Subvariedades de tipo espaço
com curvatura escalar constante
em espaços-forma semi-Riemannianos

Fernanda Ester Camillo Camargo

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS

Área de concentração: **Matemática**

Orientadora: **Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES e do CNPq.

São Paulo, novembro de 2006.

Subvariedades de tipo espaço
com curvatura escalar constante
em espaços-forma semi-Riemannianos

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Fernanda Ester Camillo Camargo
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 2006.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (orientadora) - IME - USP
- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti - IME - USP
- Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto - UFC
- Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra - UFSCar
- Prof. Dr. Luiz Amâncio Machado de Sousa Jr.- UNIRIO

Dedico este trabalho aos meus pais
Marinei e Jomar, meus irmãos Francine e Frederico
e ao pequeno Aliocha, os quais estiveram sempre presentes e me apoiaram em todas
as etapas da minha vida (suportando até mesmo meu mau humor).

Agradecimentos

Obrigada à minha orientadora Profa. Rosa Maria Barreiro Chaves, pelos ensinamentos, interesse, dedicação, paciência, amizade e, principalmente, confiança depositada em mim. Admiro muito sua coragem e força de vontade.

Obrigada à Profa. Cláudia Cuêva Candido, pelo carinho e pela amizade constantes, e por ter participado dos meus seminários, sempre trazendo sugestões e esclarecimentos valiosos.

Obrigada ao Prof. Luiz Amâncio Sousa Jr, da UNIRIO, pela colaboração e atenção em suas visitas ao IME, por suas importantes sugestões, e por estar sempre disposto a esclarecer minhas dúvidas.

Obrigada ao Prof. Aldir Brasil Jr, da UFC, de quem gosto e admiro muito, pelo apoio, pelo carinho, pela amizade e pela atenção em suas passagens pelo IME.

Obrigada ao Prof. Luis Alías, da Universidade de Murcia, por sua colaboração na fase inicial deste projeto, contribuindo com sugestões de temas para este trabalho e respondendo às minhas dúvidas.

Obrigada à Profa. Walcy Santos, pela recepção carinhosa nos congressos em que participei e por ter obtido o Lema 1.4.2, que foi essencial para a demonstração dos resultados que constam neste trabalho.

Obrigada aos professores do IME que, direta ou indiretamente, foram importantes no decorrer dos cursos ou para a concretização deste trabalho. Em especial, gostaria de citar os Professores Antonio Carlos Asperti, Francisco Rui T. de Almeida, Daniel Tausk, Claudio Gorodski, Paolo Piccione, Sérgio Alves, Roseli Fernandez, Fernanda Cardona, Iole Druck e Jorge Aragona.

Obrigada aos funcionários da secretaria da C.P.G., biblioteca, gráfica, portaria, café, que foram sempre atenciosos e prestativos. Em especial, Pinho, Alessandra, Feijão, Patricia, Rose, Marilucia, Carlos, Max, Cláudio, Osvaldo, Luiza, Francisca e Agueda.

Obrigada aos amigos da extinta sala 141-B, os quais foram companheiros e me proporcionaram grandes momentos de descontração, e a todos os outros amigos que fiz ao longo do curso. Em particular, Maité, Márcio, Aldemir, Érica Z, Hilde, Patrícia, Marcelo, Anliy, Tatiane, Neusa, Janaína, Alexandre, Andréia, Fábio, Caio, Said, Gladys, Rudimar, Olga. Ufa! Esqueci alguém?

Resumo

Neste trabalho, obtemos alguns resultados para subvariedades de tipo espaço com curvatura escalar constante em espaços forma semi-Riemannianos, usando uma fórmula de tipo Simons e um operador diferencial introduzido por Cheng-Yau. Para isto, impomos algumas condições ou para o comprimento da segunda forma fundamental, ou para as curvaturas seccionais ou para o vetor curvatura média. Os resultados para subvariedades completas (não compactas) e compactas foram obtidos separadamente.

Abstract

In this work, we obtain some results about spacelike submanifolds with constant scalar curvature in semi-Riemannian space forms, using a Simons type formula and a differential operator introduced by Cheng-Yau. In order to achieve this we impose some conditions either on the length of the second fundamental form, or on the sectional curvatures or on the mean curvature vector. The results for complete (non-compact) and compact submanifolds were obtained separately.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos subvariedades de tipo espaço imersas em um espaço forma semi-Riemanniano, isto é, aquelas subvariedades para as quais a métrica induzida pela imersão é definida positiva e o espaço ambiente onde elas estão imersas é uma variedade semi-Riemanniana (variedade diferenciável com um produto escalar não degenerado e de índice constante) conexa, completa (no sentido de que toda geodésica maximal deste espaço está definida para todo valor do parâmetro) e tem curvatura constante (as curvaturas seccionais são iguais).

Um resultado importante acerca de espaços forma semi-Riemannianos é que espaços forma semi-Riemannianos simplesmente conexos são isométricos se e somente se eles têm mesmos índice, dimensão e curvatura. Por índice da variedade semi-Riemannaniana, queremos dizer o índice da métrica da variedade. Em particular, se o índice é zero, a variedade é dita Riemanniana e, se o índice é um, a variedade é dita Lorentziana. Assim, a menos de isometrias, existe no máximo um espaço forma simplesmente conexo $Q_p^m(c)$ de dimensão m, índice p e curvatura c. Para $c = 0$, temos os espaços semi-Euclidianos $\mathbb{R}_p^m$, para $c > 0$, temos as pseudo-esferas $S_p^m(c)$ e para $c < 0$, os espaços pseudo-hiperbólicos $H_p^m(c)$. Maiores detalhes podem ser encontrados no Capítulo 1.

O nosso estudo trata apenas dos espaços forma semi-Riemannianos cujo índice p é maior ou igual a 1 e a dimensão m é igual a $n + p$, para $n \geq 2$, e consideramos as subvariedades de tipo espaço de dimensão n imersas em Q_p^{n+p}(c).

A existência de uma única conexão em $Q_p^{n+p}(c)$ que é compatível com a métrica e livre de torção - a conexão de Levi-Civita - torna possível encontrarmos uma conexão de Levi-Civita para a imersão de tipo espaço, isto é, para a subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$, que se relaciona com a conexão de $Q_p^{n+p}(c)$.

O tensor de curvatura, a curvatura de Ricci, a curvatura escalar e as curvaturas seccionais da subvariedade podem ser calculados em coordenadas locais usando a métrica induzida pela imersão e suas derivadas. A fim de expressar essas definições através de coordenadas, é usual tomarmos um referencial local ortonormal (unitário e ortogonal) em $Q_p^{n+p}(c)$ que é adaptado à imersão. Um vetor dado em um plano arbitrário tangente a $Q_p^{n+p}(c)$ é dito unitário se seu produto interno é 1 ou -1, uma vez que a codimensão da subvariedade, que é a dimensão do fibrado normal da imersão, implica na existência de p direções normais à subvariedade, que são de tipo tempo. Dois vetores em um espaço tangente de $Q_p^{n+p}(c)$ são ortogonais se seu produto interno é zero.

Do ponto de vista físico, as subvariedades de tipo espaço geralmente aparecem no estudo de questões relacionadas à causalidade em relatividade geral. Por exemplo, as hipersuperfícies de tipo espaço com curvatura média constante não nula são convenientes para se estudar a propagação das ondas gravitacionais. Do ponto de vista matemático, seu interesse é motivado pelo fato dessas hipersuperfícies exibirem boas propriedades do tipo Bernstein, além de serem soluções para um problema variacional, uma vez que são pontos críticos do funcional área para variações que deixam uma certa função volume constante.

Muitos autores abordaram problemas relativos a subvariedades em ambientes Riemannianos e semi-Riemannianos. A linha que vamos seguir, teve como trabalho pioneiro [26], onde o autor obteve uma fórmula conhecida como a *fórmula de Simons* e a aplicou no caso em que a subvariedade é compacta e tem curvatura média nula. Outros trabalhos seguiram após este, sempre empregando a mesma técnica introduzida por Simons. Vamos fazer o histórico dos resultados existentes, dividindo-os em dois casos: 1) a subvariedade é compacta, e 2) a subvariedade é completa (não compacta).

Abordagens no caso compacto para subvariedades em espaços forma Riemannianos e semi-Riemannianos com curvatura média nula podem ser encontradas em [14] e [22], respectivamente.

Conhecidos os resultados para subvariedades compactas mínimas e máximas (nomenclaturas utilizadas para subvariedades com curvatura média nula em espaços forma Riemannianos e semi-Riemannianos, respectivamente), o próximo passo foi estudar a classificação das subvariedades que possuem vetor curvatura média não nulo e paralelo. Essa é a condição em codimensão maior que substitui a condição de curvatura média constante em codimensão 1. De qualquer modo, uma conseqüência do vetor curvatura média ser paralelo é que a curvatura média é constante. Em ambientes Rie-mannianos, podemos citar os resultados obtidos em [4] e [19], para hipersuperfícies, e em [25], para subvariedades. Se o ambiente é semi-Riemanniano de índice positivo, podemos citar [1], [5] e [22].

As análises no caso completo, com vetor curvatura média paralelo, podem ser encontradas nos trabalhos [3], [7], [9], [10] e [16].

Em $Q_p^{n+p}(c)$, dois resultados se destacam:

Teorema: *([1]) Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço compacta imersa em $S_p^{n+p}(c)$, com fibrado normal plano e vetor curvatura média paralelo, então M^n é totalmente umbílica.*

Teorema: *([16]) Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço completa máxima imersa em $Q_p^{n+p}(c)$. Se $c \geq 0$, então M^n é totalmente geodésica. Se $c < 0$, então $S \leq -npc$, onde S denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental.*

Isso mostra que no caso compacto, com vetor curvatura média paralelo e, no caso completo, com curvatura média nula, a classificação está completa para ambientes semi-Riemannianos, desde que observemos que a hipótese sobre o fibrado normal é natural e que não existem subvariedades compactas em $Q_p^{n+p}(c)$, se $c \leq 0$. No caso compacto, em ambientes Riemannianos, não existe uma classificação das subvariedades com vetor curvatura média paralelo sem condições adicionais, e isso acarreta que também não existe essa classificação para subvariedades completas. Alguns resultados foram obtidos através de limitações sobre S (veja [14] e [25] para $S^{n+p}(c)$).

Tendo em vista as classificações já existentes em $Q_p^{n+p}(c)$, restaria estudar o que acontece no caso em que a subvariedade é completa e o vetor curvatura média é não nulo e paralelo. Em 1977, Goddard conjecturou que toda hipersuperfície de tipo espaço completa imersa em $S_1^{n+1}(c)$ é totalmente umbílica. Akutagawa [3] provou este resultado com uma hipótese adicional sobre a curvatura média da hipersuperfície e mostrou que a conjectura era falsa, apresentando exemplos de hipersuperfícies de tipo espaço completas não totalmente umbílicas com curvatura média constante - um grupo de hipersuperfícies rotacionais. Montiel [22] apresentou outro contra-exemplo para a conjectura de Goddard - os cilindros hiperbólicos (veja a definição no Capítulo

2). Cheng [10] generalizou o resultado de Akutagawa para codimensão maior, provando o resultado a seguir.

Teorema: *([10]) Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço completa com vetor curvatura média paralelo. Se*

$$H^2 \leq c, \text{ para } n = 2,$$

$$n^2H^2 < 4(n-1)c, \text{ para } n \geq 3,$$

então, M^n é totalmente umbílica.

Mais tarde, em [6], os autores obtiveram uma outra limitação para H^2 no caso $n \geq 3$, que será mais adequada para os nossos resultados.

Com esse breve histórico, percebemos que é natural pensar em substituir a condição vetor curvatura média paralelo e considerar as subvariedades de tipo espaço em $Q_p^{n+p}(c)$ com curvatura escalar constante.

Se a subvariedade é compacta, alguns resultados existentes devem ser citados. No ambiente Riemanniano, Cheng e Yau [13] foram os precursores, obtendo um importante resultado para hipersuperfícies.

Teorema: *([13]) Seja M^n uma hipersuperfície compacta com curvaturas seccionais não negativas imersa em um espaço forma Riemanniano de curvatura c. Se a curvatura escalar normalizada de M^n é constante e maior ou igual a c, então M^n é totalmente umbílica, ou um produto de duas subvariedades totalmente umbílicas ou plana (flat).*

No ambiente semi-Riemanniano, temos o seguinte:

Teorema: *([12]) Seja M^n uma hipersuperfície de tipo espaço compacta com curvatura escalar normalizada constante imersa em $S_1^{n+1}(c)$ satisfazendo $R < c$, então M^n é totalmente umbílica.*

Outros resultados de relevância podem ser vistos no decorrer do trabalho.

A idéia central deste trabalho foi utilizar as mesmas técnicas que aparecem no estudo de subvariedades imersas em um espaço forma semi-Riemanniano com vetor curvatura média paralelo e transferi-las para o estudo de subvariedades de tipo espaço imersas em um espaço forma semi-Riemanniano com curvatura escalar (normalizada) constante, bem como, generalizar resultados de hipersuperfícies de tipo espaço com curvatura escalar constante em $Q_1^{n+1}(c)$ para subvariedades com a mesma característica em $Q_p^{n+p}(c)$.

O trabalho apresenta-se com a seguinte divisão:

No primeiro capítulo, apresentamos os principais conceitos da teoria de subvariedades de tipo espaço da Geometria Semi-Riemanniana, tais como as definições dos espaços forma, as notações, as equações fundamentais (equações de estrutura, equação de Gauss), e as curvaturas. Além disto, expomos resultados conhecidos que são essenciais para a obtenção das fórmulas e nas demonstrações de alguns teoremas.

No segundo capítulo, baseamo-nos em um problema proposto por H. Li em [17] para obter um resultado para hipersuperfícies de tipo espaço completas no espaço de De Sitter S_1^{n+1}. Além disto, através de uma desigualdade interessante, inspirada em um teorema de [21], caracterizamos as hipersuperfícies de tipo espaço completas que satisfazem uma condição sobre S.

O terceiro capítulo é destinado às subvariedades de tipo espaço completas. Uma desigualdade para um operador é obtida e, através dela, obtêm-se teoremas de caracterização através de condições para o quadrado da norma da segunda forma fundamental, para as curvaturas seccionais ou para a curvatura média.

Para o quarto capítulo, reservamos o estudo de subvariedades de tipo espaço compactas. O objetivo deste capítulo é obter resultados semelhantes àqueles do Capítulo 3, utilizando, no entanto, ferramentas particulares ligadas à compacidade da subvariedade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estão os principais conceitos, notações e teoremas utilizados no decorrer do trabalho. Eles podem ser encontrados com mais detalhes em [8], [15] e [23].

Denotamos por $\mathbb{R}_p^{n+p} = (\mathbb{R}^{n+p}, \langle\ ,\ \rangle)$ o espaço semi-Euclideano, onde

$$\langle\ ,\ \rangle = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n+p} dx_i^2,$$

e $(x_1, ..., x_{n+p})$ são as coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2,\ p \geq 1$.

Consideramos uma variedade semi-Riemanniana conexa, completa, de dimensão $n + p$ e curvatura constante c denotada por $Q_p^{n+p}(c)$. $Q_p^{n+p}(c)$ é chamada um espaço forma semi-Riemanniano de índice p. O índice está relacionado com o índice da métrica em $Q_p^{n+p}(c)$.

O sinal de c determina a forma de $Q_p^{n+p}(c)$, no caso em que $Q_p^{n+p}(c)$ é simplesmente conexa. A saber:

- se $c = 0$, então $Q_p^{n+p}(c) = \mathbb{R}_p^{n+p}$;
- se $c > 0$, então $Q_p^{n+p}(c) = S_p^{n+p}(c) = \{x \in \mathbb{R}_p^{n+p+1} : \langle x, x\rangle = \frac{1}{c}\}$, conhecida como a pseudo-esfera de $\mathbb{R}_p^{n+p+1}$ e
- se $c < 0$, então $Q_p^{n+p}(c) = \mathbb{H}_p^{n+p}(c) = \{x \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1} : \langle x, x\rangle = \frac{1}{c}\}$, conhecido como o espaço pseudo-hiperbólico de $\mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1}$.

Seja M^n uma variedade conexa de dimensão n. Dizemos que $x : M^n \to Q_p^{n+p}(c)$ é uma imersão de tipo espaço se x é uma aplicação diferenciável tal que, para todo $q \in M$, $dx_q : T_qM^n \to T_{x(q)}Q_p^{n+p}(c)$ é injetora e a métrica induzida por x da métrica em $Q_p^{n+p}(c)$ é Riemanniana. Neste caso, diremos que $x : M^n \to Q_p^{n+p}(c)$ é uma subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$, ou simplesmente que M^n é uma subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$.

A métrica Riemanniana induzida por x também será denotada por $\langle\ ,\ \rangle$.

Denotemos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos diferenciáveis tangentes à M^n.

1.1 Equações de estrutura

Seja $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ um referencial ortonormal local adaptado à imersão x em $Q_p^{n+p}(c)$, isto é, em cada ponto de M^n, $\{e_1, ..., e_n\}$ gera o espaço tangente de M^n e $\{e_{n+1}, ..., e_{n+p}\}$ gera o espaço normal a M^n.

Vamos fazer a seguinte convenção usual de índices:

$$1 \leq A, B, C, \cdots \leq n+p, \quad 1 \leq i, j, k, \cdots \leq n, \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leq n+p.$$

Associado a este referencial ortonormal local, temos o coreferencial $\{\omega_1, ..., \omega_{n+p}\}$, de modo que a métrica semi-Riemanniana de $Q_p^{n+p}(c)$ é dada por

$$d\bar{s}^2 = \sum_A \varepsilon_A {\omega_A}^2, \ \varepsilon_i = 1, \ \varepsilon_\alpha = -1, \ 1 \leq i \leq n, \ n+1 \leq \alpha \leq n+p.$$

Desta forma, as equações de estrutura de $Q_p^{n+p}(c)$ são dadas por

$$d\omega_A = \sum_B \varepsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0. \tag{1.1}$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \varepsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_D K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D. \tag{1.2}$$

$$K_{ABCD} = c\,(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}). \tag{1.3}$$

As restrições das formas w_A, w_{AB} a M^n satisfazem as mesmas equações de estrutura (1.1) a (1.3) levando-se em conta que, como o referencial $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ é adaptado a M^n, tem-se que

$$w_\alpha = 0, \; \forall\, n+1 \leq \alpha \leq n+p \tag{1.4}$$

e, portanto, a métrica Riemanniana de M^n fica escrita como $\langle\; ,\; \rangle = \sum_i {\omega_i}^2$.

Além disto, $0 = d\omega_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i$ e, pelo lema de Cartan, segue que

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}. \tag{1.5}$$

As formas diferenciais lineares w_{ij} são chamadas as formas de conexão de M^n, uma vez que elas permitem definir uma noção de derivação para campos de vetores em M^n.

Usando (1.4), podemos reescrever as equações de estrutura (1.1) a (1.3), separando-as na parte tangente a M^n

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{1.6}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \tag{1.7}$$

onde Ω_{ij} são as formas de curvatura de M^n que definem o tensor de curvatura R (veja [8], pág. 50) e, uma vez que cada Ω_{ij} é uma forma de grau 2, podemos escrevê-la como

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l, \tag{1.8}$$

e na parte normal a M^n

$$d\omega_\alpha = -\sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta, \quad \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0, \tag{1.9}$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = -\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta}, \tag{1.10}$$

onde $\Omega_{\alpha\beta}$ são as formas de curvatura normal que definem o tensor de curvatura normal $R^\perp$ (veja [8], pág. 36) e, analogamente às formas de curvatura, elas podem ser escritas como

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{\alpha\beta ij}\omega_i \wedge \omega_j. \tag{1.11}$$

Das equações (1.2), (1.7) e (1.8), obtemos a seguinte relação entre as funções R_{ijkl} e a curvatura de $Q_p^{n+p}(c)$

$$R_{ijkl} = c\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \sum_{\alpha}\left(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}\right), \tag{1.12}$$

que é conhecida como a *equação de Gauss.*

Da mesma forma, de (1.2), (1.10) e (1.11), obtemos uma expressão para as funções $R_{\alpha\beta ij}$, a saber

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum_{l}\left(h_{il}^{\alpha}h_{lj}^{\beta} - h_{jl}^{\alpha}h_{li}^{\beta}\right), \tag{1.13}$$

que é conhecida como a *equação de Ricci.*

1.2 Curvaturas e outras definições

Seja $B = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\omega_i\omega_j e_{\alpha}$ a *segunda forma fundamental de* x.

Definimos o *vetor curvatura média* como

$$h = \frac{1}{n}\sum_{\alpha}\left(\sum_{i} h_{ii}^{\alpha}\right)e_{\alpha} \tag{1.14}$$

e a função *curvatura média* por

$$H = |h| = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\alpha}\left(\sum_{i} h_{ii}^{\alpha}\right)^2}. \tag{1.15}$$

Notemos que, com esta última definição, a função curvatura média é não negativa.

As funções R_{ijkl}, que aparecem em (1.8), nos permitem definir vários tipos de curvatura em M. Seja $P \subset T_mM$ um subespaço de dimensão 2 do espaço tangente T_mM, com $m \in M$. Se $e_i, e_j \in T_mM$ geram P, $i \neq j$, então R_{ijij} é chamada a *curvatura seccional* de M em m segundo P.

As componentes do tensor *curvatura de Ricci*, definidas por

$$R_{ij} = Ric(e_i, e_j) = \sum_{k} R_{ikjk}$$

são dadas por

$$R_{ij} = (n-1)c\delta_{ij} - \sum_{\alpha}\left(\sum_{k} h^{\alpha}_{kk}\right) h^{\alpha}_{ij} + \sum_{\alpha,k} h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jk}. \tag{1.16}$$

A *curvatura escalar normalizada* R, que é definida por

$$R = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i} Ric(e_i, e_i)$$

satisfaz, portanto, de (1.16)

$$n(n-1)(R-c) = S - n^2H^2, \tag{1.17}$$

onde $S = \sum_{\alpha,i,j}(h^{\alpha}_{ij})^2$ denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental B.

A partir de agora, faremos menção à equação (1.17) como a equação de Gauss.

Seja $\nabla^{\perp}$ a conexão de Levi-Civita do fibrado normal de M^n. Dizemos que o vetor curvatura média h é *paralelo* se $\nabla^{\perp}h = 0$, isto é, $\nabla^{\perp}_X h = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Observação 1.2.1. *Se h é paralelo, então H é constante.*

Demonstração: De fato, $H = |h|$ é constante se e somente se $|h|^2$ é constante. Seja $f = \langle h, h\rangle = -|h|^2$. Então f é uma função diferenciável definida em M. Seja $X \in \mathcal{X}(M)$, então $X(f) = 2\langle \nabla^{\perp}_X h, h\rangle = 0$, se h é paralelo. Mas, como M é suposta conexa, temos que f é constante, portanto H é constante. ∎

M é dita *máxima* se $h = 0$ e é dita *totalmente geodésica* se $B = 0$, isto é, $h^{\alpha}_{ij} = 0$, $\forall \alpha, i, j$.

Dizemos que o *fibrado normal* de M é *plano* se

$$R^{\perp} = 0. \tag{1.18}$$

Isso eqüivale a

$$R_{\alpha\beta ij} = 0, \ \forall \alpha, \beta, i, j. \tag{1.19}$$

Denotando por h^{α} a matriz dos h^{α}_{ij}, temos que (1.19) e (1.13) implicam que as matrizes h^{α} e h^{β} comutam para todo α, β. Logo, as matrizes h^{α} podem ser diagonalizadas simultaneamente para todo α (veja [8], Prop. 1, pág. 95).

Subvariedades de tipo espaço totalmente umbílicas

Uma subvariedade de tipo espaço M^n imersa em $Q_p^{n+p}(c)$ é dita *umbílica em um ponto* $m \in M$ se, para todo $\xi \in T_m(M)^{\perp}$, existe $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\langle B(X,Y),\xi\rangle = \lambda_\xi \langle X,Y\rangle$, para todos $X,Y \in T_m(M)$. M^n é *totalmente umbílica* se ela é umbílica em todo ponto.

É claro que uma subvariedade totalmente geodésica é totalmente umbílica, onde $\lambda_\xi = 0$, para todo $\xi \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$.

As matrizes h^α são múltiplas da matriz identidade, em cada ponto da subvariedade, para cada α, se M^n é totalmente umbílica. Deste fato, segue o seguinte:

Proposição 1.2.2. *Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$. Então, $S - nH^2 \geq 0$ e a igualdade vale se, e somente se, M^n é totalmente umbílica. Além disto, se M^n é totalmente umbílica, então o vetor curvatura média é paralelo e $R^{\perp} = 0$.*

Um resultado interessante da teoria de subvariedades de tipo espaço encontrado em [16], que utiliza simplesmente a expressão (1.16) das componentes do tensor curvatura de Ricci, é o seguinte:

Proposição 1.2.3. *Seja $x : M^n \to Q_p^{n+p}(c)$ uma subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$. Se M^n é máxima, então $Ric(e_i,e_i) \geq (n-1)c$ e a igualdade vale, se e somente se, M^n é totalmente geodésica.*

Tal proposição tem um resultado análogo na teoria de subvariedades mínimas em espaços forma Riemannianos, o qual pode ser encontrado em [15], Prop. 1.5, pág.10, observando que a curvatura de Ricci é definida por $Ric(e_i) = \dfrac{1}{n-1}Ric(e_i,e_i)$.

1.3 A fórmula de tipo Simons

Em 1968, Simons [26] obteve uma fórmula para o Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma imersão de uma variedade conexa em S^{n+p}, estabelecendo uma desigualdade no caso em que a imersão é mínima e, como aplicação, estudou o caso em que a variedade é compacta.

Muitos autores abordaram este tema, conseguindo resultados análogos àqueles obtidos por Simons. Podemos citar, por exemplo, os trabalhos: [14] no caso compacto e mínimo em espaços forma Riemannianos, [4] no caso compacto com curvatura média constante em S^{n+1}, entre outros. Vale observar que, no caso em que H é constante, para $p = 1$, ou h é paralelo, para p qualquer, é conveniente introduzir um operador Φ de traço zero e obter uma fórmula de tipo Simons para o Laplaciano de $|\Phi|^2$. Essa é a ferramenta que torna possível transportar resultados do caso em que a subvariedade tem vetor curvatura média nulo (mínima ou máxima, de acordo com a nomenclatura escolhida no espaço forma Riemanniano ou semi-Riemanniano) para o caso em que a subvariedade tem vetor curvatura média paralelo. Para maiores detalhes, e conhecimento da sua expressão, veja, por exemplo, [25] no caso Riemanniano ($S^{n+p}(c)$) e [9] no caso semi-Riemanniano ($S_p^{n+p}(c)$).

A fórmula de tipo Simons contida nesta seção pode ser encontrada em [9]. No caso em que a subvariedade é máxima, sua expressão é mais simples e foi obtida por Ishihara [16]. É importante observarmos que as técnicas empregadas na demonstração desta fórmula podem ser aplicadas a operadores semelhantes ao operador segunda forma fundamental (como é o caso do operador Φ). Para alguns exemplos disto, veja [1], [9] e [10].

Antes de mostrarmos os cálculos para a obtenção dessa fórmula, faremos um breve apanhado sobre operadores diferenciais.

Operadores Diferenciais

Definimos o gradiente, o Hessiano e o Laplaciano de uma função $f \in C^2(M)$, elementos que serão utilizados na obtenção e no emprego das fórmulas e teoremas encontrados nas próximas seções. A importância destes operadores reside no fato de que eles nos permitem demonstrar teoremas globais em variedades semi-Riemannianas.

Definição 1.3.1. *Para qualquer função $f \in C^2(M)$, o gradiente de f, denotado por ∇f, é um campo vetorial metricamente eqüivalente à diferencial $df \in \mathcal{X}(M)$. Ou seja,*

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f), \ \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Em termos de coordenadas, $df = \sum_i f_i w_i$. É imediato que $\nabla f = \sum_i f_i e_i$, onde

$\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial local ortonormal tangente a M.

Definição 1.3.2. *A diferencial covariante de df é dada por*

$$\nabla(df) = \sum_{i,j} f_{ij} w_i w_j,$$

onde $\sum_j f_{ij} w_j = df_i + \sum_j f_j w_{ji}$.

$\nabla(df)$ é chamada o Hessiano de f na métrica de M e será denotado por $\nabla^2 f$.

Notemos que $f_{ij} = f_{ji}$ e $\nabla^2 f$ é bilinear.

Definição 1.3.3. *O traço da forma bilinear $\nabla^2 f$, isto é,*

$$\Delta f = \sum_i f_{ii}$$

é chamado o Laplaciano de f.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então

$$\Delta(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\Delta f + \varphi''(f)|\nabla f|^2. \tag{1.20}$$

Seja Φ um tensor simétrico definido em M^n, cuja expressão no referencial local é

$$\Phi = \sum_{i,j,\alpha} \Phi_{ij}^{\alpha} w_i w_j e_\alpha. \tag{1.21}$$

A derivada covariante de Φ_{ij}^{α} é definida por

$$\sum_k \Phi_{ijk}^{\alpha}\omega_k = d\Phi_{ij}^{\alpha} + \sum_k \Phi_{ik}^{\alpha}\omega_{kj} + \sum_k \Phi_{jk}^{\alpha}\omega_{ki} - \sum_\beta \Phi_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.22}$$

Com estas definições, podemos prosseguir o nosso estudo da fórmula de Simons.

Sejam h_{ij}^{α} as componentes da segunda forma fundamental B da imersão $x : M^n \to Q_p^{n+p}(c)$. Como $S = \sum_{i,j,\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2$, temos, por (1.20) que

$$\Delta S = 2\sum_{i,j,k,\alpha} (h_{ijk}^{\alpha})^2 + 2\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}. \tag{1.23}$$

É necessário, desta forma, calcularmos as derivadas até 2ª ordem de h^α_{ij}.

As derivadas covariantes h^α_{ijk} de h^α_{ij} satisfazem, por (1.22),

$$\sum_k h^\alpha_{ijk}\omega_k = dh^\alpha_{ij} + \sum_k h^\alpha_{ik}\omega_{kj} + \sum_k h^\alpha_{jk}\omega_{ki} - \sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.24}$$

Substituindo dh^α_{ij} da definição (1.24) na derivada exterior de (1.5), obtemos as equações de Codazzi

$$h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{ikj}. \tag{1.25}$$

Analogamente, temos que as derivadas covariantes de segunda ordem h^α_{ijkl} of h^α_{ij} satisfazem

$$\sum_l h^\alpha_{ijkl}\omega_l = dh^\alpha_{ijk} + \sum_l h^\alpha_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h^\alpha_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h^\alpha_{ijl}\omega_{lk} - \sum_\beta h^\beta_{ijk}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.26}$$

Então, por derivação exterior de (1.24), obtemos a fórmula de Ricci

$$h^\alpha_{ijkl} - h^\alpha_{ijlk} = \sum_m h^\alpha_{im}R_{mjkl} + \sum_m h^\alpha_{jm}R_{mikl} + \sum_\beta h^\beta_{ij}R_{\alpha\beta kl}. \tag{1.27}$$

O Laplaciano Δh^α_{ij} de h^α_{ij}, pela Definição 1.3.3, é dado por $\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{ijkk}$. De (1.25) e (1.27), temos

$$\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_{m,k} h^\alpha_{km}R_{mijk} + \sum_{m,k} h^\alpha_{mi}R_{mkjk} + \sum_{k,\beta} h^\beta_{ik}R_{\alpha\beta jk}. \tag{1.28}$$

Se $H \neq 0$, podemos escolher a base $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ de forma que $e_{n+1} = \dfrac{h}{H}$. Assim,

$$H^{n+1} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(h^{n+1}) = H \text{ e } H^\alpha = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(h^\alpha) = 0,\ \alpha \geq n+2. \tag{1.29}$$

Segue de (1.12), (1.13), (1.28) e (1.29) que

$$\begin{aligned}\Delta h^\alpha_{ij} &= nH^\alpha_{ij} + nch^\alpha_{ij} - ncH^\alpha\delta_{ij} + \sum_{\beta,k,m} h^\alpha_{km}h^\beta_{mk}h^\beta_{ij} - 2\sum_{\beta,k,m} h^\alpha_{km}h^\beta_{mj}h^\beta_{ik} + \\ &+ \sum_{\beta,k,m} h^\alpha_{mi}h^\beta_{mk}h^\beta_{kj} - nH\sum_m h^\alpha_{mi}h^{n+1}_{mj} + \sum_{\beta,k,m} h^\alpha_{jm}h^\beta_{mk}h^\beta_{ki},\ \forall\alpha.\end{aligned} \tag{1.30}$$

A seguir obtemos uma fórmula de tipo Simons, que pode ser verificada utilizando-se (1.23) e alguns cálculos diretos.

Teorema 1.3.4. *Seja $x : M^n \to Q_p^{n+p}(c)$ uma subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$, com curvatura média não nula. Então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S = & \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + n\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}H_{ij}^{\alpha} + nc(S - nH^2) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(h^{\alpha}h^{\beta})]^2 + \\ & -nH\sum_{\alpha} tr(h^{n+1}(h^{\alpha})^2) + \sum_{\alpha,\beta} N(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}),\end{aligned} \tag{1.31}$$

onde $N(A) = tr(AA^t)$, para toda matriz $A = [a_{ij}]$.

1.4 Alguns resultados conhecidos

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da teoria de subvariedades de tipo espaço em $Q_p^{n+p}(c)$, incluindo aqueles que serão fundamentais para as demonstrações dos nossos resultados.

Teorema 1.4.1. *([17]) Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$. Se M^n possui curvatura escalar normalizada constante $R \leq c$, então*

$$\sum_{i,j,k,\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2 - n^2|\nabla H|^2 \geq 0. \tag{1.32}$$

Demonstração: Se $H \equiv 0$, então a conclusão (1.32) é óbvia. Suponhamos $H \neq 0$. Como $R \leq c$, da equação de Gauss (1.17) temos que

$$\sum_{i,j,\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2 = S \leq n^2H^2. \tag{1.33}$$

Tomando a derivada covariante ∇_{e_k} em ambos os lados de (1.17), obtemos

$$n^2HH_k = \sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{ijk}^{\alpha} \tag{1.34}$$

para todo $k = 1, ..., n$.

Por outro lado, para cada k, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos diz que

$$n^4H^2H_k^2 = (\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{ijk}^{\alpha})^2 \leq S\sum_{i,j,\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2. \tag{1.35}$$

Somando em k a equação (1.35), e usando (1.33), obtemos

$$n^4H^2|\nabla H|^2 \leq S\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 \leq n^2H^2\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2. \tag{1.36}$$

Uma vez que $H \neq 0$, segue o resultado. ■

Lema 1.4.2. *([25]) Sejam $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicações lineares simétricas tais que $AB = BA$ e $tr(A) = tr(B) = 0$. Então*

$$|tr(A^2B)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}N(A)\sqrt{N(B)}. \tag{1.37}$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $(n-1)$ dos autovalores x_i de A e os correspondentes autovalores de y_i de B satisfazem

$$|x_i| = \sqrt{\frac{N(A)}{n(n-1)}},\ x_ix_j \geq 0$$

$$y_i = \sqrt{\frac{N(B)}{n(n-1)}}\ \left(resp.\ \ y_i = -\sqrt{\frac{N(B)}{n(n-1)}}\right).$$

A demonstração deste lema é essencialmente algébrica e será omitida aqui.

A desigualdade (1.37) pode ser considerada uma generalização do Lema de Okumura, comumente utilizado na prova de resultados para hipersuperfícies. Apresentamos o seu enunciado abaixo e utilizaremos essa desigualdade quando tratarmos de hipersuperfícies.

Lema 1.4.3. *(Lema de Okumura) Sejam $x_1, ...x_n$ números reais tais que $\sum_i x_i = 0$ e $\sum_i x_i^2 = K^2$, $K > 0$. Então*

$$|\sum_i x_i^3| \leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}K^3 \tag{1.38}$$

e a igualdade vale em (1.38) se, e somente se, pelo menos $n-1$ dos x_i são iguais.

A sua demonstração consiste em encontrar os pontos críticos de $\sum_i x_i^3$ através do Método dos Multiplicadores de Lagrange sujeito às condições $\sum_i x_i = 0$ e $\sum_i x_i^2 = K^2$.

No caso em que a variedade M é compacta, existem alguns resultados interessantes, que serão aplicados no Capítulo 4 e estão descritos a seguir. O mais importante deles, e do qual os outros decorrem, é o conhecido Teorema de Stokes, que é um corolário do Teorema da Divergência.

Teorema 1.4.4. *(Stokes) Sejam M uma variedade Riemanniana orientável compacta e f uma função diferenciável em M. Então*

$$\int_M \Delta f = 0.$$

Seja Φ o tensor dado em (1.21). Podemos definir, como em [13], um operador $\square^\alpha$ associado a Φ, que, em um referencial ortonormal local, pode ser escrito por

$$\square^\alpha f = \sum_{i,j} \Phi^\alpha_{ij} f_{ij}, \tag{1.39}$$

onde $f \in C^2(M)$.

Proposição 1.4.5. *([13]) Seja M^n uma variedade Riemanniana orientável compacta. Então $\square^\alpha$ é auto-adjunto no L^2-produto interno se e somente se*

$$\sum_j \Phi^\alpha_{ijj} = 0. \tag{1.40}$$

Demonstração: Suponha que vale (1.40). Então, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial local ortonormal em M^n. Sejam f e g funções arbitrárias de classe C^2 em M^n. Tomando a derivada covariante de $\Phi^\alpha_{ij} f_i g$, obtemos

$$(\Phi^\alpha_{ij} f_i g)_j = \Phi^\alpha_{ijj} f_i g + \Phi^\alpha_{ij} f_{ij} g + \Phi^\alpha_{ij} f_i g_j. \tag{1.41}$$

Assim, integrando em M e usando (1.41), tem-se:

$$\int_M (\square^\alpha f) g = \int_M \left(\sum_{i,j} \Phi^\alpha_{ij} f_{ij} \right) g = \int_M d\left(\sum_{i,j} \Phi^\alpha_{ij} f_{ij} g * w_j \right) - \int_M \sum_{i,j} \Phi^\alpha_{ij} f_i g_j. \tag{1.42}$$

De forma análoga,

$$\int_M f(\square^\alpha g) = \int_M f\left(\sum_{i,j} \Phi^\alpha_{ij} g_{ij} \right) = \int_M d\left(\sum_{i,j} \Phi^\alpha_{ij} g_{ij} f * w_j \right) - \int_M \sum_{i,j} \Phi^\alpha_{ij} g_i f_j. \tag{1.43}$$

Comparando (1.42) e (1.43), temos que os segundos termos à direita da igualdade de cada uma das expressões são iguais e, pelo Teorema de Stokes, os primeiros termos à direita da igualdade se anulam. Logo $\square^\alpha$ é auto-adjunto com relação ao L^2- produto interno.

A recíproca é análoga. ■

Teorema 1.4.6. *(Princípio do Máximo de Hopf) Seja M uma variedade Riemanniana orientável, compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em M com $\Delta f \geq 0$. Então f é constante.*

Uma demonstração para o Teorema de Hopf pode ser encontrada em [8], pág. 78.

A próxima proposição será usada para ilustrar o que ocorre na situação em que a subvariedade M^n é uma superfície de S_1^3, isto é, se $p = 1$ e $n = 2$, exemplo que poderá ser encontrado no Capítulo 2.

Proposição 1.4.7. *Seja M^2 uma superfície de tipo espaço completa em $S_1^3(1)$ com curvatura Gaussiana constante satisfazendo*

$$0 < K \leq 1.$$

Então M^2 é totalmente umbílica.

A prova segue facilmente de um teorema devido a H. Li [17] (veja Capítulo 2) após aplicarmos o conhecido

Teorema 1.4.8. *(Bonnet-Myers) Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva. Então M^n é compacta.*

Quando tratamos de variedades Riemannianas (e as subvariedades de tipo espaço se encaixam neste contexto) que não são compactas mas são completas, é necessário um resultado similar a um princípio do máximo. Abaixo, enunciamos um teorema para essas variedades, que pode ser encontrado em [24], e será aplicado na demonstração de nossos resultados.

Teorema 1.4.9. *(Princípio do Máximo de Omori) Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvaturas seccionais limitadas inferiormente e seja $F : M^n \rightarrow$*

$\mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *que é limitada superiormente em* M^n. *Então existe uma seqüência de pontos* $\{p_k\}$ *em* M^n *tais que*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} F(p_k) &= \sup(F), \\ \lim_{k\to\infty} \mid \nabla F(p_k) \mid &= 0 \text{ e} \\ \limsup_{k\to\infty} \max\{(\nabla^2 F(p_k))(X,X) : |X| = 1\} &\leq 0. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Capítulo 2

Hipersuperfícies de tipo espaço completas com curvatura escalar constante em $S_1^{n+1}(c)$

Em [17], H. Li estudou hipersuperfícies de tipo espaço compactas no espaço de De Sitter e provou o seguinte resultado:

Teorema: *Seja M^n uma hipersuperfície de tipo espaço compacta em $S_1^{n+1}(c)$ com curvatura escalar normalizada constante R. Se*

$$\frac{n-2}{n}c \leq R \leq c, \tag{2.1}$$

então M^n é totalmente umbílica.

No mesmo artigo, H. Li propôs o seguinte problema: se substituirmos a hipótese de compacidade pela hipótese mais geral de completude, obteremos o mesmo resultado?

Na primeira seção deste capítulo, pretendemos abordar este problema, utilizando praticamente a mesma ferramenta principal do trabalho de H. Li, que é o operador $\square$ definido por Cheng-Yau [13]

$$\square(f) = \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}, \tag{2.2}$$

para qualquer função $f \in C^2(M)$, como em (1.39). Observemos, no entanto, que neste caso, apesar de valer (1.40), veja a demonstração no Capítulo 4, o operador $\square$

não é auto-adjunto em relação ao L^2-produto interno (como na Proposição 1.4.5), pois M^n não é necessariamente compacta. Cabe, então, utilizarmos, nessa situação, uma versão do Princípio do Máximo para variedades completas, que é o Teorema 1.4.9, para concluirmos o nosso resultado. Esta técnica também foi utilizada no trabalho [2], para variedades Riemannianas, num contexto mais geral.

Na segunda seção, encontramos uma desigualdade simples para $\square(nH)$ e, a partir de uma limitação para o quadrado da norma da segunda forma fundamental, S, classificamos tais hipersuperfícies como totalmente umbílicas.

2.1 O problema proposto por H. Li

Seja M^n uma hipersuperfície de tipo espaço completa em $S_1^{n+1}(c)$, $c > 0$, com $n \geq 3$, e, para cada $p \in M$, escolhemos um referencial ortonormal de campos $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ em $S_1^{n+1}(c)$ de modo que $\{e_1, ..., e_n\}$ gera o espaço tangente de M^n em p. Tomamos o coreferencial associado $\{w_1, ..., w_{n+1}\}$ e w_{ij} as 1-formas de conexão.

A métrica em $S_1^{n+1}(c)$ é dada por $ds^2 = \sum_i w_i^2 - w_{n+1}^2$.

Simplificando as fórmulas já obtidas no Capítulo 1, temos que as 1-formas de conexão w_{n+1i} (1.5) são escritas como

$$w_{n+1i} = \sum_{i,j} h_{ij} w_j, \; h_{ij} = h_{ji},$$

onde estamos denotando, para simplificar, $h_{ij} = h_{ij}^{n+1}$ as componentes da segunda forma fundamental de M^n.

A função curvatura média de M^n é dada por $H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}$. Se $H \neq 0$, então, sem perda de generalidade, podemos supor $H > 0$. Para isto, basta escolhermos uma orientação adequada, com o vetor curvatura média h na mesma orientação temporal que e_{n+1}, isto é, $\langle h, e_{n+1} \rangle < 0$.

As funções R_{ijkl} (1.12) de M^n ficam escritas como

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{2.3}$$

As componentes do tensor de Ricci (1.16) têm a forma simplificada

$$R_{ij} = (n-1)c\delta_{ij} - nHh_{ij} + \sum_k h_{ik}h_{kj}. \tag{2.4}$$

A fórmula de Simons (1.31) torna-se

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = \sum_{ijk}(h_{ijk})^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}H_{ij} + nc(|A|^2 - nH^2) - nHtr(A^3) + [tr(A^2)]^2, \tag{2.5}$$

onde $A = (h_{ij})$ é a matriz da segunda forma fundamental de M e, portanto, $S = |A|^2$.

Aplicando o operador (2.2) em $f = nH$, temos que

$$\square(nH) = nH\Delta(nH) - \sum_{i,j} h_{ij}(nH)_{ij}.$$

Daí, usando (1.20), temos

$$\square(nH) = \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - \sum_i (nH_i)^2 - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii}, \tag{2.6}$$

onde estamos supondo que o referencial ortonormal de campos $\{e_1, ...e_{n+1}\}$ escolhido seja tal que $\{e_1, ..., e_n\}$ diagonaliza A, isto é, $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$.

Da equação de Gauss (1.17), sabemos que

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 - \frac{n(n-1)}{2}\Delta R = \frac{1}{2}\Delta(nH)^2. \tag{2.7}$$

Logo, por (2.5), (2.6) e (2.7), obtemos

$$\begin{aligned}\square(nH) &= \frac{1}{2}\Delta|A|^2 - \frac{n(n-1)}{2}\Delta R - \sum_i (nH_i)^2 - \sum_i \lambda_i(nH)_{ii} = \\ &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - \frac{n(n-1)}{2}\Delta R + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + nc(|A|^2 - nH^2) + \\ &\quad - nHtr(A^3) + [tr(A^2)]^2 - \sum_i (nH_i)^2 - \sum_i \lambda_i(nH)_{ii}.\end{aligned}$$

E, portanto,

$$\begin{aligned}\square(nH) = \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - \frac{n(n-1)}{2}\Delta R - n^2|\nabla H|^2 + \\ + nc(|A|^2 - nH^2) - nHtr(A^3) + |A|^4.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Com esta expressão, podemos enunciar e demonstrar uma desigualdade para $\square(nH)$, que envolverá o polinômio

$$P_H(x) = x^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx + n(c - H^2). \tag{2.9}$$

Proposição 2.1.1. *Seja $x : M^n \to S_1^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície de tipo espaço completa com curvatura média não nula. Se a curvatura escalar normalizada R de M^n é constante e satisfaz $R \leq c$, então*

$$\square(nH) \geq |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(c - H^2) \right) = |\Phi|^2 P_H(|\Phi|), \tag{2.10}$$

onde Φ é o operador dado por $\Phi = A - HI$, com I denotando a aplicação identidade.

Demonstração: Como R é constante e $R \leq c$, temos que vale a desigualdade (1.32) que, substituída em (2.8), fornece

$$\square(nH) \geq nc(|A|^2 - nH^2) - nHtr(A^3) + |A|^4. \tag{2.11}$$

Da definição do operador Φ, temos que ele tem traço zero, é diagonalizável e satisfaz

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2. \tag{2.12}$$

Sejam Φ_{ij} as componentes de Φ. Então, denotando por $\mu_i = \Phi_{ij}\delta_{ij}$ os autovalores de Φ, temos

$$\mu_i = \lambda_i - H. \tag{2.13}$$

Desta forma, $tr(A^3)$ pode ser obtido calculando-se $tr(\Phi)^3$, pois

$$\mu_i^3 = \lambda_i^3 - 3\lambda_i^2 H + 3\lambda_i H^2 - H^3.$$

Assim,

$$tr(\Phi^3) = \sum_i \mu_i^3 = tr(A^3) - 3H|A|^2 + 2nH^3.$$

Portanto,

$$tr(A^3) = tr(\Phi^3) + 3H|\Phi|^2 + nH^3. \tag{2.14}$$

Logo, substituindo (2.12) e (2.14) em (2.11), obtemos

$$\square(nH) \geq n(c - H^2)|\Phi|^2 + |\Phi|^4 - nHtr(\Phi^3). \tag{2.15}$$

Usando agora o Lema 1.4.3 para os μ_i dados pela equação (2.13) e lembrando que $tr(\Phi^3) = \sum_i \mu_i^3$, temos

$$|tr(\Phi^3)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3.$$

Conseqüentemente,

$$-nHtr(\Phi^3) \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^3. \tag{2.16}$$

Substituindo a desigualdade (2.16) em (2.15), obtemos o resultado. ■

Podemos agora enunciar o nosso resultado principal.

Teorema 2.1.2. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma hipersuperfície de tipo espaço completa em $S_1^{n+1}(c)$ com curvatura média não nula H limitada superiormente e curvatura escalar normalizada constante R satisfazendo*

$$\frac{n-2}{n}c \leq R \leq c, \tag{2.17}$$

então M^n é totalmente umbílica.

Demonstração: Consideremos o polinômio (2.9).

Afirmamos que $P_H(|\Phi|) > 0$.

De fato, se $H^2 < \dfrac{4(n-1)c}{n^2}$, temos que o discriminante do polinômio dado é negativo, e portanto, $P_H(|\Phi|) > 0$.

Suponhamos que $H^2 \geq \dfrac{4(n-1)c}{n^2}$. Então $P_H(x)$ possui raízes.

Seja $\alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\left((n-2)H + \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)c}\right)$ a maior raiz de $P_H(x)$, que é positiva. Notemos que ela pode ser a única raiz se $H^2 = \dfrac{4(n-1)}{n^2}$. Então

$$\alpha^2 = \frac{n}{2(n-1)}(n^2H^2 - 2nH^2 + 2H^2 - 2(n-1)c + (n-2)H\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)c}\ ).$$

Usando a equação de Gauss (1.17) e a fórmula (2.12), temos que

$$|\Phi|^2 = n(n-1)(R - c + H^2). \tag{2.18}$$

Como, por hipótese, $R \geq \frac{n-2}{n}c$, segue que $|\Phi|^2 \geq (n-1)(nH^2 - 2c)$.

Vamos mostrar que $|\Phi|^2 > \alpha^2$, conseqüentemente, $|\Phi| > \alpha$ e, portanto, $P_H(|\Phi|) > 0$.

Com efeito, através de simples cálculos, mostramos que

$$|\Phi|^2 - \alpha^2 \geq \frac{(n-2)}{2(n-1)}(n^2H^2 - nH\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)c} - 2(n-1)c). \tag{2.19}$$

Segue que $|\Phi|^2 - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow n^2H^2 - nH\sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)c} - 2(n-1)c > 0$. Mas a desigualdade anterior é válida se e somente se $4(n-1)^2c^2 > 0$, o que é sempre verdade, pois $c > 0$. Logo $|\Phi|^2 - \alpha^2 > 0$, o que prova a nossa afirmação.

Assim, $\square(nH) \geq |\Phi|^2 P_H(|\Phi|) \geq 0$ e a igualdade vale se, e somente se, $|\Phi|^2 = 0$, ou seja, se M^n é totalmente umbílica.

Entretanto, por definição,

$$\square(nH) = \sum_i (nH\delta_{ij} - h_{ij})(nH)_{ij} = \sum_i (nH - \lambda_i)(nH)_{ii}. \tag{2.20}$$

Das equações (1.17) e (2.17), segue que $S \leq n^2H^2$, pois $R \leq c$. Logo $\lambda_i^2 \leq n^2H^2$, para cada i, o que implica que $|\lambda_i| \leq nH$ e, portanto, $nH - \lambda_i \geq 0$.

Para concluirmos a demonstração, seja $f = H$. Então f é de classe C^2 e, por hipótese, é limitada superiormente. Além disto, as curvaturas seccionais de M^n são limitadas inferiormente, pois de (2.3)

$$R_{ijij} = c - \lambda_i\lambda_j \tag{2.21}$$

e, como $|\lambda_i| \leq nH$, para cada i, temos que $\lambda_i\lambda_j \leq |\lambda_i\lambda_j| = |\lambda_i||\lambda_j| \leq n^2H^2$. Logo $R_{ijij} \geq c - n^2H^2$ e, como H é limitada superiormente por hipótese, segue que R_{ijij} é limitada inferiormente, para cada i, j.

Como M^n é de tipo espaço e completa, podemos aplicar o Teorema 1.4.9. Então existe uma seqüência de pontos $\{p_k\}$ tais que vale (1.44).

Em particular, para cada p_k vale

$$|\Phi|^2(p_k)P_H(|\Phi|)(p_k) \leq \square(nH)(p_k) = \sum_i (nH - \lambda_i)(p_k)nH_{ii}(p_k). \tag{2.22}$$

Como vale (1.44), $\lim_{k\to\infty} H(p_k) = \sup H$, portanto, da fórmula (2.18), segue que $\lim_{k\to\infty} |\Phi|^2(p_k) = \sup |\Phi|^2$. Logo, tomando o $\limsup_{k\to\infty}$ em (2.22), obtemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sup |\Phi|^2 \limsup_{k\to\infty}(P_H(|\Phi|)(p_k)) &\leq \limsup_{k\to\infty}(\square(nH)(p_k)) = \\ &= n\sum_i \limsup_{k\to\infty}[(nH - \lambda_i)(p_k)(H_{ii}(p_k))]. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Por um lado, como $nH - \lambda_i \geq 0$, temos que $\limsup_{k\to\infty}(nH - \lambda_i)(p_k) \geq 0$ e $nH - \lambda_i$ é limitada superiormente, pois

$$nH - \lambda_i \leq |nH - \lambda_i| \leq nH + |\lambda_i| \leq 2nH$$

e H é limitado superiormente.

Por outro lado,

$$H_{ii}(p_k) = (\nabla^2 H)(p_k)(e_i, e_i) \leq \max\{(\nabla^2 H(p_k))(X, X) : |X| = 1\}. \tag{2.24}$$

Logo, aplicando $\limsup_{k\to\infty}$ à (2.24) e utilizando (1.44), temos

$$\limsup_{k\to\infty}(H_{ii}(p_k)) \leq \limsup_{k\to\infty} \max\{(\nabla^2 H(p_k))(X, X) : |X| = 1\} \leq 0.$$

Segue de (2.23) que

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty}(\square(nH)(p_k)) \leq 0.$$

Logo, $\sup |\Phi|^2 \limsup_{k\to\infty}(P_H(|\Phi|)(p_k)) = 0$ e, uma vez que $\limsup_{k\to\infty}(P_H(|\Phi|)(p_k)) \geq 0$, segue que $\limsup_{k\to\infty}(P_H(|\Phi|)(p_k)) = 0$ ou $\sup |\Phi|^2 = 0$. Mas, se $\limsup_{k\to\infty}(P_H(|\Phi|)(p_k)) = 0$, temos que

$$\limsup_{k\to\infty} |\Phi|^2(p_k) = \limsup_{k\to\infty}(\alpha^2(p_k)). \tag{2.25}$$

Como $|\Phi|^2 \geq (n-1)(nH^2 - 2c)$, raciocinando como em (2.19), obtemos que (2.25) ocorre se e somente se $c = 0$, o que é absurdo. Logo, $\limsup_{k\to\infty}(P_H(|\Phi|)(p_k)) > 0$.

Conseqüentemente, $\sup|\Phi|^2 = 0$, então $|\Phi|^2 = 0$ e isso implica que M^n é totalmente umbílica. ∎

A seguir, vamos apresentar um exemplo, encontrado em [17], para justificar a condição (2.17) para a curvatura escalar normalizada constante.

Exemplo 2.1.3. *O cilindro hiperbólico.*

Seja $M_r = \{x \in S_1^{n+1} : -x_1^2 + x_2^2 = -senh^2 r\}$, *com* $r \in \mathbb{R}^+$.

M_r *é uma hipersuperfície de tipo espaço mergulhada em* $S_1^{n+1}(1)$ *que é isométrica ao produto Riemanniano* $H^1(1 - cotgh^2 r) \times S^{n-1}(1 - tgh^2 r)$, *onde* $H^1(1 - cotgh^2 r)$ *é um espaço hiperbólico de dimensão 1 (reta hiperbólica) com curvatura* $1 - cotgh^2 r$ *e* $S^{n-1}(1 - tgh^2 r)$ *é uma esfera de dimensão* $n-1$ *com curvatura* $1 - tgh^2 r$.

M_r *tem duas curvaturas principais distintas*

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = tghr \text{ e } \lambda_n = cotghr.$$

Usando a equação de Gauss (1.17) para calcular R, *encontramos*

$$R = \frac{n-2}{n}(1 - tgh^2 r) < \frac{n-2}{n}.$$

Desta forma, é possível, para cada R *satisfazendo*

$$0 < R < \frac{n-2}{n}, \tag{2.26}$$

escolhermos algum r *para o qual a hipersuperfície* M_r *é de tipo espaço, completa, mas não totalmente umbílica.*

O cilindro hiperbólico $H^1 \times S^{n-1}$ é uma hipersuperfície que aparece também como contra-exemplo para a conjectura de Goddard. Com efeito, se calcularmos a sua curvatura média, obtemos

$$H = \frac{(n-1)tghr + cotghr}{n}.$$

Então $H^2 = \dfrac{(n-1)^2 tgh^2 r + cotgh^2 r + 2(n-1)}{n^2}$. Em particular, se tomarmos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $cotgh^2 r = n-1$ (e isto implica que $n > 2$), temos que $H^2 = \dfrac{4(n-1)}{n^2}$. Isso mostra que a limitação no teorema de Akutagawa é a melhor possível.

Uma pergunta natural seria a respeito da condição sobre a dimensão da hipersuperfície. Suponhamos, então, que M^2 seja uma superfície de tipo espaço completa em $S_1^3(1)$, com curvatura escalar normalizada constante satisfazendo (2.17). Da definição de curvatura escalar normalizada, sabemos que ela coincide com a curvatura Gaussiana neste caso. Se $0 < K \leq 1$, então, da Proposição 1.4.7, segue que M^2 é totalmente umbílica.

Para o caso em que $R = K = 0$, o resultado não se aplica e isso pode ser comprovado através do seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.4. *Para cada $t > 0$ seja $f_t : \mathbb{R}^2 \to S_1^3(1)$ dada por*

$$f_t(x_1, x_2) = \left(t\cosh\left(\frac{x_1}{t}\right), t\,\mathrm{senh}\left(\frac{x_1}{t}\right), \sqrt{1+t^2}\cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{1+t^2}}\right), \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x_2}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right).$$

Estas superfícies foram estudadas por Dajczer e Nomizu, que provaram que elas são completas, suas curvaturas seccionais são nulas, mas elas não são totalmente umbílicas, uma vez que têm curvaturas principais distintas $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ e $\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$.

2.2 Caracterização através de uma restrição para o quadrado da norma da segunda forma fundamental

O resultado que provamos nesta seção é inspirado no Teorema 1, em [19].

Teorema 2.2.1. *Seja $x : M^n \to S_1^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície de tipo espaço completa com curvatura média não nula e curvatura escalar normalizada R constante satisfazendo $R \leq c$. Se*

$$\sup S < 2\sqrt{n-1}c, \tag{2.27}$$

então M^n é totalmente umbílica.

Demonstração: Sabemos da Proposição 2.1.1 que

$$\Box(nH) \geq |\Phi|^2\left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(c - H^2)\right). \tag{2.28}$$

Considere a forma quadrática

$$Q(u,t) = u^2 - \frac{(n-2)}{\sqrt{n-1}}ut - t^2 \tag{2.29}$$

e a transformação ortogonal

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2n}}[(1+\sqrt{n-1})u + (1-\sqrt{n-1})t], \tag{2.30}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{2n}}[(\sqrt{n-1}-1)u + (\sqrt{n-1}+1)t]. \tag{2.31}$$

Então, não é difícil verificar que, em termos de $\bar{u}$ e $\bar{t}$, (2.29) é dada por

$$Q(u,t) = Q(\bar{u},\bar{t}) = \frac{n(\bar{u}^2 - \bar{t}^2)}{2\sqrt{n-1}}. \tag{2.32}$$

Além disto, de (2.30) e (2.31) também é fácil ver que

$$u^2 + t^2 = \bar{u}^2 + \bar{t}^2. \tag{2.33}$$

Seja $u = |\Phi|$ e $t = \sqrt{n}H$. Substituindo em (2.29), temos que a desigualdade (2.28) torna-se

$$\square(nH) \geq |\Phi|^2(nc + Q(|\Phi|, \sqrt{n}H)). \tag{2.34}$$

De (2.32), segue que (2.34) se escreve como

$$\square(nH) \geq |\Phi|^2 \left(nc + \frac{n(\bar{u}^2 - \bar{t}^2)}{2\sqrt{n-1}}\right) = |\Phi|^2 \left(nc - n\left(\frac{\bar{u}^2 + \bar{t}^2}{2\sqrt{n-1}}\right) + \frac{n\bar{u}^2}{\sqrt{n-1}}\right). \tag{2.35}$$

De (2.33) e do fato que $u^2 + t^2 = |\Phi|^2 + nH^2 = S$, segue que

$$\square(nH) \geq |\Phi|^2 \left(nc - \frac{nS}{2\sqrt{n-1}}\right). \tag{2.36}$$

Por hipótese, $\square(nH) \geq 0$, pois $nc - \dfrac{nS}{2\sqrt{n-1}} > 0$, uma vez que $S \leq \sup S$.

No entanto, como na demonstração do Teorema 2.1.2, temos que vale (2.20).

Além disto, de (2.27) temos que cada função h_{ij} é limitada superiormente e portanto H também o é, bem como as curvaturas seccionais, dadas por (2.21) são limitadas inferiormente e podemos aplicar o Teorema 1.4.9 para a função H.

Logo, existe uma seqüência de pontos p_k tais que

$$\lim_{k\to\infty} H(p_k) = \sup H,$$

$$\limsup_{k\to\infty} \max\{(\nabla^2 H(p_k))(X,X) = 0 : |X| = 1\} \leq 0.$$

Observemos que, das equações (2.12) e (2.18), temos que $S = n(n-1)(R-c) + n^2H^2$ e, portanto, $\lim_{k\to\infty} S(p_k) = \sup S$.

Assim, calculando (2.36) nos pontos p_k da seqüência e tomando o $\limsup_{k\to\infty}$, tem-se que

$$0 \geq \limsup_{k\to\infty}(\square(nH)(p_k)) \geq \sup|\Phi|^2\left(nc - \frac{n\sup S}{2\sqrt{n-1}}\right) \geq 0. \tag{2.37}$$

Portanto $\sup|\Phi|^2 = 0$ e, conseqüentemente, M^n é totalmente umbílica. ∎

Capítulo 3

Subvariedades de tipo espaço completas com curvatura escalar constante em um espaço forma semi-Riemanniano

Neste capítulo, alguns resultados de classificação de subvariedades de tipo espaço completas imersas em um espaço forma semi-Riemanniano serão obtidos, através de restrições, ora na curvatura escalar constante, ora no quadrado da segunda forma fundamental, na curvatura média ou nas curvaturas seccionais da subvariedade.

As ferramentas principais utilizadas neste estudo são a fórmula de tipo Simons dada em (1.31), o operador $\square$, definido em (1.39), e o Princípio do Máximo de Omori (Teorema 1.4.9).

3.1 Aplicação da Fórmula de tipo Simons para o operador $\square$

Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço completa imersa em um espaço forma semi-Riemanniano $Q_p^{n+p}(c)$. Sejam R e H as curvaturas escalar normalizada e média de M^n, respectivamente, e S o quadrado da norma da segunda forma fundamental da imersão, seguindo as notações introduzidas no Capítulo 1.

Suponhamos até o final deste capítulo que a curvatura média de M^n é positiva. Para o caso em que $H = 0$, veja [16]. Então, como visto anteriormente, podemos escolher um referencial ortonormal local de campos $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ em $Q_p^{n+p}(c)$ tal que $e_{n+1} = \frac{h}{H}$, onde h é definido por (1.14). Valem, portanto, as equações (1.1) a (1.13) para este referencial e para o coreferencial associado $\{w_1, ..., w_{n+p}\}$.

Consideremos o seguinte tensor simétrico

$$\Phi = \sum_{i,j,\alpha} \Phi_{ij}^{\alpha} w_i w_j e_{\alpha}, \tag{3.1}$$

onde $\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij}$, e os H^{α} são definidos por (1.29).

Notemos que cada Φ^{α} tem traço zero, pois

$$tr(\Phi^{\alpha}) = \sum_i \Phi_{ii}^{\alpha} = \sum_i h_{ii}^{\alpha} - \sum_i H^{\alpha} = nH^{\alpha} - nH^{\alpha} = 0.$$

Seguindo a técnica utilizada por Cheng-Yau no ambiente Euclideano [13], consideramos o operador $\square$ dado por

$$\square(f) = \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1})f_{ij}, \tag{3.2}$$

para cada função $f \in C^2(M)$.

Notemos que este operador é semelhante ao operador definido por (2.2), que foi utilizado no contexto de hipersuperfícies.

Em particular, se $f = nH$, temos que

$$\square(nH) = nH\Delta(nH) - n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} H_{ij}, \tag{3.3}$$

recordando que $H_{ij} = (\nabla^2 H)(e_i, e_j)$, seguindo a notação da Definição 1.3.2.

Mais uma vez utilizamos a regra da cadeia (1.20) para $\Delta(nH)^2$ e, seguindo o mesmo raciocínio empregado em (2.7), a equação (3.3) torna-se

$$\square(nH) = \frac{1}{2}\Delta S - \frac{n(n-1)}{2}\Delta R - n^2|\nabla H|^2 - n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} H_{ij}. \tag{3.4}$$

Observemos que, se M^n é uma subvariedade de tipo espaço completa com curvatura escalar normalizada constante, então $\Delta R = 0$ e a equação (3.4) torna-se

$$\square(nH) = \frac{1}{2}\Delta S - n^2|\nabla H|^2 - n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}H_{ij}. \tag{3.5}$$

Substituindo a fórmula de Simons (1.31) na expressão (3.5), segue que

$$\begin{aligned}\square(nH) = &\sum_{i,j,k,\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + n\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha}H_{ij}^{\alpha} + nc(S - nH^2) + \\ &- nH\sum_{\alpha} tr(h^{n+1}(h^{\alpha})^2) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(h^{\alpha}h^{\beta})]^2 + \\ &+ \sum_{\alpha,\beta} N(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}) - n^2|\nabla H|^2 - n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}H_{ij}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Se $e_{n+1} = \dfrac{h}{H}$ é paralelo, então a fórmula (3.6) torna-se mais simplificada.

Proposição 3.1.1. *Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço completa imersa em $Q_p^{n+p}(c)$, com curvatura escalar normalizada constante. Se a curvatura média de M^n é não nula e $\dfrac{h}{H}$ é paralelo, então*

$$\begin{aligned}\square(nH) = &\sum_{i,j,k,\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2 - n^2|\nabla H|^2 + nc(S - nH^2) - nH\sum_{\alpha} tr(h^{n+1}(h^{\alpha})^2) + \\ &+ \sum_{\alpha,\beta}[tr(h^{\alpha}h^{\beta})]^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Demonstração: Seja $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ um referencial local ortonormal adaptado à M^n tal que $e_{n+1} = \dfrac{h}{H}$, como anteriormente. Então vale a fórmula (3.6). Uma vez que e_{n+1} é paralelo, segue que

$$0 = \nabla^{\perp} e_{n+1} = \sum_{\alpha} w_{\alpha n+1} e_{\alpha}.$$

Logo,

$$w_{n+1\alpha} = 0, \ \forall \alpha. \tag{3.8}$$

Pela definição (1.24) das derivadas covariantes de h_{ij}^{α}, temos

$$\sum_{k} h_{iik}^{\alpha} w_k = dh_{ii}^{\alpha} + 2\sum_{k} h_{ik}^{\alpha} w_{ki} - \sum_{\beta} h_{ii}^{\beta} w_{\beta\alpha}. \tag{3.9}$$

Tomando a somatória em i na equação (3.9), e usando (1.29) e (3.8), segue que

- se $\alpha = n+1$, então $\sum_k H_k^{n+1} w_k = dH$.

  Portanto, da definição de dH, tem-se que $H_k = H_k^{n+1}$;

- se $\alpha > n+1$, então $\sum_k H_k^{\alpha} w_k = -H w_{n+1\alpha} = 0$. Logo, $H_k^{\alpha} = 0$.

Falta verificarmos o que ocorre com as derivadas covariantes H_{kl}^{α}.

Pela definição (1.26) das derivadas covariantes de segunda ordem de h_{ij}^{α}, temos que

$$\sum_l h_{iikl}^{\alpha} w_l = dh_{iik}^{\alpha} + 2\sum_l h_{ilk}^{\alpha} w_{li} + \sum_l h_{iil}^{\alpha} w_{lk} - \sum_{\beta} h_{iik}^{\beta} w_{\beta\alpha}. \tag{3.10}$$

Tomando a somatória em i na equação (3.10), usando (1.29), (3.8), e o fato que $H_k^{n+1} = H_k$ e $H_k^{\alpha} = 0$, para $\alpha > n+1$, temos

- se $\alpha = n+1$, então $\sum_l H_{kl}^{n+1} w_l = dH_k + \sum_l H_l w_{lk}$.

  Mas, da Definição 1.3.2, segue que $dH_k + \sum_l H_l w_{lk} = \sum_l H_{kl} w_l$ e, portanto, $H_{kl} = H_{kl}^{n+1}$;

- se $\alpha > n+1$, então $\sum_l H_{kl}^{\alpha} w_l = -H_k w_{n+1\alpha} = 0$ e, conseqüentemente, $H_{kl}^{\alpha} = 0$.

Substituindo $H_{kl}^{n+1} = H_{kl}$ e $H_{kl}^{\alpha} = 0$ para $\alpha > n+1$ em (3.6), temos que vale (3.7). ■

Pela definição do tensor Φ, dada na fórmula (3.1), temos, analogamente ao caso de hipersuperfícies, que

$$|\Phi|^2 = \sum_{i,j,\alpha} (\Phi_{ij}^{\alpha})^2 = S - nH^2. \tag{3.11}$$

Seja $\Phi^{\alpha} = [\Phi_{ij}^{\alpha}]$. Então $\Phi^{\alpha} = h^{\alpha} - H^{\alpha} I$. Assim, $\Phi^{n+1} = h^{n+1} - HI$ e $\Phi^{\alpha} = h^{\alpha}$, para $\alpha > n+1$. Usando isto, não é difícil verificar que

$$
\begin{aligned}
-nH\sum_{\alpha} tr(h^{n+1}(h^{\alpha})^2) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(h^{\alpha}h^{\beta})]^2 = {} & -nH\sum_{\alpha} tr(\Phi^{n+1}(\Phi^{\alpha})^2) - nH^2|\Phi|^2 + \\
& + \sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2
\end{aligned}
$$

e que $N(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}) = N(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta} - \Phi^{\beta}\Phi^{\alpha})$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\square(nH) = {} & \sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 - n^2|\nabla H|^2 + n|\Phi|^2(c - H^2) + \sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2 + \\
& - nH\sum_{\alpha} tr(\Phi^{n+1}(\Phi^{\alpha})^2) + \sum_{\alpha,\beta} N(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta} - \Phi^{\beta}\Phi^{\alpha}).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

O teorema a seguir é uma generalização da Proposição 2.1.1 e optamos por apresentar a sua demonstração por diferir sutilmente da demonstração da Proposição 2.1.1. Por exemplo, a codimensão p aparece na desigualdade para $\square(nH)$.

Teorema 3.1.2. *Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço completa imersa em $Q^{n+p}_p(c)$ com curvatura escalar normalizada constante R satisfazendo $R \leq c$. Se a curvatura média de M^n é não nula e o vetor curvatura média normalizado é paralelo, então*

$$
\square(nH) \geq |\Phi|^2\left(\frac{|\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(c - H^2)\right). \tag{3.13}
$$

Demonstração: Como o vetor curvatura média normalizado de M^n é paralelo, temos que vale (3.8). Assim, da equação (1.10),

$$
0 = dw_{n+1\alpha} = \Omega_{n+1\alpha}.
$$

Usando a definição das formas de curvatura normal (1.11), segue que $R_{n+1\alpha ij} = 0$, para todos α, i, j. Portanto, da equação de Ricci (1.13), temos que $h^{n+1}h^{\alpha} - h^{\alpha}h^{n+1} = 0$, para todo α, ou seja, a matriz h^{n+1} comuta com todas as matrizes h^{α}.

Como as matrizes $\Phi^{\alpha} = [\Phi^{\alpha}_{ij}]$ são definidas por

$$
\Phi^{\alpha} = h^{\alpha} - H^{\alpha}I,
$$

temos que Φ^{n+1} comuta com todas as matrizes Φ^{α}. E, uma vez que elas têm traço zero e são simétricas, pois as matrizes h^{α} são simétricas, podemos aplicar o Lema 1.4.2 para as matrizes $A = \Phi^{\alpha}$ e $B = \Phi^{n+1}$, obtendo

$$
tr(\Phi^{n+1}(\Phi^{\alpha})^2) \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}N(\Phi^{\alpha})\sqrt{N(\Phi^{n+1})}.
$$

Somando a desigualdade acima em α,

$$\sum_{\alpha} tr(\Phi^{n+1}(\Phi^{\alpha})^2) \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{\alpha} N(\Phi^{\alpha})\sqrt{N(\Phi^{n+1})}.$$

Mas

$$N(\Phi^{n+1}) = tr(\Phi^{n+1})^2 \leq |\Phi|^2 \text{ e } \sum_{\alpha} N(\Phi^{\alpha}) = |\Phi|^2 \tag{3.14}$$

e, portanto,

$$-nH\sum_{\alpha} tr(\Phi^{n+1}(\Phi^{\alpha})^2) \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^3. \tag{3.15}$$

Além disto, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\Phi|^4 = \left(\sum_{\alpha} N(\Phi^{\alpha})\right)^2 \leq p\sum_{\alpha}(N(\Phi^{\alpha}))^2 = p\sum_{\alpha}[tr(\Phi^{\alpha})^2]^2 \leq p\sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2,$$

logo,

$$\sum_{\alpha,\beta}[tr(\Phi^{\alpha}\Phi^{\beta})]^2 \geq \frac{1}{p}|\Phi|^4. \tag{3.16}$$

Por hipótese, R é constante e $R \leq c$, logo vale (1.32).

Substituindo (1.32), (3.15) e (3.16) em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \square(nH) &\geq n(c-H^2)|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|^3 + \frac{1}{p}|\Phi|^4 = \\ &= |\Phi|^2\left(\frac{|\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(c-H^2)\right). \end{aligned}$$ ∎

Este teorema e sua demonstração foram baseados no Teorema 1.7 de [9].

Esta desigualdade tem seu interesse fundado na prova do principal resultado da próxima seção.

3.2 Caracterização através de hipóteses sobre o quadrado da norma da segunda forma fundamental

Nesta seção, apresentamos um teorema que foi obtido através da desigualdade (3.13). Mais especificamente, provamos que, com hipóteses adicionais sobre o polinômio que aparece naquela desigualdade (dependente de $|\Phi|$ e H, e, portanto, as hipóteses se estendem a H ou a S), podemos concluir que M^n deve ser totalmente umbílica ou obtemos implicações para o quadrado da norma da segunda forma fundamental S. A seguir, enunciamos o resultado.

Teorema 3.2.1. *Seja M^n $(n \geq 3)$ uma subvariedade de tipo espaço completa imersa em um espaço forma semi-Riemanniano $Q_p^{n+p}(c)$ com curvatura escalar normalizada constante R satisfazendo $R \leq c$. Suponha que a curvatura média H de M^n é não nula e que o vetor curvatura média normalizado é paralelo. Consideremos o polinômio dado por*

$$\begin{aligned} P_R(x) = {} & \frac{n-1-p}{np}x + \frac{(n-1)(p+1)(R-c)}{p} + nc + \\ & - \frac{n-2}{n}\sqrt{(x-n(n-1)(R-c))(x+n(R-c))}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Se $P_R(\sup S) \geq 0$ e, em adição, para o caso particular $p = 1$ ocorrem $R < \dfrac{n-2}{n}c$, para $c > 0$, ou $R < 0$, para $c = 0$, então:

1. *$|\Phi|^2 = 0$ e, portanto, M^n é totalmente umbílica, ou*

2. *$P_R(\sup S) = 0$, $p = 1$ e $\sup S = C_n(R)$, onde*

$$\begin{aligned} C_n(R) = {} & \frac{n}{(-nR+(n-2)c)(n-2)}[(-nR+(n-2)c)(n-2)(n-1)(R-c)+ \\ & + n((n-1)(R-c)+c)^2]. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ um referencial local ortonormal adaptado à M. Como $H \neq 0$, podemos tomar $e_{n+1} = \dfrac{h}{H}$. Por hipótese, e_{n+1} é paralelo, logo vale (3.13).

Considere o polinômio $P(H, |\Phi|) = \dfrac{|\Phi|^2}{p} - \dfrac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(c-H^2)$ que aparece em (3.13).

Usando a equação de Gauss (1.17) e a fórmula (3.11), obtemos as seguintes relações:

$$H^2 = \frac{S-n(n-1)(R-c)}{n^2}, \tag{3.18}$$

$$|\Phi|^2 = \frac{(n-1)S+n(n-1)(R-c)}{n}. \tag{3.19}$$

Substituindo as relações (3.18) e (3.19) em (3.13), temos

$$\Box(nH) \geq \frac{n-1}{n}(S + n(R-c))P_R(S), \tag{3.20}$$

onde $P_R(S) = P(H, |\Phi|)$ é dado por (3.17).

Sem perda de generalidade, podemos assumir que o referencial escolhido $\{e_1, ...e_n\}$ diagonaliza a matriz h^{n+1}, isto é, $h_{ij}^{n+1} = \lambda_i^{n+1}\delta_{ij}$. Disto, segue que o operador (3.2) calculado em nH pode ser escrito como

$$\Box(nH) = \sum_i (nH - \lambda_i^{n+1})(nH)_{ii}. \tag{3.21}$$

Além disto, como $R \leq c$, segue da equação de Gauss (1.17) que $S \leq n^2H^2$. Logo, $(\lambda_i^{n+1})^2 \leq S \leq n^2H^2$ e $nH - \lambda_i^{n+1} \geq 0$.

Usando que $P_R(\sup S) \geq 0$, temos, escrevendo $P_R(S)$ em função de R e H, que

$$\begin{aligned} 0 \leq P_R(\sup S) = P_R(\sup H) = &\frac{n(n-1-p)}{p}\sup H^2 + \frac{n(n-1)}{p}(R-c) + \\ &+ nc - n(n-2)\sup H\sqrt{R - c + \sup H^2}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ou seja,

$$(n-2)\sup H\sqrt{R-c+\sup H^2} \leq \frac{(n-1-p)}{p}\sup H^2 + \frac{(n-1)}{p}(R-c) + c. \tag{3.23}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados de (3.23) e usando que $(\sup H)^2 = \sup H^2$:

$$\begin{aligned} (\sup H^2)^2 \left[(n-2)^2 - \left(\frac{n-1-p}{p}\right)^2\right] + \sup H^2 \Bigg[(n-2)^2(R-c) - 2\frac{(n-1-p)}{p}R \\ -2\left(\frac{n-1-p}{p}\right)^2(R-c)\Bigg] - \left[\left(\frac{n-1-p}{p}\right)(R-c) + R\right]^2 \leq 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Notemos que $(n-2)^2 - \left(\dfrac{n-1-p}{p}\right)^2 \geq 0$ e a igualdade vale se e somente se $p = 1$.

Para maiores detalhes, vamos separar o estudo de (3.24) em dois casos:

1. se p=1, então (3.24) se escreve como

$$(n-2)(-nR + (n-2)c)\sup H^2 \leq [(n-2)(R-c) + R]^2. \tag{3.25}$$

(a) Se $c > 0$, então $-nR + (n-2)c > 0$, da hipótese.

(b) Se $c < 0$, então a hipótese $R \leq c$ implica que

$$-nR + (n-2)c \geq -nc + (n-2)c = -2c > 0.$$

(c) Se $c = 0$, então da hipótese, $R < 0$ e, novamente,

$$-nR + (n-2)c = -nR > 0.$$

Portanto, temos, a partir de (3.25), a seguinte limitação para o $\sup H^2$

$$\sup H^2 \leq \frac{[(n-2)(R-c)+R]^2}{(n-2)(-nR+(n-2)c)}. \tag{3.26}$$

2. se $p > 1$, resolvendo a equação biquadrada

$$\begin{aligned} &\left[(n-2)^2 - \left(\frac{n-1-p}{p}\right)^2\right] x^4 + \left[(n-2)^2(R-c) - 2\left(\frac{n-1-p}{p}\right) R + \right. \\ &\left. -2\left(\frac{n-1-p}{p}\right)^2 (R-c)\right] x^2 - \left[\left(\frac{n-1-p}{p}\right)(R-c) + R\right]^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

obtemos, trocando x^2 por $\sup H^2$ em (3.27) e usando (3.24), a seguinte limitação

$$\sup H^2 \leq \frac{\left[-(n-2)^2 + 2\left(\frac{n-1-p}{p}\right)^2\right](R-c) + 2\left(\frac{n-1-p}{p}\right) R + \sqrt{\triangle}}{2\left[(n-2)^2 - \left(\frac{n-1-p}{p}\right)^2\right]}, \tag{3.28}$$

onde $\triangle$ é o discriminante de (3.27) cuja expressão é

$$\triangle = (n-2)^2 \left[(R-c)^2(n-2)^2 + 4\left(\frac{n-1-p}{p}\right)(R-c)R + 4R^2\right].$$

Assim, mostramos que, para qualquer $p \geq 1$, $\sup H^2$ é limitado superiormente.

Disto segue que as curvaturas seccionais de M^n são limitadas inferiormente.

De fato, da equação (1.12), temos que

$$R_{ijij} = c - \sum_\alpha h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha + \sum_\alpha (h_{ij}^\alpha)^2 \geq c - \sum_\alpha h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha.$$

Logo, uma vez que $S \leq n^2H^2$, segue que $(h^\alpha_{ij})^2 \leq n^2H^2$, para cada i, j, α e, portanto,

$$h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj} \leq |h^\alpha_{ii}||h^\alpha_{jj}| \leq n^2H^2.$$

Mas H^2 é limitada superiormente, pois valem (3.26) e (3.28), e, portanto, as curvaturas seccionais são limitadas inferiormente.

Além disto, como M^n é uma subvariedade de tipo espaço completa, podemos aplicar o Teorema 1.4.9 para a função $f = nH$.

Sejam os pontos $p_k \in M^n$ da seqüência dada pelo Teorema 1.4.9. Usando (3.20) e (3.21) segue que, em particular,

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n}(S(p_k) + n(R-c))P_R(S)(p_k) \leq \square(nH)(p_k) = \\ = \sum_i (nH - \lambda_i^{n+1})(p_k)(nH)_{ii}(p_k). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Observando que, ainda pelo Teorema 1.4.9,

$$\lim_{k\to\infty} nH(p_k) = \sup nH,$$

e usando a relação (3.18), temos que

$$\sup S = \lim_{k\to\infty} S(p_k).$$

Logo, tomando $\limsup\limits_{k\to\infty}$ em (3.29), temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n-1}{n}(\sup S + n(R-c))P_R(\sup S) \leq \\ \leq \limsup_{k\to\infty}(\square(nH)(p_k)) = \limsup_{k\to\infty}\left(\sum_i (nH - \lambda_i^{n+1})(p_k)(nH)_{ii}(p_k)\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Mas $(nH)_{ii}(p_k) \leq max\{n(\nabla^2 H)(p_k)(X,X) : |X| = 1\}$ e, portanto, como vale (1.44), temos que

$$\limsup_{k\to\infty}(nH)_{ii}(p_k) \leq 0.$$

E é importante observarmos que a função $nH - \lambda_i^{n+1}$ é limitada superiormente, pois $nH - \lambda_i^{n+1} \leq |nH - \lambda_i^{n+1}| \leq nH + |\lambda_i^{n+1}| \leq 2nH$, e H é limitado superiormente.

Então,

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty}(\Box(nH)(p_k)) \leq 0$$

e, portanto, $\limsup_{k\to\infty}(\Box(nH)(p_k)) = 0$.

Logo, por (3.30), $\frac{n-1}{n}(\sup S + n(R-c)) = 0$ ou $P_R(\sup S) = 0$.

Por (3.19), a primeira possibilidade eqüivale a $\sup|\Phi|^2 = 0$. Se isso ocorre, então $|\Phi|^2 = 0$ e, portanto, M^n é totalmente umbílica.

Caso contrário, $P_R(\sup S) = 0$.

No entanto, uma vez que $0 = \limsup_{k\to\infty}(\Box(nH)(p_k)) = \sup|\Phi|^2 P_R(\sup S)$, isso significa que todas as desigualdades utilizadas para obtermos (3.13) são, na verdade, igualdades quando tomamos o $\limsup_{k\to\infty}$. Como conseqüência, a desigualdade em (3.14) é uma igualdade, isto é,

$$\limsup_{k\to\infty}(N(\Phi^{n+1}(p_k))) = \limsup_{k\to\infty}(|\Phi|^2(p_k)) = \sup|\Phi|^2 \tag{3.31}$$

e, se denotarmos por $C^\alpha = \limsup_{k\to\infty}(N(\Phi^\alpha)(p_k))$, para cada $\alpha \geq n+1$, então (3.31) torna-se

$$C^{n+1} = \sup|\Phi|^2.$$

Ainda de (3.14), temos que $\sum_\alpha C^\alpha = \sup|\Phi|^2$. Segue, portanto, que $C^\alpha = 0$, para $\alpha > n+1$.

Além disto, a desigualdade de Cauchy-Schwarz utilizada para obtermos (3.16), quando tomamos o $\limsup_{k\to\infty}$, também é uma igualdade, isto é,

$$(C^{n+1})^2 = (\sup|\Phi|^2)^2 = p\sum_\alpha (C^\alpha)^2 = p(C^{n+1})^2$$

e, portanto, $p = 1$, logo $\Phi = \Phi^{n+1}$.

Voltando à $P_R(\sup S) = 0$, segue que

$$\sup S = \frac{n}{(-nR + (n-2)c)(n-2)}[(-nR + (n-2)c)(n-2)(n-1)(R-c) + \\ + n((n-1)(R-c)+c)^2].$$

■

Observação 3.2.2. *As condições adicionais para a curvatura escalar normalizada no caso em que a codimensão é 1 e a curvatura do espaço-forma é não negativa tornam-se necessárias sob a justificativa de obtermos a limitação (3.26) para* $\sup H^2$ *e podermos aplicar o Teorema 1.4.9.*

Em [3], Akutagawa obteve um importante resultado envolvendo hipersuperfícies de tipo espaço completas em $S_1^{n+1}(c)$, com curvatura média constante limitada superiormente por uma constante, através da análise do polinômio que aparece em (3.13). Essa é uma das justificativas para trabalharmos com aquele polinômio. Q. M. Cheng, em [10], generalizou o resultado de Akutagawa para subvariedades de tipo espaço completas em $S_p^{n+p}(c)$, com vetor curvatura média paralelo e função curvatura média, no caso, constante, tendo as mesmas limitações que aparecem em codimensão 1. Em [6], os autores obtiveram um teorema que engloba o resultado de Akutagawa. Mais precisamente, eles provaram que se uma subvariedade de tipo espaço completa M^n $(n \geq 3)$ em $S_p^{n+p}(c)$ tem vetor curvatura média paralelo e a curvatura média satisfaz

$$H^2 < \frac{4(n-1)c}{Q(p)},$$

onde $Q(p) = (n-2)^2p + 4(n-1)$, então M^n é totalmente umbílica.

Usando o Teorema 3.2.1, substituímos a hipótese sobre o vetor curvatura média do Teorema 1.1 de [6] pelas condições que o vetor curvatura média normalizado é paralelo, a curvatura escalar normalizada R é constante e satisfaz $R \leq c$, para concluirmos o seguinte:

Teorema 3.2.3. *Seja* $x : M^n \to S_p^{n+p}(c)$ $(n \geq 3)$ *uma subvariedade de tipo espaço completa com curvatura escalar normalizada constante* R *satisfazendo* $R \leq c$, *curvatura média não nula e vetor curvatura média normalizado paralelo. Suponha que a curvatura média de* M^n *satisfaz*

$$\sup H^2 < \frac{4(n-1)c}{(n-2)^2p + 4(n-1)}. \tag{3.32}$$

Então M^n *é totalmente umbílica.*

Demonstração: Como vale (3.32), temos que o polinômio

$$P(H, |\Phi|) = \frac{|\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(c - H^2) > 0,$$

uma vez que ele tem discriminante negativo.

Podemos reescrever $P(H, |\Phi|)$ da seguinte forma:

$$P(H, |\Phi|) = \left(\frac{|\Phi|}{\sqrt{p}} - \frac{n(n-2)\sqrt{p}}{2\sqrt{n(n-1)}}H\right)^2 + \frac{n}{4(n-1)}(4(n-1)c - Q(p)H^2),$$

onde, como visto antes, $Q(p) = (n-2)^2p + 4(n-1)$.

Em particular, $P(\sup H, \sup |\Phi|) > 0$.

Usando as relações (3.18) e (3.19), não é difícil verificar que $P_R(\sup S) > 0$, e o resultado segue da aplicação do Teorema 3.2.1. ∎

3.3 Caracterização através de hipóteses sobre as curvaturas seccionais

Seguindo com o nosso estudo envolvendo subvariedades de tipo espaço completas, buscamos um outro resultado, usando a mesma técnica que os autores de [9] aplicaram no Teorema 1.7 daquele artigo. A idéia é considerarmos uma restrição para as curvaturas seccionais da subvariedade. Mais explicitamente, substituímos a hipótese sobre o $\sup S$ (e sobre o polinômio definido em (3.17)) pela condição que as curvaturas seccionais são não-negativas. Vale observarmos que tal condição implica numa restrição para o espaço forma $Q_p^{n+p}(c)$, visto que, como a hipótese $R \leq c$ é fundamental para os nossos resultados - por conta da desigualdade (1.32) - ela não deve ser retirada. E portanto, se as curvaturas seccionais são não negativas e $R \leq c$, então $c \geq 0$. Analisaremos apenas a situação em que $c > 0$.

Teorema 3.3.1. *Seja M^n uma subvariedade de tipo espaço completa imersa em $S_p^{n+p}(c)$ com curvaturas seccionais não negativas. Se M^n tem curvatura escalar normalizada constante satisfazendo $R \leq c$, sua curvatura média H é positiva e limitada superiormente, e o vetor curvatura média normalizado é paralelo, então ou*

1. *M^n é isométrica a uma esfera ou*

2. $\inf K = 0$, *onde* $\inf K$ *denota o ínfimo das curvaturas seccionais de M^n.*

Demonstração: Seja $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ um referencial ortonormal local adaptado à M^n, com $e_{n+1} = \dfrac{h}{H}$.

Nos passos da demonstração da fórmula de tipo Simons (1.31), substituindo (1.28) em (1.23) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{i,j,\alpha} h^\alpha_{ij}(\sum_k h^\alpha_{kkij}) + \sum_{i,j,k,m,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R_{mijk} +\\ + \sum_{i,j,k,m,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R_{mkjk} + \sum_{i,j,k,\alpha,\beta} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ik}R_{\alpha\beta jk}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Como $\dfrac{h}{H}$ é paralelo, temos que (3.33) fica escrita como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + n\sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}H_{ij} + \sum_{i,j,k,m,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R_{mijk} +\\ + \sum_{i,j,k,m,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R_{mkjk} + \sum_{i,j,k,\alpha,\beta} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ik}R_{\alpha\beta jk}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Consideramos novamente o operador $\square$ dado em (3.2). Efetuando-se os cálculos até (3.5), substituindo (3.34) em (3.5) e observando que

$$\sum_{i,j,k,\alpha,\beta} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ik}R_{\alpha\beta jk} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha),$$

tem-se:

$$\begin{aligned}\square(nH) = \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 - n^2|\nabla H|^2 + \sum_{i,j,k,m,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R_{mijk} +\\ + \sum_{i,j,k,m,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R_{mkjk} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Se, para um α fixado, escolhemos um referencial ortonormal local $\{e_1, ..., e_n\}$ tal que $h^\alpha_{ij} = \lambda^\alpha_i \delta_{ij}$, então

$$\begin{aligned}&2\left(\sum_{i,j,k,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R_{mijk} + \sum_{i,j,k,m} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R_{mkjk}\right) =\\ &= \sum_{i,k}(-2\lambda^\alpha_i\lambda^\alpha_k)R_{ikik} + \sum_{i,k}\left((\lambda^\alpha_i)^2 + (\lambda^\alpha_k)^2\right)R_{ikik} =\\ &= \sum_{i,k}(\lambda^\alpha_i - \lambda^\alpha_k)^2 R_{ikik} \geq (\inf K)\sum_{i,k}(\lambda^\alpha_i - \lambda^\alpha_k)^2 =\\ &= (\inf K)(2nN(h^\alpha) - 2n^2(H^\alpha)^2) = 2n(\inf K)N(\Phi^\alpha),\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde $\inf K$ é o ínfimo das curvaturas seccionais de M^n.

Portanto,

$$\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk} \geq n(\inf K) N(\Phi^{\alpha}). \tag{3.37}$$

Logo, somando em α, e substituindo (3.37) em (3.35), temos $\square(nH) \geq n \inf K |\Phi|^2$, pois, como $R \leq c$, vale (1.32).

Como M^n é de tipo espaço, completa, e as curvaturas seccionais são, por hipótese, limitadas inferiormente, podemos aplicar o Teorema 1.4.9 para a função $f = nH$, que é limitada superiormente, por hipótese.

Sejam os pontos p_k dados pelo Teorema 1.4.9. Então, para cada p_k vale que

$$n \inf K |\Phi(p_k)|^2 \leq \square(nH)(p_k) = \sum_i (nH(p_k) - \lambda_i^{n+1}(p_k))(nH)_{ii}(p_k), \tag{3.38}$$

onde novamente estamos supondo que o referencial $\{e_1, ..., e_n\}$ diagonaliza h^{n+1}.

A não negatividade das curvaturas seccionais implica que $n \inf K |\Phi(p_k)|^2 \geq 0$ e, portanto, $\square(nH)(p_k) \geq 0$.

Tomando $\limsup\limits_{k \to \infty}$ na equação (3.38) e raciocinando como na demonstração do Teorema 3.2.1, concluímos que

$$\limsup_{k \to \infty} (\square(nH)(p_k)) = 0.$$

Logo, de (3.38), segue que

$$(\inf K) \lim_{k \to \infty} |\Phi(p_k)|^2 = 0.$$

Mas, como $\lim\limits_{k \to \infty} H(p_k) = \sup H$, então $\lim\limits_{k \to \infty} |\Phi(p_k)|^2 = \sup |\Phi|^2$.

Assim, se $\inf K \neq 0$, então $\sup |\Phi|^2 = 0$ e, portanto, M^n é totalmente umbílica. Uma vez que, por hipótese, as curvaturas seccionais de M^n são não negativas, temos que $\inf K > 0$ e, conseqüentemente, $R_{ijij} > 0$ $\forall i, j$. Do Teorema 1.4.8, segue que M^n é compacta e, por [1], temos que M^n é isométrica a uma esfera. ∎

Capítulo 4

Subvariedades de tipo espaço compactas com curvatura escalar constante em $S_p^{n+p}(c)$

Neste capítulo, pretendemos abordar alguns resultados para subvariedades de tipo espaço compactas em espaços forma semi-Riemannianos. É importante ressaltarmos que, devido à hipótese sobre a compacidade dessas variedades, os espaços forma a serem estudados restringem-se aos espaços $S_p^{n+p}(c)$, pois os ambientes $H_p^{n+p}(c)$ e $\mathbb{R}_p^{n+p}$ não admitem subvariedades de tipo espaço compactas.

De fato, consideremos a função altura $f = \langle x, a \rangle$, onde a é um vetor arbitrário fixado em $\mathbb{R}_p^{n+p}$, se $Q_p^{n+p}(c) = \mathbb{R}_p^{n+p}$, ou em $\mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1}$, se $Q_p^{n+p}(c) = \mathbb{H}_p^{n+p}(c)$. Então, f é uma função diferenciável em $Q_p^{n+p}(c)$.

Seja $x : M^n \to Q_p^{n+p}(c)$, $c \leq 0$, uma subvariedade de tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$, e tomemos um referencial ortonormal local de campos $\{e_1, ..., e_{n+p}\}$ em $Q_p^{n+p}(c)$ adaptado à imersão x.

Pela definição de gradiente, temos que, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$,

$$\langle \nabla \langle x, a \rangle, X \rangle = X \langle x, a \rangle = \langle X, a \rangle.$$

E, portanto, $\nabla \langle x, a \rangle = a^T$.

Vamos agora dividir a demonstração em dois casos.

- $c = 0$

  Como $a \in \mathbb{R}_p^{n+p}$, então $a = a^T - \sum_\alpha \langle a, e_\alpha \rangle e_\alpha$, onde $a^T \in \mathcal{X}(M)$.

  Com isto, $a^T = a + \sum_\alpha \langle a, e_\alpha \rangle e_\alpha$.

  Logo, $|\nabla \langle x, a \rangle|^2 = |a^T|^2 = \langle a, a \rangle + \sum_\alpha \langle a, e_\alpha \rangle^2$.

  Notemos que, se $\langle a, a \rangle > 0$, então $|\nabla \langle x, a \rangle|^2 > 0$. Segue que a função $f = \langle x, a \rangle$ não tem pontos críticos e, portanto, M^n não pode ser compacta.

- $c < 0$

  Como $a \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1}$, então $a = a^T + c\langle a, x \rangle x - \sum_\alpha \langle a, e_\alpha \rangle e_\alpha$, onde $a^T \in \mathcal{X}(M)$.

  Assim, $a^T = a - c\langle a, x \rangle x + \sum_\alpha \langle a, e_\alpha \rangle e_\alpha$.

  Então, $|\nabla \langle x, a \rangle|^2 = |a^T|^2 = \langle a, a \rangle - c\langle a, x \rangle^2 + \sum_\alpha \langle a, e_\alpha \rangle^2$.

  Analogamente ao caso $c = 0$, se $\langle a, a \rangle > 0$, temos que $|\nabla \langle x, a \rangle|^2 > 0$ e, portanto, a função altura $\langle x, a \rangle$ não possui pontos críticos. Disto segue que M^n não pode ser compacta.

O objetivo deste capítulo é obter resultados análogos àqueles do Capítulo 3, através da técnica de Cheng-Yau [13], para codimensão maior.

Na primeira seção, faremos um breve estudo sobre as principais propriedades de subvariedades de tipo espaço compactas em $S_p^{n+p}(c)$. Na segunda seção, estudamos a generalização do resultado de Zheng [27]. E na terceira seção, obtemos uma caracterização para subvariedades de tipo espaço compactas, a partir de limitações sobre S. Aproveitamos para demonstrar o Teorema 3.2.3 no caso compacto. Optamos por apresentar esses resultados, pois as técnicas empregadas no caso compacto são bastante interessantes e distintas do caso completo. Em particular, em contraposição ao caso completo, a hipótese sobre as curvaturas seccionais serem não-negativas caracteriza totalmente as subvariedades estudadas.

4.1 Alguns resultados sobre subvariedades de tipo espaço compactas em $S_p^{n+p}(c)$

Seja $x : M^n \to S_p^{n+p}(c)$ uma subvariedade de tipo espaço compacta imersa em $S_p^{n+p}(c)$. Então M^n é difeomorfa à esfera S^n. De fato, este resultado segue de

Lema 4.1.1. *([1]) Existe um difeomorfismo $\varphi : S^n \to M^n$ tal que $x \circ \varphi : S^n \to S_p^{n+p}(c)$ é um mergulho.*

Demonstração: De fato, basta considerarmos a aplicação $F : S^n \times \mathbb{R}^p \to S_p^{n+p}$, dada por $F(u,v) = (v, \sqrt{1+|v|^2}u)$. É claro que F é um difeomorfismo. Agora seja $\pi : S^n \times \mathbb{R}^p \to S^n$ a aplicação projeção e tomamos a aplicação $\Psi = \pi \circ F^{-1} \circ x : M^n \to S^n$. Mostra-se que Ψ é um difeomorfismo local e, usando que M^n é compacta e S^n é simplesmente conexa, tem-se que Ψ é um difeomorfismo global. Seja $\varphi = \Psi^{-1}$. Então φ é o difeomorfismo procurado. ∎

S. Montiel, em [22], provou que toda hipersuperfície de tipo espaço compacta com curvatura média constante é totalmente umbílica. Este resultado responde à conjectura de Goddard no caso compacto. A generalização deste resultado para codimensão qualquer foi feita por R. Aiyama [1]. Usando uma fórmula integral interessante, a autora mostrou que:

Teorema 4.1.2. *Seja $x : M^n \to S_p^{n+p}(c)$ uma subvariedade de tipo espaço compacta com vetor curvatura média paralelo e fibrado normal plano. Então M^n é totalmente umbílica.*

Em [1], é observado que as subvariedades de tipo espaço compactas totalmente umbílicas de dimensão n em $S_p^{n+p}(c)$ são isométricas às esferas S^n.

4.2 Generalização do resultado de Zheng

Em [27], Zheng provou o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. *Seja $x : M^n \to S_1^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície de tipo espaço compacta com curvatura escalar normalizada constante R imersa no espaço de De Sitter*

$S_1^{n+1}(c)$. *Se*

$$K(M) \geq 0 \text{ e } R < c,$$

então M^n é isométrica a uma esfera, onde $K(M)$ são as curvaturas seccionais de M.

A idéia da prova de Zheng foi considerar a fórmula de tipo Simons (1.31) e, através da propriedade sobre existência de ponto de máximo para a função curvatura média, uma vez que M^n é compacta, obter uma desigualdade que levasse ao que era pretendido. Além disto, este resultado é a versão Lorentziana do Teorema 2 [13]. Notemos também que o autor mostra que M^n é totalmente umbílica e, utilizando a classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas dada em [22], conclui-se que M^n é isométrica a uma esfera S^n.

Seja $x : M^n \longrightarrow S_p^{n+p}(c)$ uma subvariedade de tipo espaço compacta com curvatura escalar normalizada constante R imersa em $S_p^{n+p}(c)$. Suponhamos que a curvatura média de M^n é diferente de zero, isto é, $H > 0$. Então, escolhendo um referencial ortonormal local em $S_p^{n+p}(c)$ adaptado à M^n tal que $e_{n+1} = \dfrac{h}{H}$, temos que vale a fórmula de tipo Simons (1.31).

Consideremos novamente o operador $\square$ introduzido por Cheng-Yau [13], dado por

$$\square f = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1}) f_{ij}, \ \forall \ f \in C^2(M).$$

Observação 4.2.2. $\square$ *é auto-adjunto em relação ao L^2- produto interno.*

Demonstração: Pela Proposição 1.4.5, $\square$ é auto-adjunto se e somente se vale (1.40), onde $\Phi_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1}$.

Vamos mostrar que ocorre (1.40), ou seja, $\sum\limits_j \Phi_{ijj} = 0$.

Como

$$\Phi_{ijj} = nH_j\delta_{ij} - h_{ijj}^{n+1}, \tag{4.1}$$

temos, somando em j, que

$$\sum_j \Phi_{ijj} = \sum_j nH_j\delta_{ij} - \sum_j h_{ijj}^{n+1} = nH_i - \sum_j h_{jji}^{n+1} = nH_i - nH_i = 0,$$

onde estamos usando a equação de Codazzi (1.25) para $\alpha = n + 1$. ∎

Assim, da Observação 4.2.2, segue que

$$\int_M \Box f = 0, \tag{4.2}$$

pois

$$\int_M \Box f = \int_M f\Box 1 = 0.$$

Como vimos no Capítulo 3, fazendo $f = nH$ em (3.2), obtemos a fórmula (3.5).

Suponhamos que e_{n+1} é paralelo, então segue, repetindo os mesmos argumentos que foram aplicados nas fórmulas (3.34) e (3.35), que (3.5) se escreve como (3.35).

Para cada α fixado, seja λ_i^α um autovalor de h^α, isto é, $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$. Então, usando (3.36), obtemos (3.37).

Com isto, podemos enunciar e demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 4.2.3. *Seja $x : M^n \longrightarrow S_p^{n+p}(c)$ uma subvariedade de tipo espaço compacta com curvatura escalar normalizada constante $R < c$ e curvaturas seccionais não negativas. Suponha que a curvatura média de M^n é não nula e que o vetor curvatura média normalizado é paralelo. Então M^n é totalmente umbílica.*

Demonstração: Como a curvatura escalar normalizada R é constante e $R < c$, temos que vale (1.32).

Além disto, de (3.37) o lado direito da equação (3.35) é não negativo, pois, por hipótese, as curvaturas seccionais de M são não negativas e, conseqüentemente, $\inf K \geq 0$.

Integrando (3.35) e usando (4.2) para $f = nH$, temos que

$$\int_M \Box(nH) = 0$$

e, portanto, $\Box(nH) = 0$, uma vez que vimos que cada um dos seus termos é não negativo.

Logo, da expressão (3.35), obtemos

1. $N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha) = 0, \ \forall \alpha, \beta;$
2. $\sum_{i,j,k,\alpha} (h_{ijk}^\alpha)^2 - n^2|\nabla H|^2 = 0;$

3. $\displaystyle\sum_{i,j,k,m,\alpha} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} + \sum_{i,j,k,m,\alpha} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk} = 0.$

Se (1) ocorre, temos que o fibrado normal de M^n é plano. Assim, existe um referencial ortonormal local $\{e_1, ..., e_n\}$ em M^n que diagonaliza as matrizes h^{α}, para todo α, simultaneamente.

Se (2) ocorre, então temos que todas as desigualdades em (1.36) são, na verdade, igualdades, isto é,

$$(S - n^2H^2) \sum_{i,j,k,\alpha} (h_{ijk}^{\alpha})^2 = 0.$$

Como $S < n^2H^2$ pela equação de Gauss (1.17), segue que

$$\sum_{i,j,k,\alpha} (h_{ijk}^{\alpha})^2 = 0. \tag{4.3}$$

Portanto, tomando o referencial que diagonaliza cada matriz h^{α} e substituindo (4.3) em (1.24), temos que $dh_{ij}^{\alpha} = 0$. Como M^n é conexa, segue que h_{ij}^{α} é constante para cada i, j, α.

Conseqüentemente, H é constante. Como e_{n+1} é paralelo, temos que h é paralelo.

Com isto, podemos aplicar o Teorema 4.1.2 e segue o resultado. ∎

Observação 4.2.4. *Devemos observar que este resultado foi também obtido por X. Liu, em [21], com a hipótese adicional de que M^n possui fibrado normal plano. Apesar das técnicas para a demonstração de ambos os teoremas serem semelhantes, gostaríamos de salientar que a hipótese sobre o fibrado normal plano não é necessária e, por esta razão, acrescentamos este resultado ao trabalho.*

4.3 Caracterização através de uma restrição sobre o quadrado da norma da segunda forma fundamental

Em ambientes Riemannianos, muitos trabalhos apresentaram resultados para subvariedades compactas com curvatura escalar constante e limitações para o quadrado da norma da segunda forma fundamental. Podemos citar, por exemplo, [11] e [17], entre outros. Isso ocorre porque, apenas a hipótese sobre R constante satisfazendo $R \geq c$, e as ferramentas utilizadas (fórmula de Simons, operador $\square$) não são suficientes para se concluir que a subvariedade é totalmente umbílica. Nestes ambientes, isso acontece mesmo com a hipótese sobre vetor curvatura média paralelo substituindo R constante e nos fornece uma diferença básica entre os ambientes Riemannianos e semi-Riemannianos.

Nesta seção, buscamos uma limitação apropriada para o quadrado da norma da segunda forma fundamental, a fim de encontrar quais são as subvariedades de tipo espaço compactas imersas em $S_p^{n+p}(c)$ que satisfazem a limitação obtida e possuem curvatura escalar constante.

Seguindo as notações de [11], definimos

$$S_1 = tr(h^{n+1})^2 - nH^2 = \sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1})^2 - nH^2 \tag{4.4}$$

e

$$S_2 = \sum_{\alpha=n+2}^{n+p} tr(h^\alpha)^2 = \sum_{\alpha=n+2}^{n+p}\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2. \tag{4.5}$$

Vamos calcular o Laplaciano de S_2 e tentar obter uma desigualdade para que possamos aplicar o Teorema de Stokes.

Seja novamente $\{e_1, \ldots, e_{n+p}\}$ um referencial local ortonormal adaptado à imersão em $S_p^{n+p}(c)$ de modo que $e_{n+1} = \dfrac{h}{H}$.

Através de cálculos análogos àqueles feitos no Capítulo 3, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S_2 = &\sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + n\sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha H_{ij}^\alpha - nH\sum_{\alpha>n+1} tr(h^{n+1}(h^\alpha)^2) + \\ &+ \sum_{\alpha>n+1}\sum_{\beta}[tr(h^\alpha h^\beta)]^2 + ncS_2 + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{\beta}N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Supondo que e_{n+1} é paralelo, temos que $H_{ij}^\alpha = 0$, para todo $\alpha > n+1$ e, portanto, (4.6) torna-se:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S_2 = &\sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{\beta}[tr(h^\alpha h^\beta)]^2 - nH\sum_{\alpha>n+1} tr(h^{n+1}(h^\alpha)^2) + \\ &+ ncS_2 + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{\beta}N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Com um raciocínio similar ao feito no Capítulo 3, usando o operador (3.1), temos que (4.7) se escreve como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S_2 = &\sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j,k}(\Phi^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{\beta}[tr(\Phi^\alpha\Phi^\beta)]^2 + ncS_2 - nH^2S_2 + \\ &- nHtr(\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2) + \sum_{\alpha>n+1}\sum_{\beta}N(\Phi^\alpha\Phi^\beta - \Phi^\beta\Phi^\alpha).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Do Lema 1.4.2, temos que

$$tr(\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2) \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{N(\Phi^{n+1})}N(\Phi^\alpha).$$

Logo, observando que $N(\Phi^{n+1}) = S_1$ e $\sum_{\alpha>n+1} N(\Phi^\alpha) = S_2$, obtemos a seguinte desigualdade para a equação (4.8)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S_2 \geq &\sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j,k}(\Phi^\alpha_{ijk})^2 + S_2\left(n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\sqrt{S_1}\right) + \\ &+ \sum_{\alpha>n+1}\sum_{\beta}N(\Phi^\alpha\Phi^\beta - \Phi^\beta\Phi^\alpha).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Agora notemos que

$$-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\sqrt{S_1} \geq -\frac{n(n-2)}{2(n-1)}H^2 - \frac{1}{2}(n-2)S_1. \tag{4.10}$$

De fato:

$$-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\sqrt{S_1} + \frac{n(n-2)}{2(n-1)}H^2 + \frac{1}{2}(n-2)S_1 = \frac{1}{2}(n-2)\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{\frac{n}{n-1}}H\right)^2 \geq 0.$$

Além disto, das definições de S_1 (4.4) e S_2 (4.5), segue que

$$S_1 + S_2 = S - nH^2. \tag{4.11}$$

Substituindo (4.10) e (4.11) em (4.9), temos que a desigualdade para $\frac{1}{2}\Delta S_2$ torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S_2 \geq &\sum_{\alpha>n+1}\sum_{i,j,k}(\Phi^\alpha_{ijk})^2 + \frac{1}{2}(n-2)S_2^2 + S_2\left(n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{2(n-1)}H^2 + \right. \\ &\left. + \frac{n(n-2)}{2}H^2 - \frac{1}{2}(n-2)S\right).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Com isto, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1. *Seja $x : M^n \to S_p^{n+p}(c)$ $(n \geq 3)$ uma subvariedade de tipo espaço compacta com curvatura escalar normalizada constante $R < c$, curvatura média não nula e vetor curvatura média normalizado paralelo. Se*

$$n(c-R) \leq S \leq C_n(R) = \frac{n(n-1)(2nc - (n^2-6n+6)(R-c))}{n^3-4n^2+8n-6} \quad e \tag{4.13}$$

$$H^2 > \frac{2(n-1)c}{n^3-4n^2+8n-6}, \tag{4.14}$$

então M^n é totalmente umbílica.

Demonstração: Não é difícil verificar, usando (3.18) que a condição (4.13) implica que

$$\frac{n-2}{2}S \leq nc + \frac{(n^2-6n+6)}{2(n-1)}nH^2. \tag{4.15}$$

Substituindo (4.15) em (4.12), temos que

$$\frac{1}{2}\Delta S_2 \geq 0. \tag{4.16}$$

Integrando (4.16) sobre M^n, e usando que M^n é compacta e o Teorema 1.4.4, segue que $\Delta S_2 = 0$. Voltando à expressão (4.12), temos que $S_2 = 0$ e, portanto, de (4.11), segue que $S_1 = S - nH^2$. Conseqüentemente, $S_1 = |\Phi|^2$.

Assim, a fórmula (3.7) fica escrita como

$$\Box(nH) = \sum_{i,j,k,\alpha} (h_{ijk}^{\alpha})^2 - n^2|\nabla H|^2 + nc(S - nH^2) + [tr(h^{n+1})^2]^2 - nHtr(h^{n+1})^3. \tag{4.17}$$

Uma vez que $R < c$, um raciocínio análogo àquele usado na demonstração de (2.10) mostra que

$$\Box(nH) \geq |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(c-H^2) \right). \tag{4.18}$$

De (4.13), temos que vale (4.15) e, portanto, da expressão (4.9), segue que

$$n(c-H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| \geq 0.$$

Logo, $\square(nH) \geq 0$. Mas, novamente usando (4.2) para $f = nH$, temos que

$$0 = \int_M \square(nH) \geq \int_M |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| + n(c - H^2) \right) \geq 0.$$

Portanto, $|\Phi|^2 = 0$ ou $|\Phi|^2 - \dfrac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| + n(c - H^2) = 0$.

Se $|\Phi|^2 = 0$, então M^n é totalmente umbílica. Caso contrário, temos que ocorre $|\Phi|^2 - \dfrac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| + n(c - H^2) = 0$. Então $|\Phi|$ coincide com uma das raízes positivas de (2.9). Logo, substituindo $|\Phi|^2$ em (2.18), temos que H é constante e, portanto, h é paralelo, uma vez que $\dfrac{h}{H}$ é paralelo.

Além disto, o fato que $S_2 = 0$ implica que $h^\alpha = 0$, para todo $\alpha > n + 1$. Conseqüentemente, temos que o fibrado normal de M^n é plano. Pelo Teorema 4.1.2, segue que M^n é totalmente umbílica. ∎

Observação 4.3.2. *A hipótese (4.14) sobre a função curvatura média no teorema acima é estritamente algébrica e necessária para garantir que a constante $C_n(R)$ escolhida não contradiz o fato que $S < n^2H^2$ na equação de Gauss (1.17), isto é, $R < c$.*

De fato, se vale (4.13), então vale a desigualdade (4.15). Usando (4.14), temos

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{2} S \leq \frac{2n(n-1)c + (n^2 - 6n + 6)nH^2}{2(n-1)} &< \\ < \frac{n}{2(n-1)}[(n^3 - 4n^2 + 8n - 6)H^2 + (n^2 - 6n + 6)H^2] &= \\ = \frac{n^2}{2(n-1)}(n-1)(n-2)H^2 = \frac{n-2}{2} n^2 H^2 & \end{aligned}$$

e, portanto, $S < n^2H^2$.

Notemos também que a condição $S \geq n(c - R)$ implica na condição $S \geq nH^2$ e, implicitamente, (4.15) nos dá uma limitação superior para H, que é $H^2 \leq \dfrac{2(n-1)c}{3n-4}$, que não contraria a hipótese (4.14).

Abaixo enunciamos e demonstramos o resultado análogo ao Teorema 3.2.3.

Teorema 4.3.3. *Seja $x : M^n \to S_p^{n+p}(c)$ $(n \geq 3)$ uma subvariedade de tipo espaço compacta com curvatura escalar constante R satisfazendo $R < c$, curvatura média* *não nula e vetor curvatura média normalizado paralelo. Se*

$$H^2 < \frac{4(n-1)c}{Q(p)},$$

onde $Q(p) = (n-2)^2 p + 4(n-1)c$, *então* M^n *é totalmente umbílica.*

Demonstração: Por hipótese, vale (3.13).

Se $H^2 < \dfrac{4(n-1)c}{Q(p)}$, então $P(H, |\Phi|) > 0$, onde

$$P(H, |\Phi|) = \frac{|\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| + n(c - H^2)$$

é o polinômio que aparece em (3.13).

Integrando (3.13) sobre M^n, temos $\displaystyle\int_M \square(nH) = 0$ e, conseqüentemente, $|\Phi|^2 = 0$. Então M^n é totalmente umbílica. ∎

Referências Bibliográficas

[1] R. Aiyama, *Compact space-like m-submanifolds in a pseudo-Riemannian sphere* $\mathbb{S}_p^{m+p}(c)$, Tokyo J. Math. 18 (1) (1995), 81-90.

[2] A.C. Asperti, R.M.B. Chaves e L.A.M. Sousa Jr, *A new maximum principle and its applications*, preprint.

[3] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z 196 (1987), 13-19.

[4] H. Alencar e M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. A.M.S. 120 (1994), 1223-1229.

[5] L.J. Alias e A. Romero, *Integral formulas for compact spacelike n-submanifolds in De Sitter spaces. Applications to the parallel mean curvature vector case*, Manuscripta Math. 87 (1995), 405-416.

[6] A. Brasil, R. Chaves e M. Mariano, *Complete spacelike submanifolds with parallel mean curvature vector in a semi-Riemannian space form*, J. of Geom. and Phys. 56, no. 10 (2006), 2177-2188.

[7] A. Brasil, A.G. Colares e O. Palmas, *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space: a gap theorem*, Illinois J. Math. 47 (2003), 847-866.

[8] M. do Carmo, *O método do referencial móvel*, III Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[9] R. Chaves e L.A. Sousa, *Some applications of a Simons' type formula for complete spacelike submanifolds in a semi-Riemannian space form*, aparecerá em Diff. Geom. and Appl.

[10] Q.M. Cheng, *Complete space-like submanifolds in de Sitter space with parallel mean curvature vector*, Math. Z. 206 (1991), 333-339.

[11] Q.M. Cheng, *Submanifolds with constant scalar curvature*, Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 132 A (2002), 1163-1183.

[12] Q.M. Cheng e S. Ishikawa, *Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature*, Manuscripta Math. 95 (1998), 499-505.

[13] S.Y. Cheng e S.T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. 225 (1977), 195-204.

[14] S.S. Chern, M. do Carmo e S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields (F. Brown, ed.), Springer-Verlag, Berlin (1970), 59-75.

[15] M. Dajczer, *Submanifolds and isometric immersions*, Mathematics Lecture, Series 13, 1990.

[16] T. Ishihara, *Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature*, Mich. Math. J. 35 (1988), 345-352.

[17] H. Li, *Global rigidity theorems of hypersurfaces*, Ark. Math. 35 (1997), 327-351.

[18] H. Li, *Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms*, Math. Ann. 305 (1996), 665-672.

[19] H. Li, *Rigidity theorems of hypersurfaces in a sphere*, Publications de L'Institute Math., Nouvelle série, tome 67 (81) (2000), 112-120.

[20] J. Li, *Submanifolds with constant scalar curvature*, Kodai Math. J. 27 (2004), 206-213.

[21] X. Liu, *Spacelike submanifolds with constant scalar curvature in the De Sitter spaces*, J. Korean Math. Soc. 38 (2001), 135-146.

[22] S. Montiel, *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. 37 (4) (1988), 909-917.

[23] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry, Academic Press, New York, London, (1983).

[24] H. Omori, *Isometric Immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 205-214.

[25] W. Santos, *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres*, Tohoku Math. J. 46 (1994), 403-415.

[26] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann of Math. 88 (2) (1968), 62-105.

[27] Y. Zheng, *Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in the de Sitter spaces*, Diff. Geom. and its Applications 6 (1996), 51-54.