



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PATRÍCIA RENATA PEREIRA REGIS

**SOBRE A REGULARIDADE ÓTIMA DA FRONTEIRA LIVRE PARA MINIMIZANTES
DE FUNCIONAIS DO TIPO ALT-CAFFARELLI EM ESPAÇOS DE ORLICZ**

FORTALEZA

2022

PATRÍCIA RENATA PEREIRA REGIS

SOBRE A REGULARIDADE ÓTIMA DA FRONTEIRA LIVRE PARA MINIMIZANTES DE
FUNCIONAIS DO TIPO ALT-CAFFARELLI EM ESPAÇOS DE ORLICZ

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutora em Matemática. Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R265s Regis, Patrícia Renata Pereira.

Sobre a regularidade ótima da fronteira livre para minimizantes de funcionais do tipo Alt-Caffarelli em espaços de Orlicz / Patrícia Renata Pereira Regis. – 2022.
107 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Fronteira livre. 2. Regularidade ótima. 3. Hipersuperfície analítica. 4. Funcionais Alt-Caffarelli. 5. Espaços de Orlicz. I. Título.

CDD 510

PATRÍCIA RENATA PEREIRA REGIS

SOBRE A REGULARIDADE ÓTIMA DA FRONTEIRA LIVRE PARA MINIMIZANTES DE
FUNCIONAIS DO TIPO ALT-CAFFARELLI EM ESPAÇOS DE ORLICZ

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutora em Matemática. Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Aprovada em: 15/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. Sergio Monari
Universidade de São Paulo (USP)

Prof. Dr. Diego Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho às mulheres da minha vida:
Ivoneide, Benedita, Bianca, Sílvia, Teresa e Cris-
tiane. A elas doo partes de mim, mas me preen-
cho delas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me abençoar de uma maneira além da merecida e me manter forte nos dias difíceis.

A família e amigos por todo apoio e orações. Ao meu noivo Denilson pelo apoio, compreensão nos momentos ausentes e por muitas vezes ser meu porto-seguro. A minha irmã caçula Bianca pela paciência em ouvir minhas lamentações acadêmicas. Aos meus tios Teresa e Lustosa que fizeram, em Fortaleza, da sua casa a minha durante o período que fosse necessário.

Agradeço meu orientador de mestrado e doutorado Ederson Braga pelos ensinamentos, gentileza e confiança em meu trabalho. Muito obrigada!

Aos professores do departamento de matemática da UFC, Diego, Alexandre, Caminha, Cleon, Fábio, Raimundo, Marcelo, Lev e Edson, por contribuírem de forma direta em minha formação. Aos membros da banca de defesa desta tese: Diego Moreira (UFC), Gleydson Ricarte (UFC), Jefferson Abrantes (UFCEG) e Sergio Monari (USP). Obrigada pela disponibilidade!

A meu orientador de graduação Flávio Falcão por ter investido do seu tempo e energia a me auxiliar e convencer que as graças alcançadas hoje seriam possíveis. Serei eternamente grata! Obrigada também aos professores da UECE-FAFIDAM, Cristiane, Ana Cecília, Wanderley e Nelson.

Aos bons amigos conquistados no programa de pós-graduação, por serem companhias de estudos e pelas longas conversas que pareciam encurtar a distância de casa. Ao amigo de graduação Alexandre Souza que, mais uma vez, me ajudou a agilizar a digitação desse trabalho de conclusão de curso.

Agradecimentos a Andrea Dantas, secretária da PGMAT, pela competência nos inúmeros serviços prestados. A bibliotecária do curso de matemática Diana Flor pela presteza na revisão deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Por fim agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

“Não troco o meu oxente pelo ok de ninguém!”

(SUASSUNA)

RESUMO

Neste trabalho de tese discutimos duas questões sobre a regularidade ótima da fronteira livre para problemas do tipo Bernoulli em espaços de Orlicz. Primeiro, mostramos que para dimensão $n = 2$ não há pontos singulares na fronteira livre de minimizantes de funcionais do tipo Alt-Caffarelli para N-funções G adequadas. A seguir, provamos como consequência dos principais resultados que existe uma dimensão crítica $n_0 \geq 3$ e uma constante universal $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tal que se $G(t)$ é ε_0 -próxima de t^2 então, para $2 \leq n < n_0$, $F(u)$ é uma hipersuperfície analítica real.

Palavras-chave: fronteira livre; minimizantes; funcionais Alt-Caffarelli; regularidade ótima; hipersuperfície analítica; N-função; espaços de Orlicz.

ABSTRACT

In this work of thesis we discuss two issues about the full regularity of the free boundary for Bernoulli-type problems in Orlicz spaces. First, we show that in dimension $n = 2$ there are no singular points on the free boundary of minimizers of the Alt–Caffarelli-type functional for suitable N-functions G . Next, we prove as a consequence of our main results that there exist a critical dimension $n_0 \geq 3$ and a universal constant $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ such that if $G(t)$ is ε_0 -close of t^2 then, for $2 \leq n < n_0$, $F(u)$ is a real analytic hypersurface.

Keywords: free boundary; minimizers; Alt-Caffarelli functionals; full regularity; analytic hypersurface; N-function; Orlicz spaces.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|----------|--|----|
| Figura 1 | – N-funções complementares G e \tilde{G} | 20 |
| Figura 2 | – Construção das vizinhas em x_k e y_k | 51 |
| Figura 3 | – Bolas centradas em y_k | 51 |
| Figura 4 | – Relação de vizinhança entre x_k, y_k, z_k e w_k | 52 |
| Figura 5 | – Classe flatness $F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ em B_r na direção e_n | 72 |
| Figura 6 | – Solução em semi-espaço | 83 |
| Figura 7 | – Ilustração de $\{a \leq \langle x, e \rangle \leq 0\}$ em \mathbb{R}^2 | 85 |
| Figura 8 | – Ilustração de $\{a \leq \langle x, e \rangle \leq 0\}$ em \mathbb{R}^3 | 85 |
| Figura 9 | – Analiticidade implicando flatness. | 99 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-----|----------------------------------|
| CP | Condição da Primitiva |
| CQ | Condição do Quociente |
| CTD | Controle do tipo Dini |
| EDP | Equações Diferenciais Parciais |
| IPP | Fórmula de Integração por Partes |
| PFL | Problema de Fronteira Livre |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------------------|--|
| B_r | Bola em \mathbb{R}^n de raio r centrada na origem |
| $B_r(x_0)$ | Bola em \mathbb{R}^n de raio r centrada no ponto x_0 |
| $S_r(x_0)$ | Esfera de raio r centrada em x_0 , ou equivalentemente, o bordo de $B_r(x_0)$ |
| χ_E | Função Característica do conjunto E |
| $ E $ | Medida de Lebesgue do conjunto E |
| $H^d(E)$ | Medida de Hausdorff do conjunto E na dimensão d . |
| E° | Interior do conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ |
| Ω | Domínio limitado e suave de \mathbb{R}^n |
| $diam\Omega$ | Diâmetro de Ω , definido por $\sup_{x,y \in \Omega} x - y $ |
| $F(u)$ | Fronteira livre da função u definida por $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$ |
| $\Delta_g u$ | Operador g – Laplaciano aplicado na função u |
| ∇u | Operador gradiente aplicado na função u |
| $G(\delta, g_0)$ | Classe das N-funções que satisfazem (CP) e (CQ) para as constantes δ e g_0 |
| $G(\delta, g_0, \eta)$ | Classe das N-funções $G \in G(\delta, g_0)$ que satisfazem $\eta \leq G(1) \leq \frac{1}{\eta}$ |
| $C_G(\Omega)$ | Classe de Orlicz de G sobre Ω |
| $L_G(\Omega)$ | Espaço de Orlicz de G sobre Ω |
| $W^{k,G}(\Omega)$ | Espaço de Orlicz-Sobolev de G sobre Ω |
| $L^p(\Omega)$ | Espaço de Lebesgue sobre Ω |
| $W^{k,p}(\Omega)$ | Espaço de Lebesgue-Sobolev sobre Ω |
| $\ u\ _{L^\infty(\Omega)}$ | $:= \text{ess sup } u := \inf \{c \in \mathbb{R}; \{ u > c \} = 0\}$ |
| $\ u\ _{L^p(\Omega)}$ | $:= \left(\int_\Omega u(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ |
| $ u _{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ | $:= \sup_{x \neq y} \frac{ u(x) - u(y) }{ x - y }$ (α -ésima seminorma Hölder de u) |
| $\ u\ _{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ | $:= \left(\ u\ _{L^\infty(\Omega)} + u _{C^{0,\alpha}(\Omega)} \right)$ |
| $\ u\ _{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ | $:= \left(\sum_{ \gamma \leq k} \ D^\gamma u\ _{L^\infty(\Omega)} + \sum_{ \gamma =k} D^\gamma u _{C^{0,\alpha}(\Omega)} \right)$ |
| $\ u\ _{W^{k,\infty}(\Omega)}$ | $:= \left(\sum_{ \gamma \leq k} \ D^\gamma u\ _{L^\infty(\Omega)} \right)$ |
| $\ u\ _{W^{k,p}(\Omega)}$ | $:= \left(\sum_{ \gamma \leq k} \ D^\gamma u\ _{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ |

$\|u\|_{L^G(\Omega)} := \inf \left\{ M > 0; \int_{\Omega} G\left(\frac{|u(x)|}{M}\right) dx < 1 \right\}$ (norma de Luxemburgo de u em $L^G(\Omega)$)

$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \|u\|_{L^G}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^G} \right\}$

q.t.p. Significa: tal propriedade vale para quase todo ponto

$k \gg 1$ Significa: existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ satisfaz uma propriedade dada

$\varepsilon \ll 1$ Significa: existe um ε_0 tal que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ satisfaz uma propriedade dada

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|-----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 17 |
| 2.1 | Um pouco dos espaços de Orlicz e espaços de Orlicz-Sobolev | 17 |
| 2.1.1 | <i>Um controle do tipo Dini</i> | 31 |
| 2.2 | Uma breve exposição sobre o operador g-laplaciano e as funções g-harmônicas | 33 |
| 2.2.1 | <i>Forma não-divergente do operador g-laplaciano</i> | 40 |
| 3 | ABORDAGEM AO PROBLEMA DE REGULARIDADE ESTUDADO . | 42 |
| 3.1 | Conhecendo o problema do tipo cavity flow estudado | 42 |
| 3.2 | Regularidade Lipschitz dos minimizantes | 46 |
| 3.3 | Não-degenerescência | 62 |
| 3.4 | Densidade em pontos da fronteira livre | 67 |
| 3.5 | Regularidade flatness | 71 |
| 3.6 | Blowups e soluções em semiespaços | 74 |
| 4 | REGULARIDADE TOTAL DA FRONTEIRA LIVRE | 89 |
| 4.1 | Regularidade total da fronteira livre | 89 |
| 4.2 | Resultado da dimensão crítica | 98 |
| 5 | CONCLUSÃO | 104 |
| | REFERÊNCIAS | 105 |

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da década de 80 problemas de otimização do tipo Alt-Caffarelli vem sendo estudados e, a cada dia, o interesse por esse tipo de problema só cresce. Durante esses 40 anos de lá para cá, rigorosos estudos foram feitos e avanços significativos foram alcançados na direção de estender a teoria desenvolvida por Hans Alt e Caffarelli (1981) que tratava da regularidade em mínimos de problemas associados ao operador Laplaciano. Problemas de otimização dessa natureza procuram abordar regularidade ótima da função minimizante e regularidade ótima da sua fronteira livre, de certos funcionais descontínuos, com descontinuidade da ordem da função característica no conjunto de positividade, sobre espaços de Sobolev apropriados.

Neste trabalho pioneiro Alt e Caffarelli (1981) mostraram que minimizantes dos funcionais da forma

$$u \longmapsto \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + Q(x)\chi_{\{u>0\}}) dx \quad (1.1)$$

definidos sobre um conjunto $K_{\varphi} := \{v \in H^1(\Omega); v - \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$ são funções localmente Lipschitz contínuas, não-negativas e soluções (fracas) do seguinte problema de fronteira livre

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \{u > 0\} \cap \Omega, \\ u_{\nu}^2 = Q & \text{em } F(u) := \partial\{u > 0\} \cap \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto conexo, $0 \leq \varphi \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\partial\Omega)$ e $0 < \lambda_o \leq Q(x) \leq \Lambda_o$. Sobre a fronteira livre os autores mostraram que se Q é suficientemente regular então $F(u)$ é uma superfície de regularidade $C^{1,\alpha}$ na vizinhança de *flat free boundary points*.

Eles ainda verificaram que na dimensão $n = 2$ a fronteira livre era analítica e, portanto, os minimizantes são soluções clássicas de (1.2). Duas décadas depois esse resultado foi estendido para $n = 3$ no paper (CAFFARELLI *et al.*, 2004). Com mais um década, Jerison e Savin provaram para o caso $n = 4$, em (JERISON; SAVIN, 2015). Por outro lado, em 2009 já havia sido provado por Daniela de Silva e David Jerison em (SILVA; JERISON, 2009) que para a dimensão $n = 7$ o resultado de regularidade total não vale pois existe um cone u como minimizante absoluto do operador (1.1).

O fato é que, pelos resultados de Weiss (WEISS, 1999), existe uma dimensão crítica n_0 tal que se u é minimizante de (1.1) na dimensão:

- (i) $n < n_0$ então a fronteira livre $F(u)$ é analítica;
- (ii) $n = n_0$ então o conjunto $F(u) - F(u)_{red}$ consiste de no máximo pontos isolados;
- (iii) $n > n_0$ então o conjunto $F(u) - F(u)_{red}$ tem dimensão de Hausdorff no máximo $n - 1$.

Particularmente, $5 \leq n_0 \leq 7$. Tal informação revela um interessante e curioso paralelo entre os problemas de fronteira livre e a teoria das superfícies mínimas. Por essa razão, esse tipo de problema vem sendo estudado por especialistas de ambas as áreas.

Quando trocamos o Laplaciano pelo operador p-laplaciano, isto é,

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) \text{ por } \Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

e lidamos com o mesmo tipo de problema de otimização, mas para o funcional

$$J_p(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + \lambda^p \chi_{\{u>0\}}) dx \quad (1.3)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto conexo, λ é constante positiva e $K_\varphi := \{v \in W^{1,p}(\Omega); v - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$ para uma $0 \leq \varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$, temos uma lista de propriedades sobre o minimizante e sua fronteira livre escrita por Donatella Danielli e Arshak Petrosyan em (DANIELLI; PETROSYAN, 2005). Eles mostraram que os mínimos são funções localmente Lipschitz contínuas, não-negativas, p-subharmônicas e soluções (fracas) de

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0 & \text{em } \{u > 0\}, \\ u = 0, \quad |\nabla u| = c_p & \text{em } F(u). \end{cases}$$

No ano seguinte, em (DANIELLI; PETROSYAN, 2006) eles trouxeram uma resposta parcial junto da regularidade da fronteira livre de minimizantes. Provaram que em dimensão $n = 2$ existe um $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ universal tal que se $p \in (2 - \varepsilon_0, \infty)$ e u é minimizante de (1.3) então $F(u)$ é analítica. Posteriormente, em (PETROSYAN, 2008) foi mostrado que em dimensão $2 \leq n < n_0$ existe um intervalo universal I vizinhança de 2 tal que se $p \in I$ então a fronteira livre do minimizante é uma hipersuperfície analítica.

Mais geralmente, consideremos o problema de otimização estudado por Sandra Martínez e Noemi Wolanski

$$\min_{v \in K_\varphi} J_G(v) \quad (1.4)$$

onde

$$J_G(v) := \int_{\Omega} (G(|\nabla v|) + \lambda \chi_{\{v>0\}}) dx, \quad (1.5)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ é domínio limitado suave, λ é constante positiva, $0 \leq \varphi \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ onde $K_\varphi = \{v \in W^{1,G}(\Omega); v - \varphi \in W_0^{1,G}(\Omega)\}$ dito conjunto das funções admissíveis e G é N-função satisfazendo Condição da Primitiva (CP) e Condição do Quociente (CQ), também conhecidas como condições de Lieberman:

(CP) Condição da Primitiva:

$$G'(t) = g(t), \text{ com } g \in C^0([0, +\infty)) \cap C^1((0, +\infty))$$

(CQ) Condição do Quociente: Existem constantes $0 < \delta \leq g_0$ tais que

$$0 < \delta \leq Q_g(t) := \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \forall t > 0.$$

Elas provaram em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) que qualquer minimizante desse problema é uma função não negativa, limitada, localmente Lipschitz contínua com estimativa e satisfaz (em sentido fraco) o seguinte Problema de Fronteira Livre de uma fase

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{em } \{u > 0\} \cap \Omega \\ |\nabla u| = \lambda^* & \text{em } F(u) \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

sendo $H(\lambda^*) = \lambda$ para $H(t) := tg(t) - G(t)$.

Quanto à Fronteira Livre $F(u) := \partial\{u > 0\} \cap \Omega$ foi provado que é localmente finita na medida H^{n-1} de Hausdorff, que a Fronteira Reduzida $F(u)_{red}$ é união de hipersuperfícies $C^{1,\alpha}$ e o conjunto dos pontos singulares satisfaz $H^{n-1}(F(u) \setminus F(u)_{red}) = 0$.

No presente trabalho lidamos com o problema (1.4), que está associado ao operador g-laplaciano

$$\Delta_g u = \operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right),$$

usamos um método similar como em (CAFFARELLI; ALT, 1981), (DANIELLI; PETROSYAN, 2006) e (PETROSYAN, 2008) para estudar a regularidade total da fronteira livre sobre as condições de Lieberman (CP) e (CQ). Nesse ponto, um fato importante a ser mencionado é que na maioria dos resultados nesses artigos, argumentos de compacidade são cruciais. Infelizmente, as classes de N-funções que atendem à (CP) e (CQ) são fracas para fornecer compacidade, onde exemplos que ilustram esse fato podem ser encontrados em (BRAGA; MOREIRA, 2014) e (BRAGA, 2018). A principal razão para esta falha é a ausência de um módulo de continuidade do quociente $Q_g(t) := \frac{tg'(t)}{g(t)}$.

Para resolver a falta de compacidade em casos mais gerais, assumimos que Q_g satisfaz o controle do tipo Dini que preserva regularidade C^2 sobre convergência

$$\int_0^{L-l} \frac{\omega_g^{l,L}(t)}{t} dt \leq C(\delta, g_0) \cdot \varepsilon_1 \left(\frac{L}{l} \right) \cdot \varepsilon_2 \left(\frac{L-l}{l} \right),$$

para o módulo de continuidade de Q_g

$$\omega_g^{l,L}(t) := \sup\{|Q_g(x) - Q_g(y)|; l \leq x, y \leq L \text{ e } |x - y| \leq t\}.$$

e funções não-decrescentes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Para mais detalhes veja a Definição 2.1.13.

A respeito da fronteira livre de um minimizante u , mostramos que para $n = 2$, se $\delta \geq 1$ então $F(u)$ é analítica. Se $\delta \in (0, 1)$ pode ocorrer duas possibilidades:

(i) Existe uma constante universal $\zeta \in (0, 1)$ tal que se

$$1 - \zeta < \delta \leq g_0 < 1 + \zeta,$$

então $F(u)$ é analítica.

(ii) Existe uma constante universal pequena μ tal que se

$$1 - \mu < \delta \leq g_0 < \infty,$$

e Q_g satisfaz um controle do tipo Dini então $F(u)$ é hipersuperfície analítica.

Também mostramos que para $n \geq 2$, se $p > 0$ é tal que todo minimizante de (1.3) possui fronteira livre analítica, então existe uma vizinhança I_p de p onde $\delta, g_0 \in I_p$ implica em minimizantes de (1.5) possuírem a mesma propriedade de regularidade total na fronteira livre. Além disso, se δ^* e g_0^* são constantes da condição do quociente que implicam analiticidade da fronteira livre quando associados a problemas com N-funções G' s que satisfazem o controle do tipo Dini, então existe uma constante universal $\mu \in (0, 1)$ tal que se

$$\delta^* - \mu \leq \delta \leq g_0 < g_0^* + \mu,$$

então a fronteira livre dos minimizantes de (1.5) para uma G com Controle do tipo Dini (CTD) e satisfazendo (CQ) para δ e g_0 é analítica.

Finalizamos com um resultado de dimensão crítica concluindo que para $2 \leq n < n_0$ existe uma constante universal ε_0 tal que se

$$1 - \varepsilon_0 < \delta \leq g_0 < 1 + \varepsilon_0$$

então a fronteira livre $F(u)$ é uma hipersuperfície analítica.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo trataremos de apresentar ferramentas básicas e essenciais para o que desejamos desenvolver ao longo deste trabalho. Tendo em vista que tudo acontecerá no cenário dos Espaços de Orlicz, nossa primeira tarefa será construir tais espaços de funções e apresentar condições adicionais às N-funções, que são o núcleo da definição dos espaços, com a finalidade de ganhar mais regularidade e flexibilidade para as manipulações.

Na Seção 2.2 definiremos o operador g -Laplaciano e funções g -harmônicas, que são extensões das funções harmônicas estudadas em qualquer curso de introdução a Equações Diferenciais Parciais (EDP). Aqui trataremos sua regularidade ótima, veremos que a Desigualdade de Harnack estudada para funções harmônicas permanece válida e apresentaremos outros resultados no contexto da g -harmonicidade, além de mostrarmos sua forma não-divergente.

Em seguida, falaremos sobre Equações Diferenciais Parciais Elípticas de Segunda Ordem compilando alguns resultados aplicados nas nossas demonstrações que podem ser encontrados nos Livros (GILBARG *et al.*, 1977) e (EVANS, 2010), por exemplo.

2.1 Um pouco dos espaços de Orlicz e espaços de Orlicz-Sobolev

A fim de construirmos os Espaços de Orlicz definiremos as chamadas N-funções, que por sua vez necessitam de um conhecimento básico sobre funções convexas. Lembremos:

Definição 2.1.1 *Uma função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se para todo $\varepsilon \in [0, 1]$ e quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ vale*

$$G(\varepsilon t + (1 - \varepsilon)s) \leq \varepsilon G(t) + (1 - \varepsilon)G(s). \quad (2.1)$$

Uma interpretação geométrica seria a que o gráfico de G restrita a um intervalo $[t_1, t_2]$ se posiciona abaixo do segmento de reta de liga os pontos $(t_1, G(t_1))$ e $(t_2, G(t_2))$ em \mathbb{R}^2 . Além disso, (2.1) equivale à: para $t \in [t_1, t_2]$ temos

$$G(t) \leq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} G(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} G(t_2), \quad (2.2)$$

basta tomar $\varepsilon = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$ e, equivalentemente, escrever $t = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} t_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} t_2$.

Reescrevendo (2.2) sob as formas

$$\frac{G(t) - G(t_1)}{t - t_1} \leq \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ e } \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{G(t_2) - G(t)}{t_2 - t}$$

para $t \in (t_1, t_2)$, provamos que se G é função contínua e convexa então existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivada à direita, que é não-decrescente e contínua à direita, do mesmo modo que existe derivada à esquerda função não-decrescente e contínua à esquerda, observando que dados $t, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ com $0 < h_1 < h_2$ temos

$$\frac{G(t) - G(t - h_2)}{h_2} \leq \frac{G(t) - G(t - h_1)}{h_1} \leq \frac{G(t + h_1) - G(t)}{h_1} \leq \frac{G(t + h_2) - G(t)}{h_2},$$

implicando em monotonicidade nos quocientes de Newton. Mais ainda, se $a \in \mathbb{R}$ é um zero de G então temos a representação integral

$$G(t) = \int_a^t g(s) ds.$$

A importância de falarmos em funções convexas é que as N-funções são convexas especiais por todas terem, além de certas propriedades em suas derivadas, a origem como (único) zero e consequentemente todas possuem a representação

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds.$$

Definição 2.1.2 Uma função convexa contínua $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma N-função se satisfaz:

- 1) G é função par: $G(t) = G(-t)$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t} = 0$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$;
- 4) $G(t) > 0$ para $t > 0$.

Na literatura podemos encontrar a definição com domínio restrito à $[0, \infty)$ ou até mesmo definida em todo o \mathbb{R} mas com a representação $G(t) = \int_0^{|t|} g(s) ds$. O que não há risco de confusão por consequência da paridade da G .

Além disso, a lista de propriedades para G da Definição 2.1.2 é equivalente a outra lista de propriedades imposta para a sua derivada à direita g . Nesse sentido, pode-se encontrar a definição alternativa abaixo.

Definição 2.1.3 Uma função $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com a representação

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds$$

é dita N-função se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- 1') g é não-decrescente e contínua à direita;

- 2') $g(0) = 0$;
 3') $g(t) > 0$ para $t > 0$;
 4') $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$.

Para evitarmos repetições exaustivas e/ou qualquer tipo de dúvida quanto à notação, sempre que nos referirmos a uma N-função G fica pressuposto que g é a sua derivada à direita, assim como \bar{g} é a derivada de \bar{G} , g_k é a derivada de G_k , e assim por diante.

Exemplo 2.1.1 Considere $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ N-função:

1. Tomando $g(t) = pt^{p-1}$ temos $G(t) = t^p$.
2. Tomando $g(t) = e^t + 1$ temos $G(t) = \int_0^t e^s + 1 ds = e^t + t + c$.
 Como é necessário $G(0) = 0$ para que G seja uma N-função, defina $G(t) = e^t + t - 1$.
3. Tomando $g(t) = pt^{p-1}e^{t^p}$ e $1 < p < \infty$ temos $G(t) = e^{t^p} - 1$.

Definição 2.1.4 (N-funções Complementares) Dada uma N-função $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definimos a N-função Complementar de G , e escrevemos $\tilde{G} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\tilde{G}(t) = \int_0^t \tilde{g}(s) ds$$

onde \tilde{g} é definida por

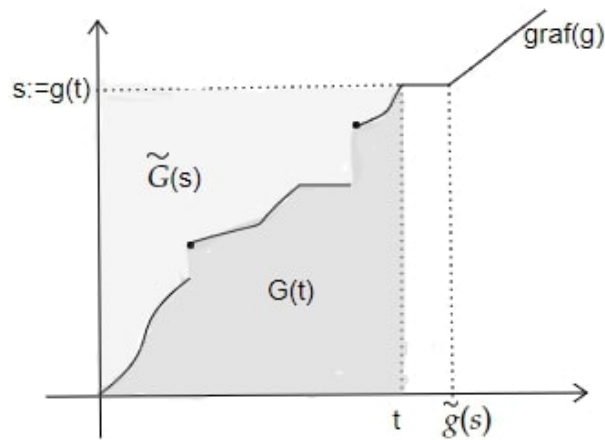
$$\tilde{g}(s) := \sup\{t; g(t) \leq s\}$$

e dita inversa à direita de g .

Lema 2.1.1 A função \tilde{G} definida como N-função Complementar de uma N-função G é, de fato, uma N-função.

Demonstração: Veja Lema 1.4 de (RIBEIRO, 2006). ■

Intuitivamente, tomar uma N-função complementar à G é procurar expressar a diferença entre a área do retângulo $[0,t] \times [0,g(t)]$ e a área da região desse retângulo que fica abaixo do gráfico de g em termos de uma outra N-função.

Figura 1 – N-funções complementares G e \tilde{G} 

Fonte: elaborada pela autora.

Perceba que quando g é contínua e invertível então $\tilde{g} = g^{-1}$.

Exemplo 2.1.2 Sejam $p > 1$ e $\beta = \frac{p}{p-1}$. As funções $G, \tilde{G} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(t) = \frac{t^p}{p} \text{ e } \tilde{G}(s) = \frac{s^\beta}{\beta}$$

são N-funções Complementares pois suas derivadas $g(t) = t^{p-1}$ e $\tilde{g}(s) = s^{\frac{1}{p-1}}$ são funções inversas.

Lema 2.1.2 (Desigualdade de Young) Dado um par de N-funções Complementares G e \tilde{G} , para quaisquer $t, s \geq 0$ temos

$$ts \leq G(t) + \tilde{G}(s).$$

Demonstração: Veja Lema 1.5 de (RIBEIRO, 2006). ■

Observação 2.1.1 Para o próximo lema notemos que toda N-função $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma função inversa $G^{-1} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, existe função satisfazendo $G^{-1} \circ G = G \circ G^{-1} = Id_{[0, \infty)}$.

De fato:

1. Injetividade da função G :

Se $0 \leq t_1 < t_2$ temos $g > 0$ em $(t_1, t_2]$. Assim,

$$G(t_2) - G(t_1) = \int_0^{t_2} g(t)dt - \int_0^{t_1} g(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} g(t)dt > 0$$

Logo, G é uma bijeção sobre sua imagem.

2. Vejamos que $G([0, \infty)) = [0, \infty)$:

Por continuidade e não-negatividade de G , conexidade de $[0, \infty)$ e $G(0) = 0$, temos que a imagem de G é um intervalo de reta contido em $[0, \infty)$ que contém o zero. Para concluirmos $G([0, \infty)) = [0, \infty)$ basta que $G([0, \infty))$ seja ilimitado.

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$, por maior razão temos $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \infty$, logo, dado $A > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que $t \geq t_0$ implica em $G(t) > A$, em particular, $G(t_0) > A$. Concluimos que $G([0, \infty))$ é ilimitado.

Lema 2.1.3 *Sejam G e \tilde{G} N-funções complementares. Dado $t > 0$ vale*

$$t < G^{-1}(t)\tilde{G}^{-1}(t) < 2t. \quad (2.3)$$

Demonstração: Veja Proposição 1.2 de (RIBEIRO, 2006).

As condições adicionais que iremos pedir para as N-funções estudadas serão as chamadas CP e CQ, definidas a seguir.

Definição 2.1.5 *Seja G uma N-função.*

(CP) Condição da Primitiva:

$$G'(t) = g(t), \text{ com } g \in C^0([0, +\infty)) \cap C^1((0, +\infty)) \quad (2.4)$$

(CQ) Condição do Quociente: *Existem constantes $0 < \delta \leq g_0$ tais que*

$$0 < \delta \leq Q_g(t) := \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \forall t > 0. \quad (2.5)$$

Mais à frente veremos que essas constantes da condição do quociente, também conhecidas por constantes de Lieberman, estão diretamente relacionadas com a elipticidade do operador tratado neste trabalho quando escrito sob forma não-divergente.

Exemplo 2.1.3 *Um exemplo clássico de N-função que satisfaz essas condições é*

$$G(t) = t^p \quad (p > 1)$$

que possui quociente constante $Q_g \equiv p - 1$ e, conseqüentemente, tem constantes de Lieberman

$$\delta = g_0 = p - 1.$$

O mesmo ocorre com $G_0(t) = ct^p$ para qualquer constante $c > 0$.

Lema 2.1.4 *Se G é uma N-função satisfazendo CP e CQ para as constantes δ e g_0 , então a sua N-função Complementar \tilde{G} satisfaz CP e CQ para as constantes $0 < \frac{1}{g_0} \leq \frac{1}{\delta}$.*

Demonstração: De fato, g é bijeção uma vez que é contínua com $g' > 0$.

Logo, $\tilde{g} = g^{-1}$ com a mesma regularidade de g .

Além disso, $\tilde{g}'(s) = \frac{1}{g'(\tilde{g}^{-1}(s))}$ e para $s = g^{-1}(t)$ temos

$$Q_{\tilde{g}}(s) := \frac{s\tilde{g}'(s)}{\tilde{g}(s)} = \frac{g(t)}{g'(\tilde{g}^{-1}(s))} \frac{1}{g(g^{-1}(t))} = \frac{g(t)}{tg'(t)} = \frac{1}{Q_g(t)}.$$

■

Definição 2.1.6 *Definimos $G(\delta, g_0)$ como a classe das N-funções que satisfazem as condições de primitiva e quociente para as constantes δ e g_0 . Ainda diremos que $G \in G(\delta, g_0, \eta)$ se $G \in G(\delta, g_0)$ e $\eta \leq G(1) \leq \frac{1}{\eta}$.*

Quando citarmos apenas as condições CP e CQ para uma N-função G , ficará subentendido que estamos nos referindo às constantes genéricas δ e g_0 para uniformizar a notação. Caso estivermos lidando com uma sequência de N-funções G_k , as constantes limitantes dos quocientes $Q_{g_k} := \frac{tg'_k(t)}{g_k(t)}$ serão δ_k e g_{0k} , a menos que fique claro no texto que estejam todas numa mesma classe $G(\delta, g_0)$.

Note, pelo lema que segue, como tais condições acarretam mais regularidade à G e, indiscutivelmente, mais flexibilidade nas manipulações que anseiam por estimativas.

Lema 2.1.5 *Seja G uma N-função satisfazendo CP e CQ. Então para todos $t, s > 0$ vale:*

$$(g-1) \min\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t) \leq g(st) \leq \max\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t)$$

$$(g-2) \frac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t) \leq tg(t)$$

(G-1) G é convexa e de classe $C^2(0, \infty)$

$$(G-2) \min\{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\}G(t) \leq G(st) \leq \max\{s^{1+\delta}, s^{1+g_0}\}G(t)$$

$$(G-3) G(a+b) \leq 2^{g_0}(G(a) + G(b)), \text{ para } a, b > 0.$$

Demonstração:

(g-1) Note que

$$\min\{s^\delta, s^{g_0}\} = \begin{cases} s^{g_0}, & \text{se } 0 \leq s \leq 1 \\ s^\delta, & \text{se } s > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \max\{s^\delta, s^{g_0}\} = \begin{cases} s^\delta, & \text{se } 0 \leq s \leq 1 \\ s^{g_0}, & \text{se } s > 1 \end{cases}$$

Isto é, deseja-se provar que:

a) para $0 \leq s \leq 1$ temos $s^{g_0}g(t) \leq g(st) \leq s^\delta g(t)$

b) para $s > 1$ temos $s^\delta g(t) \leq g(st) \leq s^{g_0}g(t)$

Ou equivalentemente,

a) para $0 \leq s \leq 1$ tem-se $\frac{g(t)}{t^{g_0}} \leq \frac{g(st)}{(st)^{g_0}}$ e $\frac{g(st)}{(st)^\delta} \leq \frac{g(t)}{t^\delta}$

b) para $s > 1$ tem-se $\frac{g(t)}{t^\delta} \leq \frac{g(st)}{(st)^\delta}$ e $\frac{g(st)}{(st)^{g_0}} \leq \frac{g(t)}{t^{g_0}}$.

O que fica provado se as aplicações $h_\delta(t) := \frac{g(t)}{t^\delta}$ e $h_{g_0}(t) := \frac{g(t)}{t^{g_0}}$ forem não-decrescente e não-crescente, respectivamente.

Tal conclusão será tomada verificando que $h'_\delta(t) \geq 0$ e $h'_{g_0}(t) \leq 0$ para todo $t > 0$. De fato,

$$h'_\delta(t) = \frac{1}{t^\delta} \left(g'(t) - \frac{\delta g(t)}{t} \right), \text{ onde } \frac{tg'(t)}{g(t)} \geq \delta \text{ por CQ.}$$

Logo, $h'_\delta(t) \geq 0$.

Analogamente,

$$h'_{g_0}(t) = \frac{1}{t^{g_0}} \left(g'(t) - \frac{g_0 g(t)}{t} \right), \text{ onde } \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0 \text{ por CQ.}$$

Otendo, $h'_{g_0}(t) \leq 0$.

(g-2) Para a segunda desigualdade de $\frac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t) \leq tg(t)$ use que g é não decrescente e tenha

$$G(t) := \int_0^t g(s)ds \leq \int_0^t g(t)ds = tg(t).$$

A primeira vem de $g_0 \geq \frac{sg'(s)}{s}$ em CQ:

$$g_0 G(t) = \int_0^t g_0 g(s)ds \geq \int_0^t sg'(s)ds = tg(t) - G(t)$$

(G-1) A classe $C^2(0, \infty)$ vem de CP e a convexidade ocorre por $G'' = g' \geq 0$, segundo a condição CQ.

(G-2) Assim como feito em (g-1) queremos que:

a) para $0 \leq s \leq 1$ tenhamos $s^{1+g_0}G(t) \leq G(st) \leq s^{1+\delta}G(t)$

b) para $s > 1$ tenhamos $s^{1+\delta}G(t) \leq G(st) \leq s^{1+g_0}G(t)$

Observe que

$$G(st) = \int_0^{st} g(z)dz = s \int_0^t g(sz)dz.$$

a) Lembremos que para $0 \leq s \leq 1$ vale $s^{g_0}g(t) \leq g(st) \leq s^\delta g(t)$.

Então,

$$G(st) = s \int_0^t g(sz)dz \leq s \int_0^t s^\delta g(z)dz = s^{1+\delta}G(t)$$

e

$$G(st) = s \int_0^t g(sz) dz \geq s \int_0^t s^{g_0} g(z) dz = s^{1+g_0} G(t).$$

Logo,

$$s^{1+g_0} G(t) \leq G(st) \leq s^{1+\delta} G(t).$$

b) E que para $s > 1$ vale $s^\delta g(t) \leq g(st) \leq s^{g_0} g(t)$. Então,

$$G(st) = s \int_0^t g(sz) dz \leq s \int_0^t s^{g_0} g(z) dz = s^{1+g_0} G(t)$$

e

$$G(st) = s \int_0^t g(sz) dz \geq s \int_0^t s^\delta g(z) dz = s^{1+\delta} G(t).$$

Logo,

$$s^{1+\delta} G(t) \leq G(st) \leq s^{1+g_0} G(t).$$

(G-3) Segue de (G-2) e a convexidade da G :

$$\begin{aligned} G(a+b) &= G\left(2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \leq 2^{1+g_0} G\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \\ &\leq 2^{1+g_0} \left(\frac{1}{2}G(a) + \frac{1}{2}G(b)\right) \\ &= 2^{g_0} (G(a) + G(b)). \end{aligned}$$

■

Corolário 2.1.1 Seja $G \in G(\delta, g_0)$. Para todo $s > 0$ temos o scaling

$$G_s(t) := \frac{G(st)}{sg(s)}$$

pertencente a classe $G(\delta, g_0)$ e satisfazendo $\frac{1}{1+g_0} \leq G_s(1) \leq 1$.*Demonstração:* É fácil notar que G_s é uma N-função com $g_s(t) = \frac{g(st)}{g(s)}$. Então g_s tem a mesma regularidade da g e

$$\delta \leq Q_{g_s}(t) := \frac{tg'_s(t)}{g_s(t)} = \frac{tsg'(st)}{g(s)} \frac{g(s)}{g(st)} = Q_g(st) \leq g_0$$

Logo, $G_s \in G(\delta, g_0)$.

A desigualdade $\frac{1}{1+g_0} \leq G_s(1) \leq 1$ é imediata de $(g-2)$ do Lema 2.1.5 pois

$$G_s(1) = \frac{G(s)}{sg(s)}. \quad \blacksquare$$

O próximo lema, aparentemente ingênuo, será uma ferramenta fundamental na prova do teorema principal. Destacamos e refinamos ainda mais a estimativa para o caso $\delta \in (0, 1)$ pois ele nos fornecerá uma equação elíptica singular e, portanto, um problema mais difícil de ser solucionado do que o caso $\delta \geq 1$, onde teremos uma equação elíptica degenerada.

Lema 2.1.6 (Lema-chave) *Seja G uma N -função satisfazendo as condições (CP) e (CQ). Então existe uma constante $C = C(\delta, g_0) > 0$ tal que*

$$\left| \frac{g(|\xi|)}{|\xi|} \xi - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|} \eta \right| \leq C \frac{g(|\xi| + |\eta|)}{|\xi| + |\eta|} |\xi - \eta|, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6)$$

Em particular, se $\delta \in (0, 1)$ então

$$\left| \frac{g(|\xi|)}{|\xi|} \xi - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|} \eta \right| \leq g(1) C \max \left\{ 1, (|\xi| + |\eta|)^{g_0 - \delta} \right\} |\xi - \eta|^\delta. \quad (2.7)$$

Demonstração: Definimos $F_g, H_g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_g(\xi, \eta) = \left| \frac{g(|\xi|)}{|\xi|} \xi - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|} \eta \right| \text{ e } H_g(\xi, \eta) = \frac{g(|\xi| + |\eta|)}{|\xi| + |\eta|} |\xi - \eta|$$

Neste caso, é suficiente provar que

$$\Psi_g(\xi, \eta) := \frac{F_g(\xi, \eta)}{H_g(\xi, \eta)} \leq C, \quad \forall \xi \neq \eta.$$

Desde que $\Psi_g(\xi, \eta) = \Psi_g(\eta, \xi)$ e $\Psi_g(0, \eta) = 1$, podemos assumir que $\xi \neq 0$. Ainda, porque Ψ é invariante por transformação ortogonal, podemos assumir que $\xi = |\xi|e_1$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Agora notemos que

$$\Psi_g(|\xi|e_1, \eta) = \Psi_{\tilde{g}} \left(e_1, \frac{\eta}{|\xi|} \right) \text{ para } \tilde{g}(t) := g(|\xi|t).$$

Em particular, se $\tilde{G}(t) = \int_0^t \tilde{g}(s) ds$ temos:

- (i) \tilde{G} satisfaz a condição (CP): \tilde{g} com a mesma regularidade de g .
- (ii) \tilde{G} satisfaz a condição (CQ):

$$Q_{\tilde{g}}(t) := \frac{t\tilde{g}'(t)}{\tilde{g}(t)} = \frac{t \cdot |\xi| g'(t|\xi|)}{g(t|\xi|)} \Rightarrow \delta \leq Q_{\tilde{g}}(t) \leq g_0, \forall t > 0.$$

Assim, se provamos que $\Psi_{\tilde{g}}(e_1, \eta) \leq C(\delta, g_0)$ para todos $\eta \in \mathbb{R}^n$ e \tilde{G} com características de G , usemos que $\Psi_g(|\xi|e_1, \eta) = \Psi_{\tilde{g}}\left(e_1, \frac{\eta}{|\xi|}\right)$ e obtemos

$$\Psi_g(|\xi|e_1, \eta) \leq C(\delta, g_0), \forall \eta \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\xi| \neq 0.$$

Provemos que $\Psi_{\tilde{g}}(e_1, \eta) \leq C$.

Caso 1 : $|e_1 - \eta| < \frac{1}{2}$.

Pelo Teorema do Valor Médio para $f(t) = \frac{g(t)}{t}$, (CQ) e $(g-1)$ temos

$$\begin{aligned} F_{\tilde{g}}(e_1, \eta) &= \left| \tilde{g}(1)(e_1 - \eta) + \tilde{g}(1)\eta - \frac{\tilde{g}(|\eta|)}{|\eta|}\eta \right| \\ &\leq \tilde{g}(1)|e_1 - \eta| + \left| \tilde{g}(1) - \frac{\tilde{g}(|\eta|)}{|\eta|} \right| |\eta| \\ &= \tilde{g}(1)|e_1 - \eta| + |f'(t)| |1 - |\eta|| |\eta| \\ &\leq \tilde{g}(1)|e_1 - \eta| + \frac{1}{t^2} |t\tilde{g}'(t) - \tilde{g}(t)| |e_1 - \eta| |\eta| \\ &\leq \tilde{g}(\eta)|e_1 - \eta| + 4(t\tilde{g}'(t) + \tilde{g}(t)) |e_1 - \eta| |\eta| \\ &\leq \tilde{g}(1)|e_1 - \eta| + 4(\tilde{g}_0\tilde{g}(t) + \tilde{g}(t)) |e_1 - \eta| |\eta| \\ &\leq \tilde{g}(1)|e_1 - \eta| + 4(\tilde{g}_0 + 1)\tilde{g}(1 + |\eta|) |e_1 - \eta| |\eta| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Psi_{\tilde{g}}(e_1, \eta) &\leq \frac{(\tilde{g}(1)|e_1 - \eta| + 4(\tilde{g}_0 + 1)\tilde{g}(1 + |\eta|)|e_1 - \eta| |\eta|)}{\tilde{g}(1 + |\eta|)|e_1 - \eta|} (1 + |\eta|) \\ &\leq \frac{5}{2} \left(\frac{\tilde{g}(1)}{\tilde{g}(1 + |\eta|)} + 4(\tilde{g}_0 + 1) \frac{3}{2} \right) \\ &\leq C(\tilde{g}_0) \end{aligned}$$

Caso 2 : $|e_1 - \eta| \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \Psi_{\tilde{g}}(e_1, \eta) &= \frac{\left| g(1)e_1 - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}\eta \right| (1 + |\eta|)}{g(1 + |\eta|)|e_1 - \eta|} \\ &\leq \frac{(g(1) + g(|\eta|))(1 + |\eta|)}{g(1 + |\eta|)|e_1 - \eta|} \\ &\leq \frac{2g(1 + |\eta|)(1 + |\eta|)}{g(1 + |\eta|)|e_1 - \eta|} \\ &= \frac{2(1 + |\eta|)}{|e_1 - \eta|} \\ &\leq \frac{2(|n| + 1)}{|\eta| - 1} \end{aligned}$$

onde $\eta \mapsto \frac{2(|n|+1)}{|\eta|^{-1}}$ é aplicação limitada em $\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{2}}(e_1)$. Isto prova (2.6).

Finalmente usando (2.6), se $\delta \in (0, 1)$ temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(|\xi|)}{|\xi|} \xi - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|} \eta \right| &\leq C \frac{g(|\xi| + |\eta|)}{|\xi| + |\eta|} |\xi - \eta| \\ &\leq Cg(1) \max \left\{ (|\xi| + |\eta|)^{\delta-1}, (|\xi| + |\eta|)^{g_0-1} \right\} |\xi - \eta| \\ &= Cg(1) \max \left\{ 1, (|\xi| + |\eta|)^{g_0-\delta} \right\} |\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{\delta-1} \\ &\leq Cg(1) \max \left\{ 1, (|\xi| + |\eta|)^{g-\delta} \right\} |\xi - \eta| |\xi - \eta|^{\delta-1} \end{aligned}$$

■

Agora, conhecendo esse núcleo para a construção dos Espaços de Orlicz podemos caminhar na direção de defini-los.

Definição 2.1.7 Dada uma N -função G e um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^n$ definimos a **Classe de Orlicz de G em Ω** por

$$C_G(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_{\Omega} G(u(x)) dx = \int_{\Omega} G(|u(x)|) dx < \infty \right\}.$$

Teorema 2.1.1 Seja $L^1(\Omega)$ o Espaço de Lebesgue das funções integráveis. Então

$$L^1(\Omega) = \bigcup C_G(\Omega),$$

união tomada sobre todas as N -funções G .

Demonstração: Ver Teorema 2.1 em (RIBEIRO, 2006). ■

Embora não necessariamente seja um espaço vetorial, a convexidade da função G torna a classe $C_G(\Omega)$ um conjunto convexo, pois dados $\varepsilon \in [0, 1]$ e funções mensuráveis u_1 e u_2 temos $G(\varepsilon u_1(x) + (1 - \varepsilon)u_2(x)) \leq \varepsilon G(u_1(x)) + (1 - \varepsilon)G(u_2(x))$ para qualquer $x \in \Omega$. A monotonicidade da integral implica

$$\int_{\Omega} G(\varepsilon u_1(x) + (1 - \varepsilon)u_2(x)) dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} G(u_1(x)) dx + (1 - \varepsilon) \int_{\Omega} G(u_2(x)) dx.$$

Logo, se $u_1, u_2 \in C_G(\Omega)$ então $\varepsilon u_1 + (1 - \varepsilon)u_2 \in C_G(\Omega)$.

Observação 2.1.2 Existe uma condição necessária e suficiente para que uma Classe de Orlicz seja um espaço vetorial. A saber, a condição Δ_2 , donde demonstração dessa equivalência pode ser encontrada em Lema 8.8 de (ADAMS; FOURNIER, 2003) e em Teorema 2.3 de (RIBEIRO, 2006).

Definição 2.1.8 Dizemos que uma N -função G satisfaz a condição Δ_2 , e escrevemos $G \in \Delta_2$, se existem constantes $k > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$G(2t) \leq kG(t), \text{ para } t \leq t_0.$$

Definição 2.1.9 Dada uma N -função G e um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos o **Espaço de Orlicz de G em Ω** , denotado por $L^G(\Omega)$, como sendo o menor espaço vetorial que contém a Classe de Orlicz $C_G(\Omega)$.

Corolário 2.1.2 Dada qualquer N -função G e um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o Espaço de Orlicz $L^G(\Omega)$ está contido no Espaço de Lebesgue $L^1(\Omega)$.

Demonstração: Como $L^G(\Omega)$ é o menor espaço vetorial que contém $C_G(\Omega)$, qualquer outro que contenha $C_G(\Omega)$ também irá conter $L^G(\Omega)$ pois pela definição de menor espaço temos $L^G(\Omega) = \cap_{V \in \mathfrak{S}} V$, onde \mathfrak{S} é a família de todos os espaços vetoriais que contém $C_G(\Omega)$.

Lembre que o Teorema 2.1.1 afirma $C_G(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, isto é, $L^1(\Omega) \in \mathfrak{S}$.

Logo, $L^G(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. ■

Observação 2.1.3 Claramente, a observação 2.1.2 nos diz que sempre que $G \in \Delta_2$ temos

$$L^G(\Omega) = C_G(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_{\Omega} G(u(x)) dx < \infty \right\}$$

pois se $C_G(\Omega)$ é, ele próprio, um espaço vetorial então ele será o menor espaço vetorial que o contém.

Veja que isso também ocorre quando G satisfaz CP e CQ.

De fato, mostremos que G satisfazer CP e CQ implica em $G \in \Delta_2$.

Dado $t > 0$, por mudança de variáveis vem

$$G(2t) = \int_0^{2t} g(s) ds = 2 \int_0^t g(2z) dz.$$

Por outro lado, a desigualdade

$$(g-1) : \min\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t) \leq g(st) \leq \max\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t)$$

do Lema 2.1.5 implica em

$$\int_0^t g(2z) dz \leq 2^{g_0} \int_0^t g(z) dz = 2^{g_0} G(t).$$

Logo,

$$G(2t) \leq 2^{1+g_0}G(t), \text{ para } t > 0.$$

■

Observação 2.1.4 Lembrando do Exemplo 2.1.1, sabemos que $G(t) = t^p$ é uma N -função com derivada $g(t) = pt^{p-1}$ e $Q_g \equiv p - 1$. Logo, G satisfaz CP e CQ para $\delta = g_0 = p - 1$ e, portanto,

$$L^G(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensuravel; } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\} = L^p(\Omega).$$

Isto é, os Espaços $L^p(\Omega)$ de Lebesgue são casos particulares de Espaços de Orlicz. Ou equivalentemente, o "mundo" dos Espaços de Orlicz é uma extensão dos Espaços de Lebesgue. E assim como conhecemos os subespaços $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, chamados espaços de Sobolev, definiremos de modo natural os subespaços $W^{1,G}(\Omega)$ nos Espaços de Orlicz.

Lembremos inicialmente o que é o gradiente fraco de uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o qual sua definição é motivada pelo comportamento do gradiente clássico quando existente e a Fórmula de Integração por Partes (IPP)

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial \Omega} u \Phi \nu^i dS$$

para ν campo normal à $\partial \Omega$, $\partial \Omega \in C^1$ e $u, \Phi \in C^1(\Omega)$.

Definição 2.1.10 Dada uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que (f_1, \dots, f_n) é o gradiente fraco de u se para $i = 1, \dots, n$ e toda $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f_i \Phi dx.$$

Nesse caso, f_i é dita a i -ésima derivada parcial fraca de u e comumente representada por $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_i u$, u_{x_i} ou u_i e o gradiente fraco (f_1, \dots, f_n) representado por $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

Definição 2.1.11 Dada uma N -função G e um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^n$ definimos o **Espaço de Orlicz-Sobolev** $W^{1,G}(\Omega)$ como o subespaço de $L^G(\Omega)$ composto por funções que possuem gradiente fraco e cada derivada parcial pertence a $L^G(\Omega)$.

Isto é,

$$W^{1,G}(\Omega) = \left\{ u \in L^G(\Omega); \exists f_1, \dots, f_n \in L^G(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} u \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f_i \Phi dx, \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

Definição 2.1.12 Dizemos que $u \in W_0^{1,G}(\Omega)$ quando $u \in W^{1,G}(\Omega)$ e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ no sentido do traço.

Munindo $L^G(\Omega)$ à **Norma de Luxemburgo** em Ω ,

$$\|u\|_G := \inf \left\{ M > 0; \int_{\Omega} G\left(\frac{|u(x)|}{M}\right) dx < 1 \right\}, \quad (2.8)$$

que torna tal espaço completo, temos a seguinte norma para o espaço $W^{1,G}(\Omega)$ que também o torna completo:

$$\|u\|_{W^{1,G}} := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \|u\|_G, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_G \right\}. \quad (2.9)$$

A completude desses espaços normados podem ser verificadas em (RIBEIRO, 2006) via Teorema 2.5, Lema 2.5 e Teorema 3.1.

Lema 2.1.7 Sejam $u \in L^G(\Omega)$ e G satisfazendo CP e CQ. Então

$$\|u\|_G \leq \max \left\{ \left(\int_{\Omega} G(|u|) dx \right)^{1/(1+\delta)}, \left(\int_{\Omega} G(|u|) dx \right)^{1/(1+g_0)} \right\}.$$

Demonstração: Se $\int_{\Omega} G(|u|) dx = 0$ então $u \equiv 0$ e a igualdade valerá.

Considerando o caso em que $\int_{\Omega} G(|u|) dx \neq 0$ tome

$$M := \max \left\{ \left(\int_{\Omega} G(|u|) dx \right)^{1/(1+\delta)}, \left(\int_{\Omega} G(|u|) dx \right)^{1/(1+g_0)} \right\}$$

e obtenha por $(G-1)$,

$$\int_{\Omega} G\left(\frac{|u|}{M}\right) dx \leq \max \left\{ \frac{1}{M^{1+\delta}}, \frac{1}{M^{1+g_0}} \right\} \int_{\Omega} G(|u|) dx = 1.$$

Pela definição da Norma de Luxemburgo vem $\|u\|_G \leq M$. ■

Teorema 2.1.2 Se G satisfaz CP e CQ, então $L^G(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$ continuamente.

Demonstração: Ver Teorema 2.2 em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). ■

Corolário 2.1.3 Se G satisfaz CP e CQ, então $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1+\delta}(\Omega)$ continuamente.

Demonstração: Pelo Teorema 2.1.2 existe constante $C > 0$ tal que $\|w\|_{L^{1+\delta}} \leq C\|w\|_G$ para qualquer $w \in L^G(\Omega)$. Em particular, vale para funções $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^G(\Omega)$, nos dando

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,1+\delta}} &:= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \|u\|_{L^{1+\delta}}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{1+\delta}} \right\} \\ &\leq C \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \|u\|_G, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_G \right\} \\ &= C\|u\|_{W^{1,G}}. \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.8 (Desigualdade do tipo Poincaré) *Seja $u \in W_0^{1,G}(\Omega)$. Então*

$$\int_{\Omega} G\left(\frac{|u|}{\text{diam}\Omega}\right) dx \leq \int_{\Omega} G(|\nabla u|) dx.$$

Demonstração: Veja Lema 2.2 de (LIEBERMAN, 1991).

■

Teorema 2.1.3 (Teorema do Traço de Sobolev) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado com $\partial\Omega \in C^1$. Existe um operador linear contínuo, chamado Operador Traço,*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que:

1. $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;
2. $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(p, \Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Demonstração: Veja Teorema 1 da Seção 5.5 de (EVANS, 2010).

■

Em particular, quando $u \in W^{1,G}(B_r(y))$ para $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$ obtemos

$$\int_{\partial B_r(y)} |u| dS \leq C(n, r) \int_{B_r(y)} (|u| + |\nabla u|) dx \quad (2.10)$$

pelo Teorema do Traço de Sobolev uma vez que $u, \nabla u \in L^1(B_r(y))$ como consequência do Corolário 2.1.2.

2.1.1 Um controle do tipo Dini

Para obter compacidade em alguns casos necessitaremos pedir um outro tipo de controle para o quociente

$$Q_g(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)}$$

além da limitação uniforme $0 < \delta \leq Q_g(t) \leq g_0$ dada pela condição (CQ).

De modo geral, uma sequência $G_k \in G(\delta, g_0, \eta)$ converge, a menos de uma subsequência, em norma $C_{loc}^{1,\alpha}$ para uma N-função $C^{1,1}$ não havendo garantia do limite preservar a mesma regularidade das N-funções da sequência.

Exemplo 2.1.4 *Considere a família de N-funções dada em (BRAGA, 2018) definida por*

$$G_k(t) := \begin{cases} \frac{3}{4}t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{(4+5k)}{12}t^3 - \frac{(5+10k)}{4}t^2 + (4+5k)t - \frac{(8+10k)}{3} & \text{se } 2 \leq t \leq 2 + \frac{1}{k} \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{(5+4k)}{4k}t + \frac{7}{3} + \frac{5}{2k} + \frac{5}{12k^2} & \text{se } t \geq 2 + \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Temos $G_k \in G(1, 7, 3/4)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\{G_k\}$ convergindo uniformemente sobre compactos de $[0, \infty)$ para a função

$$G(t) := \begin{cases} \frac{3}{4}t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{7}{3} & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

onde $G \in C^{1,1}([0, \infty)) \setminus C^2([0, \infty))$. Em particular, a função limite não satisfaz (CP). ■

No entanto, lidamos com N-funções que se enquadram em (CP), isto é,

$$G \in C^1([0, \infty)) \cap C^2((0, \infty)).$$

Em busca de obter essa compacidade, em (BRAGA, 2018) foi desenvolvida uma ferramenta chamada Controle tipo Dini sobre um módulo de continuidade para o quociente Q_g que preserva regularidade $C^1([0, \infty)) \cap C^2((0, \infty))$ no espaço $G(\delta, g_0, \eta)$.

Lembremos que módulo de continuidade é uma função contínua não-decrescente $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ onde $\omega(0) = 0$ e $\omega(t) > 0$ sempre que $t > 0$. Agora dados $G \in G(\delta, g_0)$ e $0 < l < L < \infty$, definimos o **módulo de continuidade para Q_g**

$$\omega_g^{l,L}(t) := \sup\{|Q_g(x) - Q_g(y)|; l \leq x, y \leq L \text{ e } |x - y| \leq t\}.$$

Definição 2.1.13 (Controle tipo Dini) *Seja G uma N-função satisfazendo (CP) e (CQ). Diremos que Q_g satisfaz um CTD se, para funções não-decrescentes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon_2(t) = 0$ e para quaisquer $0 < l < L < \infty$, vale a estimativa*

$$\int_0^{L-l} \frac{\omega_g^{l,L}(t)}{t} dt \leq C(\delta, g_0) \cdot \varepsilon_1\left(\frac{L}{l}\right) \cdot \varepsilon_2\left(\frac{L-l}{l}\right). \quad (2.11)$$

Definição 2.1.14 Definimos $G_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0)$ e $G_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta)$ como os subconjuntos das classe $G(\delta, g_0)$ e $G(\delta, g_0, \eta)$, respectivamente, compostos por N -funções que satisfazem o controle (2.11).

Teorema 2.1.4 Dada uma sequência de N -funções $\{G_k\}$ em $G_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta)$ existe uma sub-sequência $\{G_{k_j}\}_j$ que converge na topologia C^2 em subconjuntos compactos de $(0, \infty)$ e na topologia C^1 em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$ para uma N -função $G_0 \in G(\delta, g_0)$

Demonstração: Veja o Teorema 9.1 de (BRAGA, 2018) e note que $G_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta) = \vartheta(\varepsilon_0, E_0)$ para $\varepsilon_0 = \eta$ e $E_0 = \frac{1}{\eta}$. ■

Exemplo 2.1.5 Com esse teorema obtemos que a sequência $\{G_k\}$ do Exemplo 2.1.4 não possui controle do tipo Dini sejam quais forem ε_1 e ε_2 .

2.2 Uma breve exposição sobre o operador g -laplaciano e as funções g -harmônicas

Definição 2.2.1 Dada $u \in W^{1, G}(\Omega)$ definimos o g -Laplaciano da função u por

$$\Delta_g u := \operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right).$$

Exemplo 2.2.1 Quando consideramos $G(t) = \frac{t^p}{p}$ para $p > 1$ temos

$$\Delta_g u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Para esse caso particular o operador g -Laplaciano é dito p -Laplaciano, denotado por Δ_p . Estudos e resultados semelhantes ao que iremos fazer para o Δ_g já foram realizados para o Δ_p anteriormente. Para mais detalhes veja a introdução. ■

Sobre as soluções, do mesmo modo que a definição da derivada fraca é motivada pela Fórmula de IPP, teremos a solução da equação $\Delta_g u = f$. Mais precisamente, usando o teorema da divergência de campos vetoriais $X = (X_1, \dots, X_n)$

$$\int_{\Omega} X \cdot \nabla \phi \, dx = - \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} X \, dx + \int_{\partial \Omega} \phi X \cdot \nu \, dS,$$

dizemos que u é solução fraca de $\Delta_g u = f$ no sentido das distribuições se para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\int_{\Omega} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = - \int_{\Omega} f \phi \, dx.$$

Em particular, $\Delta_g u = 0$ se

$$\int_{\Omega} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = 0, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por outro lado, dizemos que u satisfaz a desigualdade $\Delta_g u \geq f$, isto é, u é subsolução de $\Delta_g u = f$, quando

$$\int_{\Omega} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \leq - \int_{\Omega} f \phi dx$$

para toda $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Assim como $\Delta_g u \leq f$ equivale a

$$\int_{\Omega} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \geq - \int_{\Omega} f \phi dx$$

para toda $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 2.2.2 Uma função $u \in W^{1,G}(\Omega)$ é dita:

- (1) **g-harmônica** se $\Delta_g u = 0$;
- (2) **g-subharmônica** se $\Delta_g u \geq 0$;
- (3) **g-superharmônica** se $\Delta_g u \leq 0$.

Não há dificuldades para notar que funções g-harmônicas são g-subharmônicas e g-superharmônicas simultaneamente.

Teorema 2.2.1 (Princípio da Comparação) *Sejam $u, v \in C^0(\overline{\Omega})$ funções g-subharmônica e g-superharmônica, respectivamente. Se $u \leq v$ em $\partial\Omega$ então $u \leq v$ em Ω . Em particular, se $w \in C^0(\overline{\Omega})$ é uma solução de $\Delta_g w = 0$ e $w = w_0$ em $\partial\Omega$, então w é determinada (única).*

Demonstração: Ver Lema 2.8 de (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). ■

Teorema 2.2.2 (Princípio do Máximo) *Seja $u \in C^0(\overline{\Omega})$ função satisfazendo $\Delta_g u = 0$. Então*

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$$

Demonstração: Ver Corolário 3.2 de (GILBARG *et al.*, 1977) e a forma não divergente (2.16) do operador Δ_g . ■

Teorema 2.2.3 (Princípio do Máximo Local) *Seja $u \in L^\infty(B_R) \cap W^{1,G}(B_R)$ função satisfazendo $\Delta_g u \geq 0$. Para cada $\gamma > 0$ e $\sigma \in (0, 1)$ existe $C = C(n, g_0, \gamma)$ tal que*

$$\sup_{B_{\sigma R}} u_+ \leq \frac{C}{(1-\sigma)^{\frac{n(g_0+1)}{\gamma}}} \left(R^{-n} \int_{B_R} (u_+)^{\gamma} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.12)$$

Demonstração: Segue pelo Teorema 1.2 de (LIEBERMAN, 1991) tomando $A(x, z, p) = \frac{g(|p|)}{|p|}p$, $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = b_0 = b_1 = b_2 = 0$ e $a_3 = 1$ e observando que as desigualdades de (1.4) em (LIEBERMAN, 1991) valem para qualquer $\chi > 0$. Faça $\chi \rightarrow 0$ e tenha o desejado. ■

Teorema 2.2.4 (Desigualdade de Harnack) *Sejam $G \in G(\delta, g_0)$ e $0 \leq u \in W^{1,G}(B_r)$ solução de*

$$\Delta_g u = f \text{ em } B_r,$$

onde $f \in L^q(B_r)$, $q > n$. Existe uma constante $C = C(n, \delta, g_0, q) > 0$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leq C \left(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u + r g^{-1} \left(r^{1-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_r)} \right) \right).$$

Demonstração: Ver Lema 3.4 de (BRAGA, 2018). ■

Corolário 2.2.1 (Desigualdade de Harnack para funções g-harmônicas) *Sejam $G \in G(\delta, g_0)$ e $0 \leq u \in W^{1,G}(B_r)$ solução de*

$$\Delta_g u = 0 \text{ em } B_r.$$

Existe uma constante $C = C(n, \delta, g_0) > 1$ tal que

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leq C \cdot \inf_{B_{\frac{r}{2}}} u. \quad (2.13)$$

Demonstração: Aplique a Desigualdade de Harnack notando que $f = 0 \in L^q$ para qualquer q fixado e $\|f\|_{L^q(B_r)} = 0$. ■

Na verdade, a estimativa interior (2.13) vale para qualquer $kr < r$. Apenas devemos nos atentar à constante C que dependerá da fração de raio tomada. Por exemplo, dado $k \in (0, 1)$ e u satisfazendo $\Delta_g u = 0$ em B_r valerá

$$\sup_{B_{kr}} u \leq C(n, \delta, g_0, k) \inf_{B_{kr}} u. \quad (2.14)$$

Teorema 2.2.5 *Sejam $G \in G(\delta, g_0)$ e $u \in W^{1,G}(\Omega)$ solução de*

$$\Delta_g u = 0 \text{ em } \Omega.$$

Então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha(n, \delta, g_0) \in (0, 1)$ e dado $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe $C = C(n, \delta, g_0, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ tal que

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{\Omega'})} \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Demonstração: Usaremos o Teorema 1.7 de (LIEBERMAN, 1991), mas como desejamos uma estimativa na qual as constantes têm dependência de menos parâmetros do que as apresentadas por Lieberman, começaremos com um caso particular a fim de perder algumas dessas dependências antes de aplicar seu resultado.

Como para $u \equiv 0$ vale a igualdade independente do C , consideraremos o caso $\|u\|_{L^\infty(B_1)} > 0$. Defina

$$k := \|u\|_{L^\infty(B_1)} \text{ e } \omega(x) := \frac{u(x)}{k}.$$

Veja que:

$$(1) \Delta_{g^*} \omega = 0 \text{ para } g^*(t) := \frac{g(kt)}{g(k)}:$$

$$\begin{aligned} \Delta_{g^*} \omega(x) &= \operatorname{div} \left(\frac{g^*(|\nabla \omega(x)|)}{|\nabla \omega(x)|} \nabla \omega(x) \right) = \operatorname{div} \left(\frac{g(k|\nabla \omega(x)|)}{g(k)} \frac{1}{|\nabla \omega(x)|} \nabla \omega(x) \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u(x)|)}{g(k)} \frac{k}{|\nabla u(x)|} \frac{\nabla u(x)}{k} \right) \\ &= \frac{\Delta_g \omega(x)}{g(k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$(2) G^*(t) := \int_0^t g^*(s) ds \text{ pertence a mesma classe } G(\delta, g_0) \text{ de } G:$$

$$Q_{g^*}(t) := \frac{t g^*(t)}{g^*(t)} = t \frac{kg'(kt)}{g(k)} \frac{g(k)}{g(kt)} = Q_g(kt)$$

$$(3) g^*(1) = 1$$

$$(4) \|\omega\|_{L^\infty(B_1)} = 1.$$

Então pelo Teorema 1.7 de Lieberman existem constantes $\alpha = \alpha(n, \delta, g_0) \in (0, 1)$ e $C = C(n, \delta, g_0, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ tais que

$$\|\omega\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C.$$

Mas $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} = \|\omega\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \cdot k = \|\omega\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Então

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

■

Lema 2.2.1 (Estimativa do gradiente para funções g-harmônicas) *Seja v solução fraca de $\Delta_g v = 0$ em Ω para $G \in G(\delta, g_0)$. Existe uma constante $C = C(n, \delta, g_0) > 0$ tal que para toda bola $B_r \subset \Omega$,*

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} G(|\nabla v|) \leq \frac{C}{r^n} \int_{B_{\frac{2}{3}r}} G(|\nabla v|) dx,$$

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla v| \leq \frac{C}{r} \sup_{B_r} v.$$

Para $\beta \in (0, n)$ existe $C = C\left(n, \beta, \delta, g_0, \|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})}\right) > 0$ tal que

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} G(|\nabla v|) dx \leq Cr^\beta. \quad (2.15)$$

Demonstração: Ver Lema 2.7 de (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). ■

Observação 2.2.1 *Nós conseguimos exibir a forma da dependência do parâmetro $\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})}$ na constante $C = C\left(n, \beta, \delta, g_0, \|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})}\right) > 0$ de (2.15) e percebemos que eles crescem proporcionalmente.*

De fato, seja $C(n, \beta, \delta, g_0)$ a constante como no Lema 2.2.1 para $\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})} = 1$.

No caso geral, quando $\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})} = 0$ vale a estimativa para qualquer $C > 0$. Assim, consideraremos apenas os casos em que $\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})} \neq 0$ e definiremos

$$\omega(x) := \frac{v(x)}{\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})}} := \frac{v(x)}{k}.$$

Além de $\|\omega\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})} = 1$, assim como no Teorema 2.2.5, definimos

$$g^*(s) := \frac{g(ks)}{g(k)} \text{ e } G^*(t) := \int_0^t g^*(s) ds$$

para obtermos $\Delta_{g^} \omega = 0$ e $G^* \in G(\delta, g_0)$. Então*

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} G^*(|\nabla \omega|) dx \leq C(n, \beta, \delta, g_0) r^\beta.$$

Mas note que

$$G^*(t) = \int_0^t g^*(s) ds = \int_0^t \frac{g(ks)}{g(k)} ds = \frac{1}{kg(k)} \int_0^{kt} g(z) dz = \frac{1}{kg(k)} G(kt)$$

e, portanto,

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} G^*(|\nabla \omega|) dx = \frac{1}{kg(k)} \int_{B_{\frac{r}{2}}} G(|k\nabla \omega|) dx = \frac{1}{kg(k)} \int_{B_{\frac{r}{2}}} G(|\nabla v|) dx,$$

implicando em

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} G(|\nabla v|) dx = kg(k) \int_{B_{\frac{r}{2}}} G^*(|\nabla \omega|) dx \leq kg(k) C(n, \beta, \delta, g_0) r^\beta.$$

Por isso e $(g-2)$,

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} G(|\nabla v|) dx \leq G\left(\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})}\right) C(n, \beta, \delta, g_0) r^\beta.$$

Aplicando a desigualdade (G-2) obtemos

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} G(|\nabla v|) dx \leq \max \left\{ \left(\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})}\right)^{1+\delta}, \left(\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{2}{3}r})}\right)^{1+g_0} \right\} G(1) C(n, \beta, \delta, g_0) r^\beta.$$

■

Teorema 2.2.6 *Sejam $u \in W^{1,G}(\Omega)$, $B_r \subset \subset \Omega$, $G \in G(\delta, g_0)$ e $v \in W^{1,G}(B_r)$ solução de*

$$\begin{cases} \Delta_g v = 0 & \text{em } B_r \\ v = u & \text{em } \partial B_r \end{cases}$$

então

$$\int_{B_r} (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)) dx \geq C(\delta, g_0) \left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|) dx + \int_{A_1} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \right),$$

onde $A_1 = \{x \in B_r; |\nabla u - \nabla v| \leq 2|\nabla u|\}$ e $A_2 = \{x \in B_r; |\nabla u - \nabla v| > 2|\nabla u|\}$.

Demonstração: Ver Teorema 2.3 em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). ■

Observação 2.2.2 *O Lema 5.2 de (LIEBERMAN, 1991) nos garante a existência de solução do problema 2.2.6 sempre que $u \in W^{1,G}(B_r) \cap C^0(\overline{B_r})$.*

Vimos que a g -harmonicidade da função implica regularidade $C_{loc}^{1,\alpha}$. Mas vejamos que conseguimos pelo menos Continuidade Hölder se enfraquecermos a hipótese. O fato é que temos um Lema do tipo Morrey nos Espaços de Orlicz-Sobolev como o já conhecido na subseção 5.6.2 de (EVANS, 2010) para os Espaços de Sobolev $W^{1,p}$. À saber:

Lema 2.2.2 (Lema do tipo Morrey) *Sejam $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $G \in G(\delta, g_0)$ e $0 < \alpha \leq 1$. Suponha que para $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe L tal que*

$$\int_{B_r(x_0)} G(|\nabla u|) dx \leq Lr^{\alpha-1}$$

vale para todo $x_0 \in \Omega'$ com $0 < r \leq R_0 \leq \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Então existem $C_1 = C_1(n, \alpha, g_0) > 0$ e $C_2 = C_2(n, \alpha, g_0, R_0) > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} &\leq C_1 \max \left\{ \frac{L}{G(1)}, 1 \right\} \text{ para } x, y \in \Omega' \text{ com } 0 < |x - y| \leq \frac{R_0}{2}; \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega')} &\leq C_2 \left(L + \|u\|_{L^1(\Omega)} \right) \\ [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega')} &\leq \max \left(C_1 \max \left\{ \frac{L}{G(1)}, 1 \right\}, \frac{2^{\alpha+1} \|u\|_{L^\infty(\Omega')}}{R_0^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Demonstração: Ver Lema 3.3 em (BRAGA, 2018) ou Apêndice em (BRAGA; MOREIRA, 2014). ■

Observe que o resultado acima continua válido se tomarmos $u \in W^{1,G}(\Omega)$ devido ao Corolário 2.1.2, pois nesse caso, $W^{1,G}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$.

Teorema 2.2.7 *Seja L operador*

$$Lu := D_i (a_{ij}(x) D_j u + b_i(x) u) + c_i(x) D_i u + d(x) u$$

onde existem constantes positivas Λ_1 , Λ_2 e Λ_3 tais que

- (i) $a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \Lambda_1 |\xi|^2$, $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^r$;
- (ii) $\sum |a_{ij}(x)|^2 \leq \Lambda_2^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\Lambda_1^{-2} \sum (|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \Lambda_1^{-1} |d(x)| \leq \Lambda_3^2$.

Sejam $f_i \in L^q(\Omega)$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ para algum $q > n$. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é supersolução de $Lu = g + D_i f_i$, não-negativa na bola $B_{4R}(y) \subset \Omega$ e $1 \leq p < n/(n-2)$, então temos

$$\|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leq CR^{n/p} \left(\inf_{B_R(y)} u + k(R) \right)$$

onde $C = C(n, \Lambda_2/\Lambda_1, \Lambda_3 R, q, p)$ e $k(R) = \Lambda_1^{-1} \left(R^{1-n/q} \|f\|_q + R^{2(1-n/q)} \|g\|_{q/2} \right)$.

Demonstração: Ver Teorema 8.18 de (GILBARG et al., 1977). ■

Lema 2.2.3 *Fixado um $\varepsilon > 0$ definimos a família de funções $\{v_\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ por $v_\mu(x) := \varepsilon e^{-\mu|x|^2}$.*

Dados $0 < r_1 < r_2$ existe $\mu = \mu(n, \delta, g_0, r_1) > 0$ tal que

$$\Delta_g v_\mu > 0 \text{ em } B_{r_2} \setminus B_{r_1}.$$

Demonstração: Ver Lema 2.9 em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). ■

2.2.1 Forma não-divergente do operador g-laplaciano

Considerando $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \neq 0$, o operador g-laplaciano

$$\Delta_g u := \operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right)$$

tem a forma não-divergente

$$\Delta_g u(x) = \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|} \operatorname{Tr} (A_u(x) \cdot D^2(x)) \quad (2.16)$$

onde

$$A_u(x) := (a_{ij}^u(x))_{n \times n} = \left(\frac{g'(|\nabla u(x)|)}{g(|\nabla u(x)|)} |\nabla u(x)| - 1 \right) \left(\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \otimes \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \right) + I_n$$

e, portanto,

$$a_{ij}^u(x) = \left(\frac{g'(|\nabla u(x)|)}{g(|\nabla u(x)|)} |\nabla u(x)| - 1 \right) \frac{D_i u(x) D_j u(x)}{|\nabla u(x)|^2} + \delta_{ij}. \quad (2.17)$$

Em particular, A_u é $(\lambda_\delta, \Lambda_{g_0})$ -elíptico com $\lambda_\delta := \min\{1, \delta\}$ e $\Lambda_{g_0} := \min\{1, g_0\}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \operatorname{Tr} (A_u \cdot D^2 u) &= \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \operatorname{Tr} ((a_{ij}^u) \cdot (D_{ij} u)) \\ &= \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \operatorname{Tr} \left(\left[\sum_{k=1}^n a_{ik}^u D_{kj} u \right]_{ij} \right) \\ &= \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \sum_{ij} a_{ij}^u D_{ij} u \\ &= \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \sum_{ij} \left[\left(\frac{g'(|\nabla u|)}{g(|\nabla u|)} |\nabla u| - 1 \right) \frac{D_i u D_j u}{|\nabla u|^2} + \delta_{ij} \right] D_{ij} u \\ &= \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \left[\sum_{ij} D_i u D_j u D_{ij} u \left(\frac{g'(|\nabla u|)}{g(|\nabla u|) |\nabla u|} - \frac{1}{|\nabla u|^2} \right) + \sum_i D_{ii} u \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) &= \sum_{i=1}^n D_i \left(\frac{g(|\nabla u|) D_i u}{|\nabla u|} \right) \\ &= \sum_{ij} \left(\frac{g'(|\nabla u|) D_j u D_i u D_{ij} u}{|\nabla u|^2} + \frac{g(|\nabla u|) D_{ii} u}{|\nabla u|} - \frac{g(|\nabla u|) D_i u D_j u D_{ij} u}{|\nabla u|^2 |\nabla u|} \right) \\ &= \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \left[\sum_{ij} D_i u D_j u D_{ij} u \left(\frac{g'(|\nabla u|)}{g(|\nabla u|) |\nabla u|} - \frac{1}{|\nabla u|^2} \right) + \sum_i D_{ii} u \right], \end{aligned}$$

obtendo

$$\Delta_g u(x) = \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|} \text{Tr}(A_u(x) \cdot D^2(x))$$

como desejado.

Quanto aos coeficientes a_{ij}^u usamos uma notação simplificada, mas na verdade

$$a_{ij}^u(x) = a_{ij}(x, u, \nabla u)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{ij}(x, z, p) &= \left(\frac{g'(|p|)}{g(|p|)} |p| - 1 \right) \frac{p_i p_j}{|p|^2} + \delta_{ij} \\ &= (Q_g(|p|) - 1) \frac{p_i p_j}{|p|^2} + \delta_{ij} \end{aligned}$$

e p_i é a i -ésima coordenada do vetor $p \in \mathbb{R}^n$. ■

3 ABORDAGEM AO PROBLEMA DE REGULARIDADE ESTUDADO

Exporemos o problema estudado nesse trabalho de tese. Em seguida traremos resultados de regularidade, não-degenerescência e densidade antes estudados e apontaremos, para parte deles, em quais aspectos os modificaremos. Também traremos resultados de convergência de minimizantes.

A partir de agora considere sempre $G \in G(\delta, g_0, \eta)$, isto é, N-funções G satisfazendo CP, CQ e $\eta \leq G(1) \leq \frac{1}{\eta}$.

3.1 Conhecendo o problema do tipo cavity flow estudado

Consideremos o problema de otimização estudado por (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008)

$$\min_{v \in K_\phi} J_G(v)$$

onde

$$J_G(v) = J_{G,\Omega}(v) := \int_{\Omega} (G(|\nabla v|) + \lambda \chi_{\{v>0\}}) dx, \quad (3.1)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ é domínio limitado e suave, G é N-função satisfazendo CP e CP, λ é constante positiva, $0 \leq \phi \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ e $K_\phi = \{v \in W^{1,G}(\Omega); v - \phi \in W_0^{1,G}(\Omega)\}$ dito conjunto das funções admissíveis.

Elas provaram que qualquer minimizante desse problema é uma função não negativa, limitada, localmente Lipschitz contínua com estimativa e satisfaz (em sentido fraco) o seguinte Problema de Fronteira Livre (PFL) de uma fase

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{em } \{u > 0\} \cap \Omega \\ |\nabla u| = \lambda^* & \text{em } F(u) \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo $H(\lambda^*) = \lambda$ para $H(t) := tg(t) - G(t)$.

Quanto à Fronteira Livre $F(u) := \partial\{u > 0\} \cap \Omega$ foi provado que é localmente finita na medida H^{n-1} de Hausdorff, que a Fronteira Reduzida $F(u)_{red}$ é união de hipersuperfícies $C^{1,\alpha}$ e o conjunto dos pontos singulares satisfaz $H^{n-1}(F(u) \setminus F(u)_{red}) = 0$. Tais resultados envolvem seguinte teorema de caracterização para a medida $\Lambda = \Delta_g u$.

Teorema 3.1.1 (Teorema de caracterização) *Seja u minimizante de (3.1). Então,*

(1) $H^{n-1}(D \cap \partial\{u > 0\}) < \infty$ para todo $D \subset\subset \Omega$;

(2) Existe uma função de Borel q_u tal que

$$\Delta_g u = q_u H^{n-1}[\partial\{u > 0\}],$$

isto é,

$$-\int_{\Omega} g(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \varphi dx = \int_{\Omega \cap \partial\{u > 0\}} \varphi q_u H^{n-1}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega);$$

(3) Para todo $D \subset\subset \Omega$ existem constantes $0 < c \leq C < \infty$ dependendo apenas de $n, \delta, g_0, \lambda, \Omega$ e D tais que, para toda bola $B_r(x) \subset D$ e $x \in \partial\{u > 0\}$,

$$c \leq q_u(x) \leq C, \quad cr^{n-1} \leq H^{n-1}(B_r(x) \cap \partial\{u > 0\}) \leq Cr^{n-1}.$$

Demonstração: Ver Teorema 6.3 de (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). ■

Definição 3.1.1 Dizemos que u é minimizante do operador (3.1), ou simplesmente que u é minimizante, se $J_G(u) \leq J_G(v)$ para toda $v \in K_\phi$.

Lema 3.1.1 (g-subharmonicidade dos minimizantes) Se u é minimizante de J_G , então u é g-subhamônica.

Demonstração: Dados $\varepsilon > 0$ e $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, pela minimalidade de u e por $u - \varepsilon\phi \leq u$ temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\varepsilon} (J_G(u - \varepsilon\phi) - J_G(u)) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{\Omega} (G(|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|) - G(|\nabla u|)) dx + \lambda |\{u - \varepsilon\phi > 0\}| - \lambda |\{u > 0\}| \right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (G(|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|) - G(|\nabla u|)) dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de convexidade $G(t) - G(s) \geq G'(s)(t - s)$ e a desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (G(|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|) - G(|\nabla u|)) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} -(G(|\nabla u|) - G(|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|)) dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} -g(|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|) |\varepsilon\nabla\phi| dx \\ &= \int_{\Omega} -g(|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|) \frac{|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|}{|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|} |\nabla\phi| dx \\ &\leq \int_{\Omega} -g(|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|) \frac{(\nabla u - \varepsilon\nabla\phi) \cdot \nabla\phi}{|\nabla u - \varepsilon\nabla\phi|} dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, o Teorema da Convergência Dominada nos dá

$$0 \leq \int_{\Omega} -\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} -\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \leq 0, \forall 0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

■

Lema 3.1.2 *Se u é minimizante de J_G , então u é g -hamônica em $\{u > 0\}$.*

Demonstração: Seja $B \subset\subset \{u > 0\}$ bola qualquer.

Pelo Lema 5.2 de (LIEBERMAN, 1991) existe uma função $v \in W^{1,G}(B) \cap C^0(\bar{B})$ solução de $\Delta_g v = 0$ em B e $v = u$ em ∂B . Estenda $v = u$ em $\Omega \setminus B$ e tenha uma função admissível.

O Princípio do Máximo aliado ao lema anterior diz que $v \geq u$ em B .

Então $\{v > 0\} \cap B = \{u > 0\} \cap B = B$ e, portanto, $|\{u > 0\}| - |\{v > 0\}| = 0$ em Ω .

Com isso, a minimalidade de u e a desigualdade

$$\int_{\Omega} (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)) \, dx \geq C \left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|) \, dx + \int_{A_1} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx \right)$$

do Teorema 2.2.6, onde $A_1 = \{x \in B; |\nabla u - \nabla v| \leq 2|\nabla u|\}$ e $A_2 = \{x \in B; |\nabla u - \nabla v| > 2|\nabla u|\}$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq J_G(u) - J_G(v) \\ &= \int_{\Omega} (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|) + \lambda|\{u > 0\}| - \lambda|\{v > 0\}|) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)) \, dx \\ &\geq C \left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|) \, dx + \int_{A_1} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Então $\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|) \, dx = 0$ e $|\nabla u - \nabla v| = 0$ em A_2 . Assim como a definição de A_1 e $\int_{A_1} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx = 0$ também implica $|\nabla u - \nabla v| = 0$ em A_1 .

Logo, $u - v$ é constante em B , mas sendo $u - v = 0$ em ∂B obtemos $u = v$ e, conseqüentemente, g -harmônica em B . ■

Aqui provaremos resultados de continuidade Lipschitz, não-degenerescência e densidade com as mesmas técnicas utilizadas por Sandra Martínez e Noemi Wolanski, que por

sua vez se assemelham com as de Donatella Danielli e Arshak Petrosyan em (DANIELLI; PETROSYAN, 2005). Mas faremos no contexto de classes de funções e apresentaremos estimativas com constantes universais que dependem de parâmetros um pouco mais flexíveis.

Definição 3.1.2 *Considere $x_0 \in \Omega$ para algum aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e as constantes $0 < \delta \leq g_0 < \infty$, $\eta \in (0, 1]$ e $M, \lambda > 0$. Definimos a classe de minimizantes $S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, x_0, \Omega)$ como sendo o conjunto das funções u que satisfazem:*

1. u é minimizante para (3.1) em Ω ;
2. $x_0 \in F(u)$;
3. $0 \leq u \in W^{1,G}(\Omega)$ e $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$;
4. $G \in G(\delta, g_0, \eta)$.

Definimos $S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, x_0, \Omega)$ como o conjunto de minimizantes $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, x_0, \Omega)$ onde, para a N -função G , o quociente $Q_g(t) = \frac{tg'(t)}{g(t)}$ satisfaz o CTD descrito em (2.11).

Definição 3.1.3 *Se vale $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, x_0, \Omega)$ para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ então u é dito minimizante global e escrevemos $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, x_0, \mathbb{R}^n)$.*

Observação 3.1.1 *Quando $\Omega = B_r(x_0)$ usaremos apenas $S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_r(x_0))$ ao invés de $S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, x_0, B_r(x_0))$.*

Observação 3.1.2 *As classes $S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_r(x_0))$ gozam das propriedades de scaling*

$$u_{\rho, x_0}(x) := \frac{u(x_0 + \rho x)}{\rho}, \rho > 0 \quad (3.3)$$

com a relação

$$u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_r(x_0)) \Leftrightarrow u_{\rho, x_0} \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, \frac{M}{\rho}, B_{\frac{r}{\rho}}).$$

E vale salientar que os scaling são minimizantes para um problema de otimização idêntico ao de u . Mais especificamente, a N -função G e o parâmetro λ não são alterados.

De fato, veja que

$$J_G(u) = \min_{v \in K_\phi} J_G(v) \Rightarrow J_G(u_{\rho, x_0}) = \min_{v_{\rho, x_0} \in K_{\phi\rho, x_0}} J_G(v_{\rho, x_0})$$

em $B_r(x_0)$ e $B_{\frac{r}{\rho}}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} J_G(u_{\rho,x_0}) &= \int_{B_{\frac{r}{\rho}}} \left(G(|\nabla u_{\rho,x_0}|) + \lambda \chi_{\{u_{\rho,x_0} > 0\}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{B_r(x_0)} \left(G(|\nabla u|) + \lambda \chi_{\{u > 0\}} \right) dx \\ &\leq \frac{1}{\rho} J_G(v) \\ &= J_G(v_{\rho,x_0}). \end{aligned}$$

Do mesmo modo vemos que

$$J_G(u_{\rho,x_0}) = \min_{v_{\rho,x_0} \in K_{\phi,\rho,x_0}} J_G(v_{\rho,x_0}) \Rightarrow J_G(u) = \min_{v \in K_{\phi}} J_G(v).$$

Assim, para investigarmos regularidade de minimizantes, bem como de suas fronteiras livres, basta nos dedicarmos ao caso $S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ pois

$$u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1) \Leftrightarrow u_{\rho,x_0} \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, \frac{M}{\rho}, B_{\frac{1}{\rho}}(-x_0)). \quad (3.4)$$

■

3.2 Regularidade Lipschitz dos minimizantes

Em (1.6) de (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) temos que em certo sentido fraco os minimizantes satisfazem

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{em } \{u > 0\}, \\ u = 0, \quad |\nabla u| = \lambda^* & \text{em } F(u) = \Omega \cap \{u > 0\}. \end{cases}$$

Pela continuidade Hölder, que provaremos em breve, obteremos $u = 0$ em $F(u)$ e a certeza de que $\{u > 0\}$ é aberto. Agora lembre que $\Delta_g u = 0$ em $\{u > 0\}$ foi provado no Lema 3.1.2, que unido ao Teorema 2.2.5 nos dá regularidade $C_{loc}^{1,\alpha}$ para u em tal conjunto. No entanto, perceba que o gradiente não poderá ser contínuo até a Fronteira Livre, uma vez que $\nabla u \equiv 0$ em $\{u = 0\}^o$ e $|\nabla u| \rightarrow \lambda^*$ na fronteira livre no sentido de limite do lema abaixo.

Lema 3.2.1 *Seja u minimizante. Para cada $x_0 \in F(u)$ vale*

$$\limsup_{u(x) > 0; x \rightarrow x_0} |\nabla u(x)| = \lambda^*.$$

Demonstração: Ver Lema 7.4 em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). ■

Teorema 3.2.1 (Continuidade Hölder) *Seja u minimizante com $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, $G \in G(\delta, g_0)$ e $G(1) \geq \eta$. Se $\alpha \in (0, 1)$ então $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ uniformemente. Mais precisamente, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos*

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq C(\alpha, n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)) < \infty.$$

Na verdade,

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq \max \left\{ C(n, \alpha, \delta, g_0, \eta, \lambda, M); \frac{2^{\alpha+1}M}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)^\alpha} \right\}.$$

Demonstração: Sejam $y \in \Omega'$, $0 < r \leq \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ e $B := B_r(y)$.

Tomando $v \in W^{1,G}(B)$ solução de $\Delta_g v = 0$ em B tal que $v = u$ em ∂B e definindo $A_1 = \{x \in B; |\nabla u - \nabla v| \leq 2|\nabla u|\}$ e $A_2 = \{x \in B; |\nabla u - \nabla v| > 2|\nabla u|\}$ temos pelo Teorema 2.2.6,

$$\int_{B_r} (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)) dx \geq C(\delta, g_0) \left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|) dx + \int_{A_1} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \right). \quad (3.5)$$

Pelos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 (princípios da comparação e do máximo) obtemos

$$\|u\|_{L^\infty(B)} \leq \|v\|_{L^\infty(B)} \quad e \quad \|v\|_{L^\infty(B)} = \|v\|_{L^\infty(\partial B)}$$

Daí,

$$\|v\|_{L^\infty(B)} = \|v\|_{L^\infty(\partial B)} = \|u\|_{L^\infty(\partial B)} \leq \|u\|_{L^\infty(B)} \leq \|v\|_{L^\infty(B)}.$$

Logo,

$$\|u\|_{L^\infty(B)} = \|v\|_{L^\infty(B)}.$$

Observando que $\sqrt{G(|\nabla u|)} \in L^2(\Omega)$, $\sqrt{\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}} |\nabla u - \nabla v| \in L^2(A_1)$, aplicando a Desigualdade de Hölder, $(g-1)$, $(g-2)$ e a definição de A_1 obtemos

$$\begin{aligned} \int_{A_1} G(|\nabla u - \nabla v|) dx &\leq \int_{A_1} |\nabla u - \nabla v| g(|\nabla u - \nabla v|) dx \\ &= \int_{A_1} \sqrt{\frac{g(|\nabla u - \nabla v|)}{|\nabla u|}} |\nabla u - \nabla v| \sqrt{g(|\nabla u - \nabla v|) |\nabla u|} dx \\ &\leq c(g_0) \int_{A_1} \sqrt{\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}} |\nabla u - \nabla v| \sqrt{G(|\nabla u|)} dx \\ &\leq c(g_0) \left(\int_{A_1} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por (3.5) temos

$$\int_{A_1} G(|\nabla u - \nabla v|) dx \leq c(\delta, g_0) \left(\int_B (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|) dx \leq c(\delta, g_0) \int_B (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)) dx$$

Por outro lado, a minimalidade de u fornece

$$\begin{aligned} \int_B (G(|\nabla u|) - G(|\nabla v|)) dx &\leq \int_B \lambda (\chi_{\{v>0\}} - \chi_{\{u>0\}}) dx \\ &\leq \lambda |B| \\ &= \lambda c(n) r^n, \end{aligned}$$

que melhora as estimativas acima para

$$\int_{A_1} G(|\nabla u - \nabla v|) dx \leq c(\delta, g_0, n) \lambda^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|) dx \leq c(\delta, g_0, n) \lambda r^n.$$

Assim,

$$\int_B G(|\nabla u - \nabla v|) dx \leq c(\delta, g_0, n) \left[\lambda r^n + \lambda^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.7)$$

Estimemos $\int_B G(|\nabla u|) dx$ uniformemente.

Pela Desigualdade Triangular, a monotonicidade de G , $(G - 3)$ e (3.7) vem

$$\begin{aligned} \int_B G(|\nabla u|) dx &\leq 2^{g_0} \left(\int_B G(|\nabla u - \nabla v|) dx + \int_B G(|\nabla v|) dx \right) \\ &\leq c(\delta, g_0, n) \left[\lambda r^n + \lambda^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_B G(|\nabla v|) dx \right] \\ &:= c \left[\lambda r^n + \lambda^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_B G(|\nabla v|) dx \right]. \end{aligned}$$

Como v é g -harmônica aplicamos o Lema 2.2.1 e temos $\int_B G(|\nabla v|) dx \leq \bar{c} r^\beta$ para cada $\beta \in (0, n)$ dado, com $\bar{c} = \bar{c}(n, \delta, g_0, M, \beta)$. Logo,

$$\int_B G(|\nabla u|) dx \leq c \left[\lambda r^n + \lambda^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \bar{c} G(1) r^\beta \right]$$

Para $r < 1$ temos

$$\begin{aligned} \int_B G(|\nabla u|) dx &\leq c \left[\lambda r^\beta + \lambda^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \bar{c} G(1) r^\beta \right] \\ &\leq c(n, \delta, g_0, \eta, M, \beta) G(1) \left[(1 + \lambda) r^\beta + (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &:= C \left[(1 + \lambda) r^\beta + (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} \left(\int_{A_1} G(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Escrevendo $\int_B G(|\nabla u|) dx = A$,

$$\begin{aligned} A &\leq C \left[(1 + \lambda) r^\beta + (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} A^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq C \left[(1 + \lambda) r^\beta + 2(1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} A^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= C \left[(1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} + A^{\frac{1}{2}} \right]^2 - CA \\ &\Rightarrow (1 + C)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} \left[(1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} + A^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\Rightarrow \left[(1 + C)^{\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}} \right] A^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{\beta}{2}} \\ &\Rightarrow A \leq \frac{C(1 + \lambda) r^\beta}{\left[(1 + C)^{\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}} \right]^2} \\ &\leq c(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M, \beta) G(1) r^\beta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_B G(|\nabla u|) dx \leq C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M, \beta) G(1) r^{\beta-n}. \quad (3.8)$$

Definindo $\beta = n + \alpha - 1$ obtemos

$$\int_B G(|\nabla u|) dx \leq C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) G(1) r^{\alpha-1}.$$

Nessas condições, aplicando o Lema de Morrey (Lema 2.2.2) vem

$$\begin{aligned} [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega')} &\leq \max \left(C(n, \alpha, g_0) \max \{ C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M), 1 \}; \frac{2^{\alpha+1} M}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)^\alpha} \right) \\ &= \max \left(C(n, \alpha, g_0); C(n, \alpha, \delta, g_0, \eta, \lambda, M); \frac{2^{\alpha+1} M}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)^\alpha} \right). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.2 (Regularidade Lipschitz) *Sejam u minimizante de J_G em Ω , $G \in G(\delta, g_0)$, $G(1) \geq \eta > 0$, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$. Vale a estimativa pontual*

$$u(x) \leq \frac{C_1}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \max\{1, M\} \cdot \text{dist}(x, \partial\{u > 0\}), \forall x \in \Omega', \quad (3.9)$$

onde

$$C_1 = \begin{cases} C_1(n, \delta, g_0, \lambda, \eta) & \text{se } \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) \leq 1 \\ C_1(n, \delta, g_0, \lambda, \eta) \text{diam}\Omega & \text{se } \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Em particular, $u \in C^{0,1}(\Omega')$ com estimativa

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \frac{C}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \max\{1, M\} \quad (3.11)$$

onde

$$C = \begin{cases} C(n, \delta, g_0, \lambda, \eta) & \text{se } \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) \leq 1 \\ C(n, \delta, g_0, \lambda, \eta) \text{diam}\Omega & \text{se } \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 1. \end{cases}$$

Demonstração: Provemos inicialmente o caso em que $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega) = 1$ e $M = 1$.

Suponha por contradição que (3.9) não vale.

Então existem sequências $\{u_k\}$ de minimizantes como no enunciado e $\{x_k\} \subset \Omega'$

tais que

$$\frac{u_k(x_k)}{d_k} \geq k, \text{ onde } d_k := \text{dist}(x_k, \partial\{u_k > 0\}). \quad (3.12)$$

Desde que $\{u_k\}$ é uniformemente limitada, temos $d_k \rightarrow 0$.

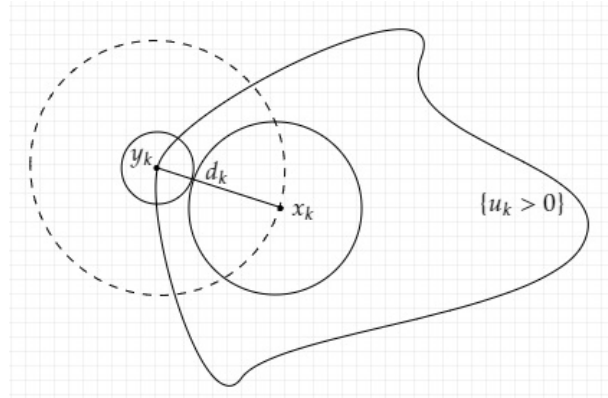
Além disso, existe $y_k \in \{\partial u_k > 0\}$ tal que $d_k = |x_k - y_k|$.

Como $\{u_k\}$ são minimizantes de J_{G_k} para $G_k \in G(\delta, g_0, \eta)$, satisfazem $\Delta_{g_k} u_k = 0$ em $\{u_k > 0\}$. Portanto, pela Desigualdade de Harnack existe $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(n, \delta, g_0)$ tal que

$$u_k(x_k) \leq \sup_{\bar{B}_{\frac{3}{4}d_k}(x_k)} u_k \leq \frac{1}{\tilde{C}_1} \inf_{\bar{B}_{\frac{3}{4}d_k}(x_k)} u_k.$$

Por outro lado, $\bar{B}_{\frac{3}{4}d_k}(x_k) \cap \bar{B}_{\frac{1}{4}d_k}(y_k) \neq \emptyset$. Então

$$u_k(x_k) \leq \frac{1}{\tilde{C}_1} \sup_{\bar{B}_{\frac{1}{4}d_k}(y_k)} u_k. \quad (3.13)$$

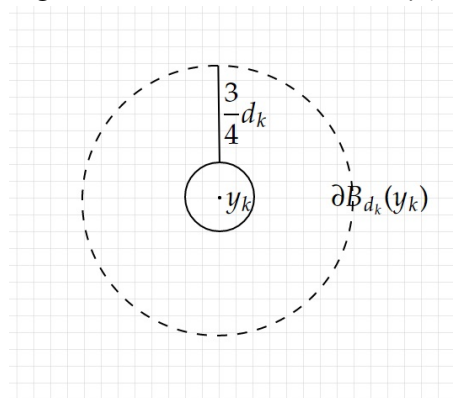
Figura 2 – Construção das vizinhas em x_k e y_k .

Fonte: elaborada pela autora.

Em sequência considere

$$\Omega_k := \{z \in B_{d_k}(y_k); \text{dist}(z, \partial\{u_k > 0\}) \leq \frac{1}{3} \text{dist}(z, \partial B_{d_k}(y_k))\}$$

e tenha $B_{\frac{1}{4}d_k}(y_k) \subset \Omega_k$ pois $y_k \in \partial\{u_k > 0\}$ e $\text{dist}(B_{\frac{1}{4}d_k}(y_k), \partial B_{d_k}(y_k)) \equiv \frac{3}{4}d_k$.

Figura 3 – Bolas centradas em y_k .

Fonte: elaborada pela autora.

Portanto,

$$\begin{aligned} A_k &:= \sup_{z \in \Omega_k} [\text{dist}(z, \partial B_{d_k}(y_k)) \cdot u_k(z)] \\ &\geq \inf_{B_{\frac{1}{4}d_k}(y_k)} \text{dist}(z, \partial B_{d_k}(y_k)) \cdot \sup_{B_{\frac{1}{4}d_k}(y_k)} u_k(z) \\ &= \frac{3}{4}d_k \cdot \sup_{B_{\frac{1}{4}d_k}(y_k)} u_k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

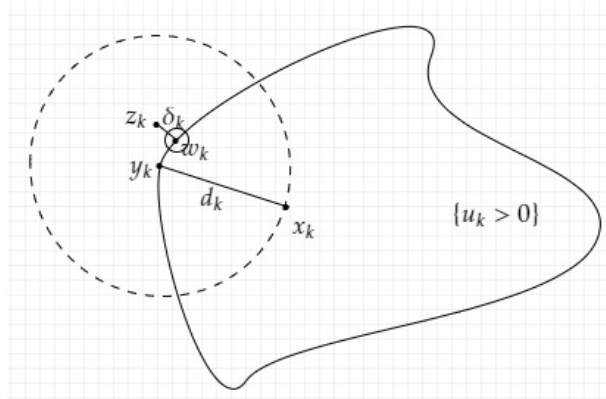
Por outro lado, existem $z_k \in \Omega_k$ e $w_k \in \partial\{u_k > 0\}$ tais que

$$A_k = \text{dist}(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) \cdot u_k(z_k) \text{ e } \delta_k := \text{dist}(z_k, \partial\{u_k > 0\}) = |z_k - w_k|. \quad (3.15)$$

De fato, pela continuidade da função $z \mapsto \text{dist}(z, \partial B_{d_k}(y_k)) \cdot u_k(z)$, tal máximo será atingindo se considerarmos $\overline{\Omega_k}$. Agora note que não há como $z_k \in \partial B_{d_k}(y_k)$ uma vez que $\text{dist}(\cdot, \partial B_{d_k}(y_k)) \cdot u_k = 0$ nesse conjunto, e faria com que $z \mapsto \text{dist}(z, \partial B_{d_k}(y_k)) \cdot u_k(z) \equiv 0$ em Ω_k . No entanto, como $B_{\frac{1}{4}d_k}(y_k) \subset \Omega_k$ e $\text{dist}(\cdot, \partial B_{d_k}(y_k)) > 0$ em $B_{\frac{1}{4}d_k}(y_k)$, teríamos $u_k \equiv 0$ nessa bola. Absurdo, pois $y_k \in \partial\{u_k > 0\}$. Logo $z_k \in \Omega_k$.

Em particular, $u_k(z_k) > 0$.

Figura 4 – Relação de vizinhança entre x_k, y_k, z_k e w_k .



Fonte: elaborada pela autora.

Por (3.15), (3.14), (3.12) e $z_k \in B_{d_k}(y_k)$ temos

$$u_k(z_k) = \frac{A_k}{\text{dist}(z_k, \partial B_{d_k}(y_k))} \geq \frac{3d_k}{4} \sup_{B_{\frac{d_k}{4}}(y_k)} u_k \frac{1}{d_k} \geq \frac{3}{4} \tilde{C}_1 u_k(x_k). \quad (3.16)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \delta_k &= \text{dist}(z_k, \partial\{u_k > 0\}) \\ &\leq \frac{1}{3} \text{dist}(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) \\ &= \frac{1}{3} (d_k - |z_k - y_k|) \\ &\leq \frac{1}{3} (d_k - \delta_k). \end{aligned}$$

Então

$$\delta_k \leq \frac{1}{4} d_k \quad (3.17)$$

e por (3.16), (3.17) e (3.12) vem

$$\frac{u_k(z_k)}{\delta_k} \geq \frac{3d_k}{4} \tilde{C}_1 u_k(x_k) \frac{4}{d_k} \geq 3\tilde{C}_1 k. \quad (3.18)$$

Agora veja que $B_{\frac{\delta_k}{2}}(w_k) \subset \Omega_k$.

Seja $x \in B_{\frac{\delta_k}{2}}(w_k)$.

$$\begin{aligned}
dist(x, \partial\{u_k > 0\}) &\leq |x - w_k| + dist(w_k, \partial\{u_k > 0\}) = |x - w_k| < \frac{\delta_k}{2} \\
\Rightarrow dist(x, \partial B_{d_k}(y_k)) &\geq dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) - |z_k - x| \\
&\geq dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) - (|z_k - w_k| + |w_k - x|) \\
&\geq dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) - \left(\delta_k + \frac{\delta_k}{2}\right) \\
&\geq dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) - \frac{1}{2}dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) \\
&= \frac{1}{2}dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) \\
\Rightarrow dist(x, \partial\{u_k > 0\}) &\leq \frac{\delta_k}{2} \\
&\leq \frac{1}{6}dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k)) \\
&\leq \frac{1}{3}dist(x, \partial B_{d_k}(y_k)).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Também por (3.19) temos para $x \in B_{\frac{\delta_k}{2}}(w_k)$

$$u_k(z_k) = \frac{A_k}{dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k))} \geq \frac{dist(x, \partial B_{d_k}(y_k))u_k(x)}{dist(z_k, \partial B_{d_k}(y_k))} \geq \frac{1}{2}u_k(x).$$

Portanto,

$$\sup_{B_{\frac{\delta_k}{2}}(w_k)} u_k \leq 2u_k(z_k). \tag{3.20}$$

Como $B_{\frac{\delta_k}{4}}(z_k) \subset \{u_k > 0\}$, pela Desigualdade de Harnack existe $\tilde{C} = \tilde{C}(n, \delta, g_0)$ tal que

$$u_k(z_k) \leq \sup_{\bar{B}_{\frac{3}{4}\delta_k}(z_k)} u_k \leq \frac{1}{\tilde{C}} \inf_{\bar{B}_{\frac{3}{4}\delta_k}(z_k)} u_k.$$

Mas por $\bar{B}_{\frac{3}{4}\delta_k}(z_k) \cap \bar{B}_{\frac{1}{4}\delta_k}(w_k) \neq \emptyset$ obtemos

$$\tilde{C}u_k(z_k) \leq \sup_{\bar{B}_{\frac{1}{4}\delta_k}(w_k)} u_k. \tag{3.21}$$

Definindo a família de funções $\xi_k : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\xi_k(x) := \frac{u_k(w_k + \frac{\delta_k}{2}x)}{u_k(z_k)}.$$

Por $w_k \in \partial\{u_k > 0\}$, (3.20) e (3.21), claramente

$$\xi_k(0) = 0, \quad \sup_{B_1} \xi_k \leq 2, \quad \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \xi_k \geq \tilde{C} > 0. \quad (3.22)$$

Definindo

$$\bar{G}_k(t) := \frac{G_k(\sigma_k t)}{\sigma_k g_k(\sigma_k)}, \quad \sigma_k := \frac{2u_k(z_k)}{\delta_k}$$

temos pelo corolário 2.1.1 e (3.18),

$$\bar{G}_k \in G(\delta, g_0), \quad \frac{1}{1+g_0} \leq \bar{G}_k(1) \leq 1, \quad \sigma_k \rightarrow +\infty. \quad (3.23)$$

Além disso, para $\lambda_k := \frac{\lambda}{\sigma_k g_k(\sigma_k)}$, ξ_k é minimizante de

$$\bar{J}_{\bar{G}_k}(v) := \int_{B_1} \left(\bar{G}_k(|\nabla v|) + \frac{\lambda}{\sigma_k g_k(\sigma_k)} \chi_{\{v>0\}} \right) dx.$$

Veja que $\lambda_k \rightarrow 0$.

De fato, por (3.23), $(g-2)$ e $(G-2)$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_k &= \frac{\lambda}{\sigma_k g_k(\sigma_k)} \leq \frac{\lambda}{G_k(\sigma_k)} \\ &\leq \frac{\lambda}{G_k(1) \min\{\sigma_k^{1+\delta}, \sigma_k^{1+g_0}\}} \\ &= \frac{\lambda}{G_k(1) \sigma_k^{1+\delta}} \\ &\leq \frac{\lambda}{\eta \sigma_k^{1+\delta}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Aproximemos os minimizantes ξ_k de funções \bar{g}_k -harmônicas.

Sejam $v_k \in W^{1, \bar{G}_k}(B_{\frac{5}{8}})$ solução de

$$\Delta_{\bar{g}_k} v_k = 0 \text{ em } B_{\frac{5}{8}}, \quad v_k = \xi_k \text{ em } \partial B_{\frac{5}{8}}.$$

Assim como foi feito em (3.7) e (3.8),

$$\int_{B_{\frac{5}{8}}} \bar{G}_k(|\nabla v_k - \nabla \xi_k|) dx \leq C(\lambda_k + \lambda_K^{\frac{1}{2}}) \rightarrow 0.$$

Usando $\frac{1}{1+g_0} \leq \bar{G}_k(1) \leq 1$ e $(G-2)$ temos

$$\frac{1}{1+g_k} \min \left\{ |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+\delta}, |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+g_0} \right\} \leq \bar{G}_k(|\nabla v_k - \nabla \xi_k|)$$

e

$$\overline{G}_k(|\nabla v_k - \nabla \xi_k|) \leq \max \left\{ |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+\delta}, |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+g_0} \right\}.$$

Então,

$$\frac{1}{1+g_0} \int_{B_{\frac{5}{8}} \cap \{|\nabla v_k - \nabla \xi_k| \geq 1\}} |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+\delta} dx \leq \int_{B_{\frac{5}{8}}} \overline{G}_k(|\nabla v_k - \nabla \xi_k|) dx \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

e

$$\frac{1}{1+g_0} \int_{B_{\frac{5}{8}} \cap \{|\nabla v_k - \nabla \xi_k| < 1\}} |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+g_0} dx \leq \int_{B_{\frac{5}{8}}} \overline{G}_k(|\nabla v_k - \nabla \xi_k|) dx \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Em particular, $|\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+\delta} \in L^{\frac{1+g_0}{1+\delta}}(B_{\frac{5}{8}} \cap \{|\nabla v_k - \nabla \xi_k| < 1\})$.Aplicando a Desigualdade de Hölder com q conjugado de Lebesgue de $\frac{1+g_0}{1+\delta}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{5}{8}} \cap \{|\nabla v_k - \nabla \xi_k| < 1\}} |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+\delta} dx &\leq |B_{\frac{5}{8}}|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_{\frac{5}{8}} \cap \{|\nabla v_k - \nabla \xi_k| < 1\}} |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+g_0} dx \right)^{\frac{1+\delta}{1+g_0}} \\ &\leq |B_{\frac{5}{8}}|^{\frac{1}{q}} \left((1+g_0) \int_{B_{\frac{5}{8}}} \overline{G}_k(|\nabla v_k - \nabla \xi_k|) dx \right)^{\frac{1+\delta}{1+g_0}} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por isso e (3.24) tem-se

$$\int_{B_{\frac{5}{8}}} |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+\delta} dx \rightarrow 0.$$

Por Poincaré (Lema 2.1.8), $\int_{B_{\frac{5}{8}}} |\nabla v_k - \nabla \xi_k|^{1+\delta} dx \rightarrow 0$, obtendo

$$v_k - \xi_k \rightarrow 0 \text{ em } W_0^{1,1+\delta}(B_{\frac{5}{8}}).$$

Logo,

$$v_k - \xi_k \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

em quase todo ponto para alguma subsequência $\{v_k - \xi_k\}$.Por outro lado, $\|v_k\|_{C^\alpha(\overline{B}_{\frac{1}{2}})}, \|\xi_k\|_{C^\alpha(\overline{B}_{\frac{1}{2}})} \leq C'$ implica, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, a existência de subsequências $\{v_k\}$, $\{\xi_k\}$ e funções contínuas v_∞ e ξ_∞ tais que

$$\begin{aligned} v_k &\rightarrow v_\infty && \text{uniformemente em } B_{\frac{1}{2}} \\ \xi_k &\rightarrow \xi_\infty && \text{uniformemente em } B_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por (3.26), $v_\infty = \xi_\infty$ em $B_{\frac{1}{2}}$.

Mas passando o limite nas Desigualdades de Harnack

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{1}{2}}} v_k &\leq C_0 \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v_k \\ \Rightarrow \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \xi_\infty &= \sup_{B_{\frac{1}{2}}} v_\infty \leq C_0 \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v_\infty = C_0 \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \xi_\infty. \end{aligned}$$

Usando (3.22),

$$0 < \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \xi_\infty \leq C_0 \inf_{B_{\frac{1}{2}}} \xi_\infty \leq C_0 \xi(0) = 0.$$

Absurdo! O que prova (3.9) para $dist(\Omega', \partial\Omega) = 1$.

Para o caso $dist(\Omega', \partial\Omega) =: d > 1$ tomamos

$$\Omega^* = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > 1\}$$

e temos $dist(\Omega^*, \partial\Omega) = 1$ além de $\Omega' \subset \Omega^* \subset \subset \Omega$.

Pelo que foi feito, existe $C_1^* = C_1^*(n, \delta, g_0, \lambda, \eta)$ tal que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \frac{C_1^*}{dist(\Omega^*, \partial\Omega)} dist(x, \partial\{u > 0\}) \\ &= C_1^* dist(x, \partial\{u > 0\}) \end{aligned}$$

para todo $x \in C_1^*$. Em particular, para $x \in \Omega'$ temos

$$\begin{aligned} u(x) &\leq C_1^* dist(x, \partial\{u > 0\}) \\ &\leq \frac{C_1^* diam\Omega}{dist(\Omega', \partial\Omega)} dist(x, \partial\{u > 0\}). \end{aligned}$$

Para o caso $0 < d := dist(\Omega', \partial\Omega) < 1$, considere o reescalonamento $x \mapsto dx$,

$$\Omega_{\frac{1}{d}} := \left\{ \frac{x}{d}; x \in \Omega \right\} \text{ e } \Omega'_{\frac{1}{d}} := \left\{ \frac{x}{d}; x \in \Omega' \right\}.$$

Veja que

$$dist\left(\Omega'_{\frac{1}{d}}, \partial(\Omega_{\frac{1}{d}})\right) = \inf_{y \in \Omega', x \in \partial\Omega} \left| \frac{y}{d} - \frac{x}{d} \right| = \frac{dist(\Omega', \partial\Omega)}{d} = 1$$

e a função $u_o : \Omega_{\frac{1}{d}} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u_o(x) = u(dx)$ é minimizante do operador

$$J_o(v) := \int_{\Omega_{\frac{1}{d}}} (G_o(|\nabla v|) + \lambda \chi_{\{v > 0\}}) dx,$$

onde $G_o(t) := G\left(\frac{t}{d}\right)$. Como

$$\delta \leq Q_g\left(\frac{t}{d}\right) = Q_{g_o}(t) \leq g_o, \forall t > 0$$

e

$$G_o(1) = G\left(\frac{1}{d}\right) \geq G(1) \left(\frac{1}{d}\right)^{1+\delta} \geq \eta.$$

Temos pelo primeiro caso,

$$u_o(y) \leq C_1 \text{dist}(y, \partial\{u_o > 0\}), \forall y \in \Omega'_{\frac{1}{d}}.$$

Assim, dado $x \in \Omega'$ escreva $y = \frac{x}{d} \in \Omega'_{\frac{1}{d}}$ e tenha

$$\begin{aligned} u(x) = u_o(y) &\leq C_1 \text{dist}(y, \partial\{u_o > 0\}) \\ &= C_1 \text{dist}\left(y, \frac{1}{d} \partial\{u > 0\}\right) \\ &= \frac{C_1}{d} \text{dist}(x, \partial\{u > 0\}), \end{aligned}$$

como desejado.

Agora estendemos para o caso $M \geq 1$ notando que $\frac{u}{M}$ é minimizante de J_{G_*} para $G_*(Mt)$ que satisfaz $G_* \in G(\delta, g_o)$ e $G_*(1) \geq \eta$, além de $\|\frac{u}{M}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Pelo que já foi feito temos

$$\frac{u(x)}{M} \leq \frac{C_1}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \text{dist}(x, \partial\{u > 0\}), \quad \forall x \in \Omega',$$

para C_1 como em (3.10). Logo, se considerarmos um $M > 0$ qualquer obtemos

$$u(x) \leq \frac{C_1}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \max\{1, M\} \cdot \text{dist}(x, \partial\{u > 0\}), \quad \forall x \in \Omega'.$$

Para finalizarmos provando a estimativa do gradiente (3.11), observe que basta mostrarmos em $\{u > 0\}$ pois $|\nabla u|$ vale 0 e λ^* em $\{u = 0\}^o$ e $\partial\{u > 0\}$, respectivamente. Lembre que em $\{u > 0\}$ a função u é g-harmônica.

Comecemos listando três constantes universais:

- 1) C_1 como em (3.9);
- 2) $C_2 = C_2(n, \delta, g_o) > 0$ como no Lema 2.2.1. Isto é, $\sup_{B_{\frac{r}{2}}} |\nabla u| \leq \frac{C_2}{r} \sup_{B_r} |u|$ para toda bola $B_r \in \Omega$.
- 3) $C_3 = C_3(n, \delta, g_o) > 0$ uma constante de Harnack em $\{u > 0\}$.

Estudemos dois casos para $x \in \Omega' \cap \{u > 0\}$.

1º caso: $d(x) := \text{dist}(x, \partial\{u > 0\}) < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Aqui, $B_{d(x)}(x) \subset \{u > 0\}$. Então

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| &\leq \sup_{B_{\frac{d(x)}{4}}(x)} |\nabla u| \\ &\leq \frac{C_2}{d(x)/2} \sup_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} u \\ &\leq \frac{2C_2C_3}{d(x)} \inf_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} u \\ &\leq \frac{2C_2C_3}{d(x)} \frac{C_1 \max\{1, M\}d(x)}{d} \\ &= \frac{2C_1C_2C_3}{d} \max\{1, M\}. \end{aligned}$$

2º caso: $d(x) := \text{dist}(x, \partial\{u > 0\}) \geq \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) =: d$.

Aqui, $B_d(x) \subset \{u > 0\}$. Então, com as contas idênticas, temos

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| &\leq \sup_{B_{\frac{d}{4}}(x)} |\nabla u| \\ &\leq \frac{C_2}{d/2} \sup_{B_{\frac{d}{2}}(x)} u \\ &\leq \frac{2C_2C_3}{d} \inf_{B_{\frac{d}{2}}(x)} u \\ &\leq \frac{2C_2C_3}{d} \frac{C_1 \max\{1, M\}d(x)}{d} \\ &\leq \frac{2C_2C_3}{d} \frac{C_1 \max\{1, M\} \text{diam}(\Omega)}{d} \\ &\leq \frac{2C_1C_2C_3}{d} \max\{1, M\}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.1 (Regularidade Uniformemente Lipschitz para as Classes de Minimzantes)

Seja $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$. Dado $0 < r < 1$ temos $u \in C^{0,1}(B_r)$ com estimativa

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r)} \leq \frac{C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda)}{1-r} \max\{1, M\}.$$

Demonstração: É imediato do Teorema 3.2.2 tomando $\Omega = B_1$ e $\Omega' = B_r$. ■

É evidente que $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r)}$ pode crescer com o crescimento do r . O próximo teorema nos diz que perto da origem tal crescimento é controlado uniformemente por um polinômio de Continuidade Hölder.

Teorema 3.2.3 (Estimativa Hölder do gradiente) *Seja $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$. Existem constantes $C = C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) > 0$ e $\alpha = \alpha(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) \in (0, 1)$ tais que*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r)} \leq \lambda^* + Cr^\alpha$$

para todo $0 < r \leq \frac{1}{4}$.

Demonstração: Sejam $\varepsilon \in (0, 1)$ e $\lambda^* > 0$ tal que $H(\lambda^*) = \lambda^* g(\lambda^*) - G(\lambda^*) = \lambda$. Considerando a função

$$v_\varepsilon(x) := (|\nabla u(x)|^2 - (\lambda^*)^2 - \varepsilon)^+,$$

pelo Lema 3.2.1, v_ε se anula numa vizinhança da fronteira livre de u . Ou seja, existe um aberto A que contém $F(u)$ onde v_ε se anula. Logo,

$$\{v_\varepsilon > 0\} \subset\subset \{u > 0\},$$

onde $\{v_\varepsilon > 0\} = \{|\nabla u|^2 > (\lambda^*)^2 + \varepsilon\}$ e $u \in C^{1,\alpha}(\{u > 0\})$.

Em particular, $|\nabla u|$ é contínuo em $\{u > 0\}$ e obtemos

$$\overline{\{v_\varepsilon > 0\}} = \overline{\{|\nabla u|^2 > (\lambda^*)^2 + \varepsilon\}} \subset \{|\nabla u|^2 > (\lambda^*)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{u > 0\}.$$

Por outro lado, pela forma não-divergente do Δ_g temos

$$\text{Tr}(A_u(x)D^2u) = 0 \text{ em } \{|\nabla u|^2 > (\lambda^*)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\}$$

onde A_u é a matriz $(\lambda_\delta, \Lambda_{g_0})$ -elíptica

$$a_{ij}^u = \left(\frac{g'(|\nabla u|)}{g(|\nabla u|)} |\nabla u| - 1 \right) \frac{D_i u D_j u}{|\nabla u|^2} + \delta_{ij}.$$

Pela desigualdade (13.23) na seção 13.3 de (GILBARG *et al.*, 1977), a função $v := |\nabla u|^2$ satisfaz

$$Lv = D_i (e^{cv} a_{ij}^u(x) D_j v) \geq 0 \text{ em } \{|\nabla u|^2 > (\lambda^*)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\}$$

com $c = c(\delta, g_0) > 0$.

Deste modo, $v_\varepsilon = \max\{|\nabla u(x)|^2 - (\lambda^*)^2 - \varepsilon, 0\}$ também será subsolução de L em $\{|\nabla u|^2 > (\lambda^*)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\}$.

Estendendo o operador L para um uniformemente elíptico da forma de divergência

$$\tilde{L}\omega = D_i (\tilde{a}_{ij}(x) D_j \omega) \text{ em } B_1$$

com coeficientes mensuráveis tais que

$$\tilde{a}_{ij}(x) = e^{cv} a_{ij}^u(x) \text{ em } \{|\nabla u|^2 > (\lambda^*)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\}$$

obtemos

$$\tilde{L}v_\varepsilon \geq 0 \text{ em } B_1.$$

Além disso, para $h_\varepsilon(r) := \sup_{B_r} v_\varepsilon$,

$$\tilde{L}(h_\varepsilon(r) - v_\varepsilon) = -\tilde{L}v_\varepsilon \leq 0,$$

com

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(r) - v_\varepsilon &\geq 0 \text{ em } B_r \\ &= h_\varepsilon(r) \text{ em } B_r \cap \{u = 0\}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2.7, para $p = 1$ e $0 < r \leq \frac{1}{4}$ vale

$$\begin{aligned} \inf_{B_r} (h_\varepsilon(4r) - v_\varepsilon) &\geq Cr^{-n} \|h_\varepsilon(4r) - v_\varepsilon\|_{L^1(B_{2r})} \\ &\geq Cr^{-n} \|h_\varepsilon(4r) - v_\varepsilon\|_{L^1(B_{2r} \cap \{u=0\})} \\ &= Cr^{-n} h_\varepsilon(4r) |B_{2r} \cap \{u = 0\}| \\ &\geq C_0 h_\varepsilon(4r), \end{aligned}$$

$C_0 = C_0(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M)$, onde a última desigualdade é obtida via teorema de densidade cuja prova independe desse resultado (veja Teorema 3.4.1).

Veja que podemos considerar $C_0 \in (0, 1)$.

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \inf_{B_r} (h_0(4r) - v_0) \geq C_0 h_0(4r) &\iff \sup_{B_r} v_0 \leq (1 - C_0) h_0(4r) \\ &\iff h_0(r) \leq (1 - C_0) h_0(4r) \end{aligned}$$

Por iteração obtemos $h_0\left(\frac{r}{4^k}\right) \leq (1 - C_0)^k h_0(r)$, que implica na continuidade Hölder $h_0(r) \leq C_1 r^{\alpha_1}$ para algum $\alpha_1 \in (0, 1)$ e $C_1 > 0$.

Finalmente, $h_0(r) := \sup_{B_r} (|\nabla u|^2 - (\lambda^*)^2)^+$ implica em

$$\begin{aligned} \sup_{B_r} (|\nabla u|^2 - (\lambda^*)^2) &\leq C_1 r^{\alpha_1} \\ \implies \sup_{B_r} |\nabla u|^2 &\leq (\lambda^*)^2 + C_1 r^{\alpha_1} \\ \implies \sup_{B_r} |\nabla u| &\leq \lambda^* + \sqrt{C_1} r^{\frac{\alpha_1}{2}}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.2 (Estimativa global) *Suponha $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, 0, \mathbb{R}^n)$. Então*

$$|\nabla u| \leq \lambda^* \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Para o scaling $u_R(x) = Ru(\frac{x}{R})$ temos pela relação (3.4) que

$$u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1) \Leftrightarrow u_R \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, MR, B_R).$$

Além disso, $|\nabla u_R(x)| = |\nabla u(\frac{x}{R})|$ para qualquer x . Assim, por essa igualdade e pelo Teorema 3.2.3 existem $\alpha(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) \in (0, 1)$ e $C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) > 0$ tais que

$$\sup_{B_{rR}} |\nabla u_R| = \sup_{B_r} |\nabla u| \leq \lambda^* + Cr^\alpha, \quad \forall 0 < r \leq \frac{1}{4}.$$

Reescrevendo pondo $\bar{r} = rR$ temos

$$\sup_{B_{\bar{r}}} |\nabla u_R| \leq \lambda^* + C \left(\frac{\bar{r}}{R} \right)^\alpha, \quad \forall 0 < \bar{r} \leq \frac{R}{4}. \quad (3.27)$$

Portanto, fixando $\bar{r} > 0$ temos

$$\sup_{B_{\bar{r}}} |\nabla u_R| \leq \lambda^* + C \left(\frac{\bar{r}}{R} \right)^\alpha$$

para qualquer $R > 4\bar{r}$. Fazendo $R \rightarrow \infty$ obtemos

$$\sup_{B_{\bar{r}}} |\nabla u_R| \leq \lambda^*.$$

Agora pela arbitrariedade de $\bar{r} > 0$ vem

$$|\nabla u| \leq \lambda^* \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

■

Corolário 3.2.3 *Seja $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, MR, B_R)$. Existem constantes $C = C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M)$ e $\alpha = \alpha(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) \in (0, 1)$ positivas tais que*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r)} \leq \lambda^* + C \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha$$

para todo $0 < r \leq \frac{R}{4}$.

Demonstração: Veja (3.27) da demonstração do último corolário.

■

3.3 Não-degenerescência

Como consequência da regularidade Lipschitz veremos que se uma certa média do minimizante numa bola superar a constante Lipschitz de um subdomínio que a contém, então a função não se anula em nenhum ponto dessa bola. Em seguida, de modo menos imediato, veremos que se essa média for suficientemente pequena então a função se anula completamente numa bola concêntrica reduzida.

Lema 3.3.1 *Sejam u minimizante, $\gamma > 0$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ e C a constante Lipschitz de u em Ω' . Para cada bola $B_r(y) \subset \Omega'$ vale*

$$\frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} u(x)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} > C \Rightarrow u > 0 \text{ em } B_r(y). \quad (3.28)$$

Demonstração: Suponha que

$$\frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} u(x)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} > C$$

mas $B_r(y) \not\subset \{u > 0\}$. Existe $x_0 \in F(u) \cap B_r(y)$ e para todo $x \in B_r(y)$ temos

$$u(x) = u(x) - u(x_0) = |u(x) - u(x_0)| \leq C|x - x_0| \leq Cr.$$

Assim,

$$\frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} u(x)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} (Cr)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} = C.$$

Contradição! ■

Lema 3.3.2 *Sejam u minimizante, $G \in G(\delta, g_0, \eta)$, $B_r(y) \subset \Omega$ bola com raio $0 < r \leq 1$, $\gamma > 1$ e $k \in (0, 1)$. Existe $c_k = c_k(n, g_0, \eta, \lambda, \gamma, k) > 0$ tal que*

$$\frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} u(x)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq c_k \Rightarrow u \equiv 0 \text{ em } B_{kr}(y). \quad (3.29)$$

Demonstração: É suficiente provarmos em B_1 pois se $u_r : B_r(y) \rightarrow \mathbb{R}$ notamos que $u(x) := u_r(y + rx)$ é função em B_1 com

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_1} u(x)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} &= \left(\frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} u_r(y + rx)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= \left(\frac{1}{|B_1|} \int_{B_r(y)} \frac{u_r(x)^\gamma}{r^n} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= \left(\int_{B_r(y)} u_r(x)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} u_r = 0 \text{ em } B_{kr}(y) &\Leftrightarrow u_r(z) = 0, \forall z \in B_{kr}(y) \\ &\Leftrightarrow u_r(y + rx) = 0, \forall x \in B_k \\ &\Leftrightarrow u = 0 \text{ em } B_k. \end{aligned}$$

Então supondo válido quando $r = 1$, dado $r \in (0, 1)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} u_r^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq c_k &\Rightarrow \frac{1}{r} \left(\int_{B_1} u^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq c_k \\ &\Rightarrow \left(\int_{B_1} u^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq c_k \\ &\Rightarrow u = 0 \text{ em } B_k \\ &\Rightarrow u_r = 0 \text{ em } B_{kr}(y). \end{aligned}$$

Provemos o caso $r = 1$.

Dado $k \in (0, 1)$, queremos mostrar que

$$\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| = 0$$

Temos pelo Teorema 2.2.3 existe $C = C(n, g_0, \gamma, k)$ tal que

$$\varepsilon := \sup_{B_{\sqrt{k}}} u \leq C \left(\int_{B_1} u^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (3.30)$$

Por outro lado, pelo Lema 2.2.3 existe $\mu = \mu(n, g_0, k) > 0$ tal que $x \mapsto \varepsilon e^{-\mu|x|^2}$ tem g-laplaciano positivo em $B_{\sqrt{k}} \setminus B_k$. Defina

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } B_k \\ C_1 \varepsilon (e^{-\mu|x|^2} - e^{-\mu k^2}) & \text{em } B_{\sqrt{k}} \setminus B_k \end{cases}$$

com $C_1 = \frac{1}{e^{-\mu k} - e^{-\mu k^2}} < 0$, temos

$$\begin{cases} \Delta_g v < 0 & \text{em } B_{\sqrt{k}} \setminus B_k \\ v = \varepsilon & \text{em } \partial B_{\sqrt{k}} \\ 0 \leq v \leq \varepsilon & \text{em } B_{\sqrt{k}}. \end{cases}$$

Notando que $v \geq u$ em $\partial B_{\sqrt{k}}$, e portanto $\min(u, v) = u$ em $\partial B_{\sqrt{k}}$, a função

$$\omega(x) := \begin{cases} \min(u, v) & \text{em } B_{\sqrt{k}} \\ u & \text{em } \Omega \setminus B_{\sqrt{k}} \end{cases}$$

é função admissível para o problema de minimização. Vem que

$$\begin{aligned} \int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| &= J_G(u) - \int_{\Omega \setminus B_k} G(|\nabla u|) dx - \lambda |(\Omega \setminus B_k) \cap \{u > 0\}| \\ &\leq J_G(\omega) - \int_{\Omega \setminus B_k} G(|\nabla u|) dx - \lambda |(\Omega \setminus B_k) \cap \{u > 0\}|, \end{aligned}$$

onde $\omega = 0$ em B_k e $\omega \leq u$ fazem

$$\lambda |\{\omega > 0\}| - \lambda |(\Omega \setminus B_k) \cap \{u > 0\}| = \lambda |(\Omega \setminus B_k) \cap \{\omega > 0\}| - \lambda |(\Omega \setminus B_k) \cap \{u > 0\}| \leq 0$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G(|\nabla \omega|) dx - \int_{\Omega \setminus B_k} G(|\nabla u|) dx &= \int_{\Omega \setminus B_k} (G(|\nabla \omega|) - G(|\nabla u|)) dx \\ &= \int_{(\Omega \setminus B_{\sqrt{k}}) \cup (B_{\sqrt{k}} \setminus B_k)} (G(|\nabla \omega|) - G(|\nabla u|)) dx \\ &= \int_{B_{\sqrt{k}} \setminus B_k} (G(|\nabla \omega|) - G(|\nabla u|)) dx. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| \leq \int_{B_{\sqrt{k}} \setminus B_k} (G(|\nabla \omega|) - G(|\nabla u|)) dx. \quad (3.31)$$

Usando que G é convexa de Classe C^2 e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} G(|\nabla u|) - G(|\nabla \omega|) &\geq G'(|\nabla \omega|) |\nabla u - \nabla \omega| \\ \Rightarrow G(|\nabla \omega|) - G(|\nabla u|) &\leq -G'(|\nabla \omega|) |\nabla u - \nabla \omega| \\ &= -\frac{G'(|\nabla \omega|)}{|\nabla \omega|} |\nabla \omega| |\nabla u - \nabla \omega| \\ &\leq -\frac{G'(|\nabla \omega|)}{|\nabla \omega|} \nabla \omega \cdot \nabla(u - \omega) \\ &= g(|\nabla \omega|) \frac{\nabla \omega}{|\nabla \omega|} \cdot \nabla(\omega - u). \end{aligned}$$

Aplicando em (3.31),

$$\begin{aligned} \int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| &\leq \int_{B_{\sqrt{k}} \setminus B_k} g(|\nabla \omega|) \frac{\nabla \omega}{|\nabla \omega|} \cdot \nabla(\omega - u) dx \\ &= -\int_{B_{\sqrt{k}} \setminus B_k} g(|\nabla \omega|) \frac{\nabla \omega}{|\nabla \omega|} \cdot \nabla(u - v)^+ dx \\ &= -\int_{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}} g(|\nabla v|) \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \cdot \nabla(u - v) dx \end{aligned}$$

Com $\Delta_g v < 0$ em $B_{\sqrt{k}} \setminus B_k$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| &\leq - \int_{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}} g(|\nabla v|) \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \cdot \nabla(u - v) dx \\
&= \int_{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}} \Delta_g v (u - v) dx \\
&\quad - \int_{\partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}} (u - v) g(|\nabla v|) \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \cdot \nu dH^{n-1} \\
&\leq - \int_{\partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}} (u - v) g(|\nabla v|) \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \cdot \nu dH^{n-1} \\
&\leq \int_{\partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}} |u - v| g(|\nabla v|) \frac{|\nabla v|}{|\nabla v|} \cdot |\nu| dH^{n-1} \\
&\leq \int_{\partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}} |u - v| g(|\nabla v|) dH^{n-1}
\end{aligned}$$

Claramente, $\partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\} \subset \overline{B_{\sqrt{k}} \setminus B_k}$.

Mas perceba que se $x \in \partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}$ for tal que $x \in \partial B_{\sqrt{k}}$ então

$$u(x) \geq v(x) = \varepsilon = \sup_{B_{\sqrt{k}}} u \geq u(x) \Rightarrow u(x) - v(x) = 0.$$

Se $x \in \partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}$ for tal que $x \in B_{\sqrt{k}} \setminus \overline{B_k}$ então por continuidade também temos $u(x) = v(x)$. Daí, se $u - v \neq 0$ em algum ponto de $\partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}$, então esse ponto está em ∂B_k .

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| &\leq \int_{\partial\{(B_{\sqrt{k}} \setminus B_k) \cap \{u > v\}\}} |u - v| g(|\nabla v|) dH^{n-1} \\
&\leq \int_{\partial B_k} |u - v| g(|\nabla v|) dH^{n-1} \\
&= \int_{\partial B_k} u g(|\nabla v|) dH^{n-1}.
\end{aligned}$$

onde $|\nabla v| = 2k\mu |C_1| e^{-\mu k^2} \varepsilon := \overline{C}(n, \delta, g_0, k) \varepsilon$. Ainda, aplicando $(g - 1)$ e $(g - 2)$ e considerando que $\varepsilon < 1$ vem

$$g(\overline{C}\varepsilon) \leq g(1)(\overline{C}\varepsilon)^\delta \leq (1 + g_0)G(1)(\overline{C}\varepsilon)^\delta \leq \frac{1 + g_0}{\eta} \overline{C}^\delta \varepsilon^\delta.$$

Disso e do Teorema 2.1.3 (Teorema do traço de Sobolev),

$$\begin{aligned}
\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| &\leq \int_{\partial B_k} u g(|\nabla v|) dH^{n-1} \\
&\leq g(\overline{C}\varepsilon) \int_{\partial B_k} u dH^{n-1} \\
&\leq \varepsilon \tilde{C}(n, \delta, g_0, \lambda, k) \int_{B_k} (|\nabla u| + u) dx.
\end{aligned}$$

Então

$$\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| \leq \varepsilon \tilde{C} \int_{B_k} (|\nabla u| + u) dx. \quad (3.32)$$

Agora sejam \tilde{G} N-função complementar de G e $\alpha > 0$ tal que $\tilde{G}(\alpha) = \lambda$.

Pela Desigualdade de Young e (G_2)

$$\begin{aligned} |\nabla u| &\leq G\left(\frac{|\nabla u|}{\alpha}\right) + \tilde{G}(\alpha) \\ &\leq G(|\nabla u|) \max\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\delta}, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+g_0}\right\} + \lambda, \end{aligned}$$

onde (2.3) nos dá

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\tilde{G}^{-1}(\lambda)} \leq \frac{G^{-1}(\lambda)}{\lambda} \leq c(\delta, g_0, \lambda).$$

Ainda lembrando que $H^n(F(u)) = 0$ vem

$$\begin{aligned} \int_{B_k} (|\nabla u| + u) dx &= \int_{B_k \cap \{u > 0\}} |\nabla u| dx + \int_{B_k} u dx \\ &\leq \int_{B_k \cap \{u > 0\}} [c(\delta, g_0, \lambda) G(|\nabla u|) + \lambda] dx + \int_{B_k} u dx \\ &\leq c(\delta, g_0, \lambda) \int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| + \varepsilon |B_k \cap \{u > 0\}| \\ &\leq c(1 + \varepsilon) \left(\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| \right). \end{aligned}$$

Aplicando em (3.32) obtemos

$$\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| \leq \varepsilon(1 + \varepsilon) \tilde{C} \left(\int_{B_k} G(|\nabla u|) dx + \lambda |B_k \cap \{u > 0\}| \right).$$

para algum outro $\tilde{C} = \tilde{C}(n, \delta, g_0, \lambda, k)$

Veja que a prova finaliza se $\varepsilon(1 + \varepsilon)\tilde{C} < 1$ e para isso é suficiente que $\varepsilon < \frac{1}{2\tilde{C}}$.

Para garantir isso, lembre que (3.30) fala da existência de um $C(n, g_0, \gamma, k)$ tal que

$$\varepsilon := \sup_{B_{\sqrt{k}}} u \leq C \left(\int_{B_1} u^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Defina $c_k = (3C\tilde{C})^{-1}$ e tenha

$$\left(\int_{B_1} u^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq c_k$$

implicando em

$$\varepsilon := \sup_{B_{\sqrt{k}}} u \leq C \left(\int_{B_1} u^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq Cc_k < \frac{1}{2\tilde{C}}.$$

Logo, $u = 0$ em B_k .

■

Teorema 3.3.1 (Não-degenerescência) *Sejam u minimizante e $B_r(x_0) \subset \Omega$ bola com $0 < r \leq 1$ e $x_0 \in F(u)$. Existe $C = C(n, g_0, \eta, \lambda)$ tal que*

1.

$$Cr < \left(\int_{B_r(x_0)} u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

2.

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq Cr.$$

Demonstração:

1. Como $x_0 \in F(u)$ então $u \not\equiv 0$ em $B_{kr}(x_0)$ para todo $k \in (0, 1)$.

Fixando $\gamma = 2$ temos pelo Lema 3.3.2 que

$$\frac{1}{r} \left(\int_{B_r(x_0)} u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} > c_k(n, g_0, \eta, \lambda, k).$$

Motivados em perder mais uma dependência considere $k = \frac{1}{2}$ e $C = C_{\frac{1}{2}}$. Daí,

$$\frac{1}{r} \left(\int_{B_r(x_0)} u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} > C.$$

2. Se ocorresse de

$$\sup_{B_r(x_0)} u < Cr,$$

então

$$\frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(y)} (Cr)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = C.$$

Que contradiz 1.

■

3.4 Densidade em pontos da fronteira livre

Por definição de fronteira de um conjunto, qualquer $x_0 \in F(u)$ acumula pontos de $\{u > 0\}$ e $\{u = 0\}$ em suas vizinhanças. O próximo resultado mostra que essa acumulação se dá de forma significativa e uniforme em ambos os conjuntos.

Teorema 3.4.1 (Propriedade de Densidade) *Seja $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$. Então para cada $0 < R < 1$ existe uma constante universal $c = c(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M, R) \in (0, 1)$ tal que*

$$c \leq \frac{|\{u = 0\} \cap B_r|}{|B_r|} \leq 1 - c, \text{ para } 0 < r \leq R.$$

Demonstração: A estimativa superior equivale a uma estimativa inferior do conjunto complementar de $\{u = 0\} \cap B_r$. Isto é, mostraremos inicialmente

$$\frac{|\{u = 0\} \cap B_r|}{|B_r|} \leq 1 - c$$

provando que existe $c(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M, R)$ tal que

$$c \leq \frac{|\{u > 0\} \cap B_r|}{|B_r|} \text{ para } 0 < r \leq R.$$

Perceba que como $0 \in F(u)$, pelo Teorema 3.3.1 existe $C = C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda)$ tal que

$$\frac{r}{2}C < \left(\int_{B_{\frac{r}{2}}} u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isso garante a existência de um $y \in B_{\frac{r}{2}}$ tal que $u(y) > \frac{r}{2}C$, e por continuidade, uma bola $B_{r_0}(y) \subset (B_r \cap \{u > 0\})$.

Mostremos que conseguimos bolas com volumes uniformemente não-degenerados.

Seja $C_{(R)} = C(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M, R)$ constante Lipschitz de u em B_R .

Defina $c := \left(\frac{C}{4C_{(R)}}\right)^n$, supondo sem perda de generabilidade que $C < 2C_{(R)}$, e veja que $B_{\frac{c}{4C_{(R)}}r}(y) \subset B_r \cap \{u > 0\}$.

De fato, para $x \in B_{\frac{c}{4C_{(R)}}r}(y) \subset B_R$ tem-se

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq C_{(R)}|x - y| < C_{(R)}\frac{C}{4C_{(R)}}r = \frac{r}{4}C \\ \Rightarrow \frac{r}{2}C &< u(y) < u(x) + \frac{r}{4}C \\ \Rightarrow 0 &< \frac{r}{4}C < u(x) \\ \Rightarrow B_{\frac{c}{4C_{(R)}}r}(y) &\subset \{u > 0\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|\{u > 0\} \cap B_r|}{|B_r|} \geq \frac{|B_{\frac{c}{4C_{(R)}}r}(y)|}{|B_r|} = \left(\frac{C}{4C_{(R)}}\right)^n =: c.$$

Agora mostremos a existência de $c(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M, R)$ tal que

$$c \leq \frac{|\{u = 0\} \cap B_r|}{|B_r|} \text{ para } 0 < r \leq R. \quad (3.33)$$

Para melhorar a clareza das estimativas vamos escrever $r = 1$ observando a identificação de $u : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_r : B_r \rightarrow \mathbb{R}$ por $u(x) = u_r(rx)$, que fornece

$$\{u = 0\} \cap B_1 = \frac{\{u_r = 0\} \cap B_r}{r}$$

e

$$\frac{|\{u = 0\} \cap B_1|}{|B_1|} = \frac{\frac{1}{r^n} |\{u_r = 0\} \cap B_r|}{|B_1|} = \frac{|\{u_r = 0\} \cap B_r|}{|B_r|}.$$

Provemos para $r = 1$.

Supondo, por contradição, que (3.33) não vale, existe uma sequência de minimizantes $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ na classe $\mathcal{S}(n, \delta, g_0, \lambda, \eta, M, B_1)$ tal que $\varepsilon_k := |B_1 \cap \{u_k = 0\}| \rightarrow 0$.

Sejam $v_k \in W^{1,G}(B_{\frac{1}{2}})$ soluções de

$$\begin{cases} \Delta_{g_k} v_k = 0 & \text{em } B_{\frac{1}{2}} \\ v_k = u_k & \text{em } \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Definindo $A_1^k = \{x \in B_{\frac{1}{2}}; |\nabla u_k - \nabla v_k| \leq 2|\nabla u_k|\}$ e $A_2^k = B_{\frac{1}{2}} \setminus A_1^k$ obtemos via o Teorema 2.2.6 e minimalidade de u_k ,

$$\begin{aligned} \int_{A_2^k} G_k(|\nabla u_k - \nabla v_k|) dx &\leq c(\delta, g_0) \int_{B_{\frac{1}{2}}} (G_k(|\nabla u_k|) - G_k(|\nabla v_k|)) dx \\ &\leq c(\delta, g_0) \lambda [|\{v_k > 0\} \cap B_1| - |\{u_k > 0\} \cap B_1|] \\ &\leq c(\delta, g_0) \lambda [|B_1| - (|B_1| - \varepsilon_k)] \\ &= c(\delta, g_0) \lambda \varepsilon_k \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

e para uma estimativa análoga em A_1^k vejamos primeiro que

$$\begin{aligned} \int_{A_1^k} \frac{g_k(|\nabla u_k|)}{|\nabla u_k|} |\nabla u_k - \nabla v_k|^2 dx &\leq c(\delta, g_0) \int_{B_{\frac{1}{2}}} (G_k(|\nabla u_k|) - G_k(|\nabla v_k|)) dx \\ &\leq c(\delta, g_0) \lambda \varepsilon_k \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Com (3.35) e assim como em (3.6) temos

$$\begin{aligned} \int_{A_1^k} G_k(|\nabla u_k - \nabla v_k|) dx &\leq c(g_0) \left(\int_{A_1^k} \frac{g_k(|\nabla u_k|)}{|\nabla u_k|} |\nabla u_k - \nabla v_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_1^k} G_k(|\nabla u_k|) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(\delta, g_0) (\lambda \varepsilon_k)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_1^k} G_k(|\nabla u_k|) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por isso, (3.34) e como em (3.8) vem

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{2}}} G_k(|\nabla u_k - \nabla v_k|) dx &\leq c(\delta, g_0) \lambda \varepsilon_k + c(\delta, g_0) (\lambda \varepsilon_k)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_1^k} G_k(|\nabla u_k|) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(\delta, g_0) \lambda \varepsilon_k + c(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) \varepsilon_k^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.8 (*Desigualdade do tipo Poincaré*) e $\varepsilon_k \rightarrow 0$ também temos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} G_k(|u_k - v_k|) dx \leq c(n, \delta, g_0, \eta, \lambda, M) \varepsilon_k^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

Portanto, pelo Lema 2.1.7 temos $\|u_k - v_k\|_{W^{1, G_k}(B_{\frac{1}{2}})} \rightarrow 0$.

Melhor do que isso, veja que $u_k - v_k \rightarrow 0$ em $W_0^{1, 1+\delta}(B_{\frac{1}{2}})$.

De fato, vejamos inicialmente que $u_k - v_k \in W_0^{1, 1+\delta}(B_{\frac{1}{2}})$.

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{2}}} |u_k - v_k|^{1+\delta} dx &= \int_{B_{\frac{1}{2}} \cap \{|u_k - v_k| < 1\}} |u_k - v_k|^{1+\delta} dx + \int_{B_{\frac{1}{2}} \cap \{|u_k - v_k| \geq 1\}} |u_k - v_k|^{1+\delta} dx \\ &\leq |B_{\frac{1}{2}}| + \frac{1}{G_k(1)} \int_{B_{\frac{1}{2}}} G_k(|u_k - v_k|) dx \\ &\leq |B_{\frac{1}{2}}| + \frac{1}{\eta} \int_{B_{\frac{1}{2}}} G_k(|u_k - v_k|) dx < \infty. \end{aligned}$$

Do mesmo modo

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u_k - \nabla v_k|^{1+\delta} dx \leq |B_{\frac{1}{2}}| + \frac{1}{\eta} \int_{B_{\frac{1}{2}}} G_k(|\nabla u_k - \nabla v_k|) dx < \infty.$$

Usando o Corolário 2.1.3 temos

$$\|u_k - v_k\|_{W^{1, 1+\delta}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C \|u_k - v_k\|_{W^{1, G_k}(B_{\frac{1}{2}})} \rightarrow 0.$$

Em particular, existe subsequência tal que $u_k - v_k \rightarrow 0$ em quase todo ponto de $B_{\frac{1}{2}}$.

Lembre que $\{u_k\}$ e $\{v_k\}$ são uniformemente limitadas por M . Além disso, a estimativa uniforme Hölder das primeiras e a regularidade uniforme $C^{1, \alpha}$ das segundas garantem a equicontinuidade. Pelo *Teorema de Ascoli-Arzelá* existem $u_0 \in C^0(B_{\frac{1}{2}})$ e $v_0 \in C^1(B_{\frac{1}{2}})$ tais que

$$\begin{cases} u_k \rightarrow u_0 & \text{uniformemente em } B_{\frac{1}{2}} \\ v_k \rightarrow v_0 & \text{uniformemente em } B_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Mas se $u_k - v_k \rightarrow 0$ então $u_0 = v_0$ em $B_{\frac{1}{2}}$.

Aplicando o limite nas Desigualdades de Harnack

$$\sup_{B_{\frac{1}{4}}} v_k \leq C \inf_{B_{\frac{1}{4}}} v_k$$

obtemos

$$0 \leq \sup_{B_{\frac{1}{4}}} u_0 = \sup_{B_{\frac{1}{4}}} v_0 \leq C \inf_{B_{\frac{1}{4}}} v_0 = C \inf_{B_{\frac{1}{4}}} u_0 = u_0(0) = 0.$$

Implicando em $u_0 \equiv 0$ em $B_{\frac{1}{4}}$, o que contradiz

$$\left(\int_{B_{\frac{1}{4}}} u_0^{1+\delta} dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} > 0$$

uma vez que

$$\left(\int_{B_{\frac{1}{4}}} u_k^{1+\delta} dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} > C > 0$$

pelo Lema 3.3.2., $0 \in \partial\{u_k > 0\}$ e a convergência uniforme de u_k para u_0 . ■

3.5 Regularidade flatness

Nesta seção traremos conceitos e resultados, já encontrados em (MARTÍNEZ; WO-LANSKI, 2008), essenciais para fundamentar o que seria uma N-função adequada no que tange a garantia da analiticidade da fronteira livre do minimizante associado a N-função pelo problema (3.1).

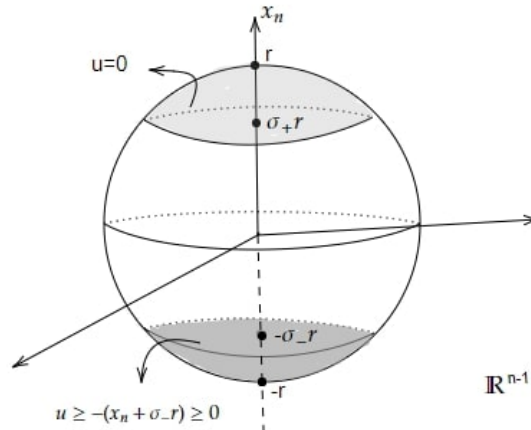
Definição 3.5.1 (Classe Flatness) *Sejam $0 \leq \sigma_+, \sigma_- \leq 1$ e $\tau > 0$. Definimos a Classe Flatness $F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ na bola B_r como o conjunto das funções u que satisfazem:*

- (i) $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_r)$ para alguma classe de minimizantes;
- (ii) $u(x) = 0$ para $x_n \geq \sigma_+ r$;
- (iii) $u(x) \geq -\lambda^*(x_n + \sigma_- r)$ para $x_n \leq -\sigma_- r$;
- (iv) $|\nabla u| \leq \lambda^*(1 + \tau)$ em B_r .

Analogamente, diremos que $u \in F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ quando $u \in F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ e satisfaz o controle tipo Dini para as funções ε_1 e ε_2 .

Mais geralmente, mudando a direção de e_n pela direção de um vetor unitário v substituimos x_n por $\langle x, v \rangle$ na Definição 3.5.1. Se ainda trocarmos a origem por $x_0 \in \mathbb{R}^n$ obtemos a Classe Flatness $F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ em $B_r(x_0)$ na direção v .

Figura 5 – Classe flatness $F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ em B_r na direção e_n



Fonte: elaborada pela autora.

Observação 3.5.1 Perceba que se $u \in F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ então compreendemos alguma vizinhança da fronteira livre que contém a origem entre os hiperplanos $\{x_n = \sigma_+ r\}$ e $\{x_n = -\sigma_- r\}$. Primeiro, porque os pontos de $B_r \cap \{x_n > \sigma_+ r\}$ não acumulam em suas vizinhas pontos de positividade da função u e, portanto, não podem ser pontos da fronteira livre. Do mesmo modo que em $B_r \cap \{x_n < -\sigma_- r\}$ a função é estritamente positiva pelo item (iii), fazendo com que não exista ponto da fronteira livre.

Em particular, se reduzirmos o valor de σ_+ ou σ_- teremos uma classe ainda melhor pois compreenderemos a fronteira livre entre hiperplanos mais próximos. Em outras palavras, quanto menores forem $\sigma_+, \sigma_- \in [0, 1]$, mais fortes serão as condições da definição de Classe Flatness.

Algebricamente, $F(\sigma_+, \sigma_-; \tau) \subset F(\sigma, \sigma_-; \tau)$ se $\sigma \geq \sigma_+$.

De fato, seja $u \in F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ em B_r .

Para $x \in \{x_n \geq \sigma r\} \cap B_r$ temos $x_n \geq \sigma_+ r$ que implica em $u(x) = 0$, onde essa é a única condição que depende de σ_+ .

Analogamente, para $u \in F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ e $\sigma \geq \sigma_-$ tem-se $u \in F(\sigma_+, \sigma; \tau)$, observando que se $x_n \leq -\sigma r \leq -\sigma_- r$ então $u(x) \geq -(x_n + \sigma_- r) \geq -(x_n + \sigma r)$.

■

O fato é que em certas condições conseguimos fazer essa melhoria de classe. Para entender quais são essas condições veja o próximo lema.

Lema 3.5.1 (Melhoramento da Classe Flatness) *Sejam $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ e $\theta \in (0, 1)$. Existem constantes positivas $\sigma_\theta = \sigma_\theta(n, \theta)$, $c_\theta = c_\theta(n, \theta)$ e $C = C(n, \delta, g_0)$ tais que se*

$$\begin{cases} \sigma \leq \sigma_\theta \\ \tau \leq \sigma_\theta \sigma^2 \\ u \in F(\sigma, 1; \tau) \text{ em } B_\rho \text{ na direção } v \end{cases}$$

então

$$u \in F(\theta\sigma, \theta\sigma; \theta^2\tau) \text{ em } B_r \text{ na direção } \tilde{v}$$

para algum $c_\theta\rho < r < \frac{1}{4}\rho$ e $|\tilde{v} - v| \leq C_\theta$.

Demonstração: Veja Lema 9.5 de (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008), que é o mesmo lema com as mesmas dependências de parâmetros nas constantes de estimativa. ■

Teorema 3.5.1 (Flatness implica regularidade em $F(u)$) *Seja $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$. Existem constantes positivas $\alpha, \beta_0, \sigma_0$ e τ_0 dependentes de n, δ, g_0, η e λ tais que se*

$$\sigma \leq \sigma_0, \quad r \leq \tau_0 \sigma_0^{\beta_0} \text{ e } u \in F(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_r,$$

então $F(u) \cap B_{\frac{r}{4}}$ é uma superfície $C^{1,\alpha}$.

Demonstração: Novamente, em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) encontramos o resultado com as mesmas dependências de parâmetros nas constantes de estimativa. Veja o Teorema 9.3 do referido artigo. ■

Note que estando nas condições do Lema 3.5.1 conseguimos adequar nossas hipóteses às do teorema de regularidade flatness acima via iteração do lema de melhoramento de classe.

Além disso, (KINDERLEHRER *et al.*, 1978) nos garante a analiticidade da fronteira livre do minimizante caso esta seja de regularidade $C^{1,\alpha}$. Tendo isso em vista, nosso objetivo será investigar em quais condições a N-função nos fornece minimizante pertencente a uma classe $F(\sigma, 1; \infty)$ com $\sigma \leq \sigma_0$ a fim de aplicarmos o Teorema 3.5.1.

3.6 Blowups e soluções em semiespaços

Para u minimizante do problema (3.1) em B_1 com $u(0) = 0$, considerando uma sequência de números reais $\rho_k \rightarrow 0^+$ definimos a sequência de Blowups $u_k : B_{1/\rho_k} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_k(x) := \frac{u(\rho_k x)}{\rho_k}. \quad (3.36)$$

Cada u_k é minimizante de J_G em B_{1/ρ_k} , lembrando que para a mesma N-função G e mesmo λ do operador para u .

Para mostrarmos isso, de maneira idêntica ao feito no scaling geral 3.3, fazamos a identificação entre

$$v \in W^{1,G}(B_1) \text{ e } v_k(x) := \frac{v(\rho_k x)}{\rho_k} \in W^{1,G}(B_{1/\rho_k}).$$

Temos

$$\begin{aligned} J(u_k) &:= \int_{B_{1/\rho_k}} (G(|\nabla u_k(x)|) + \lambda \chi_{\{u_k > 0\}}(x)) dx \\ &= \int_{B_{1/\rho_k}} (G(|\nabla u(\rho_k x)|) + \lambda \chi_{\{u > 0\}}(\rho_k x)) dx \\ &= \frac{1}{\rho_k^n} \int_{B_1} (G(|\nabla u(x)|) + \lambda \chi_{\{u > 0\}}(x)) dx \\ &\leq \frac{1}{\rho_k^n} \int_{B_1} (G(|\nabla v(x)|) + \lambda \chi_{\{v > 0\}}(x)) dx \\ &= \int_{B_{1/\rho_k}} (G(|\nabla v(\rho_k x)|) + \lambda \chi_{\{v > 0\}}(\rho_k x)) dx \\ &= J(v_k) \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$$v - u \in W_0^{1,G}(B_1) \Leftrightarrow v_k - u_k \in W_0^{1,G}(B_{1/\rho_k}).$$

Por fim, se $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ então $u_k \in S\left(\delta, g_0, \eta, \lambda, \frac{M}{\rho_k}, B_{1/\rho_k}\right)$.

Do mesmo modo que (3.37) faz com que $u_k \in S\left(\delta, g_0, \eta, \lambda, \frac{M}{\rho_k}, B_{1/\rho_k}\right)$ implique em $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$. Logo,

$$u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1) \Leftrightarrow u_k \in S\left(\delta, g_0, \eta, \lambda, \frac{M}{\rho_k}, B_{1/\rho_k}\right) \quad (3.38)$$

Observação 3.6.1 Veremos que à menos de subsequências $\{u_k\}$ converge em $C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ para uma função Lipschitz contínua u_0 , chamada limite do Blowup, que é minimizante global, isto é, $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, \mathbb{R}^n)$.

Começamos mostrando limitações uniformes para essa sequência de funções.

Seja $B = \overline{B_R} \subset \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in (0, 1)$.

- (1) *Estimativa lipschitz uniforme:* Como $\rho_k \rightarrow 0^+$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_0$ vale $\rho_k R < \frac{1}{2}$.

Tome, pelo Corolário 3.2.1, $C = C(n, \delta, g_0, \lambda, \eta, M)$ constante Lipschitz de u em $B_{1/2}$, e obtenha

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{B_{\rho_k R}})} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C.$$

Uma vez que

$$x, y \in B \Leftrightarrow \rho_k x, \rho_k y \in \overline{B_{\rho_k R}},$$

para $x, y \in B$ e $k \geq k_0$ tem-se

$$\begin{aligned} |u_k(x) - u_k(y)| &= \frac{1}{\rho_k} |u(\rho_k x) - u(\rho_k y)| \\ &\leq \frac{1}{\rho_k} C |\rho_k x - \rho_k y| \\ &= C |x - y|. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Obtemos que $\{u_k\}$ é uniformemente Lipschitz contínua em B_R com constante Lipschitz independente de R . Equivalentemente, a sequência $\{\nabla u_k\}$ é uniformemente limitada em B por uma constante $C \neq C(R)$.

- (2) *Equicontinuidade:* Vejamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in B$, $|x - y| < \delta$ implique em $|u_k(x) - u_k(y)| < \varepsilon$, qualquer que seja o $k \in \mathbb{N}$.

Por (3.39) tome $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ e tenha

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |u_k(x) - u_k(y)| < \varepsilon.$$

O que prova a equicontinuidade para $k \geq k_0$.

- (3) *Limitação uniforme em B :* Novamente, para $k \geq k_0$ temos $\overline{B_{\rho_k R}} \subset B_{1/2}$. Então existe constante $C_1 = C_1(n, \delta, g_0, \lambda, \eta, M)$ como em (3.9) tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\overline{B_{\rho_k R}})} \leq \frac{C_1}{\frac{1}{2}} \sup_{x \in \overline{B_{\rho_k R}}} \text{dist}(x, \partial\{u > 0\}) \leq 2C_1 \rho_k R.$$

Então

$$\|u_k\|_{L^\infty(B)} = \frac{1}{\rho_k} \|u\|_{L^\infty(\overline{B_{\rho_k R}})} \leq 2C_1 R,$$

que prova a limitação uniforme em $\{u_k\}_{k \geq k_0}$.

(4) *Limitação uniforme das semi-normas Hölder* $\left\{ |u_{k_j}|_{C^{0,\alpha}(B)} \right\}_{k_j \geq k_0}$: Seja $C > 0$ a constante Lipschitz de u em $B_{\frac{1}{2}}$. Para $k_j \geq k_0$ temos

$$\begin{aligned} |u_{k_j}|_{C^{0,\alpha}(B)} &= \sup_{x,y \in B; x \neq y} \frac{|u_{k_j}(x) - u_{k_j}(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \frac{1}{\rho_{k_j}} \sup_{x,y \in B; x \neq y} \frac{|u(\rho_{k_j}x) - u(\rho_{k_j}y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\rho_{k_j}} \sup_{x,y \in B; x \neq y} \frac{C|\rho_{k_j}x - \rho_{k_j}y|}{|x - y|^\alpha} \\ &= C \sup_{x,y \in B; x \neq y} |x - y|^{1-\alpha} \\ &\leq C(2R)^{1-\alpha} \\ &= C_R. \end{aligned}$$

Em particular, se u_0 é o limite uniforme de u_k em B via o Teorema de Ascoli-Arzelá, aplicando o limite em j para as desigualdades

$$|u_{k_j}(x) - u_{k_j}(y)| \leq C_R |x - y|^\alpha$$

obtemos

$$|u_0|_{C^{0,\alpha}(B)} \leq C_R.$$

Provemos a convergência desejada para outro tipo de sequência de minimizantes e adaptemos a prova para a sequência de blow-ups.

Lema 3.6.1 *Sejam $u_k \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_{R_k})$ para o mesmo operador J_G , com $R_k \rightarrow \infty$. Então existe uma função Lipschitz contínua u_0 em \mathbb{R}^n tal que, a menos de subsequência, para algum $\alpha \in (0, 1)$,*

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u_0 && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u_0 && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Além disso, u_0 é minimizante global, ou seja, minimiza J_G em B_R para todo $R > 0$.

Demonstração: Mostremos a convergência em cada $B_R \subset \mathbb{R}^n$.

Sejam $R > 0$ e $k \gg 1$ tais que $\frac{R_k}{2} > \max\{R, 1\}$.

Pelos Teoremas 3.2.2 e 3.2.1 temos $u_k \in C^{0,\alpha}(B_R)$ e

$$\|\nabla u_k\|_{L^\infty(B_{\frac{R_k}{2}})} \leq \frac{C(n, \delta, g_0, \lambda, \eta, M)}{\frac{R_k}{2}} \text{diam} B_{\frac{R_k}{2}} = C(n, \delta, g_0, \lambda, \eta, M).$$

Portanto, por (CAFFARELLI; ALT, 1981) podemos extrair uma subsequência convergente em $C^{0,\alpha}(B_R)$ para uma função u_0 Lipschitz contínua em R^n .

Para a convergência $\nabla u_k \rightarrow \nabla u_0$ q.t.p. em \mathbb{R}^n lembremos que convergência em norma $C^{0,\alpha}$ implica em convergência uniforme.

Tomemos $x_0 \in \{u_0 > 0\}$.

Existem $\varepsilon, \gamma > 0$ tais que $u_0 > \gamma$ em $B_\varepsilon(x_0)$ pela continuidade de u_0 . Então para $k \gg 1$ temos $u_k > \frac{\gamma}{2}$ em $B_\varepsilon(x_0)$. Em particular, u_k é g-harmônica em $B_\varepsilon(x_0) \subset \{u_k > 0\}$.

Pelo Teorema 2.2.5 vem

$$\|u_k\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0))} \leq CM.$$

Então, sobre uma subsequência $\nabla u_k \rightarrow \nabla u_0$ uniformemente em $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$.

Resta provar que $\nabla u_k \rightarrow \nabla u_0$ q.t.p. em $\{u_0 = 0\}$.

Mostremos a convergência em $S \subset \{u_0 = 0\}$, subconjunto formado pelos pontos de densidade 1 em $\{u_0 = 0\}$.

Seja $x_0 \in S$.

Afirmamos que $u_0(x_0 + x) = o(|x|)$, ou equivalentemente, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u_0(x_0 + x)}{|x|} = 0$.

Supondo, por contradição, que $u_0(x_0 + x) \neq o(|x|)$, existem $\gamma > 0$ e sequências $\{r_j > 0\}$ e $y_j \in B_{r_j}(x_0)$ tais que $u_0(y_j) \geq \gamma r_j$ e $r_j \rightarrow 0$.

Pela continuidade Lipschitz existe $C > 1$ tal que para todo $x \in B_{\gamma r_j}(y_j)$ vale

$$\gamma r_j - u_0(x) \leq u_0(y_j) - u_0(x) \leq |u_0(y_j) - u_0(x)| \leq C|y_j - x|.$$

Para $0 < c < 1$ e $x \in B_{c\gamma r_j}(y_j)$ vem

$$\gamma r_j - u_0(x) < Cc\gamma r_j \Rightarrow u_0(x) > \gamma r_j(1 - Cc).$$

Tome $c = \frac{1}{2C}$ e tenha $u_0 > \frac{\gamma r_j}{2}$ em $B_{c\gamma r_j}(y_j)$. Em particular, $B_{c\gamma r_j}(y_j) \subset \{u_0 > 0\}$.

Considerando, sem perda de generalidade, que $0 < \gamma < 1$ temos

$$B_{c\gamma r_j}(y_j) \subset B_{\gamma r_j}(y_j) \subset B_{2r_j}(x_0).$$

Daí,

$$\frac{|\{u_0 > 0\} \cap B_{2r_j}(x_0)|}{|B_{2r_j}(x_0)|} \geq \frac{|B_{c\gamma r_j}(y_j)|}{|B_{2r_j}(x_0)|} = \left(\frac{c\gamma}{2}\right)^n.$$

Fazendo $r_j \rightarrow 0$ teremos densidade de x_0 em $\{u_0 > 0\}$ positiva. Absurdo, pois $x_0 \in S$.

Concluimos então que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u_0(x_0 + x)}{|x|} = 0$ como afirmado.

Com isso e a convergência uniforme de u_k para u_0 , dado $\gamma > 0$ temos $\frac{u_k}{r} < \gamma$ em $B_r(x_0)$ para $r \ll 1$ e $k \gg 1$. Daí,

$$\left(\int_{B_r(x_0)} u_k^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq r\gamma.$$

Tome $C_{\frac{1}{2}}$ do Lema 3.3.2, $\gamma < C_{\frac{1}{2}}$ e tenha

$$\left(\int_{B_r(x_0)} u_k^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < rC_{\frac{1}{2}} \text{ para } r \ll 1 \text{ e } k \gg 1.$$

Pelo Lema 3.3.2 vale

$$u_k \equiv 0 \text{ em } B_{\frac{r}{2}}(x_0) \text{ para } r \ll 1 \text{ e } k \gg 1. \quad (3.40)$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla u_k(x_0) = 0 = \nabla u_0(x_0)$ no aberto S .

Isso conclui a prova das convergências.

Mostremos agora que $u_0 \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$.

Seja v_0 função tal que $u_0 - v_0 \in W^{1,G}(B_R)$. Queremos mostrar que

$$\int_{B_R} (G(|\nabla u_0|) + \lambda \chi_{\{u_0 > 0\}}) dx \leq \int_{B_R} (G(|\nabla v_0|) + \lambda \chi_{\{v_0 > 0\}}) dx.$$

Tome $\phi \in C_0^\infty(B_R)$ com $0 \leq \phi \leq 1$ e defina a sequência

$$v_k := v_0 + (1 - \phi)(u_k - u_0)$$

que satisfaz $u_k - v_k \in W^{1,G}(B_R)$. Logo,

$$\int_{B_R} (G(|\nabla u_k|) + \lambda \chi_{\{u_k > 0\}}) dx \leq \int_{B_R} (G(|\nabla v_k|) + \lambda \chi_{\{v_k > 0\}}) dx.$$

Como $\|\nabla u_k\|_{L^\infty(B_R)} \leq C$ uniformemente, $G(|\nabla u_k|) \rightarrow G(|\nabla u_0|)$ em quase todo ponto e G é crescente, o Teorema da Convergência Dominada nos dá

$$\int_{B_R} G(|\nabla u_k|) dx \rightarrow \int_{B_R} G(|\nabla u_0|) dx. \quad (3.41)$$

Do mesmo modo que a definição de v_k nos dá $\nabla v_k \rightarrow \nabla v_0$ em quase todo ponto com $\{\nabla v_k\}$ uniformemente limitada. Pela mesma justificativa acima temos

$$\int_{B_R} G(|\nabla v_k|) dx \rightarrow \int_{B_R} G(|\nabla v_0|) dx.$$

Agora note que $\chi_{\{u_0>0\}} \leq \limsup_k \chi_{\{u_k>0\}}$ e $\chi_{\{v_k>0\}} \leq \chi_{\{v_0>0\}} + \chi_{\{\phi<1\}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} (G(|\nabla u_0|) + \lambda \chi_{\{u_0>0\}}) dx &\leq \limsup_k \int_{B_R} (G(|\nabla u_k|) + \lambda \chi_{\{u_k>0\}}) dx \\ &\leq \int_{B_R} (G(|\nabla v_k|) + \lambda \chi_{\{v_k>0\}}) dx \\ &\leq \int_{B_R} (G(|\nabla v_0|) + \lambda \chi_{\{v_0>0\}} + \lambda \chi_{\{\phi<1\}}) dx, \end{aligned}$$

onde $\int_{B_R} \chi_{\{\phi<1\}} dx = |\{\phi < 1\}|$ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira. Portanto,

$$\int_{B_R} (G(|\nabla u_0|) + \lambda \chi_{\{u_0>0\}}) dx \leq \int_{B_R} (G(|\nabla v_0|) + \lambda \chi_{\{v_0>0\}}) dx.$$

Pela arbitrariedade da função admissível v_0 conclui-se que u_0 é minimizante em B_R .

Para $u_0 \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_R)$ nota-se que $G \in G(\delta, g_0, \eta)$ e $0 \leq u_0 \leq M$ uma vez que $0 \leq u_k \leq M$. Por fim, $0 \in F(u_0)$ pois $u_0(0) = \lim_k u_k(0) = 0$ e caso $u_0 \equiv 0$ numa vizinhança do zero, teríamos $0 \in S$ e, pelo que já foi feito, $u_k \equiv 0$ numa vizinhança do zero para índices suficientemente grandes. Absurdo, pois $0 \in F(u_k)$. ■

Corolário 3.6.1 (Convergência dos blow-ups) *Sejam $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ e $u_k : B_{1/\rho_k} \rightarrow \mathbb{R}$ sequência de blow-up $u_k(x) := \frac{u(\rho_k x)}{\rho_k}$. Então existe uma função Lipschitz contínua u_0 em \mathbb{R}^n tal que, a menos de subsequência, para algum $\alpha \in (0, 1)$,*

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u_0 && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u_0 && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Além disso, u_0 é minimizante global, ou seja, minimiza J_G em B_R para todo $R > 0$.

Demonstração: Embora as atuais u'_k s não estejam na mesma classe de minimizantes (ver 3.1.2), a observação 3.6.1 nos garante a validade em reproduzir a prova do Lema 3.6.1 pois todas as estimativas universais dessa prova passam pela continuidade lipschitz. ■

Lema 3.6.2 *Sejam $u_k \in S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M, B_{R_k})$ com $R_k \rightarrow \infty$, onde existem $0 < \delta \leq g_0 < \infty$ tais que $\delta \leq \delta_k \leq g_{0k} \leq g_0$. Nessas condições existe uma função Lipschitz contínua u_0 em \mathbb{R}^n tal que, a menos de subsequência, para algum $\alpha \in (0, 1)$,*

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u_0 && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u_0 && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Além disso, $u_0 \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$.

Demonstração: Para as convergências observa-se que $u_k \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_{R_k})$ pois $G_k \in G(\delta, g_0)$ como no Lema 3.6.1 e que a existência da função limite u_0 , assim como as propriedades das convergências desejadas, não dependem da N-função G , apenas que $G \in G(\delta, g_0, \eta)$ com a finalidade de invocar estimativas de regularidade $C^{1,\alpha}$ em funções g-harmônicas, continuidade Lipschitz e não-degenerescência para minimizantes.

Provemos que $u_0 \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$ de modo análogo ao feito no Lema 3.6.1. Observe que a unicidade da N-função G teve relevância apenas na aplicação do Teorema da Convergência Dominada para as convergências

$$\int_{B_R} G(|\nabla u_k|) dx \rightarrow \int_{B_R} G(|\nabla u_0|) dx \quad \text{e} \quad \int_{B_R} G(|\nabla v_k|) dx \rightarrow \int_{B_R} G(|\nabla v_0|) dx.$$

Aqui, usamos CTD para aplicar o Teorema 2.1.4 e obter uma $G \in G(\delta, g_0)$ tal que, a menos de subsequência, G_k converge para G em norma C^1 sobre compactos de $[0, \infty)$. Por maior razão, converge uniformemente sobre compactos de $[0, \infty)$.

Então $G_k(|\nabla u_k|) \rightarrow G(|\nabla u_0|)$ com $|\nabla u_k| \leq C$. Além de $G_k(|\nabla u_k|) \leq G_k(C) \leq 2G(C)$ para $k \gg 1$. Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_{B_R} G_k(|\nabla u_k|) dx \rightarrow \int_{B_R} G(|\nabla u_0|) dx.$$

Analogamente,

$$\int_{B_R} G_k(|\nabla v_k|) dx \rightarrow \int_{B_R} G(|\nabla v_0|) dx.$$

O restante da prova se dá como no Lema 3.6.1. ■

Corolário 3.6.2 *Sejam $w_k \in S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M, B_1)$ e $\rho_k \rightarrow 0^+$ onde existem constantes $0 < \delta \leq g_0 < \infty$ tais que $\delta \leq \delta_k \leq g_{0k} \leq g_0$.*

Dada a sequência

$$u_k(x) = \frac{w_k(\rho_k x)}{\rho_k} \text{ em } B_{1/\rho_k}$$

existe uma função Lipschitz contínua u_0 em \mathbb{R}^n tal que, a menos de subsequência, para algum $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u_0 && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u_0 && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Além disso, para algum $p \in [\delta, g_0]$ temos $u_0 \in S(p, p, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$.

Demonstração: A prova segue como no Lema 3.6.2 uma vez que a única diferença é falta de limitação uniforme das u'_k s pois $u_k \in S(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M/\rho_k, B_{1/\rho_k})$. No entanto, é necessário apenas que os gradientes sejam localmente uniformemente limitados, o que é garantido uma vez que

$$\|\nabla u_k\|_{L^\infty(B_r)} = \|\nabla w_k\|_{L^\infty(B_{r\rho_k})}.$$

■

Um bom substituto para o controle do tipo Dini quando trabalhamos no contexto de convergência para N-funções $\{G_k\}$ é tornar as constantes de Lieberman tão próximas ao ponto de convergirem para algum número positivo, fazendo com que a função limite seja da forma $G(t) = t^p$ para algum p . Essa aproximação será descrita por $g_{0k} - \delta_k = o(k)$, que significa $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{0k} - \delta_k = 0$.

Corolário 3.6.3 *Suponha $u_k \in S(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M, B_{R_k})$ com $R_k \rightarrow \infty$. Assuma que existem constantes $0 < \delta \leq g_0 < \infty$ tais que*

$$\delta \leq \delta_k \leq g_{0k} \leq g_0 \text{ e } g_{0k} - \delta_k = o(k).$$

Então existe uma função Lipschitz contínua u_0 em \mathbb{R}^n tal que, a menos de subsequência, para algum $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u_0 && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u_0 && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Além disso, para algum $p \in [\delta, g_0]$ temos $u_0 \in S(p, p, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$.

Demonstração: A convergência se dá como nos resultados anteriores, uma vez que temos o controle Lipschitz.

Para a segunda parte notemos que, por se tratar de sequências limitadas, existem subsequências $\{\delta_k\}_{\mathbb{N}'}$ e $\{g_{0k}\}_{\mathbb{N}'}$ convergentes.

Tendo em vista que $0 \leq g_{0k} - \delta_k \rightarrow 0$ obtemos

$$\delta_k, g_{0k} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}'} p \in [\delta, g_0].$$

Seja G uma N-função limite de $\{G_k\}$ em norma $C^{1,\alpha}$. Aplicando limite pontual em

$$\min\{t^{1+\delta_k}, t^{1+g_{0k}}\} G_k(1) \leq G_k(t) \leq \max\{t^{1+\delta_k}, t^{1+g_{0k}}\} G_k(1)$$

temos

$$G(t) = G(1)t^{p+1}$$

e conseqüentemente,

$$Q_g(t) = \frac{t \cdot g'(t)}{g(t)} = p, \quad \forall t > 0.$$

Que, $u_0 \in S(p, p, \eta, \lambda, B_R)$ segue como no Lema 3.6.2. ■

Corolário 3.6.4 *Sejam $w_k \in S(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M, B_1)$ e $\rho_k \rightarrow 0^+$ onde existem constantes $0 < \delta \leq g_0 < \infty$ tais que*

$$\delta \leq \delta_k \leq g_{0k} \leq g_0 \text{ e } g_{0k} - \delta_k = o(k).$$

Dada a sequência

$$u_k(x) = \frac{w_k(\rho_k x)}{\rho_k} \text{ em } B_{1/\rho_k}$$

existe uma função Lipschitz contínua u_0 em \mathbb{R}^n tal que, a menos de subsequência, para algum $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u_0 && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u_0 && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Além disso, para algum $p \in [\delta, g_0]$ temos $u_0 \in S(p, p, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$.

Demonstração: A prova segue como no Corolário 3.6.3 uma vez que a única diferença é falta de limitação uniforme das u'_k s pois $u_k \in S(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M/\rho_k, B_{1/\rho_k})$. No entanto, é necessário apenas que os gradientes sejam uniformemente limitados, o que é garantido uma vez que

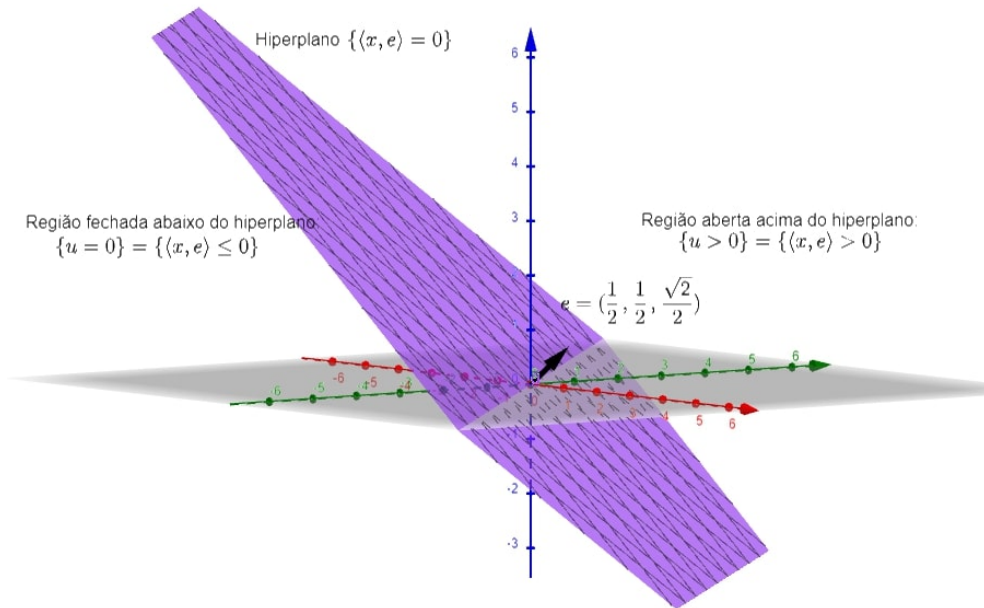
$$\|\nabla u_k\|_{L^\infty(B_r)} = \|\nabla w_k\|_{L^\infty(B_{r\rho_k})}.$$

■

No próximo lema usamos a nomenclatura "Soluções em semi-espaço" para indicar certos tipos de funções. Para ficar mais claro, observe quais seriam $\{u = 0\}$ e $\{u > 0\}$ para uma função da forma $u(x) = \lambda^*(\langle x, e \rangle)^+$ quando λ^* é uma constante positiva.

Veja a ilustração com u definida em \mathbb{R}^3 considerando o vetor $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Figura 6 – Solução em semi-espço



Fonte: elaborada pela autora.

Lema 3.6.3 (Caracterização de soluções em semi-espço) *Seja u_0 como nos lemas e corolários anteriores dessa seção. Suponha que*

$$|\nabla u_0| = \lambda^* \text{ em } \{u_0 > 0\}.$$

Então existe um vetor unitário e tal que

$$u_0(x) = \lambda^* (\langle x, e \rangle)^+$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Sabendo que $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_R)$ para qualquer $R > 0$, temos u g -harmônica em $\{u > 0\}$ e, portanto, $u \in C^{1,\alpha}(\{u > 0\})$.

Fixe um $x_0 \in \{u > 0\}$.

Tome o vetor unitário $e = \frac{\nabla u(x_0)}{|\nabla u(x_0)|}$ e tenha $\frac{\partial u}{\partial e}(x) = \lambda^*$.

O restante da prova segue exatamente como no Lema 4.2 de (DANIELLI; PETROSYAN, 2006) para o p -laplaciano, haja visto que pelas hipóteses em u , nossa matriz uniformemente elíptica será da forma $a_{ij}(x) = c(\delta, g_0)u_{xi}u_{xj} + \delta_{ij}$, assim como para o p -laplaciano temos $a_{ij}(x) = (p-2)u_{xi}u_{xj} + \delta_{ij}$. Isto é, lidamos essencialmente com o mesmo operador.

Considerando a derivada direcional

$$w(x) = \frac{\partial u}{\partial e}(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x)e^i$$

note que w satisfaz a equação da forma divergente uniformemente elíptica

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)w_{x_i})_{x_j} = 0$$

com

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &= a_{ij}^x(u) = \left(\frac{g'(|\nabla u|)}{g(|\nabla u|)} \cdot |\nabla x| - 1 \right) \frac{u_{x_i}u_{x_j}}{|\nabla u|^2} + \delta_{ij} \\ &= cu_{x_i}u_{x_j} + \delta_{ij} \end{aligned}$$

em $\{u > 0\}$, conjunto onde $|\nabla u| = \lambda^* > 0$.

Agora, por construção temos $w(x_0) = \lambda^*$ e para cada $x \in \{u > 0\}$ vale

$$w(x) = \langle \nabla u(x), e \rangle \leq |\nabla u(x)| \cdot |e| = \lambda^*.$$

Isto é,

$$\begin{cases} w \leq \lambda^* \text{ em } \{u > 0\} \\ w(x_0) = \lambda^*. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo obtemos $w \equiv \lambda^*$ na componente conexa de $\{u > 0\}$ que contém x_0 .

Teremos que $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$ para uma direção v ortogonal a e . Conseqüentemente,

$$u(x) = \lambda^* (\langle x, e \rangle - c)^+$$

nessa componente conexa.

Desta forma as únicas possibilidades para u são as seguintes:

1. $u(x) = \lambda^* \langle x, e \rangle^+ \quad \text{em } \mathbb{R}^n$
2. $u(x) = \lambda^* \langle x, e \rangle^+ + \lambda^* (a - \langle x, e \rangle)^+ \text{ em } \mathbb{R}^n.$

Mostremos que o segundo caso contraria o fato de $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$.

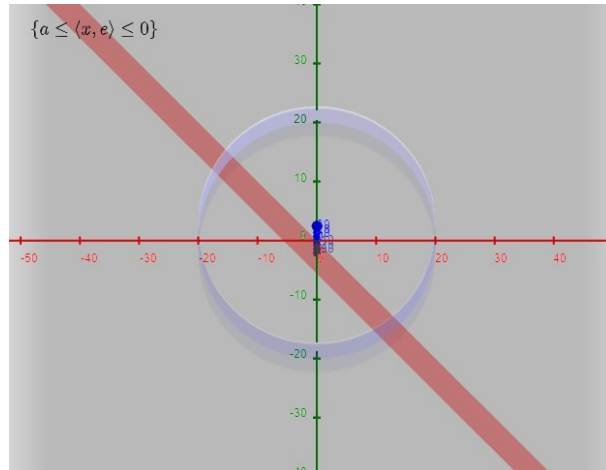
De fato, para o segundo caso perceba que $\{u = 0\}$ é o conjunto

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n; a \leq \langle x, e \rangle \leq 0\}.$$

Como ilustrado nas figuras abaixo, conseguimos colocar $\{u = 0\} \cap B_R$ em um bloco de arestas medindo $-a, 2R, \dots, 2R$, então para $C := -a2^{n-1}$ temos

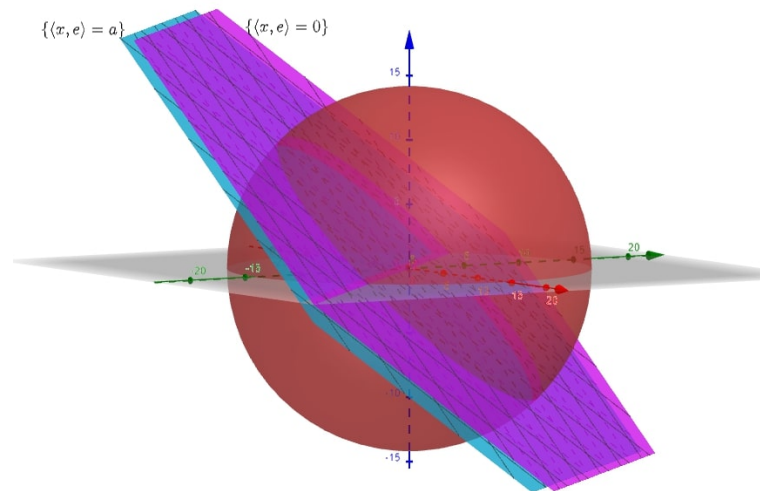
$$|\{u = 0\} \cap B_R| \leq CR^{n-1},$$

Figura 7 – Ilustração de $\{a \leq \langle x, e \rangle \leq 0\}$ em \mathbb{R}^2



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 8 – Ilustração de $\{a \leq \langle x, e \rangle \leq 0\}$ em \mathbb{R}^3



Fonte: elaborada pela autora.

enquanto pela propriedade da densidade para minimizantes devemos ter

$$c R^n \leq |\{u = 0\} \cap B_R|.$$

O que gera uma contradição para R suficientemente grande. Portanto,

$$u(x) = \lambda^* \langle x, e \rangle^+.$$

■

Lembremos que a observação 3.1.2 sobre scaling $u_{\rho, x_0}(x) = \frac{u(x_0 + \rho x)}{\rho}$ nos dá

$$u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1) \Leftrightarrow u_{\rho, x_0} \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M/\rho, B_{\frac{1}{\rho}}(-x_0)).$$

Com isso e os resultados dessa seção podemos enunciar condições que garantem que o limite de blow-up seja uma solução de semi-espaço.

Lema 3.6.4 *Sejam u_k como no Lema 3.6.1 ou Corolário 3.6.1. Suponha que para uma sequência $\varepsilon_k \rightarrow 0$ temos*

- (i) $|\nabla u_k| \leq \lambda^* + \varepsilon_k$ em B_{R_k}
- (ii) para todo $0 < r < R_k$

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{u_k > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] dx \leq \varepsilon_k,$$

$$\text{onde } H(\lambda^*) = \lambda^* g(\lambda^*) - G(\lambda^*) = \lambda^*.$$

Então existe um vetor unitário e tal que sobre uma subsequência

$$u_k \rightarrow \lambda^* \langle x, e \rangle^+ \text{ em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Já sabemos que existe uma função u Lipschitz contínua em \mathbb{R}^n tal que para $\delta \in (0, 1)$ tem-se

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

além de $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_R)$ para todo $R > 0$.

Concluimos a prova se mostrarmos que para algum vetor unitário e vale

$$u(x) = \lambda^* \langle x, e \rangle^+.$$

Por outro lado, o Lema 3.6.3 garante isso caso $|\nabla u| = \lambda^*$ q.t.p. em $\{u > 0\}$.

Mostremos que $|\nabla u| = \lambda^*$ em $\{u > 0\}$ usando as condições (i), (ii) e a convergência $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ q.t.p. em \mathbb{R}^n .

Basta mostramos que para todo $r > 0$ temos

$$\int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx = 0 \tag{3.42}$$

visto que a continuidade de H , $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ e $|\nabla u_k| \leq \lambda^* + \varepsilon_k$ nos dão

$$H(|\nabla u|) = \lim_x H(|\nabla u_k|) \leq H(\lambda^*), \text{ q.t.p. em } B_r,$$

além de $H'(t) = tg'(t) > 0$ implica em $H(t) = tg(t) - G(t)$ ser estritamente crescente.

Para provar (3.42) note que para quase todo ponto de $\{u > 0\}$ vale

$$[H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] \cdot \chi_{\{u_k > 0\}} \rightarrow H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)$$

além de se tratar de uma sequência uniformemente limitada em B_r .

Pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx = \lim_k \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] \cdot \chi_{\{u_k > 0\}} dx. \quad (3.43)$$

Mas notemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_r \cap \{u_k > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] dx &= \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] \cdot \chi_{\{u_k > 0\}} dx \\ &\quad + \int_{B_r \cap \{u = 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] \cdot \chi_{\{u_k > 0\}} dx \end{aligned}$$

onde por (3.40) da prova do Lema 3.6.1 temos que para quase todo $x \in \{u = 0\}$ existe $s \ll 1$ tal que para $k \gg 1$ tem-se $u_k \equiv 0$ em $B_s(x)$ e, portanto,

$$[H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] \cdot \chi_{\{u_k > 0\}} = 0 \text{ em } B_s(x).$$

Por isso, (ii) e (3.43) vem

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_k \int_{B_r \cap \{u_k > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] dx \\ &= \limsup_k \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)] \cdot \chi_{\{u_k > 0\}} dx \\ &= \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx. \end{aligned}$$

Lembrando que $H(\lambda^*) - H(|\nabla u|) \geq 0$ obtemos

$$0 \leq \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq 0.$$

■

Similarmente, temos para o contexto de classes o seguinte lema.

Lema 3.6.5 *Sejam u_k como no Lema 3.6.2, Corolário 3.6.2, Corolário 3.6.3 ou Corolário 3.6.4 e suponha que para uma sequência $\varepsilon_k \rightarrow 0$ temos*

(i) $|\nabla u_k| \leq \lambda^* + \varepsilon_k$ em B_{R_k}

(ii) para todo $0 < r < R_k$

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{u_k > 0\}} [H_k(\lambda_k^*) - H_k(|\nabla u_k|)] dx \leq \varepsilon_k.$$

onde $H_k(\lambda_k^*) = \lambda_k^* g_k(\lambda_k^*) - G_k(\lambda_k^*) = \lambda$ e G_k é a N -função associada à u_k pelo problema de otimização.

Então existe um vetor unitário e e uma constante positiva λ^* tais que, sobre uma subsequência, $\lambda_k^* \rightarrow \lambda^*$ e

$$u_k \rightarrow \lambda^* \langle x, e \rangle^+ \text{ em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Assim como no Lema 3.6.4 o problema se reduz a provar que a função u obtida pelas convergências

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \\ \nabla u_k &\rightarrow \nabla u && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

satisfaz $|\nabla u| = \lambda^*$ em quase todo ponto de \mathbb{R}^n para podermos invocar o Lema 3.6.3.

Agora, usamos CTD para aplicar o Teorema 2.1.4 e obter uma $G \in G(\delta, g_0)$ tal que, a menos de subsequência, G_k converge para G em norma C^1 sobre compactos de $[0, \infty)$. Em particular, $G_k \rightarrow G, g_k \rightarrow k$ e, conseqüentemente, $H_k \rightarrow H$ uniformemente sobre compactos de $[0, \infty)$, para $H(t) = tg(t) - G(t)$.

Sobre a convergência $\lambda_k^* \rightarrow \lambda^*$, note inicialmente que $\{\lambda_k^*\}$ é limitada. Caso contrário, a menos de subsequência temos $\lambda_k^* \rightarrow \infty$. Assim, dado $A > 0$ existiria $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica em $\lambda_k^* > A$. Por outro lado, $H_k \rightarrow H$ e cada H_k é crescente. Então

$$\lambda = H_k(\lambda_k^*) \geq \lim_k H_k(A) = H(A) \Rightarrow H \text{ limitada por } \lambda.$$

Que é um absurdo.

Sendo limitada, existe subsequência convergente para um $\lambda^* \in \mathbb{R}$. Para essa subsequência vale $H_k(\lambda_k^*) \rightarrow H(\lambda^*)$, onde $H_k(\lambda_k^*) \equiv \lambda$. Logo, $H(\lambda^*) = \lambda$, em particular, $\lambda^* > 0$.

O restante segue como no Lema 3.6.4 escrevendo a sequência $[H_k(\lambda_k^*) - H_k(|\nabla u_k|)]$ ao invés de $[H(\lambda^*) - H(|\nabla u_k|)]$ notando também que $H_k(\lambda_k^*) = H(\lambda^*) = \lambda$. ■

4 REGULARIDADE TOTAL DA FRONTEIRA LIVRE

4.1 Regularidade total da fronteira livre

A prova do resultado principal segue por três lemas. Primeiro, provamos que qualquer minimizante absoluto está suficientemente próximo de uma solução de semi-espço em uma pequena vizinhança da origem.

Lema 4.1.1 *Sejam $n = 2$, $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ e $0 < \delta^* < \delta \leq g_0 < g_0^* < \infty$.*

Então, se $\delta \geq 1$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq 0.$$

Se $\delta \in (0, 1)$ então existem constantes positivas $C^ = C^*(n, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, M)$ e $\gamma = \gamma(\delta)$ tais que*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq C^* \gamma,$$

com $\gamma \rightarrow 0$ quando $\delta \nearrow 1$. Em particular, ambas as desigualdades são uniformes no sentido que para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_0 = r_0(\varepsilon, \delta) > 0$ tal que para todo $0 < r < r_0$

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq C^* \gamma + \varepsilon,$$

assumindo $\gamma = 0$ para o caso $\delta \geq 1$.

Demonstração: Seja G a N-função na qual u minimiza o operador $J = J_G$.

Considerando $0 \leq \psi \in C_0^\infty(B_1)$ e $\varepsilon > 0$, claramente $u_\varepsilon = \max\{u - \varepsilon\psi, 0\}$ é uma função admissível. Em particular,

$$\int_{B_1} G(|\nabla u|) dx + \int_{\{u > 0\}} \lambda dx \leq \int_{B_1} G(|\nabla u_\varepsilon|) dx + \int_{\{u - \varepsilon\psi > 0\}} \lambda dx.$$

Portanto, pela desigualdade acima, convexidade de G e $\Delta_g u = 0$ em $\{u > 0\}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} \lambda dx &\leq \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} G(|\nabla u_\varepsilon|) dx - \int_{B_1} G(|\nabla u|) dx \\
&= - \int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} G(|\nabla u|) dx + \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} [G(|\nabla u_\varepsilon|) - G(|\nabla u|)] dx \\
&\leq - \int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} G(|\nabla u|) dx - \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} \frac{g(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla u - \nabla u_\varepsilon \rangle dx \\
&\leq - \int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} G(|\nabla u|) dx - \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} \frac{g(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla(\varepsilon \psi) \rangle dx + \\
&\quad + \int_{B_1} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \langle \nabla u, \nabla(\min\{\varepsilon \psi, u\}) \rangle dx \\
&\leq \int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} H(|\nabla u|) dx - \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} \left[\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u - \frac{g(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} \nabla u_\varepsilon \right] \cdot \nabla(\varepsilon \psi) dx
\end{aligned}$$

Desde que $\lambda = H(\lambda^*)$ obtemos

$$\int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} \left[\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u - \frac{g(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} \nabla u_\varepsilon \right] \cdot \nabla(\varepsilon \psi) dx \quad (4.1)$$

Prosseguimos com a prova dividindo-a em dois casos.

Caso 1: $\delta \geq 1$.

Por (3.9) do Teorema (3.2.2) existe um $C = C(n, \delta^*, g_0^*, \lambda, \eta, M) > 0$ tal que

$$u \leq Cr \text{ em } B_r, \quad 0 < r < \frac{1}{2}.$$

Portanto, fixando $R \in (0, 1/2]$, se escolhermos $\varepsilon = Cr$ e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{em } B_r, \\ \frac{\log\left(\frac{R}{|x|}\right)}{\log\left(\frac{R}{r}\right)} & \text{em } B_R \setminus B_r, \\ 0 & \text{em } B_1 \setminus B_R, \end{cases}$$

existe $C_* = C_*(n, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, M) \geq 0$ onde

$$\max\{|\nabla u_\varepsilon|, |\nabla(\varepsilon \psi)|\} \leq C_* \text{ em } B_{\frac{1}{2}},$$

uma vez que ε e ∇u são uniformemente limitados e $\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{|x| \log \frac{R}{r}} - \frac{r}{R} \frac{\log \frac{R}{|x|}}{\left(\log \frac{R}{r}\right)^2}$.

Observe ainda que em B_r temos $\psi = 1$ e $u \leq \varepsilon = Cr$. Então

$$\{0 < u \leq \varepsilon \psi\} \cap B_r = \{0 < u \leq Cr\} \cap B_r = B_r \cap \{u > 0\}.$$

Assim, combinando (2.6) do Lema 2.1.6, (4.1) e (g-1) do Lema 2.1.5 vem

$$\begin{aligned}
\int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx &= \int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \\
&\leq C_0 \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} \frac{g(|\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|} |\nabla(\varepsilon \psi)|^2 dx \\
&\leq C_0 K g(1) \int_{\{u > \varepsilon K \psi\}} |\nabla(\varepsilon \psi)|^2 dx \\
&\leq C_1 \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} |\nabla(\varepsilon \psi)|^2 dx
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $K = \max \left\{ (C + C_*)^{\delta-1}, (C + C_*)^{g_0-1} \right\}$, $C_0 = C_0(\delta^*, g_0^*)$ e $C_1 = C_1(n, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, M)$ são constantes positivas.

Aplicando lim sup em (4.2) temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx &\leq C_1 \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} |\nabla(\varepsilon \psi)|^2 dx \\
&\leq C_2 \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(\log(\frac{R}{r}))^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

tomando $C_2 = 9C_1 |B_1|$.

Caso 2: $\delta \in (0, 1)$.

Consideremos novamente $C > 0$ tal que $u \leq Cr$ em B_r para $0 < r < \frac{1}{2}$ e $\varepsilon = Cr$.

Usando a estimativa (4.1) temos que para qualquer $\psi \in C_0^\infty(B_1)$ vale

$$\int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} \left[\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u - \frac{g(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} \nabla u_\varepsilon \right] \cdot \nabla(\varepsilon \psi) dx$$

Por (2.7)

$$\left| \frac{g(|\xi|)}{|\xi|} \xi - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|} \cdot \eta \right| \leq C \cdot g(1) \cdot \max \left\{ 1, (|\xi| + |\eta|)^{g_0 - \delta} \right\} \cdot |\xi - \eta|^\delta$$

do Lema 2.1.6 vem

$$\begin{aligned}
\int_{\{0 < u \leq \varepsilon \psi\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx &\leq \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} \left[\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u - \frac{g(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} \nabla u_\varepsilon \right] \cdot \nabla(\varepsilon \psi) dx \\
&\leq c(n, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, M) \int_{\{u > \varepsilon \psi\}} r^{1+\delta} |\nabla \psi|^{1+\delta} dx
\end{aligned}$$

caso $|\nabla u|$ e $|\nabla u_\varepsilon|$ sejam uniformemente limitados.

Defina

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{em } B_r, \\ \frac{|x|^\frac{\delta-1}{\delta} - \rho^\frac{\delta-1}{\delta}}{1 - \rho^\frac{\delta-1}{\delta}} & \text{em } B_{\rho r} \setminus B_r, \\ 0 & \text{em } B_1 \setminus B_{\rho r} \end{cases}$$

com $\rho(\delta) > 1$ a ser definido posteriormente, e tenha

$$\begin{aligned} |\nabla\psi| &= \frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \frac{r^{\frac{1-\delta}{\delta}}}{|x|^{1/\delta}} < \frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \\ r^{1+\delta} |\nabla\psi|^{1+\delta} &= \left(\frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \right)^{1+\delta} \left(\frac{r}{|x|} \right)^{\frac{1+\delta}{\delta}} \leq \left(\frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \right)^{1+\delta}. \end{aligned}$$

Então,

$$|\nabla u|, |\nabla u_\varepsilon| \leq C(n, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, M) \text{ em } B_{\frac{1}{2}}.$$

Lembrando que $B_r \cap \{u > 0\} = \{0 < u \leq \varepsilon\psi\}$ temos

$$\begin{aligned} \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx &= \int_{\{0 < u \leq \varepsilon\psi\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \\ &\leq C^* \int_{\{u > \varepsilon\psi\}} r^{1+\delta} |\nabla\psi|^{1+\delta} dx \\ &\leq C^* \left(\frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \right)^{1+\delta} r^2. \end{aligned}$$

Motivados pelo fato de

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \left(\frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \right)^{1+\delta} = \frac{1}{\ln \rho}$$

tomamos $\rho(\delta) = e^{\frac{1}{1-\delta}}$ para definirmos

$$\gamma(\delta) := \left(\frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho(\delta)^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \right)^{1+\delta} = \left(\frac{1-\delta}{\delta (1-e^{-1/\delta})} \right)^{1+\delta}$$

e termos

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq C^* \left(\frac{1-\delta}{\delta \left(1-\rho^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)} \right)^{1+\delta}$$

com $\gamma(\delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \nearrow 1$. ■

Lema 4.1.2 *Sejam $n = 2$ e u minimizante absoluto do operador J_G . Assumindo $\delta \geq 1$ então para qualquer $\sigma > 0$ existe $\rho = \rho(\sigma, \delta, g_0, \lambda, M, G(1)) > 0$ tal que u pertence a classe flatness $F(\sigma, 1; \infty)$ em B_ρ em alguma direção v .*

Demonstração: Suponha que o lema não seja verdadeiro.

Então existe $\sigma > 0$ e sequências $\rho_k \rightarrow 0_+$ e $u_k \in \mathcal{S}(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ tais que u_k não pertence a classe flatness $F(\sigma, 1; \infty)$ em B_{ρ_k} seja qual for a direção v .

Considere o scaling

$$v_k(x) = \frac{u_k(\rho_k x)}{\rho_k}, \quad x \in B_{1/\rho_k}.$$

Dado $R > 0$ para $k \gg 1$ temos v_k definida em B_{R+1} além de

$$\|\nabla v_k\|_{L^\infty(B_R)} = \|\nabla u_k\|_{L^\infty(B_{\rho_k R})} \text{ e } |v_k|_{C^{0,\alpha}(B_R)} = |u_k|_{C^{0,\alpha}(B_{\rho_k R})}$$

Logo, $\{\nabla v_k\}$ e $\{|v_k|_{C^{0,\alpha}}\}$ são uniformemente limitadas em B_R .

Consequentemente, existe subsequência $\{v_k\}$ e $v_0 \in Lip(\mathbb{R}^2)$ tais que

$$\begin{aligned} v_k &\rightarrow v_0 && \text{em } C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2) \\ \nabla v_k &\rightarrow \nabla v_0 && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

Em particular, $v_k \rightarrow v_0$ uniformemente sobre compactos de \mathbb{R}^2 .

Suponhamos, por enquanto, que $v_0(x) = \lambda^* (\langle x, e \rangle)^+$ para algum vetor unitário e .

Por continuidade do produto interno, os pontos $x \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\lambda^* \langle x, e \rangle \leq -\sigma$$

tem densidade 1 sobre o conjunto $\{v_0 = 0\}$. Veja a prova do Lema 3.6.2 e note que para $x \in \{\lambda^* \langle x, e \rangle \leq -\sigma\}$ existe um $r_x > 0$ tal que $v_k \equiv 0$ em $B_{r_x}(x)$. Como o conjunto $A := \overline{B_1} \cap \{\lambda^* \langle x, e \rangle \leq -\sigma\}$ é compacto e $\cup_{x \in A} B_{r_x}(x)$ é cobertura aberta, podemos eleger um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_k \equiv 0$ em A para $k \geq k_0$.

Em particular, $v_k \equiv 0$ em $B_1 \cap \{\lambda^* \langle x, e \rangle \leq -\sigma\}$ para $k \geq k_0$.

Vejamos como isso implica em

$$v_k \in F(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_1 \text{ na direção } v = -(\lambda^* e) \text{ para } k \geq k_0.$$

- (i) $v_k \in \mathcal{S}(\delta, g_0, \eta, \lambda, M/\rho_k, B_1)$ por scaling;
- (ii) $v_k \equiv 0$ em $\{x, -\lambda^* e\} \geq \sigma\} = \{x, v\} \geq \sigma\}$;
- (iii) Quando $\sigma_- = 1$ esta condição é automaticamente verificada por vacuidade uma vez que é imposta sobre um conjunto vazio;
- (iv) $|v_k| \leq \infty$.

No entanto, isso equivale a $u_k \in F(\sigma, 1; \infty)$ em B_{ρ_k} na direção v . De fato,

- (i') $u_k \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_{\rho_k})$;
- (ii') $0 = v_k(x) = \frac{u_k(\rho_k x)}{\rho_k}$ para $\langle x, -\lambda^* e \rangle \geq \sigma$. Escrevendo $y = \rho_k x$ vem $u_k(y) = 0$ quando $\langle y, -\lambda^* e \rangle \geq \sigma \rho_k$
- (iii') Condição verificada por vacuidade;
- (iv') $|u_k| \leq \infty$.

Implicando $u_k \in F(\sigma, 1; \infty)$ em B_{ρ_k} na direção $v = -(\lambda^* e)$, contradizendo a hipótese de contradição.

Para concluirmos a prova mostremos que $v_0(x) = \lambda^*(\langle x, e \rangle)^+$ para algum vetor unitário e . Faremos isso colocando $\{v_k\}$ nas condições da prova do Lema 3.6.5.

- (a) Dado $r > 0$ temos $0 < r \leq \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_k}$ para k suficientemente grande.

Como $v_k \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M/\rho_k, B_{\rho_k})$ aplicando o Corolário 3.2.3 vem

$$|\nabla v_k| \leq \lambda^* + C(r\rho_k)^\alpha \text{ em } B_r,$$

onde C e α dependem de $n, \delta, g_0, \eta, \lambda$ e M .

- (b) Pelo Lema 4.1.1, dado $\varepsilon > 0$ existe $s_0 = s_0(\varepsilon, \delta) > 0$ tal que $s \in (0, s_0)$ e $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ implicam em

$$\frac{1}{s^2} \int_{B_s \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq \varepsilon.$$

Fixado $r > 0$ temos $\rho_k r \in (0, s_0)$ para k suficientemente grande, além de

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{v_k > 0\}} [H_k(\lambda_k^*) - H_k(|\nabla v_k|)] dx = \frac{1}{(r\rho_k)^2} \int_{B_{r\rho_k} \cap \{u_k > 0\}} [H_k(\lambda_k^*) - H_k(|\nabla u_k|)] dx.$$

Então,

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{v_k > 0\}} [H_k(\lambda_k^*) - H_k(|\nabla v_k|)] dx \leq \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon_k \searrow 0$. Para ε_1 existe k_1 tal que

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{v_{k_1} > 0\}} [H_{k_1}(\lambda_{k_1}^*) - H_{k_1}(|\nabla v_{k_1}|)] dx \leq \varepsilon_1.$$

Para ε_2 existe k_2 tal que $k_1 < k_2$ e

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{v_{k_2} > 0\}} [H_{k_2}(\lambda_{k_2}^*) - H_{k_2}(|\nabla v_{k_2}|)] dx \leq \varepsilon_2.$$

Recursivamente, construímos uma subsequência $\{v_{k_i}\}_i$ tal que

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{v_{k_i} > 0\}} [H_{k_i}(\lambda_{k_i}^*) - H_{k_i}(|\nabla v_{k_i}|)] dx \leq \varepsilon_i.$$

Agora use o Lema 3.6.5 para essa subsequência.



Lema 4.1.3 *Sejam $n = 2$, $\delta \in (0, 1)$ e $\sigma > 0$.*

(i) *Para $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ existe $\zeta = \zeta(\sigma, n, \lambda) \in (0, 1)$ tal que se*

$$1 - \zeta < \delta \leq g_0 < 1 + \zeta$$

então $u \in F(\sigma, 1; \infty)$ em B_ρ em alguma direção v e raio $\rho = \rho(\sigma, \eta, \lambda)$.

(ii) *Para $u \in S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ existe $\mu = \mu(\sigma, n, \lambda) \in (0, 1)$ tal que se*

$$1 - \mu < \delta \leq g_0 < \infty$$

então $u \in F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\sigma, 1; \infty)$ em B_ρ em alguma direção v e raio $\rho = \rho(\sigma, g_0, \eta, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Demonstração:

(i) Supondo que não seja verdade, existirão $\sigma > 0$ e sequências

$$\{u_k\}, \{\rho_k\}, \{\delta_k\} \text{ e } \{g_{0k}\}$$

tais que

$$\rho_k \rightarrow 0, \delta_k \nearrow 1, g_{0k} - \delta_k = o(k)$$

e $u_k \in S(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M, B_1)$ mas u_k não pertence a classe flatness $F(\sigma, 1; \infty)$ em B_{ρ_k} seja qual for a direção v .

A fim de repetir o desenho da prova do lema anterior, definimos as funções

$$v_k(x) := \frac{u_k(\rho_k x)}{\rho_k} \text{ em } B_{1/\rho_k}$$

com a intenção de mostrar a existência de um vetor e tal que

$$v_k \rightarrow \lambda^*(\langle x, e \rangle)^+ \tag{4.3}$$

uniformemente sobre compactos de \mathbb{R}^2 e notar que, identicamente ao que foi feito na prova do Lema 4.1.2, teríamos $v_k \in F(\sigma, 1; \infty)$ em B_1 na direção $v = -\lambda^* e$, implicando em $u_k \in F(\sigma, 1; \infty)$ em B_{ρ_k} . Que é uma contradição!

Para obter (4.3) vejamos que v_k estão nas condições da prova do Lema 3.6.5.

De fato, a fim aplicar o Lema 4.1.1 escolheremos $\delta^* = 1/8$ e $g_0^* = 2$ para termos $0 < \delta^* < \delta_k \leq g_0 < g_0^*$ para k suficientemente grande.

(a) Fixado $r > 0$, pelo Corolário 3.2.3 temos para

$$|\nabla v_k| \leq \lambda^* + C(r\rho_k)^\alpha \text{ em } B_r \text{ para } k \gg 1,$$

onde $C = C(n, \eta, \lambda, M)$, visto que $v_k \in S(\delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, M/\rho_k, B_{1/\rho_k})$.

(b) Faça como em (ii) do Lema 4.1.2, observando que como nos interessa o caso $\delta \in (0, 1)$, teremos a estimativa

$$\frac{1}{s^2} \int_{B_s \cap \{u > 0\}} [H(\lambda^*) - H(|\nabla u|)] dx \leq \varepsilon + C^* \gamma_\delta.$$

para $0 < s < s_0(\varepsilon, \delta)$, $C^* = C^*(\eta, \lambda, M) > 0$ e $\gamma_\delta \rightarrow 0$ quando $\delta \nearrow 1$.

Fixando $r > 0$, tomando uma seqüência $\varepsilon_k \searrow 0$ qualquer e definindo $\gamma_k = \gamma(\delta_k)$, assim como anteriormente conseguimos uma subsequência $\{v_{k_i}\}_i$ tal que

$$\frac{1}{r^2} \int_{B_r \cap \{v_{k_i} > 0\}} [H_{k_i}(\lambda_{k_i}^*) - H_{k_i}(|\nabla v_{k_i}|)] dx \leq \varepsilon_i + C^* \gamma_{k_i}.$$

Agora use o Lema 3.6.5 para essa subsequência.

(ii) Teremos as mesmas estimativas notando que a hipótese $g_{ok} - \delta_k = o(k)$ é substituída pelo controle Dini.

■

Teorema 4.1.1 *Sejam $n = 2, \eta \in (0, 1], \lambda > 0$ e $0 < \delta \leq g_0 < \infty$. Considere $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ como na definição 2.1.13. Se $\delta \geq 1$ então a fronteira livre de qualquer $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ é analítica real. Se $\delta \in (0, 1)$ pode ocorrer duas possibilidades:*

(i) *Existe uma constante universal $\zeta = \zeta(\eta, \lambda) \in (0, 1)$ tal que se*

$$1 - \zeta < \delta \leq g_0 < 1 + \zeta,$$

então a fronteira livre de qualquer $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ é analítica real.

(ii) *Existe uma constante pequena $\mu = \mu(g_0, \eta, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (0, 1)$ tal que se*

$$1 - \mu < \delta \leq g_0 < \infty,$$

então a fronteira livre de qualquer $u \in S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ é uma hipersuperfície analítica.

Demonstração: Começemos com o caso $\delta \geq 1$. Sejam $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ e $G \in G(\delta, g_0, \eta)$ associadas pelo problema de otimização.

Pelo Lema 4.1.2 para qualquer $\sigma > 0$ existe $\rho > 0$ universal tal que

$$u \in F(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_\rho \text{ para alguma direção } v.$$

Sejam σ_o, τ_o e β_o como no Teorema 3.5.1. Escolhendo $0 < \sigma < \sigma_o$ e $0 < \rho \leq \tau_o \sigma_o^{\beta_o}$ concluímos que $F(u) \cap B_{\rho/4}$ é uma superfície $C^{1,\alpha}$.

Analicidade de $F(u)$ segue por (KINDERLEHRER *et al.*, 1978).

Agora analisemos as duas possibilidades para o caso $\delta \in (0, 1)$.

(i) Tome ζ e ρ como no Lema 4.1.3 e $\sigma > 0$ para obter

$$u \in F(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_\rho \text{ para alguma direção } v.$$

Usando novamente o Teorema 3.5.1 e (KINDERLEHRER *et al.*, 1978) concluímos que $F(u)$ é analítica.

(ii) Tomamos μ como no Lema 4.1.3, usamos (ii) desse lema, o Teorema 3.5.1 de regularidade flatness e (KINDERLEHRER *et al.*, 1978) e obtemos o desejado. ■

Exemplo 4.1.1 *Por tudo o que já foi comentado é indiscutível que para dimensão $n = 2$ a N -função t^2 implica analiticidade da fronteira livre do seu minimizante.*

Traremos uma família de N -funções não-triviais que também garantem a analiticidade da fronteira livre de seus minimizantes.

Na página 839 de (BRAGA; MOREIRA, 2014) temos o exemplo da N -função

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds$$

definindo $g(t) = t^a \log_c(bt + d)$, com $a, b > 0$ e $c, d > 1$ e obtendo

$$\delta = a \text{ e } g_0 = \max \left\{ a + r, \frac{7}{4} + r \right\} \text{ onde } r = \max \left\{ 1, \frac{1}{\ln d} \right\}.$$

Tome $a = 1$ e tenha $G \in G(1, g_0)$ onde

$$g_0 = \max \left\{ a + r, \frac{7}{4} + r \right\} \text{ e } r = \max \left\{ 1, \frac{1}{\ln d} \right\}$$

para $b > 0$ e $c, d > 1$ escolhidos como desejar.

Pelo fato de $\delta = 1$ o Teorema 4.1.1 nos fornece analiticidade para a fronteira livre do minimizante u do operador J_G . ■

4.2 Resultado da dimensão crítica

Nesta última seção estabelecemos um teorema de existência de uma dimensão crítica $5 \leq n_0 \leq 7$ e uma constante universal $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tal que se $G(t)$ tem parâmetros δ e g_0 ε_0 -próximos de 1 então, para $2 \leq n < n_0$, a fronteira livre é uma hipersuperfície analítica real. Começamos declarando um resultado do tipo Bernstein como na teoria de superfície mínima em (SIMONS, 1967).

Definição 4.2.1 (Propriedades de regularidade total P e $P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$) *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $0 < \eta \leq 1$ e $\lambda > 0$. Diremos que (δ, g_0) satisfaz a propriedade P , e escreveremos $(\delta, g_0) \in P$, quando $G \in G(\delta, g_0, \eta)$ implicar minimizante global de J_G possuir fronteira livre analítica. Analogamente, $(\delta, g_0) \in P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ quando $G \in G_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta)$ implicar em nenhum minimizante global de J_G conter pontos singulares na fronteira livre.*

Lema 4.2.1 (Lema de Bernstein) *Sejam $n \geq 2$, $(\delta, g_0) \in P$ e u é minimizante global de J_G para uma $G \in G(\delta, g_0, \eta)$. Então existe uma direção e tal que*

$$u(x) = \lambda^* \langle x, e \rangle^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Considere u minimizante global de J_G e a sequência de scaling

$$u_k(x) = \frac{u(kx)}{k},$$

que também são minimizantes globais de J_G por (3.38).

Pelo Corolário 3.2.2 temos

$$|\nabla u_k(x)| = |\nabla(kx)| \leq \lambda^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim como nos resultados da seção de blow-up, podemos extrair uma subsequência $\{u_k\}$ que converge em $C_{loc}^{1, \alpha}$ para um minimizante global u_0 com $0 \in F(u_0)$.

Como $(\delta, g_0) \in P$ e a origem é ponto da fronteira livre, existe uma bola $B \subset \{u_0 = 0\}$ tangenciando $F(u_0)$ em $x_0 = 0$. Rotacionando o sistema de coordenadas caso seja necessário, podemos assumir que $B = B_r(re_n)$ para algum $r > 0$.

Isto implica que para qualquer $\sigma > 0$ temos

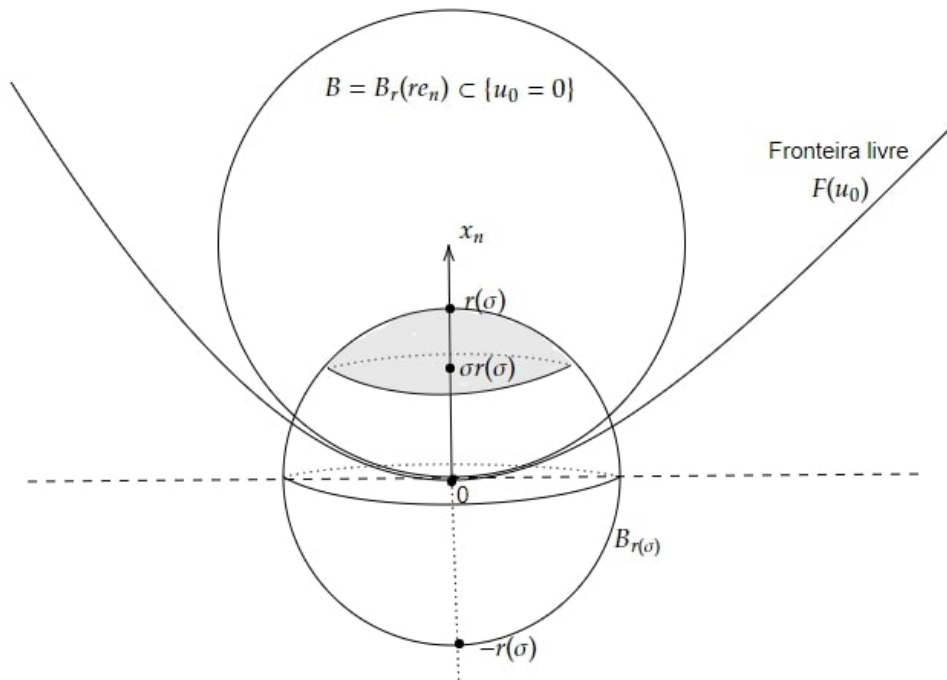
$$u_0 \in F(\sigma, 1; 0) \text{ em } B_{r(\sigma)}$$

escolhendo $r(\sigma)$ suficientemente pequeno.

De fato,

- (i) $u_0 \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M_0, B_{r(\sigma)})$ para todo $r(\sigma)$ por se tratar de um minimizante global;
- (ii) $u_0(x) = 0$ em $\{x_n \geq \sigma r(\sigma)\} \cap B_{r(\sigma)}$ escolhendo $r(\sigma)$ de modo que esse conjunto esteja contíguo em B;
- (iii) $u_0(x) \geq -(x_n + r(\sigma))$ em $\{x_n \leq -r(\sigma)\}$ por vacuidade pois tal conjunto é vazio em $B_{r(\sigma)}$;
- (iv) $|\nabla u_0| \leq \lambda^*$ sempre.

Figura 9 – Analiticidade implicando flatness.



Fonte: elaborada pela autora.

Novamente pela não-degenerescência, assim como foi argumentado em (3.40) do Lema 3.6.1, temos $u_k \equiv 0$ em $\{x_n \geq \sigma r(\sigma)\} \cap B_{r(\sigma)}$ para k suficientemente grande. Daí,

$$u_k \in F(\sigma, 1; 0) \text{ em } B_{r(\sigma)},$$

ou equivalentemente,

$$u \in F(\sigma, 1; 0) \text{ em } B_{kr(\sigma)}.$$

Fixemos um $\theta \in (0, 1)$ e tomemos $\sigma \leq \sigma_\theta$ para σ_θ como no Lema 3.5.1.

Aplicando o lema para $\rho = kr(\sigma)$ com um k fixado obtemos

$$u \in F(\theta\sigma, \theta\sigma; 0) \text{ em } B_{\rho_0}$$

em alguma direção para um raio $C_\theta kr(\sigma) \leq \rho_0 \leq \frac{1}{4}kr(\sigma)$.

Iterando o lema temos

$$u \in F(\theta^l \sigma, \theta^j \sigma; 0) \text{ em } B_{\rho_j}$$

em alguma direção onde a sequências de raios satisfazem

$$C_\theta \rho_j \leq \rho_{j+1} \leq \frac{1}{4} \rho_j.$$

Dado um $R > 0$ tomamos k suficientemente grande de modo que $\rho := k r(\sigma) > R$. Como ρ_j é construída com uma espécie de decomposição de ρ convergindo para zero, para uma certa N -ésima etapa da iteração temos

$$\rho_N \leq R \leq \rho_{N-1}.$$

Escrevendo $\bar{R} = \rho_N$ obtemos que para qualquer $\sigma \leq \sigma_\theta$ e $R > 0$ existe $C_\theta R \leq \bar{R} \leq R$ tal que

$$\begin{aligned} & u \in F(\sigma, \sigma; 0) \text{ em } B_{\bar{R}} \text{ em alguma direção} \\ \Leftrightarrow & u \in F\left(\frac{\sigma}{C_\theta}, \frac{\sigma}{C_\theta}; 0\right) \text{ em } B_{C_\theta \bar{R}} \text{ em alguma direção.} \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade do $\sigma \leq \sigma_\theta$, $F(u)$ é tão flat quanto desejarmos em $B_{C_\theta \bar{R}}$. Portanto, fazendo $\sigma \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ obtemos que u é necessariamente uma solução em semi-espaço. ■

Lema 4.2.2 *Considere as seguintes constantes $0 < \delta^* \leq g_0^* < \infty$, $\lambda > 0$, $\eta \in (0, 1]$ e $2 \leq n \in \mathbb{N}$, e funções $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ como na definição 2.1.13. Então, para qualquer $\sigma > 0$,*

(i) *Se $\delta^* = g_0^*$ e $(\delta^*, \delta^*) \in P$, então existem constantes pequenas e positivas*

$$\zeta_0 = \zeta_0(n, \sigma, \delta^*, \eta, \lambda) \text{ e } r_0 = r_0(n, \sigma, \delta^*, \eta, \lambda)$$

tais que para $u \in S(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ temos

$$u \in F(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_r \text{ para alguma direção } v,$$

previsto que

$$\delta^* - \zeta_0 < \delta \leq g_0 < \delta^* + \zeta_0 \text{ e } 0 < r \leq r_0.$$

(ii) *Se $(\delta^*, g_0^*) \in P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, então existem constantes positivas*

$$\mu_0 = \mu_0(n, \sigma, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ e } r_0 = r_0(n, \sigma, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

tais que para $u \in S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_0, \eta, \lambda, M, B_1)$ temos

$$u \in F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_r \text{ para alguma direção } v,$$

previsto que

$$\delta^* - \mu_0 < \delta \leq g_0 < g_0^* + \mu_0 \text{ e } 0 < r \leq r_0.$$

Demonstração:

(i) Supondo que o resultado não vale, existirão $\sigma > 0$ e sequências

$$\{u_k\}, \delta_k \nearrow \delta^*, g_{0k} \searrow g_0^* \text{ e } \rho_k \rightarrow 0^+$$

tais que $u_k \in S(\delta_k, g_{0k}, \eta, \lambda, M, B_1)$ mas u_k não pertence a classe flatness $F(\sigma, 1; \infty)$ em B_{ρ_k} seja qual for a direção v .

Definindo $v_k(x) := \frac{u_k(\rho_k x)}{\rho_k}$ em B_{1/ρ_k} existe, pelo Corolário 3.6.4, uma função

$$v_0 \in Lip(\mathbb{R}^n) \cap S(\delta^*, \delta^*, \eta, \lambda, M, \mathbb{R}^n)$$

tal que $v_k \rightarrow v_0$ em $C_{loc}^{0, \alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Pelo Lema 4.2.1 existe vetor $e \in \mathbb{R}^n$ tal que $v_0(x) = \lambda^*(\langle x, e \rangle)^+$.

Fazendo como na prova do Lema 4.1.2 teremos $v_k \in F(\sigma, 1; \infty)$ em B_1 na direção $v = -\lambda^* e$.

Absurdo, pois isto implica em $u_k \in F(\sigma, 1; \infty)$ em B_{ρ_k} na direção v .

(ii) Mesma prova de (i) tomando $\delta_k \nearrow \delta^*, g_{0k} \searrow g_0^*$, escrevendo $\delta = \delta^*/2$ e $g_0 = 2g_0^*$ para aplicar o Corolário 3.6.2 ao invés do Corolário 3.6.4 usado em (i). ■

Teorema 4.2.1 *Considere as constantes $2 \leq n \in \mathbb{N}, 0 < \delta^* \leq g_0^* < \infty, \lambda > 0$ e $\eta \in (0, 1]$. Então,*

(i) *Se $\delta^* = g_0^*$ e $(\delta^*, \delta^*) \in P$, então existe uma constante $\zeta_0 = \zeta_0(n, \delta^*, \eta, \lambda) > 0$ tal que se*

$$\delta^* - \zeta_0 < \delta \leq g_0 < \delta^* + \zeta_0$$

então $(\delta, g_0) \in P$.

(ii) *Se $(\delta^*, g_0^*) \in P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, então existe constante universal $\mu_0 = \mu_0(n, \delta^*, g_0^*, \eta, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ tal que*

$$\delta^* - \mu_0 < \delta \leq g_0 < g_0^* + \mu_0$$

implica em $(\delta, g_0) \in P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$.

Demonstração:

(i) Sejam β , σ_o e τ_o como no Teorema 3.5.1 e escolha um $0 < \sigma \leq \sigma_o$.

Agora sejam ζ_o e r_o como no Lema 4.2.2. Defina $r_1 = \min\{r_o, \tau_o \sigma_o^{\beta_o}\}$.

Pelo Lema 4.2.2, para $u \in S(\delta, g_o, \eta, \lambda, M, B_1)$ tal que

$$\delta^* - \zeta_o < \delta \leq g_o < \delta^* + \zeta_o \text{ e } 0 < r \leq r_1$$

temos

$$u \in F(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_r \text{ para alguma direção } v.$$

Pelo Teorema 3.5.1 obtemos $F(u) \cap B_{\frac{r_1}{4}}$ superfície $C^{1,\alpha}$.

Pelos resultados de (KINDERLEHRER *et al.*, 1978) e propriedades de scaling concluímos que $(\delta, g_o) \in P$.

(ii) Aqui invocamos (ii) do Lema 4.2.2 e o Teorema 3.5.1 para obter as constantes μ_o e r_o que implicam em

$$u \in F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\sigma, 1; \infty) \text{ em } B_r \text{ para alguma direção } v$$

sempre que $u \in S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\delta, g_o, \eta, \lambda, M, B_1)$, $\delta^* - \mu_o < \delta \leq g_o < g_o^* + \mu_o$ e $0 < r \leq r_1 := \min\{r_o, \tau_o \sigma_o^{\beta_o}\}$.

Novamente pelo Teorema 3.5.1 e (KINDERLEHRER *et al.*, 1978) obtemos $(\delta, g_o) \in P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$. ■

Observamos que se $G(t) = t^p$ para algum $1 < p < \infty$, então Q_g satisfaz trivialmente (CTD), em particular, Teorema 4.1.1 e Teorema 4.2.1 estendem os resultados obtidos em (DANIELLI; PETROSYAN, 2006) e (PETROSYAN, 2008) para equações elípticas singulares/-degeneradas mais gerais.

Corolário 4.2.1 *Seja n_0 a dimensão crítica para $G_0(t) = t^2$. Considere a dimensão $2 \leq n < n_0$ e u minimizante de J . Então existe uma constante universal $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, G(1), \lambda) \in (0, 1)$ tal que se $1 - \varepsilon_0 < \delta \leq g_o < 1 + \varepsilon_0$ então a fronteira livre $F(u)$ é uma hipersuperfície analítica.*

Demonstração: Tome $\delta^* = g_o^* = 1$ e $\eta = \min\left\{G(1), \frac{1}{G(1)}\right\}$.

Pelo corolário 1.3 de (PETROSYAN, 2008) temos $(1, 1) \in P$.

Assim, pelo Teorema 4.2.1 existe $\zeta_o = \zeta_o(n, \delta^*, \eta, \lambda) > 0$ tal que se

$$1 - \zeta_o < \delta \leq g_o < 1 + \zeta_o$$

então $(\delta, g_0) \in P$.

Temos o desejado escrevendo $\varepsilon_0 = \zeta_0$.

■

5 CONCLUSÃO

Concluimos que todos os objetivos propostos para esse trabalho de tese foram alcançados. Primeiramente nos propomos a estender resultados de regularidade total da fronteira livre para problemas sobredeterminados do tipo-Bernoulli em espaços de Orlicz. Mostramos que para dimensão $n = 2$ não há pontos singulares na fronteira livre de minimizantes do funcional Alt-Caffarelli para N -funções G adequadas. Seguimos, provando que existe uma dimensão crítica $5 \leq n_0 \leq 7$ e uma constante universal $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tal que se $G(t)$ é ε_0 -próxima de t^2 então, para $2 \leq n < n_0$, $F(u)$ é uma hipersuperfície analítica real.

Observando como o estudo da regularidade total da fronteira livre para o operador Laplaciano progrediu é natural que os nossos projetos futuros sejam investigações a respeito de condições para obter analiticidade, em dimensões 3 e 4, da fronteira livre dos minimizantes do operador aqui estudo.

REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. **Sobolev spaces**. [S. l.]: Elsevier, 2003.

BRAGA, J. E. M. On the lipschitz regularity and asymptotic behaviour of the free boundary for classes of minima of inhomogeneous two-phase Alt-Caffarelli functionals in Orlicz spaces. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)**, Germany, v. 197, n. 6, p. 1885–1921, 2018.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, D. R. Uniform Lipschitz regularity for classes of minimizers in two phase free boundary problems in Orlicz spaces with small density on the negative phase. **Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire**, France, v. 31, n. 4, p. 823–850, 2014.

CAFFARELLI, L. A.; ALT, H. W. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Deutschland, v. 1981, n. 325, p. 105-144, 1981.

CAFFARELLI, L. A.; JERISON, D.; KENIG, C. E. Global energy minimizers for free boundary problems and full regularity in three dimensions. *In*: BAHRI, Abbas; KLAINERMAN, Sergiu; VOGELIUS, Michael (ed.). **Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology**: proceedings of the Brezis-Browder Conference, Noncompact Variational Problems and General Relativity, October 14-18, 2001, Rutgers, the State University of New Jersey, New Brunswick, NJ. Providence, RI: American Mathematical Society, 2004. (Contemporary Mathematics, v. 350). p. 83–98.

DANIELLI, D.; PETROSYAN, A. A minimum problem with free boundary for a degenerate quasilinear operator. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Germany, v. 23, n. 1, p. 97–124, 2005.

DANIELLI, D.; PETROSYAN, A. Full regularity of the free boundary in a Bernoulli-type problem in two dimensions. **Mathematical Research Letters**, United States, v. 13, n. 4, p. 667–681, 2006.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Providence, R.I: American Mathematical Soc., 2010. v. 19.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.; GILBARG, D.; TRUDINGER, N. **Elliptic partial differential equations of second order**. [S. l.]: Springer, 1977. v. 224.

JERISON, D.; SAVIN, O. Some remarks on stability of cones for the one-phase free boundary problem. **Geometric and Functional Analysis**, Switzerland, v. 25, n. 4, p. 1240–1257, 2015.

KINDERLEHRER, D.; NIRENBERG, L.; SPRUCK, J. Regularity in elliptic free boundary problems I. **Journal d'Analyse Mathématique**, [Israel], v. 34, n. 1, p. 86–119, 1978.

LIEBERMAN, G. M. The natural generalization of the natural conditions of ladyzhenskaya and urall'tseva for elliptic equations. **Communications in Partial Differential Equations**, United States, v. 16, n. 2-3, p. 311–361, 1991.

MARTÍNEZ, S.; WOLANSKI, N. A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces. **Advances in Mathematics**, [Belgium], v. 218, n. 6, p. 1914–1971, 2008.

PETROSYAN, A. On the full regularity of the free boundary in a class of variational problems. **Proceedings of the American Mathematical Society**, United States, v. 136, n. 8, p. 2763–2769, 2008.

RIBEIRO, B. H. C. **Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, 2006.

SILVA, D. D.; JERISON, D. A singular energy minimizing free boundary. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 2009, n. 635, p. 1-21, 2009.

SIMONS, J. Minimal cones, plateau's problem, and the Bernstein conjecture. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, United States, v. 58, n. 2, p. 410–411, 1967.

WEISS, G. S. Partial regularity for a minimum problem with free boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, United States, v. 9, n. 2, p. 317–326, 1999.