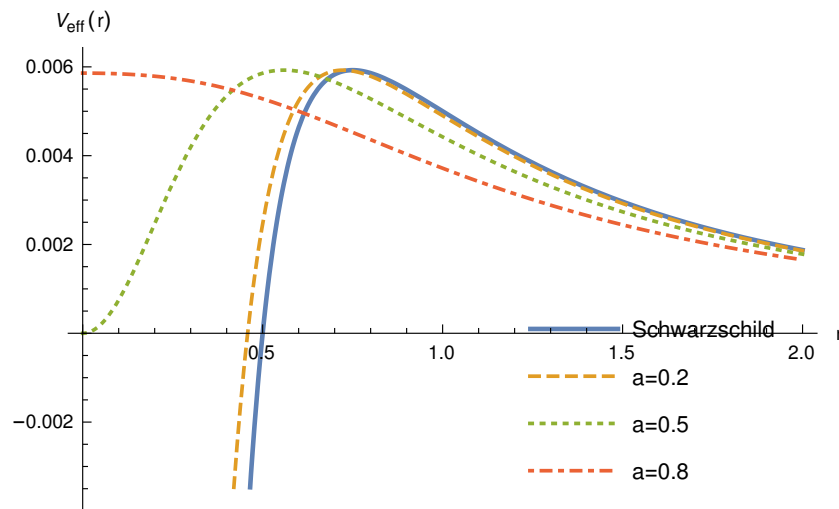


Figura 11: Energia potencial efetiva para partículas não massivas. Consideram-se $m = 0,25$ e $L = 1$. Fonte: próprio autor.

Agora vamos analisar a energia potencial efetiva de partículas massivas. Basta fazermos $\varepsilon = -1$ na equação (4.73), que irá resultar em:

$$V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \left(\frac{L^2}{r^2 + a^2} + 1\right). \quad (4.79)$$

Vamos repetir os mesmos passos que fizemos para o caso de partículas não massivas. Começamos impondo a condição $V'_{eff} = 0$:

$$V'_{eff}(r) = \frac{2r}{(r^2 + a^2)^{5/2}} [(3m - \sqrt{r^2 + a^2})L^2 + m(r^2 + a^2)] = 0. \quad (4.80)$$

Vamos novamente eliminar a solução $r = 0$. Porém, vamos fazer uma análise um pouco diferente desta vez. Vamos denotar por L_c o momento angular por unidade de massa da órbita circular, e r_c , a posição radial desta órbita. Assim, vamos obter:

$$(3m - \sqrt{r_c^2 + a^2})L_c^2 + m(r_c^2 + a^2) = 0 \rightarrow L_c = \sqrt{\frac{m(r_c^2 + a^2)}{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m}}. \quad (4.81)$$

A equação (4.81) descreve o momento angular por unidade de massa de uma partícula em função da posição da órbita circular, ou seja, temos uma infinidade de possibilidades desde que elas obedeçam a esta equação. Mas, podemos determinar qual é a menor órbita possível minimizando o valor do momento angular [21]. Essa órbita é chamada de *innermost stable circular orbit* ou ISCO. Antes de determinarmos qual é este valor, é interessante observar que a expressão para L_c possui também uma razoabilidade com o resultado newtoniano, pois, neste caso, se considerarmos uma órbita circular na teoria de Newton, teremos que $GM/r_c^2 = \omega^2 r_c$, mas como $L_c = \omega r_c^2$, então $GM/r_c^2 = L_c^2/r_c^3$, que resulta em $L_c = \sqrt{GM r_c}$, o que é próximo do resultado que obtemos na equação (4.81) se considerarmos $r_c \gg a$, pois neste caso teremos $L_c \approx \sqrt{m r_c}$ (lembre-se de que m não é apenas a massa, ela possui a constante G e velocidade da luz agregadas, de modo que, se considerarmos $m = GM/c^2$, fazendo $c = 1$, vamos obter $m = GM$ e, conseqüentemente, $L_c \approx \sqrt{GM r_c}$, recuperando assim o mesmo resultado newtoniano). Outra consistência que obtemos é quando fazemos $a = 0$, pois iremos obter:

$$L_c^2 = \frac{m r_c^2}{r_c - 3m}, \quad (4.82)$$

que é o mesmo que se obtêm para o caso da solução de Schwarzschild [62]. Agora vamos obter o ISCO diferenciando parcialmente a expressão da equação (4.81):

$$\frac{\partial L_c}{\partial r_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m}{m(r_c^2 + a^2)}} \left[\frac{m r_c \sqrt{r_c^2 + a^2} - 6m^2 r_c}{(\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m)^2} \right] \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial r_c} = \frac{1}{2} \frac{m r_c}{\sqrt{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m}} \frac{1}{\sqrt{m(r_c^2 + a^2)}} \left[\frac{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 6m}{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m} \right] \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial L_c}{\partial r_c} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{m r_c}}{\sqrt{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m}} \left[\frac{2}{\sqrt{r_c^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m} \right]. \quad (4.85)$$

A condição para minimizarmos o valor do momento angular é $\partial L_c / \partial r_c = 0$, na qual, eliminando a solução $r_c = 0$, vamos ter:

$$\frac{2}{\sqrt{r_c^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3m} = 0 \rightarrow \sqrt{r_c^2 + a^2} = 6m \rightarrow r_c = \sqrt{(6m)^2 - a^2}, \quad (4.86)$$

onde este valor para r_c corresponde à menor órbita circular estável possível (ISCO). Novamente, vemos a consistência do resultado com relação à solução de Schwarzschild, uma vez que, para $a = 0$, $r_c = 6m$, exatamente o valor obtido no caso de Schwarzschild [62]. Aqui notamos que o intervalo de validade desta solução (para que r_c seja real) em relação ao parâmetro a é $0 < a < 6m$, ou seja, podemos ter um buraco negro regular para qualquer parâmetro a , buraco de minhoca de via-única, e buraco de minhoca do tipo Morris-Thorne para $2m < a < 6m$, ou seja, para buracos de minhoca em que $a \geq 6m$, não é possível obter órbitas circulares para partículas massivas. A Figura 12 mostra a energia potencial efetiva em função de r para partículas massivas. Nota-se claramente que existe um ponto de equilíbrio em todos os casos, mas que é praticamente um ponto de inflexão, ou seja, ele está no limite entre uma solução estável e instável, por isso dizemos que é a menor órbita estável possível.

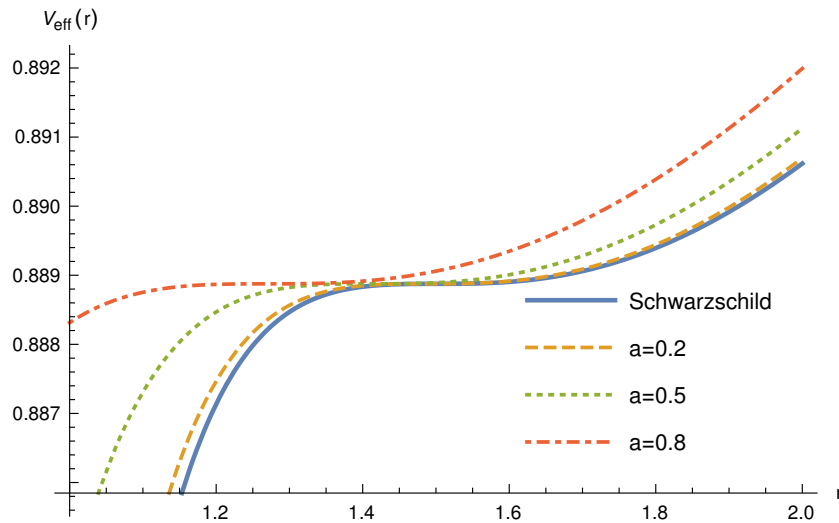


Figura 12: Energia potencial efetiva para partículas massivas. Consideram-se $m = 0,25$ e $L = 0,866$. Fonte: próprio autor.

É interessante notar também que podemos escrever esses resultados em função dos resultados da solução de Schwarzschild em que o fator $\sqrt{1 - a^2/k^2}$ aparece em cada um deles, pois:

$$r_F = 3m \sqrt{1 - \frac{a^2}{(3m)^2}} = r_{FS} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{FS}^2}} \quad (4.87)$$

$$r_I = 6m \sqrt{1 - \frac{a^2}{(6m)^2}} = r_{IS} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{IS}^2}}, \quad (4.88)$$

onde r_F é a posição da órbita circular de partículas não massivas (esfera de fótons) da solução de Simpson-Visser, r_{FS} é a posição da órbita circular para fótons da solução de Schwarzschild, r_I é posição da menor órbita circular estável para partículas massivas (ISCO) da solução de Simpson-Visser, e r_{IS} é a posição da menor órbita circular estável (ISCO) para a solução de Schwarzschild. Logo, para fótons, temos o fator $\sqrt{1 - a^2/k^2}$ com $k = 3m$, e, para partículas massivas, $k = 6m$.

5 REGULARIZAÇÃO DE SIMPSON-VISSER PARA UMA CORDA NEGRA

No capítulo anterior, vimos como usar uma modificação da métrica de Schwarzschild e encontrar uma solução que faz um salto de um buraco negro para um buraco de minhoca e que é regular, ou seja, não há singularidades para os tipos de soluções encontrados para esta métrica. Podemos estender esses resultados para outros tipos de soluções fazendo o mesmo raciocínio: analisar a métrica da solução de um determinado problema que possua singularidades (solução não-regular), fazer a mesma modificação usada por Simpson-Visser, isto é, fazer a troca $r^2 \rightarrow r^2 + a^2$, e analisar a solução novamente, para verificar a existência ou não de singularidades.

Nesse sentido, vamos fazer este procedimento para a solução de um buraco negro com simetria cilíndrica, também conhecido como corda negra (*black string*). Tomaremos como base o trabalho publicado por Lemos, em 1995, que pode ser encontrado em [2].

5.1 Solução de um buraco negro cilíndrico

Em Relatividade Geral, as principais soluções para buracos negros formam uma família de 4 parâmetros básicos chamados de família generalizada de Kerr-Newman. Os 4 parâmetros são a massa M , o momento angular J , a carga elétrica Q , e a constante cosmológica Λ . Todas essas soluções possuem simetria axial (axissimétricas), e podem ser assintoticamente planas (quando a constante cosmológica é nula), de *de Sitter* (se $\Lambda > 0$), ou *anti-de Sitter* (se $\Lambda < 0$), portanto, o comportamento assintótico depende diretamente da constante cosmológica [2].

Uma solução conhecida e mais básica de buraco negro é a de Schwarzschild, em que o seu horizonte de eventos se encontra em $r = 2m$ em unidades onde $c = 1$, e $m = GM$, em que M é a massa do buraco negro. Pode-se facilmente constatar isso pela definição matemática de horizonte de eventos definida em (3.4.3), isto é, $g_{00} = 0$, uma vez que, para esta solução, $g_{00} = -(1 - 2m/r)$. Essa solução possui simetria esférica, mas também podemos encontrar soluções com simetria cilíndrica, pois esta simetria também é axial.

Esse tipo de solução é particularmente importante para a cosmologia, pois no estudo da evolução do Universo, nas transições de fase que podem ter ocorrido após o *big bang*, estuda-se os chamados defeitos topologicamente estáveis, como as cordas cósmicas, que geram

resultados muito interessantes como a flutuação de densidade que permite explicar a criação de galáxias [75]. As cordas cósmicas são assintoticamente cônicas, logo possuem simetria cilíndrica [76], além de possuírem um déficit de ângulo $\Delta\phi = 8\pi G\mu_0$, onde μ_0 é a densidade linear de massa da corda, nas superfícies ortogonais à corda [77]. Porém, nesse período do surgimento e evolução do Universo, é provável que também se tinha a existência de buracos negros primitivos ou primordiais, que podem inclusive terem sido a fonte de matéria escura no Universo e também as fontes de buracos negros supermassivos que podem existir no interior das galáxias. Mais do que isso, esses buracos negros primordiais podem estar conectados às cordas cósmicas e os efeitos gerados por estas podem ser afetados de forma significativa por esses buracos negros e vice-versa [78]. Nesse contexto, podemos ter diversos tipos de soluções de buracos negros que podem fazer essa contraparte às cordas cósmicas, especialmente os que possuem simetria cilíndrica como os chamados de BTZ (Bañados-Teitelboim-Zanelli), em $2 + 1$ dimensões, e as cordas negras, em $3 + 1$ dimensões [79]. Outra aplicação importante da corda negra é no contexto de dimensões extras, pois ela é a solução de um modelo de p-branas com $p = 1$, onde p é a quantidade de dimensões espaciais extras além das 3 usuais, em que se tem um volume de p+1 dimensões de espaço-tempo. Em teoria das cordas, a corda negra descreve uma D1-brana, em que basicamente, considerando que o nosso Universo seja representado por uma brana (*world-brane*) em um espaço com dimensões extras, um colapso gravitacional produz um buraco negro na brana. Portanto, cordas negras são soluções das equações de Einstein em dimensões superiores [7].

Uma característica importante que devemos ressaltar é que a solução de corda negra é instável em um cenário assintoticamente plano, como os que normalmente trabalhamos em Relatividade Geral, ou seja, se a constante cosmológica for nula, não é possível ter corda negra estável [80]. Esta solução exige, portanto, a presença de constante cosmológica não nula e a mesma deve ser negativa (o espaço deve ser assintoticamente *anti de Sitter*) [2, 6].

O que vamos fazer agora é encontrar uma solução exata de um buraco-negro cilíndricamente simétrico para as equações de Einstein com constante cosmológica negativa, também chamada de corda negra [2]. Portanto, vamos trabalhar com coordenadas cilíndricas, ou seja, $x^\mu = (t, r, \phi, z)$, em unidades em que $c = 1$. Essas coordenadas variam segundo os seguintes intervalos: $t \in]-\infty, \infty[$; $r \in [0, \infty[$; $\phi \in [0, 2\pi[$; $z \in]-\infty, \infty[$. Como vimos, para este tipo de solução é necessário haver constante cosmológica. Portanto, é preciso fazer uma modificação nas equações de campo Einstein para acrescentar a constante cosmológica Λ na

equação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

em que esta constante foi tomada como sendo zero nos outros casos em que trabalhamos [42]. Agora é preciso definir como deve ser a métrica desse sistema para que esta seja determinada pelas equações de Einstein. Devido à simetria axial ($\phi \rightarrow -\phi$ e $z \rightarrow -z$ mantém a métrica invariante) e ao fato desta solução ser estática ($t \rightarrow -t$ mantém a métrica invariante), usando um raciocínio análogo ao feito para a métrica de Morris-Thorne, na seção (3.3), chega-se a conclusão que métrica deve ser ortogonal. Mais do que isso, ela deve seguir o seguinte padrão:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\phi^2 + \alpha^2r^2dz^2, \quad (5.2)$$

onde $\alpha^2 \equiv -\frac{1}{3}\Lambda > 0$, sendo a constante cosmológica negativa, como mencionamos. Este *ansatz* para a métrica é o mesmo usado em [2, 6]. Para resolvermos as equações de Einstein, devemos calcular as componentes do tensor de Einstein usando a métrica definida na expressão (5.2). Entretanto, para o nosso propósito, só é necessário usar uma componente do tensor de Einstein, a componente G_{00} . Seguindo o mesmo raciocínio do capítulo anterior, vamos trabalhar com este tensor de modo que ele seja do tipo (1, 1), ou seja, na forma G^0_0 . Desta forma, a equação (5.1) deve ser adaptada para:

$$G^\mu_\nu + \delta^\mu_\nu \Lambda = 8\pi GT^\mu_\nu, \quad (5.3)$$

onde consideramos $c = 1$. Portanto, vamos obter o seguinte valor para G^0_0 :

$$G^0_0 = \frac{[f(r) + rf'(r)]}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}[rf(r)], \quad (5.4)$$

onde $f'(r) = df(r)/dr$. O tensor momento energia estará restrito apenas ao eixo “z”, exatamente como se fosse uma corda infinita de matéria, ou seja, enquanto na simetria esférica considera-se que a matéria colapsa no centro do sistema de coordenadas, na origem, aqui considera-se que a matéria colapsou numa reta que coincide com o eixo “z”, como um fio infinito. Portanto, podemos representar a componente T^0_0 por uma distribuição delta de Dirac, por exemplo, por $T^0_0 = \kappa\delta(r)$, onde κ é uma constante. Como estamos interessados na região em que $r \neq 0$, podemos então assumir que, nessa região, $T^0_0 = 0$. Logo, teremos:

$$G^0_0 + \delta_0^0 \Lambda = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [rf(r)] + \Lambda = 0 \quad (5.5)$$

$$d[rf(r)] = -\Lambda r^2 dr \rightarrow f(r) = -\frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{C}{r}, \quad (5.6)$$

onde C é uma constante de integração. Mas já vimos que $-\Lambda/3 = \alpha^2$. Definindo $C \equiv -b/\alpha$, temos que:

$$f(r) = \alpha^2 r^2 - \frac{b}{\alpha r}. \quad (5.7)$$

Portanto, podemos reescrever a métrica definida em (5.2):

$$ds^2 = - \left(\alpha^2 r^2 - \frac{b}{\alpha r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\alpha^2 r^2 - \frac{b}{\alpha r} \right)} + r^2 d\phi^2 + \alpha^2 r^2 dz^2. \quad (5.8)$$

Essa é a solução para um buraco negro que possui simetria axial e que se entende por todo o eixo z , isto é, o horizonte de eventos ocorre dentro de uma região circular e que se mantém ao longo do eixo z de $-\infty$ a ∞ . O horizonte de eventos pode ser determinado simplesmente fazendo $g_{00} = 0$:

$$\alpha^2 r^2 - \frac{b}{\alpha r} = 0 \rightarrow \alpha r = b^{1/3} \rightarrow r \equiv r_{HL} = \frac{b^{1/3}}{\alpha}. \quad (5.9)$$

Essa solução não é regular, pois o escalar de Kretschmann do mesmo é dado por:

$$R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} = 24\alpha^4 \left(1 + \frac{b^2}{2\alpha^6 r^6} \right), \quad (5.10)$$

portanto, é singular em $r = 0$. Outro resultado interessante é que o escalar de Ricci será constante e proporcional à constante cosmológica, pois, supondo $r \neq 0$, teremos $T^\mu_\nu = 0$, logo:

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R + \delta_\nu^\mu \Lambda = 0. \quad (5.11)$$

Contraindo μ com ν :

$$R - \frac{4}{2} R = -4\Lambda \rightarrow R = 4\Lambda. \quad (5.12)$$

Como $\Lambda = -3\alpha^2$, teremos $R = -12\alpha^2$, logo, o sinal do escalar de Ricci será o mesmo da constante cosmológica, nesse caso, negativo. Além disso, vemos claramente que de fato essa

solução não será assintoticamente plana, já que o escalar de Ricci é uma constante diferente de zero, logo, no limite assintótico, o escalar de Ricci será diferente zero, evidenciando que existe curvatura quando nos afastamos da fonte da corda negra.

Nosso objetivo agora é tentar encontrar uma solução regular a partir desta solução básica de uma corda negra sem rotação.

5.2 Regularização da solução de uma corda negra

Para fazer a regularização, novamente vamos fazer a mudança em r para acrescentar o parâmetro a , de acordo com o que foi feito em [21], e fazer as análises pertinentes da solução para os possíveis valores deste parâmetro. A métrica passará a ter a seguinte forma:

$$ds^2 = - \left(\alpha^2(r^2 + a^2) - \frac{b}{\alpha\sqrt{r^2 + a^2}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\alpha^2(r^2 + a^2) - \frac{b}{\alpha\sqrt{r^2 + a^2}} \right)} + (r^2 + a^2)d\phi^2 + \alpha^2(r^2 + a^2)dz^2, \quad (5.13)$$

onde a coordenada r , assim como definimos para a métrica de Simpson-Visser na equação (4.3), varia no intervalo de $-\infty$ a ∞ .

Vemos, por exemplo, que a função $f(r)$ agora sofreu uma modificação em relação àquela que determinamos na equação (5.7), em que ela tem comportamentos diferentes a depender do parâmetro a como detalharemos na seção seguinte e que pode ser vista na figura abaixo:

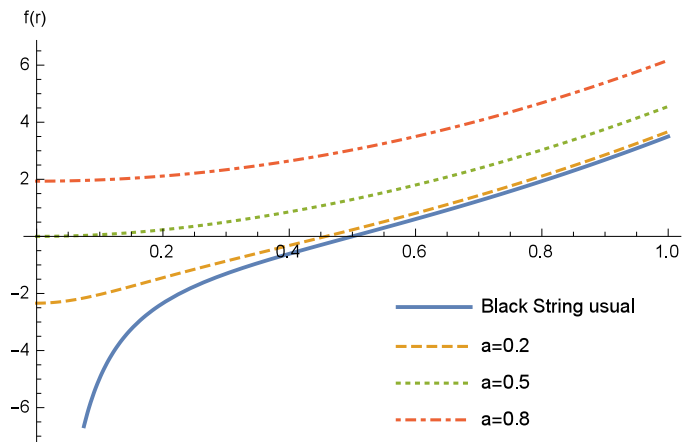


Figura 13: Função $f(r)$ da solução regularizada para alguns valores específicos de a . Consideram-se $\alpha = 2$ e $b = 1$. Fonte: próprio autor.

Por questão de simplicidade, iremos fazer uma mudança de coordenadas nesta solução que será apresentada na seção seguinte de uma forma mais detalhada.

5.2.1 Mudança de coordenada na métrica

Uma forma mais simples de realizar a regularização de Simpson-Visser e de visualizar os resultados, principalmente as transições entre buraco negro e buraco de minhoca dependendo do parâmetro “a”, é fazer uma mudança na coordenada radial:

$$\bar{r}^2 = r^2 + a^2 \rightarrow \bar{r} = \pm\sqrt{r^2 + a^2}. \quad (5.14)$$

Este processo é similar ao encontrado em [81], entretanto neste trabalho o autor chama a nova coordenada por R , enquanto estamos nomeando esta nova coordenada por \bar{r} . Assim:

$$r = \pm\sqrt{\bar{r}^2 - a^2} \rightarrow dr = \pm\frac{\bar{r}d\bar{r}}{\sqrt{\bar{r}^2 - a^2}} \quad (5.15)$$

$$dr^2 = \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}^2}{\bar{r}^2 - a^2} = \frac{d\bar{r}^2}{1 - \frac{a^2}{\bar{r}^2}}. \quad (5.16)$$

Assim, podemos reescrever a métrica (5.13) da seguinte forma:

$$ds^2 = -\left(\alpha^2 \bar{r}^2 - \frac{b}{\alpha \bar{r}}\right) dt^2 + \frac{d\bar{r}^2}{\left(1 - \frac{a^2}{\bar{r}^2}\right) \left(\alpha^2 \bar{r}^2 - \frac{b}{\alpha \bar{r}}\right)} + \bar{r}^2 d\phi^2 + \alpha^2 \bar{r}^2 dz^2. \quad (5.17)$$

que pode ser reescrita em função da posição do horizonte de eventos $\bar{r}_H = b^{1/3}/\alpha$:

$$ds^2 = -\alpha^2 \bar{r}^2 \left(1 - \frac{\bar{r}_H^3}{\bar{r}^3}\right) dt^2 + \frac{d\bar{r}^2}{\alpha^2 \bar{r}^2 \left(1 - \frac{a^2}{\bar{r}^2}\right) \left(1 - \frac{\bar{r}_H^3}{\bar{r}^3}\right)} + \bar{r}^2 d\phi^2 + \alpha^2 \bar{r}^2 dz^2. \quad (5.18)$$

Antes de determinar os tensores e os invariantes de curvatura, vamos realizar a mesma análise das curvas radiais nulas, isto é, vamos fazer $ds^2 = d\phi = dz = 0$ para obter:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \pm\alpha^2 \bar{r}^2 \left(1 - \frac{\bar{r}_H^3}{\bar{r}^3}\right) \sqrt{1 - \frac{a^2}{\bar{r}^2}}. \quad (5.19)$$

Como $\bar{r} = \pm\sqrt{r^2 + a^2}$, para $r = 0$, vamos ter $\bar{r} = \pm a$, logo, a é o valor mínimo que a coordenada radial poderá ter, semelhante à “garganta” de um buraco de minhoca. Se $a > \bar{r}_H$, como $\bar{r} \geq a$, pois esse é o intervalo natural de validade de \bar{r} , além de que o radicando deve ser positivo para que o resultado de (5.17) seja real, o que só é verdade neste intervalo para \bar{r} , o horizonte de eventos nunca será alcançado, isto é, o termo temporal da métrica nunca se anulará, o que

implica que $d\bar{r}/dt$ será sempre diferente de zero, exceto em $\bar{r} = a$, mas esse valor se encontra fora do horizonte de eventos. Portanto, essa solução é característica de um buraco de minhoca atravessável, porém não é do tipo Morris-Thorne, já que sua simetria não é esférica, mas sim cilíndrica (para mais informações sobre buracos de minhoca cilíndricos, consultar [82]). Se $a = \bar{r}_H$, significa que em $\bar{r} = a$ vamos ter um horizonte de eventos, exatamente na “garganta” do buraco de minhoca, semelhante ao exemplo de Simpson-Visser. Portanto, vamos ter um buraco de minhoca com via-única de movimento. Por fim, para $a < \bar{r}_H$, o horizonte de eventos poderá ser alcançado em um valor diferente do valor mínimo a , pois este possui um valor menor que o do horizonte e a coordenada \bar{r} pode assumir qualquer valor maior ou igual a a , conseqüentemente, à medida que a coordenada se afastar do valor mínimo que é o próprio a , ela se aproximará e em determinado ponto atingirá o horizonte, indicando a então uma solução de buraco negro.

A Figura 13 deixa essa análise bem clara, em que podemos usar uma argumentação muito similar à que fizemos ao analisar a Figura 5, onde aqui temos $b^{1/3}/\alpha = 0,5$ e temos os três tipos de soluções (buraco negro regular, buraco de minhoca *one-way*, e buraco de minhoca atravessável) para os valores $a = 0,2$, $a = 0,5$, e $a = 0,8$, respectivamente. Assim como naquele caso, temos que para $a = 0,2$ a função $f(r)$ cruza o eixo r um pouco antes de $0,5$, pois o horizonte de eventos se encontra em $\sqrt{b^{2/3}/\alpha^2 - a^2}$, conforme veremos na seção 5.3, para $a = 0,5$, a função cruza o eixo r em $r = 0$, o que é esperado para o buraco de minhoca com horizonte na garganta, e para $a = 0,8$, a função não cruza o eixo r , indicando a ausência de horizonte e, portanto, mostrando que se trata de um buraco de minhoca atravessável. É importante ressaltar que, na Figura 13, estamos usando a coordenada r , enquanto que na análise que foi feita nesta seção, estamos trabalhando com a nova coordenada \bar{r} , mas as propriedades da métrica continuam sendo válidas, pois, como vimos no Princípio da Covariância Geral, a física deve permanecer igual mediante qualquer transformação de coordenadas. Isto explica o fato da métrica ter as mesmas propriedades tanto na coordenada r como em \bar{r} .

Agora precisamos analisar os tensores e os invariantes de curvatura para analisar a regularidade ou não destas soluções e por fim analisar as equações de Einstein e as condições de energia, assim como fizemos com a solução de Simpson-Visser.

5.2.2 *Tensores e invariantes de curvatura*

Nosso trabalho agora é determinar os tensores de Riemann e de Ricci, assim como os escalares de Ricci, contração de Ricci, e de Kretschmann, a partir da métrica definida na

equação (5.17). O primeiro passo é determinar as conexões de Christoffel que podem ser determinadas a partir da equação (2.28), onde vamos obter os seguintes valores para os símbolos não nulos:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{2\bar{r}^3 + \bar{r}_H^3}{2\bar{r}(\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)}; \Gamma_{00}^1 = \frac{\alpha^4(\bar{r}^2 - a^2)(\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)(2\bar{r}^3 + \bar{r}_H^3)}{2\bar{r}^5}; \quad (5.20)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{3a^2\bar{r}_H^3 - \bar{r}^2(2\bar{r}^3 + \bar{r}_H^3)}{2\bar{r}(\bar{r}^2 - a^2)(\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)}; \Gamma_{22}^1 = \frac{\alpha^2(a^2 - \bar{r}^2)(\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)}{\bar{r}^2}; \quad (5.21)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{\alpha^4(a^2 - \bar{r}^2)(\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)}{\bar{r}^2}; \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{\bar{r}}. \quad (5.22)$$

Dados esses valores, podemos determinar as componentes não nulas do tensor de Riemann:

$$R^{01}{}_{01} = \frac{\alpha^2(2\bar{r}_H^3\bar{r}^2 - 3a^2\bar{r}_H^3 - 2\bar{r}^5)}{2\bar{r}^5}; \quad (5.23)$$

$$R^{02}{}_{02} = R^{03}{}_{03} = \frac{\alpha^2(a^2 - \bar{r}^2)(2\bar{r}^3 + \bar{r}_H^3)}{2\bar{r}^5}; \quad (5.24)$$

$$R^{12}{}_{12} = R^{13}{}_{13} = \frac{\alpha^2(3a^2\bar{r}_H^3 - \bar{r}_H^3\bar{r}^2 - 2\bar{r}^5)}{2\bar{r}^5}; \quad (5.25)$$

$$R^{23}{}_{23} = \frac{\alpha^2(a^2 - \bar{r}^2)(\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)}{\bar{r}^5}. \quad (5.26)$$

Aqui estamos seguindo o mesmo raciocínio do resultado de Simpson-Visser de utilizar o tensor de Riemann com dois índices contravariantes e dois covariantes.

As componentes não nulas do tensor de Ricci agora podem ser determinadas:

$$R^0{}_0 = \frac{\alpha^2[a^2(4\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3) - 6\bar{r}^5]}{2\bar{r}^5}; \quad (5.27)$$

$$R^1{}_1 = \frac{\alpha^2(3a^2\bar{r}_H^3 - 6\bar{r}^5)}{2\bar{r}^5}; \quad (5.28)$$

$$R^2{}_2 = R^3{}_3 = \frac{a^2\alpha^2}{\bar{r}^2} \left(\frac{\bar{r}_H^3}{\bar{r}^3} + 2 \right) - 3\alpha^2. \quad (5.29)$$

Somando todas essas componentes, temos o escalar de Ricci:

$$R = -12\alpha^2 + \frac{3a^2\alpha^2(\bar{r}_H^3 + 2\bar{r}^3)}{\bar{r}^5}. \quad (5.30)$$

Com as componentes do tensor de Ricci e com o escalar de Ricci podemos determinar as componentes não nulas do tensor de Einstein:

$$G^0_0 = \frac{\alpha^2[3\bar{r}^5 - a^2(\bar{r}^3 + 2\bar{r}_H^3)]}{\bar{r}^5}; \quad (5.31)$$

$$G^1_1 = \frac{3\alpha^2(\bar{r}^2 - a^2)}{\bar{r}^2}; \quad (5.32)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = 3\alpha^2 - \frac{a^2\alpha^2}{\bar{r}^2} \left(\frac{\bar{r}_H^3}{2\bar{r}^3} + 1 \right). \quad (5.33)$$

Por fim, a contração de Ricci e o escalar de Kretschmann são:

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 36\alpha^4 - \frac{18a^2\alpha^4(\bar{r}_H^3 + 2\bar{r}^3)}{\bar{r}^5} + \frac{3a^4\alpha^4(3\bar{r}_H^6 + 4\bar{r}_H^3\bar{r}^3 + 8\bar{r}^6)}{2\bar{r}^{10}}; \quad (5.34)$$

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{3\alpha^4[a^4(11\bar{r}_H^6 + 4\bar{r}^6) - 4a^2(3\bar{r}_H^6\bar{r}^2 + \bar{r}_H^3\bar{r}^5 + 2\bar{r}^8)]}{\bar{r}^{10}} + \frac{12\alpha^4(\bar{r}_H^6 + 2\bar{r}^6)}{\bar{r}^6}. \quad (5.35)$$

Analisando as componentes do tensor de Riemann e os escalares de curvatura no valor mínimo de \bar{r} que é a , ou seja, fazendo $\bar{r} \rightarrow a$ vamos obter os seguintes resultados:

$$R^{01}_{01} \rightarrow -\frac{\alpha^2(\bar{r}_H^3 + 2a^3)}{2a^3}; \quad (5.36)$$

$$R^{02}_{02} = R^{03}_{03} = 0; \quad (5.37)$$

$$R^{12}_{12} = R^{13}_{13} = \frac{\alpha^2(\bar{r}_H^3 - a^3)}{a^3}; \quad (5.38)$$

$$R^{23}_{23} = 0; \quad (5.39)$$

$$R = -12\alpha^2 + \frac{3\alpha^2(\bar{r}_H^3 + 2a^3)}{a^3}. \quad (5.40)$$

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 12\alpha^4 - \frac{12\alpha^4\bar{r}_H^3}{a^3} + \frac{9\alpha^4\bar{r}_H^6}{2a^6}; \quad (5.41)$$

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{3\alpha^4(3\bar{r}_H^6 + 4a^6 - 4\bar{r}_H^3a^3)}{a^6}. \quad (5.42)$$

Portanto, supondo $a \neq 0$, vemos que não há singularidades na curvatura deste espaço-tempo, ou seja, temos uma solução regular para qualquer parâmetro a não nulo. Porém, esta solução é um pouco diferente da encontrada por Simpson-Visser, pois a sua métrica não é assintoticamente plana, o que pode ser visto quando fazemos a mesma análise, porém com $|r| \rightarrow \infty$, pois todas as componentes do tensor de Riemann tenderão a $-\alpha^2$, o escalar de Ricci tenderá a $-12\alpha^2$, a contração de Ricci, para $36\alpha^4$ e o escalar de Kretschmann, para $24\alpha^4$, ou seja, mesmo no “infinito”, ou seja, bem distante da fonte que gera a curvatura no espaço-tempo, ainda temos curvatura não nula dependendo da constante α , que por sua vez depende da constante cosmológica. Seguindo o mesmo raciocínio usado em Simpson-Visser, vamos agora avaliar a matéria que gera a métrica definida em (5.17) e analisar as condições de energia.

5.2.3 Tensor momento-energia da corda negra e condições de energia

Seguindo o mesmo raciocínio do caso de Simpson-Visser, podemos definir as pressões do tensor momento-energia da seguinte forma:

$$T^1_1 = p_{\parallel}; T^2_2 = T^3_3 = p_{\perp}. \quad (5.43)$$

A princípio teríamos que definir $T^2_2 = p_{\phi}$ e $T^3_3 = p_z$, mas como $G^2_2 = G^3_3$, então teremos $T^2_2 = T^3_3$, que será uma pressão lateral p_{\perp} . A componente T^0_0 será $-\rho$, como vimos na seção (4.4).

As equações de Einstein para os tensores do tipo (1, 1), o caso do tensor de Einstein e do tensor momento-energia, serão as definidas na equação (5.3). Para os índices μ e ν iguais a zero, vamos ter:

$$G^0_0 + \delta^0_0\Lambda = 8\pi GT^0_0 \rightarrow \rho = \frac{\alpha^2 a^2(\bar{r}^3 + 2\bar{r}_H^3)}{8\pi G\bar{r}^5}. \quad (5.44)$$

Para μ e ν iguais a 1 e a 2, respectivamente, vamos ter:

$$G^1_1 + \delta^1_1 \Lambda = 8\pi G T^1_1 \rightarrow p_{\parallel} = -\frac{3\alpha^2 a^2}{8\pi G \bar{r}^2} \quad (5.45)$$

$$G^2_2 + \delta^2_2 \Lambda = 8\pi G T^2_2 \rightarrow p_{\perp} = -\frac{a^2 \alpha^2 (2\bar{r}^3 + \bar{r}_H^3)}{16\pi G \bar{r}^5}. \quad (5.46)$$

Fazendo agora $\rho + p_{\parallel}$, vamos ter:

$$\rho + p_{\parallel} = \frac{\alpha^2 a^2 (\bar{r}^3 + 2\bar{r}_H^3)}{8\pi G \bar{r}^5} - \frac{3\alpha^2 a^2}{8\pi G \bar{r}^2} = -\frac{2a^2 \alpha^2 (\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)}{8\pi G \bar{r}^5}, \quad (5.47)$$

resultado válido fora do horizonte de eventos, ou seja, para $\bar{r} > \bar{r}_H$. Vemos, portanto, que o lado direito da equação (5.47) será negativo sempre, uma vez que todos os termos ali serão positivos, porém existe um sinal de menos multiplicando toda a expressão. Isto implica em $\rho + p_{\parallel} < 0$, ou seja, a condição nula de energia novamente é violada.

Considerando a região no interior do horizonte de eventos, onde $\bar{r} < \bar{r}_H$, temos que inverter as características do tipo-espaco e do tipo-tempo, o que implica em $T^0_0 = p_{\parallel}$ e $T^1_1 = -\rho$. Fazendo um raciocínio análogo ao que fizemos para a região fora do horizonte, isto é, resolvendo as equações de Einstein para os índices 0 e 1 e somando a densidade de massa-energia com a tensão radial, teremos:

$$\rho + p_{\parallel} = \frac{3\alpha^2 a^2}{8\pi G \bar{r}^2} - \frac{\alpha^2 a^2 (\bar{r}^3 + 2\bar{r}_H^3)}{8\pi G \bar{r}^5} = \frac{2a^2 \alpha^2 (\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3)}{8\pi G \bar{r}^5}, \quad (5.48)$$

que neste caso também será sempre negativo, o que implica que a violação da condição nula de energia ocorrerá em todos os casos. A Figura 8 mostra as funções ρ , p_{\parallel} , e $\rho + p_{\parallel}$ dentro do horizonte de eventos. Podemos então fazer uma generalização desses resultados para ambos os casos, dentro e fora do horizonte de eventos:

$$\rho + p_{\parallel} = -\frac{2a^2 \alpha^2 |\bar{r}^3 - \bar{r}_H^3|}{8\pi G \bar{r}^5}. \quad (5.49)$$

Concluimos que a regularização da métrica da corda negra segue o mesmo padrão da regularização da solução de Schwarzschild feita por Simpson-Visser: ela pode gerar um buraco de minhoca ou buraco negro dependendo do parâmetro a utilizado na métrica, suas soluções são todas regulares (sem singularidades) se $a \neq 0$, porém as condições de energia do sistema são violadas, ou seja, o tipo de regularização feito por Simpson-Visser trás como consequência a violação das condições do sistema, análogo ao fizemos ao que analisar o buraco de minhoca de Morris-Thorne [21].

Um outro ponto importante para efeito de comparação é que ao fazer $a = 0$, ou seja, recuperando a solução da corda negra usual, vamos obter o resultado trivial $\rho = p_{\parallel} = p_{\perp} = 0$, o que é consistente com a nossa análise da seção (5.1), já que para $r \neq 0$, temos que ter $T^{\mu}_{\nu} = 0$.

5.3 Aplicações da solução regular de uma corda negra

Até agora, já estudamos a geometria de espaço-tempo descrita pela métrica de uma corda negra regularizada, onde concluímos que podemos ter solução para buraco negro ou buraco de minhoca, dependendo do parâmetro a , e verificamos que se trata de uma solução regular para a corda negra, ou seja, sem singularidades. Depois fizemos uma análise das condições de energia desse sistema, em que chegamos à conclusão de que estas serão sempre violadas, seja dentro ou fora do horizonte de eventos.

Nesta seção veremos algumas das aplicações para esta métrica, que são algumas propriedades termodinâmicas, e as possíveis órbitas circulares estáveis ou instáveis para fótons e partículas massivas. Para essas análises, trabalharemos com a métrica na forma (5.13), seguindo a metodologia de Simpson-Visser em [21]. É importante notar que, nesta forma, a posição do horizonte de eventos será diferente, já que g_{00} possui uma outra forma (por isso não devemos confundir esta posição com \bar{r}_H , pois são coordenadas distintas). Definindo esta posição por r_H , temos que:

$$r_H = \pm \sqrt{r_{HL}^2 - a^2}, \quad (5.50)$$

onde, como já vimos, $r_{HL} = b^{1/3}/\alpha$. Vemos que este resultado é semelhante ao que vimos na solução de Simpson-Visser. Por questão de simplicidade, vamos trabalhar apenas com sinal positivo da coordenada r e, conseqüentemente, apenas com este sinal na equação (5.50).

5.3.1 Termodinâmica da corda negra regular

Nosso objetivo é seguir o mesmo raciocínio usado na solução de Simpson-Visser para obter as propriedades termodinâmicas do buraco negro regular, porém agora usando a métrica da corda negra regular. Assim como fizemos em (4.5.1), vamos primeiro calcular a temperatura de Hawking, a entropia, capacidade térmica, e, por fim, a energia livre de Helmholtz.

Sabendo que o termo da métrica g_{00} é dado por $-\left[\alpha^2(r^2 + a^2) - b/(\alpha\sqrt{r^2 + a^2})\right]$, usando a equação (5.16), podemos determinar a temperatura de Hawking da corda negra regular:

$$T_H = \frac{3\alpha^2}{4\pi} \sqrt{r_{HL}^2 - a^2} = T_{HL} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HL}^2}}, \quad (5.51)$$

onde $T_{HL} = 3\alpha^2 r_{HL}/(4\pi)$ é a temperatura da solução da black string comum [71, 83]. Aqui podemos ver o mesmo padrão observado em [21], isto é, temos um fator de correção em relação a solução não regular do tipo $\sqrt{1 - a^2/k^2}$, onde $k = r_{HL}$. Vemos que, para $a = 0$, recuperamos a solução usual da black string, mostrando sua consistência. Quando temos $a < r_{HL}$, a temperatura tende a diminuir em relação à T_{HL} , de modo que, à medida em que $a \rightarrow r_{HL}$, T_H tende à zero, tal que este é atingido quando temos o caso do buraco de minhoca de garganta extrema onde $a = r_{HL}$. Para $a > r_{HL}$, o resultado obtido em (5.51) não é mais válido, o que é razoável, uma vez que neste intervalo não temos mais um buraco negro e sim um buraco de minhoca sem horizonte de eventos.

A Figura 14 mostra gráficos da temperatura de Hawking em função de r_{HL} para a solução usual da corda negra e para a solução regular da corda negra com diferentes valores para o parâmetro a .

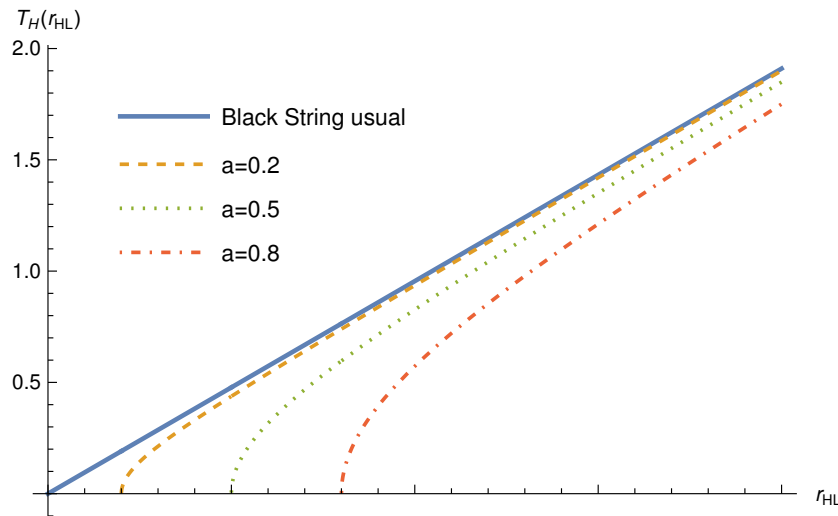


Figura 14: Temperatura de Hawking em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.

Agora, podemos escrever o parâmetro b , definido na métrica da corda negra, por $4M$ [73]. Logo, como $b = \alpha^3(r_H^2 + a^2)^{3/2}$, temos que:

$$dM = \frac{3}{4} \alpha^3 r_H \sqrt{r_H^2 + a^2} dr_H. \quad (5.52)$$

Agora, podemos escrever T_H em função de r_H e integrar a expressão dM/T_H para obter a entropia:

$$S = S_L \left[\sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HL}^2}} + \frac{a^2}{r_{HL}^2} \ln \left(\frac{\sqrt{r_{HL}^2 - a^2} + r_{HL}}{a} \right) \right], \quad (5.53)$$

onde $S_L = (\alpha/2)\pi r_{HL}^2$ é a entropia da black string usual [71,83]. Vemos que a forma da entropia segue exatamente o mesmo padrão da solução da entropia para o caso de Simpson-Visser. A Figura 15, de maneira análoga à figura 14, mostra a entropia em função de r_{HL} para valores específicos de a .

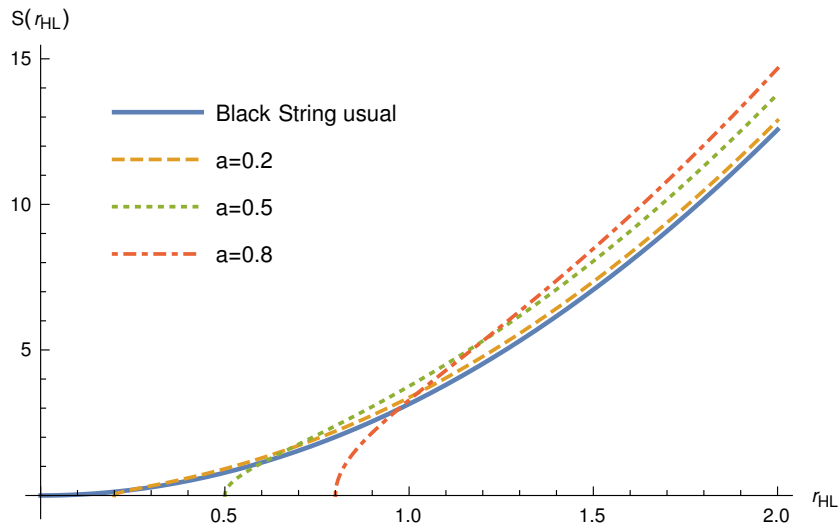


Figura 15: Entropia em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.

Podemos agora calcular a capacidade térmica:

$$C_V = \frac{dM}{dr_H} \frac{dr_H}{dT_H} = \alpha \pi r_H \sqrt{r_H^2 + a^2} = C_{VL} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HL}^2}}, \quad (5.54)$$

onde $C_{VL} = \alpha \pi r_{HL}^2$ é o valor da capacidade térmica da black string usual (podemos determinar este resultado de forma direta fazendo a diferenciação dM/dT_{HL} , sabendo que $dM/dT_{HL} = (dM/dr_{HL})(dr_{HL}/dT_{HL})$, $M = \alpha^3 r_{HL}^3/4$, e que $T_{HL} = 3\alpha^2 r_{HL}/(4\pi)$). Vemos que ela segue exatamente o mesmo padrão da temperatura, ou seja, temos o fator $\sqrt{1 - a^2/r_{HL}^2}$ corrigindo o valor usual da capacidade térmica, portanto, pode-se recuperar o resultado usual fazendo $a = 0$, como se esperava. Vê-se, na equação (5.54), que C_V será sempre positivo, assim como C_{VL} , indicando que essa solução será sempre estável [84], sem possibilidades de evaporação, por exemplo. Aqui temos uma diferença em relação ao resultado de Simpson-Visser, dado na equação (4.64), pois lá tínhamos uma transição de fase em $a = r_{HS}/\sqrt{2}$ devido ao fator $(1 - 2a^2/k^2)^{-1}$ que era presente na sua expressão matemática e que não aparece na equação (5.54), o que explica a não ocorrência de transição de fase para a capacidade térmica da corda

negra.

A Figura 16, de maneira análoga à figura 14, mostra a capacidade térmica em função de r_{HL} para valores específicos de a .

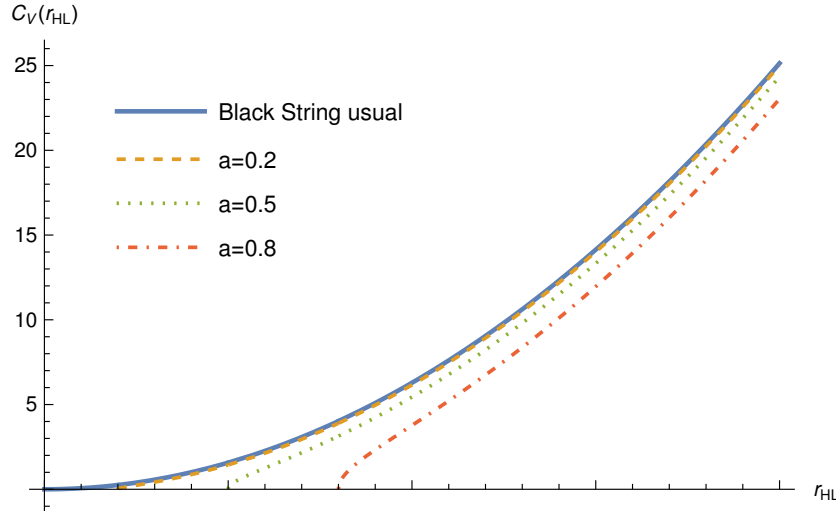


Figura 16: Capacidade térmica em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.

Por fim, vamos obter a energia de Helmholtz. Usando o fato de que $M = b/4$ e usando as equações (5.51) e (5.53), vamos obter:

$$F = F_L \left(3\sqrt{1 - \frac{a^2}{r_{HL}^2} \frac{S}{S_L}} - 2 \right), \quad (5.55)$$

onde $F_L = -\alpha^3 r_{HL}^3 / 8$ é a energia livre da solução usual (basta resolver a expressão $M - T_{HL} S_L = \alpha^3 r_{HL}^3 / 4 - [3\alpha^2 r_{HL} / (4\pi)] (\alpha \pi r_{HL}^2 / 2) = -\alpha^3 r_{HL}^3 / 8$). Aqui podemos ver um padrão semelhante ao que é encontrado na regularização do buraco negro tipo BTZ [70], quando a está próximo de zero, a energia é negativa, porém, quando a se aproxima de r_{HL} , a energia passa a ser positiva. Logo, devido à mudança de sinal de F (caracterizando uma transição de fase para F), essa solução pode ser globalmente instável para alguns valores específicos de a que façam $F > 0$, mesmo que localmente ela seja estável para qualquer a .

Em relação à solução de Simpson-Visser, essa solução também possui uma forma diferente da que deduzimos em (4.65), embora elas tenham o mesmo fator $\sqrt{1 - a^2/k^2 S/S_U}$, onde S_U designa a solução usual da entropia (S_S para a de Schwarzschild, e S_L para a corda negra usual). A principal diferença está no fato de que na solução de Simpson-Visser não havia transição de fase, onde F era sempre positiva, e no caso da corda negra regular, existe a transição de fase. A Figura 17, de maneira análoga à figura 14, mostra a energia livre de Helmholtz em

função de r_{HL} para valores específicos de a .

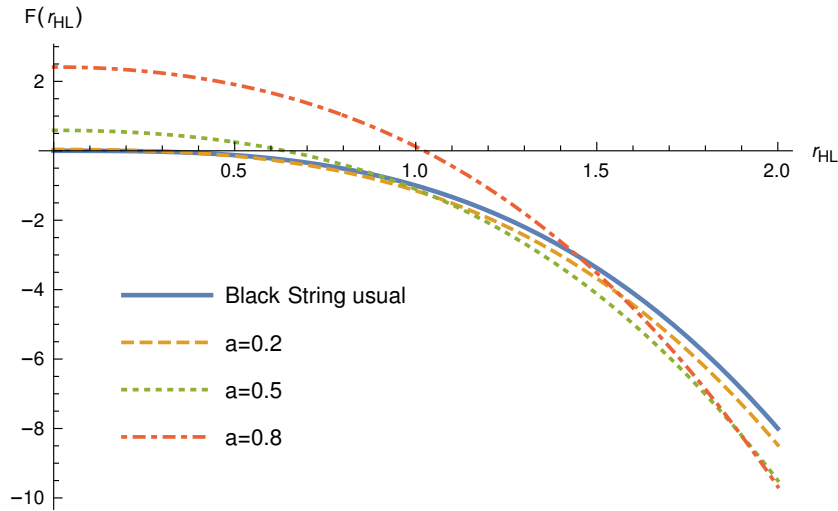


Figura 17: Energia livre de Helmholtz em função de r_{HL} . Considera-se $\alpha = 2$. Fonte: próprio autor.

5.3.2 Órbitas circulares na corda negra regular

Para obter as possíveis órbitas circulares da corda negra regular, devemos seguir o mesmo procedimento que fizemos em (4.5.2), ou seja, vamos usar a métrica da solução regularizada da corda negra para relacioná-la com a energia por unidade de massa e com o momento angular por unidade de massa para definir a energia potencial efetiva. A partir desta, usaremos as mesmas condições mencionadas na solução de Simpson-Visser para determinar se há alguma órbita circular possível e se esta é estável ou instável.

Comecemos diferenciando a métrica em relação ao tempo próprio e vamos considerar apenas a situação equatorial, ou seja, $z = 0$. Obtêm-se o seguinte resultado:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -\left(\alpha^2(r^2 + a^2) - \frac{b}{\alpha\sqrt{r^2 + a^2}}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\alpha^2(r^2 + a^2) - \frac{b}{\alpha\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + (r^2 + a^2)\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \quad (5.56)$$

O termo do lado esquerdo da equação (5.56) pode assumir dois valores diferentes, dependendo se a órbita é descrita por um corpo massivo ou pela luz. De acordo com [60, 73], teremos os seguintes resultados:

$$E = -\left(\alpha^2(r^2 + a^2) - \frac{b}{\alpha\sqrt{r^2 + a^2}}\right)\frac{dt}{d\tau}; L = (r^2 + a^2)\frac{d\phi}{d\tau}, \quad (5.57)$$

onde E e L são, respectivamente, a energia por unidade de massa e o momento angular por unidade de massa. Podemos substituir os resultados de (5.57) em (5.56) para obter:

$$\varepsilon = \left(\alpha^2(r^2 + a^2) - \frac{b}{\alpha\sqrt{r^2 + a^2}} \right)^{-1} \left[-E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right] + \frac{L^2}{r^2 + a^2}. \quad (5.58)$$

Facilmente podemos isolar $(dr/d\tau)^2$:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 + \left(\alpha^2(r^2 + a^2) - \frac{b}{\alpha\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \left(\varepsilon - \frac{L^2}{r^2 + a^2} \right). \quad (5.59)$$

Usando a definição que fizemos na equação (4.72), podemos determinar a energia potencial efetiva $V_{eff}(r)$:

$$V_{eff}(r) = \alpha^2(r^2 + a^2) \left(1 - \frac{(r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{L^2}{r^2 + a^2} - \varepsilon \right), \quad (5.60)$$

onde $(r_H^2 + a^2)^{3/2} = b/\alpha^3$.

O primeiro caso que podemos analisar é o da trajetória circular da luz, ou seja, queremos fazer $\varepsilon = 0$ em (5.60) e usar a condição $V'_{eff} = 0$. Portanto, vamos obter os seguintes resultados:

$$V_{eff}(r) = \alpha^2 L^2 \left(1 - \frac{(r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right); \quad (5.61)$$

$$V'_{eff}(r) = 3\alpha^2 L^2 r \left(\frac{(r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right). \quad (5.62)$$

Aqui podemos ver que a única solução possível para $V'_{eff}(r) = 0$ é $r = 0$. Porém, $r = 0$ implica em $\bar{r} = a$, ou seja, ou a luz estaria na garganta de um buraco de minhoca, caso $a \geq \bar{r}_H$, ou estaria dentro do horizonte de eventos de um buraco negro, caso $a < \bar{r}_H$, portanto, claramente não é uma solução válida do ponto de vista físico [21]. Logo, podemos concluir que não existem órbitas circulares para um fóton em torno de uma corda negra. De certa forma, esse resultado possui alguma similaridade com o que vimos na solução de Simpson-Visser, pois lá, o resultado para a órbita circular da luz dependia diretamente do resultado para a solução usual de Schwarzschild, porém com o fator de correção que depende do parâmetro a . Aqui, não há essa solução de órbita circular para a luz, porém, similarmente, não há órbita circular para o fóton na solução usual da corda negra (isso pode ser facilmente constatado quando fazemos $a = 0$ na equação (5.62) e

aplicamos a condição $V'_{eff} = 0$), logo existe uma relação entre eles, mas obviamente não existe o mesmo fator de correção da solução de Simpson-Visser. A Figura 18 mostra uma comparação da energia potencial efetiva para partículas não massivas da solução usual, e da solução regular com alguns valores específicos do parâmetro a .

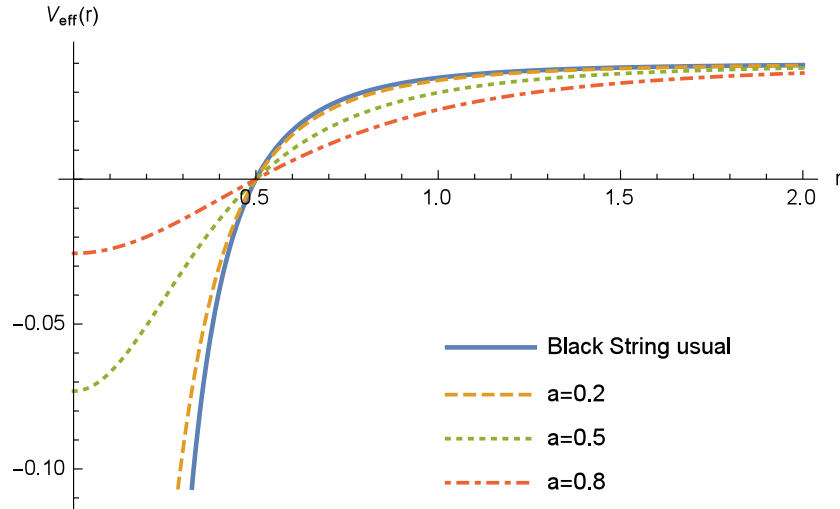


Figura 18: Energia potencial efetiva para partículas não massivas. Consideram-se $\alpha = 2$, $b = 1$, e $L = 1$. Fonte: próprio autor.

Analisemos agora o caso da partícula massiva. Fazendo o mesmo raciocínio que no caso da luz, porém usando $\varepsilon = -1$, vamos obter:

$$V_{eff}(r) = \alpha^2 \left(1 - \frac{(r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) (L^2 + r^2 + a^2); \quad (5.63)$$

$$V'_{eff}(r) = \alpha^2 r \left[\frac{3(L^2 + r^2 + a^2)(r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r^2 + a^2)^{5/2}} + 2 \left(1 - \frac{(r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \right]. \quad (5.64)$$

Impondo $V'_{eff}(r) = 0$, supondo $r \neq 0$ e definindo L_c como sendo o momento angular por unidade de massa da órbita circular, e r_c como sendo o valor da coordenada radial da órbita circular, podemos encontrar L_c em função de r_c , a , e r_H :

$$L_c^2 = \frac{2(r_c^2 + a^2)^{5/2}}{3(r_H^2 + a^2)^{3/2}} \left(\frac{(r_H^2 + a^2)^{3/2}}{(r_c^2 + a^2)^{3/2}} - 1 \right) - (r_c^2 + a^2) \quad (5.65)$$

$$L_c^2 = - \left[\frac{(r_c^2 + a^2)}{3} + \frac{2(r_c^2 + a^2)^{5/2}}{3(r_H^2 + a^2)^{3/2}} \right]. \quad (5.66)$$

Logo, vê-se claramente que essa expressão não pode ser válida fisicamente, pois o lado direito da equação (5.66) é sempre negativo para quaisquer r_c , a , e r_H . Como consequência, teríamos

um momento angular complexo, o que não é permitido fisicamente. Portanto, também não podemos ter órbitas circulares para partículas massivas em torno de uma corda negra regular, o que também ocorre para a solução usual da corda negra (isso também pode ser facilmente constatado quando fazemos $a = 0$ na equação (5.64) e aplicamos a condição $V'_{eff} = 0$ para isolar L_c^2). Estes resultados são semelhantes ao caso da regularização do buraco negro do tipo BTZ [70], em que não é possível encontrar órbitas circulares nem para fótons nem para partículas massivas, indicando uma semelhança entre os dois tipos de soluções, diferentemente do caso analisado por Simpson-Visser, onde encontram-se órbitas para a esfera de fótons e para partículas massivas. Mas, assim como neste caso os resultados para a solução regular se relacionam com a não regular, aqui no caso da corda negra, também temos essa relação uma vez que tais órbitas circulares não são permitidas nem para o caso usual ($a = 0$), nem para a solução regular ($a \neq 0$). A Figura 19 mostra a energia potencial efetiva para partículas massivas da solução usual e da solução regular para alguns valores específicos de a .

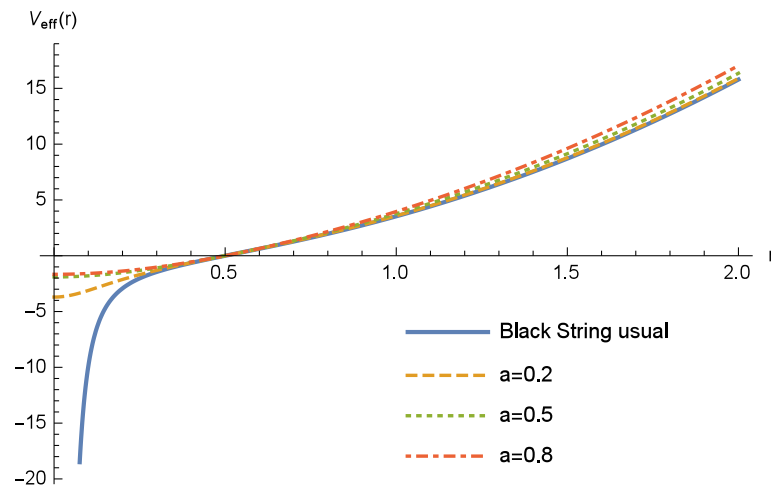


Figura 19: Energia potencial efetiva para partículas massivas. Consideram-se $\alpha = 2$, $b = 1$, e $L = 1$. Fonte: próprio autor.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como propósito fazer breves revisões sobre buracos negros e buracos de minhoca para trabalhá-los em um método criado por Simpson e Visser que transforma uma solução de buraco negro não regular em outra que interpola um buraco negro regular e um buraco de minhoca do tipo Morris-Thorne. Feita a definição deste método e seu uso em algumas aplicações importantes, o mesmo método foi aplicado, de forma inédita, a uma solução de buraco negro com simetria cilíndrica assintoticamente *anti de Sitter*, em que foram feitos os mesmos passos que Simpson e Visser fizeram na análise feita em [21] para verificar a regularidade da nova solução e suas aplicações.

As revisões, feitas no capítulo 3, mostraram as principais definições de buracos negros, singularidade da solução destes e soluções sem singularidades chamadas de regulares, além de definir o que são os buracos de minhoca, quais os critérios para que seja possível uma travessia humana por estes, e uma solução matemática com todas as suas propriedades e análises matemáticas dos critérios como os tempos de travessia e a gravidade de maré que o viajante deve enfrentar durante a travessia. Uma análise da matéria que deve gerar um buraco de minhoca atravessável foi feita a partir do tensor momento-energia. Com o uso da condição de *flaring out*, chega-se a uma violação da condição nula de energia, isto é, a matéria que deve gerar esse tipo de solução deve ser do tipo exótica que não é fisicamente razoável, já que ela viola essa e outras condições de energia como a condição fraca.

Com os buracos negros regulares e buracos de minhoca definidos, foi apresentado, no capítulo 4, o método de regularização de Simpson-Visser, na qual é feita uma modificação na solução de Schwarzschild que consiste na mudança da coordenada radial em que fazemos a troca $r^2 \rightarrow r^2 + a^2$, na qual a é um parâmetro ajustável. Dependendo do valor deste parâmetro, pode-se ter uma solução de buraco negro regular, um buraco de minhoca de via-única com garganta extrema, ou um buraco de minhoca do tipo Morris-Thorne. Após uma análise dos tensores e invariantes de curvatura, verificou-se que os mesmos não possuem singularidades na origem desde que $a \neq 0$, mostrando que a solução de fato é regular. Após a análise da geometria do espaço-tempo de Simpson-Visser, definiu-se o tensor momento-energia e, com as equações de Einstein, pôde-se fazer a análise das condições de energia, onde obteve-se como resultado a violação das mesmas tanto dentro como fora do horizonte de eventos, o que já era esperado

para o caso de um buraco de minhoca atravessável (fora do horizonte obviamente), porém o resultado se estende para os outros tipos de soluções.

Com relação às aplicações da solução regularizada, fez-se uma análise da termodinâmica do buraco negro regular com as definições e cálculos da temperatura de Hawking, da entropia, da capacidade térmica, e da energia livre de Helmholtz. Os resultados apresentaram formas distintas entre si, porém todos tiveram alguns padrões em comum: recupera-se a solução usual para o caso de Schwarzschild no caso em que $a = 0$, e eles são caracterizados pelo produto destas soluções usuais por algum fator de correção, que em diferente em cada caso, possuindo, portanto, propriedades diferentes, mas todos possuem o fator $\sqrt{1 - a^2/r_{HS}^2}$, fator muito característico desse tipo solução, pois ele também aparece na posição do horizonte de eventos (r_H). Outra aplicação feita foi para o cálculo de órbitas circulares para partículas massivas e não massivas. Como resultado, que foi obtido através da análise da energia potencial efetiva $V_{eff}(r)$, tivemos um padrão para os dois casos, pois para o caso de partículas não massivas, o resultado também é o produto do resultado obtido na solução de Schwarzschild por um fator do tipo $\sqrt{1 - a^2/k^2}$, com $k = 3m$, enquanto que no caso de partículas massivas, a posição da menor órbita circular estável (ISCO) possui o mesmo padrão, porém vamos ter $k = 6m$.

Feita toda análise do método de Simpson-Visser, consideramos a solução já conhecida na literatura de uma corda negra e fizemos o mesmo procedimento de Simpson-Visser para regularizar esta solução. Com isso, tivemos resultados muito semelhantes aos encontrados por eles, em que encontra-se uma interpolação entre um buraco negro regular e um buraco de minhoca atravessável, embora este não seja do tipo Morris-Thorne. A regularidade da solução pôde ser demonstrada através da análise dos tensores e invariantes de curvatura, que são todos finitos na origem desde que $a \neq 0$, onde a é o parâmetro usado para regularizar a solução.

Após determinarmos a solução e verificarmos a regularidade da mesma, também foi feita uma análise das condições de energia relacionadas ao tensor momento-energia e mais uma vez identificamos o mesmo padrão da regularização de Simpson-Visser, isto é, a condição nula de energia é violada dentro e fora do horizonte de eventos para qualquer tipo de solução, seja buraco negro regular ou buraco de minhoca.

Após essa análise da curvatura e das condições de energia, passamos para aplicações básicas desta solução. Primeiro analisamos as propriedades termodinâmicas da corda negra e verificamos que todas as grandezas calculadas, que foram a temperatura de Hawking, a entropia, a capacidade térmica, e a energia livre de Helmholtz, sofrem alguma alteração em relação aos

seus respectivos valores na solução não regular usual. Nos casos da temperatura e da capacidade térmica, essa alteração corresponde ao produto do valor usual das respectivas grandezas com um fator de correção do tipo $\sqrt{1 - a^2/k^2}$, onde $k = r_{HL} = b^{1/3}/\alpha$ que é a posição do horizonte de eventos na solução usual. Já nos casos da entropia e da energia de Helmholtz, a correção é mais complexa envolvendo não só este fator, mas também uma função logarítmica. Todas as grandezas foram consistentes com o fato de que quando $a \rightarrow 0$, recupera-se a solução usual. Já no limite em que $a \rightarrow r_{HL}$, com exceção da energia livre de Helmholtz, todas as grandezas tendem a zero. No caso da energia livre, ela passa de um valor negativo, da solução usual, para um valor positivo quando se aproxima de r_{HL} .

Por fim, analisamos as possibilidades de órbitas circulares para fótons e partículas massivas. Como resultado, diferente do trabalho de Simpson-Visser, não foi possível encontrar órbitas circulares para a corda negra regular em nenhum dos casos, pois, tanto para o caso de fótons, como para partículas massivas, a única solução se encontra em $r = 0$, o que não é razoável fisicamente, pois estaríamos dentro do buraco negro ou na “garganta” de um buraco de minhoca. Mesmo que tentemos encontrar algum valor para o momento angular que minimize a órbita circular no caso massivo, encontra-se um valor negativo para L_c^2 , ou seja, teríamos um momento angular complexo como solução, o que não é permitido fisicamente.

Como perspectivas futuras, pretende-se estender essa análise para soluções mais complexas de corda negra, onde podemos considerar fonte de campo eletromagnético e momento angular (buraco negro com rotação) e fazer todas essas análises, incluindo a estrutura causal delas com o uso dos diagramas de Carter-Penrose.

REFERÊNCIAS

- [1] VISSER, M. *Lorentzian wormholes: from einstein to hawking*. New York: AIP Press, 1995.
- [2] LEMOS, J. Three dimensional black holes and cylindrical general relativity. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 353, n. 1, p. 46–51, jun 1995.
- [3] ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [4] AKIYAMA, K. *et al.* First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *Astrophys. J. Lett.*, v. 930, n. 2, p. L12, 2022.
- [5] AKIYAMA, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, v. 875, p. L1, 2019.
- [6] LEMOS, J. P. S.; ZANCHIN, V. T. Rotating charged black string and three-dimensional black holes. *Phys. Rev. D*, v. 54, p. 3840–3853, 1996.
- [7] MUNIZ, C. R. *et al.* Four-dimensional regular black strings in bilocal gravity. *Annals Phys.*, v. 443, p. 168980, 2022.
- [8] AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, p. 5056–5059, 1998.
- [9] BARDEEN, J. M. Non-singular general-relativistic gravitational collapse. In: *Proc. Int. Conf. GR5, Tbilisi*. [S.l.: s.n.], 1968. v. 174, p. 174.
- [10] BAMBI, C.; MODESTO, L. Rotating regular black holes. *Phys. Lett. B*, v. 721, p. 329–334, 2013.
- [11] BRONNIKOV, K. A.; FABRIS, J. C. Regular phantom black holes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 251101, 2006.
- [12] BRONNIKOV, K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 63, p. 044005, 2001.
- [13] ROY, P. D. Novel triple barrier potential for axial gravitational perturbations of a family of Lorentzian wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 82, n. 8, p. 673, 2022.

- [14] NIKITIN, I. Mathematical modeling and visualization of topologically non-trivial solutions in general relativity. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 1730, n. 1, p. 012074, jan 2021.
- [15] EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The particle problem in the general theory of relativity. *Physical Review*, APS, v. 48, n. 1, p. 73, 1935.
- [16] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 56, n. 5, p. 395–412, 1988.
- [17] LOBO, F. S. N. From the flamm–einstein–rosen bridge to the modern renaissance of traversable wormholes. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 25, n. 07, p. 1630017, jun 2016.
- [18] WANG, A.; LETELIER, P. S. Dynamical wormholes and energy conditions. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 94, n. 1, p. 137–142, 1995.
- [19] BRONNIKOV, K.; KIM, S.-W. Possible wormholes in a brane world. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 6, p. 064027, 2003.
- [20] TEFO, R. C. *et al.* New traversable wormhole solutions in $f(t)$ gravity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 28, n. 04, p. 1950065, mar 2019.
- [21] SIMPSON, A.; VISSER, M. Black-bounce to traversable wormhole. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 02, p. 042, 2019.
- [22] SIMPSON, A. From black-bounce to traversable wormhole, and beyond. In: *16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories*. [S.l.: s.n.], 2021.
- [23] BAMBHANIYA, P. *et al.* Thin accretion disk in the Simpson-Visser black-bounce and wormhole spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 2, p. 023021, 2022.
- [24] TERNO, D. R. Inaccessibility of traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 4, p. 044035, 2022.
- [25] RODRIGUES, M. E.; JUNIOR, E. L. B. Black-bounce in $f(T)$ gravity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 55, n. 1, p. 8, 2023.
- [26] ISLAM, S. U.; KUMAR, J.; GHOSH, S. G. Strong gravitational lensing by rotating Simpson-Visser black holes. *JCAP*, v. 10, p. 013, 2021.

- [27] NASCIMENTO, J. R. *et al.* Gravitational lensing in black-bounce spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 4, p. 044021, 2020.
- [28] TSUKAMOTO, N. Gravitational lensing in the Simpson-Visser black-bounce spacetime in a strong deflection limit. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 2, p. 024033, 2021.
- [29] ÖVGÜN, A. Weak Deflection Angle of Black-bounce Traversable Wormholes Using Gauss-Bonnet Theorem in the Dark Matter Medium. *Turk. J. Phys.*, v. 44, n. 5, p. 465–471, 2020.
- [30] CHATAIGNIER, L. *et al.* Regular black holes, universes without singularities, and phantom-scalar field transitions. 2022.
- [31] BRONNIKOV, K. A. Black bounces, wormholes, and partly phantom scalar fields. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 6, p. 064029, 2022.
- [32] STUHLÍK, Z.; VRBA, J. Epicyclic Oscillations around Simpson–Visser Regular Black Holes and Wormholes. *Universe*, v. 7, n. 8, p. 279, 2021.
- [33] CHURILOVA, M. S.; STUHLIK, Z. Ringing of the regular black-hole/wormhole transition. *Class. Quant. Grav.*, v. 37, n. 7, p. 075014, 2020.
- [34] YANG, Y. *et al.* Echoes from black bounces surrounded by the string cloud. 2022.
- [35] VAGNOZZI, S. *et al.* Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the Event Horizon Telescope image of Sagittarius A*. 2022.
- [36] LOBO, F. S. N. *et al.* Novel black-bounce spacetimes: wormholes, regularity, energy conditions, and causal structure. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 8, p. 084052, 2021.
- [37] JUSUFI, K. Regular solutions for black strings and torus-like black holes. *Phys. Dark Univ.*, v. 39, p. 101156, 2023.
- [38] LIMA, A. M.; ALENCAR, G. M. d.; FURTADO, J. S. Black string bounce to traversable wormhole. *Symmetry*, v. 15, n. 1, 2023. ISSN 2073-8994.
- [39] RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. [S.l.]: OUP Oxford, 2006. ISBN 9780198567318.
- [40] D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. New York: Oxford University Press, 1992.
- [41] EINSTEIN, A.; PEREIRA, C. A. *A teoria da relatividade especial e geral*. [S.l.]: Contraponto Editora, 1999.

- [42] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1972.
- [43] SOKOLNIKOFF, I. S. *Tensor Analysis: theory and applications*. [S.l.]: John Wiley and Sons Inc, 1951.
- [44] SYNGE, J. L.; SCHILD, A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publications, 1949. ISBN 0-486-63612-7.
- [45] DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. 2. ed. [S.l.]: Atual Editora, 1982.
- [46] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. 2. ed. [S.l.]: Institute of Physics Publishing, 2003.
- [47] RYDER, L. *Introduction to general relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [48] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 1. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2014. ISBN 978-85-244-0374-3.
- [49] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- [50] WALECKA, J. D. *Introduction to general relativity*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2007.
- [51] RUBAKOV, V. *Classical theory of gauge fields*. [S.l.]: Princeton University Press, 2002. ISBN 0-691-05927-6.
- [52] NOGUEIRA, M. N. V. *Buracos de Minhoca na teoria Assintoticamente Segura da Gravidade*. 124 p. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2022.
- [53] CARBALLO-RUBIO, R. *et al.* On the viability of regular black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2018, n. 7, jul 2018.
- [54] HAYWARD, S. A. Formation and evaporation of nonsingular black holes. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 3, jan 2006.
- [55] NARZILLOEV, B. *et al.* Regular bardeen black holes in anti-de sitter spacetime versus kerr black holes through particle dynamics. *Galaxies*, v. 9, n. 3, 2021. ISSN 2075-4434.
- [56] FROLOV, V. P.; ZELNIKOV, A. Quantum radiation from an evaporating nonsingular black hole. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 95, n. 12, jun 2017.

- [57] GÓ ŹDŹ, A.; PEDRAK, A.; PIECHOCKI, W. Ascribing quantum system to schwarzschild spacetime with naked singularity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 39, n. 14, p. 145005, jul 2022.
- [58] MALUF, R. V.; NEVES, J. C. S. Bardeen regular black hole as a quantum-corrected Schwarzschild black hole. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 28, n. 03, p. 1950048, 2018.
- [59] NEVES, J. C. S.; SAA, A. Regular rotating black holes and the weak energy condition. *Phys. Lett. B*, v. 734, p. 44–48, 2014.
- [60] THORNE, K. S.; MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: Freeman San Francisco, CA, 2000.
- [61] WHEELER, J. A. *Geometrodynamics*. New York: Academic Press, 1962. v. 1.
- [62] TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A.; BERTSCHINGER, E. *Exploring black holes*. 2. ed. [S.l.]: Pearson, 2019.
- [63] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.
- [64] HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, Nature Publishing Group, v. 248, n. 5443, p. 30–31, 1974.
- [65] ROMAN, T. A.; BERGMANN, P. G. Stellar collapse without singularities? *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 28, p. 1265–1277, Sep 1983.
- [66] ALENCAR, G.; MUNIZ, C. R. Thermodynamic Properties of Static and Rotating Unparticle Black Holes. *JCAP*, v. 03, p. 040, 2018.
- [67] WALD, R. M. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. [S.l.]: University of Chicago press, 1994.
- [68] SANTI, N. S. M. de. *Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild*. 67 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.
- [69] ANACLETO, M. A. *et al.* Noncommutative correction to the entropy of Schwarzschild black hole with GUP. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 36, n. 03, p. 2150028, 2021.
- [70] FURTADO, J.; ALENCAR, G. BTZ Black-Bounce to Traversable Wormhole. *Universe*, v. 8, n. 12, p. 625, 2022.
- [71] CARVALHO, I. D. D. *et al.* Horizon Fractalization in Black Strings Ungravity. 2022.
- [72] CARVALHO, I. D. D.; ALENCAR, G.; MUNIZ, C. R. Thermodynamics of static and stationary black holes in Einstein-Gauss-Bonnet gravity with dark matter. 2022.

- [73] RAYIMBAEV, J. *et al.* Dynamics of charged and magnetized particles around cylindrical black holes immersed in external magnetic field. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 30, n. 03, p. 2150019, 2021.
- [74] JEFREMOV, P. I.; TSUPKO, O. Y.; BISNOVATYI-KOGAN, G. S. *Innermost stable circular orbits of spinning test particles in Schwarzschild and Kerr space-times*. 2015.
- [75] VILENKIN, A. Cosmic strings and domain walls. *Physics Reports*, v. 121, n. 5, p. 263–315, 1985. ISSN 0370-1573.
- [76] GREGORY, R. Cosmological Cosmic Strings. *Phys. Rev. D*, v. 39, p. 2108, 1989.
- [77] BRAGANÇA, E. A. F.; MELLO, E. R. Bezerra de; MOHAMMADI, A. Vacuum bosonic currents induced by a compactified cosmic string in dS background. 2019.
- [78] VILENKIN, A.; LEVIN, Y.; GRUZINOV, A. Cosmic strings and primordial black holes. *JCAP*, v. 11, p. 008, 2018.
- [79] KIM, N.; KIM, Y.; KIMM, K. Charged black cosmic string. *Class. Quant. Grav.*, v. 15, p. 1513–1520, 1998.
- [80] GREGORY, R. Black string instabilities in Anti-de Sitter space. *Class. Quant. Grav.*, v. 17, p. L125–L132, 2000.
- [81] LIMA JUNIOR., H. C. D. *et al.* Can different black holes cast the same shadow? *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 8, p. 084040, 2021.
- [82] BRONNIKOV, K. A.; LEMOS, J. P. S. Cylindrical wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 104019, 2009.
- [83] MUNIZ, C. R. *et al.* Black strings from dark matter. 2022.
- [84] NILTON, M.; ALENCAR, G. Black Strings in Asymptotically Safe Gravity. 2022.
- [85] MCMAHON, D. *Relativity demystified*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2006.

APÊNDICE A – ESTRUTURAS DE CARTAN E AS “TETRADAS”

Em Relatividade Geral é extremamente importante saber trabalhar no referencial local do sistema uma vez que o mesmo é localmente plano, ou seja, relações da Relatividade Restrita são válidas para esses referenciais, o que facilita muitos cálculos que são necessários nas soluções das equações de Einstein. Esse apêndice tem como objetivo introduzir o conceito das estruturas de Cartan que irão fazer a conexão do referencial global curvo com os referenciais locais através das “tetradas”. Além disso, vamos demonstrar como deduzir os termos do tensor de curvatura no referencial local que foram apresentados na seção (3.3.1), nas equações de (3.25) à (3.30).

Este apêndice será construído com base em [85], portanto, todos os conceitos e equações que serão mostrados aqui podem ser encontrados nessa referência.

Uma base coordenada é uma construção de um sistema de coordenadas na qual os seus vetores de base são definidos por $\vec{e}_\mu = \partial/\partial x^\mu$. As bases coordenadas não são ortonormais em geral, exceto a base cartesiana, o que muitas vezes dificulta alguns cálculos, como os da Relatividade Geral. Porém, existe uma alternativa a esse problema que consiste em construir uma base ortonormal, também chamada de não-holonômica para simplificar nosso trabalho. Fisicamente, essa base ortonormal construída é a base do referencial local de um observador, ou seja, temos uma base global não ortonormal, mas dentro dela podemos construir localmente uma base ortonormal.

Como já foi mencionado na seção (2.1) sobre o Princípio da Equivalência, é importante lembrar que o conceito de localmente significa que é preciso estar em um ponto e considerar apenas as vizinhanças muito próximas deste, tais que os efeitos de mudança no campo gravitacional são desprezíveis. Isto implica que esse referencial local só é válido nas proximidades de um determinado ponto, ou seja, se nos afastarmos muito deste ponto, temos que usar um novo referencial local definido neste novo ponto, pois o referencial anterior não será mais válido já que a mudança de curvatura será perceptível.

Uma vez definida a base local, pode-se fazer uma transformação que relacionada a base global não ortonormal com a local com base na própria métrica do espaço (ou espaço-tempo). É exatamente isso que será tratado aqui neste apêndice.

Mas antes, é preciso definir o que é uma base holonômica. Quando um conjunto de bases é definido em termos das derivadas de suas respectivas coordenadas, ou seja, uma base \vec{e}_μ definida como uma derivada parcial em relação à x^μ , essas bases são chamadas de bases holonômicas ou bases coordenadas. Assim, temos a seguinte definição matemática:

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.1})$$

Por exemplo, um vetor contravariante escrito em uma base holonômica pode ser representado por:

$$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu. \quad (\text{A.2})$$

No entanto, é importante notar que esses vetores de base podem não ter norma unitária e também não serem da mesma dimensão. Isso fica explícito no caso em que trabalhamos com coordenadas esféricas, pois, segundo a equação (3.23), as normas de \vec{e}_2 , \vec{e}_3 são, respectivamente, r e $r \sin \theta$. No caso do vetor \vec{e}_1 , para o espaço euclidiano onde $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$, sua norma é unitária. Logo, esses vetores não são ortonormais, embora sejam ortogonais. Isso pode ser resolvido construindo uma base ortonormal que pode ser formada em função dessa base não ortonormal impondo a condição de que:

$$g(\hat{e}_{\hat{\mu}}, \hat{e}_{\hat{\nu}}) \equiv \hat{e}_{\hat{\mu}} \cdot \hat{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (\text{A.3})$$

A condição acima é para o caso geral de estarmos no trabalhando no espaço-tempo. No exemplo que estávamos analisando, deve-se considerar o espaço euclidiano onde a métrica na base ortonormal deve ser o delta de Kronecker, uma vez que estamos trabalhando apenas com as coordenadas espaciais. Essa nova base é fácil de ser construída e é chamada de base não-holonômica ou base não-coordenada.

Uma base não-holonômica é aquela em os seus vetores de base são ortonormais com relação à métrica escolhida do sistema, também chamada de não-coordenada ou de “tetradas” ortonormais. Nessa base, devemos ter vetores de base ortogonais entre si e todos com normal unitária. A sua representação deve ser feita com um “chapéu” em cima dos seus índices, por isso representamos seus vetores por $\hat{e}_{\hat{\mu}}$. Como já foi dito, essa base corresponde, do ponto de vista da Relatividade, à base de um referencial do observador local, o referencial próprio, onde a Relatividade Restrita é válida, e a base de coordenadas holonômica corresponde ao espaço-

tempo global curvo. Outro ponto interessante é que podemos escrever um dado vetor em função tanto da base coordenada como da não-coordenada, ou seja, são formas diferentes de representar o mesmo vetor. Matematicamente, temos $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu = V^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\mu}}$.

Vamos agora determinar como as duas bases se relacionam. Precisamos encontrar uma transformação que relacione a base coordenada com a não-coordenada. Para isso, deve-se escrever os vetores da base não-holonômica como uma combinação dos vetores da base holonômica. Nessa combinação, cada vetor da base coordenada deve estar multiplicado pelos coeficientes da base não-coordenada, ou seja, o vetor da base não-coordenada deve ser escrito como se fosse um vetor comum escrito na base coordenada onde as componentes do vetor são os coeficientes denominados de “tetradas”. Matematicamente, temos:

$$\hat{e}_{\hat{\mu}} = (e_{\hat{\mu}})^\nu \vec{e}_\nu. \quad (\text{A.4})$$

Explicitamente, se quisermos escrever $\hat{e}_{\hat{1}}$ em termos das “tetradas”, teríamos:

$$\hat{e}_{\hat{1}} = (e_{\hat{1}})^0 \vec{e}_0 + (e_{\hat{1}})^1 \vec{e}_1 + (e_{\hat{1}})^2 \vec{e}_2 + (e_{\hat{1}})^3 \vec{e}_3. \quad (\text{A.5})$$

Podemos usar uma notação mais simples para as componentes do vetor de base, que poderá ser usada numa representação matricial:

$$(e_{\hat{\mu}})^\nu = \Lambda_{\hat{\mu}}{}^\nu. \quad (\text{A.6})$$

Esta matriz é invertível é usada para a situação inversa, quando queremos expandir os vetores da base coordenada em função da não-coordenada:

$$\vec{e}_\mu = (e_\mu)^{\hat{\nu}} \hat{e}_{\hat{\nu}} = (\Lambda^{-1})_\mu{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_{\hat{\nu}}. \quad (\text{A.7})$$

Logo, temos alguns resultados importantes envolvendo estes termos:

$$(e_\mu)^{\hat{\nu}} (e_{\hat{\nu}})^\gamma = \delta_{\hat{\mu}}^\gamma; (e_{\hat{\mu}})^\nu (e_\nu)^{\hat{\gamma}} = \delta_{\hat{\mu}}^{\hat{\gamma}}; (e_\mu)^{\hat{\nu}} (e_{\hat{\nu}})_{\hat{\gamma}} = \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Com essas definições, podemos desenvolver uma forma de relacionar agora as componentes do tensor de Riemann na base coordenada com a não-coordenada. Podemos usar o exemplo do vetor \vec{V} . Como o vetor pode ser escrito nas duas bases, temos:

$$V^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\mu}} = V^\nu \vec{e}_\nu = V^\nu (\Lambda^{-1})_{\nu}{}^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{\mu}}. \quad (\text{A.9})$$

Comparando os dois membros da equação (A.9), chegamos na expressão:

$$V^{\hat{\mu}} = (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\hat{\mu}} V^{\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Para um vetor covariante, vamos ter:

$$V_{\hat{\mu}} \hat{e}^{\hat{\mu}} = V_{\nu} \vec{e}^{\nu} = V_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\hat{\mu}} \hat{e}^{\hat{\mu}}, \quad (\text{A.11})$$

onde usamos a métrica para “descer” e “subir” índices na expressão para o vetor \vec{V} e na equação (A.7). Logo:

$$V_{\hat{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\hat{\mu}} V_{\nu}. \quad (\text{A.12})$$

Assim, podemos fazer uma generalização para o caso do tensor de curvatura de Riemann:

$$R^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}} = (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\hat{\mu}} R^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\hat{\nu}} (\Lambda^{-1})^{\gamma}_{\hat{\lambda}} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\hat{\rho}}. \quad (\text{A.13})$$

Mas, segundo [85], temos que:

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\hat{\nu}} = \Lambda_{\hat{\nu}}^{\mu}. \quad (\text{A.14})$$

Portanto, vamos ter:

$$R^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}} = (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\hat{\mu}} R^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma} \Lambda_{\hat{\nu}}^{\beta} \Lambda_{\hat{\lambda}}^{\gamma} \Lambda_{\hat{\rho}}^{\sigma}. \quad (\text{A.15})$$

Vamos considerar agora o exemplo da métrica do buraco de minhoca de Morris-Thorne. Queremos encontrar, primeiramente, os vetores da base não-holonômica em função da base holonômica. Isso já foi feito na seção (3.3.1), onde os coeficientes (“tetradas”) podem ser determinados pela própria métrica, pois como os vetores da base coordenada já são ortogonais, basta que suas normas sejam unitárias, e os termos que multiplicam as diferenciais na métrica são exatamente as normas quadráticas do vetores, portanto, chega-se nos seguintes valores para as “tetradas”:

$$\Lambda_0^0 = e^{-\Phi}; \Lambda_1^1 = (1 - b/r)^{1/2}; \Lambda_2^2 = r^{-1}; \Lambda_3^3 = (r \sin \theta)^{-1}, \quad (\text{A.16})$$

conforme definimos na equação (3.21), e os demais elementos são todos nulos. Com esses re-

sultados, é fácil determinar a matriz inversa, Λ^{-1} , usando qualquer uma das equações definidas em (A.8):

$$(\Lambda^{-1})_0^{\hat{0}} = e^{\Phi}; (\Lambda^{-1})_1^{\hat{1}} = (1 - b/r)^{-1/2}; (\Lambda^{-1})_2^{\hat{2}} = r; (\Lambda^{-1})_3^{\hat{3}} = r \operatorname{sen} \theta, \quad (\text{A.17})$$

e as demais componentes da matriz são nulas, ou seja, as duas matrizes são diagonais. Agora que temos as duas matrizes, podemos calcular o tensor de Riemann na base não-coordenada. Vamos considerar os exemplos que determinamos nas equações (3.6) e (3.20). Devido ao fato de as matrizes serem diagonais, uma componente do tensor de Riemann na base não-coordenada dependerá apenas da sua respectiva componente na base coordenada, isto é, a componente com os 4 índices com “chapéu” dependerá apenas da componente com os mesmos índices, porém sem “chapéu”. Logo, para a componente R_{101}^0 , teremos:

$$R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}}^{\hat{0}} = (\Lambda^{-1})_0^{\hat{0}} R_{101}^0 \Lambda_{\hat{1}}^1 \Lambda_{\hat{0}}^0 \Lambda_{\hat{1}}^1 = (1 - b/r) \{ -\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2 \}, \quad (\text{A.18})$$

onde os termos $\Lambda_{\hat{0}}^0$ e $(\Lambda^{-1})_0^{\hat{0}}$ se cancelam, $(\Lambda_{\hat{1}}^1)^2 = (1 - b/r)$, e o termo entre chaves é o valor da componente R_{101}^0 . Para $R_{313}^1 = (b'r - b) \operatorname{sen}^2 \theta / 2r$ e $R_{323}^2 = (b/r) \operatorname{sen}^2 \theta$, temos, respectivamente:

$$R_{\hat{3}\hat{1}\hat{3}}^{\hat{1}} = (\Lambda^{-1})_1^{\hat{1}} R_{313}^1 \Lambda_{\hat{3}}^3 \Lambda_{\hat{1}}^1 \Lambda_{\hat{3}}^3 = (b'r - b) / 2r^3 \quad (\text{A.19})$$

$$R_{\hat{3}\hat{2}\hat{3}}^{\hat{2}} = (\Lambda^{-1})_2^{\hat{2}} R_{323}^2 \Lambda_{\hat{3}}^3 \Lambda_{\hat{2}}^2 \Lambda_{\hat{3}}^3 = b/r^3. \quad (\text{A.20})$$

Seguindo esse procedimento para todas as componentes não nulas do tensor de Riemann, $R_{\nu\lambda\rho}^{\mu}$, encontram-se todas as componentes na base não-coordenada que estão determinadas nas equações de (3.25) à (3.30).