



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ROBERTO AARON MARQUES BRAGA

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE COM ATRASO VARIÁVEL

FORTALEZA

2022

ROBERTO AARON MARQUES BRAGA

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE COM ATRASO VARIÁVEL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Bismark Claure Torrico.

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B795e Braga, Roberto Aaron Marques Braga.
Estabilidade de sistemas de controle com atraso variável / Roberto Aaron Marques Braga Braga. – 2023.
130 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Bismark Claure Torrico.

Coorientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

1. Estabilidade de sistemas com atraso. 2. Sistemas de controle com atraso variável. 3. Controle proporcional-integral para sistemas com atraso variável. 4. Estabilidade robusta para sistemas com atraso variável. I. Título.

CDD 621.3

ROBERTO AARON MARQUES BRAGA

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE COM ATRASO VARIÁVEL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 13/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bismark Claire Torrico (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rejane Cavalcante Sá Rodrigues
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará
(IFCE)

Prof. Dr. Magno Prudêncio de Almeida Filho
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará
(IFCE)

À Ana Marques, por ser uma mãe amorosa e um exemplo de ser humano para mim.

AGRADECIMENTOS

Ainda que simples, esse trabalho é símbolo de um esforço conjunto de pessoas que contribuíram para que eu concluísse meu curso de mestrado, de modo que me cabe registrar a gratidão que tenho por elas.

À minha mãe, Ana Marques, pela dedicação em educar-me e fornecer-me as melhores condições possíveis de estudo. Aos demais membros da minha família que tem me ajudado incondicionalmente.

Aos meus colegas do Departamento de Engenharia Elétrica, em particular àqueles que estiveram comigo durante o meu período como bolsista no Grupo de Pesquisa em Controle, Automação e Robótica. Agradeço em especial aos meus amigos Gabriel, Andreza, Balbino, Sérgio, Luana Albuquerque, Raoni, Faustino, Luana Teodósio, Alanio, Alexandre Magno e Guilherme. Aos professores Bismark Claire e Fabrício Gonzalez pelo suporte e pelo incentivo durante o mestrado.

Ao meu orientador Bismark Claire pelo suporte e pelo incentivo durante todo o meu mestrado. Aos professores Fabrício, René e Laurinda pelas aulas, recomendações e apoio.

À Universidade Federal do Ceará, que como instituição pública produz valiosos retornos à sociedade, em nome da qual agradeço a todos os estudantes que buscam no conhecimento uma forma de melhorar suas condições e a vida dos que os cercam.

“A ciência é muito mais que um corpo de conhecimentos. É uma maneira de pensar.”

(Carl Sagan)

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma análise de estabilidade robusta para controladores do tipo proporcional-integral em sistemas de malha fechada com atraso variável no tempo. Os dois propósitos principais do texto são responder que tipo de atraso corresponde ao pior cenário em termos de estabilidade: o atraso constante ou o atraso em forma de dente de serra, e demonstrar analiticamente uma expressão de controlador proporcional-integral que garante a estabilidade para atrasos variáveis limitados. A fundamentação teórica do trabalho apresenta métodos de obtenção da solução de um sistema com atraso, bem como uma discussão acerca do espaço de estados desse tipo de sistema. São apresentadas inconsistências para sistemas com taxa de variação do atraso maiores que a unidade, sendo mostrada também uma alternativa à determinação do espaço de estados para sistemas com atraso variável com base em uma equivalência topológica com relação a sistemas com atraso constante. Após uma apresentação sucinta dos conceitos gerais de estabilidade e também dos critérios de estabilidade para sistemas com atraso constante e atraso variável no tempo, são demonstrados resultados referentes à estabilidade robusta de sistemas com atraso variável e mostrados resultados de simulação para um sistema em malha fechada cujo controlador proporcional-integral deriva de uma regra proposta no trabalho.

Palavras-chave: Estabilidade de sistemas com atraso. Sistemas de controle com atraso variável. Controle proporcional-integral para sistemas com atraso variável. Estabilidade robusta para sistemas com atraso variável.

ABSTRACT

A robust stability analysis is presented for proportional-integral controlled closed-loop systems with time-varying delay. The two main purposes of the text are to answer which type of delay corresponds to the worst case in terms of stability: the constant delay or the sawtooth delay, and to analytically find a proportional-integral controller that guarantees stability for models with bounded time-varying time delays. Methods are presented for obtaining the solution of a system with time-delay, as well as a discussion about the state space of this type of system. Inconsistencies for systems with rate of change of the time-delay function greater than one are presented and an alternative state space for systems with variable delay is presented based on a topological equivalence with respect to systems with constant delay. After a brief presentation of the general stability concepts and also of the stability criteria for systems with constant delay and variable delay, results regarding the robust stability of systems with variable delay are demonstrated and simulation results are shown for a closed-loop system whose proportional-integral controller derives from a rule proposed in the text.

Palavras-chave: Stability of time-delay systems. Time-varying time-delay control systems. Proportional-integral controlled systems with variable delay. Robust stability for systems with variable delay.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama de processo de corte de peça metálica por meio de torneamento.	16
Figura 2 – Soluções da equação diferencial ordinária $\dot{x}(t) = -x(t)$ para dois valores iniciais diferentes.	27
Figura 3 – Soluções da equação diferencial funcional $\dot{x}(t) = -x(t - 1)$ para o valor inicial $x(0) = 1$, mostrando que somente a informação do valor inicial não garante a unicidade das soluções.	29
Figura 4 – Soluções da equação diferencial funcional $\dot{x}(t) = -x(t - 1)$ para as funções iniciais $\phi(t) = 1$ e $\phi(t) = t + 1, t \in [-1, 0]$, exemplificando a unicidade das soluções para funções histórico conhecidas.	30
Figura 5 – Função inicial, ou função histórico, $\phi(t) = -t$ escolhida a título de exemplo para a resolução da equação diferencial funcional apresentada no Exemplo 2.	33
Figura 6 – Função definida por partes que, para $t \in [-2, 0]$, vale $\phi(t)$ e, para $t \in [0, 2]$, vale $x(t)$	34
Figura 7 – Função definida por partes que, para $t \in [-2, 0]$, vale $\phi(t)$ e, para $t \in [0, 4]$, vale $x(t)$	36
Figura 8 – Função definida por partes que, para $t \in [-2, 0]$, vale $\phi(t)$ e, para $t \in [0, +\infty]$, vale $x(t)$	37
Figura 9 – Evolução dos estados do sistema com atraso constante apresentado no Exemplo 3 para $t \in [0, 20]$	40
Figura 10 – Comparação da função atraso $\tau(t)$ com a função argumento atrasado $R(t) = t - \tau(t)$ e o tempo atual, dado somente por t	48
Figura 11 – Solução da equação diferencial funcional definida em 2.19.	50
Figura 12 – Evolução da sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dos instantes finais dos intervalos nos quais estão definidas as funções x_t	53
Figura 13 – Divisão do gráfico da solução da equação diferencial funcional para os intervalos em que x_t pode ser representada pela mesma solução de determinada equação diferencial ordinária.	54
Figura 14 – Evolução da função x_t com o decorrer do tempo.	55
Figura 15 – Evolução da função $\frac{R^k(t) - R^0(t)}{k}$ de acordo com o aumento de k	59

Figura 16 – Evolução dos instantes de tempo nos quais a solução da equação diferencial funcional passa a ser representada como uma solução diferente de outra equação diferencial ordinária.	61
Figura 17 – Solução da equação diferencial funcional descrita em 2.30 para $A = -2$ e $B = -1$, em azul; função histórico, em vermelho; linhas verticais em preto separando os intervalos de definição das soluções.	62
Figura 18 – Evolução da função x_t para diferentes valores da variável θ	63
Figura 19 – Solução da Equação 2.36, representando um sistema com atraso constante equivalente ao sistema original com atraso variável.	65
Figura 20 – Evolução dos estados z_φ no tempo φ de acordo com a variação de θ	66
Figura 21 – Exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio instável. Qualquer movimento realizado sobre a bola é suficiente para que ela caia indefinidamente.	71
Figura 22 – Exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio instável. Qualquer movimento realizado sobre a bola é suficiente para que ela caia indefinidamente.	72
Figura 23 – A linha azul tracejada representa a trajetória dos estados do sistema no plano, enquanto a linha azul contínua representa os valores assumidos pelo funcional de Lyapunov para cada estado.	74
Figura 24 – Diagrama de Nyquist para ganho de malha dado por $F(s) = C(s)P(s)$, em que o controlador e o modelo do processo são dados nas Equações 3.2 e 3.3, respectivamente. Foram plotados os casos com atraso e sem atraso no modelo.	78
Figura 25 – Representação genérica de um sistema interconectado por realimentação.	79
Figura 26 – Sistema de controle em malha fechada com atraso variável no tempo dado pelo operador Δ	82
Figura 27 – Sistema de controle em malha fechada com atraso variável no tempo dado pelo operador Δ reorganizado para uso do teorema do pequeno ganho.	84
Figura 28 – Diagrama de Nyquist de um sistema em malha fechada: modelo nominal e modelo com incerteza. As distâncias relevantes à análise de estabilidade robusta estão destacadas por meio dos vetores complexos $C(j\omega)\Delta P_i(j\omega)$ e $-1 - C(j\omega)P_n(j\omega)$	88

Figura 29 – Em azul, o índice de robustez referente ao modelo nominal da Equação 3.13 controlado pelo controlador Proporcional-Integral da Equação 3.14. As demais curvas representam as diversas incertezas multiplicativas para cada uma das incertezas do sistema geradas pelos pontos $(p_i, K_i, p_i) \in [-1.2, -0.8] \times [0.9, 1.1] \times [0, 0.5]$	91
Figura 30 – Gráfico comparativo da máxima incerteza multiplicativa $\overline{\delta P}$ com o índice de robustez I_r para o sistema de controle em malha fechada descrito no Exemplo 6.	92
Figura 31 – Gráfico comparativo da máxima incerteza multiplicativa $\overline{\delta P}$ com o índice de robustez I_r para o sistema de controle em malha fechada descrito no Exemplo 6 quando o atraso toma valores incertos em até 2 unidades de tempo.	93
Figura 32 – Diagrama de Nyquist que mostra estabilidade para qualquer ponto de incerteza para o sistema em malha fechada descrito no Exemplo 6 quando o atraso toma valores incertos em até 2 unidades de tempo.	94
Figura 33 – Análise de estabilidade no domínio da frequência por meio da comparação entre o índice de robustez e a máxima incerteza multiplicativa para o caso em que a incerteza é modelada por uma função atraso variável no tempo.	97
Figura 34 – Gráfico da evolução do atraso variável com forma de dente de serra $L(t)$. . .	100
Figura 35 – Diagrama de blocos no SIMULINK utilizado para comparar a resposta sem atraso (parte superior do diagrama) com a resposta temporal atrasada por um atraso variável com forma de dente de serra (parte inferior).	101
Figura 36 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\dot{x}(t) = -x(t) - 1.5x(t - 1)$.	102
Figura 37 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\dot{x}(t) = -x(t) - 1.5x(t - \tau(t))$, com $\tau(t) = t - 1.6125k$, para $t \in [1.6125k, 1.6125(k + 1))$, $k \in \mathbb{N}_0$. . .	103
Figura 38 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\dot{x}(t) = -x(t) - 1.5x(t - \tau(t))$, com $\tau(t) = t - 2k$, para $t \in [2k, 2(k + 1))$, $k \in \mathbb{N}_0$	104
Figura 39 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t - 1) + x(t) = 0$.	105
Figura 40 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t - \tau(t)) + x(t) = 0$, com $\tau(t) = t - \frac{7\pi}{4}k$, para $t \in [\frac{7\pi}{4}k, \frac{7\pi}{4}(k + 1))$, $k \in \mathbb{N}_0$	106
Figura 41 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t - \tau(t)) + x(t) = 0$, com $\tau(t) = t - 2k$, para $t \in [2k, 2(k + 1))$, $k \in \mathbb{N}_0$	107

Figura 42 – Margens de atraso (em verde) comparadas ao máximo valor da amplitude de um atraso do tipo dente de serra que garante a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada (em lilás) para cada controlador Proporcional-Integral determinado pelos pontos do plano horizontal - planta de primeira ordem normalizada.	108
Figura 43 – Margens de atraso (em verde) comparadas ao máximo valor da amplitude de um atraso do tipo dente de serra que garante a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada (em lilás) para cada controlador Proporcional-Integral determinado pelos pontos do plano horizontal - modelo de segunda ordem.	109
Figura 44 – Relação gráfica dos ganhos do controlador com o parâmetro de sintonia de acordo com a regra de ajuste proposta em Skogestad (2003).	111
Figura 45 – Máximo amplitude da função atraso variável para a qual cada controlador Proporcional-Integral definido pela regra de sintonia garante estabilidade do sistema em malha fechada.	112
Figura 46 – Verificação de estabilidade do sistema de controle em malha fechada no domínio da frequência.	118
Figura 47 – Resposta temporal do sistema controlado em malha fechada com atraso do tipo de dente de serra com filtro de referência e sem filtro na entrada.	121
Figura 48 – Diagrama de blocos no SIMULINK para a obtenção da resposta temporal de um sistema de controle em malha fechada com atraso variável no tempo.	122
Figura 49 – Forma do atraso temporal considerado e resposta no tempo do sistema em malha fechada para tal atraso.	122

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{N}_0	Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
\mathbb{F}	Um corpo completo genérico
\mathbb{A}^c	Complemento do conjunto \mathbb{A} , isto é, todos os elementos do conjunto universo \mathbb{U} considerado que não estão no conjunto \mathbb{A}
$\mathbb{A} - \mathbb{B}$	Conjunto da diferença obtido por todos os elementos em \mathbb{A} que não estão em \mathbb{B} , isto é, $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}^c$
$\bar{\mathbb{A}}$	Fecho do conjunto \mathbb{A} dado pelo conjunto de pontos aderentes a \mathbb{A} (limites de sequências formadas por elementos de \mathbb{A})
$\mathbb{F}_{>0}$	Conjunto dos elementos positivos de um corpo ordenado \mathbb{F}
$\mathbb{F}_{\geq 0}$	Conjunto dos elementos não negativos de um corpo ordenado \mathbb{F}
$\mathbb{F}_{<0}$	Conjunto dos elementos negativos de um corpo ordenado \mathbb{F}
$\mathbb{F}_{\leq 0}$	Conjunto dos elementos não positivos de um corpo ordenado \mathbb{F}
\mathbb{F}^n	Produto cartesiano $\prod_{i=1}^n \mathbb{F}$
$M_{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{F})$	Conjunto das matrizes de dimensão $p_1 \times \dots \times p_n$ com entradas em \mathbb{F}
M_α	Elemento indexado por $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ da matriz M de ordem $\prod_{i=1}^m \alpha_i$
$\mathcal{F}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$	Conjunto das funções de \mathbb{X} valoradas em \mathbb{Y}
$\mathcal{C}^k \mathbb{X}$	Espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto da reta
$B(a, r)$	Bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$
B_r	Bola aberta $B(0, r)$ de centro centrada na origem de raio $r > 0$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Motivação	16
1.2	Revisão bibliográfica	18
1.3	Objetivos	21
1.4	Contribuições dessa dissertação	22
1.5	Organização do texto	22
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
2.1	Conceitos preliminares	24
<i>2.1.1</i>	<i>Definição formal de sistema dinâmico</i>	<i>24</i>
<i>2.1.2</i>	<i>Equações diferenciais funcionais</i>	<i>25</i>
<i>2.1.3</i>	<i>Exemplos</i>	<i>26</i>
2.2	Sistemas com atraso constante	28
<i>2.2.1</i>	<i>A infinitude dos espaços de estados de sistemas com atraso</i>	<i>28</i>
<i>2.2.2</i>	<i>Solução conceitual</i>	<i>31</i>
<i>2.2.3</i>	<i>Solução analítica</i>	<i>36</i>
<i>2.2.4</i>	<i>Os estados de um sistema com atraso</i>	<i>38</i>
<i>2.2.5</i>	<i>Formulação via equações diferenciais parciais</i>	<i>39</i>
<i>2.2.6</i>	<i>Formalização matemática em espaços de Banach para sistemas com atraso</i>	<i>42</i>
2.3	Sistemas com atraso variável	43
<i>2.3.1</i>	<i>A taxa de variação do atraso e a consistência do sistema</i>	<i>44</i>
<i>2.3.2</i>	<i>Taxa de variação unitária do atraso</i>	<i>46</i>
<i>2.3.3</i>	<i>Construção do espaço de estados</i>	<i>47</i>
<i>2.3.4</i>	<i>Equivalência topológica</i>	<i>55</i>
3	ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE	68
3.1	Definições de estabilidade	68
<i>3.1.1</i>	<i>Estabilidade no sentido Lyapunov</i>	<i>68</i>
<i>3.1.2</i>	<i>Estabilidade entrada-saída</i>	<i>74</i>
<i>3.1.2.1</i>	<i>Estabilidade no sentido BIBO</i>	<i>76</i>
3.2	Estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo com atraso constante	77

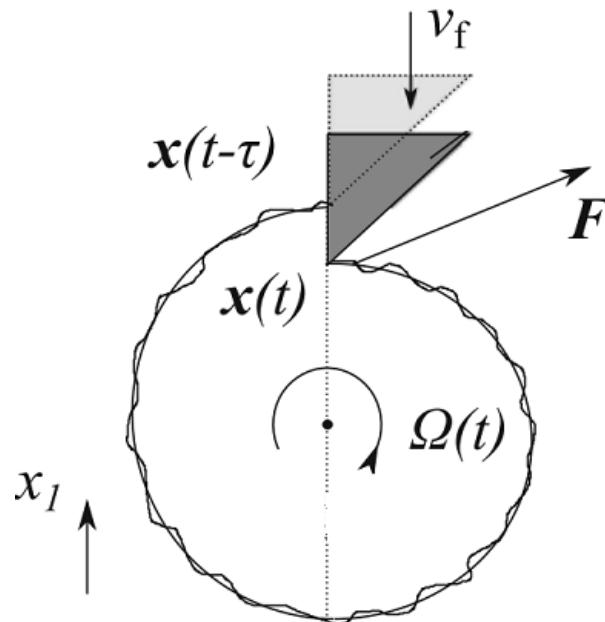
3.3	Estabilidade de sistemas com atraso variável no tempo	79
3.3.1	<i>Teorema do pequeno ganho</i>	80
3.3.2	<i>Critério de estabilidade para sistemas com atraso variável</i>	82
3.4	Estabilidade robusta	87
3.4.1	<i>Condição de estabilidade robusta</i>	89
3.4.2	<i>Estabilidade robusta para sistemas com atraso variável</i>	95
4	ESTABILIDADE DE SISTEMAS EM MALHA FECHADA COM ATRASO VARIÁVEL	98
4.1	Sistemas de controle com atraso do tipo dente de serra	98
4.1.1	<i>Sistemas de controle amostrados</i>	98
4.1.2	<i>O atraso do tipo dente de serra como causa de instabilidade</i>	101
4.1.3	<i>O ajuste do tempo de amostragem como fator de estabilização</i>	103
4.2	Sistemas com atraso controlados por controladores Proporcional-Integral	105
4.2.1	<i>Comparação com o caso de atraso constante</i>	106
4.2.2	<i>Estudo de caso</i>	109
5	PROJETO DE CONTROLADOR PARA SISTEMA COM INCERTEZA NO ATRASO	113
5.1	Projeto de controlador Proporcional Integral para processo de primeira ordem com atraso variável	113
5.2	Projeto de controlador Proporcional para processo de primeira ordem com atraso variável	116
5.3	Estudo de caso	117
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	124
6.1	Conclusões	124
6.2	Sugestões de trabalhos futuros	125
	REFERÊNCIAS	126

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

No contexto das aplicações da teoria de controle, o trabalho em questão busca abordar de forma pragmática a análise de estabilidade robusta para o caso em que o sistema de controle possui atraso variável no tempo. A metodologia da pesquisa desenvolveu-se de modo a focar nos casos em que o processo analisado seja de primeira ordem e o controlador do tipo proporcional-integral. Uma das principais motivações para tal estudo é o fato de que diversos sistemas possuem atraso variável no tempo, tais como sistemas de comunicação, sistemas de transmissão de fluidos por meio de tubulações e sistemas rotativos de torneamento mecânico. Um exemplo é apresentado na Figura 1, na qual uma peça metálica girante (com velocidade variável) tem uma peça de desgaste incidindo em sua superfície. A variação da velocidade de rotação da peça varia, o que é realizado de maneira proposital com o intuito de estabilizar o sistema com atraso variável.

Figura 1 – Diagrama de processo de corte de peça metálica por meio de torneamento.



Fonte: Modificada de (OTTO; RADONS, 2017).

Na Figura 1, o autor mostra uma dicotomia entre dois tipos diferentes de sistemas com atraso no tempo: um que pode ser transformado em um sistema topologicamente equivalente com atraso constante, e outro para os qual tal transformação inexistente.

A compreensão do comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos é fundamental

à síntese de controladores como solução prática ao problema de modificar o comportamento de determinado sistema para que este comporte-se da forma mais próxima possível àquela desejada. Dentre tais características qualitativas, uma das mais uma das mais relevantes é a estabilidade do sistema. Diante disso, o estudo de fatores que reduzem a estabilidade relativa, isto é, reduzem a robustez do sistema, ou desestabilizam o processo, é crucial do ponto de vista da teoria de controle. Um desses fatores é o atraso temporal, o qual consiste em uma diferença entre argumentos das funções a serem determinadas em um modelo matemático. Tais equações são chamadas de equações diferenciais funcionais. Os tipos aqui considerados são os atrasos contante e variável no tempo. Aquele, quando presente em um sistema linear e invariante no tempo, reduz a margem de fase do sistema, (OGATA, 2011), e pode não somente comprometer a estabilidade do sistema, mas também o seu desempenho. Em aplicações práticas, o desempenho trata principalmente das características de tempo de assentamento e máxima ultrapassagem percentual da resposta temporal do sistema à determinada entrada, de modo que a garantia de desempenho é fundamental. Para o caso em que o atraso varia no tempo, tem-se situações ainda mais atípicas, como o fenômeno em que o sistema instável com atraso constante pode ser estabilizado se implementado um atraso variável. Tal variação, que pode ser produto de incertezas, erros de modelagem ou até mesmo variações propositalmente em algum parâmetro do sistema (como tempo de amostragem, (FRIDMAN, 2014), ou a velocidade de rotação de uma máquina, (MICHIELS *et al.*, 2005)).

Diante de aspectos interessantes do ponto de vista prático e também teórico, neste trabalho pretende-se um retorno ao ponto inicial do estudo de sistemas com atraso de modo a abordar, no domínio do tempo contínuo, o comportamento de tais sistemas do ponto de vista matemático. A ideia é que uma compreensão teórica e intuitiva possa suscitar o interesse pelo entendimento matemático mais aprofundado no tema, de modo a fazer que futuros projetos de análise e síntese de sistemas de controle com atraso sejam cada vez mais genéricos e satisfatórios. Portanto, no presente trabalho pretende-se que os sistemas com atraso sejam compreendidos de maneira generalizada por meio de exemplos simples e didáticos, sem a pretensão de abordar o assunto de maneira completa ou demasiado formal.

Dentre os conceitos apresentados, acredita-se que o entendimento de como deve ser definido o espaço de estados de um sistema com atraso e a motivação para que este possua dimensão infinita, seja a parte precípua do trabalho. Ainda, uma conexão com a área de sistemas dinâmicos é realizada de modo a deixar referências bastante úteis para o leitor mais interessado.

A área de sistemas dinâmicos, a qual gera contribuições fundamentais às áreas de engenharia, biologia, dentre outras, tem sido estudada com cada vez mais empenho no Brasil (rendendo, inclusive, o mais prestigioso prêmio internacional em matemática a um brasileiro em 2014) mostra-se uma poderosa ferramenta matemática às aplicações da indústria, da economia e da pesquisa teórica. No presente trabalho, ferramentas como número de rotação e equivalência topológica são brevemente mencionadas, pois estão relacionadas a transformação de sistemas com atraso variável em sistemas com atraso constante. O estudo de sistemas com atraso, variável ou não tem se tornado cada vez mais relevante, de modo que ferramentas computacionais como o MATLAB tem disponibilizado pacotes específicos a esse tipo de aplicação, (MATHWORKS, 2022).

Este trabalho ainda responde ao questionamento de, para dado controlador proporcional-integral e uma planta de primeira ordem, qual é o pior cenário em termos de estabilidade: o atraso constante ou o atraso do tipo dente de serra, (BRAGA, 2021). Este questionamento é relevante na medida em que o atraso na forma de dente de serra é uma maneira de como modelar um sistema amostrado, de modo que tal técnica permita a avaliação rápida da estabilidade de um sistema a depender do período de amostragem. Essa análise é feita no tempo contínuo, de modo que não há perda de informação acerca do comportamento do sistema entre os tempos de amostragem, (FRIDMAN, 2014).

1.2 Revisão bibliográfica

O início do estudo de sistemas com atraso remonta a problemas não relacionados à teoria de controle, mas ainda assim em um ramo próximo: a física. O caso é que as equações com atraso fazem parte de um panorama mais geral de equações com argumentos desviados. Em Botelho *et al.* (2015) é apresentado um fato histórico relevante ao estudo dessa teoria:

Dentre os vários problemas que passaram a ser tratados matematicamente após o advento do Cálculo, um dos mais célebres foi o problema da corda vibrante. Chamemos de $u(x, t)$ o deslocamento vertical em relação à posição de repouso sofrido pelo ponto de abscissa x no instante t [...]. Em 1747 o eminente matemático francês Jean-le-Rond d'Alembert concluiu que toda solução u do problema da corda vibrante satisfaz necessariamente a equação diferencial parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ e, além disso, disse que funções do tipo $u(x, t) = f(x+t) + g(x-t)$, onde f e g são funções arbitrárias de uma variável real, são soluções da equação diferencial e portanto são boas candidatas a serem soluções do problema original.

Tal fato histórico é importante ao desenvolvimento das equações funcionais, ramo

que, para o caso particular em que a derivada da função aparece na equação, é denominado de equações diferenciais funcionais. Os matemáticos Leonhard Euler e os irmãos Bernoulli já no século *XVIII* estudaram equações com atraso, (FRIDMAN, 2014), demonstrando a importância do assunto de um ponto de vista mais geral. As equações com atraso fazem parte do caso em que os argumentos são sempre menores ou iguais à variável independente. Isso confere ao modelo matemático uma conexão com a realidade, no sentido de torná-lo causal.

Para sistemas com atraso no tempo, um dos avanços mais importantes no sentido de desenvolver a teoria e as aplicações computacionais, deu-se por meio do trabalho de Cooke (1963), com a publicação do Método dos Intervalos, conhecido também como "*couplets*", (VERRIEST, 2009). Tal método permitiu que equações diferenciais com atraso fossem resolvidas analiticamente de maneira sistemática para intervalos de tempo finitos, de modo que tornou-se possível conhecer quantitativamente como se comportava um sistema com atraso. Mais que isso, o método forneceu uma visão prática sobre o significado de estado em um sistema desse tipo e torna possível que seja mostrada didaticamente a infinitude dos espaços vetoriais dos estados de um sistema com atraso. Conforme Kuznetsov (2004), o estado de um sistema determina unicamente o seu comportamento no futuro, de modo que essa é uma informação fundamental ao entendimento do problema e deve ser bem definida e sistematizada para sistemas com atraso. Em Hale e Lunel (1993), a formalização matemática da teoria de sistemas com atraso com base em análise funcional de espaços vetoriais de dimensão infinita é realizada de maneira bastante detalhada.

Dentre as referências mais importantes para a produção do presente trabalho está a análise de inconsistências de sistemas com atraso variável no tempo proposta em Verriest (2011). O autor argumenta não somente do ponto de vista puramente matemático, mas também em conformidade com a teoria comportamental para sistemas abertos e interconectados proposta por Willems (2007), de acordo com a qual a teoria de sistemas precisa "modelar corretamente o sistema físico", adequando-o à realidade e fazendo quee interconexões de sistemas, no sentido de compartilhamento de variáveis, respeitem as regras e premissas da física. Dentre os pontos mais interessantes apresentados em Verriest (2011) estão a análise de causalidade para sistemas com taxa de variação do atraso maior que a unidade e as equivalências topológicas entre sistemas com atraso variável no tempo e sistemas com atraso constante. É ainda apresentada uma maneira de comprimir os domínios das funções candidatas a estados de um sistema com atraso variável, de modo a obter um sistema sem atraso descrito por equações diferenciais parciais sob condições

iniciais e de contorno.

Ainda na busca de compreender a relação entre a taxa de variação da função atraso e a praticidade do modelo matemático, em Michiels e Verriest (2011) é mostrado que a premissa de que a derivada do atraso ser menor ou igual à unidade não é meramente técnica no sentido de facilitar a obtenção de critérios de estabilidade, mas é uma das condições para que o sistema seja causal. Já o tema da equivalência topológica é tratado de maneira mais aprofundada em Otto *et al.* (2017), no qual é apresentada a dicotomia entre os atrasos conservativo e não conservativo, em que o primeiro diz respeito aos atrasos para os quais há uma equivalência topológica entre o sistema com atraso variável e um sistema com atraso constante. Tal dicotomia depende somente do mapa de acesso, o qual os autores definem como o argumento da função atrasada. Ainda, os autores fazem conexões do assunto com sistemas com atraso de transporte, em que tal equivalência topológica tem sido feita por outros autores em diversas situações de controle com atraso sem que seja mencionado o tema. Isso decorre do fato de a integração da velocidade de transporte de determinada grandeza até o instante atual e partindo do instante atrasado é justamente igual ao valor do atraso constante. Exemplos dessa situação são apresentados em Otto e Radons (2017) e em Muller-Bender (2020), o qual também um caso de análise da dinâmica populacional modelada com atraso variável.

Em um contexto mais prático, o estudo de sistemas com atraso variável no tempo aplica-se ao estudo de estabilidade de Sistemas de Controle via Rede, tradução em português do termo "Networked Control Systems", (SANTOS *et al.*, 2004), nos quais os sinais de controle são transmitidos aos atuadores por meio de uma rede de comunicação que não necessariamente conecta componentes ponta-a-ponta por meio de cabos. As vantagens desse tipo de sistema de controle incluem menor custo, simplicidade de instalação e manutenção, e a possibilidade de controle de atuadores a longa distância, (FRIDMAN, 2014). Em tais sistemas, o atraso de comunicação pode, inclusive, depender dos estados do sistema.

Diante disso, o estudo de estabilidade torna-se um dos temas mais relevantes do ponto de vista das aplicações de teoria de controle. Referências clássicas no assunto para sistemas lineares, tais como Ogata (2011) e Chen (1984), e para controle de sistemas não lineares, como Slotine *et al.* (1991) e Khalil (2015), apresentam as técnicas fundamentais para o entendimento da teoria de estabilidade de Lyapunov, dos conceitos de estabilidade entrada-saída e das aplicações práticas desses conceitos. Para os sistemas com atraso variável, em Louissel (2001) é apresentado um direcionamento da teoria de estabilidade no sentido de compreender

qual é o pior cenário de atraso em termos de estabilidade utilizando funcionais de Lyapunov-Krasovskii e a relação de sistemas com atraso na forma de dente de serra com sistemas de controle amostrados, (FRIDMAN *et al.*, 2004). O termo utilizado para esse atraso, (NASCIMENTO, 2016) e (SARDINHA, 2018), vem do tipo de atraso "*sawtooth delay*", o qual é utilizado na literatura da área para se referir à função com a respectiva forma, (LIU *et al.*,). A ideia de propor regras de sintonia para controladores proporcionais-integrais é bastante estudada em razão de sua aplicação prática na indústria e em Skogestad (2003) é proposta uma regra de sintonia para sistemas com atraso constante. É natural o questionamento de se esse mesmo controlador seria suficiente para estabilizar um sistema com atraso variável e, se fosse o caso, em que condições isso seria garantido. Tal efeito foi analisado em Braga (2021) e em Braga *et al.* (2022). Uma maneira analítica de estabelecer uma condição suficiente de estabilidade nesse contexto é o uso do teorema do pequeno ganho para operadores conectados em malha fechada por realimentação para encontrar uma desigualdade que, se satisfeita, garante a estabilidade robusta do sistema. Isso foi feito em Kao e Lincoln (2004) para sistemas contínuos, discretos e híbridos.

Dentre as características mais interessantes para sistemas com atraso variável no tempo está o fenômeno de mitigação de instabilidade, conhecido na literatura como "*quenching phenomenon*". Esse efeito, conforme apresentado em Papachristodoulou *et al.* (2007) diz respeito à estabilização de um sistema de controle por meio da implementação de um atraso variável no tempo. Para o caso interessante em que o atraso é do tipo dente de serra, esse fenômeno pode ser interpretado da seguinte maneira: um sistema contínuo com atraso constante instável pode ter seu correspondente discreto estável a depender do tempo de discretização escolhido.

1.3 Objetivos

Os objetivos precípuos desse trabalho estão listados abaixo:

- Apresentar os conceitos básicos referentes à construção do espaço de estados de sistemas com atraso constante e atraso variável no tempo;
- Mostrar os principais pontos de inconsistência que podem ocorrer da escolha inadequada de uma função atraso na modelagem de um sistema;
- Descrever como o espaço de estados de um sistema com atraso variável no tempo pode ser formulado em termos de seu equivalente topológico com atraso constante;
- Explicar de maneira didática conceitos relacionados à estabilidade de Lyapunov, estabilidade entrada-saída e aplicar tais conceitos por meio de ferramentas no domínio da

- frequência a sistemas com atraso constante;
- Mostrar as ferramentas matemáticas necessárias à demonstração do Teorema do Pequeno Ganho e utilizá-lo na formulação de um critério de estabilidade para sistemas com atraso variável;
 - Utilizar o resultado para propor controladores do tipo proporcional proporcional-integral para sistemas com atraso variável limitado.

1.4 Contribuições dessa dissertação

As contribuições desse trabalho são:

- Apresentação gráfica didática da infinitude de espaços de estados para sistemas com atraso, bem como suas consequências para análise do sistema;
- Apresentação analítica e gráfica de uma equivalência topológica entre sistemas com atraso constante e variável;
- Análise comparativa de estabilidade para sistemas de controle em malha fechada controlada por controladores do tipo proporcional-integral para sistemas com atraso constante ou variável;
- Desenvolvimento analítico de controlador proporcional-integral que garanta estabilidade para sistemas com atraso variável no tempo.

1.5 Organização do texto

O presente trabalho foi dividido conforme os itens apresentados a seguir:

- O Capítulo 2 apresenta conceitos básicos de sistemas com atraso, como métodos de obtenção de soluções, construção de espaço de estados, inconsistências a depender do atraso variável escolhido na modelagem e equivalentes topológicos na definição de espaços de estados para sistemas com atraso variável.
- O Capítulo 3 resume os conceitos básicos de estabilidade e mostra analiticamente um critério de estabilidade robusta para sistemas com atraso variável a partir do Teorema do Pequeno Ganho.
- O Capítulo 4 traz os principais resultados do trabalho, com análise de estabilidade para sistemas controlados por controladores do tipo proporcional-integral com atraso variável no tempo. É mostrada também uma comparação em termos de estabilidade do máximo atraso

variável para o qual determinado controlador permanece estável em relação a margem de atraso do sistema. Por fim, o capítulo apresenta um desenvolvimento analítico para um controlador proporcional-integral que garanta estabilidade para um sistema com atraso variável.

- O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e algumas propostas de pesquisas futuras interessantes a serem realizadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos de sistemas com atraso. Antes de serem mostradas as ideias aplicadas em teoria de controle, como aquelas referentes a estabilidade, são discutidos temas teóricos, tais como condições de causalidade e construção do espaço de estados de um sistema com atraso. O intuito dessa abordagem é ressaltar o quão os sistemas com atraso possuem comportamento complexo e distinto dos sistemas cujas variáveis somente dependem do instante atual. É apresentada uma visão intuitiva de como variam os estados de sistemas com atraso e também mostrado o conceito de equivalência topológica para transformar um sistema com atraso variável em um sistema com atraso constante.

2.1 Conceitos preliminares

Nesta seção serão brevemente apresentados os conceitos preliminares para a abordagem teórica de sistemas com atraso. São apresentadas as definições de sistemas dinâmicos, de equações diferenciais funcionais e também um exemplo para evidenciar a aplicação dos conceitos apresentados.

2.1.1 Definição formal de sistema dinâmico

Intuitivamente, um sistema dinâmico pode ser entendido como um processo cujas variáveis possuem dependência temporal. Se conhecidas as regras de tal dependência, o sistema possui uma representação matemática que, na maior parte dos problemas em teoria de controle, toma a forma de um sistema de equações diferenciais. Um sistema dinâmico pode ser caracterizado por um conjunto de possíveis estados e uma lei matemática de evolução de tais estados no tempo (KUZNETSOV, 2004). Por estados, entende-se um conjunto de variáveis que, conhecidas para determinado parâmetro independente, determinam unicamente as informações acerca do sistema, (VERRIEST, 2011). Para uma equação diferencial ordinária, por exemplo, um estado pode ser um ponto em um espaço vetorial de dimensão finita, já que ele determina de maneira única a existência de uma solução para a equação em qualquer instante futuro. Com efeito, do Teorema da Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias (CHICONE, 2006), sob determinadas circunstâncias, um valor inicial é suficiente para determinar todos os valores futuros do sistema.

Para trabalhar de maneira sistemática com tais ideias, é importante que sejam defini-

dos os conceitos básicos da teoria de sistemas dinâmicos, os quais estão em consonância com a linguagem utilizada em Verriest (2011) e em Kuznetsov (2004).

Definição 2.1.1 *Um sistema dinâmico é uma tripla ordenada $\Sigma := (\mathbb{T}, \mathbb{X}, \mathbb{E})$ em que \mathbb{T} é o conjunto das variáveis independentes, \mathbb{X} é o conjunto em que estão definidos os estados do sistema e \mathbb{E} é uma família de operadores evolução parametrizados por elementos em \mathbb{T} .*

2.1.2 Equações diferenciais funcionais

Nesta subseção é definido o tipo de equação que será analisada no texto, isto é, a equação diferencial funcional. As definições aqui apresentadas estão de acordo com o que foi mostrado em Kolmanovskii e Nosov (1986).

Por equação funcional entende-se uma equação em que a função a ser determinada aparece com argumentos diferentes entre si. Um exemplo de equação funcional é apresentado em um problema proposto em Venkatachala (2002), que pede a demonstração do fato de que não existem funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescentes tais que $f(2) = 3$ e $f(mn) = f(m)f(n)$, para todos os valores de $m, n \in \mathbb{N}$. Nos casos estudados nesse trabalho, as equações funcionais apresentam-se como problemas em que deseja-se encontrar uma função que satisfaça determinadas propriedades.

De maneira ainda mais específica, o presente trabalho tratará de equações diferenciais funcionais, nas quais a equação funcional é composta por um termo igual à derivada da função a ser determinada. Em particular, as equações serão do tipo *atrasadas*, isto é, os argumentos serão sempre menores ou iguais à variável independente escolhida. Diferente das equações diferenciais ordinárias, que também são comuns em aplicações de física e de engenharia, as equações diferenciais funcionais possuem espaço de estados de dimensão infinita. Esse aspecto torna o problema de sistemas com atraso muito relevante e intrigante do ponto de vista matemático e será melhor discutido na Seção 2.2.4. Um exemplo de sistema com atraso bastante interessante na área da Engenharia Elétrica é apresentado em GriÑÓ *et al.* (2021), conforme a Equação 2.1 do modelo dinâmico de uma "constant power load" em corrente alternada controlada por um controlador proporcional somado a um bias:

$$\dot{P}(t) = \frac{-k_P}{T} \cdot v^2(t) \cdot P(t) + \frac{k_P}{T} \cdot v^2(t) \cdot P(t - T), \quad (2.1)$$

em que $P(t)$ é a potência ativa, k_P é o ganho proporcional, $p(t)$ é a potência instantânea e T é o período da tensão elétrica $v(t)$.

2.1.3 Exemplos

Nesta subseção é apresentado um exemplo simples de sistema dinâmico de modo a focar na discussão da existência e unicidade de soluções para a equação diferencial que o representa, bem como em sua relação com a definição formal previamente apresentada. Ainda, este exemplo serve como uma introdução à discussão sobre a construção do espaço de estados.

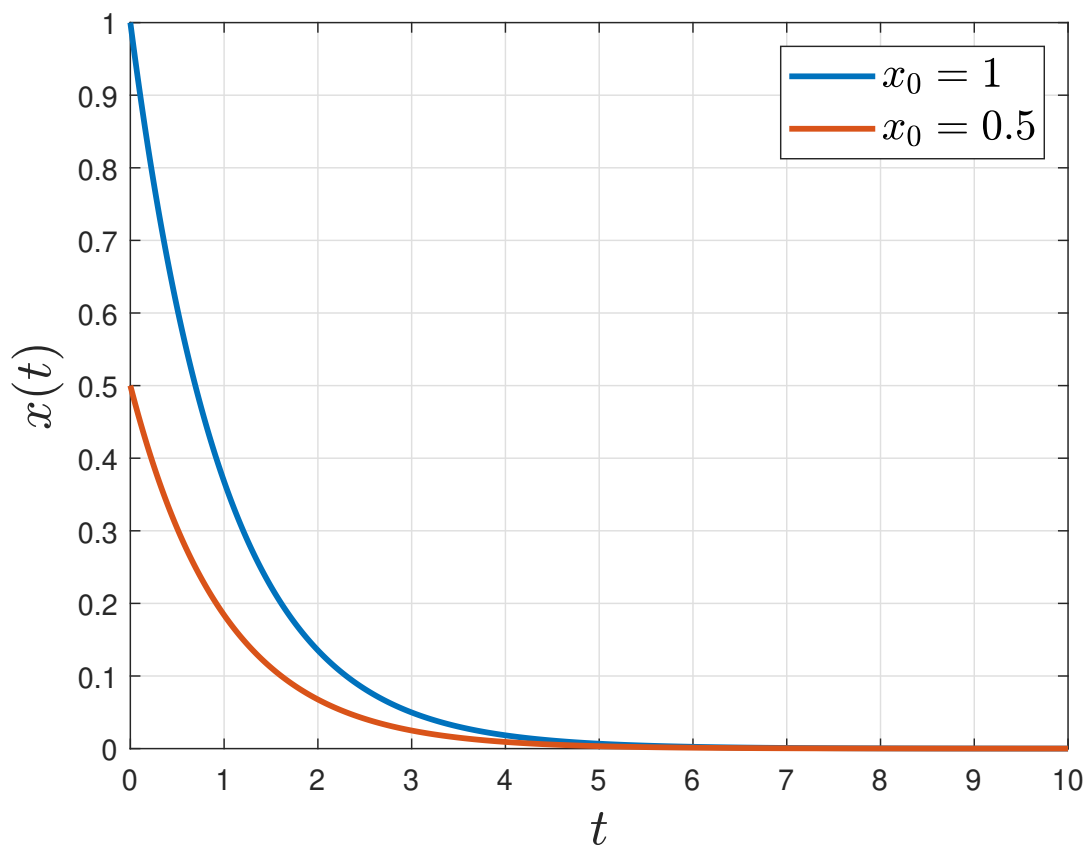
Os sistemas dinâmicos podem assumir formas matemáticas diversas, sendo comum em ramos da matemática aplicada, como teoria de controle e economia, o uso das equações a diferenças finitas, (LIMA; IMPA, 2008), e das equações diferenciais ordinárias. O Exemplo 1 mostra os elementos básicos de um sistema dinâmico para o caso que este é representado por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Por simplicidade, sempre que uma transformação linear $T : E \rightarrow F$ entre espaços vetoriais de dimensão finita E e F for utilizada no texto, esta será denotada por sua representação matricial, isto é, dado $u \in E$, tem-se $T(u) = T \cdot u = Tu \in F$. Tal representação é motivada pela simplicidade que traz às notações, conforme Lima e IMPA (2008).

Exemplo 1 *De acordo com a Definição 2.1.1, a equação diferencial ordinária de primeira ordem: $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, pode ser entendida como um sistema dinâmico em que $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ é o conjunto dos instantes de tempo considerados, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto de possíveis estados assumidos pelo sistema e $\mathbb{E} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é a família de operadores evolução do sistema que, para cada estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e cada instante de tempo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ associa um vetor $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dado por $x(t) = e^{At}x_0$. Por $\mathcal{F}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ entende-se o conjunto das funções de \mathbb{X} valoradas em \mathbb{Y} , enquanto $M_{a,b}(\mathbb{F})$ representa o conjunto das matrizes de a linhas e b colunas com entradas no corpo \mathbb{F} .*

As soluções da equação diferencial apresentada no Exemplo 1 tomam valores em um espaço vetorial de dimensão finita, em particular o \mathbb{R}^n , e podem ser obtidas de forma única a partir do operador evolução aplicado a elementos do mesmo espaço. Do Teorema da Existência e unicidade é sabido que, dada uma condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução do sistema fica unicamente determinada. Isso faz dos pontos com n coordenadas reais um conjunto adequado para representar os estados do sistema. Para o caso em que $n = 1$ e $A = -1$, tem-se na Figura 2

duas soluções para a equação diferencial ordinária apresentada no exemplo anterior. Deve-se ressaltar que as diferentes condições iniciais fazem que as soluções sejam também distintas. Ainda, as soluções não assumem o mesmo valor (o mesmo estado) em nenhum instante de tempo, mesmo que esses valores estejam tão próximos de zero quanto se queira, para um tempo suficientemente grande. Com efeito, se esse fosse o caso, tal instante poderia, sem perda de generalidade, ser considerado o instante inicial, o que contrariaria a unicidade da solução.

Figura 2 – Soluções da equação diferencial ordinária $\dot{x}(t) = -x(t)$ para dois valores iniciais diferentes.



Fonte: elaborada pelo autor.

Para esse caso simples, pode-se verificar também a unicidade da solução para dado vetor inicial x_0 por meio da expressão da solução analítica da equação diferencial. Com efeito, qualquer solução do problema satisfaz $x(t) = e^{-t}x_0$, reforçando a ideia de que cada solução depende diretamente do estado inicial e este determina aquela de maneira única.

2.2 Sistemas com atraso constante

Nesta seção serão definidos os sistemas com atraso constante e discutido o seu comportamento qualitativo do ponto de vista da evolução temporal dos estados. Os sistemas com atraso constante constituem um caso bastante interessante de sistemas de controle. O atraso no argumento de um ou mais termos da equação diferencial funcional causa mudanças significativas no comportamento do sistema, principalmente em termos de estabilidade quando se trata de teoria de controle. Do ponto de vista prático, o atraso pode deteriorar o desempenho de um sistema, causando aumentos nos tempos de assentamento e na ultrapassagem máxima percentual em respostas de sistemas lineares, por exemplo.

Nas subseções que seguem, sempre que mencionado o atraso em um sistema, este será considerado constante.

2.2.1 A infinitude dos espaços de estados de sistemas com atraso

Nesta subseção será apresentado o conceito de espaço de estados para um sistema com atraso constante. A relevância desse tópico se dá não somente por sua significativa diferença com relação às equações diferenciais ordinárias, mas também por sua importância no entendimento do comportamento das soluções de sistemas com atraso. Ocorre que os estados de um sistema com atraso constante não assume valores no \mathbb{R}^n , mas em um espaço de funções.

O Exemplo 2 apresenta um caso em que um valor inicial não mais determina de forma única a solução de uma equação diferencial. Conforme explicado mais adiante, isso não é um contraexemplo da unicidade da solução para dado valor inicial (o que é óbvio dado que o resultado matemático é demonstrado), mas uma inconsistência na escolha do espaço de estados.

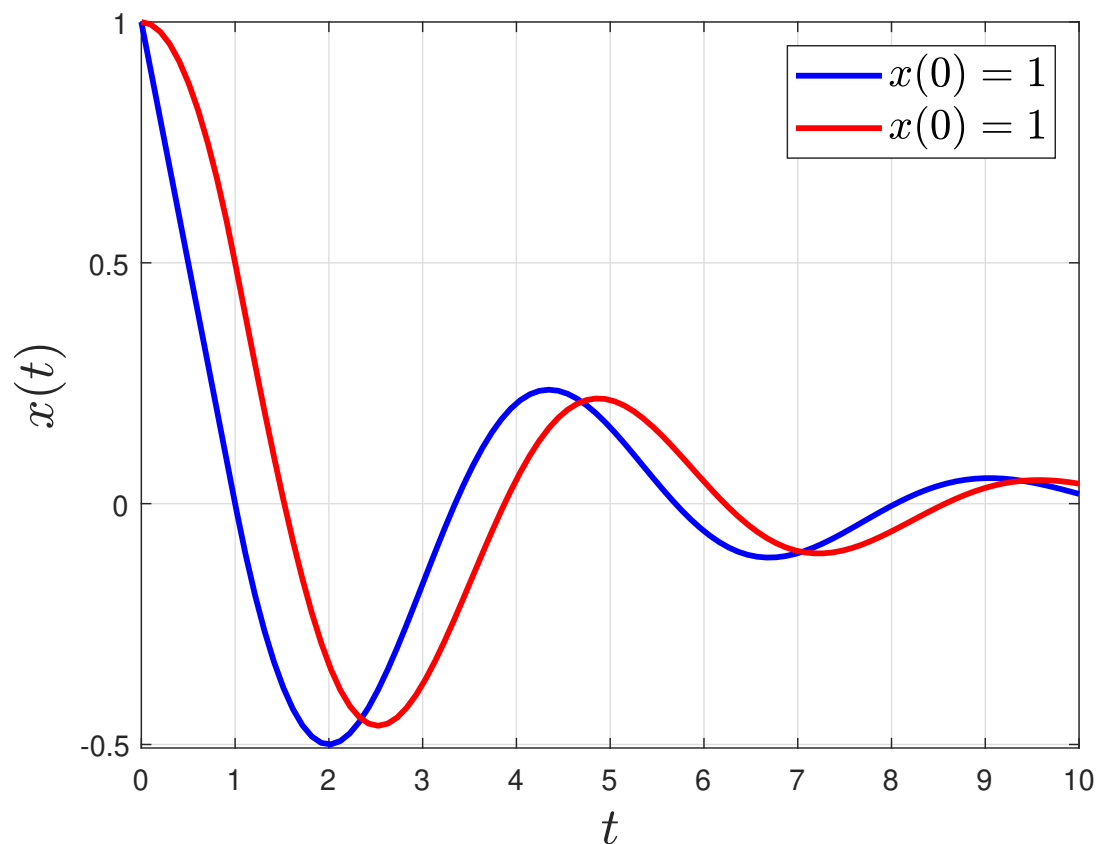
Exemplo 2 A equação diferencial atrasada $\dot{x}(t) = Ax(t-1)$, $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, é, em particular, um exemplo de equação diferencial funcional. Tal expressão matemática é uma representação do sistema dinâmico $\Sigma := (\mathbb{T}, \mathbb{X}, \mathbb{E})$, em que $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ é o tempo no qual estão definidos os estados do sistema, $\mathbb{X} = \mathcal{F}([-1, 0]; \mathbb{R}^n)$ é o espaço de estados adequado para o sistema proposto (cuja explicação é dada após o exemplo) e $\mathbb{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{F}([-1, 0]; \mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$ é o conjunto no qual está a família de operadores que determinam a evolução de um estado após dado tempo.

A definição do espaço de estados apresentada no exemplo acima resolve a inconsistência mencionada anteriormente, mas precisa ainda de maiores explicações para o entendimento

intuitivo do novo espaço vetorial utilizado para essa nova classe de sistemas. Para tanto, será apresentado um exemplo baseado em Fridman (2014), em que um único valor inicial gera soluções distintas. Isso deve demonstrar que o espaço vetorial n -dimensional não é, de fato, adequado para a construção do sistema dinâmico. Considere o caso unidimensional com $A = -1$ e a condição $x(0) = 1$. Tal exemplo, além de simples, serve como uma extensão do Exemplo 1 para o caso com atraso no tempo.

Somente com a definição da condição inicial, seria de se esperar, para equações diferenciais ordinárias, que há uma única solução para o problema, isto é, que os valores futuros estão unicamente definidos pelo valor da solução em $t = 0$. No entanto, a Figura 3 apresenta duas soluções distintas para tal problema. Essa circunstância é reforçada pela legenda da figura mencionada, que indica o mesmo valor inicial para ambas soluções.

Figura 3 – Soluções da equação diferencial funcional $\dot{x}(t) = -x(t-1)$ para o valor inicial $x(0) = 1$, mostrando que somente a informação do valor inicial não garante a unicidade das soluções.

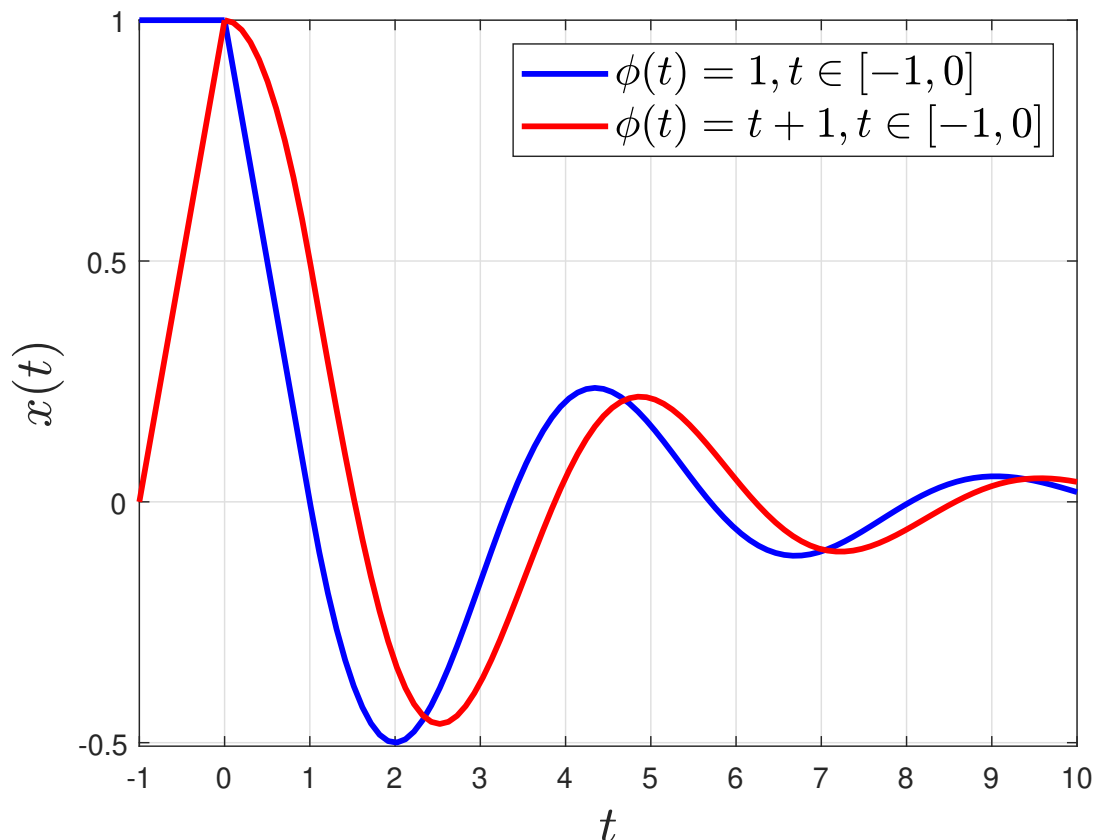


Fonte: elaborada pelo autor.

Esse exemplo mostra, de maneira intuitiva, que o conjunto dos números reais não define adequadamente um espaço de estados para um sistema com atraso, por não ser possível

prever o comportamento futuro do sistema com base no conhecimento de um valor inicial em tal espaço. Em geral, espaços vetoriais de dimensão finita não são apropriados para representar o conjunto de estados de um sistema definido por uma equação diferencial funcional. De fato, o espaço das funções que atribuem um valor real a cada elemento de $[-1, 0]$ é o espaço vetorial adequado para o sistema dinâmico expresso pela equação diferencial com atraso apresentado no Exemplo 2. Neste, as funções iniciais que definem de maneira única as soluções do problema com atraso unitário são $\phi(t) = 1$ e $\phi(t) = t + 1, t \in [-1, 0]$. A Figura 4 mostra o comportamento do sistema antes do instante inicial para um intervalo de tempo unitário (que, não coincidentemente, é igual ao valor do atraso), isto é, as respectivas funções iniciais utilizadas para gerar os gráficos das soluções após o instante $t = 0$.

Figura 4 – Soluções da equação diferencial funcional $\dot{x}(t) = -x(t - 1)$ para as funções iniciais $\phi(t) = 1$ e $\phi(t) = t + 1, t \in [-1, 0]$, exemplificando a unicidade das soluções para funções histórico conhecidas.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 4 mostra uma parte importante do gráfico das soluções da equação diferencial com atraso do Exemplo 2. O histórico da solução antes do tempo inicial determina como o sistema se comportará no futuro. Com esse fato, o leitor deve ser capaz de intuir que é coerente

imaginar a função histórico do sistema como uma candidata à estado, isto é, para cada função histórico, há somente um comportamento futuro possível.

2.2.2 Solução conceitual

Nesta subseção será apresentada a ideia básica para resolver uma equação diferencial com atraso, utilizada tanto para se compreender o efeito do atraso na necessidade de informações passadas do sistema quanto para obter informações quantitativas sobre o sistema por meio de métodos numéricos.

Alguns problemas com atraso podem ser resolvidos analiticamente para um intervalo limitado de tempo. A resolução de exemplos simples por meio de métodos analíticos fornece também ideias intuitivas bastante interessantes com relação ao comportamento das soluções das equações diferenciais funcionais. Isso aplica-se inclusive para sistemas em que o atraso varia no tempo, conforme será apresentado na Seção 2.3.

É interessante observar que, diante da dependência da derivada da solução com relação a um valor passado dessa mesma função, diferentes funções iniciais de fato gerarão diferentes soluções. Tais funções iniciais assumem o mesmo valor inicial em $t = 0$ para o exemplo dado, mas essa informação instantânea e pontual não é suficiente para determinar os valores da função para $t > 0$, de modo que não a define unicamente, conforme ilustrado no exemplo anterior. O "*Method of Steps*" (Método dos Passos), proposto por Cooke (1963) e apresentado didaticamente em Fridman (2014), é, não somente um método computacional para encontrar as soluções do problema, mas também uma maneira de apresentar conceitualmente do que se trata a solução de uma equação diferencial funcional simples. Nesse trabalho, tal método será chamado de Método dos Intervalos, também chamado de "*Time Division into Couplets*", termo este utilizado por Verriest (2009).

O Método dos Intervalos se baseia no fato de que uma equação diferencial funcional pode ser representada como uma família de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais a serem determinadas e definidas em intervalos com comprimento igual ao atraso. No Exemplo 3 é apresentada a aplicação do Método dos Intervalos para a equação diferencial funcional $\dot{x}(t) = -0.5x(t-2)$, definida para $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, com $x(t) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3 Resolver a equação diferencial funcional $\dot{x}(t) = -0.5x(t-2)$ para $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ passa por compreender o seguinte problema: se a função solução dessa equação somente está definida para valores não negativos de tempo, faz sentido calcular a derivada da função em zero com

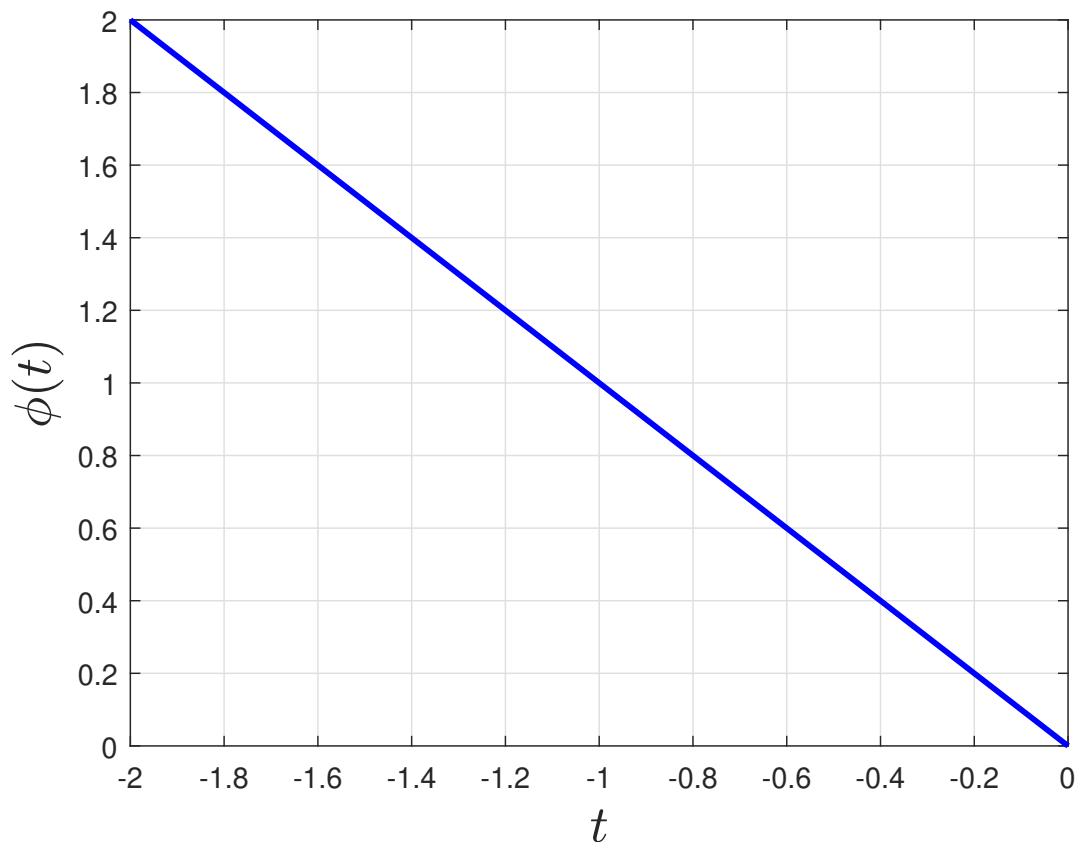
base na equação dada? Tal pergunta é, de fato, pertinente, dado que, em $t = 0$, ter-se-ia $\dot{x}(0) = -0.5x(-2)$, o que é incoerente, visto que $x(-2)$ não é conhecido e muito menos definido para a função solução $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$. Esse argumento mostra que o problema não fica bem definido se apenas a equação diferencial funcional, o domínio e o contradomínio da função solução são dados. Diferentemente das equações diferenciais ordinárias, sabe-se também que adicionar a informação de um valor inicial também não é suficiente para garantir a unicidade da solução. Dessa maneira, deve-se inicialmente assumir o valor da derivada da função solução em $t = 0$ é conhecida. Tal necessidade estende-se também para quaisquer valores de tempo maiores que zero e menores que o atraso, pois tais valores do parâmetro independente tornariam negativo o argumento da função no segundo membro da equação diferencial. Portanto, para que um problema envolvendo a equação diferencial funcional esteja devidamente proposto, são necessários os valores das derivadas da função solução para todos os instantes de tempo entre 0 e 2. Para tal, pode-se definir a função histórico, ou função inicial, como: $\phi : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = \dot{x}(t+2)$ para todo $t \in [-2, 0]$ ou, de outra maneira, $\dot{x}(t) = \phi(t-2)$ para $t \in [0, 2]$. A título de exemplo, para valores de t entre -2 e 0, será definido que $\phi(t) = -t$, isto é, a derivada da solução do sistema entre o instante inicial $t = 0$ e o instante coincidente com o valor do atraso $t = 2$ é dado por uma função linear de coeficiente angular -1. A Figura 5 apresenta o gráfico da função histórico utilizada neste exemplo. Tal ilustração é apresentada com intuito de construir paulatinamente a solução completa da equação diferencial funcional para qualquer instante de tempo maior que zero, o que passa pelo uso da função inicial apresentada.

Com essa definição, o problema de resolver a equação diferencial com atraso fica bem definido pelo sistema de Equações 2.2, o qual é composto por uma equação diferencial funcional cuja condição inicial não mais é um único valor real, como no Exemplo 1, mas uma função histórico definida sobre um intervalo de comprimento igual ao atraso.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.5x(t-2), & \text{se } t \in [2, +\infty]; \\ \dot{x}(t) = -0.5\phi(t-2), & \text{se } t \in [0, 2]; \\ \phi(t) = -t, & \text{se } t \in [-2, 0]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Neste ponto é importante ressaltar que ambos os intervalos de t nos quais estão escritas as equações para a derivada da solução está o ponto $t = 2$. Isso estabelece uma condição de continuidade da derivada no ponto $t = 0$ sem que, no entanto, essa seja uma condição necessária à resolução do problema. Com efeito, a função histórico $\phi(t) = -t$ foi

Figura 5 – Função inicial, ou função histórico, $\phi(t) = -t$ escolhida a título de exemplo para a resolução da equação diferencial funcional apresentada no Exemplo 2.



Fonte: elaborada pelo autor.

escolhida propositalmente para que tal continuidade fosse garantida, de modo a manter o gráfico da função suave em todo instante de tempo mostrado. Ressalta-se que isso não é uma necessidade e que diferentes funções iniciais poderiam ter sido utilizadas sem prejuízo algum ao método, com a única diferença de que o intervalo para o qual a derivada da solução depende de ϕ seria dado por $[0, 2)$ e ϕ somente precisaria estar definida no intervalo $[-2, 0)$.

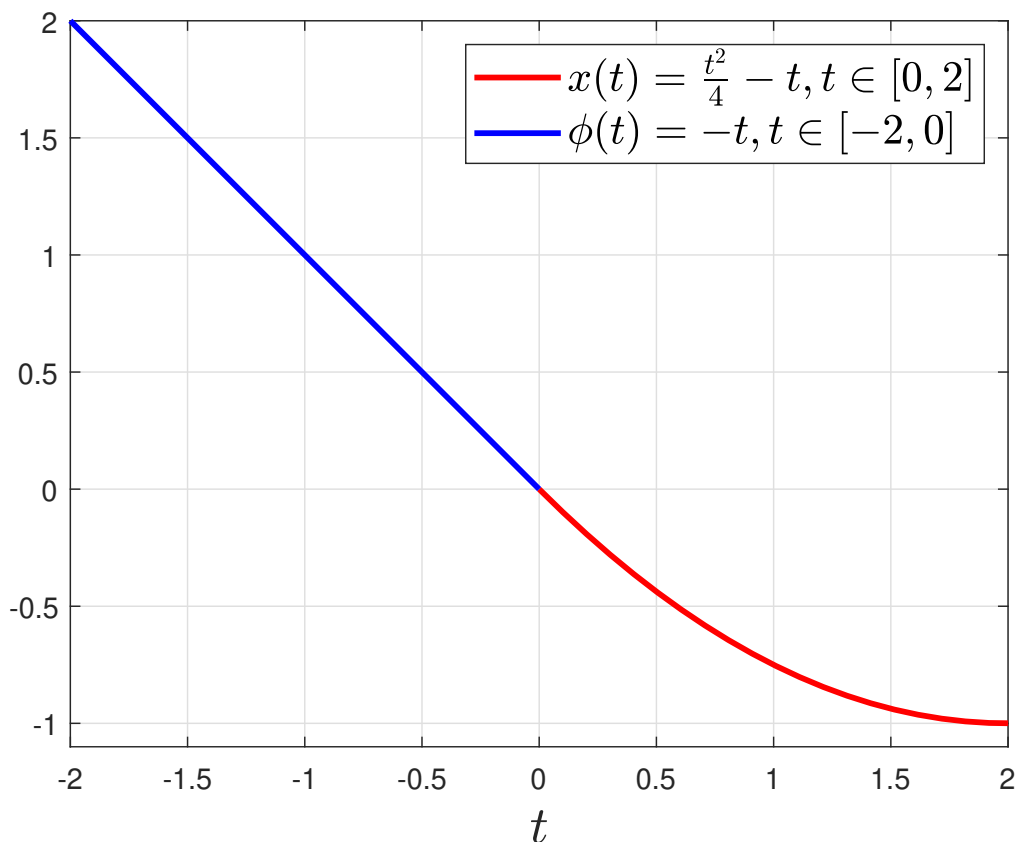
Isso reforça a ideia de que, em um sistema com atraso, além da equação diferencial, é necessário fornecer uma condição inicial para um intervalo com o comprimento desse atraso. Munida dessa condição, a equação diferencial pode ser reescrita como $\dot{x}(t) = -0.5\phi(t - 2) = 0.5(t - 2) = 0.5t - 1$, para $t \in [0, 2]$, com o intuito de iniciar a resolução analítica do problema, isto é, descobrir a função $x(\cdot)$ para instantes de tempo quaisquer maiores que zero. É interessante observar que, sob essas circunstâncias, a equação trata-se de uma equação diferencial ordinária, faltando somente o valor inicial desta para que uma solução única seja obtida. Tal valor inicial é o valor de $x(0)$, que pode ser calculado por meio da suposição natural de que a função definida por partes pela função histórico e pela solução da Equação 2.2 será contínua e, portanto,

contínua para $t = 0$. Nesse caso, deve-se ter $x(0) = \phi(0) = 0$, em que foi usada somente a definição da função $\phi(\cdot)$ no instante de tempo $t = 0$ para a realização do cálculo. Portanto, as soluções da Equação 2.2 no intervalo $[0, 2]$ são as mesmas soluções do problema de valor inicial apresentado na Equação 2.3.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.5\phi(t-2) = 0.5t - 1, \text{ para } t \in [0, 2]; \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Como 2.3 trata-se de um problema de valor inicial bastante simples, não será apresentado aqui o detalhamento de sua solução, mas somente o resultado que é a função $x(t) = \frac{t^2}{4} - t$, para $t \in [0, 2]$. Dessa maneira, a Figura 5 pode ser "completada" para instantes de tempo entre 0 e 2, conforme apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Função definida por partes que, para $t \in [-2, 0]$, vale $\phi(t)$ e, para $t \in [0, 2]$, vale $x(t)$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Destaca-se na Figura 6 a separação das funções definidas em cada intervalo (valores não positivos e valores não negativos de tempo). Em vermelho, a solução da equação diferencial

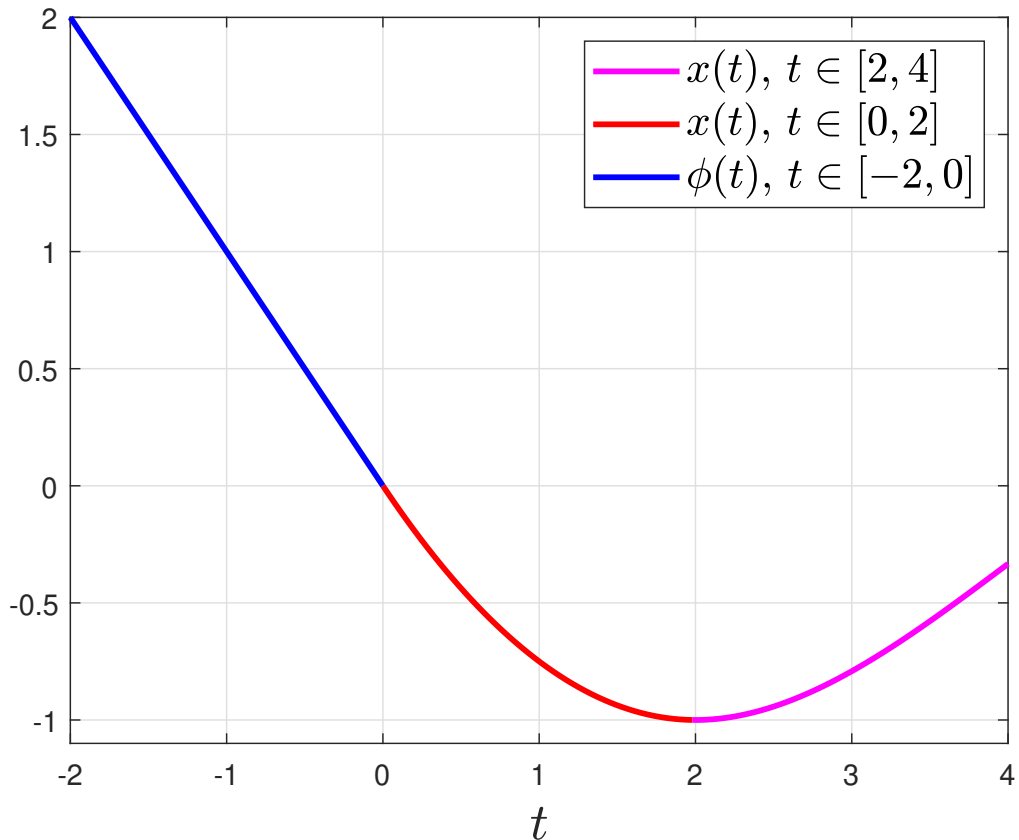
funcional é representada por uma função polinomial. Em azul, a função histórico, já conhecida, é plotada novamente, de modo que é possível verificar a continuidade requisitada na definição do problema de valor inicial. O leitor atento nesse momento deve imaginar que a solução da equação diferencial funcional para tempos maiores que 2 seja obtida de maneira similar, por obtenções sucessivas de problemas de valor inicial para intervalos de tempo de comprimento 2. Com efeito, tal metodologia justifica o nome da técnica computacional desenvolvida por Cooke (1963), isto é, o Método dos "Steps". Para o exemplo analisado, o próximo passo seria resolver a equação diferencial ordinária dada por $\dot{x}(t) = -0.5x(t-2) = -0.5 \left[\frac{(t-2)^2}{4} - (t-2) \right]$, para $t \in [2, 4]$. Observe que, nesse caso, não há indefinição alguma no segundo membro da equação, tendo em vista que para o intervalo de tempo mencionado, a função $x(\cdot)$ está completamente definida. Mais que isso, a função é conhecida e é dada por um polinômio de segundo grau em t . Nesse caso, o valor inicial é dado por $x(2)_{t \in [2, 4]} = x(2)_{t \in [0, 2]} = \left[\frac{t^2}{4} - t \right]_{t=2} = -1$, baseada na condição de continuidade da solução da equação diferencial funcional. Portanto, a Equação 2.2 possui a mesma solução, no intervalo de tempo $t \in [2, 4]$, do problema de valor inicial definido pela Equação 2.4.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.5x(t-2) = -0.5 \left[\frac{(t-2)^2}{4} - (t-2) \right], \text{ para } t \in [2, 4]; \\ x(2) = -1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Novamente, tratando-se de uma equação diferencial ordinária na qual a variável independente aparece como termo de um polinômio, a solução para o problema pode ser obtida facilmente por meio de operações básicas de integração, estas não sendo, portanto, apresentadas aqui. A solução é dada pela função $x(t) = -0.5 \left[\frac{(t-2)^3}{12} - \frac{(t-2)^2}{2} \right]$, para $t \in [2, 4]$. A Figura 7 apresenta o gráfico da solução da equação diferencial funcional para instantes de tempo em $[2, 4]$, incluída a função histórico para tempos negativos e a solução encontrada anteriormente para $t \in [0, 2]$.

A fim de ressaltar a diferença entre as funções encontradas para cada intervalo de tempo, utilizou-se a cor magenta para a solução da função no último intervalo estudado, conforme legenda da Figura 7. A repetição do método apresentado para os intervalos seguintes fornece a solução da Equação 2.2 em qualquer instante de tempo $t \geq 0$. A Figura 8 mostra o gráfico da função solução até o instante $t = 35$, bem como da função histórico para o sistema com atraso estudado. Tal gráfico ilustra também a estabilidade da solução encontrada, o

Figura 7 – Função definida por partes que, para $t \in [-2, 0]$, vale $\phi(t)$ e, para $t \in [0, 4]$, vale $x(t)$.



Fonte: elaborada pelo autor.

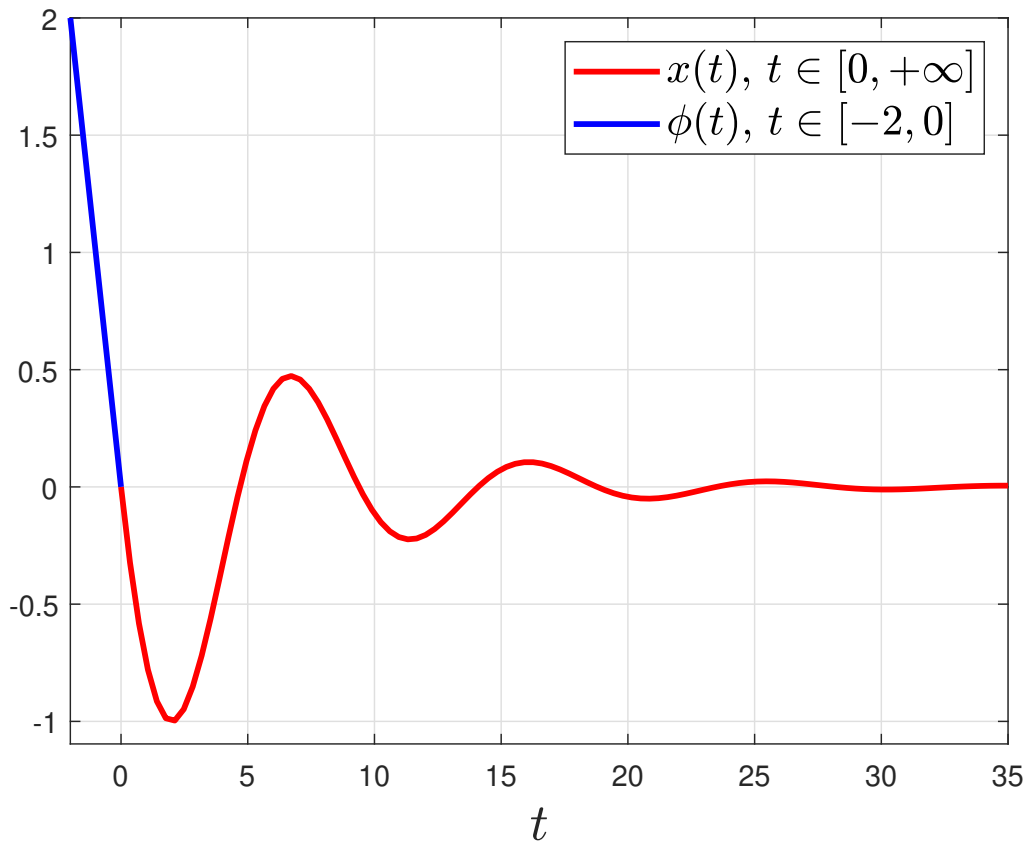
que pode ser confirmado por meio da análise do sistema no domínio da frequência, conforme apresentado em Dorf e Bishop (2010).

2.2.3 Solução analítica

Nesta subseção é apresentada brevemente a técnica de como pode ser obtida uma solução analítica para uma equação diferencial com atraso. A simplicidade aparente do problema alinhada à complexidade da solução analítica dá uma ideia sobre como sistemas com atraso podem gerar problemas desafiadores dos pontos de vista prático e teórico.

Apesar de sua complexidade, é possível tratar da solução analítica para alguns tipos de equação diferencial com atraso. Embora esse não seja o foco do trabalho, a solução analítica de uma equação desse tipo passa por técnicas que são utilizadas na resolução de equações transcendentais. Estas, em contraste com as equações algébricas, possuem funções transcendentais em sua formulação, as quais não podem ser escritas como uma fração de polinômios, (TOWNSEND, 1915). Equações desse tipo tornarão a aparecer quando analisados sistemas

Figura 8 – Função definida por partes que, para $t \in [-2, 0]$, vale $\phi(t)$ e, para $t \in [0, +\infty]$, vale $x(t)$.



Fonte: elaborada pelo autor.

cujos atrasos variam no tempo. Com o intuito de desenvolver uma solução analítica para a equação diferencial com atraso, em Maignan e Scott (2016), por exemplo, é suposta a "ansatz" - termo em alemão para "abordagem" e entendido nesse texto como "solução particular" - dada por $x(t) = e^{\lambda \cdot t}$. Substituindo essa função na equação diferencial, tem-se:

$$\dot{x}(t) = a x(t-h) \implies \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} = a \cdot e^{\lambda \cdot (t-h)} = a \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot e^{-\lambda \cdot h} \implies \lambda = a \cdot e^{-\lambda \cdot h},$$

isto é, o problema pode ser reformulado de modo que o torna-se encontrar as soluções da Equação 2.5.

$$\lambda = a \cdot e^{-\lambda \cdot h}. \tag{2.5}$$

A solução desse problema é dada por $\lambda = \frac{1}{h} \cdot \mathbf{W}(ah)$, em que \mathbf{W} denota a Função de Lambert, (MAIGNAN; SCOTT, 2016).

2.2.4 Os estados de um sistema com atraso

Do que foi exposto na subsecção anterior, a obtenção da solução de uma equação diferencial funcional em determinado intervalo de tempo depende do conhecimento de uma função, seja ela uma função histórico ou parte da solução, em um intervalo com comprimento igual ao valor do atraso. A fim de melhor compreender como pode ser representado um estado de um sistema desse tipo, nessa subsecção será apresentado um exemplo semelhante ao que foi mostrado anteriormente, mas utilizando um valor genérico de atraso. Nesse caso, o objetivo não será a obtenção da solução da equação em determinado intervalo, mas apresentar ao leitor a forma do estado que, conforme argumentado anteriormente, não pode ter dimensão finita.

Exemplo 4 Considere a equação diferencial funcional $\dot{x}(t) = ax(t - h)$, cuja solução toma valores reais, isto é, $x(t) \in \mathbb{R}$. Novamente, para o caso em que $h = 0$, um valor inicial $x(0)$ seria suficiente para definir uma solução única para o problema. Caso contrário, tem-se $h > 0$ (não faz sentido falar de $h < 0$ nessa situação, pois isso faria a dinâmica do sistema depender de valores futuros de $x(\cdot)$, o que viola a premissa de causalidade). A equação diferencial funcional é um problema bem definido se for dada nos seguintes termos do sistema de Equações 2.6.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t - h), \text{ se } t \in [h, +\infty); \\ \dot{x}(t) = a\phi(t - h), \text{ se } t \in [0, h]; \\ \phi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.6)$$

em que $\phi(\cdot)$ é uma função histórico, isto é, de condições iniciais para o sistema. Do que foi visto anteriormente, o conhecimento do valor $x(t)$ da solução para qualquer instante $t \in [nh, (n+1)h]$, em que $n \in \mathbb{N}$, depende do conhecimento da função $x(t + \theta)$ para qualquer instante $t + \theta \in [(n-1)h, nh]$, isto é, $t \in [nh, (n+1)h]$ e $\theta \in [-h, 0]$. Isso pode ser verificado facilmente para alguns casos iniciais. Para $n = 1$, por exemplo, o valor $x(t)$ da solução para qualquer instante de tempo $t \in [h, 2h]$ depende dos valores de $x(t + \theta)$, em que $t \in [h, 2h]$ e $\theta \in [-h, 0]$, ou seja, depende dos valores da função para os instantes $t + \theta \in [0, h]$. Denotando por x_h a função $x_h : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x_h(\theta) = x(h + \theta)$, conclui-se que x_h é a solução da equação diferencial funcional no intervalo $[0, h]$. Além disso, pode-se afirmar que o conhecimento de x_h determina completamente a solução da equação no intervalo $[h, 2h]$, com base no Método dos Intervalos. Da definição anterior, no entanto, a solução nesse intervalo $[h, 2h]$ pode ser escrita como x_{2h} ,

isto é, a solução do sistema para $t \in [h, 2h]$ é dada por $x_{2h}(\theta) = x(2h + \theta)$, com $\theta \in [-h, 0]$. Se o Método dos Intervalos for aplicado sucessivamente, o conhecimento de x_h permite determinar unicamente o comportamento futuro da solução da equação diferencial para qualquer instante de tempo maior que h . Tal unicidade vem do fato de que, para cada intervalo de comprimento h , a solução é definida por um problema de valor inicial, isto é, uma equação diferencial ordinária com uma condição inicial pontual no tempo. Tal característica faz das funções x_{ph} , com $p \in \mathbb{N}$, candidatas à estados do sistema. De maneira geral, para cada instante de tempo $t \in [h, +\infty]$, define-se a função $x_t : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$. Observa-se que não faria sentido, nesse momento, definir a função x_t para valores de t menores que h , pois isso requisitaria valores da solução da equação para instantes de tempo negativos, o que não está definido. Uma solução para isso será apresentada na Equação 2.7, por meio do uso da função histórico. Pode-se reescrever o sistema de Equações 2.6 em termos das funções x_t , conforme mostrado no sistema de Equações 2.7.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \cdot x_t(-h), \text{ para } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}; \\ x_0(\theta) = \phi(\theta), \end{cases} \quad (2.7)$$

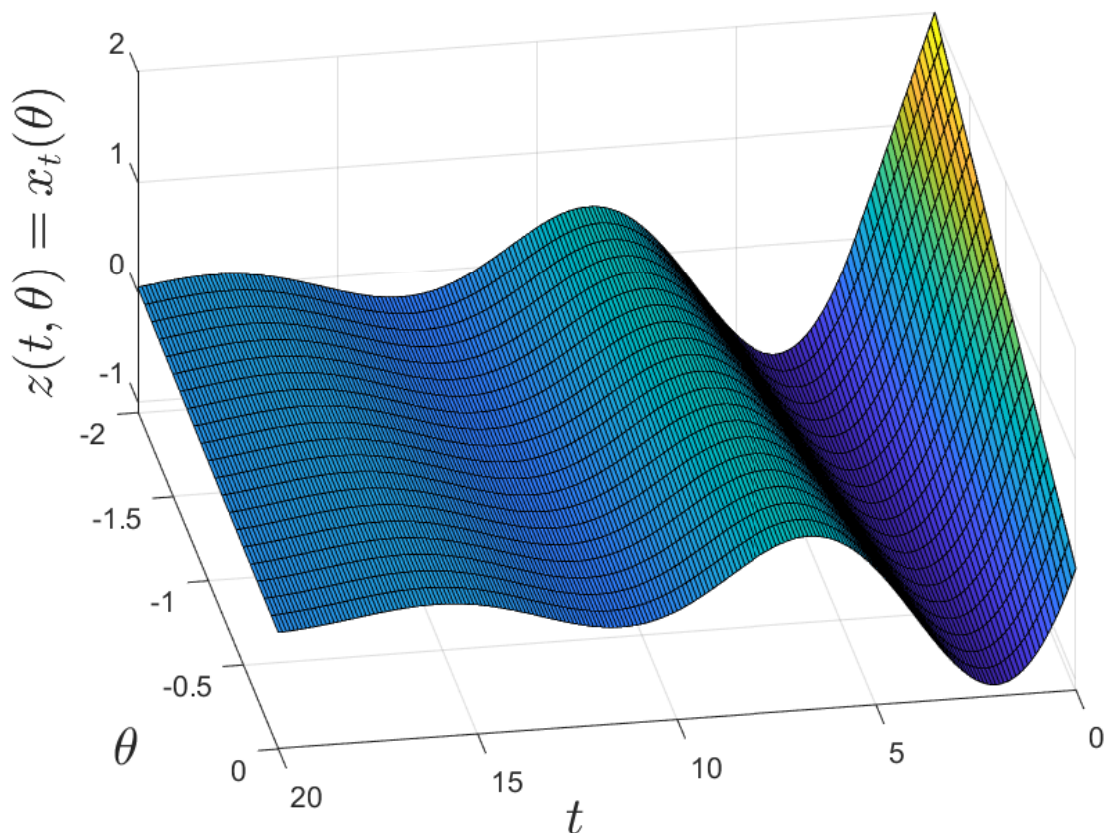
em que $\theta \in [-h, 0]$ e $\phi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ é a função histórico. A notação mostrada no sistema de Equações 2.7 é bastante interessante porque expressa o problema em função das funções x_t . Observa-se que o conhecimento de x_0 , que é uma função de $[-h, 0]$ em \mathbb{R} dada por $x_0(\theta) = \phi(\theta)$, determina x_t para qualquer instante $t > 0$. Diante disso, deve ficar evidente para o leitor que o conjunto dado por todas as funções x_t , $t \geq 0$, de fato é uma órbita para o sistema e o conjunto das funções em $\mathcal{F}([-h, 0]; \mathbb{R})$ é o espaço de estados adequado para a equação diferencial funcional utilizada neste exemplo. Como esse espaço possui dimensão infinita, isto é, não pode ser gerado por um conjunto finito linearmente independente de seus elementos, tem-se que o sistema com atraso possui dimensão infinita.

2.2.5 Formulação via equações diferenciais parciais

Nesta subseção será apresentada uma abordagem do problema de sistemas com atraso constante utilizando equações diferenciais parciais. Tal formulação é interessante do ponto de vista teórico e prático, pois permite observar que um modelo com atraso constante pode ser convertido em um outro modelo matemático desprovido de atraso, mas não necessariamente mais simples.

A introdução de uma segunda variável $\theta \in [-h, 0]$ à formulação do problema apresentado no exemplo anterior torna natural a criação de uma nova função que possua duas variáveis: t e θ . Seja $z : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $z(t, \theta) = x_t(\theta) = x(t + \theta)$. Observa-se que para cada instante $t \geq 0$, $z(t, \cdot)$ corresponde ao estado do sistema no instante t . Como no caso estudado a função $z(\cdot, \cdot)$ toma valores reais, pode-se interpretar tal função geometricamente da seguinte maneira: para cada ponto (t, θ) da região $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [-h, 0] \subset \mathbb{R}^2$ do plano $t \times \theta$, a "altura" $z(t, \theta)$ corresponde ao valor do estado x_t do sistema no instante θ . O gráfico de z pode ser visualizado na Figura 9, na qual é possível observar a evolução do estado x_t para a equação diferencial funcional apresentada no Exemplo 3. Comparando as Figuras 8 e 9, verifica-se que, no plano definido por $\theta = 0$, a superfície determinada por $z(t, \theta) = z(t, 0)$ tem o mesmo formato da parte em vermelho da curva apresentada na figura apresentada anteriormente. Isso é coerente com a definição da função z , já que $z(t, 0) = x_t(0) = x(t)$ para valores não negativos de t .

Figura 9 – Evolução dos estados do sistema com atraso constante apresentado no Exemplo 3 para $t \in [0, 20]$.



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir dessa interpretação multivariável, é interessante analisar de que forma os

estados do sistema variam no tempo, isto é, conhecer a derivada da função x_t com relação ao tempo. Isso pode ser verificado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_t}{\partial t} &= \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial t} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{z(t + \delta, \theta) - z(t, \theta)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x(t + \delta + \theta) - x(t + \theta)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x(t + \theta + \delta) - x(t + \theta)}{\delta} \\ \implies \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial t} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{z(t, \theta + \delta) - z(t, \theta)}{\delta} \implies \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Verifica-se que taxa de variação do estado do sistema no tempo é igual à taxa de variação do estado do sistema com relação à variável θ , isto é, ao parâmetro que retorna, para cada estado, o valor da solução em determinado tempo específico. Tal característica configura o sistema como uma equação diferencial parcial, de modo que justifica-se a busca por uma condição de contorno e por uma condição inicial que deixem bem definida a nova formulação do problema.

A condição de contorno para o problema pode ser obtida a partir da própria equação diferencial com atraso, isto é:

$$\dot{x}(t) = a \cdot x_t(-h) \implies \frac{\partial z(t, 0)}{\partial \theta} = a \cdot z(t, -h).$$

Já a condição inicial pode ser obtida a partir da definição da função histórico para o problema da equação diferencial funcional:

$$x_0(\theta) = \phi(\theta) \implies z(0, \theta) = \phi(\theta).$$

Portanto, o problema de resolver a equação diferencial funcional em 2.7 pode ser reescrito como um problema de resolver uma equação diferencial parcial dado por 2.8.

$$\begin{cases} \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial z(t, 0)}{\partial \theta} = a \cdot z(t, -h); \\ z(0, \theta) = \phi(\theta), \end{cases} \quad (2.8)$$

em que $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\theta \in [-h, 0]$.

A apresentação intuitiva da infinitude dos espaços vetoriais de sistemas com atraso constante, bem como a sua solução conceitual e sua formulação por meios de equações diferenciais parciais encerra, nesse trabalho, a discussão teórica acerca das equações diferenciais funcionais com atraso constante. Foram tratados aqui apenas casos particulares bastante simples de modo que maiores detalhes acerca da teoria podem ser encontrados em Hale e Lunel (1993).

2.2.6 *Formalização matemática em espaços de Banach para sistemas com atraso*

Nesta subseção é comentada de maneira breve a formalização teórica da teoria de sistemas com atraso em termos de espaços de funções. O conhecimento desse tema mostra-se proveitoso ao desenvolvimento de condições de estabilidade para sistemas com atraso, por exemplo, dado que os espaços de Banach são os objetos matemáticos sobre os quais os estados de um sistema com atraso variam.

De maneira mais formal, existem duas maneiras de representar o espaço de estados de um sistema com atraso constante. A primeira forma, que foi a utilizada nos exemplos 2 e 3, é aquela em que a equação diferencial funcional é definida sobre o espaço de Banach $C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ das funções contínuas de $[-h, 0]$ em \mathbb{R}^n , sendo h o atraso constante e \mathbb{R}^n o espaço onde as soluções tomam valores.

Por espaço de Banach entende-se um espaço vetorial normado que, na métrica induzida pela norma, é um espaço métrico completo, (BOTELHO *et al.*, 2015). A importância desse tipo de conjunto está principalmente na ideia intuitiva de que ele não possui "buracos", dada sua completude. Com efeito, um espaço métrico completo é, por definição, um espaço no qual toda sequência de Cauchy converge para um elemento pertencente ao espaço. Tal propriedade torna bastante interessante a investigação da convergência de sequências, pois o conhecimento de tal propriedade não pressupõe o conhecimento do limite de tal sequência.

Deve-se ressaltar que a norma que torna $C[-h, 0]$ um espaço de Banach é dada, conforme Fridman (2014), por $\|x_t\|_C = \max\{\|x(t + \theta)\| : \theta \in [-h, 0]\}$, em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Tal norma é também denotada em outros textos como $\|x_t\|_\infty = \|x_t\|_C$. Tal norma é conhecida também como norma do supremo e a existência de um valor máximo para o conjunto mencionado advém da continuidade assumida para o estado do sistema, e que a completude do espaço é garantida pelo fato de que, na norma mencionada, a convergência de uma sequência de funções é uniforme e, portanto, o seu limite é uma função também contínua.

A segunda forma de representar o espaço de estados sobre o qual está definido o

sistema com atraso é por meio de um caso particular de espaço de Banach em que o espaço vetorial é munido de um produto interno e, na norma induzida por este, o espaço métrico é completo. É óbvio que pode-se falar de espaço métrico nesse contexto, dado que uma norma obedece todos os axiomas de uma métrica. O espaço vetorial com as características particulares acima é chamado de espaço de Hilbert e, para o caso estudado nesse trabalho, é dado pelo conjunto $\mathbb{R}^n \times L_2(-h, 0)$. O conjunto $L_p(X, \Sigma, \mu)$, em que a tripla ordenada (X, Σ, μ) é um espaço de medida, é o conjunto de classes de equivalências das funções de $\mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$, isto é, trata-se do conjunto de todas as funções equivalentes àquelas cuja p -ésima raiz da integral do módulo da função elevado à p sobre todo o conjunto X é um valor finito. Intuitivamente, isso é uma maneira de dizer que a função possui "energia" finita. Observe também que fornecer uma função inicial definida no intervalo $[-h, 0]$, como foi a primeira descrição utilizada para o espaço de estados, é bastante similar a fornecer uma função inicial no intervalo $(-h, 0)$ acrescida da informação de um ponto no \mathbb{R}^n .

Para maior entendimento acerca do conjunto \mathbb{E} dos operadores evolução do sistema com atraso, da representação da equação diferencial com atraso como uma equação diferencial ordinária ou uma equação no espaço de Banach, deve-se consultar Fridman (2014). Na referência é possível também verificar uma formulação da equação em termos de espaços de Hilbert.

2.3 Sistemas com atraso variável

Nesta seção será apresentada a ideia de um sistema possuir atraso variável, bem como uma discussão acerca das condições de causalidade de tal sistema e a construção de espaço de estados para esse caso, que é um pouco mais complexo. Essa discussão culmina na equivalência topológica de um sistema com atraso variável em relação a um sistema com atraso constante que, neste caso, possui um espaço de estados melhor definido.

Este capítulo tratará da análise do comportamento de sistemas com atraso variável no tempo. Esse tipo de atraso ocorre em diversos sistemas relacionados à teoria de controle, como máquinas de rotativas de torneamento, (OTTO; RADONS, 2017) e controle de sistemas conectados via redes de comunicação, (FRIDMAN, 2014). O propósito do presente capítulo é mostrar matematicamente o comportamento de um sistema com atraso variável no tempo, nem como discutir possíveis inconsistências e mostrar o espaço de estados de um sistema com atraso variável no tempo.

2.3.1 A taxa de variação do atraso e a consistência do sistema

Nesta subsecção estão apresentados alguns fatos interessantes sobre a taxa de variação do atraso, os quais foram descritos de maneira detalhada em Michiels e Verriest (2011). Nesse trabalho, os autores buscam compreender se a suposição de que a taxa de variação do atraso deva ser menor que 1 é apenas uma premissa necessária à derivação de critérios de estabilidade ou se trata-se de uma questão mais fundamental do ponto de vista da teoria de sistemas. De fato, tal condição não é meramente técnica e algébrica, mas diz respeito sobre a causalidade do sistema. Embora várias inconsistências e condições menos conservadoras sejam tratadas no artigo supracitado, aqui será apresentada somente a análise de causalidade para justificar a premissa de que a derivada da função atraso deve ser menor que 1. Na subsecção subsequente ficará claro que o caso em que a taxa de variação do atraso unitária também não é um problema em termos de consistência para o sistema.

Por simplicidade, considere a equação diferencial funcional com atraso dada pela Equação 2.9.

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t - \tau(t)) \quad (2.9)$$

É claro que, conforme destacado nas seções anteriores, somente a equação não é suficiente para que o problema seja bem definido, isto é, deve-se conhecer os domínios e contradomínios das funções envolvidas, bem como as condições iniciais relacionadas ao sistema. Para a análise realizada nesse trabalho, considerar-se-á $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $\tau : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$. Para garantir a causalidade do sistema, é necessário que a função argumento atrasado, definida como $R(t) = t - \tau(t)$, seja sempre um valor menor ou igual ao tempo atual t , caso contrário a derivada do estado em determinado instante dependeria de valores futuros do estado, o que viola a causalidade assumida para o sistema. Portanto, uma primeira condição sobre a função atraso é dada por: $\tau(t) \geq 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

A análise da taxa de variação do atraso pode ser iniciada pela análise da taxa de variação do argumento atrasado. De fato, $\dot{R}(t) = \frac{dR(t)}{dt} = 1 - \dot{\tau}(t)$ faz que, a partir da condição sobre a taxa de variação do argumento atrasado, seja possível concluir algo sobre a taxa de variação do próprio atraso. Para $\delta > 0$, pode-se escrever a Equação 2.10:

$$\dot{x}(t + \delta) = ax(t + \delta - \tau(t + \delta)). \quad (2.10)$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, pode-se aproximar o termo $\tau(t + \delta)$ pelos dois primeiros termos de sua expansão em série de Taylor em torno de t :

$$\tau(t + \delta) = \tau(t) + \dot{\tau}(t) \cdot \delta. \quad (2.11)$$

Substituindo a aproximação da Equação 2.11 na Equação 2.10, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t + \delta) &= ax(t + \delta - \tau(t) - \dot{\tau}(t) \cdot \delta) \implies \dot{x}(t + \delta) = ax(t - \tau(t) + (1 - \dot{\tau}(t)) \cdot \delta) \\ \implies \dot{x}(t + \delta) &= ax(R(t) + (1 - \dot{\tau}(t)) \cdot \delta). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Admitindo, por contradição, que o sistema causal descrito pela Equação 2.9 seja tal que $\dot{\tau}(t) > 1$, então o termo $(1 - \dot{\tau}(t)) \cdot \delta$ é sempre negativo e a Equação 2.12 pode ser reescrita como:

$$\dot{x}(t + \delta) = ax(R(t) - \varepsilon), \quad (2.13)$$

em que $\varepsilon > 0$. Observe que o primeiro membro dessa equação também pode ser reescrito como os dois primeiros termos de uma série de Taylor centrada em t , conforme mostrado no desenvolvimento a seguir:

$$\dot{x}(t + \delta) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t) \cdot \delta. \quad (2.14)$$

Substituindo a Equação 2.13 na Equação 2.14, tem-se:

$$ax(R(t) - \varepsilon) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t) \cdot \delta \implies ax(R(t) - \varepsilon) = ax(R(t)) + \ddot{x}(t) \cdot \delta,$$

isto é, o valor da solução no instante $\xi = R(t) - \varepsilon$ depende dos valores futuros da solução nos instantes $\xi + \varepsilon$ e $\xi + \tau + \varepsilon$, ambos maiores que ξ . A Equação 2.15 ressalta a característica não causal do sistema caso seja admitida taxa de variação do atraso maior que 1.

$$x(\xi) = x(\xi + \varepsilon) + a^{-1} \cdot \delta \cdot x(\xi + \tau + \varepsilon). \quad (2.15)$$

Estando explicada a inconsistência com respeito à causalidade advinda da taxa de variação da função atraso ser maior que 1, pode-se mencionar ainda outro motivo para que a evolução do atraso tenha taxa menor ou igual à unidade. Assim como no caso em que o atraso era considerado constante, em que o problema era dado pelo sistema de Equações 2.6, considere o seguinte sistemas de Equações 2.16, em que o atraso é uma função temporal.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t - \tau(t)), \text{ se } t \in [t_\tau, +\infty]; \\ \dot{x}(t) = a\phi(t - \tau(t)), \text{ se } t \in [0, t_\tau]; \\ \phi : [-t_{min}, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.16)$$

em que t_{min} é o menor instante de tempo para o qual a função histórico precisa estar definida e t_τ é o tempo no qual o argumento da solução da equação torna-se nulo, isto é, t_τ deve ser a única solução da equação $t - \tau(t) = 0$ para que o sistema fique bem definido. Observe que tal condição exige que a função $R(t) = t - \tau(t)$ somente tenha uma raiz real, isto é, somente cruze o eixo das abscissas uma vez. A condição necessária de que $\dot{\tau}(t) < 1$ garante que $\dot{R}(t) > 0$ e que, portanto, o eixo do tempo somente será cortado pela função $R(t)$ uma única vez. Além disso, como a função argumento atrasado é crescente, faz sentido definir uma função histórico para valores em $[-t_\tau, 0]$ pois, nesse caso, o argumento nunca assumirá valores negativos para $t \in [t_\tau, +\infty]$.

Portanto, convém admitir no restante do trabalho a premissa de que a taxa temporal de variação da função atraso é menor ou igual a 1. Na subseção seguinte será abordado o caso em que a taxa de variação do atraso é unitária.

2.3.2 Taxa de variação unitária do atraso

Nesta subseção admitir-se-á que $\dot{\tau}(t) = 1$. Esse caso está sendo considerado separadamente em razão de tornar a estrutura do problema consideravelmente mais simples, conforme detalhado a seguir.

$$R(t) = t - \tau(t) \implies \dot{R}(t) = 1 - \dot{\tau}(t) = 1 - 1 = 0,$$

isto é, para uma taxa de variação temporal unitária da função atraso, a taxa de variação do argumento atrasado é identicamente nula e, portanto, o argumento atrasado deve ser uma função constante, seja ela $R(t) = t_0$. Com isso, a equação diferencial funcional analisada toma a forma:

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau(t)) = ax(R(t)) = ax(t_0) = ax_0,$$

que é uma equação diferencial ordinária bastante simples. Casos mais complexos em que a derivada da função atraso é unitária ocorrem em sistemas de controle em redes de comunicação, (VERRIEST, 2011).

2.3.3 Construção do espaço de estados

Nesta subseção será apresentado o problema de definir-se um espaço de estados para um sistema com atraso variável, o que tem como base o fato de que o espaço de estados do sistema precisa ser estacionário. Para mostrar intuitivamente como fica definido o espaço de estados de um sistema com atraso variável no tempo, será escolhido um problema descrito pela seguinte equação diferencial funcional:

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau(t)), \quad (2.17)$$

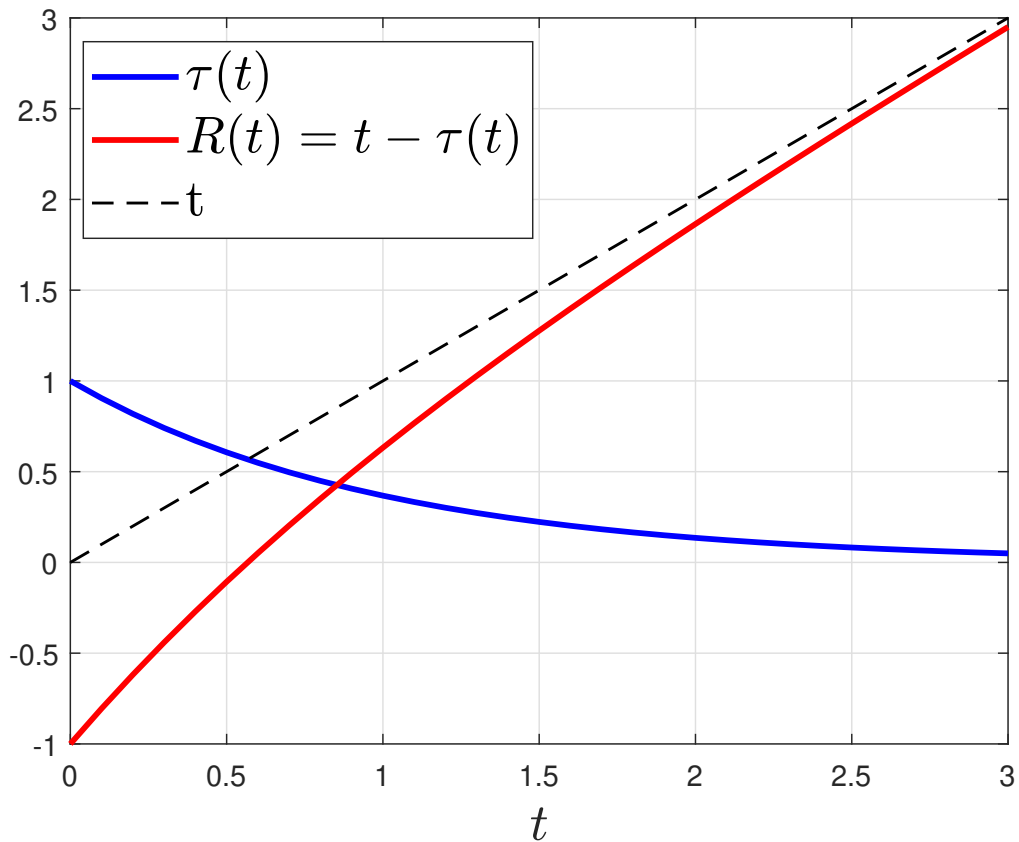
em que $\tau(t) = e^{-t}$, para instantes de tempo $t \geq 0$. Observe que a função escolhida para o atraso de fato obedece às condições necessárias à causalidade, pois $\tau(t) = e^{-t} > 0$, e $\dot{\tau}(t) = -e^{-t} < 0 \implies \dot{\tau}(t) < 1$ para qualquer valor de $t \in \mathbb{R}$. A Figura 10 apresenta graficamente o comportamento comparado da função atraso, do argumento atrasado da solução e do tempo atual, sem atraso.

Conforme esperado pelo comportamento assintótico da função exponencial utilizada como atraso, à medida que o tempo aumenta, a função argumento atrasado aproxima-se do instante atual t , haja vista que a função atraso aproxima-se de zero. Isso pode ser verificado graficamente por meio da tendência assintótica da curva em vermelho com relação à reta tracejada na Figura 10.

O primeiro passo para que fique bem definido o problema da equação diferencial com atraso variável é compreender em que instante de tempo a solução do sistema possui argumento nulo, a fim de que valores negativos não ocorram no argumento da solução $x(\cdot)$ da equação. Portanto, deve-se determinar a solução da Equação 2.18.

$$t - e^{-t} = 0 \implies t = e^{-t}. \quad (2.18)$$

Figura 10 – Comparação da função atraso $\tau(t)$ com a função argumento atrasado $R(t) = t - \tau(t)$ e o tempo atual, dado somente por t .



Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme mostrado anteriormente, uma equação desse tipo pode ser solucionada analiticamente, de modo que a solução t_τ é dada por $t_\tau = \mathbf{W}(1)$, (MAIGNAN; SCOTT, 2016), em que \mathbf{W} é a Função de Lambert. Para calcular tal valor, utilizou-se a função "*lambertw*" do software *MATLAB*:

$$\mathbf{W}(1) = \text{lambertw}(1) = 0.5671.$$

O resultado aproximado é suficiente para ter-se uma ideia do instante de tempo em que o argumento da função é zero. Isso pode ser verificado também por meio do gráfico mostrado na Figura 10, em que o instante de tempo procurado é exatamente aquele em que a reta de tracejada em preto cruza a curva exponencial em azul.

Para finalizar a definição do problema, deve-se definir o domínio da função inicial. Observa-se que, diferentemente do caso em que o atraso é constante, o domínio da função inicial não é dado por $[-t_\tau, 0]$, isto é, não possui o mesmo comprimento do primeiro intervalo em

que está definida a solução do problema. Com efeito, isso se deve ao fato de que a derivada da solução no instante inicial $t = 0$ precisa estar definida em função de ϕ (veja o sistema de Equações 2.16), isto é:

$$\dot{x}(t) = -\phi(0 - \tau(0)) = -\phi(-e^{-0}) = -\phi(-1).$$

Novamente, sob a premissa de que o argumento atrasado é uma função crescente, definir a função ϕ para instantes a partir de $R(0) = -1$ é suficiente para que $\dot{x}(\cdot)$ fique bem definida a partir de zero. O limite superior do intervalo no qual ϕ está definida é dado por 0. Com efeito, no instante $t = t_\tau$, a partir do qual a evolução do sistema deixa de depender do histórico, tem-se $t - \tau(t) = 0$.

A título de exemplo, será escolhida para a função histórico $\phi(t) = t$. Mais uma vez, tal escolha não é arbitrária. Escolheu-se essa função histórico para que o gráfico da solução unido ao gráfico da função histórico formasse uma função de derivada contínua. Tal requisito é também um exercício de compreensão acerca do comportamento do sistema com atraso, o que pode ser visto pelo processo de obtenção da função inicial. O primeiro critério exige que a derivada da função histórico em $t = 0$ seja igual à derivada da solução nesse instante. Além disso, utiliza-se a expressão da derivada da solução no intervalo $[0, \mathbf{W}(1)]$ para a obtenção de uma condição envolvendo somente a função histórico.

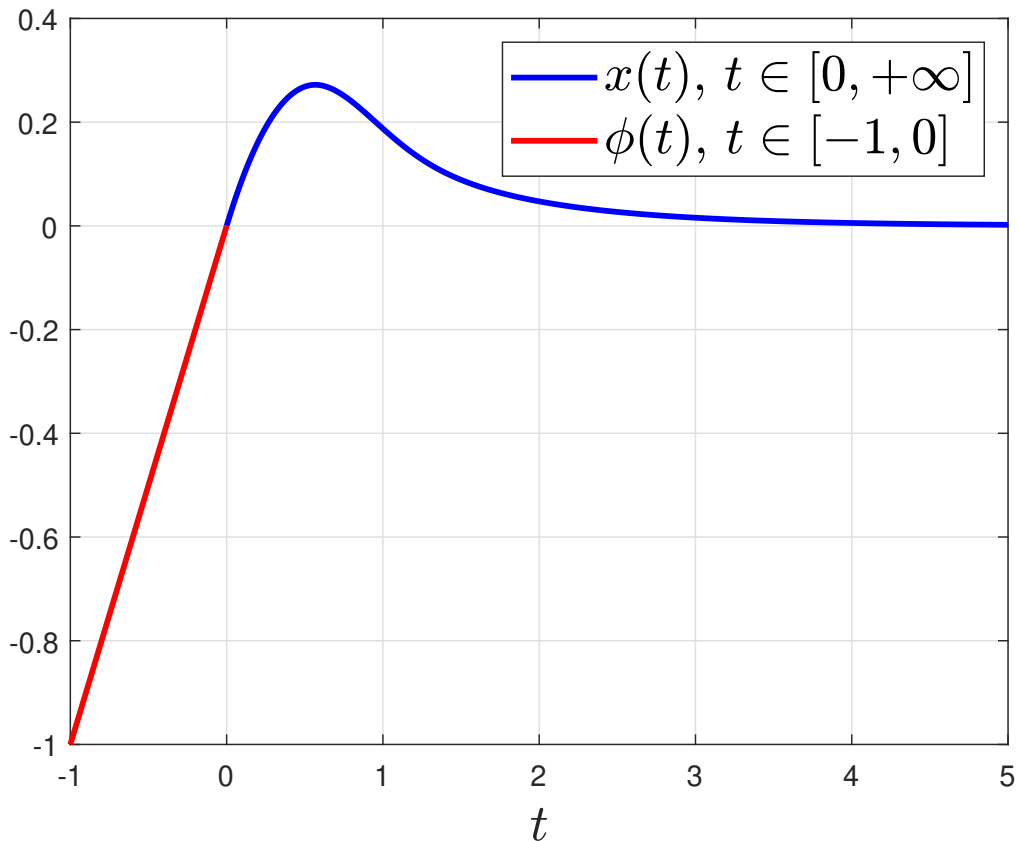
$$\dot{x}(0) = \dot{\phi}(0) \implies -\phi(0 - e^{-0}) = \dot{\phi}(0) \implies \dot{\phi}(0) = -\phi(-1).$$

Não é difícil checar que a função $\phi(t) = t$ satisfaz tal condição, de modo que essa será a função histórico usada nesse exemplo. Como exercício, pode-se verificar a condição de suavidade da função no tempo zero para o caso em que o atraso é constante e que a função definida para esse caso de fato satisfaz tal condição. Portanto, a equação diferencial funcional do exemplo mostrado fica bem pelo sistema de Equações 2.19.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x_t(-e^{-t}), \text{ para } t \in [0, +\infty]; \\ x_0(\theta) = \phi(\theta), \text{ para } \theta \in [-1, 0]; \\ \phi(t) = t, t \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (2.19)$$

Embora não tenha sido definido o intervalo de tempo t no qual a derivada da solução não dependa de ϕ , isso pode ser calculado conforme mostrado anteriormente. Pode-se visualizar a solução do problema graficamente por meio da Figura 11, na qual foram destacadas nas cores vermelha e azul as funções histórico e solução, respectivamente.

Figura 11 – Solução da equação diferencial funcional definida em 2.19.



Fonte: elaborada pelo autor.

Sobre a solução desse sistema, há dois fatos interessantes que podem ser ressaltados. O primeiro deles, diz respeito ao comportamento assintótico da função atraso escolhida. Sem o devido rigor, pode-se dizer que ao aproximar-se de zero, essa função faz que o sistema com atraso tenha seu comportamento com $t \rightarrow +\infty$ aproximado pela equação diferencial ordinária dada por $\dot{x}(t) = -x(t - \tau(+\infty)) = \dot{x}(t) = -x(t - 0) \implies \dot{x}(t) = -x(t)$. Isso significa que, para valores suficientemente grandes de tempo, a função toma valores similares aos tomados pela função $x(t) = C \cdot e^{-t}$, para algum $C \in \mathbb{R}$.

O segundo fato que vale a pena ser mencionado é a "contração" do intervalo de tempo que define a função histórico em relação ao primeiro intervalo de tempo que define a solução do sistema. Isso pode ser entendido da seguinte forma: para que se conheça a solução da equação

diferencial funcional em cada instante de tempo $t \in [0, \mathbf{W}(1)]$ é necessário o conhecimento da função histórico em um intervalo maior que esse, isto é, para $t \in [-1, 0]$. Essa situação é interessante porque, diferente do caso em que o atraso é constante, os diferentes passos a serem aplicados na solução do caso em que o atraso é variável não geram funções com o mesmo domínio. É nesse ponto que aparece uma primeira dificuldade na definição do espaço de estados do sistema com atraso variável no tempo: o estado não pode ser definido como $x_t : [-\tau(t), 0] \rightarrow \mathbb{R}$ com $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, como seria de se esperar, porque, se esse fosse o caso, o espaço de estados não seria estacionário, o que deixa o problema demasiado complexo. Com efeito, o espaço de estados definido pelo conjunto dos supostos estados conforme definido anteriormente seria dado por $\mathcal{F}([-\tau(t), 0]; \mathbb{R})$, o que é um espaço de funções que varia no tempo. Tal problema é detalhado em Verriest (2011) e a solução é bastante interessante, estando conectada à próxima seção desse trabalho. Antes disso, no entanto, há alguns resultados de simulação relacionados ao exemplo que auxiliam na compreensão do problema.

O primeiro desses resultados diz respeito aos intervalos nos quais estão definidas as funções $x_t : [-\tau(t), 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$. É interessante entender como esses intervalos variam para mostrar como evolui a função x_t no tempo. O primeiro intervalo, conforme mostrado anteriormente, é dado por $[0, \mathbf{W}(1)]$. O limite superior de tal intervalo foi obtido por meio da solução da equação $R(t) = t - e^{-t} = 0$, dado que para valores de tempo menores que o encontrado, deve-se utilizar a função histórico. A obtenção do segundo intervalo, seja ele $[t_1, t_2]$ pode ser feita com o seguinte raciocínio: As derivadas da solução no segundo intervalo devem ficar completamente definidas com base nos valores da solução no primeiro intervalo. Matematicamente, isso significa que $\dot{x}(t) = -x(R(t))$ deve ser tal que, para $t \in [t_1, t_2]$, a função atraso deve estar no primeiro intervalo, isto é, em $[0, t_1]$. O limite inferior desse intervalo está bem definido pela condição de causalidade do problema, em que $\tau(t) < t \implies t - \tau(t) > 0 \implies R(t) > 0$. Já o limite superior desse intervalo leva à seguinte condição: $R(t) \leq t_1 \implies t - e^{-t} \leq t_1$. O intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é, portanto, tal que t_2 soluciona a equação $t - e^{-t} = t_1$, pois do comportamento crescente de $R(t)$, para qualquer instante em $[t_1, t_2]$, te-se-á $R(t) \in [0, t_1]$. De maneira geral, pode-se seguir esse mesmo raciocínio para encontrar sucessivamente os demais intervalos de definição da função x_t . Forma-se, com isso, uma sequência crescente $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cujo $(k + 1)$ -ésimo termo depende do antecessor da seguinte maneira:

$$t_{k+1} - e^{-t_{k+1}} = t_k, \tag{2.20}$$

isto é, para encontrar o limite superior do intervalo seguinte, é necessário resolver uma equação transcendente que depende do limite superior de um intervalo já conhecido. De Maignan e Scott (2016), sabe-se que a solução da Equação 2.20 é dada por:

$$t_{k+1} = t_k + \mathbf{W}(e^{-t_k}). \quad (2.21)$$

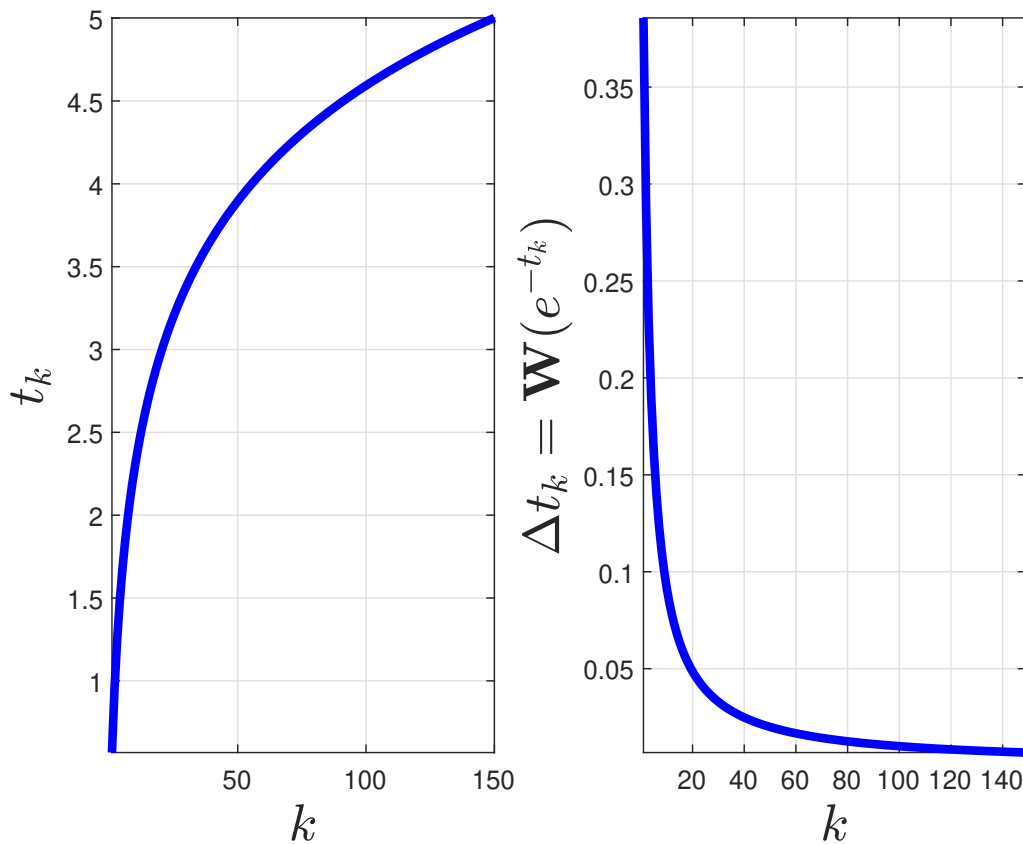
A partir dessa recorrência, pode-se calcular numericamente o valor de todos os intervalos de tempo em que a equação diferencial funcional com atraso pode ser representada como uma equação diferencial ordinária, de acordo com o que foi apresentado no Método dos Intervalos. Os valores obtidos da sequência foram plotados graficamente no primeiro gráfico, à esquerda, da Figura 12 para instantes de tempo no intervalo $[t_1, 5]$, com $t_1 = \mathbf{W}(1)$. Embora o gráfico apresente uma curva contínua, t_k somente toma valores para números naturais, de modo que a impressão de continuidade ocorre somente pelo fato de muitas amostras terem sido plotadas na mesma figura. Nesse ponto, deve-se ressaltar que a quantidade de intervalos em somente 5 unidades de tempo de simulação é bastante alta (150). Além disso, verifica-se que, conforme esperado, a sequência é crescente. No entanto, é visível o comportamento da taxa de variação dessa sequência, que torna-se cada vez menor com o passar do tempo. Isso faz que os intervalos tornem-se cada vez mais "apertados" e, quando o tempo tender a infinito, é de se esperar que o intervalo degenerado tenha como significado uma condição inicial pontual para a obtenção de um valor futuro. Tal fato está em consonância com o que foi analisado anteriormente acerca do comportamento assintótico da equação diferencial funcional, a qual torna-se similar a uma equação diferencial ordinária para tempos suficientemente altos. A taxa de variação da sequência pode ser calculada por meio da expressão $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$. O segundo gráfico da Figura 12, à direita, mostra tal variação, a qual de fato toma valores cada vez menores com o passar do tempo.

É fácil ver que o comprimento do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ é dado por $\tau(t_{k+1}) = e^{-t_{k+1}}$, o que demonstra que o comportamento de Δt_k é de fato exponencial e tende a zero conforme $k \rightarrow +\infty$.

Os intervalos encontrados podem ser também visualizados em conjunto com o próprio gráfico da solução da equação. A Figura 13 apresenta linhas verticais na cor preta separando cada um dos intervalos mencionados. A posição de cada reta vertical corresponde a um instante t_k de modo que a diferença $t_{k+1} - t_k$ vale $\tau(t_{k+1})$.

Assim como feito para o caso em que o atraso era considerado constante, pode-se reformular a função $x_t(\cdot)$ como uma função $z(\cdot, \cdot)$ de duas variáveis t e θ . A partir dessa

Figura 12 – Evolução da sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dos instantes finais dos intervalos nos quais estão definidas as funções x_t .



Fonte: elaborada pelo autor.

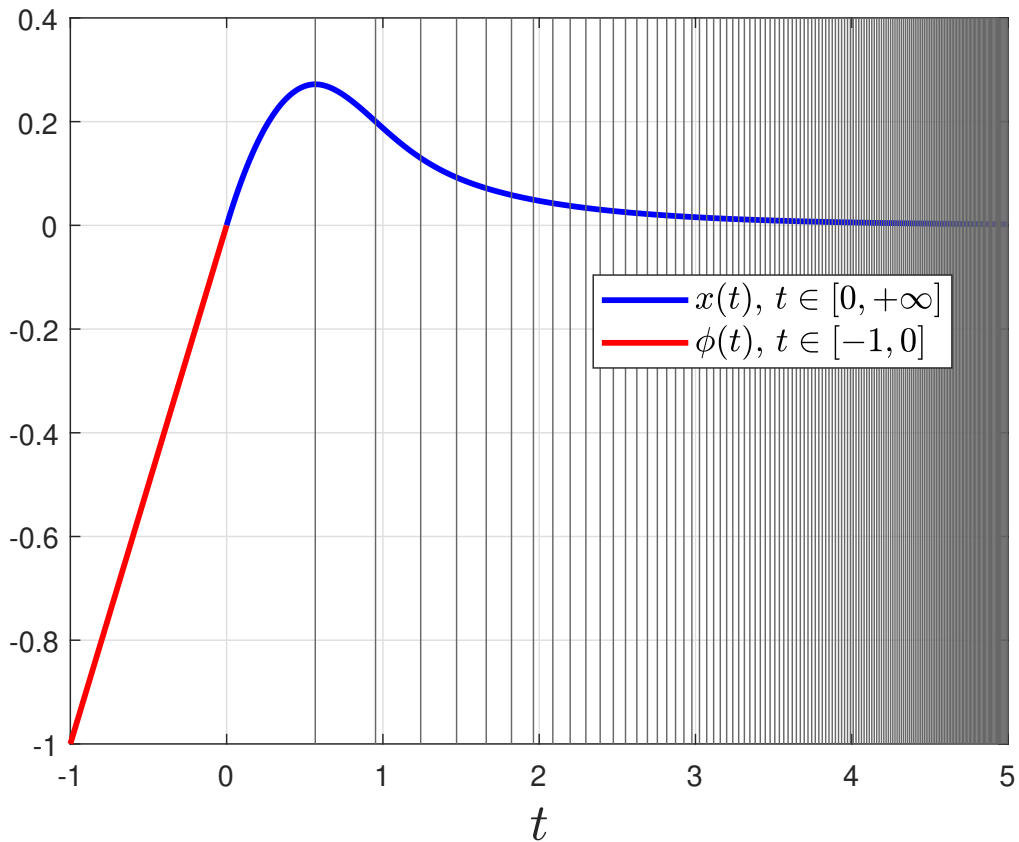
reformulação, pode-se visualizar a evolução de x_t no decorrer do tempo, conforme mostrado na Figura 14. Além dessa evolução, mostrada como uma superfície no espaço tridimensional, são apresentadas também as funções da solução da equação diferencial funcional para $t \geq 0$, em na cor preta, e a função histórico que corresponde a $x_0 = \phi$ para $\theta \in [-1, 0]$, na cor vermelha.

As equações para a nova formulação multivariável desse problema são dadas pelo Sistema de equações 2.32.

$$\begin{cases} \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial z(t, 0)}{\partial \theta} = -z(t, -e^{-t}); \\ z(0, \theta) = \phi(\theta), \end{cases} \quad (2.22)$$

em que a primeira equação, válida para $t \in [0, +\infty]$ e $\theta \in [-\tau(t), 0]$, é uma equação diferencial parcial com condição de contorno dada pela segunda equação e condição inicial dada por $\phi(\cdot)$. A principal diferença gráfica com relação ao caso e que o atraso era constante é o fato de que

Figura 13 – Divisão do gráfico da solução da equação diferencial funcional para os intervalos em que x_t pode ser representada pela mesma solução de determinada equação diferencial ordinária.

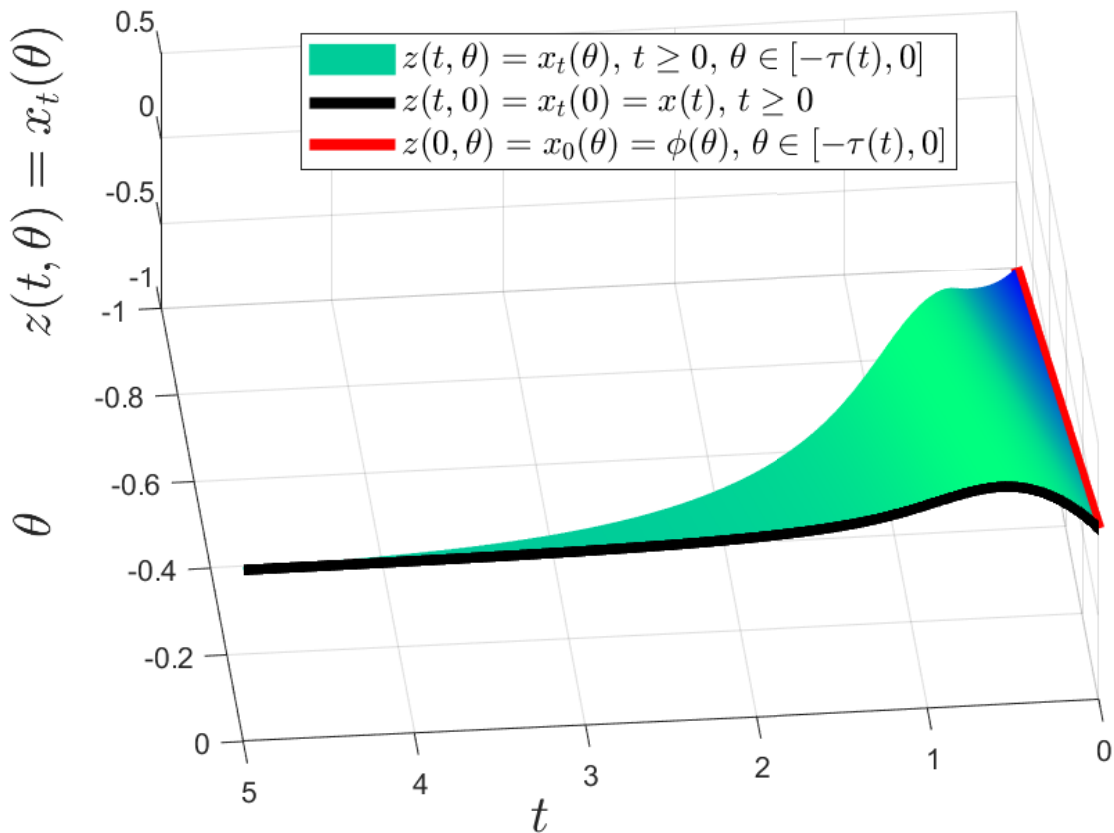


Fonte: elaborada pelo autor.

o domínio sobre o qual está definida a função $z(t, \theta)$ não mais possui largura h constante, mas possui largura igual a $\tau(t)$ que, para o exemplo dado, aproxima-se de zero com o decorrer do tempo. Novamente, cabe ressaltar que para valores de tempo suficientemente altos, a largura $\tau(t)$ sobre a qual está definido x_t para determinado instante t torna-se tão pequena que o domínio de x_t passa a ser um intervalo degenerado, isto é, um ponto. Percebe-se que, nesse caso, o gráfico $t \times x_t$ toma a forma de um gráfico de uma função de uma só dimensão, de modo que o estado do sistema passa a não mais ser uma função, mas um valor em determinado instante de tempo. Tal interpretação é intuitiva e somente fornece uma interpretação interessante do comportamento assintótico do sistema.

Embora nesta subseção tenha ficado mais evidente o comportamento do sistema, ainda não é possível estabelecer um conjunto estacionário que defina os estados para qualquer instante de tempo. A ideia intuitiva para solucionar esse problema é a seguinte: o gráfico apresentado na Figura 14 não representa bem uma órbita (evolução temporal dos estados) em razão de sua "largura" no eixo θ ser variável - em particular, decrescente; dessa maneira,

Figura 14 – Evolução da função x_t com o decorrer do tempo.



Fonte: elaborada pelo autor.

"esticar"(ou contrair, se for o caso) a "largura" da superfície de modo a torná-la bem definida para quaisquer valores de θ em determinado intervalo constante com relação ao tempo garante o resultado esperado.

2.3.4 Equivalência topológica

Nesta subseção será apresentada uma ideia alternativa à definição de espaço de estados para um sistema com atraso variável no tempo. Recorrer-se-á à ideia de equivalência topológica para que o espaço de estados do sistema com atraso variável fique bem definido pelo espaço de estados de seu equivalente com atraso constante.

As ideias intuitivas mencionadas na subseção anterior possuem formalização matemática e utilizam ferramentas de áreas como Sistemas Dinâmicos e Topologia. Nesse trabalho, serão apresentados somente exemplos particulares e ideias intuitivas básicas, mas o leitor interessado poderá encontrar informações bastante interessantes sobre o tema em Palis e Melo (1978), no qual são apresentados os principais conceitos da teoria de sistemas dinâmicos, possuindo

um apêndice bastante útil sobre transformações no círculo. Ainda na área de Sistemas Dinâmicos, recomenda-se a leitura de Katok e Hasselblatt (1995), em especial o Capítulo 2, Seção 3, em que trata-se de Conjugados Topológicos. Para compreender os conceitos introdutórios de transformações no círculo e teoria da rotação, recomenda-se Kuehn (2022).

A ideia inicial de realizar uma deformação na superfície gerada pela evolução do sistema com atraso variável ocorre em diversos artigos relacionados a controle de sistemas dinâmicos. Conforme será apresentado mais adiante, essa transformação - ou equivalência topológica - ocorre na modelagem de sistemas com atraso de transporte em que há um processo com velocidade variável sobre uma distância constante, (MULLER-BENDER, 2020). De maneira geral, um sistema dinâmico com atraso variável no tempo pode ser representado pela Equação 2.23. Aqui desconsidera-se alguns casos, como equações diferenciais neutrais, em a derivada da solução é uma função de suas derivadas atrasadas.

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), x(R(t))), \quad (2.23)$$

em que $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}$, $R(t) = t - \tau(t)$ é a função argumento atrasado e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não necessariamente é linear. A representação da derivada mudou em razão da mudança de variável a ser realizada em breve, o que demandará conhecimento da variável sobre a qual se está derivando. Conforme explicado, deseja-se deformar a superfície gerada pela evolução temporal da função $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ de modo que sua "largura" seja constante para qualquer valor de tempo. Isso pode ser feito por uma mudança de variável com o intuito de transformar o sistema com atraso variável em um sistema com atraso constante, (VERRIEST, 2011). Tal mudança de variável é, em verdade, somente um caso particular de uma conjugação topológica, de modo que essa é a transformação que leva o espaço deformado (com atraso constante), no espaço original (com atraso variável).

Para que tal sistema seja equivalente ao primeiro por meio de uma mudança de variável, deve haver um homeomorfismo $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi = \Phi(t)$. Por homeomorfismo entende-se uma função bijetiva contínua cuja inversa é contínua, (HUBBARD; WEST, 2013). Tal definição possui um sentido intuitivo bastante coerente, pois significa que não haverá "rupturas" entre o domínio e o contradomínio sujeitos à transformação, e é exatamente esse tipo de transformação que deseja-se para deformar a superfície definida pela evolução de x_t para o sistema com atraso variável. Realizando a mudança de variável descrita, isto é, substituindo $t = \Phi^{-1}(\varphi)$ na Equação 2.23, tem-se:

$$\frac{dx}{dt}(\Phi^{-1}(\varphi)) = f(\Phi^{-1}(\varphi), x(\Phi^{-1}(\varphi)), x(R(\Phi^{-1}(\varphi)))). \quad (2.24)$$

Por simplicidade, pode-se definir a função $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $z = x \circ \Phi^{-1}$. A motivação para a criação de tal função é fazer que o segundo argumento de f , após a mudança de variável, seja escrito simplesmente como $x(\Phi^{-1}(\varphi)) = (x \circ \Phi^{-1})(\varphi) = z(\varphi)$. Com isso, deseja-se também que a equação diferencial seja escrita em termos da derivada de z no tempo transformado φ , o que pode ser feito por meio da regra da cadeia:

$$\frac{dz}{d\varphi}(\varphi) = \frac{d(x \circ \Phi^{-1})}{d\varphi}(\varphi) = \frac{dx}{dt}(\Phi^{-1}(\varphi)) \cdot \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi). \quad (2.25)$$

Substituindo a Equação 2.24 na Equação 2.25, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\varphi}(\varphi) &= \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi) \cdot f(\Phi^{-1}(\varphi), x(\Phi^{-1}(\varphi)), x(R(\Phi^{-1}(\varphi)))) \\ \implies \frac{dz}{d\varphi}(\varphi) &= \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi) \cdot f(\Phi^{-1}(\varphi), z(\varphi), x(R(\Phi^{-1}(\varphi)))). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Observe que $z \circ \Phi = (x \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi = x$, isto é, $x = z \circ \Phi$. Com o intuito de eliminar a função x da Equação 2.26, pode-se reescrever o último argumento de f com tal substituição da seguinte maneira: $x(R(\Phi^{-1}(\varphi))) = (z \circ \Phi)(R(\Phi^{-1}(\varphi))) = z(\Phi(R(\Phi^{-1}(\varphi)))) = z((\Phi \circ R \circ \Phi^{-1})(\varphi))$. Definindo a função $R_c = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$, tem-se, por simplicidade, $x(R(\Phi^{-1}(\varphi))) = z(R_c(\varphi))$. Portanto, a Equação 2.26 pode ser reescrita como uma equação diferencial com atraso:

$$\frac{dz}{d\varphi}(\varphi) = \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi) \cdot f(\Phi^{-1}(\varphi), z(\varphi), z(R_c(\varphi))). \quad (2.27)$$

A manipulação realizada teve como objetivo obter uma outra representação da equação diferencial com atraso variável em função de outra variável temporal φ . Para que esse segundo sistema atenda as necessidades de definição consistente de um espaço de estados, é necessário que o atraso seja constante, isto é:

$$R_c(\varphi) = \varphi - c, \quad (2.28)$$

em que $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. A existência de uma transformação Φ que garanta a equivalência do sistema original com um sistema de atraso constante tem condições suficientes apresentadas em Otto *et al.* (2017). Além da condição de $\tau(t) > 1$, que garante também causalidade, deve-se ter o número de rotação associado à R igual a um número irracional, isto é:

$$\omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R^k(t) - R^0(t)}{k} \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^c, \quad (2.29)$$

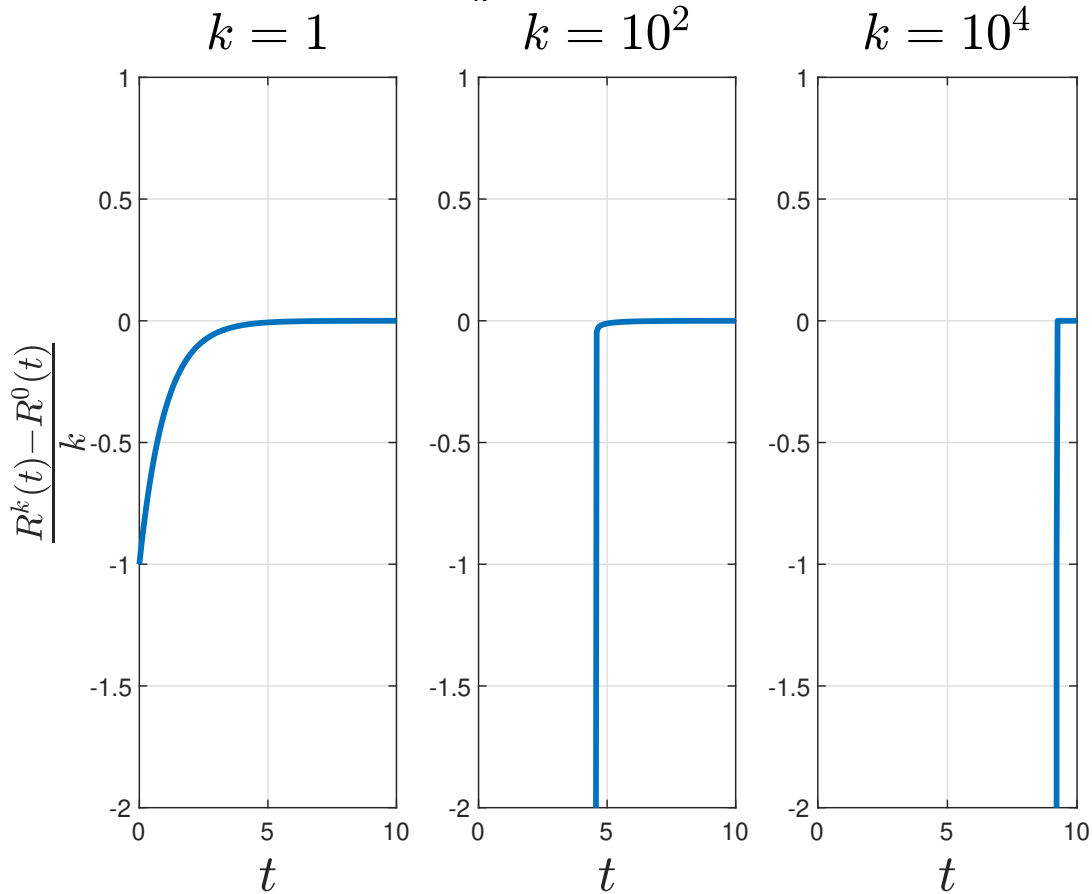
em que $R^0(t) = t$ e $R^{n+1}(t) = R(R^n(t))$. Funções atraso com tal característica são conhecidas como atrasos conservativos. Tal comportamento depende unicamente da função argumento atrasado, o que é interessante em vista da complexidade da função f não influenciar em nessa propriedade, (OTTO *et al.*, 2017).

Diante das condições apresentadas, deseja-se conhecer se o sistema com atraso variável proposto na Equação 2.19 pode ser reformulado em termos de um sistema com atraso constante. Para tal faz-se necessário saber se o limite 2.29 existe e, se for o caso, saber se tal valor é um número irracional, foram feitas simulações utilizando o software *MATLAB* para diferentes valores de k . A Figura 15 apresenta o resultado da simulação, o qual indica que, com o aumento de k , o limite não tende a um valor real finito.

A busca pelo homeomorfismo que transforme o sistema proposto em 2.19 em um sistema com atraso constante não faz parte do escopo deste trabalho e requer maior sofisticação matemática que a tratada até então no texto. Desse modo, a título de exemplo de tal transformação, será utilizado o atraso variável $\tau(t) = 1 + 0.5t$. Tal função foi escolhida com base no Exemplo 1 de Verriest (2011). O Exemplo 5 apresenta uma nova equação diferencial funcional a ser analisada. Em seguida, é mostrada, de maneira detalhada, a transformação de um sistema com atraso variável em um topologicamente equivalente com atraso constante.

Exemplo 5 *Seja $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau(t))$ a equação diferencial funcional a ser considerada para a análise. Neste exemplo, pretende-se definir A , B , $\tau(\cdot)$ e função histórico $\phi(\cdot)$ para o sistema em questão. De acordo com o que foi mencionado anteriormente, a função atraso é dada por $\tau(t) = 1 + 0.5t$ e, portanto, tem-se $\tau(0) = 1$. Define-se $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, para $\theta \in [-\tau(t), 0]$, se $t > 0$, e $x_0(\theta) = \phi(\theta)$. Com isso, ϕ é de fato a função inicial para o sistema e faz sentido definir $x(0) = x_0(0) = \phi(0)$. Dessas primeiras definições, a equação diferencial funcional pode ser reescrita como:*

Figura 15 – Evolução da função $\frac{R^k(t) - R^0(t)}{k}$ de acordo com o aumento de k .



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax_t(0) + Bx_t(-\tau(t)), \text{ para } t \geq 0; \\ x_0(\theta) = \phi(\theta), \text{ para } \theta \in [-\tau(0), 0]. \end{cases} \quad (2.30)$$

Mais uma vez, deseja-se apresentar um exemplo em que a função composta pela função histórico e pela solução da equação diferencial seja contínua e possua derivada contínua no tempo $t = 0$. Para tanto, deve-se ter $\phi(0) = x(0)$ e $\dot{\phi}(0) = \dot{x}(0)$. Da Equação diferencial com atraso 2.30, tem-se:

$$\dot{\phi}(0) = \dot{x}(0) = Ax_0(0) + Bx_0(-\tau(0)) = A\phi(0) + B\phi(-1)$$

Portanto, escolhendo $\phi(t) = t$ como função histórico, para $t \in [-1, 0]$, tem-se $\dot{\phi}(t) = 1$, $\phi(0) = 0$ e $\phi(-1) = -1$. Com isso, pode-se escrever $1 = A \cdot 0 + B \cdot (-1) \implies B = -1$. Portanto, a escolha $B = -1$ garante, para $\phi(t) = t$, que a função composta pela função inicial com a solução da equação diferencial funcional terá primeira derivada contínua em $t = 0$.

Finaliza-se a construção do exemplo com a escolha $A = -2$, cujo valor foi escolhido de modo a obter uma solução estável. Desse modo, a equação que representa de fato o comportamento do sistema é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax_t(0) + Bx_t(-\tau(t)), \text{ para } t \geq 0; \\ x_0(\theta) = \theta, \text{ para } \theta \in [-\tau(0), 0]. \end{cases} \quad (2.31)$$

Assim como nos exemplos anteriores, a aplicação do Método dos Intervalos leva ao entendimento de que a solução da equação diferencial funcional é dada pela solução de uma equação diferencial ordinária em cada intervalo determinado pelo método. A determinação dos intervalos pode ser feita com base na restrição do argumento atrasado e no fato de a resposta em um intervalo ser unicamente determinada pela resposta no intervalo anterior. Com isso, o primeiro intervalo $[0, t_1]$ pode ser determinado sob a premissa de que $R(t_1) = 0$, isto é, $t_1 - \tau(t_1) = 0 \implies t_1 - 1 - \gamma \cdot t_1 = 0 \implies t_1 = \frac{1}{1 - \gamma}$. Seguindo o mesmo raciocínio, o limite superior t_{k+1} do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ pode ser determinado por:

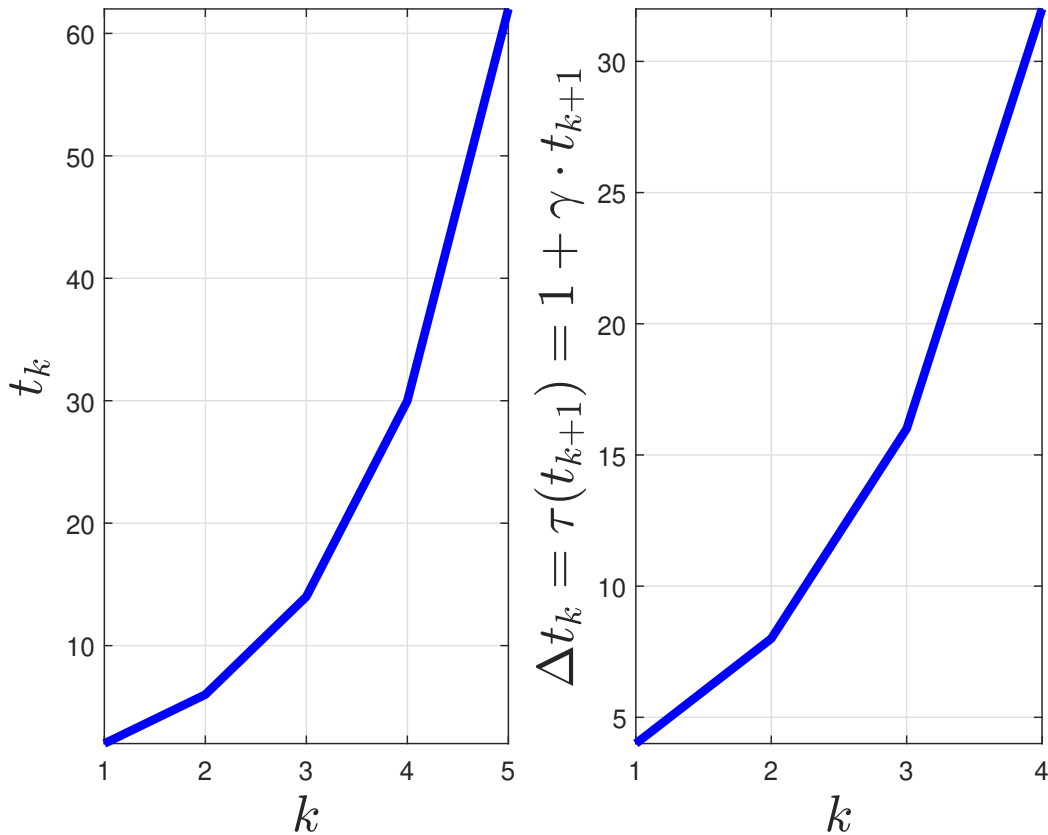
$$R(t_{k+1}) = t_k \implies t_{k+1} - \tau(t_{k+1}) = t_k \implies t_{k+1} - 1 - \gamma \cdot t_{k+1} = t_k \implies t_{k+1} = \frac{1 + t_k}{1 - \gamma}.$$

A evolução dos instantes de tempo em que a solução da equação diferencial funcional passa a ser determinada pela solução de uma outra equação diferencial ordinária está apresentado no gráfico à esquerda na Figura 16. Nesse caso, a função é crescente e possui derivada também crescente, indicando que o espaçamento entre os instantes de tempo aumentam, o que condiz com a positividade da derivada da função atraso: $\dot{\tau}(t) = \gamma > 0$. À direita apresenta-se a própria função atraso, a qual é dada pela largura dos intervalos mencionados.

Tais intervalos podem também ser visualizados no próprio gráfico da solução da equação diferencial funcional, de acordo com a Figura 17.

A representação da equação em termos da função x_t sugere o uso de duas variáveis e, portanto, que a equação seja escrita em termos de uma equação diferencial parcial munida de uma condição inicial e de uma condição de contorno. Conforme mostrado na Subseção 2.3.3, tem-se:

Figura 16 – Evolução dos instantes de tempo nos quais a solução da equação diferencial funcional passa a ser representada como uma solução diferente de outra equação diferencial ordinária.



Fonte: elaborada pelo autor.

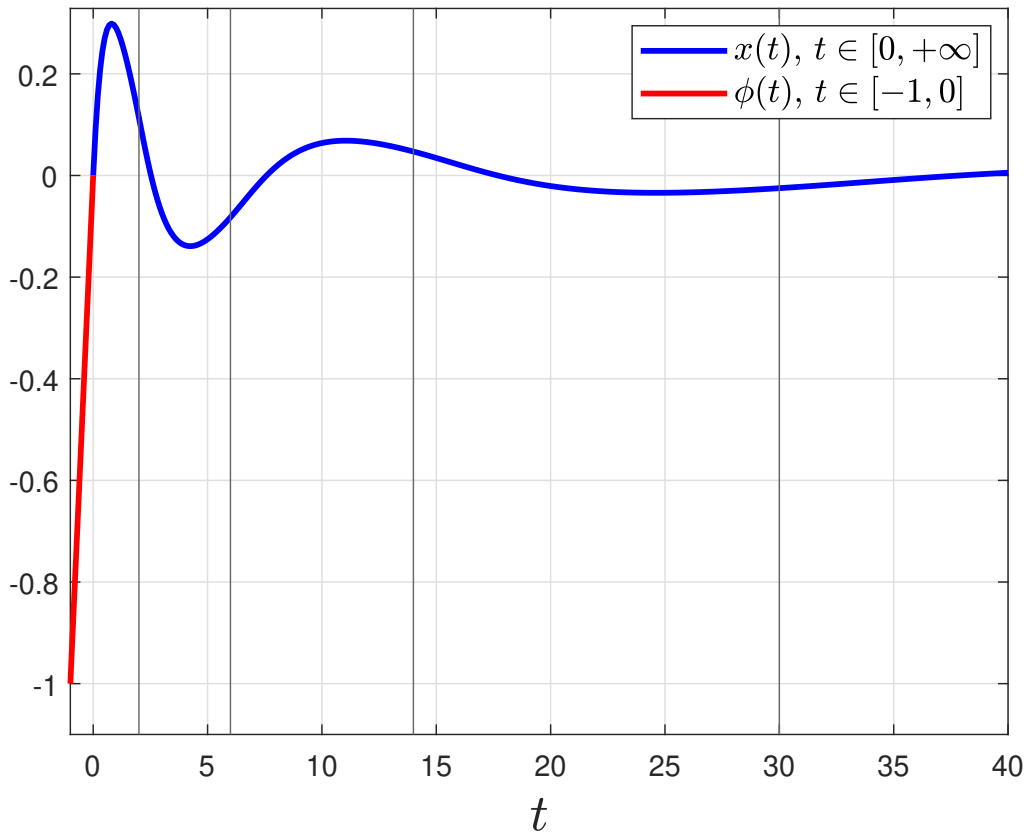
$$\begin{cases} \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, \theta)}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial z(t, 0)}{\partial \theta} = -2 \cdot z(t, 0) - z(t, -1 - \gamma t); \\ z(0, \theta) = \phi(\theta), \end{cases} \quad (2.32)$$

em que $z(t, \theta) = x_t(\theta)$.

Por fim, a evolução da função x_t com relação ao tempo t pode ser visualizada na Figura 18.

Na figura supracitada destacam-se a reta em vermelho, a qual representa a função histórico do sistema, a partir do qual este evoluirá no decorrer do tempo t ; a solução da equação diferencial funcional para instantes maiores que zero, dada pela curva em preto; a superfície em cor verde dada pela função x_t em todo o seu domínio θ para cada instante de tempo. Para esse exemplo, é interessante notar que, além de o sistema ser estável - $z(t, \theta)$ toma valores tão próximos de zero quanto se queira para instantes de tempo suficientemente grandes - o valor do

Figura 17 – Solução da equação diferencial funcional descrita em 2.30 para $A = -2$ e $B = -1$, em azul; função histórico, em vermelho; linhas verticais em preto separando os intervalos de definição das soluções.



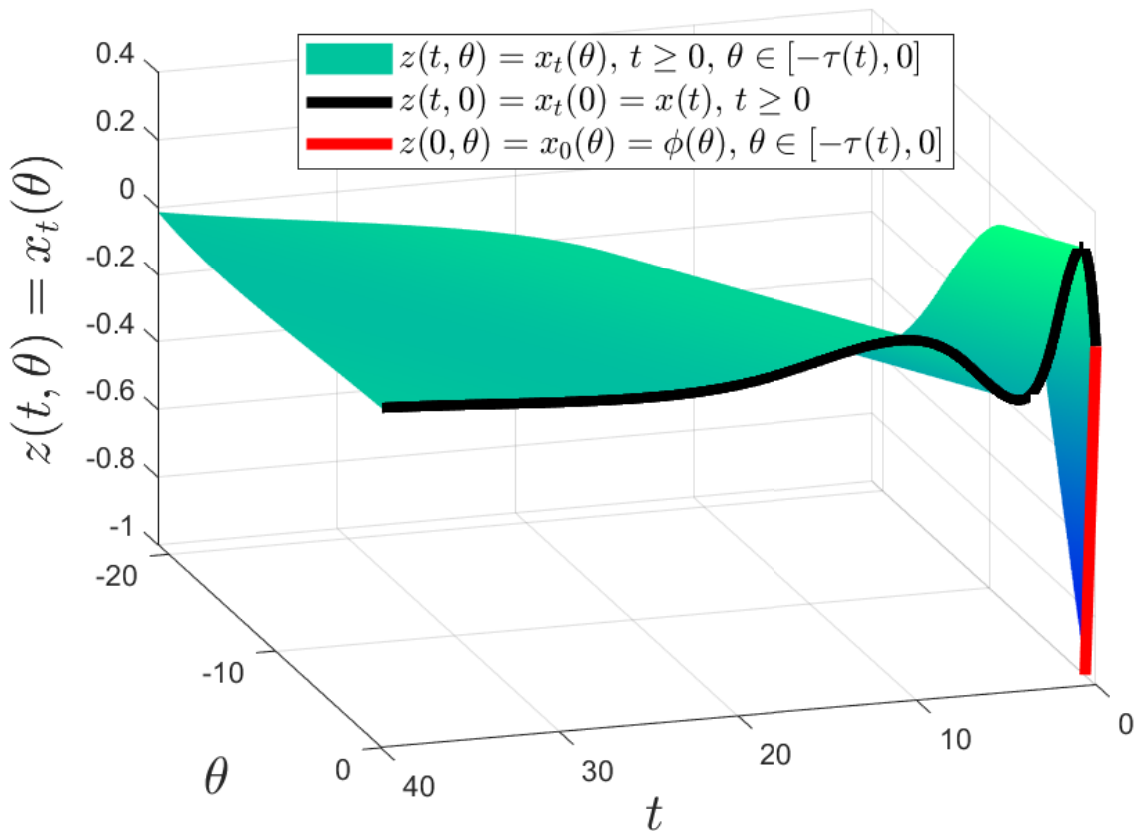
Fonte: elaborada pelo autor.

atraso cresce com o tempo, dado que a função atraso possui derivada positiva. Com isso, para instantes de tempo suficientemente longos, as funções x_t assumem o valor zero para o domínio $[-\infty, 0]$.

Detalhado no exemplo o sistema com atraso variável definido, deseja-se encontrar um sistema com atraso constante no tempo que seja topologicamente equivalente ao sistema com atraso variável. Isso pode ser feito, de maneira intuitiva, por meio de uma deformação da superfície mostrada na Figura 18, de modo a fazer sua "largura" e, portanto, seu atraso, constante. De acordo com o que foi apresentado em Verriest (2011) uma transformação $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de mudança de variável homeomórfica é dada por:

$$\varphi = \Phi(t) = -\frac{\ln(t+2)}{\ln(2)}, \quad (2.33)$$

Figura 18 – Evolução da função x_t para diferentes valores da variável θ .



Fonte: elaborada pelo autor.

em que $\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ é função logaritmo natural, dada pela inversa da função $f(x) = e^x$. Da Equação 2.28 e da definição de $R_c = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$, pode-se escrever:

$$R_c(\varphi) = \varphi - c \implies \Phi(R(t)) = \Phi(t) - c,$$

isto é, para que o sistema equivalente na variável z possua atraso constante, basta que $\Phi(t) - \Phi(R(t)) = c$. Utilizando a definição da Equação 2.33, verifica-se que Φ de fato satisfaz a condição de atraso constante e que o atraso obtido é unitário, ou seja, $c = 1$. De fato:

$$\Phi(t) - \Phi(R(t)) = -\frac{\ln(t+2)}{\ln(2)} + \frac{\ln(t-1-0.5t+2)}{\ln(2)} = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \log\left(\frac{0.5t+1}{t+2}\right)$$

$$\implies \Phi(t) - \Phi(R(t)) = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(2^{-1}) = 1.$$

Para obter a expressão do novo sistema com atraso constante, pode-se utilizar o mesmo raciocínio da Subseção 2.3.4, isto é:

$$\frac{dz}{d\varphi}(\varphi) = \frac{d(x \circ \Phi^{-1})}{d\varphi}(\varphi) = \frac{dx}{dt}[\Phi^{-1}(\varphi)] \cdot \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi) = \{-2x[\Phi^{-1}(\varphi)] - x\{R[\Phi^{-1}(\varphi)]\}\} \cdot \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi).$$

Da definição de $z = x \circ \Phi^{-1}$ e de sua consequência direta $x = z \circ \Phi$, tem-se:

$$\frac{dz}{d\varphi}(\varphi) = \{-2z(\varphi) - z\{\Phi[R(\Phi^{-1}(\varphi))]\}\} \cdot \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi) = \{-2z(\varphi) - z[R_c(\varphi)]\} \cdot \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi).$$

Da definição de $\varphi = \Phi(t)$, tem-se $R_c = \varphi - 1$, ou seja:

$$\frac{dz}{d\varphi}(\varphi) = [-2z(\varphi) - z(\varphi - 1)] \cdot \frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi). \quad (2.34)$$

Portanto, o sistema com atraso ficará bem definido se determinada a derivada $\frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi)$. Da Equação 2.33, tem-se:

$$\ln(t+2) = -\ln(2) \cdot \varphi \implies t+2 = e^{(-\ln(2) \cdot \varphi)} \implies \Phi^{-1}(\varphi) = t = e^{(-\ln(2) \cdot \varphi)} - 2 = (e^{\ln(2^{-1})})^\varphi - 2.$$

$$\implies \Phi^{-1}(\varphi) = 0.5^\varphi - 2.$$

Portanto, pode-se calcular a derivada de Φ^{-1} com relação a φ :

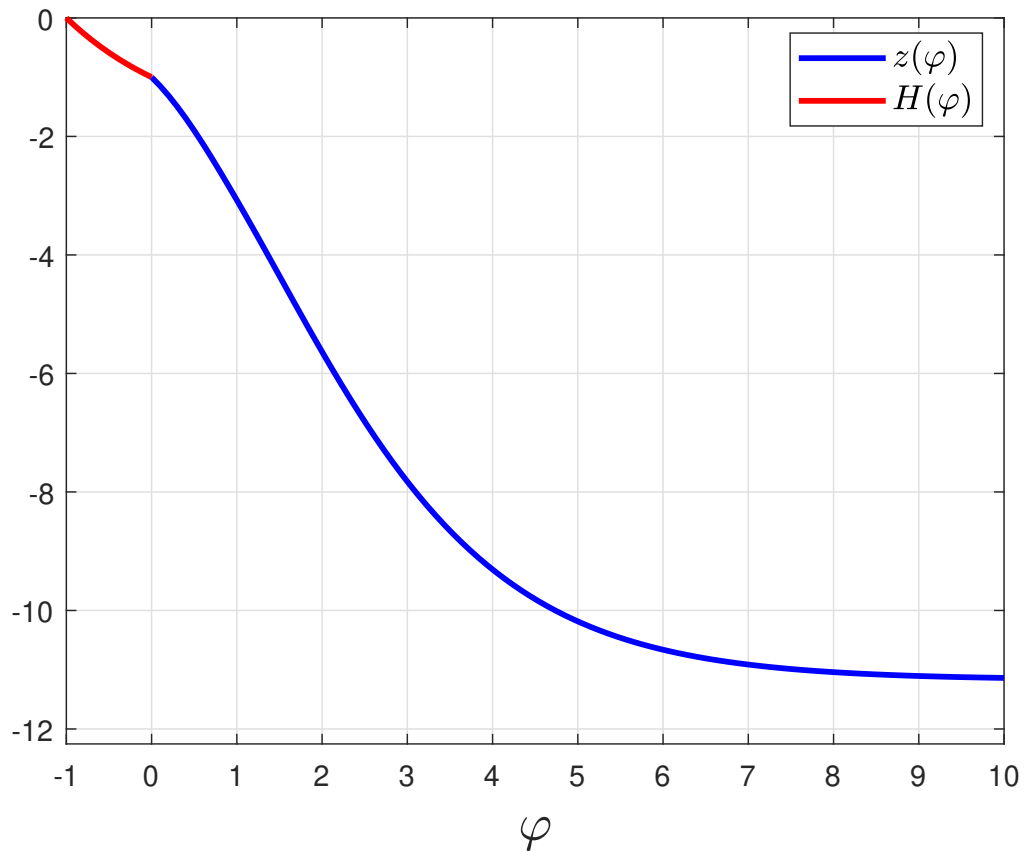
$$\frac{d\Phi^{-1}}{d\varphi}(\varphi) = -\ln(2) \cdot 0.5^\varphi. \quad (2.35)$$

Assim, substituindo a Equação 2.35 na Equação 2.34, a equação diferencial com atraso constante que é topologicamente equivalente ao sistema original com atraso variável é dada por:

$$\frac{dz}{d\varphi}(\varphi) = 2 \cdot \ln(2) \cdot 0.5^\varphi \cdot z(\varphi) + \ln(2) \cdot 0.5^\varphi \cdot z(\varphi - 1), \quad (2.36)$$

isto é, o sistema equivalente é linear, variante no tempo e com atraso constante. A função inicial, necessária à resolução do novo sistema, será escolhida de acordo com aquela escolhida no domínio do tempo t , isto é: se $H : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ é a função inicial do sistema no tempo φ ,

Figura 19 – Solução da Equação 2.36, representando um sistema com atraso constante equivalente ao sistema original com atraso variável.



Fonte: elaborada pelo autor.

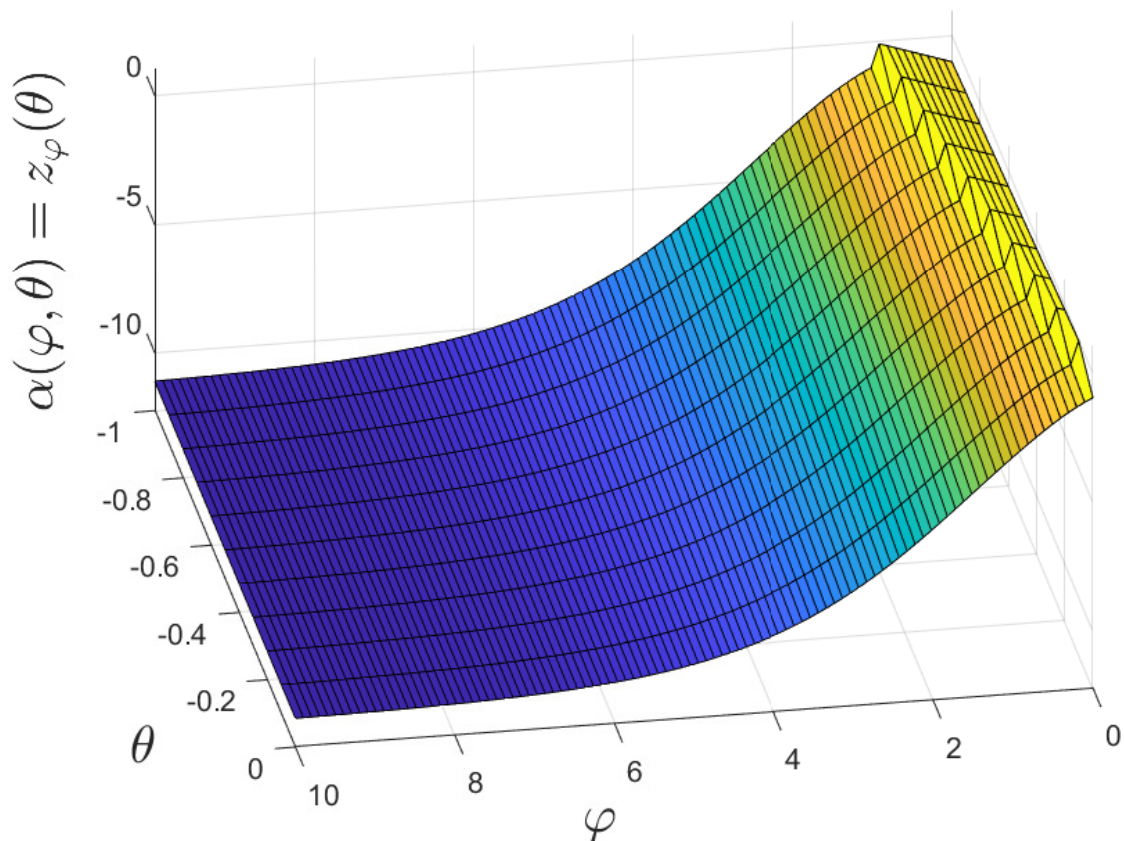
$\phi(t) = t \implies H(\varphi) = \Phi^{-1}(\varphi) = 0.5^\varphi - 2$. Ressalta-se que, na variável φ a continuidade da taxa de variação da solução em $\varphi = 0$ não é garantida, o que não afeta a continuidade de z na origem. A Figura 19 mostra isso, separando por cores a solução do problema da função histórico.

Não foram, para esse caso, mostrados explicitamente os intervalos de definição das soluções das equações diferenciais definidas para cada intervalo (pelo Método dos Intervalos). De fato, isso não é necessário para o sistema equivalente em razão de o atraso para este ser constante e, portanto, ter intervalos coincidentes com as linhas da malha apresentada na própria plotagem. Por fim, pode-se mostrar a evolução dos dos estados z_φ para o sistema com atraso constante. Nesse caso, faz sentido chamar as funções z_φ de estados do sistema pois, conforme explicado anteriormente, o espaço de estados é um conjunto estacionário dado por $\mathcal{F}(\mathcal{F}([-\infty, t]; \mathbb{R}); \mathbb{R})$. Tal interpretação do sistema em duas variáveis indica a possibilidade de representá-lo por meio de um problema de condição de contorno, o que é feito por meio da Equação 2.37, construída com base na Equação 2.8. A função $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\alpha(\varphi, \theta) = z_\varphi(\theta)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \alpha(\varphi, \theta)}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \alpha(\varphi, 0)}{\partial \theta} = 2 \cdot \mu \cdot \alpha(\varphi, 0) + \mu \cdot \alpha(\varphi, -1); \\ \alpha(0, \theta) = H(\theta), \end{cases} \quad (2.37)$$

em que $\mu = -\ln(2) \cdot 0.5^\varphi$. Da representação multivariável, é interessante observar como é o comportamento de α em um subconjunto do plano. A Figura 20 apresenta a superfície gerada pela evolução dos estados do sistema equivalente com atraso constante.

Figura 20 – Evolução dos estados z_φ no tempo φ de acordo com a variação de θ .



Fonte: elaborada pelo autor.

O decaimento observado no gráfico tem relação com o comportamento exponencial dos coeficientes da equação com atraso constante, os quais possuem base menor que 1. É interessante comparar a Figura 20 com a Figura 18, que é sua equivalente com atraso variável. A primeira possui largura constante, o que indica atraso constante, com contraste com a segunda. A ideia é que o espaço de estados para o sistema com atraso variável seja representado pelo conjunto das funções que leva valores em $[-1, 0]$ em algum número real, o que é possível diante

do homeomorfismo definido anteriormente, que permite associar cada ponto em cada estado do sistema com atraso constante a um ponto do sistema com atraso variável.

3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE

Neste capítulo é dado início ao estudo de sistemas com atraso voltado às aplicações. Com efeito, é na análise de estabilidade que está um dos problemas mais interessantes em sistemas com atraso no mundo real, tendo em vista a necessidade de garantia dessa propriedade em diversas situações.

Os sistemas de controle, para que sejam implementados em processos industriais, por exemplo, devem satisfazer condições seguras de estabilidade e desempenho, de modo a funcionarem em conformidade com os requisitos técnicos previamente estabelecidos. Deve-se ressaltar que critérios de desempenho somente fazem sentido no contexto em que o sistema de controle já é estável, de modo que justifica-se a importância dada, neste trabalho, à análise de estabilidade de sistemas de controle. Especificamente, neste capítulo serão apresentados de forma resumida os conceitos básicos de estabilidade de sistemas de controle.

Os conceitos apresentados neste capítulo estão em consonância com o que foi mostrado didaticamente em Khalil (2015).

3.1 Definições de estabilidade

Nesta seção serão apresentadas três definições de estabilidade que podem ser utilizadas em diferentes contextos, a depender da necessidade.

A definição de estabilidade de um sistema de controle não é única em razão de diferentes aplicações (ou maneiras de modelar matematicamente um sistema) exigirem formulações matemáticas distintas. Nesta seção serão apresentados dois conceitos de estabilidade: estabilidade no sentido Lyapunov e estabilidade entrada-saída. O primeiro, leva em consideração o comportamento interno do sistema, e por isso é também visto como uma abordagem via espaço de estados. O segundo considera o sistema como um operador e , portanto, interpreta o sistema como uma "caixa preta", em que somente são conhecidas entradas e saídas.

3.1.1 Estabilidade no sentido Lyapunov

Nesta subseção será apresentada a ideia envolvida no conceito de estabilidade de Lyapunov.

Para os propósitos desse trabalho, somente será apresentado o critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas autônomos, isto é, sistemas nos quais a variável tempo somente

aparece como argumento do estado. Intuitivamente, isso significa que a dependência da evolução dos estados com relação aos estados não muda com o tempo, de modo que o sistema pode ser modelado de maneira genérica pela Equação 3.1.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (3.1)$$

Sobre a função $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$, será imposta a condição de que seja localmente Lipschitz em x para qualquer $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Isso garante que se a condição inicial está em um subconjunto compacto de D e toda solução está dentro desse conjunto compacto, a unicidade é garantida, (KHALIL, 2015).

A partir deste ponto, por simplicidade, considerar-se-á $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ o estado do sistema em determinado instante de tempo t . Quando a letra x representar a função $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ que relaciona $t \mapsto x(t)$, o texto deixará explícito o uso dessa representação com o fim de evitar ambiguidades.

Um ponto $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ é dito um ponto de equilíbrio ou ponto fixo do sistema quando $\dot{x}(t) = 0$, isto é, $f(x) = 0$. Se um estado em determinado instante de tempo é um ponto de equilíbrio, todos os estados futuros assumirão o mesmo valor que aquele, de modo que o comportamento do sistema não muda. Supondo que determinado $x_e = x(t_e) \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio, pode-se, sem perda de generalidade, fazer $x_e = 0$. Com efeito, se for $x_e \neq 0$, pode-se fazer a mudança de coordenadas $z = x - x_e \implies \dot{z}(t) = \dot{x}(t) \implies \dot{z}(t_e) = \dot{x}(t_e) = 0$ e $z_e = z(t_e) = x(t_e) - x_e = 0$, isto é, $z_e = 0$ é ponto de equilíbrio.

A fim de deixar os conceitos bem definidos, destaca-se que se o estado $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ está na bola aberta $B(a, r)$ de raio $r > 0$ e centro $a \in \mathbb{R}^n$, então $\|x - a\| < r$, em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Nos casos em que o centro a da bola aberta é a origem, utilizar-se-á, por facilidade, a representação $B_r = B(0, r)$. Ainda, será utilizado, sem perda de generalidade, o tempo inicial $t_0 = 0$.

Com isso, pode-se classificar a origem quanto à estabilidade. A origem será um ponto de equilíbrio estável quando a trajetória $x(t)$ do sistema está tão perto da origem quanto se queira, bastando para isso que o ponto inicial $x(t_0)$ esteja suficientemente próximo da origem. Matematicamente, a origem do sistema é estável se, para toda bola aberta $B_\varepsilon = B(0, \varepsilon)$ de raio $\varepsilon > 0$ centrada na origem existe uma bola aberta $B_\delta = B(0, \delta)$ de raio $\delta > 0$ centrada na origem, tal que: se $x(t_0) \in B_\delta$, então $x(t) \in B_\varepsilon$, qualquer que seja $t > t_0$.

Se um ponto de equilíbrio não é estável, ele é dito instável. Nesse caso, existe uma bola aberta B_ε de raio $\varepsilon > 0$ centrada na origem tal que, independentemente da condição inicial $x(t_0)$, será $x(t) \notin B_\varepsilon$ para algum $t > t_0$. Intuitivamente, isso significa que não é possível fazer a trajetória do sistema estar tão próxima da origem quanto se queira, independentemente da condição inicial do sistema.

Para as aplicações práticas da teoria de controle é ainda interessante o conceito de um sistema assintoticamente estável. Ocorre que mesmo que os estados do sistema estejam tão próximos quanto se queira da origem, estes podem ainda não convergir para o ponto de equilíbrio, de modo a oscilarem eternamente ($t \rightarrow +\infty$). Diante disso, faz-se necessário o conceito de um sistema assintoticamente estável, para o qual não só ocorre a estabilidade, mas também a convergência do estado para a origem, isto é, existe uma bola aberta B_δ de raio $\delta > 0$ centrada na origem tal que, se $x(t_0) \in B_\delta$, tem-se:

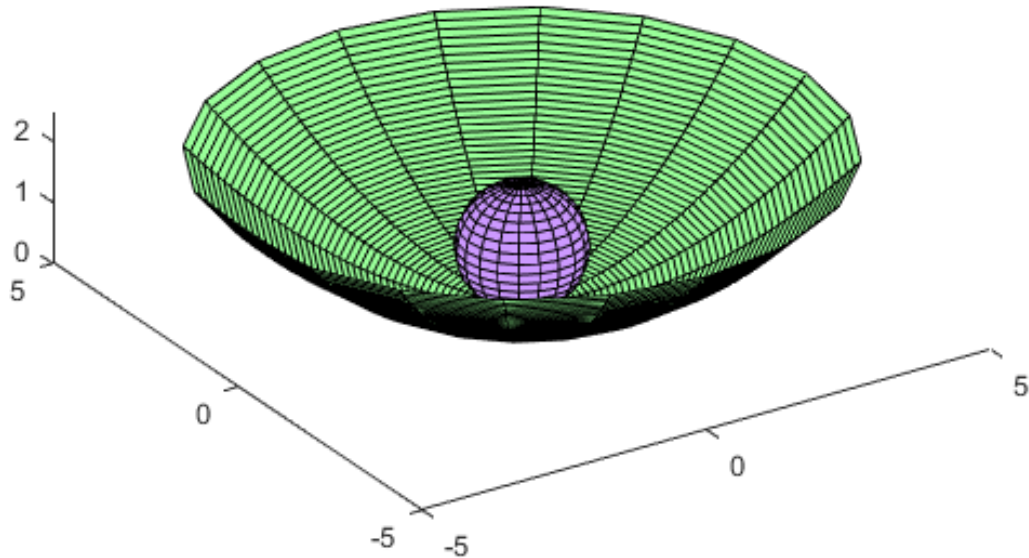
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

As Figuras 21 e 22 mostram desenhos que intuitivamente ajudam a compreender os conceitos apresentados até então. Para o caso em que a bola lilás encontra-se no interior de uma superfície côncava, seja D o domínio em que os estados estão sempre no interior do recipiente em verde. Nesse caso, quaisquer que sejam a posição e a velocidade inicial (no domínio D , para que a bola não saia do recipiente), a bola estará, para um tempo suficientemente longo, em repouso no centro do recipiente (origem do espaço de estados). Com isso, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, pois a bola lilás não somente fica tão próxima quanto se queira da origem, mas também converge para esse ponto.

No segundo caso, mostrado pela figura em que a superfície verde é convexa, qualquer que seja a posição inicial da bola, somente um ponto de velocidade leva a bola ao ponto de equilíbrio, de modo que não basta que o estado inicial esteja suficientemente próximo da origem para que assim permaneça. Na verdade, para velocidades diferentes daquela, a posição da bola se afasta tanto quanto se queira da origem, indicando a instabilidade do ponto de equilíbrio.

Com o intuito de tornar aplicáveis os conceitos de estabilidade até então mencionados, são apresentados aqui, de acordo com o exposto em Khalil (2015), o teorema da estabilidade de Lyapunov e a sua respectiva demonstração. Este teorema fornece as condições sob as quais o sistema representado pela Equação 3.1 é estável ou assintoticamente estável na origem, de acordo com o Teorema 3.1.1.

Figura 21 – Exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio instável. Qualquer movimento realizado sobre a bola é suficiente para que ela caia indefinidamente.



Fonte: (BRAGA, 2021).

Teorema 3.1.1 (Teorema da estabilidade de Lyapunov) *Seja $x = 0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio em um domínio D . Se existe uma função continuamente diferenciável $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

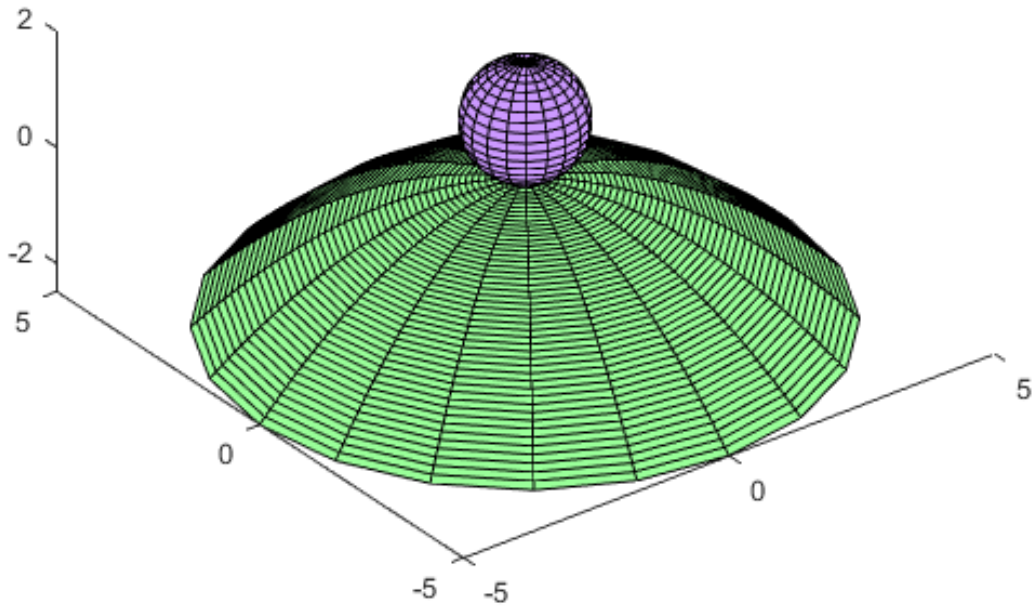
- $V(0) = 0$,
- $V(x) > 0$ para todo $x \in D - 0$ e
- $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in D$,

então a origem é um ponto de equilíbrio estável.

Demonstração. Supondo que exista tal função V conforme definido no teorema, deseja-se mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x(0) \in B_\delta$, então $x(t) \in B_\varepsilon$ para todo $t > 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ e tome $\bar{B}_r \subset D$ o fecho de uma bola aberta B_r (que é a bola fechada centrada na origem com raio r). Isso significa que, para a bola B_ε dada, definiu-se uma bola fechada não pontual (com raio maior que zero) que esteja dentro da bola B_ε ou seja igual a esse conjunto.

Figura 22 – Exemplo de sistema dinâmico com ponto de equilíbrio instável. Qualquer movimento realizado sobre a bola é suficiente para que ela caia indefinidamente.



Fonte: (BRAGA, 2021).

Observe que $V(x)$ é uma função Lipschitz em x e, portanto, contínua em x . Da compacidade da esfera $\partial B_r = \bar{B}_r - B_r$ (a fronteira de B_r), existe, do Teorema de Weirstrass, um mínimo de $V(x)$ em $\partial B_r = \{x \in D : \|x\| = r\}$. Seja α tal valor, isto é:

$$\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x).$$

Da definição de $V(\cdot)$, deve-se ter $\alpha > 0$. Defina então o conjunto Ω_β como os estados $x \in \bar{B}_r$ tais que $V(x) \leq \beta$, para algum $\beta \in (0, \alpha)$. Isso significa que o conjunto Ω_β está contido em B_r . De fato, se fosse $x \in \Omega_\beta - B_r$, então $x \in \partial B_r \implies V(x) \geq \alpha > \beta$, o que é uma contradição, já que $x \in \Omega_\beta \implies V(x) \leq \beta < \alpha$, por definição.

Como a taxa de variação temporal de $V(x)$ no tempo é negativa, da premissa de existência de V , tem-se que, para uma condição inicial em Ω_β , qualquer estado para um instante de tempo maior que zero estará também dentro desse conjunto, pois $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$, para qualquer $t > 0$. Da compacidade de Ω_β , fica garantida a unicidade da solução da equação

diferencial do sistema com uma condição inicial em Ω_β , pois o sistema é autônomo e Lipschitz em x , (KHALIL, 2015). Nesse ponto, vale lembrar o significado da continuidade de V no domínio D : para qualquer $\beta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x - y\| < \delta$, então $|V(x) - V(y)| < \beta$. Utilizando a continuidade de V na origem, isto é, fazendo $y = 0$, tem-se: $\|x - 0\| < \delta \implies |V(x) - V(0)| < \beta$. Como $V(0) = 0$ e $V(x) \geq 0$, a expressão fica $\|x\| < \delta \implies V(x) < \beta$.

Portanto, da continuidade de V , existe $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta \implies x \in \Omega_\beta$. Esse resultado é importante porque se for escolhido $x(0) \in B_\delta$, será também $x(0) \in \Omega_\beta$. Da propriedade anteriormente derivada acerca desse conjunto, conclui-se que $x(t) \in \Omega_\beta \subset B_r \subset B_\varepsilon$ para qualquer $t > 0$ e, portanto, $x(t) \in B_\varepsilon$ para qualquer instante de tempo $t > 0$. Por conseguinte, a origem é um ponto de equilíbrio estável. □

Uma função V que satisfaça as condições apresentadas no teorema supracitado é dita uma função de Lyapunov.

A condição para que o sistema seja não somente estável, mas também assintoticamente estável, é dada restringindo-se a inequação referente à derivada temporal da função de Lyapunov de modo que esta seja estritamente negativa para pontos diferentes da origem. A Figura 23 apresenta a órbita e a função de Lyapunov de um sistema não linear dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2); \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

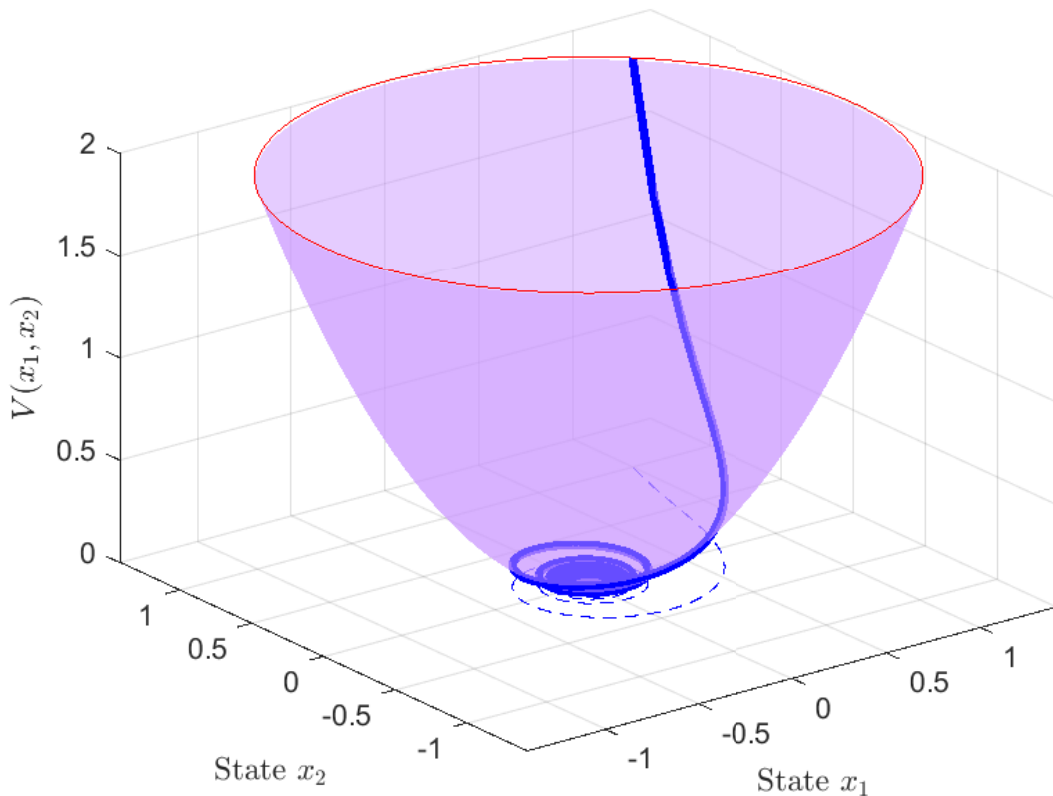
(SLOTINE *et al.*, 1991), com a condição inicial $x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T = [1, 1]^T$. Nesse caso, uma candidata a função de Lyapunov é dada por $V(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Para verificar se tal função é, de fato, uma função de Lyapunov, deve-se testar as condições dadas no Teorema 3.1.1. Observe que, por ser definida por uma norma euclidiana, a função $V(x)$ é positiva definida, isto é, assume valores positivos para qualquer estado, com exceção da origem, onde é nula. Ademais, sua derivada no tempo é dada por:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1[x_2 - x_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)]$$

$$\implies \dot{V}(x) = -2x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_2^4 \leq 0,$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Portanto, V é uma função de Lyapunov e, para $x \neq 0$, tem-se $\dot{V}(x) < 0$, mostrando que o sistema é assintoticamente estável. Esse comportamento pode ser visto na figura supracitada, em que os estados convergem para a origem.

Figura 23 – A linha azul tracejada representa a trajetória dos estados do sistema no plano, enquanto a linha azul contínua representa os valores assumidos pelo funcional de Lyapunov para cada estado.



Fonte: O próprio autor.

3.1.2 Estabilidade entrada-saída

Nesta subseção será apresentado o conceito de estabilidade mais relevante para o estudo do critério apresentado neste trabalho, ver 3.3.1, acerca da estabilidade para sistemas com atraso variável no tempo.

Apesar da importância da teoria de Lyapunov e do teorema de estabilidade apresentado na subseção anterior, neste trabalho será mais explorada a definição de estabilidade que somente considera o sistema como um operador, sem levar em consideração a sua estrutura interna. O termo "estabilidade entrada-saída" é uma tradução literal de "Input-Output Stability" que

tem sido traduzido dessa forma para a língua portuguesa, (NASCIMENTO, 2016), (SARDINHA, 2018).

Nesse contexto, um sistema será denotado por H e a relação entrada-saída é dada por $y = Hu$, em que $u \in \mathcal{F}([0, +\infty); \mathbb{R}^m)$ e $y \in \mathcal{F}([0, +\infty); \mathbb{R}^q)$. Aqui fica mais uma vez evidente a demanda de técnicas avançadas de matemática, a exemplo de análise funcional, para o estudo de sistemas de controle. Ocorre que o operador mencionado atribui, para cada função u , uma outra função y , cada uma com infinitos valores, cada valor um associado a um instante de tempo. Os espaços de funções dos quais fazem parte y e u mencionados acima é demasiado geral, de modo que é importante a restrição de tais espaços aos exemplos práticos que se deseja estudar. Para tanto, definir-se-á, conforme Khalil (2015), o espaço \mathcal{L}_p^m , $p \in \mathbb{N}$, como o espaço das funções contínuas por partes $u \in \mathcal{F}([0, +\infty); \mathbb{R}^m)$ cuja norma é um valor finito definido por:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_0^{\infty} \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

e o espaço \mathcal{L}_∞^m pelas funções contínuas por partes $u \in \mathcal{F}([0, +\infty); \mathbb{R}^m)$ cuja norma é um número real finito dado por $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty$. Observe que funções importantes das aplicações físicas não estão consideradas nos espaços previamente definidos. A função seno, por exemplo, não faz parte do espaço \mathcal{L}_2 , pois o valor de sua suposta norma não seria finito. Com isso, faz-se necessário definir espaços estendidos, os quais consideram o truncamento de funções.

Inicialmente, é necessário definir o que é o truncamento de uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Para as aplicações em teoria de controle, tal função é chamada de sinal e seus argumentos variam entre valores não negativos. O truncamento em r do sinal $u(\cdot)$ é dado por:

$$u_r(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } t \in [0, r], \\ 0, & \text{se } t > r. \end{cases}$$

Portanto, caso o sinal u não pertença ao espaço \mathcal{L}_p^m , em que p foi omitido propositalmente para fins de simplicidade (já que para qualquer $p \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\infty}$ são normas no espaço de Banach definido pelas funções cuja operação resulte em um valor finito), pode-se estender o espaço \mathcal{L}_p da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_e^m = \{u \in m\mathcal{F}([0, +\infty); \mathbb{R}^m) : u_r \in \mathcal{L}^m, \forall r \geq 0\}.$$

Com isso, pode-se definir estabilidade para o operador $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$: esse operador é dito \mathcal{L} estável se existem uma função α de classe κ , (KHALIL, 2015), definida em $[0, \infty)$, e $\beta \geq 0$ tal que:

$$\|(Hu)_r\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u_r\|_{\mathcal{L}}) + \beta,$$

para todo $u \in \mathcal{L}_e^m$ e para todo $r \in [0, \infty)$. Para o caso em que $\alpha(\|u_r\|_{\mathcal{L}}) = \gamma \cdot \|u_r\|_{\mathcal{L}}$ para algum $\gamma \geq 0$, o operador H é dito \mathcal{L} estável com ganho finito, em que γ é o ganho do sistema. Em outras palavras, um sistema será \mathcal{L} estável se a norma de sua saída truncada nunca é maior que um valor que depende de forma crescente da norma da entrada truncada somado a um valor que limita a norma da saída truncada quando a entrada truncada é um sinal nulo.

3.1.2.1 Estabilidade no sentido BIBO

Uma das definições mais importantes e práticas para as aplicações de teoria de controle é a de estabilidade no sentido BIBO ("*Bounded-input-bounded-output*"), termo utilizado para designar sistemas cuja entrada limitada resulta em uma saída também limitada. Nesta subseção, esse conceito será apresentado como um caso particular de estabilidade entrada-saída com ganho finito para sistemas causais, de acordo com o que foi definido anteriormente com a norma dada por $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|$. De fato, seja $u \in \mathcal{L}_\infty$. Então, se H é um operador \mathcal{L} estável com ganho finito, tem-se, para algum $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$, $\|(Hu)_r\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u_r\|_{\mathcal{L}} + \beta$, para todo $r \geq 0$. Deseja-se mostrar que Hu é também um sinal limitado, isto é, que $\|Hu\|_{\mathcal{L}} < \infty$. Da causalidade, pode-se escrever $\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}} + \beta$, (KHALIL, 2015). Logo:

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{L}} + \beta \implies \|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| + \beta.$$

Como $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|$ é um valor finito (pois u é um sinal limitado em norma), deve-se ter $\|Hu\|_{\mathcal{L}} < \infty$ e, portanto, Hu também será limitado em norma, o que prova que o sistema é estável no sentido BIBO.

3.2 Estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo com atraso constante

A abordagem à análise de estabilidade até então foi focada no domínio do tempo. É interessante, no entanto, que sejam estabelecidos critérios de estabilidade também no domínio da frequência, conforme será feito nesta seção para sistemas lineares e invariantes no tempo com atraso constante. As vantagens de tal estratégia se dão não somente pela simplificação algébrica dos problemas, mas também por fornecer ferramentas e pontos de vista que somente no domínio do tempo não é possível obter. No domínio da frequência, por exemplo, é possível verificar, mais facilmente, que harmônicos em um sinal de entrada produzirão maior efeito no sistema estudado, característica esta fundamental para o projeto de filtros e também para a tomada de decisão sobre o tempo de amostragem de determinado experimento. Nesta seção, será apresentada um método de análise de estabilidade de um sistema linear e invariante no tempo com atraso na entrada. Os conceitos iniciais apresentados estão em consonância com o que foi exposto em Ogata (2011).

Inicialmente, vale ressaltar que condições suficientes para que determinada função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possua transformada de Laplace são: f deve ser contínua por partes e, em $[0, \infty)$, $|f(t)|$ deve ser limitada por uma função exponencial. Sabendo que um sistema linear e invariante no tempo pode ser representado por sua função de transferência $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ no domínio da frequência, em que Y é a transformada de Laplace da função saída do sistema y e U é a transformada de Laplace da função entrada do sistema u , deve-se ter, em um sistema com atraso constante, um sistema linear sem atraso $G(s)$ para o qual $P(s) = G(s)e^{-Ls}$, em que G é o modelo do processo sem atraso e L é o valor do atraso. Isso pode ser obtido ao escrever a expressão da transformada de Laplace para o sinal $p(t) = g(t - L)$. O conceito de estabilidade utilizado para análise nesta seção é o de estabilidade no sentido BIBO. Diante disso, será estável o sistema que não possuir polos no semiplano direito do plano complexo e assintoticamente estável o sistema que somente possuir polos no semiplano esquerdo.

Uma das formas de compreender como o atraso pode influenciar na estabilidade de um sistema é a análise do diagrama de Nyquist para o sistema em questão. O diagrama de Nyquist consiste na plotagem do ganho de malha $F(s)$ para valores de s (variável complexa) no Contorno de Nyquist, dado pela curva fechada e orientada no sentido horário no plano complexo que tem como interior todo o semiplano direito do plano complexo. Tal definição faz, pelo Princípio do Argumento de Cauchy, que a quantidade de voltas do diagrama de Nyquist em torno do ponto $(-1, 0)$ seja igual ao número de polos subtraído do número de zeros do ganho de malha do sistema. A Figura 24 mostra o diagrama de Nyquist comparado para o caso em que é

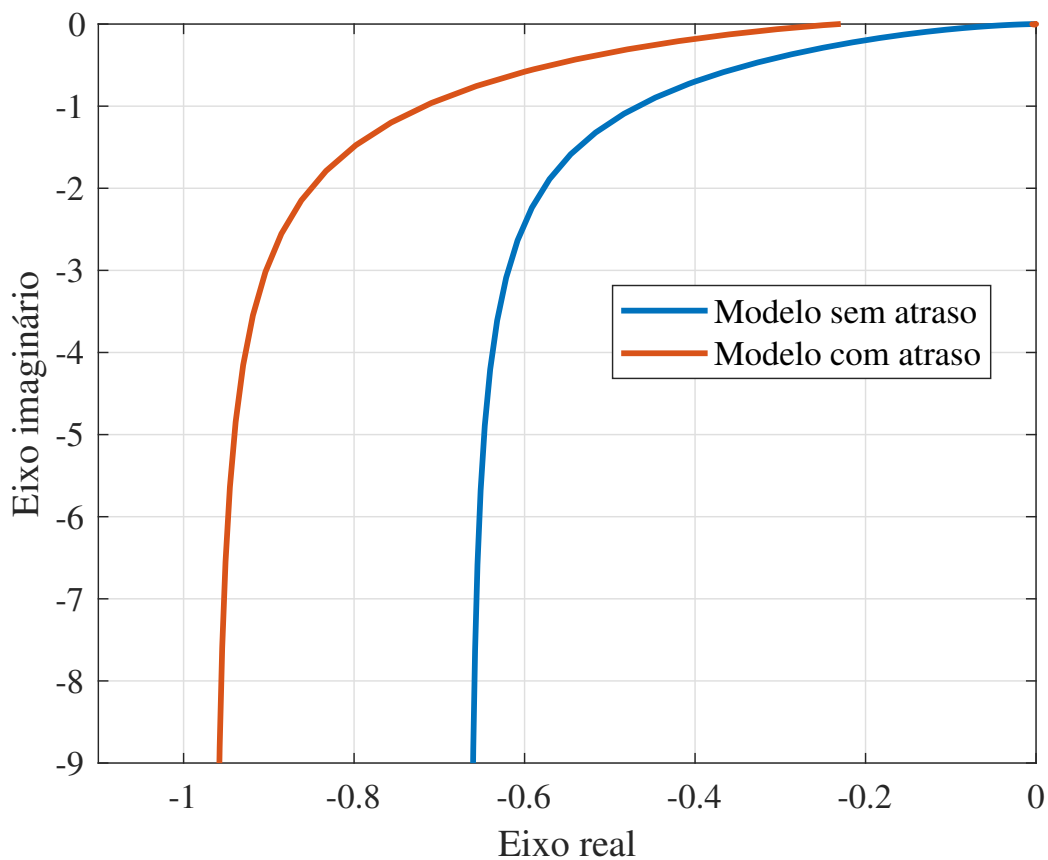
considerado o atraso de 0.3 unidades de tempo mostrado na Equação 3.2 e o caso em que tal atraso é considerado nulo. O controlador é dado pela Equação 3.3.

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \cdot e^{-0.3s}. \quad (3.2)$$

$$C(s) = 2 \cdot \frac{(s+1.5)}{s}. \quad (3.3)$$

A multiplicação da função complexa $F(s) = C(s)P(s)$ pela exponencial $e^{-0.3s}$ não muda a magnitude do sistema, mas, para cada valor de frequência, diminui a fase deste, o que pode ser observado graficamente pela rotação do diagrama no sentido horário.

Figura 24 – Diagrama de Nyquist para ganho de malha dado por $F(s) = C(s)P(s)$, em que o controlador e o modelo do processo são dados nas Equações 3.2 e 3.3, respectivamente. Foram plotados os casos com atraso e sem atraso no modelo.



Fonte: O próprio autor.

Em termos de estabilidade relativa, pode-se dizer que a margem de fase do sistema com atraso é menor, o que diminui a robustez do sistema a possíveis incertezas que diminuem a

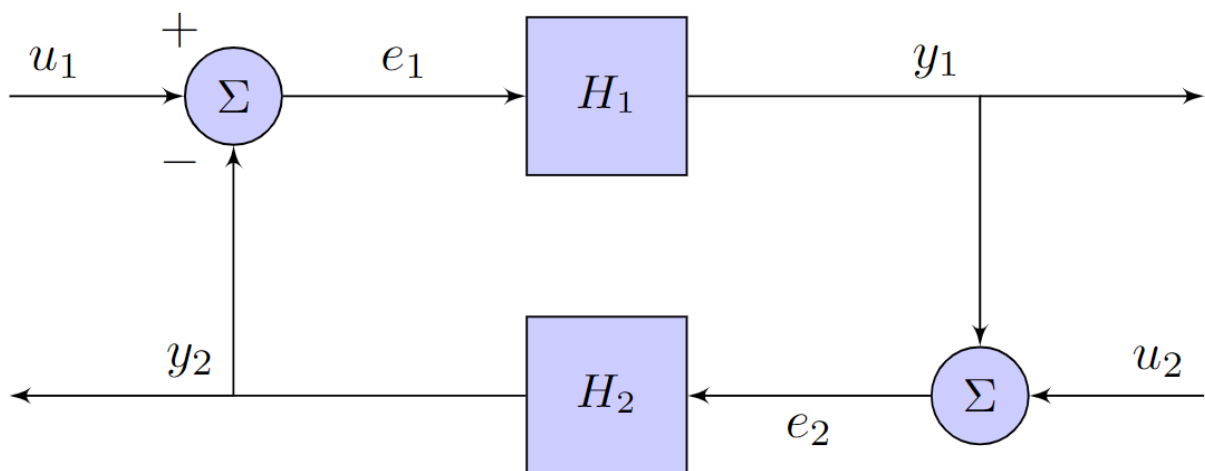
fase do sistema. Isso significa que, caso o valor do atraso utilizado do modelo seja menor que aquele verificado experimentalmente, o sistema pode tornar-se instável, ainda que o controlador projetado mantenha o modelo do sistema estável em malha fechada. Deve-se ressaltar que para sistemas com atraso constante é possível obter, no domínio da frequência, critérios analíticos exatos para a estabilidade do sistema de maneira relativamente simples. No caso mostrado anteriormente, por exemplo, o conhecimento da margem de fase do sistema já é suficiente para determinar em que situação o sistema tornar-se-á instável.

3.3 Estabilidade de sistemas com atraso variável no tempo

Quando o sistema possui atraso variável no tempo, a transformada de Laplace não pode, em geral, ser obtida para a função com argumento atrasado na equação diferencial. Ainda assim, das vantagens previamente mencionadas de se analisar os sistemas de controle por meio do domínio da frequência, vale a pena desenvolver critérios aproximados de estabilidade para tais sistemas, conforme será apresentado nesta seção. Por critérios aproximados entende-se condições suficientes, mas não necessárias, para que o sistema permaneça estável.

Neste ponto, será utilizada a definição de estabilidade de entrada-saída. Em razão de a análise dos sistemas aqui mencionada ter como foco a verificação de estabilidade para sistemas de controle em malha fechada, será estabelecida a notação para um sistema de controle realimentado de maneira genérica, conforme mostrado na Figura 25. As notações e o teorema apresentado nesta seção podem ser estudadas com detalhes em Khalil (2015).

Figura 25 – Representação genérica de um sistema interconectado por realimentação.



Fonte: O próprio autor.

Nessa representação, $H_1 : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ e $H_2 : \mathcal{L}_e^q \rightarrow \mathcal{L}_e^m$ são operadores no espaço

das funções de acordo com o que foi definido na Subseção 3.1.2. Suponha ainda que H_i seja \mathcal{L} estável com ganho finito, $i \in \{1, 2\}$, isto é, existem $\gamma_i \geq 0$ e $\beta_i \geq 0$ tais que $\|y_{ir}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_i \|e_{ir}\|_{\mathcal{L}} + \beta_i$, para todo $e_i \in \mathcal{L}_e^{n_i}$, em que $n_1 = m$ e $n_2 = q$, e para todo $r \geq 0$.

Ainda, de modo a ficar bem definida a notação utilizada na Figura 25, sejam:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

em que $u_1, y_2, e_1 \in \mathcal{L}_e^m$ e $u_2, y_1, e_2 \in \mathcal{L}_e^q$.

3.3.1 Teorema do pequeno ganho

Com base nas definições apresentadas nessa seção, será enunciado e demonstrado o Teorema do Pequeno Ganho de acordo com o que foi mostrado em Khalil (2015).

Teorema 3.3.1 (Teorema do Pequeno Ganho) *A conexão com realimentação dos sistemas H_1 e H_2 (conforme Figura 25) é \mathcal{L} estável com ganho finito se $\gamma_1 \cdot \gamma_2 < 1$.*

Demonstração. Inicialmente, pode-se escrever as expressões para as funções e_i :

$$\begin{cases} e_{1r} = u_{1r} - y_{2r}; \\ e_{2r} = u_{2r} - y_{1r}. \end{cases}$$

Da primeira expressão para e_{1r} , tem-se, da desigualdade triangular:

$$\|e_{1r}\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \|y_{2r}\|_{\mathcal{L}}.$$

Da estabilidade de H_2 , pode-se escrever:

$$\|e_{1r}\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \cdot \|e_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2.$$

Substituindo a expressão de e_{2r} e utilizando a desigualdade triangular, tem-se:

$$\|e_{1r}\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \cdot (\|u_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \|y_{1r}\|_{\mathcal{L}}) + \beta_2 = \|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \cdot \|u_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \cdot \|y_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2.$$

Da estabilidade de H_1 , pode-se substituir o termo y_{1r} :

$$\|e_{1r}\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \cdot \|u_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2(\gamma_1 \|e_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1) + \beta_2.$$

Assumindo $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \neq 1$ e isolando o termo e_{1r} do lado esquerdo da inequação, tem-se:

$$\|e_{1r}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1 \cdot \gamma_2} \cdot (\|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \cdot \beta_1 + \beta_2), \quad (3.4)$$

para todo $r \geq 0$.

Repetindo um processo análogo ao anterior para e_{2r} , pode-se obter a inequação:

$$\|e_{2r}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1 \cdot \gamma_2} \cdot (\|u_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_1 \|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_1 \cdot \beta_2 + \beta_1). \quad (3.5)$$

para todo $r \geq 0$.

Da definição da saída y do sistema interconectado e da desigualdade triangular:

$$\|y_r\|_{\mathcal{L}} \leq \|y_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \|y_{2r}\|_{\mathcal{L}}.$$

Utilizando novamente a estabilidade dos sistemas H_1 e H_2 :

$$\|y_r\|_{\mathcal{L}} \leq (\gamma_1 \|e_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1) + (\gamma_2 \|e_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2).$$

Substituindo as Equações 3.4 e 3.5, e organizando os termos, tem-se:

$$\|y_r\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_a \cdot \|u_{1r}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_b \cdot \|u_{2r}\|_{\mathcal{L}} + \beta,$$

para todo $r \geq 0$, em que $\gamma_a = \frac{\gamma_1(1 + \gamma_2)}{1 - \gamma_1 \cdot \gamma_2}$, $\gamma_b = \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1)}{1 - \gamma_1 \cdot \gamma_2}$ e $\beta = \frac{\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1}{1 - \gamma_1 \cdot \gamma_2} + \beta_1 + \beta_2$. Se $\gamma_1 \cdot \gamma_2 < 1$, tem-se $\gamma_a > 0$, $\gamma_b > 0$ e $\beta > 0$. Portanto, se $\gamma_1 \cdot \gamma_2 < 1$, o sistema conectado com realimentação é \mathcal{L} estável com ganho finito.

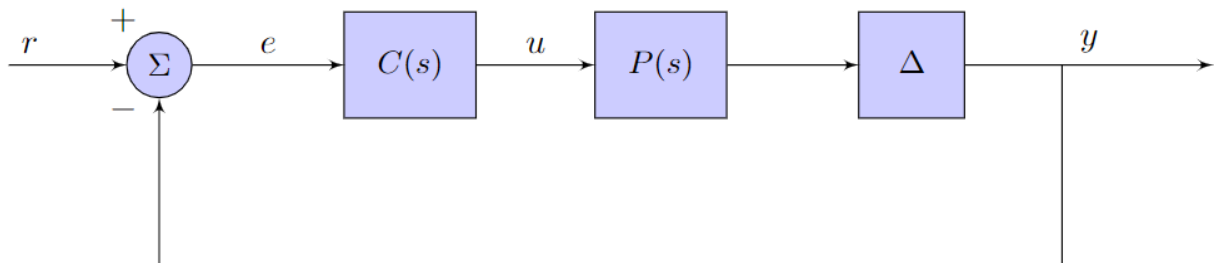
□

3.3.2 Critério de estabilidade para sistemas com atraso variável

Nesta seção será derivada uma condição de estabilidade para sistemas com atraso variável no tempo a partir do Teorema do Pequeno Ganho.

A partir do Teorema do Pequeno Ganho é possível derivar uma condição suficiente de estabilidade para sistemas com atraso variável no tempo, de acordo com o que foi apresentado em Kao e Lincoln (2004). A Figura 26 apresenta um sistema de controle em malha fechada com atraso variável no tempo representado pelo bloco Δ . Deve-se deixar claro que o bloco $P(s)$ não possui atraso, ou seja, o atraso estará concentrado no operador Δ . Como é de se esperar, o operador $\Delta \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^q); \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^q))$ pode ser definido como $g(t) = f(t - \tau(t))$, em que $g = \Delta(f)$. O Teorema 3.3.3, (KAO; LINCOLN, 2004) apresenta as condições sob as quais o sistema mostrado na Figura 26 é estável. Será apresentado somente o caso contínuo no tempo. É evidente que, em razão de as condições serem derivadas do Teorema do Pequeno Ganho, a definição de estabilidade para a análise é a de estabilidade entrada-saída.

Figura 26 – Sistema de controle em malha fechada com atraso variável no tempo dado pelo operador Δ .



Fonte: O próprio autor.

Uma das ferramentas matemáticas utilizadas na demonstração do teorema é a Desigualdade de Chebyshev. Esta será enunciada e demonstrada previamente, de modo a detalhar o resultado para o leitor interessado. A demonstração segue a ideia apresentada em Niculescu e Pecaric (2010).

Proposição 3.3.2 Dadas duas funções monótonas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de mesma monotonicidade, tem-se:

$$\int_a^b f(\xi)g(\xi)d\xi \geq \frac{1}{b-a} \cdot \left[\int_a^b f(\xi)d\xi \right] \cdot \left[\int_a^b g(\xi)d\xi \right]$$

Demonstração. Do fato de f e g serem ambas monótonas e de mesma monotonicidade, é evidente que $[f(x) - f(y)] \cdot [g(x) - g(y)] \geq 0$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$. O desenvolvimento

dessa última inequação leva a:

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(y)g(x) - f(x)g(y) \geq 0.$$

Integrando duas vezes a função do lado esquerda da desigualdade, tem-se:

$$\int_a^b \int_a^b f(x)g(x)dxdy + \int_a^b \int_a^b f(y)g(y)dxdy - \int_a^b \int_a^b f(y)g(x)dxdy - \int_a^b \int_a^b f(x)g(y)dxdy \geq 0$$

$$\implies \int_a^b \int_a^b f(x)g(x)dxdy + \int_a^b \int_a^b f(y)g(y)dxdy \geq \int_a^b \int_a^b f(y)g(x)dxdy + \int_a^b \int_a^b f(x)g(y)dxdy$$

$$\implies 2(b-a) \int_a^b f(\xi)g(\xi) \geq 2 \left[\int_a^b f(\xi)d\xi \right] \cdot \left[\int_a^b g(\xi)d\xi \right],$$

de onde o resultado enunciado no teorema segue. □

Com o resultado necessário demonstrado, o resultado principal para a estabilidade de sistemas de controle com atraso variável no tempo será enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 3.3.3 ((KAO; LINCOLN, 2004)) *Seja o sistema controlado em malha fechada representado na Figura 26 estável para o caso em que a função atraso $\tau(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, $\Delta(f) = f$. Nesse caso, o sistema com atraso variável com $\tau(t) \in [0, \tau_{max}]$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é estável se:*

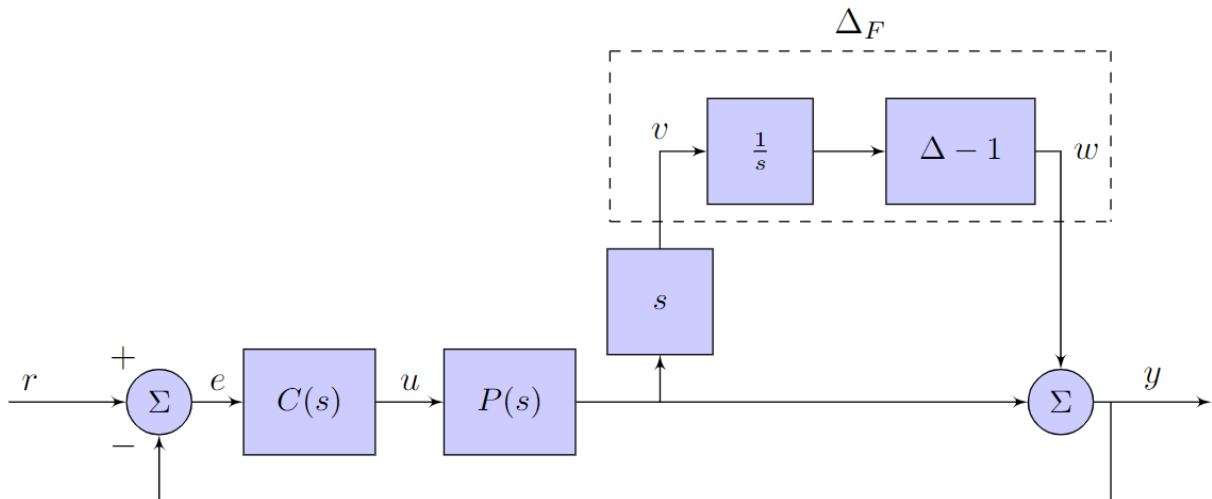
$$\sup_{\omega \geq 0} \left| \frac{j\omega P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\tau_{max}},$$

para toda frequência $\omega > 0$.

Demonstração. Como deseja-se utilizar o teorema do pequeno ganho para derivar uma condição de estabilidade para o sistema interconectado com realimentação mostrado na Figura 26, deve-se inicialmente rearranjar o sistema de modo a obter uma representação similar àquela mostrada na Figura 25. Para tanto, o bloco de atraso Δ é representado de maneira que a saída atrasada y seja a soma da saída sem atraso (dada pelo sinal de entrada no bloco Δ) com um sinal de erro

gerado pela existência do atraso. A Figura 27 mostra como fica a transformação do diagrama de acordo com o que foi explicado. Destacado pelo retângulo tracejado está o sistema Δ_F , que possui o sinal v como entrada e o sinal w como saída. O sistema restante conectado à Δ_F é dado pela conexão dos demais blocos, que possui w como entrada e v como saída.

Figura 27 – Sistema de controle em malha fechada com atraso variável no tempo dado pelo operador Δ reorganizado para uso do teorema do pequeno ganho.



Fonte: O próprio autor.

Assumindo que os sinais v e w possuem transformada de Laplace Sejam $V(s)$ e $W(s)$ as transformadas de Laplace dos respectivos sinais. A função de transferência do sistema conectado à Δ_F será denotada por $G_{wv}(s) = \frac{V(s)}{W(s)}$ e pode ser obtida por meio da Figura 27 da seguinte forma:

$$V(s) = sP(s)U(s) = sP(s)C(s)E(s) = sP(s)C(s) \left[(-W(s) - \frac{V(s)}{s}) \right] = -sP(s)C(s)W(s) - P(s)C(s)V(s),$$

em que $U(s)$ e $E(s)$ são as transformadas de Laplace de u e e , respectivamente. Isolando $V(s)$ do lado esquerdo da igualdade:

$$[1 + P(s)C(s)]V(s) = -sP(s)C(s)W(s) \implies G_{wv}(s) = \frac{V(s)}{W(s)} = \frac{-sP(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)},$$

em que a equação característica desse sistema (polinômio do denominador) é igual àquela para o sistema em malha fechada com atraso identicamente nulo, de modo que G_{wv} é um sistema estável. Essa será uma condição necessária à aplicação do Teorema do Pequeno Ganho. Portanto, o ganho do sistema, conforme a definição de estabilidade entrada-saída, é dado por:

$$\gamma_1 = \|G_{wv}\|_{L_2} = \sup_{\omega \geq 0} |G_{wv}(j\omega)| = \sup_{\omega \geq 0} \left| \frac{j\omega P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right|. \quad (3.6)$$

A estratégia da demonstração consiste em determinar uma expressão analítica para o ganho do sistema G_{wv} e um valor máximo para o ganho do sistema Δ_F . Se o produto desses dois valores é menor que a unidade, então o produto dos ganhos também o será, garantindo estabilidade entrada-saída para o sistema conectado.

Por outro lado, deve-se também obter o ganho do sistema Δ_F . Sabe-se que a saída do integrador é dada, no instante t , pelo sinal auxiliar a em t :

$$a(t) = \int_0^t v(\xi) d\xi.$$

Com isso, a aplicação do operador $\Delta - 1$ no sinal a é igual ao resultado de $\Delta_F(v)$ e pode ser expresso, no instante t , como:

$$\begin{aligned} \Delta_F(v)(t) &= \Delta(a)(t) - a(t) = a(t - \tau(t)) - a(t) = a(t) - \int_0^{t-\tau(t)} v(\xi) d\xi - \int_0^t v(\xi) d\xi \\ \implies w(t) &= \Delta_F(v)(t) = - \int_{t-\tau(t)}^t v(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para majorar o ganho do sistema Δ_F , pode-se buscar o máximo valor da relação entre as normas dos sinais w e v . Assim:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt = \int_0^\infty \left[- \int_{t-\tau(t)}^t v(\xi) d\xi \right]^2 dt = \int_0^\infty \left[\int_{t-\tau(t)}^t v(\xi) d\xi \right]^2 dt. \quad (3.8)$$

Neste ponto será utilizada a desigualdade de Chebyshev, conforme apresentado na Proposição 3.3.2. Para tanto, bastam substituir o intervalo $[a, b]$ pelo intervalo $[t - \tau(t), t]$ e as funções f, g pela mesma função v . Com isso,

$$\int_{t-\tau(t)}^t [v(\xi)]^2 d\xi \geq \frac{1}{\tau(t)} \cdot \left[\int_{t-\tau(t)}^t v(\xi) d\xi \right]^2 \implies \left[\int_{t-\tau(t)}^t v(\xi) d\xi \right]^2 \leq \tau(t) \int_{t-\tau(t)}^t [v(\xi)]^2 d\xi.$$

Da premissa de que o atraso é uma função limitada por τ_{max} , pode-se escrever:

$$\left[\int_{t-\tau(t)}^t v(\xi) d\xi \right]^2 \leq \tau_{max} \int_{t-\tau(t)}^t [v(\xi)]^2 d\xi. \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação 3.9 na Equação 3.8, tem-se:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \int_0^\infty \left[\tau_{max} \int_{t-\tau(t)}^t [v(\xi)]^2 d\xi \right] dt = \tau_{max} \int_0^\infty \left[\int_{t-\tau(t)}^t [v(\xi)]^2 d\xi \right] dt.$$

Como $[v(\xi)]^2 \geq 0$, a integral em ξ representa a área sob $[v(\xi)]^2$ no intervalo $[t - \tau(t), t]$. Como o intervalo $[t - \tau_{max}, t]$ é maior ou igual que o intervalo anterior, tem-se que a área calculada nesse intervalo é também maior ou igual àquela dada pela integral. Portanto, pode-se escrever:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \tau_{max} \int_0^\infty \left[\int_{t-\tau_{max}}^t [v(\xi)]^2 d\xi \right] dt.$$

Com o intuito de retirar a variável tempo t dos limites de integração da integral interna, será realizada uma mudança de variável com $\xi = t + \varepsilon$. Com isso, a desigualdade para a norma ao quadrado do sinal w fica:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \tau_{max} \int_0^\infty \left[\int_{-\tau_{max}}^0 [v(t + \varepsilon)]^2 d\varepsilon \right] dt.$$

Isso permite que a ordem das integrais na expressão seja mudada:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \tau_{max} \int_{-\tau_{max}}^0 \int_0^\infty [v(t + \varepsilon)]^2 dt d\varepsilon.$$

Recuperando a variável original $\xi = t + \varepsilon$:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \tau_{max} \int_{-\tau_{max}}^0 \int_\varepsilon^\infty [v(\xi)]^2 d\xi d\varepsilon.$$

Observe que a integral interna representa a área sob a função $[v(\xi)]^2 \geq 0$ para todo tempo maior que ε . Nesse ponto, é assumida a premissa de que $v(\xi)$ é zero para valores não positivos de ξ . Tal premissa é adequada à realidade, tendo em vista que v representa a derivada

da saída do modelo do processo sem atraso. Dos limites da integral em ε , tem-se ξ variando entre valores não positivos e, portanto, pode-se escrever:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \tau_{max} \int_{-\tau_{max}}^0 \int_0^{\infty} [v(\xi)]^2 d\xi d\varepsilon,$$

em que a integral interna não depende de ε e, portanto:

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \tau_{max} \cdot \tau_{max} \int_0^{\infty} [v(\xi)]^2 d\xi = \tau_{max}^2 \int_0^{\infty} [v(\xi)]^2 d\xi = \tau_{max}^2 \|v\|_{\mathcal{L}_2}^2.$$

Da definição de estabilidade entrada-saída, o sistema Δ_F é estável e o ganho γ_2 do sistema vale, no máximo, τ_{max} , isto é: $\gamma_2 = \|\Delta_F\|_{L_2} \leq \tau_{max}$. Portanto, uma condição suficiente para que o sistema em malha fechada com atraso variável seja estável é $\gamma_1 \cdot \tau_{max} < 1 \implies \gamma_1 < 1/\tau_{max}$. Com efeito, se isso ocorrer, então $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \leq \gamma_1 \cdot \tau_{max} \implies \gamma_1 \cdot \gamma_2 < 1$. Com isso, segue o resultado do teorema.

□

A importância do Teorema 3.3.3 se dá por tornar possível analisar a estabilidade de sistemas de controle com atraso variável no tempo e também deixa possibilidades para o desenvolvimento de regras de sintonia para controladores de modo a satisfazer as condições do teorema e garantir estabilidade. Uma aplicação direta desse teorema é apresentada para a análise de estabilidade de sistemas com atraso variável na Subseção 3.4.2.

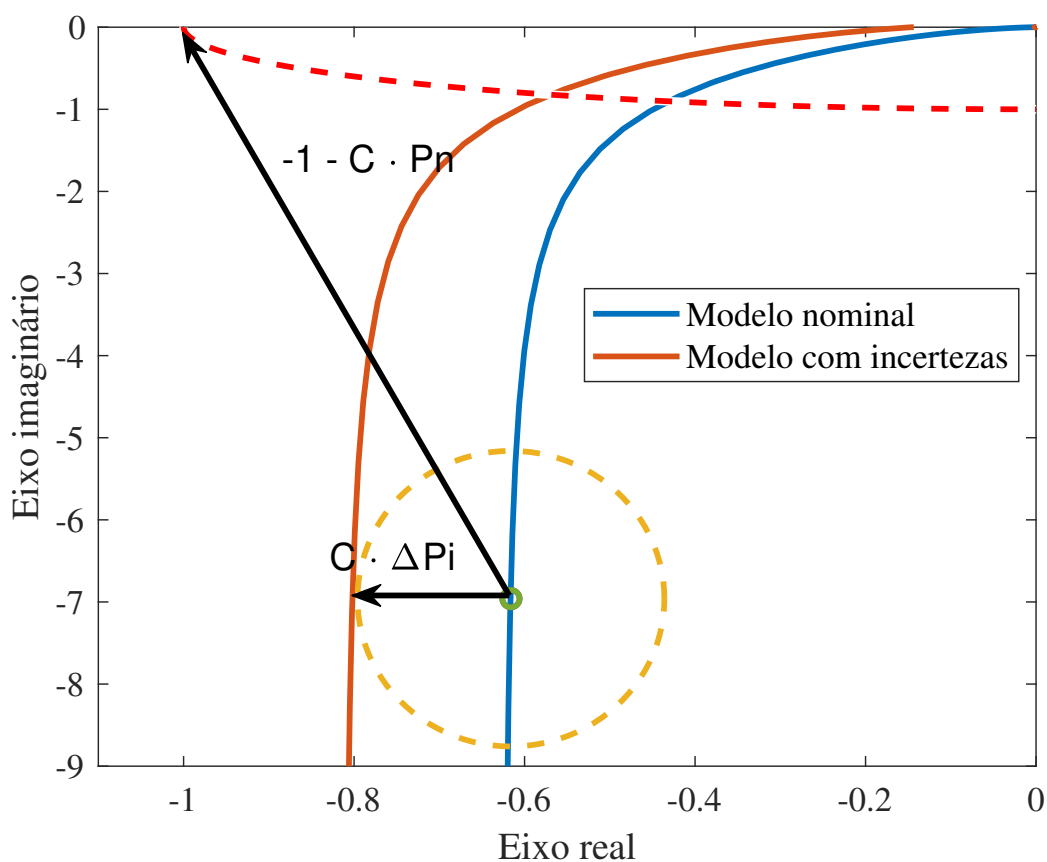
3.4 Estabilidade robusta

Nesta seção serão definidos os principais conceitos referentes à análise de estabilidade robusta no domínio da frequência.

Robustez diz respeito à capacidade de determinado sistema de controle permanecer estável diante de variações de determinados parâmetros incertos. Nos processos reais, é necessário que o controlador projetado seja robusto, de modo a garantir que variações (em determinada faixa) não levem o sistema à instabilidade. A derivação de uma condição analítica de estabilidade robusta no domínio da frequência pode ser feita por meio do diagrama de Nyquist. Considere C o controlador utilizado, P_n o modelo nominal do processo e P_i o modelo incerto do processo. A Figura 28 apresenta um exemplo de diagrama de Nyquist para os modelos nominal e com uma incerteza no atraso. Conforme mostrado na Seção 3.2, a incerteza que insere um

atraso no sistema diminui a margem de fase, tornando o sistema relativamente menos estável que aquele representado pelo modelo sem atraso. Para incertezas diversas é possível gerar um círculo (tracejado laranja) em torno do ponto $C(j\omega)P(j\omega)$ (em verde) de raio $|C(j\omega)\Delta P_i(j\omega)|$ de todos os pontos para os quais o centro pode deslocar-se diante de uma incerteza. Por $|\Delta P_i(j\omega)|$ entende-se o vetor complexo resultante da diferença $P_i(j\omega) - P_n(j\omega)$.

Figura 28 – Diagrama de Nyquist de um sistema em malha fechada: modelo nominal e modelo com incerteza. As distâncias relevantes à análise de estabilidade robusta estão destacadas por meio dos vetores complexos $C(j\omega)\Delta P_i(j\omega)$ e $-1 - C(j\omega)P_n(j\omega)$.



Fonte: O próprio autor.

Dessas definições, se o sistema nominal em malha fechada é estável e, portanto, o gráfico de $C(j\omega)P(j\omega)$ não circunscreve o ponto $(-1,0)$ no diagrama de Nyquist, a condição para que nenhuma incerteza gere instabilidade no sistema é dada por: para cada frequência $\omega \geq 0$, o raio $|C(j\omega)\Delta P_i(j\omega)|$ do círculo de incertezas centrado em $C(j\omega)P(j\omega)$ deve ser menor que a distância desse centro ao ponto $(-1,0)$, dada por $|-1 - C(j\omega)P_n(j\omega)|$. Com efeito, se esse não fosse o caso, haveria alguma frequência para a qual determinada incerteza faria o diagrama de Nyquist do sistema incerto circunscrever o ponto $(-1,0)$, fazendo o sistema ser instável em malha fechada. Matematicamente, a condição de estabilidade robusta descrita acima pode ser escrita

como:

$$|C(j\omega)\Delta P_i(j\omega)| < |-1 - C(j\omega)P_n(j\omega)|, \quad (3.10)$$

para todo $\omega \geq 0$.

3.4.1 Condição de estabilidade robusta

A condição de estabilidade robusta pode ser obtida por meio da Inequação 3.10. Eliminando os sinais negativos no segundo membro e dividindo ambos os lados da inequação por $|P_n(j\omega)|$, o sistema terá estabilidade robusta se:

$$\frac{|C(j\omega)\Delta P_i(j\omega)|}{|P_n(j\omega)|} < \frac{|1 + C(j\omega)P_n(j\omega)|}{|P_n(j\omega)|} \implies \left| \frac{C(j\omega)\Delta P_i(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| < \left| \frac{1 + C(j\omega)P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right|,$$

para todo $\omega \geq 0$. Passando o termo $|C(j\omega)|$ do numerador do lado esquerdo para o denominador do lado direito da igualdade, é obtida uma expressão interessante:

$$\left| \frac{\Delta P_i(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| < \left| \frac{1 + C(j\omega)P_n(j\omega)}{C(j\omega)P_n(j\omega)} \right|. \quad (3.11)$$

Essa expressão é útil porque seu lado esquerdo somente depende do modelo nominal e do modelo com incertezas, enquanto o lado direito da desigualdade depende somente do ganho de malha do sistema em malha fechada com o modelo nominal. O lado direito é exatamente igual ao inverso multiplicativo da função de transferência de malha fechada para o caso em que a planta é igual ao modelo nominal. As seguintes definições tornarão mais compacta ainda a condição suficiente de estabilidade robusta:

Definição 3.4.1 (Incerteza multiplicativa) *É a função complexa $\delta P_i(j\omega)$ dada pela razão*

$$\delta P_i(j\omega) = \frac{\Delta P_i(j\omega)}{P_n(j\omega)}.$$

Observe que a incerteza multiplicativa depende da incerteza analisada. Faz sentido, portanto, que seja definida uma função somente da frequência que possa ser utilizada na análise de estabilidade robusta de um sistema para qualquer incerteza considerada. A função é a máxima incerteza multiplicativa, dada por:

$$\overline{\delta P}(\omega) = \max_i |\delta P_i(j\omega)|.$$

Vale ressaltar que a máxima incerteza multiplicativa não necessariamente será o módulo de uma das incertezas multiplicativas, pois, para cada frequência, $\overline{\delta P}$ toma o valor da maior incerteza δP_i na frequência ω .

Definição 3.4.2 (Índice de robustez) *É a função real de uma variável real, a frequência, dada pelo módulo do inverso multiplicativo da função de transferência de malha fechada:*

$$I_r(\omega) = \left| \frac{1 + C(j\omega)P_n(j\omega)}{C(j\omega)P_n(j\omega)} \right|.$$

Com isso, a Equação 3.11 pode ser escrita como $\|\delta P_i(j\omega)\| < I_r(\omega)$, para todo $\omega \geq 0$. Pode-se ainda recorrer a um resultado menos conservador, mas ainda assim bastante útil, que é a condição de estabilidade robusta dada pela Equação 3.12:

$$\overline{\delta P}(\omega) < I_r(\omega), \tag{3.12}$$

para todo $\omega \geq 0$. De fato, se isso ocorre, o módulo de qualquer incerteza multiplicativa, independentemente da incerteza considerada, será menor que o índice de robustez. O Exemplo 6 apresenta uma aplicação direta dos conceitos apresentados até então sobre estabilidade robusta.

Exemplo 6 *Considere o modelo de incertezas de um processo de segunda ordem dado por:*

$$P_i(s) = \frac{K_i}{(s - p_i)(s + 3)} \cdot e^{-L_i \cdot s},$$

em que $p_i \in [-1.2, -0.8]$, $K_i \in [0.9, 1.1]$ e $L_i \in [0, 0.5]$. O modelo nominal do processo é dado por:

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}. \tag{3.13}$$

Para esse caso, deve-se observar que, apesar de incerto, o atraso temporal representado pela exponencial complexa é constante, o que permite a obtenção da transformada de Laplace. Numericamente, cada intervalo de incertezas nos quais estão definidas as incertezas para o polo, o ganho e o atraso da planta foi dividido em intervalos de comprimento

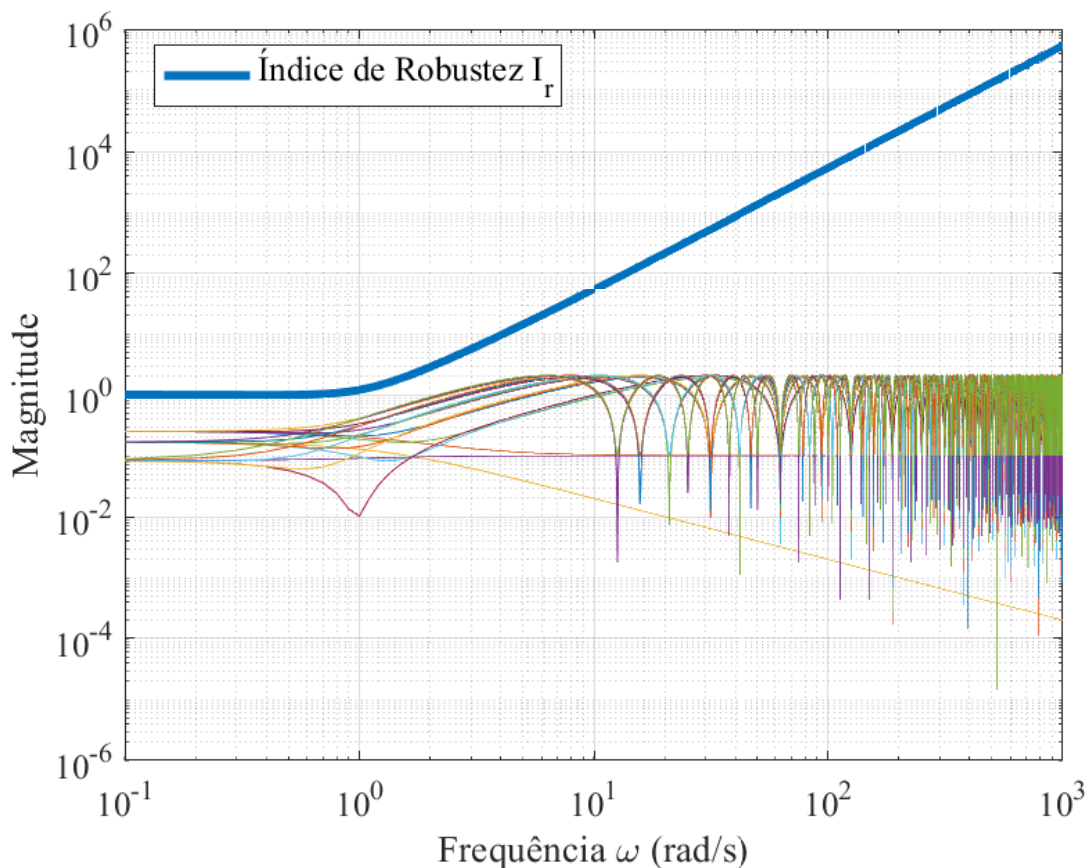
0.1, o que permitiu, para cada um dos modelos incertos, a obtenção de uma máxima incerteza multiplicativa.

O controlador utilizado para estabilizar o processo nominal é um controlador Proporcional-Integral dado por:

$$C(s) = 1.875 \cdot \frac{(s + 1.5)}{s}. \quad (3.14)$$

Dado o controlador e o modelo nominal do processo, pode-se obter o índice de robustez, o qual depende somente do modelo nominal, e as incertezas multiplicativas. A Figura 29 mostra, em azul, o índice de robustez para o sistema, enquanto as demais curvas representam todas as incertezas multiplicativas do sistema, cada uma associada a uma tripla ordenada de incertezas $(p_i, K_i, p_i) \in [-1.2, -0.8] \times [0.9, 1.1] \times [0, 0.5]$.

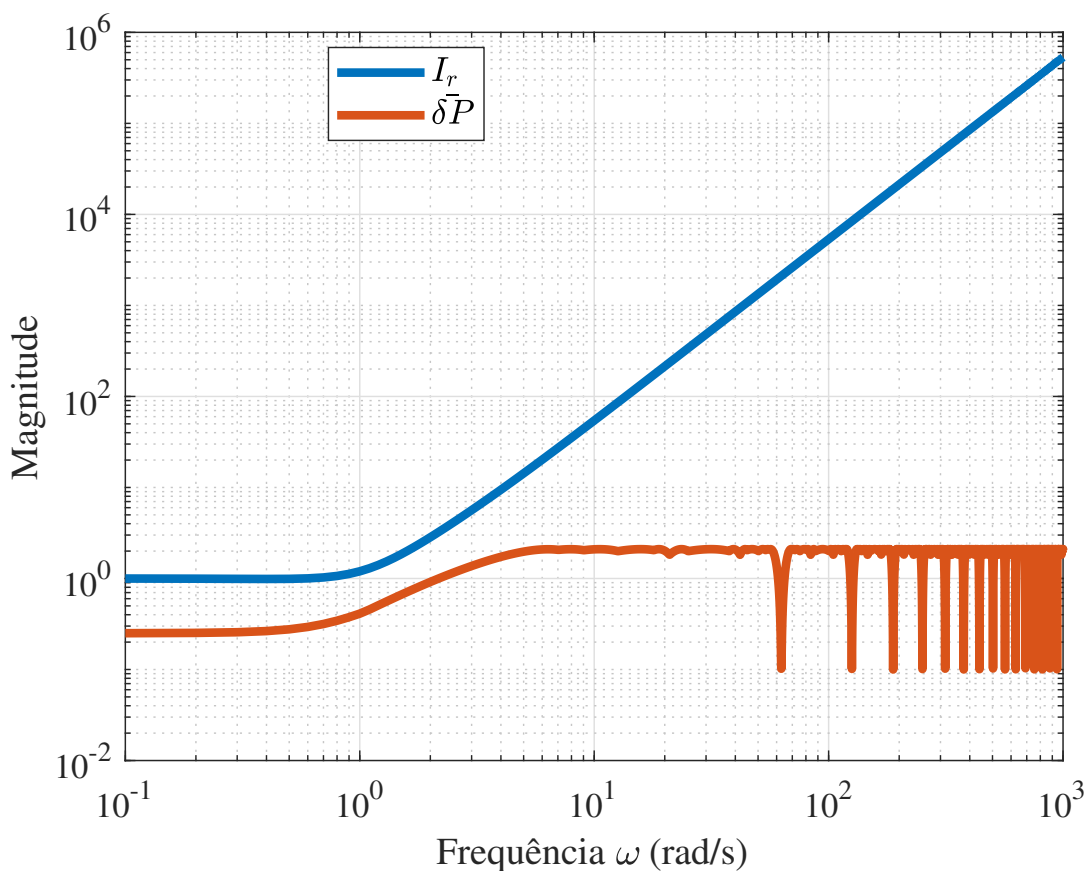
Figura 29 – Em azul, o índice de robustez referente ao modelo nominal da Equação 3.13 controlado pelo controlador Proporcional-Integral da Equação 3.14. As demais curvas representam as diversas incertezas multiplicativas para cada uma das incertezas do sistema geradas pelos pontos $(p_i, K_i, p_i) \in [-1.2, -0.8] \times [0.9, 1.1] \times [0, 0.5]$.



Fonte: O próprio autor.

Visualmente, é possível perceber que o índice de robustez está acima de todas as incertezas multiplicativas, para qualquer frequência. A condição de estabilidade apresentada pela desigualdade em 3.12 está em função da máxima incerteza multiplicativa, o que facilita a análise de estabilidade no domínio da frequência. Isso porque, conforme mostrado na Figura 30, somente é necessário comparar duas curvas no domínio da frequência: o índice de robustez e a máxima incerteza multiplicativa.

Figura 30 – Gráfico comparativo da máxima incerteza multiplicativa $\overline{\delta P}$ com o índice de robustez I_r para o sistema de controle em malha fechada descrito no Exemplo 6.

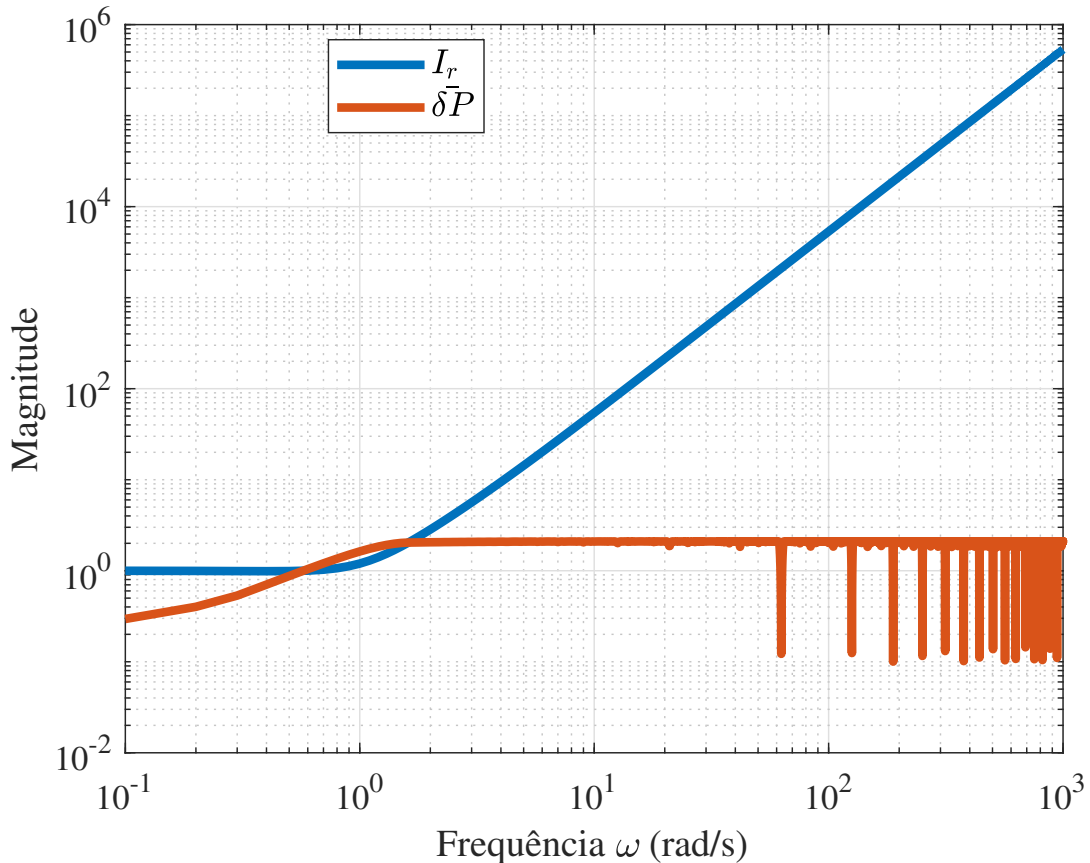


Fonte: O próprio autor.

Conclui-se que, apesar das incertezas, o sistema permanece estável, o que significa que tal estabilidade é robusta. Deve-se ressaltar que, no caso em que essa condição não é obedecida, o sistema não necessariamente é instável. Com efeito, a condição obtida é suficiente, mas não necessária à estabilidade. Para o caso em que a incerteza do atraso toma valores de até 2 unidades de tempo, o gráfico de comparação pode ser visto na Figura 31, na qual existem frequências nas quais a máxima incerteza multiplicativa torna-se maior que o índice de robustez.

Não é possível concluir que o sistema necessariamente será instável nessa situação,

Figura 31 – Gráfico comparativo da máxima incerteza multiplicativa $\overline{\delta P}$ com o índice de robustez I_r para o sistema de controle em malha fechada descrito no Exemplo 6 quando o atraso toma valores incertos em até 2 unidades de tempo.



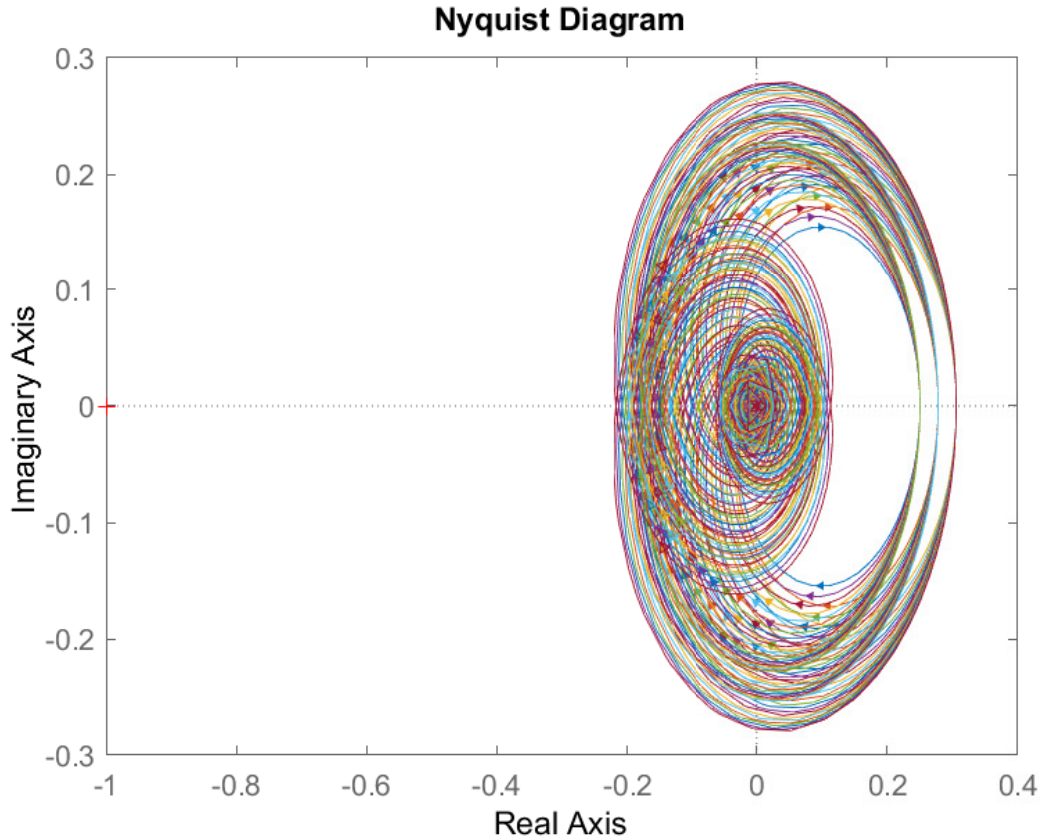
Fonte: O próprio autor.

mas não há garantia de que ele será estável. Isso porque, para algum valor de frequência ω , pode ser que a incidência de uma incerteza desloque o diagrama de Bode do sistema para uma posição que circunscreva o ponto $(-1,0)$ do plano complexo. Para esse caso, especificamente, o sistema não é instável para nenhum valor de incerteza, conforme mostrado pelos diagramas de Nyquist para todas as incertezas mostrado na Figura 32.

Embora no Exemplo 6 a obtenção analítica da máxima incerteza multiplicativa seja demasiado extensa e desnecessária para os propósitos de análise, é interessante derivar a expressão para a máxima incerteza multiplicativa para o caso em que a incerteza incide unicamente no atraso. Isso porque a expressão obtida auxilia na compreensão da forma da máxima incerteza multiplicativa no domínio da frequência. O Exemplo 7 mostra como a máxima incerteza multiplicativa pode ser obtida nessa situação.

Exemplo 7 Considere o modelo com incertezas no domínio da frequência dado por:

Figura 32 – Diagrama de Nyquist que mostra estabilidade para qualquer ponto de incerteza para o sistema em malha fechada descrito no Exemplo 6 quando o atraso toma valores incertos em até 2 unidades de tempo.



Fonte: O próprio autor.

$$P_i(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-L_i \cdot s},$$

em que o modelo nominal é denotado por P_n e corresponde ao modelo com incertezas sem a exponencial complexa do atraso. A partir dessas definições, é possível calcular o valor de cada uma das incertezas multiplicativas. Por definição, tem-se:

$$\delta P_i(j\omega) = \frac{\Delta P_i(j\omega)}{P_n(j\omega)} = \frac{P_i(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} = \frac{P_i(j\omega)}{P_n(j\omega)} - 1 = \frac{\frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-L_i \cdot j\omega}}{\frac{K}{\tau s + 1}} - 1 = e^{-jL_i \cdot \omega} - 1.$$

Expressando a exponencial complexa em termos de senos e cossenos para, então obter uma expressão em termos de arcos metade:

$$\delta P_i(j\omega) = \cos(\omega L_i) - j \sin(\omega L_i) - 1 = \cos^2(\omega L_i/2) - \sin^2(\omega L_i/2) - 2j \cos(\omega L_i/2) \sin(\omega L_i/2) - 1.$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria no primeiro termo com cosseno:

$$\begin{aligned}\delta P_i(j\omega) &= 1 - \sin^2(\omega L_i/2) - \sin^2(\omega L_i/2) - 2j \cos(\omega L_i/2) \sin(\omega L_i/2) - 1 \\ \implies \delta P_i(j\omega) &= -2 \sin^2(-\omega L_i/2) + 2j \cos(-\omega L_i/2) \sin(-\omega L_i/2).\end{aligned}$$

Colocando os termos repeditos em evidência:

$$\delta P_i(j\omega) = 2j \sin(\omega L_i/2) [\cos(-\omega L_i/2) + j \sin(-\omega L_i/2)] = 2j \sin(\omega L_i/2) e^{-j\omega L_i/2}.$$

Tal desenvolvimento justifica-se pela obtenção de uma expressão simplificada para a incerteza multiplicativa com o intuito de, por meio da função módulo complexo, obter a máxima incerteza multiplicativa dada por:

$$\overline{\delta P}(\omega) = \max_i \{|\delta P_i(j\omega)|\} = \max_i \{|2j \sin(\omega L_i/2) e^{-j\omega L_i/2}|\} = \max_i \{|2 \sin(\omega L_i/2)|\},$$

o que finaliza a obtenção de tal máxima incerteza multiplicativa.

3.4.2 Estabilidade robusta para sistemas com atraso variável

Nesta subseção serão aplicados os conceitos de estabilidade robusta para sistemas com atraso variável no tempo. Nesse caso, pode-se considerar o atraso um parâmetro desconhecido e tratá-lo como uma incerteza, para a qual somente é conhecido o valor máximo. A partir da condição de estabilidade apresentada no Teorema 3.3.3 e da definição de índice de robustez, pode-se escrever:

$$\sup_{\omega \geq 0} \left| \frac{j\omega P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\tau_{max}} \implies \sup_{\omega \geq 0} \left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\omega \tau_{max}}$$

$$\implies \frac{1}{I_r(\omega)} \leq \sup_{\omega \geq 0} \left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\omega \tau_{max}},$$

da definição de supremo e de índice de robustez. Portanto, o sistema em malha fechada com atraso variável será estável se, para qualquer $\omega \geq 0$, for $\frac{1}{I_r(\omega)} < \frac{1}{\omega \tau_{max}}$, isto é:

$$\omega \cdot \tau_{max} < I_r(\omega), \quad (3.15)$$

para todo $\omega \in [0, \infty)$. Tomando como base a condição de estabilidade robusta mostrada na Equação 3.12, pode-se interpretar o termo $\omega \tau_{max}$ como a máxima incerteza multiplicativa de um sistema cuja incerteza incide no atraso. Essa expressão, além de sua simplicidade, é útil por fornecer uma condição no domínio da frequência para a estabilidade de um sistema variante no tempo, o que não é trivial em razão da impossibilidade de ser aplicada a transformada de Laplace no sinal com atraso variável. O Exemplo 8 apresenta uma análise de estabilidade para um sistema com atraso variável em malha fechada controlado por um controlador proporcional-integral.

Exemplo 8 *Seja o modelo nominal do processo dado por um sistema normalizado de primeira ordem:*

$$G(s) = \frac{1}{s+1},$$

e assuma que a incerteza no atraso será modelada não mais como um conjunto de possíveis pontos que podem ser assumidos por um atraso constante, mas como uma função variável no tempo, tomando valores no intervalo $[0, 0.5]$. Um possível exemplo de função atraso a ser modelada por tal incerteza seria $\tau(t) = 0.25 + 0.25\sin(t)$, pois nesse caso, seria $\tau_{max} = 0.5$. Conhecido o valor máximo do atraso, já é possível interpretar no domínio da frequência o que seria a curva equivalente à máxima incerteza multiplicativa. Em termos de equações diferenciais funcionais, tal planta seria representada no domínio do tempo como:

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t - \tau(t)),$$

em que y é saída da planta e u é o sinal entrada.

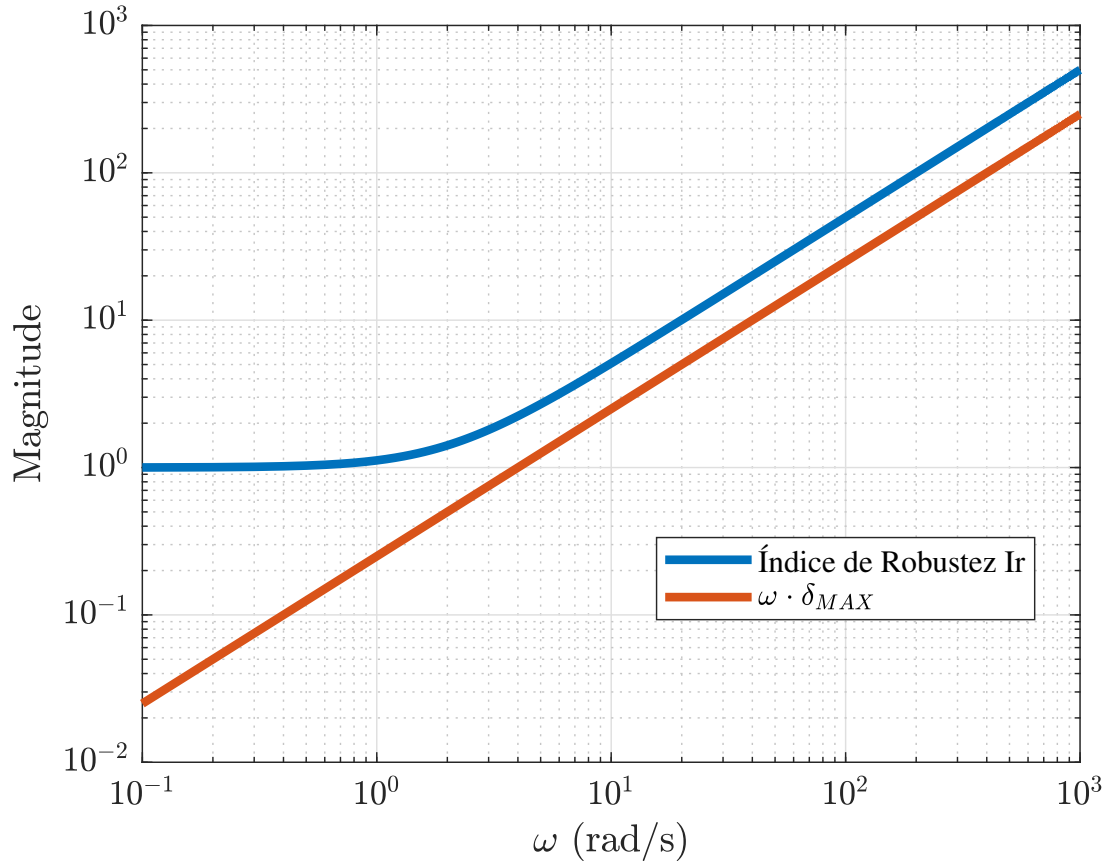
Para o fechamento de malha do sistema, foi utilizado o controlador dado por:

$$C(s) = 2 \frac{(s+1)}{s},$$

de modo que o índice de robustez do sistema já pode ser calculado. Com isso, é possível analisar a estabilidade do sistema por meio da Figura 33, que mostra um gráfico comparativo entre o índice de robustez do sistema e a máxima incerteza multiplicativa para o caso em que a incerteza é dada somente pelo atraso variável no tempo.

Pode-se concluir, para esse caso, que o sistema é estável, ainda que o atraso seja variável no tempo com valor máximo de 0.5. Deve-se ressaltar aqui o comportamento crescente

Figura 33 – Análise de estabilidade no domínio da frequência por meio da comparação entre o índice de robustez e a máxima incerteza multiplicativa para o caso em que a incerteza é modelada por uma função atraso variável no tempo.



Fonte: O próprio autor.

da máxima incerteza multiplicativa para valores crescentes de frequência, o que não se verificava para o caso em que o atraso era constante.

4 ESTABILIDADE DE SISTEMAS EM MALHA FECHADA COM ATRASO VARIÁVEL

Neste capítulo será mostrado que a análise de estabilidade de sistemas de controle com atraso variável no tempo é interessante não somente do ponto de vista da modelagem de incertezas no atraso por meio de funções variáveis no tempo, mas também como uma abordagem à análise de estabilidade de sistemas discretos. A ideia é que um sistema contínuo que recebe sinais de controle amostrados pode ser representado como um sistema contínuo com atraso variável na forma de dente de serra, isto é, contínuo por partes, conforme Fridman *et al.* (2004). A terminologia de atraso do tipo dente de serra advém da tradução literal do termo utilizado em inglês "sawtooth delay", (LIU *et al.*,), e será entendido como a função contínua por partes dada por $f(x) = x - m \cdot w$, para $x \in [m \cdot w, (m + 1) \cdot w)$, em que $m \in \mathbb{N}_0$ e $w > 0$ é um número real.

Em consonância com o que foi apresentado na Subseção 2.3.2, o sistema com o atraso do tipo dente de serra fica bem definido, sem problemas relacionados à causalidade, dado que a função de atraso definida possui derivada unitária (não maior que 1). No restante do texto, sempre que mencionado atraso com forma de dente de serra, entender-se-á que trata-se do caso com derivada unitária.

4.1 Sistemas de controle com atraso do tipo dente de serra

Nesta seção será mostrado de que forma um sistema contínuo com entradas de controle amostradas pode ser representado como um sistema contínuo com atraso variável na forma de dente de serra. Ademais, será apresentado um caso em que um sistema estável sem atraso passa a ser instável com atraso na forma de dente de serra, e também um exemplo de um sistema estável sem atraso que torna-se instável a partir da variação do atraso com forma de dente de serra. Conclusões acerca desses comportamentos são realizadas no decorrer do texto.

4.1.1 Sistemas de controle amostrados

Nesta subseção, pretende-se descrever de que maneira um sistema com entrada de controle amostrada relaciona-se com um sistema com atraso na forma de dente de serra.

Os sistemas de controle amostrados são bastante utilizados em razão da atual simplicidade em ser implementado um sistema de controle por meio de controladores digitais. Com isso, dinâmicas no tempo contínuo recebem um sinal de controle amostrado, o que pode ser re-

presentado por modelo matemático com atraso variável, conforme mostrado a seguir. Considere o sistema dinâmico em tempo contínuo dado por:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t),$$

em que $u(t)$ é o valor de um sinal gerado por um segurador de ordem zero no tempo t . De fato, o processo digital responsável por gerar os sinais de controle somente o faz para instantes discretos, separados entre si por um tempo de amostragem T_s . Para o caso em que uma lei de controle de realimentação de estados é utilizada, os valores dos estados somente são conhecidos para instantes discretos de tempo, ou seja, os instantes em que o sistema de coleta de dados adquire tais valores. Com isso, ficam definidos somente os valores dos estados nos instantes de tempo t_k dados por $t_k = k \cdot T_s$, isto é, múltiplos inteiros do tempo de amostragem. Com o uso de um segurador de ordem zero, o sinal de controle no instante de tempo $t \in [t_k, t_{k+1})$ é dado por $u(t) = K \cdot x(t_k)$. Com isso, o sistema resultante é dado pela Equação 4.1.

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bKx(t_k), \tag{4.1}$$

para $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Por outro lado, um sistema com atraso temporal na forma de dente de serra pode ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - L(t)), \tag{4.2}$$

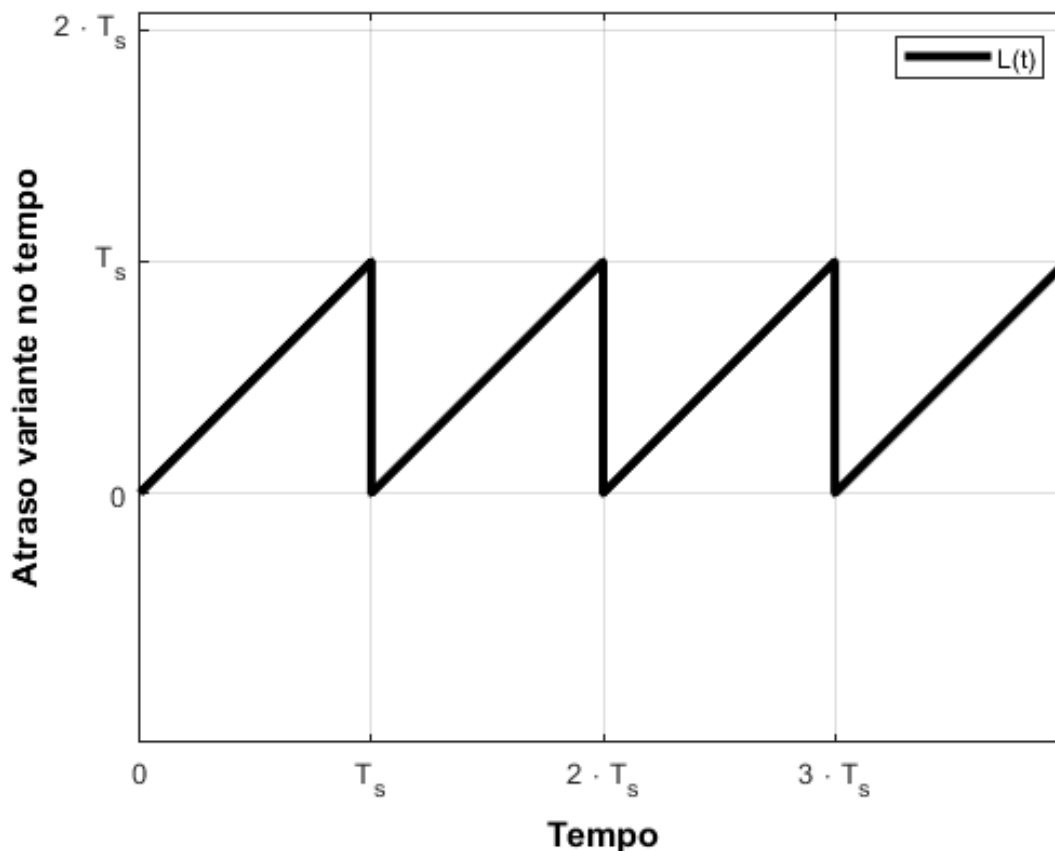
em que $L(t) = t - k \cdot T_s$ para $t \in [k \cdot T_s, (k + 1) \cdot T_s)$, $k \in \mathbb{N}_0$, é o atraso do sistema no instante de tempo t . Da premissa de que o atraso possui forma de dente de serra, pode-se visualizar a função atraso graficamente na Figura 34.

Utilizando a mesma notação que mostrada para sistemas amostrados em que $t_k = k \cdot T_s$, tem-se $L(t) = t - t_k$, para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Portanto, o sistema com atraso da Equação 4.2 pode ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - (t - t_k)) \implies \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t_k),$$

para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Esse sistema pode ser comparado àquele representado pela Equação 4.1, ficando evidente a equivalência entre o sistema em malha fechada com sinais de controle gerados

Figura 34 – Gráfico da evolução do atraso variável com forma de dente de serra $L(t)$.

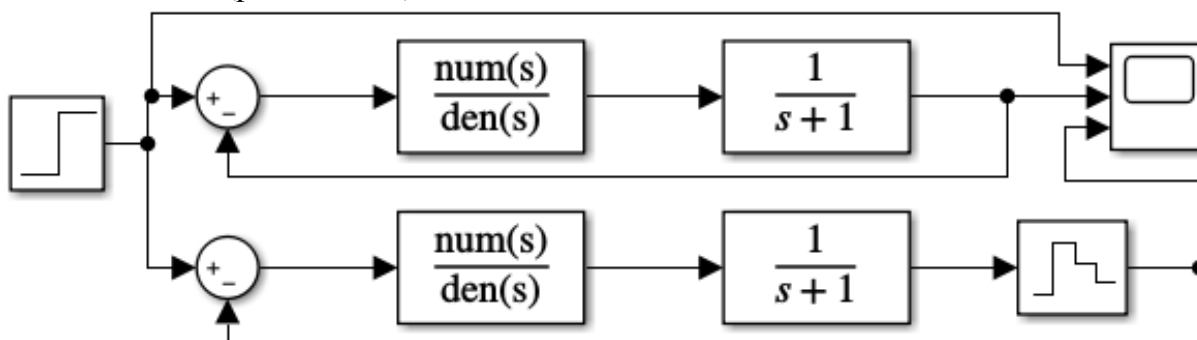


Fonte: (BRAGA, 2021).

por um segurador de ordem zero e um sistema com atraso variável na forma de dente de serra. A vantagem de tal equivalência está na análise de estabilidade do sistema inicial por meio de ferramentas da teoria de controle para sistemas com atraso. Nesse contexto, o tempo de amostragem T_s de um sistema amostrado e da amplitude do atraso variável no tempo associado a tal sistema são iguais e representam a mesma informação referente ao sistema de controle.

Essa característica permite não somente que os sistemas com atraso do tipo dente de serra sejam entendidos por outra perspectiva, mas também que a obtenção quantitativa de sua resposta temporal seja realizada por meio da formulação de sistemas discretos. Com efeito, uma forma bastante simples e prática, utilizada em Braga (2021), para a obtenção de respostas temporais de sistemas com atraso do tipo dente de serra é a implementação de um segurador de ordem zero concatenado ao modelo do processo sem atraso. O diagrama de blocos do SIMULINK mostrado na Figura 35 foi montado para mostrar que o bloco do MATLAB "ZOH" representa o atraso com forma de dente de serra.

Figura 35 – Diagrama de blocos no SIMULINK utilizado para comparar a resposta sem atraso (parte superior do diagrama) com a resposta temporal atrasada por um atraso variável com forma de dente de serra (parte inferior).



Fonte: (BRAGA, 2021).

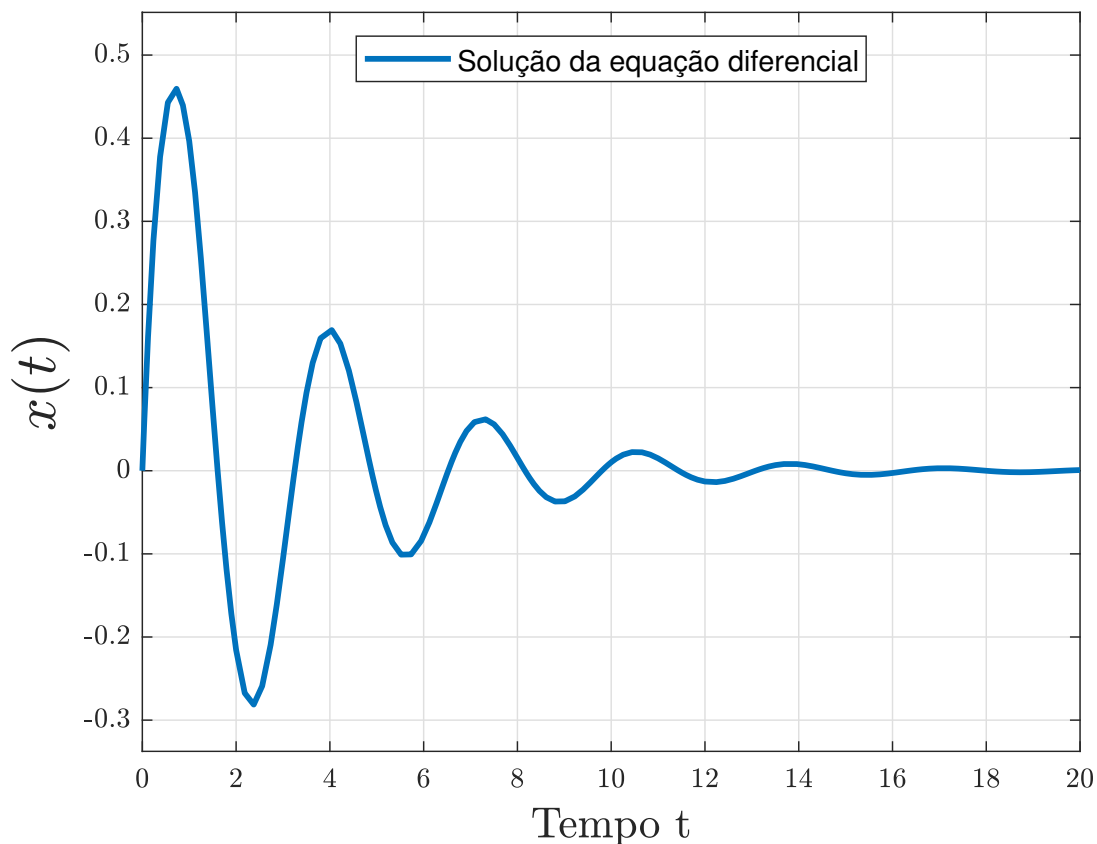
4.1.2 O atraso do tipo dente de serra como causa de instabilidade

Motivado o estudo de sistemas de controle com atraso na forma de dente de serra, nesta subsecção será apresentado um exemplo de como a variação do atraso com forma de dente de serra pode desestabilizar um sistema estável sem atraso na entrada. Para isso, considere o sistema de controle em espaço de estados dado pela Equação 4.1 com $a = -1$, $bK = -1.5$ e atraso unitário, de acordo com o exemplo analisado em Louissel (2001). Para o caso em que o atraso é constante e unitário, a Figura 36 mostra a solução $x(t)$ para o sistema:

Visualmente, é possível observar que a resposta temporal do sistema converge e, portanto, trata-se de um sistema estável. Em Louissel (2001) é apresentada a demonstração analítica de um lema bastante interessante que afirma que qualquer atraso com forma de dente de serra e com amplitude maior que 2.05 tornará o sistema em questão instável. Apesar de tal fato ser suficiente para demonstrar que o atraso variável pode causar instabilidade no sistema, será apresentado um exemplo em que a amplitude da função atraso é ainda menor que 2.05, mostrando, conforme fica evidenciado pelo autor, que a condição não é necessária. Por meio do método da bissecção, partiu-se do valor inicial 2.05 e verificou-se de maneira bastante simples que para um valor bastante próximo de 1.6125 para amplitude da função atraso, o sistema marginalmente estável. A Figura 37 apresenta a solução da Equação 4.1 com $a = -1$ e $bK = -1.5$ e atraso com forma de dente de serra e amplitude 1.6125.

Para verificar a resposta temporal instável do sistema, será utilizado o valor de amplitude igual a 2. Esse valor, além de suficiente para deixar o sistema instável, é adequado também à ideia intuitiva de comparação com atraso constante no tempo considerado anteriormente, dado que seu valor médio é unitário, igual ao valor do atraso constante do exemplo anterior. A Figura

Figura 36 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\dot{x}(t) = -x(t) - 1.5x(t - 1)$.

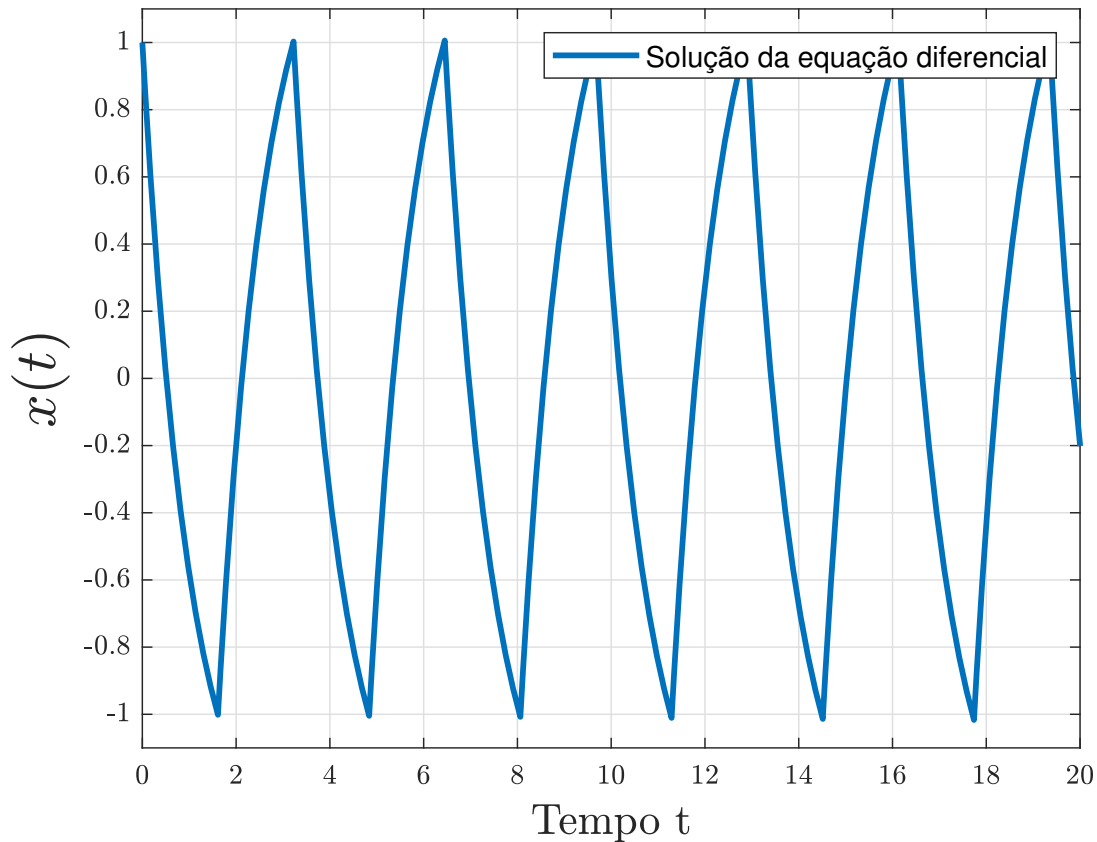


Fonte: O próprio autor.

38 apresenta a solução da equação diferencial funcional do sistema com atraso variável do tipo dente de serra de amplitude 2.

O problema de o atraso variável no tempo ser causa de instabilidade em um sistema previamente estável pode ser interpretado também do ponto de vista dos sistemas amostrados. O caso é que, ao projetar determinado sistema de controle, pode-se incorrer no erro de, em teoria, o sistema ser estável mas, em decorrência da amostragem do sinal de controle, o sistema tornar-se instável. Com efeito, a amostragem do sinal de controle corresponde a um atraso variável no tempo com forma de dente de serra, conforme exposto na Subseção 4.1.1. Diante disso, o estudo acima mostra que, para o sistema em malha fechada mostrado pela Equação 4.1 com os valores dados no exemplo, o tempo de amostragem não pode ser maior que 1.6125, pois isso tornaria o sistema instável. Embora este seja um valor demasiado grande para a escolha de um tempo de amostragem, já que tal determinação depende, em geral, da resposta desejada em malha fechada e toma valores bem menores de tempo, sua determinação representa um fato interessante da relação entre controle de sistemas com atraso e estabilidade de sistemas amostrados.

Figura 37 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\dot{x}(t) = -x(t) - 1.5x(t - \tau(t))$, com $\tau(t) = t - 1.6125k$, para $t \in [1.6125k, 1.6125(k + 1))$, $k \in \mathbb{N}_0$.



Fonte: O próprio autor.

4.1.3 O ajuste do tempo de amostragem como fator de estabilização

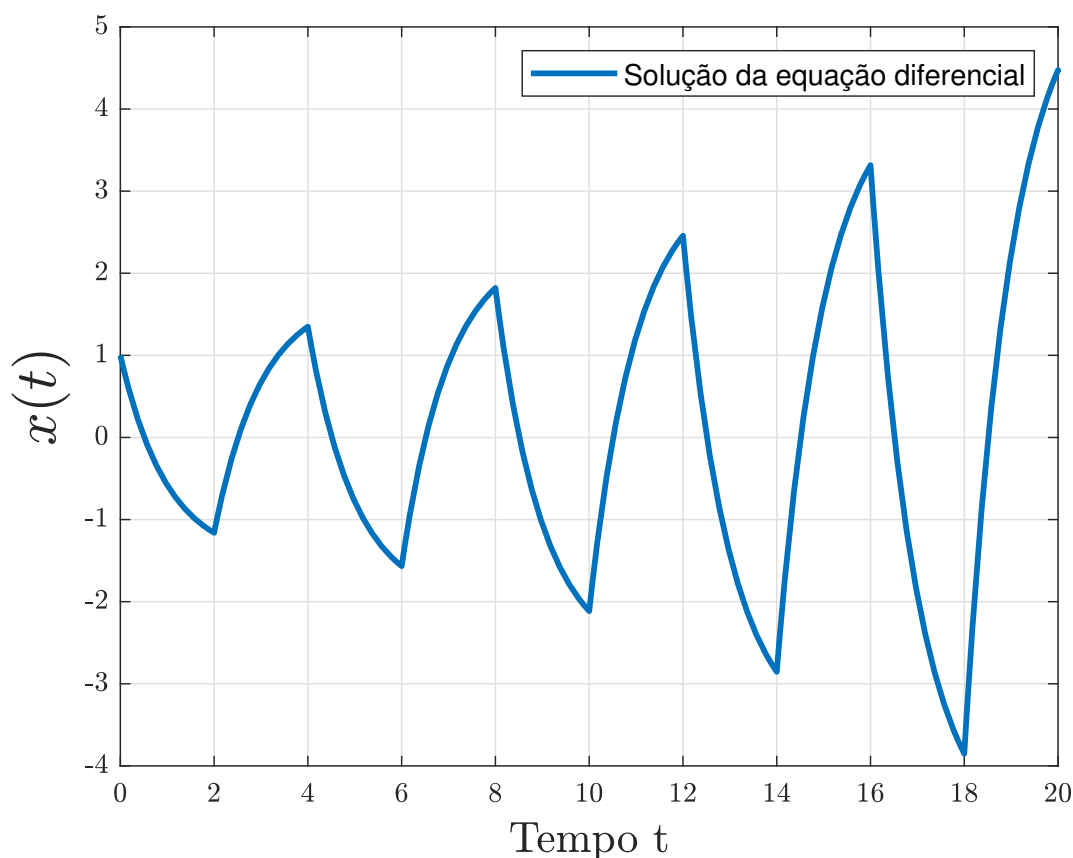
Será apresentada nesta subseção um outro exemplo de Louissel (2001) em que a implementação de um atraso variável torna o sistema estável. Este fenômeno recebe o nome em inglês dado por "quenching phenomenon", (PAPACHRISTODOULOU *et al.*, 2007), e será chamado neste trabalho de fenômeno de mitigação de instabilidade. Ocorre que o sistema de segunda ordem dado pela Equação 4.3 é estável para o caso em que o atraso é constante e unitário, e variável para o caso em que o atraso toma a forma de dente de serra com um valor determinado analiticamente em louisselNDST.

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t - \tau(t)) + x(t) = 0. \quad (4.3)$$

A Figura 39 apresenta a solução do sistema para o caso em que o atraso é unitário:

Para o caso em que o atraso é variável no tempo, é demonstrado em Louissel (2001) que a amplitude do atraso variável que garante que o sistema seja assintoticamente estável é dada

Figura 38 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\dot{x}(t) = -x(t) - 1.5x(t - \tau(t))$, com $\tau(t) = t - 2k$, para $t \in [2k, 2(k + 1))$, $k \in \mathbb{N}_0$.



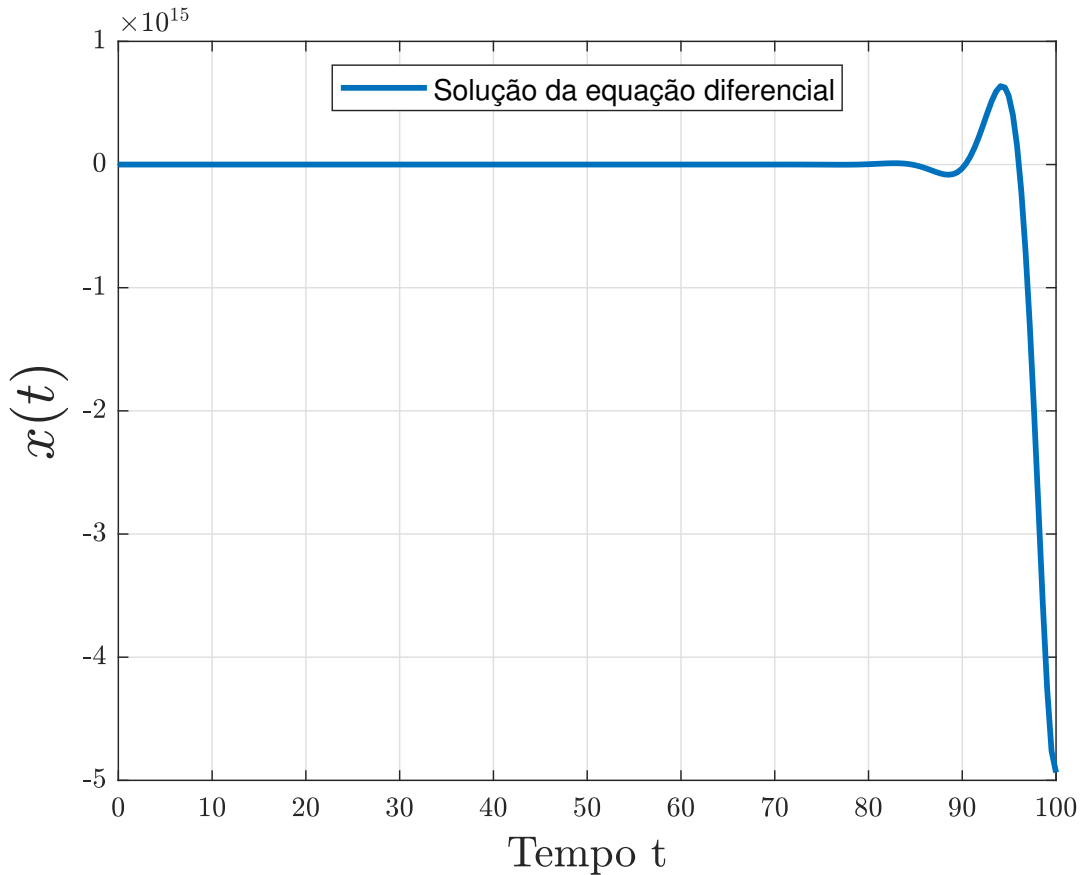
Fonte: O próprio autor.

por $T_s = \frac{7\pi}{4}$. A Figura 40 apresenta a solução do sistema nessa situação.

Observe que a estabilidade não pode ser verificada caso a amplitude do atraso variável seja igual a 2, caso em que seu valor médio vale 1 (assim definido com o intuito de comparar com o caso em que o atraso é constante no tempo). De fato, a Figura 41 apresenta a solução do sistema quando o atraso tem amplitude 2.

Assim como na subseção anterior, pode-se realizar uma interpretação teórica dos resultados simulados em termos de sistemas de controle amostrados. Com efeito, percebe-se que, para o caso em que o sistema amostrado possui tempo de amostragem igual a 2 unidade de tempo, a resposta do sistema é divergente e, portanto, ilimitada. Para o caso em que tal tempo de amostragem é ajustado de maneira criteriosa para o valor de $\frac{7\pi}{4}$, o sistema passa a apresentar um comportamento estável, ainda que tal mudança tenha aumentado a amplitude da função atraso equivalente a essa amostragem. Conforme explicado anteriormente, tal análise é puramente ilustrativa, em razão dos fatores que governam a decisão do tempo de amostragem serem dependentes da resposta desejada em malha fechada.

Figura 39 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t - 1) + x(t) = 0$.

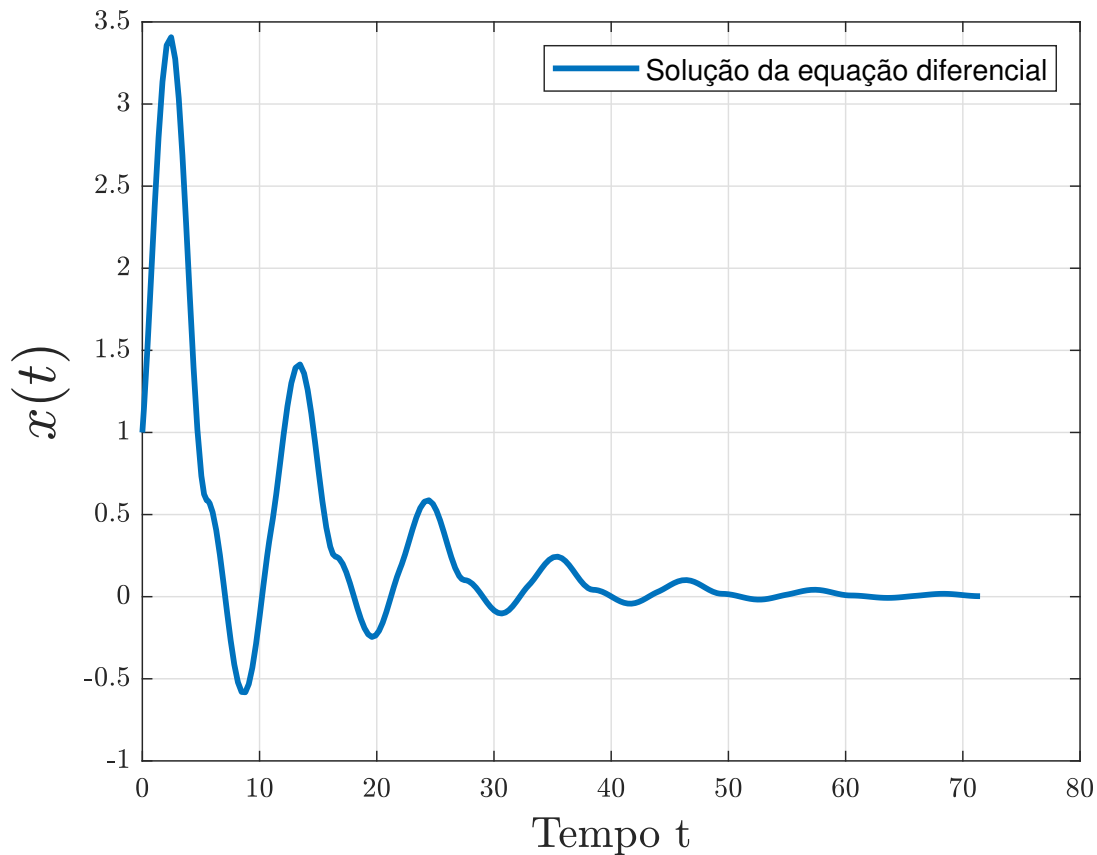


Fonte: O próprio autor.

4.2 Sistemas com atraso controlados por controladores Proporcional-Integral

Nesta seção será analisada a estabilidade de sistemas com atraso variável do tipo dente de serra em malha fechada controlados por compensadores do tipo Proporcional-Integral. Desconsiderando os casos em que há mitigação de instabilidade por variação do atraso no tempo, deseja-se verificar que o aumento do atraso do tipo dente de serra no tempo pode desestabilizar um sistema em malha fechada controlado por um compensador Proporcional-Integral. Mais que isso, deseja-se conhecer os casos em que o valor da amplitude que torna o sistema instável é maior que a margem de atraso do sistema. Nessa situação o atraso constante pode ser considerado o pior cenário para atraso e o projeto de um controlador considerando atraso constante igual ao valor máximo da amplitude do atraso variável que mantenha o sistema estável é suficiente para estabilizar o sistema ainda que o atraso varie. Tal ideia está alinhada à ideia de considerar o atraso variável no tempo como uma incerteza e verificar se o controlador utilizado é robusto.

Figura 40 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t - \tau(t)) + x(t) = 0$, com $\tau(t) = t - \frac{7\pi}{4}k$, para $t \in [\frac{7\pi}{4}k, \frac{7\pi}{4}(k+1))$, $k \in \mathbb{N}_0$.



Fonte: O próprio autor.

4.2.1 Comparação com o caso de atraso constante

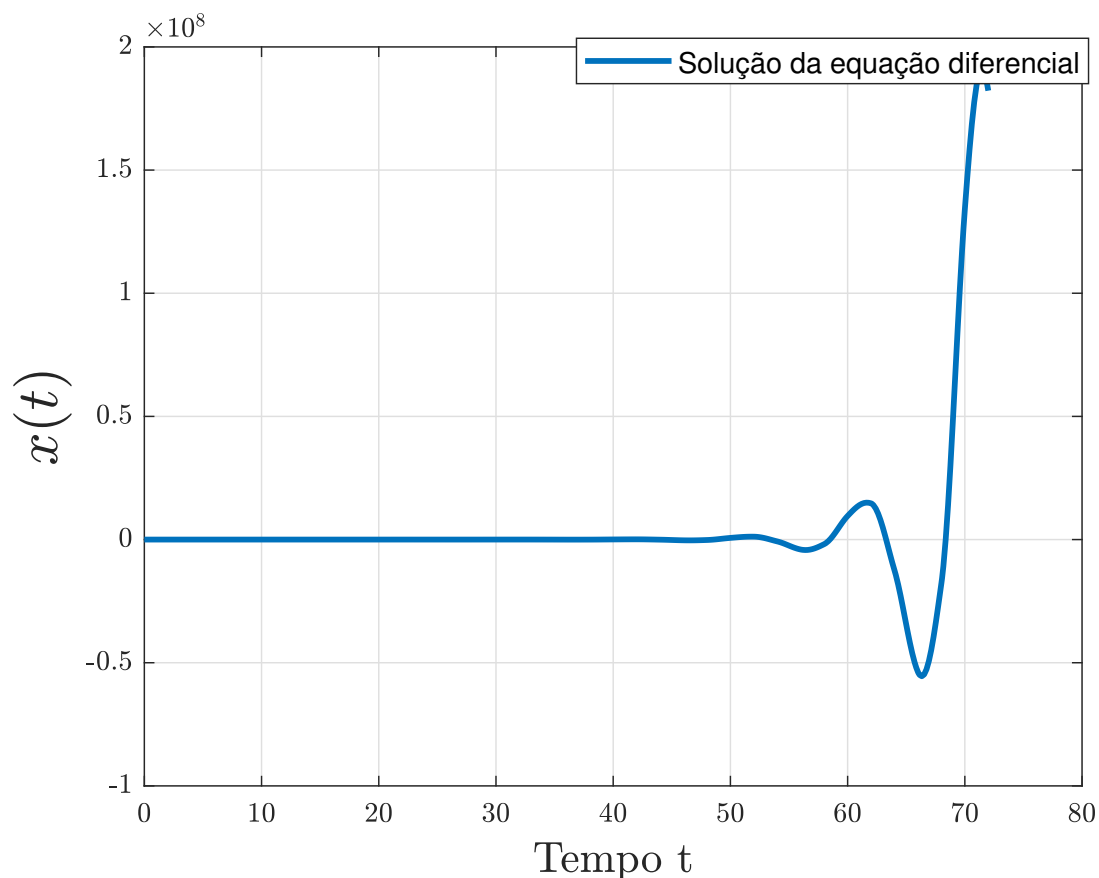
Nesta subseção será realizada uma busca pelo pior tipo de atraso (dente de serra ou constante) para um conjunto de controladores Proporcional-Integrais.

Assim como foi mostrado na Seção 4.1, o maior valor de atraso variável que mantém o sistema de controle em malha fechada controlado por um compensador Proporcional-Integral estável pode ser obtido numericamente por meio de sucessivas verificações da estabilidade ao ser alterado o valor máximo do atraso. O método detalhado em Braga (2021) permite que seja verificada a estabilidade dos sistemas em malha fechada com o seguinte modelo normalizado de primeira ordem sem atraso $G(s)$ e o controlador $C(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s+1},$$

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

Figura 41 – Solução da equação diferencial com atraso dada por $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t - \tau(t)) + x(t) = 0$, com $\tau(t) = t - 2k$, para $t \in [2k, 2(k+1))$, $k \in \mathbb{N}_0$.



Fonte: O próprio autor.

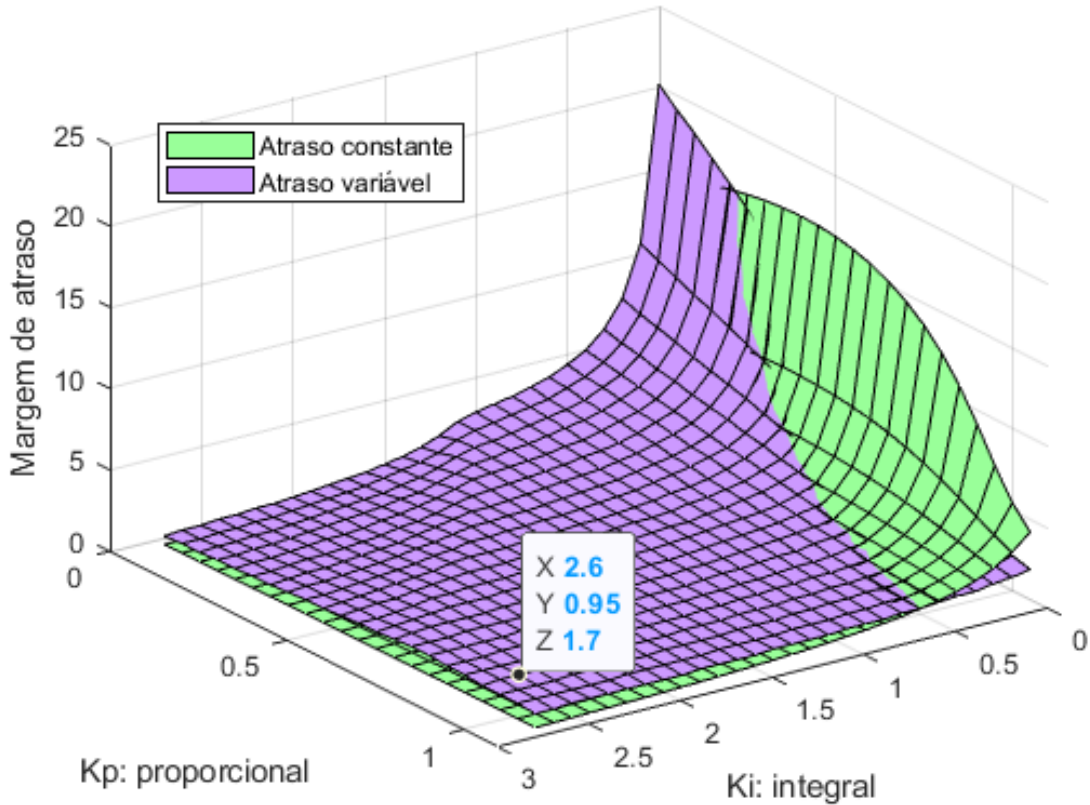
em que os valores de K_p e K_i variarão em uma faixa e análise para determinar-se as circunstâncias mencionadas acima em que o atraso constante é o pior cenário. O procedimento iterativo de verificação de estabilidade não precisa ser realizado para o caso em que o atraso é constante no tempo. Nesse caso, o valor máximo que garante estabilidade do sistema é dado pela própria margem de atraso, por definição.

A Figura 42 apresenta um gráfico comparativo da margem de atraso com a máxima amplitude do atraso variável para cada controlador considerado.

Diante disso, pode-se concluir que existe uma região em que o atraso constante de fato representa o pior cenário para o sistema em malha fechada em termos de estabilidade, de modo que um controlador projetado considerando determinado valor de atraso constante garantirá a estabilidade do sistema caso este passe a ter um atraso variável, a ser considerado como uma incerteza, com amplitude máxima igual ao atraso considerado no projeto.

Por outro lado, na região em que a superfície verde está sobreposta à superfície lilás, é o atraso do tipo dente de serra que caracteriza o pior cenário em termos de estabilidade se

Figura 42 – Margens de atraso (em verde) comparadas ao máximo valor da amplitude de um atraso do tipo dente de serra que garante a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada (em lilás) para cada controlador Proporcional-Integral determinado pelos pontos do plano horizontal - planta de primeira ordem normalizada.



Fonte: (BRAGA, 2021).

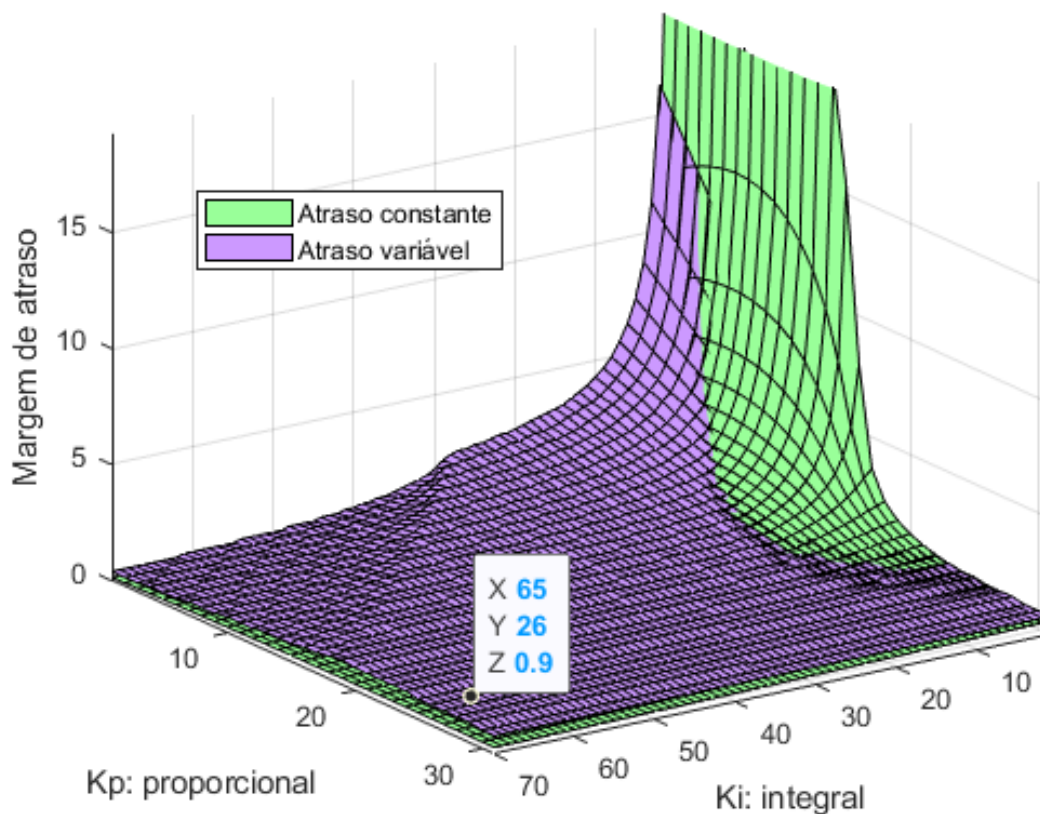
comparado ao caso de atraso constante. Controladores cujas regras de sintonia estejam nessa região tornar-se-ão instáveis diante da variação do atraso na forma de um dente de serra, ainda que com amplitude menor que a margem de fase do sistema.

Toda essa análise pode também ser estendida a um sistema de controle em malha fechada como uma planta de segunda ordem dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)}.$$

Nesse caso, os controladores considerados na análise são também proporcionais-integrais e a superfície de comparação de pior cenário de atraso em termos de estabilidade é similar àquela para o caso de primeira ordem, conforme mostrado na Figura 43.

Figura 43 – Margens de atraso (em verde) comparadas ao máximo valor da amplitude de um atraso do tipo dente de serra que garante a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada (em lilás) para cada controlador Proporcional-Integral determinado pelos pontos do plano horizontal - modelo de segunda ordem.



Fonte: (BRAGA, 2021).

4.2.2 Estudo de caso

Nesta subseção será aplicada a técnica de análise de pior cenário para verificar se um controlador projetado para atrasos constantes garantirá estabilidade caso o atraso varie no tempo com a forma de dente de serra.

Com o intuito de aplicar a técnica de análise de robustez (perante a variações do atraso com forma de dente de serra) para um controlador conhecido, foi escolhida a regra de sintonia para controladores do tipo Proporcional-Integral proposta em Skogestad (2003). Essa análise, que considera a comparação entre os atrasos constante e variável, foi apresentada inicialmente em (BRAGA *et al.*, 2022). Para tanto, deve-se enunciar o problema da seguinte forma: seja uma planta com atraso constante dada pelo modelo da Equação 4.4:

$$P(s) = \frac{k}{\tau_1 \cdot s + 1} \cdot e^{-\theta \cdot s}. \quad (4.4)$$

Deseja-se, somente com base nos parâmetros desse modelo, projetar um controlador Proporcional-Integral que garanta estabilidade e desempenho satisfatório para o sistema controlado em malha fechada. Em Skogestad (2003) é definido o que seria tal desempenho satisfatório, além de motivado o uso dos seguintes ganhos para o controlador Proporcional-Integral desejado:

$$K_p = \frac{1}{k} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_c + \theta},$$

$$K_i = \frac{K_p}{\min\{\tau_1, 4 \cdot (\tau_c + \theta)\}},$$

em que $\tau_c = \theta$ (conforme mostrado em Skogestad (2003), igualar o parâmetro de sintonia ao atraso temporal é uma escolha conservadora) representa a constante de tempo desejada para o sistema resultante em malha fechada e é o parâmetro de sintonia escolhido para o projeto do controlador.

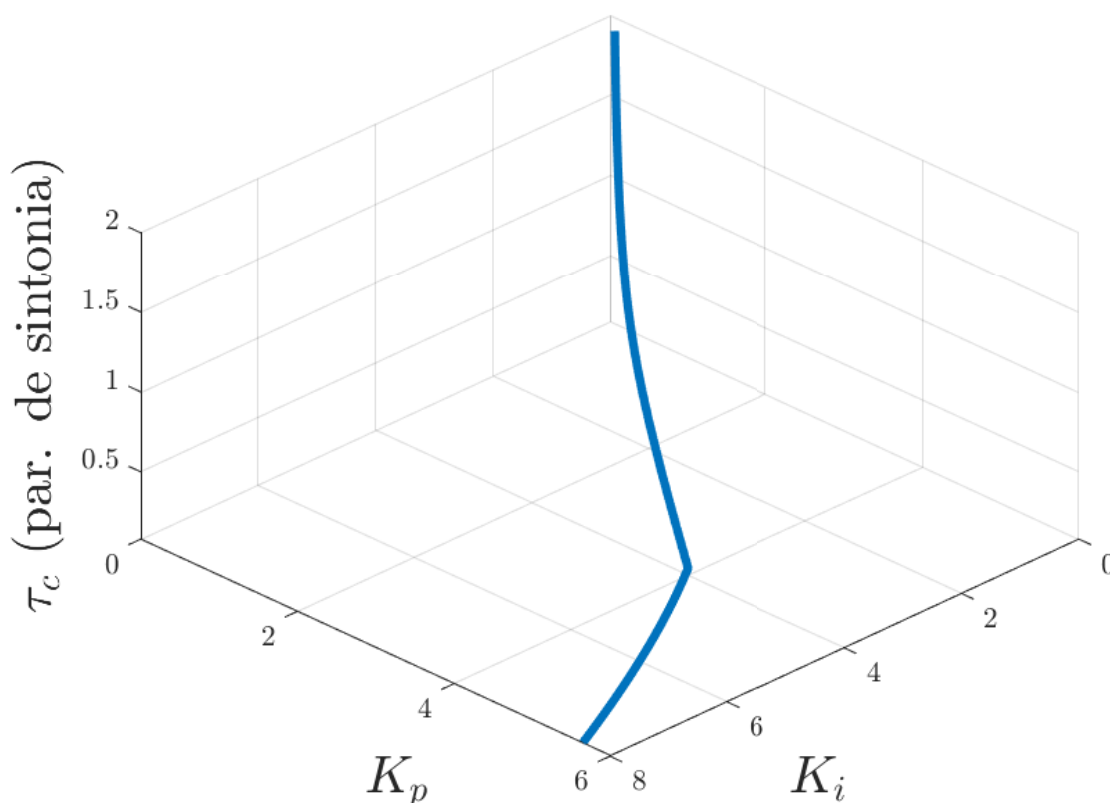
O caso analisado aqui é aquele em que o modelo do processo sem atraso é dado por uma planta de primeira ordem normalizada, isto é, $k = 1$ e $\tau_1 = 1$. Com isso, os ganhos do controlador passam a depender unicamente do parâmetro de sintonia da seguinte forma:

$$K_p = \frac{1}{2\tau_c},$$

$$K_i = \frac{K_p}{\min\{1, 8 \cdot \tau_c\}}.$$

Dessas expressões deve-se perceber que, para valores do parâmetro de sintonia τ_c maiores que 0.125, os ganhos do controlador são idênticos, pois o valor mínimo entre 1 e $8 \cdot \tau_c$ é igual a 1. Ainda, ambos os ganhos serão menores que 4. Caso seja $\tau_c < 0.125$, então a relação entre os ganhos do controlador será dada por $K_i = \frac{K_p}{8\tau_c} = \frac{K_p^2}{4}$. Isso ocorre quando K_p e K_i são maiores que 4. Para melhor visualizar o comportamento dos ganhos do controlador com relação ao parâmetro de sintonia, pode-se observar o gráfico da Figura 44.

Figura 44 – Relação gráfica dos ganhos do controlador com o parâmetro de sintonia de acordo com a regra de ajuste proposta em Skogestad (2003).

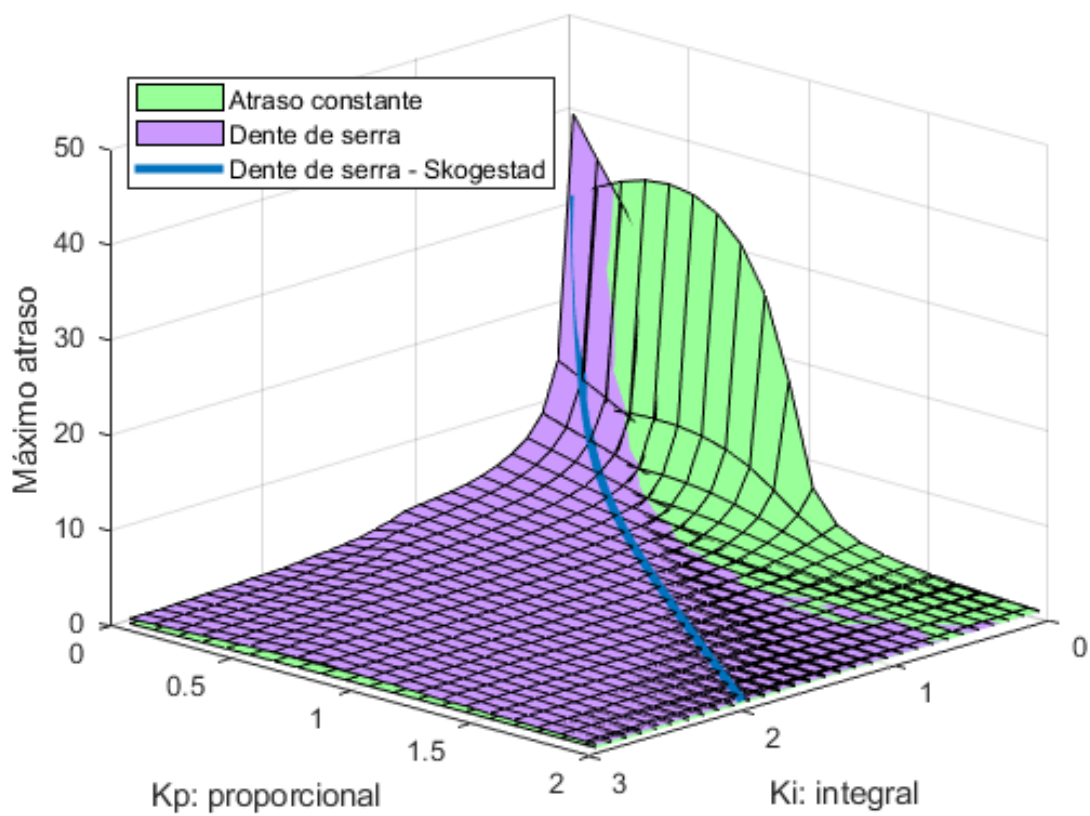


Fonte: O próprio autor.

A análise e as definições até então realizadas prestam-se ao seguinte propósito: conhecer se é possível projetar um controlador Proporcional-Integral utilizando a regra de sintonia proposta em Skogestad (2003) tomando como referência o valor máximo da função atraso variável na forma de dente de serra que o sistema pode assumir, e que garanta a estabilidade do sistema de controle em malha fechada. A resposta é afirmativa, pois os ganhos K_p e K_i assumidos pelos controladores proporcionais-integrais gerados pela regra proposta estão todos na região em que o atraso constante é o pior cenário para o atraso em termos de estabilidade. Tal afirmação pode ser verificada por meio do gráfico mostrado na Figura 45, na qual são mostradas as superfícies de margem de atraso e máxima amplitude do atraso do tipo dente de serra, para cada controlador, que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada.

Conclui-se por outro lado que, para o caso em que o controlador é projetado para um atraso θ constante, qualquer atraso do tipo dente de serra com amplitude até θ não levará o sistema à instabilidade.

Figura 45 – Máximo amplitude da função atraso variável para a qual cada controlador Proporcional-Integral definido pela regra de sintonia garante estabilidade do sistema em malha fechada.



Fonte: (BRAGA *et al.*, 2022).

5 PROJETO DE CONTROLADOR PARA SISTEMA COM INCERTEZA NO ATRASO

Neste capítulo é apresentado um dos principais resultados do texto, em que um controlador Proporcional-Integral é projetado de forma a garantir a estabilidade de um sistema de primeira ordem com atraso variável no tempo limitado. É ainda apresentada uma análise do conservadorismo do controlador obtido.

O modelo nominal da planta a ser analisado será dado por:

$$P_n(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad (5.1)$$

em que K é o ganho estático do processo e τ é sua constante de tempo. Para esse desenvolvimento, não será considerado o modelo normalizado, pois deseja-se conhecer justamente de que maneira o controlador a ser projetado deve depender dos parâmetros da planta e do máximo valor do atraso variável no tempo para permanecer estável. Seja δ_{max} o maior valor atingido pela função $\delta(t)$, que representa o atraso variável no tempo que incide no sistema de controle em malha fechada. A notação da função atraso foi alterada nesta seção em conformidade com o que está exposto em Kao e Lincoln (2004) com o intuito de evitar ambiguidades, já que a letra grega τ está sendo utilizada para a constante de tempo do processo.

5.1 Projeto de controlador Proporcional Integral para processo de primeira ordem com atraso variável

Nesta seção é apresentado o resultado literal, em que expressões para o cálculo dos ganhos do controlador são obtidas. O controlador Proporcional-Integral será, por simplicidade, representado da seguinte forma:

$$C(s) = K_p \cdot \frac{(s + z)}{s}, \quad (5.2)$$

em que K_p é o ganho proporcional do controlador e $-z$ é o zero do controlador, o qual relaciona-se com o ganho integral da seguinte maneira: $z = K_i/K_p$.

Definidos o modelo nominal da planta e o controlador utilizado, pode ser enunciado o seguinte resultado:

Teorema 5.1.1 *O sistema de controle em malha fechada com o controlador dado pela Equação 5.2 e o modelo do processo dado pela Equação 5.1 com atraso variável no tempo limitado por δ_{max} é estável se:*

$$K_p = \frac{\tau}{k \cdot \delta_{max}}, \quad (5.3)$$

$$K_i = K_p \cdot \frac{\sqrt{\tau^2 + \delta_{max}(1 + KK_p)^2} - \tau}{KK_p \delta_{max}^2}. \quad (5.4)$$

Demonstração. Da definição de índice de robustez, tem-se:

$$I_r(\omega) = \left| \frac{1 + C(j\omega)P_n(j\omega)}{C(j\omega)P_n(j\omega)} \right| = \left| \frac{1 + \frac{K_p(j\omega + z)}{j\omega} \cdot \frac{K}{\tau j\omega + 1}}{\frac{K_p(j\omega + z)}{j\omega} \cdot \frac{K}{\tau j\omega + 1}} \right| = \left| \frac{j\omega(\tau j\omega + 1) + KK_p(j\omega + z)}{KK_p(j\omega + z)} \right|.$$

Separando, no numerador e no denominador, a expressão em partes real e imaginária:

$$I_r(\omega) = \left| \frac{-\tau\omega^2 + KK_p z + j(1 + KK_p)\omega}{KK_p z + jKK_p \omega} \right|. \quad (5.5)$$

Da condição de estabilidade robusta para sistemas com atraso variável no tempo dada pela Equação 3.15, deve-se ter, para todo $\omega \geq 0$:

$$\omega \cdot \delta_{max} < I_r(\omega) \implies \omega^2 \cdot \delta_{max}^2 < [I_r(\omega)]^2 \implies \omega^2 \cdot \delta_{max}^2 < \left| \frac{-\tau\omega^2 + KK_p z + j(1 + KK_p)\omega}{KK_p z + jKK_p \omega} \right|^2,$$

em que a terceira desigualdade vem da substituição de $I_r(\omega)$ conforme encontrado na Equação 5.5. Utilizando o fato de que o módulo ao quadrado de um número complexo é dado pela soma dos quadrados de sua parte real com sua parte imaginária, tem-se:

$$\omega^2 \cdot \delta_{max}^2 < \frac{[\tau^2 \omega^4 + (KK_p z)^2 - 2KK_p z \tau \omega^2 + (1 + KK_p)^2 \omega^2]}{(KK_p z)^2 + (KK_p)^2 \omega^2}.$$

Pode-se arranjar os termos da inequação de modo a obter um polinômio de segundo grau em ω^2 no primeiro membro da inequação:

$$[\tau^2 - (KK_p \delta_{max})^2](\omega^2)^2 + [(1 + KK_p)^2 - 2KK_p z \tau - (KK_p z \delta_{max})^2](\omega^2) + (KK_p z)^2 > 0. \quad (5.6)$$

Portanto, para que o sistema com atraso variável seja estável, é suficiente que, para qualquer $\omega \geq 0$, a Equação 5.6 seja satisfeita. Como o termo independente de ω é maior que zero, pois $KK_p z > 0$, uma condição necessária para que a inequação seja válida é que o coeficiente que acompanha o termo de maior grau seja não negativo. Com efeito, se esse termo fosse negativo, a parábola definida pelo polinômio do segundo grau em ω^2 no primeiro membro da inequação cruzaria o eixo das abscissas pelo menos uma vez para $\omega > 0$. Portanto, pode-se escrever:

$$\tau^2 - (KK_p \delta_{max})^2 \geq 0 \implies \tau \geq KK_p \delta_{max}$$

$$K_p \leq \frac{\tau}{k \cdot \delta_{max}}.$$

Por simplicidade, pode-se escolher o valor do ganho proporcional do controlador como sendo igual ao valor da desigualdade, isto é:

$$K_p = \frac{\tau}{k \cdot \delta_{max}}, \quad (5.7)$$

caso em que o polinômio de segundo grau em ω^2 da Equação 5.6 passa a ser uma reta em ω^2 com coeficiente linear positivo. Assim, para que seja garantida a estabilidade do sistema, é suficiente que a reta possua coeficiente angular não negativo, de modo que será não decrescente como função de ω^2 e, portanto, não admitirá valores não positivos. Portanto, deve-se ter:

$$(1 + KK_p)^2 - 2KK_p z \tau - (KK_p z \delta_{max})^2 \geq 0 \implies (KK_p \delta_{max})^2 z^2 + 2KK_p \tau z - (1 + KK_p)^2 \geq 0,$$

que é uma inequação de segundo grau em z , o parâmetro do controlador a ser determinado. Para que a inequação seja satisfeita, deve-se ter z maior ou igual que a maior das raízes do polinômio determinado pelo primeiro membro da inequação. Com efeito, o polinômio supracitado possui o coeficiente do termo de maior grau maior que zero e o termo independente menor que zero, de modo que a parábola definida por tal função será sempre não negativa nessa situação. Isso pode ser expresso como:

$$z \geq \frac{\sqrt{\tau^2 + \delta_{max}(1 + KK_p)^2} - \tau}{KK_p \delta_{max}^2},$$

que permite escolher um zero para o controlador como o menor valor de z que satisfaça a inequação:

$$z = \frac{\sqrt{\tau^2 + \delta_{max}(1 + KK_p)^2} - \tau}{KK_p \delta_{max}^2}, \quad (5.8)$$

e o resultado do teorema segue conforme apresentado.

□

Diante disso, foi proposto um controlador Proporcional-Integral que garantisse a estabilidade do sistema para um atraso genérico variável no tempo limitado pelo valor δ_{max} . Deve-se ressaltar aqui que o atraso genérico é uma característica puramente teórica, dado que, para satisfazer as condições de causalidade do sistema, tal atraso deve possuir derivada menor que ou igual a 1 conforme o que foi exposto na Seção 2.3.

Será mostrado em seguida que o projeto de um controlador Proporcional nessa situação pode ser tratado como um caso particular para o projeto de um controlador Proporcional-Integral.

5.2 Projeto de controlador Proporcional para processo de primeira ordem com atraso variável

Nesta seção é apresentada a obtenção de uma expressão para o cálculo do ganho de um controlador proporcional que garanta a estabilidade do sistema de malha fechada com atraso variável limitado. O controlador Proporcional será representado da seguinte forma:.

$$C(s) = K_p, \quad (5.9)$$

em que K_p é o ganho proporcional do controlador. Dito isto, segue o resultado:

Teorema 5.2.1 *O sistema de controle em malha fechada com o controlador dado pela Equação 5.9 e o modelo do processo dado pela Equação 5.1 com atraso variável no tempo limitado por δ_{max} é estável se:*

$$K_p = \frac{\tau}{k \cdot \delta_{max}}, \quad (5.10)$$

Demonstração. De maneira similar ao caso do controlador Proporcional-Integral, tem-se:

$$I_r(\omega) = \left| \frac{1 + C(j\omega)P_n(j\omega)}{C(j\omega)P_n(j\omega)} \right| = \left| \frac{1 + K_p \cdot \frac{K}{\tau j\omega + 1}}{K_p \cdot \frac{K}{\tau j\omega + 1}} \right| = \left| \frac{j\omega\tau + 1 + KK_p}{KK_p} \right|.$$

Da condição de estabilidade robusta dada pela Equação 3.15, tem-se, para todo $\omega \geq 0$:

$$\begin{aligned} \omega \cdot \delta_{max} < I_r(\omega) &\implies \omega^2 \cdot \delta_{max}^2 < [I_r(\omega)]^2 \implies \omega^2 \cdot \delta_{max}^2 < \frac{(1 + KK_p)^2 (\tau\omega)^2}{(KK_p)^2} \\ &\implies [\tau^2 (KK_p \delta_{max})^2] \omega^2 + (1 + KK_p)^2 > 0, \end{aligned}$$

que será verdade para qualquer $\omega \geq 0$ sempre que o coeficiente do termo de maior expoente for não negativo. Isso faz que a condição de estabilidade seja a mesma encontrada para K_p no caso do controlador Proporcional-Integral, de modo que o mesmo valor de ganho poderá ser utilizado.

□

5.3 Estudo de caso

Nesta seção é apresentado um exemplo de como um controlador proporcional-integral pode ser projetado de modo a garantir a estabilidade do sistema de primeira ordem com atraso variável limitado. Para o caso em que o modelo nominal do processo é dado por uma planta de primeira ordem normalizada, isto é, $K = 1$ e $\tau = 1$, tem-se:

$$P_n = \frac{1}{s+1}. \quad (5.11)$$

Considerando que o valor máximo do atraso variável seja dado por $\delta_{max} = 1$, o ganho K_p do controlador, a partir da Equação 5.10, vale 1. Já o zero do controlador pode ser calculado por meio da Equação 5.8:

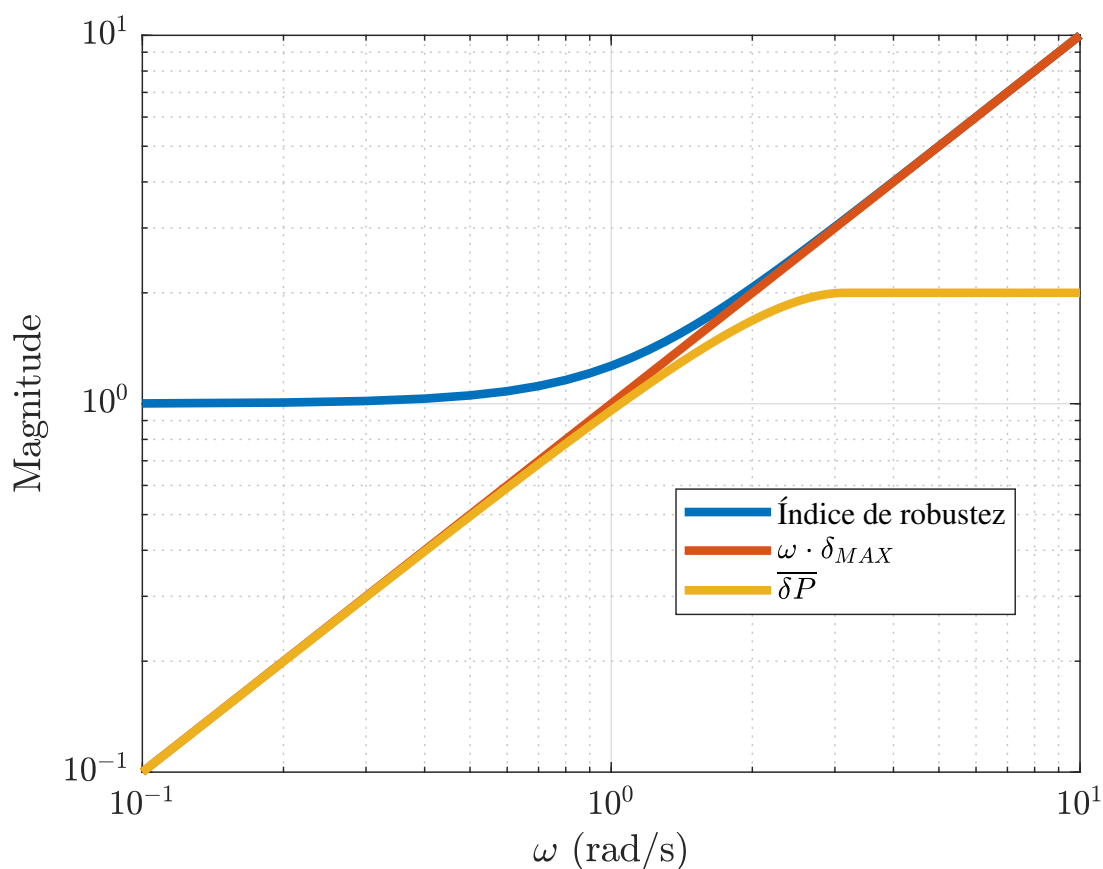
$$z = \frac{\sqrt{1^2 + 1(1+1)^2} - 1}{1} \implies z = 1.24,$$

aproximadamente, de onde pode-se calcular o ganho integral como $K_i = K_p \cdot z = 1.24$. Com isso, o controlador Proporcional-Integral projetado para garantir a estabilidade do sistema com atraso variável de valor máximo unitário é dado por:

$$C(s) = 1 + \frac{1.24}{s}. \quad (5.12)$$

Espera-se com isso que o uso do controlador Proporcional-Integral obtido na Equação 5.12 garanta a estabilidade do sistema para atrasos variáveis limitados por um valor máximo unitário. A Figura 46 apresenta uma análise da estabilidade do sistema em malha fechada no domínio da frequência. Em azul é mostrado o índice de robustez associado ao modelo e ao controlador utilizados. Em vermelho é mostrado, para cada frequência, o valor de $\omega \cdot \delta_{max}$ que, conforme explicado anteriormente, pode ser interpretado como uma máxima incerteza multiplicativa para o caso em que o atraso varia no tempo. Em amarelo foi plotada a máxima incerteza multiplicativa se considerado o atraso como uma incerteza paramétrica. Do fato de o índice de robustez ser maior que as máximas incertezas multiplicativas para qualquer valor de frequência ω , conclui-se que o sistema em malha fechada é estável.

Figura 46 – Verificação de estabilidade do sistema de controle em malha fechada no domínio da frequência.



Fonte: O próprio autor.

Da Figura 46 é possível também comparar o grau de conservadorismo das condições

de estabilidade robusta obtida por meio do Teorema do Pequeno Ganho para atrasos variáveis no tempo e de estabilidade robusta obtida diretamente da definição para incertezas paramétricas. De fato, a condição representada pela reta em vermelho é bem mais conservadora, no sentido de que restringe o uso de controladores que, sob a condição representada pela curva amarela, ainda seriam garantidos como estabilizadores do sistema em malha fechada. Isso pode ser verificado pela maior proximidade da reta vermelha ao índice de robustez em azul. Pode-se dizer, nesse caso, que o controlador projetado é agressivo do ponto de vista de estabilidade robusta, mas deve ser lembrado que essa é uma condição suficiente, não necessária. Com efeito, o índice de robustez considerado ainda não está tão próximo da máxima incerteza multiplicativa (em amarelo). Esta condição é ainda conservadora, tendo em vista que, na sua definição, foi utilizada a condição suficiente de que a máxima incerteza multiplicativa seja menor que o índice de robustez, enquanto a condição necessária seria aquela que exige que cada incerteza multiplicativa seja menor que o índice mencionado.

O sistema foi também analisado no domínio do tempo contínuo. Para tanto, foi utilizado como função atraso a função contínua por partes dada por um dente de serra de amplitude unitária. Conforme apresentado na Subseção 4.1.1, um sistema com esse tipo de atraso é equivalente a um sistema cuja saída é discretizada por um segurador de ordem zero, de modo que não há necessidade do uso do SIMULINK ou de ferramentas computacionais para resolver equações diferenciais funcionais mais sofisticadas (como *dde23*, *ddesd* ou *ddensd*, (MATHWORKS, 2022)) para a obtenção da solução numérica da equação diferencial com atraso que surge da necessidade de plotar a saída do sistema.

Para isso, utilizou-se somente a função *c2d()* do MATLAB, a qual retorna, para dado sistema no domínio do tempo contínuo, para dado tempo de amostragem e para determinado método de discretização, o sistema equivalente no domínio do tempo discreto. Em razão de o tempo de amostragem nesse caso ser equivalente à amplitude da função atraso do tipo dente de serra, os parâmetros passados para a função *c2d* foram o ganho de malha sem atraso, dado por $C(s) \cdot G(s)$, definidos nas Equações 5.11 e 5.12, o tempo de amostragem igual a 1, e o método de discretização codificado no MATLAB como *'zoh'*, o qual diz respeito ao "zero-order holder" (termo em inglês para segurador de ordem zero). A Equação ?? mostra a função de transferência, com coeficientes aproximados, do sistema com atraso variável no tempo com o controlador proporcional-integral ainda em malha aberta:

$$H(z) = \frac{1.1z - 0.3}{z^2 - 1.4z + 0.4}. \quad (5.13)$$

Uma observação interessante sobre o processo realizado até então é que, no caso em que o atraso do sistema é do tipo dente de serra, o sistema discreto equivalente é linear e invariante no tempo. Essa simplificação é ressaltada pelo fato de sistemas com atraso, em geral, possuírem comportamentos complexos, o que nesse caso, pôde ser bastante simplificado.

Aqui deve ser ressaltado um detalhe importante para projetos de controle desse tipo. Ocorre que o zero do controlador afeta o comportamento da resposta temporal de modo a aumentar a máxima ultrapassagem percentual para o sistema. Nesse contexto, uma solução clássica é a inclusão de um filtro de referência na entrada do sistema de malha fechada, de modo a cancelar o zero incluído pelo controlador. Tal filtro de referência deve possuir ganho estático unitário, pois deseja-se que sua inclusão não altere a resposta do sistema em regime permanente. Todos esses requisitos podem ser programados e obtidos automaticamente, mas a seguir é apresentado o raciocínio para a obtenção automática no MATLAB do filtro de maneira sucinta. Utilizando a função *tfdata* pode-se extrair os coeficientes do polinômio em z no numerador da função de transferência $H(z)$, conforme obtido na Equação 5.13. Tais coeficientes podem, então ser utilizados para criar a função de transferência do filtro de referência, cujo numerador deve ser a soma dos coeficientes e o denominador deve ser o polinômio recuperado. Para a situação analisada, o filtro de referência é dado por:

$$F(z) = \frac{0.8}{1.1z - 0.3},$$

em que os coeficientes tiveram, por simplicidade, seus valores aproximados.

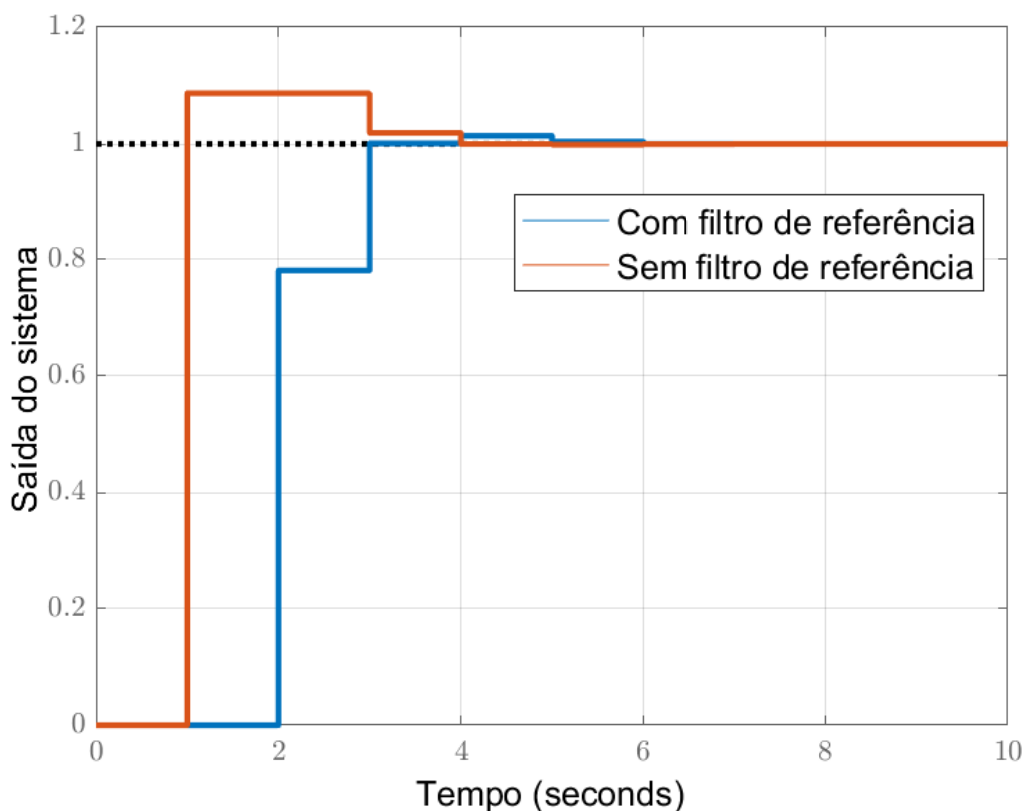
Projetado o filtro de referência, faz sentido então verificar como se comporta o sistema resultante em malha fechada, cuja função de transferência pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = F(z) \cdot \frac{H(z)}{1 + H(z)} = \frac{0.8}{z^2 - 0.3z + 0.1},$$

cujos coeficientes foram arredondados. É interessante notar que a resposta do sistema é contínua por partes, não discreta. De fato, o efeito do atraso variável é equivalente ao de um segurador de ordem zero na resposta do sistema. A Figura 47 apresenta a resposta temporal do sistema para o

caso em que é utilizado o filtro de referência projetado e para o caso em que não é colocado um filtro na entrada do sistema.

Figura 47 – Resposta temporal do sistema controlado em malha fechada com atraso do tipo de dente de serra com filtro de referência e sem filtro na entrada.

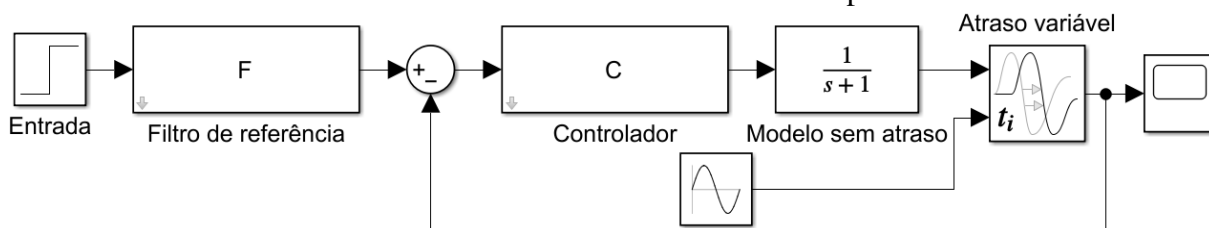


Fonte: O próprio autor.

Para validar a aplicação do controlador proposto para casos em que outros atrasos variáveis no tempo ocorrem no sistema, foram plotadas, por meio do SIMULINK, as saídas do sistema de controle em malha fechada. O diagrama de blocos da Figura 48 mostra, para o caso de um atraso senoidal, como pode ser obtida numericamente a resposta temporal para o sistema de controle proposto. O controlador e o modelo do processo sem atraso são os mesmos das Equações 5.12 e 5.11.

O projeto do filtro de referência foi feito de maneira semelhante ao que foi apresentado para o caso com atraso do tipo dente de serra, mas nesse caso não houve necessidade de discretização e, portanto, o filtro foi projetado diretamente com base nos valores do controlador, conforme mostrado na Equação 5.14.

Figura 48 – Diagrama de blocos no SIMULINK para a obtenção da resposta temporal de um sistema de controle em malha fechada com atraso variável no tempo.

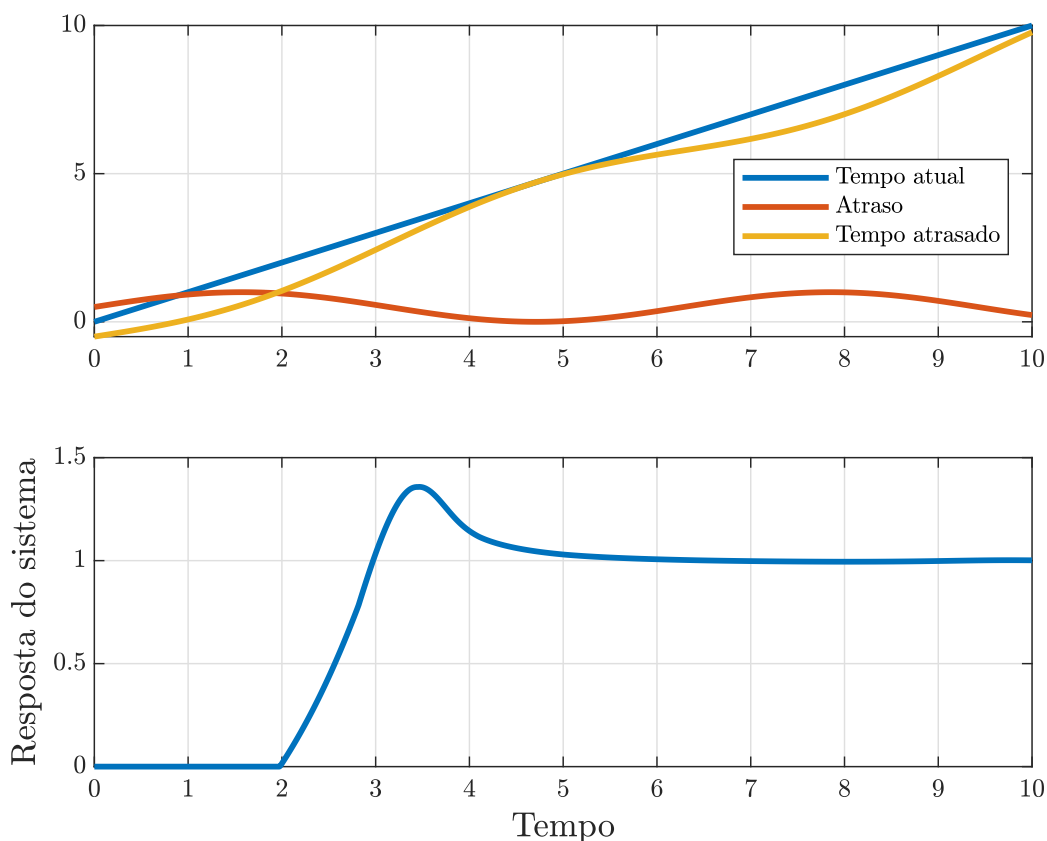


Fonte: O próprio autor.

$$F(s) = \frac{1.24}{s + 1.24}. \quad (5.14)$$

O atraso variável no tempo escolhido para esse caso foi a função $\delta(t) = 0.5 + 0.5 \sin(t)$, cujo valor máximo é unitário. A Figura 49 apresenta a função atraso utilizada, bem como a saída do sistema de controle para uma entrada do tipo degrau unitário. Verifica-se que, conforme esperado, o sistema é estável.

Figura 49 – Forma do atraso temporal considerado e resposta no tempo do sistema em malha fechada para tal atraso.



Fonte: O próprio autor.

É interessante ainda observar no gráfico superior da Figura 49 que o argumento atrasado, em amarelo, é uma função não decrescente, isto é, possui derivada maior ou igual a zero. Essa característica implica também que a derivada do atraso temporal é menor ou igual a 1, indicando, conforme explicado na Subseção 2.3.1, que o sistema é causal.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo apresentar-se-á as conclusões do trabalho realizado, sintetizando os conceitos e resultados, e as sugestões de trabalhos futuros a serem realizados na área.

6.1 Conclusões

Nesse trabalho apresentou-se o motivo pelo qual um sistema com atraso variável de taxa de variação menor que a unidade é inconsistente do ponto de vista da estabilidade. Mostrou-se ainda um exemplo de como uma equivalência topológica com um sistema com atraso constante resolve o problema da definição do espaço de estados, mas adiciona complexidade ao sistema na medida em que os coeficientes do sistema, antes linear e invariante no tempo, passam a ser linear e variante no tempo. Em certa medida, pode-se dizer que tal equivalência transfere aos coeficientes do sistema a variância temporal que antes estava no atraso. Os exemplos apresentados mostram também, por meio dos métodos de solução de equações diferenciais com atraso, que o espaço de estados de um sistema com atraso possui dimensão infinita.

Partindo dos conceitos teóricos apresentados, foi definida a estabilidade para um sistema de controle que, de maneira geral, pode ser estabilidade de Lyapunov ou estabilidade do tipo entrada-saída. Foi demonstrado ainda um critério de estabilidade robusta para sistemas com atraso variável no tempo por meio do teorema do pequeno ganho. Para o caso específico em que o atraso variável possui a forma de dente de serra, caso relevante do ponto de vista prático, apresentou-se uma comparação com o caso em que o atraso é constante para conhecer qual é o pior cenário para o caso em que é utilizado um controlador proporcional-integral no fechamento de malha. Mostrou-se que esse caso é equivalente a um sistema contínuo cujas entradas de controle advêm de um segurador de ordem zero. O resultado de tal análise foi que, para determinada região do plano formado pelos parâmetros de ganho de um controlador proporcional-integral, o atraso variável é o pior caso, mas para outra parte do plano é o atraso constante que representa o pior cenário em termos de estabilidade. Com essa ferramenta, foi possível verificar, para um controlador proporcional-integral proposto em Skogestad (2003), se o sistema em malha fechada com atraso variável permaneceria estável. A resposta obtida foi positiva, tendo em vista que os controladores possíveis projetados utilizando a regra de sintonia testada estão todos na região em que o atraso constante é o pior caso.

No penúltimo capítulo do trabalho foi apresentado um método analítico de determi-

nação de um controlador proporcional-integral que garanta a estabilidade de um processo de primeira ordem com atraso variável no tempo com valor máximo limitado. Isso foi feito por meio do resultado de estabilidade robusta advindo do teorema do pequeno ganho, de modo que a função atraso variável é entendida como uma incerteza no atraso do sistema. Diante disso, a máxima incerteza multiplicativa é comparada ao caso em que a incerteza no atraso é paramétrica e no capítulo discorreu-se também sobre o quão conservador o método proposto é.

6.2 Sugestões de trabalhos futuros

Nesta seção serão apresentados sugestões de trabalhos futuros relacionados ao texto em questão.

- Determinar sob que circunstâncias a estabilidade de um sistema linear e invariante no tempo com atraso variável é um invariante diante de um homeomorfismo, caso exista, com um sistema linear e invariante no tempo com atraso constante. A ideia é que a estabilidade de um sistema com atraso variável seja analisada por meio da estabilidade de seu equivalente topológico com atraso constante;
- Utilizar o teorema de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii para comparar que método é mais conservador na garantia de estabilidade de um sistema com atraso variável no tempo;
- Realizar implementação para validação prática dos métodos discutidos;

REFERÊNCIAS

- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. v. 1. (Coleção textos universitários, v. 1). ISBN 978-85-83370-68-0.
- BRAGA, R. A. M. Estudo de sistemas dinâmicos com atraso variante no tempo. p. 92, 2021.
- BRAGA, R. A. M.; MACHADO, G. F.; PEREIRA, R. D. O.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G. Estudo de processos com atraso variável controlados por compensadores PI. **Anais do Congresso Brasileiro de Automática, 2022, Sociedade Brasileira de Automatica**, Fortaleza, p. 7, 2022.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [S. l.]: Saunders college publishing, 1984.
- CHICONE, C. **Ordinary differential equations with applications**. 2. ed. New York, NY: Springer, 2006. (Texts in applied mathematics, 34). ISBN 978-0-387-30769-5.
- COOKE, K. L. Differential—difference equations. *In*: ELSEVIER. **International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics**. [S. l.], 1963. p. 155–171.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. [S. l.]: PEARSON, 2010. v. 1.
- FRIDMAN, E. **Introduction to time-delay systems**. [S. l.]: Springer, 2014.
- FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J.-P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. **Automatica**, Elsevier, Laxenburg, Austria, v. 40, n. 8, p. 1441–1446, 2004.
- GRIÑÓ, R.; ORTEGA, R.; FRIDMAN, E.; ZHANG, J.; MAZENC, F. A behavioural dynamic model for constant power loads in single-phase AC systems. **Automatica**, Laxenburg, Austria, v. 131, p. 109744, set. 2021. ISSN 0005-1098.
- HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to Functional Differential Equations**. New York, NY: Springer New York, 1993. v. 99. (Applied Mathematical Sciences, v. 99). ISBN 978-1-4612-8741-4 978-1-4612-4342-7.
- HUBBARD, J. H.; WEST, B. H. **Differential equations: A dynamical systems approach: Ordinary differential equations**. [S. l.]: Springer, 2013. v. 5.
- KAO, C.-Y.; LINCOLN, B. Simple stability criteria for systems with time-varying delays. **Automatica**, Elsevier, Laxenburg, Austria, v. 40, n. 8, p. 1429–1434, 2004.
- KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. [S. l.]: Cambridge university press, 1995.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear control**. [S. l.]: Pearson New York, 2015. v. 406.
- KOLMANOVSKII, V. B.; NOSOV, V. R. **Stability of functional differential equations**. [S. l.]: Elsevier, 1986. v. 180.
- KUEHN, C. **An Introduction to Rotation Theory**. 2022. Introduz os conceitos básicos de teoria da rotação e transformações no círculo. Disponível em: <https://dsweb.siam.org/Education/an-introduction-to-rotation-theory>. Acesso em: 06 nov. 2022.

KUZNETSOV, Y. A. **Elements of Applied Bifurcation Theory**. New York, NY: Springer New York, 2004. v. 112. (Applied Mathematical Sciences, v. 112). ISBN 978-1-4419-1951-9 978-1-4757-3978-7.

LIMA, E.; IMPA. **Álgebra linear**. [S. l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008. (Coleção matemática universitária). ISBN 978-85-244-0089-6.

LIU, K.; SUPLIN, V.; FRIDMAN, E. Stability of linear systems with general sawtooth delay. **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, Oxford, Inglaterra.

LOUISSEL, J. Delay differential systems with time-varying delay: New directions or stability theory. **Kybernetika**, Praga, v. 37, n. 3, p. 239–251, 2001.

MAIGNAN, A.; SCOTT, T. Fleshing out the generalized Lambert W Function. **ACM Communications in Computer Algebra**, New York, NY, v. 50, p. 45–60, jun. 2016.

MATHWORKS. **Solving Delay Differential Equations**. 2022. Resolvedores computacionais no MATLAB para a obtenção da solução numérica de equações diferenciais com atraso. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/math/delay-differential-equations.html>. Acesso em: 16 nov. 2016.

MICHIELS, W.; ASSCHE, V. van; NICULESCU, S.-I. Stabilization of time-delay systems with a controlled time-varying delay and applications. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Manhattan, New York, v. 50, n. 4, p. 493–504, 2005. Publisher: Institute of Electrical and Electronics Engineers.

MICHIELS, W.; VERRIEST, E. I. A look at fast varying and state dependent delays from a systems theory point of view. **TW Reports**, Department of Computer Science, KU Leuven, Heverlee, Bélgica, 2011.

MULLER-BENDER, D. **Nonlinear Dynamics and Chaos in Systems with Time-Varying Delay**. 2020. 186 p. Tese (Doutorado) – (Faculdade de Ciências Naturais da Universidade de Chemnitz), Chemnitz, Alemanha.

NASCIMENTO, A. C. D. **Análise comparada da estabilidade robusta na perspectiva determinística e estocástica**. 2016. 115 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

NICULESCU, C. P.; PECARIC, J. The equivalence of Chebyshev's inequality to the Hermite-Hadamard inequality. **Math. Reports**, Bucharest, v. 12, n. 62, p. 145–156, 2010.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 978-85-7605-810-6. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>.

OTTO, A.; MÜLLER, D.; RADONS, G. Universal Dichotomy for Dynamical Systems with Variable Delay. **Physical Review Letters**, College Park, Maryland, v. 118, n. 4, p. 044104, jan. 2017. ISSN 0031-9007, 1079-7114.

OTTO, A.; RADONS, G. Transformations from Variable Delays to Constant Delays with Applications in Engineering and Biology. *In*: INSPERGER, T.; ERSAL, T.; OROSZ, G. (Ed.). **Time Delay Systems**. Cham: Springer International Publishing, 2017. v. 7, p. 169–183. ISBN 978-3-319-53425-1 978-3-319-53426-8. Series Title: Advances in Delays and Dynamics.

PALIS, J.; MELO, W. D. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. [S. l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.

PAPACHRISTODOULOU, A.; PEET, M. M.; NICULESCU, S.-I. Stability analysis of linear systems with time-varying delays: Delay uncertainty and quenching. *In: IEEE. 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*. [S. l.], 2007. p. 2117–2122.

SANTOS, M. M.; VASQUES, F.; STEMMER, M. R. O impacto da comunicação em sistemas de controle via redes can. *In: XV Congresso Brasileiro de Automática (CBA-04)*. [S. l.: s. n.], 2004.

SARDINHA, T. M. **Análise de sistemas lineares incertos com atraso**. 2018. 106 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Ciência e Tecnologia, Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro.

SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. **Journal of process control**, Elsevier, Laxenburg, Austria, v. 13, n. 4, p. 291–309, 2003.

SLOTINE, J.; SLOTINE, J.; LI, W. **Applied Nonlinear Control**. [S. l.]: Prentice Hall, 1991. ISBN 978-0-13-040890-7.

TOWNSEND, E. **Functions of a Complex Variable**. [S. l.]: H. Holt, 1915. (American mathematical series).

VENKATACHALA, B. **Functional Equations A Problem Solving Approach**. [S. l.]: Prism, 2002. ISBN 978-81-7286-265-7.

VERRIEST, E. I. Deterministic and stochastic multi-mode multi-dimensional systems with application to switched systems with delay. *In: Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. [S. l.: s. n.], 2009. p. 3958–3963. ISSN: 0191-2216.

VERRIEST, E. I. Inconsistencies in systems with time-varying delays and their resolution. **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, Oxford, Inglaterra, v. 28, n. 2, p. 147–162, jun. 2011. ISSN 0265-0754, 1471-6887.

WILLEMS, J. C. The Behavioral Approach to Open and Interconnected Systems. **IEEE Control Systems Magazine**, Piscataway, New Jersey, v. 27, n. 6, p. 46–99, dez. 2007. ISSN 1941-000X. Conference Name: IEEE Control Systems Magazine.