UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAIMUNDO INÁCIO NETO

O ALGORITMO GANANCIOSO: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS MATRÓIDES

FORTALEZA
2023

RAIMUNDO INÁCIO NETO

O ALGORITMO GANANCIOSO: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS MATRÓIDES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção de título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

I32a Inácio Neto, Raimundo.
O algoritmo ganancioso : uma introdução à teoria dos matróides / Raimundo Inácio Neto. – 2023.
25 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Matróides. 2. Dependência linear. 3. Matrizes (matemática). 4. Teoria dos grafos. 5. Algoritmo ganancioso. I. Título.

CDD 510

RAIMUNDO INÁCIO NETO

O ALGORITMO GANANCIOSO: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS MATRÓIDES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 20/01/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Este trabalho é dedicado ao meu avô Raimundo Inácio (*in memoriam*), maior exemplo de um ser humano íntegro e ético.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta Universidade, seu corpo docente, direção e administração que me deram a oportunidade de fazer o curso.

Aos professores pelas orientações ao longo do curso.

À minha família, que em todos os momentos me apoiaram e que ao longo de toda a minha formação sempre me incentivaram nos momentos de fraqueza e serviram de alento nos momentos difíceis.

Aos companheiros de curso, pela ajuda mútua em percorrer esse caminho.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

(RUSSELL)

RESUMO

Em matemática, um matróide é uma estrutura apresentada como uma generalização da noção de independência linear. Está, portanto, naturalmente ligado à álgebra linear, mas também à teoria dos grafos, ao algoritmo ganancioso e à geometria. (Para várias questões relacionadas com representação). Este trabalho visa estabelecer explicitamente qual a relação dessa estrutura com o algoritmo ganancioso. Partindo de problemas que exigem uma solução otimizada, definimos o conceito de matróide e suas propriedades. Em seguida serão demonstradas através de teoremas e exemplos as relações com matrizes e grafos, assim como alguns tipos de matróides. Por fim, será demonstrado o teorema que consolida a ligação com o algoritmo.

Palavras-chave: matróides; dependência linear; matrizes (matemática); teoria dos grafos; algoritmo ganancioso.

ABSTRACT

In mathematics, a matroid is a structure presented as a general framework for the concept of linear independence. It is therefore naturally linked to linear algebra, but also to graph theory, the greedy algorithm and geometry. (For various questions related to representation). This work aims to explicitly establish the relationship of this structure with the greedy algorithm. Starting from problems that require an optimized solution, we define the concept of matroid and its properties. Next, relations with matrices and graphs, as well as some types of matroids, will be demonstrated through theorems and examples. Finally, the theorem that consolidates the connection with the algorithm will be demonstrated.

Keywords: matroids; linear dependence; matrices (mathematics); graph theory; greedy algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafo representante das estradas entre cidades.. 12

Figura 2 – Exemplo de grafo.. 14

Figura 3 – O ciclo é um grafo que satisfaz o circuito eliminatório do axioma (C3).......... 19

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**..	10
2	**MATRÓIDES**..	13
2.1	**Definição de Matróides**..	15
2.2	**Matróides Pesados**..	21
3	**CONCLUSÃO**..	24
	REFERÊNCIAS..	25

1 INTRODUÇÃO

Em geral, quando temos que fazer escolhas, tendemos a escolher aquelas que maximizam nossos ganhos e/ou minimizam nossas perdas. Mas há problemas em que suas soluções decorrem de uma série de escolhas sucessivas, e ao fazermos sempre a escolha onde a situação é “localmente” otimizada, estamos utilizando um algoritmo conhecido como “Algoritmo Ganancioso” ou “Algoritmo Guloso.” Sobre o algoritmo guloso, Parberry (1995) diz:

> Um algoritmo guloso começa com uma solução para um subproblema muito pequeno e o aumenta sucessivamente para uma solução para o grande problema. O aumento é feito de maneira 'gananciosa', ou seja, prestando atenção ao ganho de curto prazo ou local, sem levar em conta se isso levará a uma boa solução de longo prazo ou global. Como na vida real, algoritmos gananciosos às vezes levam à melhor solução, às vezes levam a soluções muito boas e às vezes levam a soluções ruins. O truque é determinar quando ser ganancioso. (PARBERRY, 1995, p.101)

Dessa forma nos vem a seguinte pergunta: Quando podemos ser gananciosos? Antes de responder a essa pergunta, abaixo veremos alguns problemas e tentaremos resolvê-los utilizando o algoritmo guloso. A partir daí, vamos estabelecer o cenário ideal para o uso do mesmo.

Problema 1.

Um certo número de trabalhos será executado por uma única máquina. Todos requerem o mesmo tempo de processamento, uma hora. Estão associados a um tempo para entrega, o qual não satisfeito, implica em uma penalidade fixa p_i, independente do atraso. Determinar a sequência para execução dos trabalhos de forma que o total das penalidades seja mínimo.

Para que o total de penalidades seja mínimo, podemos resolver o problema da seguinte maneira: A princípio, devemos organizar os trabalhos em ordem crescente de tempo de entrega, no caso de empate, deve-se organizar em ordem decrescente de penalidade. Começando assim, a máquina deve executar os trabalhos nessa ordem estabelecida, descartando somente aqueles trabalhos que não puderem ser feitos, obedecendo o tempo de entrega. Por fim, os trabalhos descartados serão feitos após o último feito dentro do tempo de entrega, sendo esses em qualquer ordem.

Temos então que pudemos utilizar o algoritmo guloso nesse problema e ele nos leva à melhor solução possível. Para melhor visualização, tomemos o exemplo abaixo.

TRABALHOS	1	2	3	4	5	6
T. DE ENTREGA	1	3	2	1	3	6
PENALIDADE	9	7	6	10	4	2

Organizando utilizando o algoritmo, temos:

TRABALHOS	4	1	3	2	5	6
T. DE ENTREGA	1	1	2	3	3	6
PENALIDADE	10	9	6	7	4	2

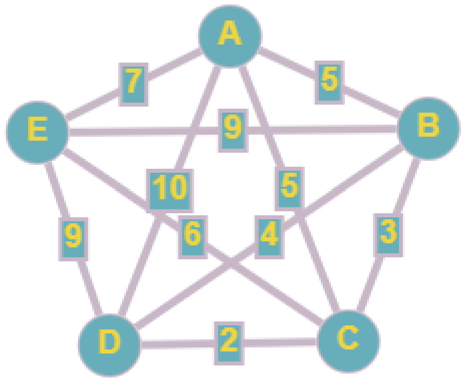
Com essa ordenação a máquina realizaria o trabalho 4, descartaria o 1, realizaria o 3 e o 2, descartaria o 5, realizaria o 6. Depois disso realizaria o 1 e 5, em qualquer ordem, totalizando uma penalidade P = 13. Que é a menor possível, em qualquer situação.

Problema 2.

Deseja-se construir trechos de estradas que conectem cinco cidades com a menor quantidade de asfalto possível. Sejam as cidades A, B, C, D e E, se há um trecho que liga A e B, e outro que ligue B e C, então A e C já estão conectadas.

Para que a quantidade de asfalto seja a mínima possível, deve-se construir os trechos que ligam duas cidades com a menor distância possível. Usando o algoritmo ganancioso, basta escolhermos os trechos em ordem crescente de distância, descartando somente os trechos que conectam a uma cidade já escolhida formando um ciclo. Vejamos no exemplo abaixo.

Figura 1 - Grafo representante das estradas entre cidades



Fonte: elaborada pelo autor.

A menor distância entre duas cidades é 2, logo o primeiro trecho escolhido é o trecho DC. Seguindo a ordem crescente, temos em seguida o trecho CB, com distância 3. O próximo trecho seria BD, com distância 4, mas ao fazermos isso criamos um ciclo, pois B já está conectada com D pelo trecho DCB. Assim, descartamos esse trecho e vamos para o próximo de menor valor, que pode ser tanto AC ou BA, pois ambos têm a mesma distância 5. Escolhemos então AC, fazendo isso descartamos o trecho BA, pois teríamos um ciclo. O próximo e último trecho a ser feito então é EC, com distância 6. Assim, todas as cidades estão conectadas, e a soma dos trechos é 2+3+5+6 = 16, que é a menor possível.

Problema 3.

Após realizar uma venda, deve-se dar um troco de 40 centavos para o comprador entregando a menor quantidade de moedas possível. As moedas disponíveis para o troco são de 5, 10, 20 e 25 centavos.

Se seguirmos o algoritmo ganancioso, então para que a quantidade de moedas seja a menor possível devemos começar com as de maior valor e seguir em ordem decrescente, descartando somente aquelas que ultrapassariam a quantia desejada. Temos assim a seguinte escolha: Primeiramente escolhemos a de 25 centavos, em seguida a de 10, pois com mais 25 ou mais 20, ultrapassaríamos a quantia desejada. Para finalizar, escolhemos a de 5, totalizando 25+ 10+5 = 40. Porém para que a quantidade de moedas seja mínima, a configuração de escolha correta deve ser duas moedas de 20 centavos, e não as três moedas obtidas com o algoritmo.

Podemos concluir com os problemas acima que somente em algumas situações o algoritmo ganancioso nos dá a resposta para uma questão de escolhas otimizada. Na seção a seguir, veremos uma estrutura matemática onde sempre poderemos utilizar o algoritmo ganancioso, dando uma introdução à Teoria dos Matróides.

2 MATRÓIDES

São passados quase 90 anos desde que pela primeira vez surgiu o termo matróide e este continua desconhecido da maioria dos amantes da matemática. Apesar disto, os matróides têm um papel muito importante em diversas áreas científicas. Álgebra, geometria, teoria da computação, investigação operacional são algumas das que os utilizam, muitas vezes sem o saberem.

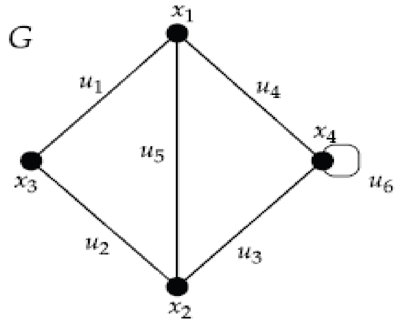
Tal como o nome sugere, matróide vem da palavra matriz. O conceito de matróide surgiu em 1935, quando Whitney tentou generalizar a noção de dependência linear de um conjunto de vetores, pertencentes a um dado espaço vetorial. A teoria de matróides surgiu da tentativa de unificar, de certa maneira a álgebra e a teoria dos grafos. Hassler Whitney após vários anos de estudos sobre teoria dos grafos notou similaridades entre as ideias de independência e posto em teoria dos grafos a independência linear e dimensão no estudo de espaços vetoriais. Vejamos um exemplo na álgebra linear:

Exemplo 2.1 Seja A a seguinte matriz, com três linhas, seis colunas e preenchida por números reais: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Numerando as colunas da matriz A e simplificando a notação, podemos designar por $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto das colunas da matriz A. Reparando nas colunas 1, 4, 5, se tentarmos encontrar números reais a_1, a_2 e a_3 tais que $a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, teremos de encontrar números reais a_1, a_2 e a_3 tais que $\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é equivalente a encontrar números reais a_1, a_2 e a_3 tais que $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja, resolver o sistema $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$. A única solução deste sistema é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isto significa que o subconjunto de E formado pelas colunas 1, 4, 5 de A é linearmente independente. Este subconjunto não seria linearmente independente se o sistema anterior tivesse mais do que uma solução. Sendo I_1 a coleção de subconjuntos de E, formados por colunas da matriz A, linearmente independentes, então podemos afirmar que I_1 tem todos os conjuntos com, no máximo, três elementos de $E - \{6\}$, exceto os conjuntos $\{1, 2, 5\}$ e $\{3, 4, 5\}$.

Outra noção é a de grafo. Este pode ser definido como um conjunto de pontos (chamados vértices do grafo) e uma coleção de linhas a unir determinados pontos (chamadas arestas do grafo).

Exemplo 2.2 Na figura 2 pode ver-se o grafo G com o conjunto de vértices $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e a coleção das arestas $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Figura 2 - Exemplo de grafo



Fonte: Fernandes (2015, p. 38).

Para falarmos da noção de dependência em grafos, necessitamos de um outro conceito, o conceito de ciclo. Um ciclo é uma sequência alternada de vértices e arestas de um grafo, iniciada e terminada num vértice, tal que cada aresta tem uma extremidade no vértice que imediatamente a precede na sequência e outra extremidade no vértice que imediatamente a sucede na sequência. Além disto, num ciclo, todas as arestas são distintas e todos os seus vértices também, à exceção do primeiro e do último, que são o mesmo. Reparando na figura, temos por exemplo:

-A sequência $x_3, u_1, x_1, u_5, x_2, u_2, x_3$ é um ciclo do grafo G.

-A sequência x_4, u_6, x_4 também é um ciclo do grafo G (ciclos com uma única aresta chamam-se laços).

Quando nomeamos uma aresta ficam definidos os vértices que são extremidades dessa aresta, assim podemos omitir os vértices quando estamos a escrever um ciclo. Pensando nos ciclos exemplificados anteriormente no grafo G, poderíamos escrever o primeiro ciclo como u_1, u_5, u_2, e o segundo, que é um laço, como u_6. Com o conceito de ciclo estabelecido, podemos falar da noção de dependência nos conjuntos constituídos por arestas de um grafo.

Exemplo 2.3 Olhando para o grafo G, e sendo I_2 a coleção dos subconjuntos de U, formados por arestas do grafo G que não contêm nenhum ciclo do grafo, então, podemos afirmar que I_2 tem todos os conjuntos com, no máximo, três elementos de $U - \{u_6\}$, exceto os conjuntos $\{u_1, u_2, u_5\}$ e $\{u_3, u_4, u_5\}$.

Repare na semelhança que existe entre I_1 do exemplo 2.1 e I_2 do exemplo 2.3. Whitney reparou nesta semelhança e reparou também nas seguintes três propriedades que I_1 e I_2 verificavam: (designando por I indiferentemente as coleções I_1 e I_2)

$\boldsymbol{P1}$) $\emptyset$ é elemento de I.

$\boldsymbol{P2}$) Se $Y \in I$ e $Z \subseteq Y$, então $Z \in I$.

$\boldsymbol{P3}$) Se $Z, Y \in I$ e $|Z| > |Y|$, então existe $z \in Z - Y$ tal que $Y \cup \{z\} \in I$ (em que $|Y|$ e $|Z|$ designam o número de elementos dos conjuntos Y e Z, respectivamente).

Foi a partir destas três propriedades que Whitney definiu o conceito de matróide.

2.1 DEFINIÇÃO DE MATRÓIDES

Definição 2.1.1 Um matróide M é uma estrutura do tipo $M = (E, I)$ em que E é um conjunto finito e I é uma coleção de subconjuntos de E que verificam as três propriedades anteriores.

Se $M = (E, I)$ é um matróide, então os conjuntos de I chamam-se conjuntos independentes do matróide M. O conjunto E é o suporte do matróide M. O subconjunto de E que não está em I é chamado dependente. Se o conjunto I satisfizer as propriedades **P1** e **P2** mas não necessariamente **P3**, então (E, I) é denominado um **complexo simplicial**.

Proposição 2.1.1 Seja E o conjunto de colunas rotuladas de uma matriz *m* x *n* sobre um corpo F, e seja I o conjunto dos subconjuntos X de E para os quais multiconjuntos (conjunto cujos elementos podem ser repetidos) de colunas rotuladas por X é linearmente independente (L.I) no espaço vetorial de dimensão $V(m, F)$ sobre o corpo F. Então (E, I) é um Matróide.

Demonstração: Evidentemente, I satisfaz (***P1***), pois $\emptyset \in I$ e (***P2***) também é satisfeito, pois, subconjuntos de conjuntos linearmente independentes também são linearmente independentes. Para provar (***P3***), sejam I_1 e I_2 conjuntos independentes de I. Supondo que $|I_1| < |I_2|$, devemos provar que $\exists\ e \in I_2 - I_1$ com $I_1 \cup \{e\} \in I$. Por absurdo, vamos supor que $\forall\ e \in I_2 - I_1, I_1 \cup \{e\} \notin I \Rightarrow I_1 \cup \{e\}$ gera vetores linearmente dependentes. Seja W subespaço de $V(m, F)$ gerado por $I_1 \cup I_2$. Logo a dimensão de W é no mínimo $|I_2|$, pois $I_2 \subset I_1 \cup I_2$. Portanto, W está contido no gerado de I_1. Assim $|I_2| \leq dim\, W \leq |I_1| < |I_2|$ é uma contradição. Logo, concluímos que $I_2 - I_1$ contém um elemento e tal que $I_1 \cup \{e\} \in I$, isto é, (**P3**) é válida.

Um Matróide obtido de uma matriz A como do exemplo 2.1, denotada por $M[A]$, é chamado *Matróide Vetorial* de A.

Exemplo 2.1.1 Voltando a analisar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ do exemplo 2.1, cujas colunas são rotuladas por 1,2,3,4,5 e 6. Obtemos:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

A coleção de subconjuntos dependentes é:

$$\{\{1,2,5\},\{3,4,5\}\} \cup \{X \subseteq E; |X| \geq 4 \; ou \; 6 \in X\}$$

Dentre os conjuntos dependentes existem os *minimais*, ou seja, conjuntos dependentes cujos subconjuntos próprios são independentes, e isso origina a seguinte definição:

Definição 2.1.2 Um conjunto dependente minimal de um Matróide M será denominado circuito de M, e o conjunto de todos os circuitos do Matróide M será denominado por $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}$(M).

Um circuito de M com n elementos é denominado n-circuito. Evidentemente, tal como no exemplo anterior, toda vez que $\mathcal{C}(M)$ for especificado, M também o será: os membros de $I(M)$ são os subconjuntos de M e E que não contêm nenhum membro de $\mathcal{C}(M)$. Assim, um Matróide é determinado exclusivamente por seu conjunto $\mathcal{C}$ de circuitos.

Vamos agora analisar algumas propriedades de $\mathcal{C}$, com vista a caracterizar esses dois subconjuntos de que pode ocorrer como o conjunto de circuitos de um Matróide sobre E.

Lema 2.1.1 Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos circuitos de um Matróide M, então são válidas as seguintes propriedades:

C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

C2) Se C_1 *e* C_2 são membros de $\mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, *então* $C_1 = C_2$.

C3) Se C_1 *e* C_2 são membros distintos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E} \in C_1 \cap C_2$. Então existe um membro C_3 *de* $\mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \mathcal{E}$.

Demonstração: **C1)** $\emptyset \notin \mathcal{C}$. Por ***P1)*** $\emptyset \in I$, pois I não contém circuito.

C2) Vamos supor que C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$ com $C_1 \subseteq C_2$ e $C_1 \neq C_2$. $\exists\, x \in C_2 - C_1$. Então $C_1 \subseteq C_2 - \{x\}$. Mas $C_2 - \{x\} \in I$, por **P2)** $C_1 \in I$ é um absurdo.

Para verificar **C3)** vamos supor que não existe um circuito contido em $(C_1 \cup C_2)-\{\mathcal{E}\}$, ou seja, $(C_1 \cup C_2)-\mathcal{E}$ é independente. Por **C2)**, $C_2 - C_1 \neq \emptyset$ então existe *f* em $C_2 - C_1$. Como C_2 é conjunto dependente minimal, $C_2 - f \in I$. Seja *J* um subconjunto de $C_1 \cup C_2$ que é maximal com a propriedade que este contém a $C_2 - f$ é independente. Evidentemente $f \notin J$. Mas como C_1 é um circuito, algum elemento *g* de C_1 não está em *I*. Como $f \in C_2 - C_1$, os elementos *f* e *g* são distintos. Então

$$|J| \leq |(C_1 \cup C_2) - \{f, g\}| = |(C_1 \cup C_2)| - 2 < |(C_1 \cup C_2) - \{\mathcal{E}\}|.$$

Agora aplicando, ***P3)***, tomando I_1 como *J* e I_2 como $(C_1 \cup C_2)-\mathcal{E}$. O conjunto independente resultado contradiz com a maximalidade de *J*.

A condição **C3)** é chamada de axioma da *eliminação do circuito*

Podemos então classificar um Matróide através das condições **C1, C2** e **C3**.

Teorema 2.1.1 Seja *E* um conjunto e $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de *E* que satisfaz **C1, C2** e **C3**. Seja *I* uma coleção de todos os subconjuntos de *E* que não contém membros de $\mathcal{C}$. Então (E, I) é um Matróide que tem $\mathcal{C}$ como sua coleção de circuitos.

Demonstração: Primeiramente mostraremos que *I* satisfaz ***P1, P2*** e ***P3***. Por **C1**, $\emptyset$ não é um elemento de $\mathcal{C}$, dessa forma $\emptyset \in I$. Logo ***P1*** é satisfeito. Se *Y* não contém elementos de $\mathcal{C}$ e *Z* está contido em *Y*, então *Z* não contém elementos de $\mathcal{C}$. Logo ***P2*** é satisfeito.

Para provar ***P3***, suponhamos que I_1 e I_2 são membros de *I* e $|I_1| < |I_2|$. Suponhamos que ***P3*** falha para o par I_1, I_2. Agora *I* contém um elemento que é um subconjunto de $I_1 \cup I_2$ e contém mais elementos que I_1. Escolha um subconjunto I_3 de *I* contido em $I_1 \cup I_2$ tal que a $|I_1 - I_3|$ é minimal. Como ***P3*** falha, $I_1 - I_3$ é não vazio, assim podemos escolher um elemento *e* deste conjunto. Para cada elemento *f* de $I_3 - I_1$, seja $T_f = (I_3 - \{f\}) \cup \{e\}$. Então $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$ e $|I_1 - T_f| < |I_1 - I_3|$. Portanto $T_f \notin I$, assim T_f contém um elemento C_f de $\mathcal{C}$. Evidentemente $f \notin C_f$. Mas, $e \in C_f$, pois caso contrário temos $C_f \subseteq I_3$ contradiz o fato que $I_3 \in I$.

Seja *g* um elemento de $I_3 - I_1$. Se $C_g \cap (I_3 - I_1) = \emptyset$. Então $C_g \subseteq (I_1 \cap I_3) \cup \{e\} - \{g\} \subseteq I_1$ o que dá uma contradição. Portanto, tem um elemento *h* em $C_g \cap (I_3 - I_1)$. Então $e \in C_g \cap C_h$. Assim, **C3** implica que tem um membro C de $\mathcal{C}$ tal que $C \subseteq (C_g \cup C_h) - \{e\}$. Mas, ambos C_g e C_h são subconjuntos de $I_3 \cup \{e\}$ e, portanto $C \subseteq I_3$ é uma contradição. Concluímos que ***P3*** não falha e consequentemente (E, I) é um Matróide *M*.

Para provar que $\mathcal{C}$ é um conjunto $\mathcal{C}$ (*M*) de circuitos de *M*, notamos que os seguintes enunciados são equivalentes.

(i) *C* é um circuito de *M*.

(ii) $C \notin I(M)$ e $C - x \in I(M)$ para todo *x* em *C*.

(iii) *C* contém um membro *C'* de $\mathcal{C}$ como um subconjunto, mas *C'* não é um subconjunto próprio de *C*.

(iv) $C \in \mathcal{C}$.

Como consequência imediata do teorema anterior tem-se:

Corolário 2.1.1 Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de *E*. Então $\mathcal{C}$ é uma coleção de subconjuntos do circuito de um Matróide *M* se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) Se C_1 e C_2 são elementos de $\mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$. Então $C_1 = C_2$.

(C3) Se C_1 e C_2 são elementos distintos de $\mathcal{C}$ e $\varepsilon \in C_1 \cap C_2$, então, existe um elemento C_3 de $\mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \varepsilon$.

Proposição 2.1.2 Seja *I* um conjunto independente em um Matróide *M* e ε um elemento de *M* tal que $I \cup \{\varepsilon\}$ é dependente. Então *M* tem um único circuito *C* contido em $I \cup \{\varepsilon\}$, que contém ε.

Demonstração: Evidentemente, $I \cup \{\varepsilon\}$ contém um circuito, pois $I \cup \{\varepsilon\}$ é um conjunto dependente. Portanto, todo circuito *C* contido em $I \cup \{\varepsilon\}$ contém ε, pois, caso contrário, $C \subset I$, um absurdo. Supor que existe um circuito *C'*, distinto de *C*, contido em $I \cup \{\varepsilon\}$. Então, por (C3), $(C \cup C') - \varepsilon$ contém um circuito *C*', mas $(C \cup C') - \varepsilon \subseteq I$, e assim $C' \subset I$, o que é um absurdo, pois *I* é independente. Portanto, *C* é o único circuito contido em $I \cup \{\varepsilon\}$ e que contém ε.

Com as definições, teoremas e proposições acima demonstradas, podemos agora escrever formalmente como se dá a construção de matróides derivados de grafos, como visto no exemplo 2.2.

Proposição 2.1.3. Seja *E* o conjunto das arestas de um grafo *G* e $\mathcal{C}$ a família dos conjuntos das arestas dos ciclos de *G*. Então $\mathcal{C}$ é a família dos circuitos de um Matróide sobre *E*.

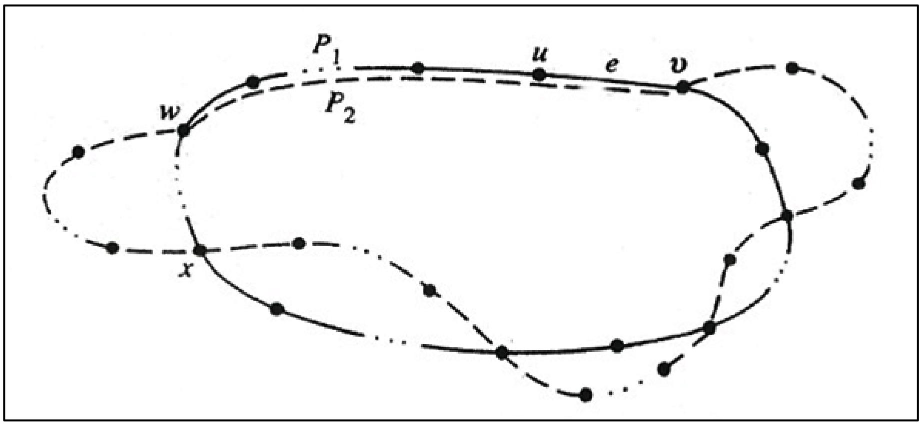
Demonstração: (C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$. Por $\boldsymbol{P1}$, $\emptyset \in I$.

(C2) Supor C_1 e $C_2 \in \mathcal{C}$ com $C_1 \subseteq C_2$ e $C_1 \neq C_2$. Então $\exists\, \varepsilon \in C_2 - C_1$, e assim $C_1 \subseteq C_2 - \{\varepsilon\}$. Mas $C_2 - \{\varepsilon\} \in I$, donde, por $\boldsymbol{P2}$, $C_1 \in I$, uma contradição.

(C3) Sejam C_1 e C_2 os conjuntos das arestas de dois ciclos distintos de *G* que possuem e como uma aresta em comum. Considere a Fig. (3). Sejam *u* e *v* os vértices da aresta e. Vamos agora construir um ciclo de *G* cujas arestas estão contidas em $C_1 \cup C_2 - e$, para *i* = 1, 2, seja P_1 um caminho de *u* a *v* em *G* cujas arestas estão em $C_i - e$. Começando em *u*, percorrendo P_1 em direção de *v*, seja *w* o primeiro vértice cuja próxima aresta de P_1 não pertence a P_2. Continuando a percorrer P_1 de *w* em direção *v*, encontramos um vértice *x* distinto de *w* que também está em P_2. Como P_1 e P_2 terminam em *v* tal vértice existe. Unindo o subcaminho de P_1 que vai de *w* a *x* ao subcaminho de P_2 vai de *x* até *w* encontramos um ciclo cujas arestas estão contidas em $C_1 \cup C_2 - e$. Portanto, $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade (C3), $C3 \subseteq C1 \cup C2 - e$. Logo $\mathcal{C}$ é a família dos circuitos de um Matróide sobre *E*.

Assim, um ciclo é uma sequência alternada de arestas e vértices, de um grafo *G*, formando um ciclo fechado.

Figura 3 - O ciclo é um grafo que satisfaz o circuito eliminatório do axioma (C3)



Fonte: Ales (2017, p. 24).

Definição 2.1.3 MATRÓIDE UNIFORME: Sejam n e r dois números inteiros não negativos, com $0 \leq r \leq n$. Chama-se *matróide uniforme*, denotando-se por $U_{r,n}$, um matróide $M = (E, I)$ em que E é um conjunto com n elementos e I é a coleção de subconjuntos de E com, no máximo, r elementos.

É fácil verificar que o par (E, I) da definição acima constitui um matróide.

Exemplo 2.1.2 Pedro tem uma lista de compras para o supermercado: 1 dúzia de ovos; 1 kg de arroz; 1 lata de atum; 1 pacote de salada. No supermercado, repara que se esqueceu da carteira em casa e que nos seus bolsos só tem três reais. Olha para as prateleiras e acrescenta à sua lista de produtos os respectivos preços: 1 dúzia de ovos = 1,00 real; 1 kg de arroz = 1,10 reais; 1 lata de atum = 1,30 reais; 1 pacote de salada = 1,20 reais. Face ao exposto, Pedro tem, no máximo, dinheiro para comprar quaisquer dois produtos da sua lista. Ou não compra nada, ou compra um produto, ou compra dois produtos. Estamos perante um problema que tem quatro elementos (os produtos da lista do Rui) e podemos construir subconjuntos destes quatro elementos com, no máximo, dois elementos (o Rui só tem dinheiro para comprar, no máximo, dois produtos da lista). Portanto o que temos neste exemplo é o matróide uniforme $U_{2,4}$.

Definição 2.1.4 Seja um conjunto E, um conjunto sobre o qual definimos uma propriedade. Seja o MÁXIMO (MÍNIMO) ou MAXIMAL (MINIMAL) subconjunto $R \subseteq E$ aquele tal que não existe um outro subconjunto $R' \subseteq E$ que contém (contido em) R propriamente, satisfazendo a mesma propriedade.

Exemplo 2.1.3 Seja $E = \{O, 2, \dots, 10\}$ conjunto dos pares menores ou iguais a 10. O subconjunto maximal (minimal) $R \subseteq E$ contendo pares menores que 7 é $R = \{O, 2, 4, 6\}$ $(R = \{O\}, R = \{2\}, R = \{4\}, R = \{6\}$ todos minimais).

Um outro tipo de matróide que será utilizado nas seções posteriores são os matróides transversais. Para caracterizá-los definiremos alguns elementos básicos.

Seja E um conjunto finito e $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ um conjunto de, não necessariamente distintos, subconjuntos de *E*. Um *TRANSVERSAL DE Q* é um conjunto formado tomando-se um único elemento de cada subconjunto $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, de maneira que todos estes elementos sejam distintos. Um *PARCIAL TRANSVERSAL DE Q* é uma transversal de algum subconjunto de Q.

Exemplo 2.1.4 $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ um conjunto de subconjuntos de $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde $Q_1 = \{e_2, e_3, e_4\}$ e $Q_2 = Q_3 = \{e_1\}$. Não temos um transversal pois $Q_2 = Q_3$, mas $\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}$ são parciais transversais.

Definição 2.1.5 Com as definições acima, $M = (E, I)$ é um **MATRÓIDE TRANSVERSAL** sobre E se I é o conjunto de parciais transversais de Q, ou seja, as parciais transversais de Q são os subconjuntos independentes de E. As propriedades ***P1, P2*** e ***P3*** são facilmente verificadas.

Entre os subconjuntos independentes de E temos o MAXIMAL PARCIAL TRANSVERSAL DE Q, que é o parcial transversal tal que não existe nenhum outro parcial transversal contendo-o.

2.2 MATRÓIDES PESADOS

Queremos agora relacionar matróides com problemas de otimização. Grosso modo, o objetivo de um problema de otimização é minimizar/maximizar uma determinada quantidade, de acordo com certas restrições. Vamos fazer isso atribuindo uma certa quantidade (designada por "peso") a cada elemento de E.

Seja $M = (E, I)$ um matróide e seja $w: E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função. Dizemos que w é a **função peso** do matróide e $w(x)$ é o **peso** do elemento x. Dado $X \subseteq E$, o peso de X, que denotamos por $w(X)$ (abuso de notação!) é a soma de todos os pesos dos seus elementos, ou seja, $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$. O problema que pretendemos resolver é o seguinte:

PROBLEMA: Determinar um conjunto independente maximal de peso **máximo**.

Por "conjunto independente maximal" entenda-se um conjunto independente que não está estritamente contido em nenhum outro conjunto independente. O problema de determinar um independente maximal de peso **mínimo** é inteiramente análogo, logo, focar-nos-emos apenas no caso acima.

Vamos agora ver que a resposta ao problema acima é "usando um algoritmo ganancioso!".

Seja $M = (E, I)$ um matróide pesado cuja função peso é $w: E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Consideremos o seguinte **algoritmo ganancioso** (ou **guloso**), cujo objetivo é determinar um conjunto independente maximal de peso máximo:

• **Passo 1:** Começamos por considerar o conjunto independente $X = \emptyset$

• **Passo 2:** Acrescentamos a X um elemento x de peso máximo satisfazendo $X \cup \{x\} \in I$.

• **Passo 3:** Continuamos a acrescentar elementos como no **Passo 2** até obter um independente maximal.

Nota-se que a propriedade **P3** satisfeita pelo matróide assegura que conseguimos “completar” qualquer conjunto independente até atingirmos um independente maximal, daí podermos executar o **Passo 2** até alcançarmos um tal conjunto. Além disso, esta mesma propriedade garante que quaisquer dois conjuntos independentes maximais têm a mesma cardinalidade.

Chegamos enfim ao resultado que procuramos:

Teorema 2.2.1 O algoritmo ganancioso acima encontra a melhor solução para o PROBLEMA.

Demonstração: Seja $M = (E, I)$ um matróide pesado com função peso $w\colon E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que o algoritmo ganancioso devolve um conjunto independente maximal $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, mas existe um conjunto independente maximal $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ satisfazendo $w(Y) > w(X)$. Suponhamos ainda que $w(x_1) \geq \cdots \geq w(x_n)$ e $w(y_1) \geq \cdots \geq w(y_n)$. Então, tem de existir algum $1 \leq k \leq n$ tal que $w(y_k) > w(x_k)$. Como os conjuntos $X' = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ e $Y' = \{y_1, \dots, y_k\}$ são independentes e $|Y'| > |X'|$, a propriedade **P2** satisfeita por I garante que existe $1 \leq r \leq k$ tal que o conjunto $\{x_1, \dots, x_{k-1}, y_r\}$ é independente. Mas $w(y_r) \geq w(y_k)$ pois $r \leq k$, e $w(y_k) > w(x_k)$ pela escolha de k. Logo $w(y_r) > w(x_k)$, pelo que o algoritmo ganancioso teria escolhido o elemento y_r ao invés de x_k, absurdo! Concluímos então que X é um independente maximal de peso máximo.

Está então demonstrado que, se um problema de otimização possui a estrutura de matróide, então um algoritmo ganancioso fornece a melhor solução possível.

Mas, intuitivamente, porque é que a prova funciona? Novamente, a propriedade ***P3*** é o ingrediente essencial: ela permite-nos assegurar a existência de uma solução ótima para o problema que é consistente com as escolhas que o algoritmo ganancioso vai fazendo. Isto é, podemos ir acrescentando cada vez mais elementos aos nossos independentes “locais” de modo a culminar num independente “global” que satisfaz o pretendido.

A observação prévia motiva a seguinte questão: o que acontece se não considerarmos a propriedade **P3**? Será que as propriedades **P1** e **P2** são suficientes para garantir que um algoritmo ganancioso encontra a solução ótima para o problema em questão? Lembremos que um complexo simplicial S é uma estrutura do tipo $S = (E, I)$ em que o conjunto $I \subseteq P(E)$, onde $P(E)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de E, satisfaz as propriedades **P1** e **P2**, mas não necessariamente **P3**. Para ser mais simples, vamos continuar a referir-nos aos elementos I como "independentes". O próximo resultado indica que se um complexo simplicial não satisfaz **P3**, então existe uma função peso $w: E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que o algoritmo ganancioso NÃO encontra um independente maximal com peso máximo. Ou seja, a propriedade **P3** é mesmo indispensável para que o algoritmo ganancioso forneça a solução ótima para qualquer função peso que possamos considerar!

Teorema 2.2.2 Se um complexo simplicial não for um matróide, então o algoritmo ganancioso pode não encontrar a solução ótima para o PROBLEMA.

Demonstração: Seja $S = (E, I)$ um complexo simplicial e sejam $X, Y \in I$ tais que $|Y\,| > |X|$ mas $X \cup \{y\} \notin I$ para todo $y \in Y - X$ (i.e. $|X|$ e $|Y|$ violam a propriedade **P3**. Como $|Y - X| > |X - Y\,|$, existe algum $0 < c < 1$ satisfazendo $|X - Y| < c|Y - X|$. Consideremos a função peso $w: E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por

$$w(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in X \\ c & se\ x \in Y - X \\ 0 & se\ x \notin Y \cup X \end{cases}$$

Então, no processo de obtenção de um independente maximal com peso máximo, o algoritmo ganancioso começa por escolher todos os elementos de *X*; consequentemente, não vai poder escolher nenhum elemento de *Y*, pois estamos a assumir que $X \cup \{y\} \notin I$ para todo o $y \in Y - X$. Assim, os elementos restantes que o algoritmo escolhe têm de pertencer a $C - (X \cup Y)$, pelo que todos terão peso 0. Portanto, o peso do independente maximal *Z* selecionado pelo algoritmo ganancioso é dado por $w(Z) = |X|$. Por outro lado, sendo *Y* independente, existe algum $W \in I$ maximal tal que $Y \subseteq W$, e tem-se

$$\begin{aligned} w(W) \geq w(Y) &= w(|X \cap Y|) + w(|Y - X|) \\ &= |X \cap Y| + c|Y - X| \\ &> |X \cap Y| + |X - Y| \\ &= |X| = w(Z) \end{aligned}$$

Portanto, o independente maximal W tem um peso superior ao independente maximal *Z* fornecido pelo algoritmo ganancioso. Mostramos assim que, para esta função peso, o algoritmo ganancioso não alcança a solução ótima para o problema.

Combinando os dois teoremas anteriores, obtemos a seguinte caracterização:

Teorema 2.2.3: Os complexos simpliciais em que os algoritmos gananciosos alcançam a solução ótima para o PROBLEMA são precisamente os matróides.

3 CONCLUSÃO

Verificamos que inicialmente é definido o conjunto E e em seguida uma “estrutura de independência” que gerará I. Este passo nem sempre é evidente. Para a conclusão deste trabalho, veremos o porquê de os problemas propostos que nos serviram como motivação podem ser, ou não, resolvidos com o algoritmo ganancioso.

O problema 3 não tem resultado otimizado com o algoritmo ganancioso, logo não possui estrutura de matróide. Com relação ao problema 2, temos um problema de grafos, que já foi demonstrado possuir uma estrutura de matróide. Logo nos resta analisar o problema 1. Vejamos novamente o problema:

Problema 1. Um certo número de trabalhos será executado por uma única máquina. Todos requerem o mesmo tempo de processamento, uma hora. Estão associados a um tempo para entrega, o qual não satisfeito, implica em uma penalidade fixa $\boldsymbol{p_i}$, independente do atraso. Determinar a sequência para execução dos trabalhos de forma que o total das penalidades seja mínimo.

Nesse problema um conjunto de trabalhos serão executados. Seja $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ este conjunto de trabalhos. A cada trabalho está associado um tempo de entrega e uma penalidade. Podemos assim separar os trabalhos em conjuntos por tempo de entrega. Seja $Q = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ onde Q_i contém todos os trabalhos a serem entregues no tempo $t = i$. Definimos assim um matróide transversal $M = (E, I)$ sobre E. I é o conjunto dos parciais transversais de Q, ou seja, o conjunto de sequências para execução dos trabalhos. Como a cada elemento de E está associada uma penalidade, uma função de pesos não negativa, aplicando o algoritmo ganancioso, obtemos um transversal S de peso máximo. Consequentemente uma sequência para execução dos trabalhos com um total mínimo de penalidade.

REFERÊNCIAS

ALES, R. **Matróides e códigos quânticos**. 2017. 87p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

FERNANDES, R. O que é um matróide? **Gazeta de Matemática**, n. 175, ano 76, p. 36-40, mar. 2015. Disponível em: https://gazeta.spm.pt/get?gid=175. Acesso em: 02 jan. 2023.

MATEUS, G. R. **Matróides e algoritmos greedy**. 1980. 249 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1980.

OXLEY, J. G. **Matroid theory**. Oxford: Oxford University Press, 1992.

PARBERRY, I. **Problems on algorithms**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1995.

WHITNEY, H. On the abstract properties of linear dependence. **American Journal Mathematics**, v. 57, n. 3, p. 509-533, Jul. 1935.