



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL FREITAS MACHADO

CONTROLE BASEADO EM PREDITOR COM ATENUAÇÃO DE PERTURBAÇÃO
PARA SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO COM ATRASO NA ENTRADA

FORTALEZA

2022

GABRIEL FREITAS MACHADO

CONTROLE BASEADO EM PREDITOR COM ATENUAÇÃO DE PERTURBAÇÃO PARA
SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO COM ATRASO NA ENTRADA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Bismark Claude Torrico.

Coorientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M131c Machado, Gabriel Freitas.

Controle baseado em preditor com atenuação de perturbação para sistemas de tempo discreto com atraso na entrada / Gabriel Freitas Machado. – 2022.
62 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Bismark Claire Torrico.

Coorientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

1. Sistemas de tempo discreto. 2. Observador de estado aumentado. 3. Realimentação baseada em preditor. 4. Atenuação de perturbação. I. Título.

CDD 621.3

GABRIEL FREITAS MACHADO

CONTROLE BASEADO EM PREDITOR COM ATENUAÇÃO DE PERTURBAÇÃO PARA
SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO COM ATRASO NA ENTRADA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Aprovada em: 08 de Dezembro de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bismark Claire Torrico (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Magno Prudêncio de Almeida Filho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Clauson Sales do Nascimento Rios
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram ao longo de minha formação, em especial aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Bismark Claire Torrico e ao Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira por me orientarem em minha dissertação de mestrado.

Aos professores do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará os quais me ofereceram suporte e que, tão atentamente, ouviram minhas questões, dúvidas e conclusões da minha pesquisa durante todo o Curso de Mestrado Acadêmico.

Aos colegas de laboratório, que de alguma forma contribuíram positivamente para o ambiente em que estive durante o Mestrado Acadêmico.

A todos os demais alunos de Doutorado e Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará com os quais eu tive a oportunidade de trocar experiências, de conviver em harmonia e de compartilhar momentos de alegria.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento da pesquisa de mestrado via bolsa de estudos.

Em especial, ao meu amigo Roberto Aaron Marques Braga pelo incentivo às investigações, pela parceria nos estudos e pelas várias discussões produtivas acerca de nossas pesquisas e de assuntos fundamentais em Matemática, e à ex-aluna de mestrado Valessa Valentim Viana, pelos conselhos durante a aventura que tem sido buscar a continuidade da minha educação em um Doutorado.

O Mestrado Acadêmico de fato cumpre seu papel em minha educação e vida pessoal, que está na interseção dos descobrimentos, das conquistas e das realizações em minha carreira.

À minha companheira, Juliana Alves Saboia, que tem apoiado minhas decisões, encorajado a busca pelos meus sonhos e comemorado as conquistas ao longo de minha trajetória no Curso de Mestrado Acadêmico.

Aos meus pais, que têm sido fundamentais no suporte aos meus sonhos, aos quais eu especialmente dedico esta dissertação.

"Uma criança não tem dificuldade em acreditar no inacreditável, nem o gênio ou o louco. Somos apenas você e eu, com nossos grandes cérebros e nossos pequenos corações, que duvidamos, pensamos demais e hesitamos."

(Steven Pressfield)

RESUMO

Neste trabalho, uma estrutura de controle baseada em preditor é proposta para sistemas de tempo discreto com atraso na entrada. Esta estratégia permite atenuar completamente perturbações de dinâmica conhecida em regime estacionário a partir da saída do sistema. Para isso, é utilizado um observador de estado aumentado em que considera-se a dinâmica do controlador e um preditor baseado neste observador para estimar o estado do sistema de tempo discreto. A matriz de realimentação das previsões e a matriz de ganho do observador de estado aumentado são calculadas utilizando um procedimento de síntese. Alguns dos resultados propostos recentemente na literatura para controladores baseados em preditor são apresentados de maneira sistemática no texto, onde são estendidas as abordagens para o caso em que não há acesso ao estado do sistema e para o problema de síntese a partir de um resultado da literatura. A estrutura de controle proposta é comparada às técnicas apresentadas, possuindo, em geral, desempenho superior.

Palavras-chave: Sistemas de tempo discreto. Observador de estado aumentado. Realimentação baseada em preditor. Atenuação de perturbação.

ABSTRACT

In this work, a predictor-based control structure is proposed for discrete-time systems with input delay. This strategy allows to completely attenuate disturbances of known dynamics in steady state from the output of the system. For this, an augmented state observer is used in which the controller dynamics is considered and a predictor based on this observer is used to estimate the state of the discrete-time system. The predictor-based feedback matrix and the augmented state observer gain matrix are calculated using a synthesis procedure. Some of the results recently proposed in the literature for predictor-based controllers are presented in a systematic way in the text, where the approaches are extended to the case in which there is no access to the system state and to the synthesis problem based on a result of the literature. The proposed control structure is compared to the presented techniques and has, in general, superior performance.

Keywords: Discrete-time systems. Augmented state observer. Predictor-based feedback. Disturbance attenuation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama de blocos que representa a estrutura de controle proposta neste trabalho.	45
Figura 2 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do erro de predição e sua evolução no tempo. (Exemplo 3)	48
Figura 3 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do estado do sistema e sua evolução no tempo. (Exemplo 3)	49
Figura 4 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do erro de predição e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)	52
Figura 5 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do estado do sistema e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)	53
Figura 6 – Resultado numérico da magnitude da relação saída-perturbação parametrizada na frequência na comparação entre os controladores dinâmicos utilizados no Exemplo 4 e os esquemas preditivos de Léchappé <i>et al.</i> (2015a) e de Wu e Wang (2021).	54
Figura 7 – Resultado numérico da magnitude da relação saída-perturbação parametrizada na frequência para a comparação entre a estrutura de controle dinâmico 2 utilizada no Exemplo 4 e controladores com os esquemas preditivos da literatura.	55
Figura 8 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do erro de predição e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)	56
Figura 9 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do estado do sistema e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)	57

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
$\overline{\mathbb{Z}}_+$	Ortante não-negativo do \mathbb{Z}
\mathbb{Z}_+	Ortante positivo do \mathbb{Z}
$\mathbb{Z}(a, b)$	Conjunto dos números inteiros em um intervalo não-degenerado (a, b)
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	Ortante positivo do \mathbb{R}
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano de dimensão n (com produto interno euclidiano e norma correspondente)
$\mathbb{R}(m, n)$	Espaço das matrizes reais de dimensão $m \times n$
$\mathcal{F}(\mathbb{A}; \mathbb{B})$	Espaço das funções que associam a cada elemento de \mathbb{A} um elemento de \mathbb{B}
x_1, \dots, x_n	Coordenadas do elemento $x \in \mathbb{R}^n$ na base canônica de \mathbb{R}^n
$\ x\ _2$	Norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$, $\ x\ _2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$
$\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$	Produto Cartesiano entre dois conjuntos, $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}; x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}\}$
$\det(M)$	Determinante da matriz M
$\text{posto}(M)$	Posto da matriz M ou dimensão da imagem do operador linear M
$\mathcal{B}(c, r)$	Bola fechada de centro c e raio r
t	Tempo $t \in \mathbb{T}$ em que $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$
$x_i(t)$	Imagem da função $x_i \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R})$ em $t \in \mathbb{T}$
$\dot{x}_i(t)$	Derivada temporal da função $x_i \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R})$ em $t \in \mathbb{T}$
$x(t)$	Imagem da função $x \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$ em $t \in \mathbb{T}$
$\dot{x}(t)$	Derivada temporal da função $x \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$ em $t \in \mathbb{T}$
$\mathcal{L}\{x\}$	Transformada \mathcal{L} da função $x \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$
z	Variável complexa da Transformada \mathcal{L}

$v(u)(t)$	Operador do controle dinâmico aplicado em u em $t \in \mathbb{T}$
Δ	Operador de diferenças
ω	Frequência em radiano por segundo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Métodos de controle para sistemas com atraso	13
1.2	Revisão bibliográfica	14
1.3	Motivação	16
1.4	Objetivos	17
1.5	Contribuições	17
1.6	Trabalhos publicados	18
1.7	Organização do texto	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1	Sistemas dinâmicos	19
2.1.1	<i>Sistemas dinâmicos de tempo contínuo e equações diferenciais</i>	19
2.1.2	<i>Sistemas dinâmicos de tempo discreto e equações a diferenças</i>	20
2.2	Conjuntos e operadores	21
2.2.1	<i>Ponto de equilíbrio</i>	21
2.2.2	<i>Bola fechada de centro c e raio r</i>	21
2.2.3	<i>Operador $v(\cdot)$ do controle dinâmico</i>	22
2.2.4	<i>Operador de diferenças</i>	22
3	CONTROLE BASEADO EM PREDITOR	24
3.1	Formulação do problema	24
3.2	Esquemas preditivos	25
3.2.1	<i>Esquemas preditivos com acesso ao estado do sistema</i>	25
3.2.1.1	<i>Preditor de Artstein (1982) para sistemas de tempo discreto</i>	25
3.2.1.2	<i>Preditor de Léchappé et al. (2015a) para sistemas de tempo discreto</i>	26
3.2.1.3	<i>Preditor de Wu e Wang (2021)</i>	28
3.2.2	<i>Esquemas preditivos com observador de estado</i>	30
3.2.2.1	<i>Preditor de Artstein (1982) com observador de estado para sistemas de tempo discreto</i>	31
3.2.2.2	<i>Preditor de Léchappé et al. (2015b) para sistemas de tempo discreto</i>	32
3.2.2.3	<i>Preditor de Wu e Wang (2021) com observador de estado</i>	33
3.3	Controle com atenuação de perturbação baseado em preditor	33

3.3.1	<i>Observador de estado e de perturbação</i>	34
4	CONTROLE DINÂMICO BASEADO EM PREDITOR COM ATENUA- ÇÃO DE PERTURBAÇÃO	39
4.0.1	<i>Observador de estado aumentado</i>	40
4.0.2	<i>Esquema preditivo para o estado aumentado</i>	40
4.0.3	<i>Síntese da estrutura de controle</i>	41
5	RESULTADOS	46
5.1	Perturbações constantes ou assintoticamente estáveis	46
5.2	Perturbações senoidais	49
5.3	Comentários	57
6	CONCLUSÕES	59
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Em diversas áreas da ciência, como engenharia, biologia e economia, sistemas com atraso são utilizados para modelar sistemas dinâmicos (GU *et al.*, 2003), o que indica também sua importância para a teoria de controle. Esses tipos de sistema ocorrem amplamente devido a várias causas, seja por uma propriedade intrínseca de sua dinâmica ou por conta de uma ação de controle por realimentação. Assim, o desafio de adquirir, criar e executar informações para controlar esses sistemas é comumente enfrentado por uma estrutura de controle (FRIDMAN, 2014).

Em diversas aplicações, o atraso pode tanto ser um fenômeno inevitável em alguns atuadores, devido ao seu funcionamento ou função, quanto uma consequência da transmissão de dados do próprio sistema de controle. Uma influência negativa nas propriedades, como a estabilidade, e no desempenho desses sistemas é o que de fato acontece na prática (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007).

1.1 Métodos de controle para sistemas com atraso

Uma das primeiras estratégias para compensar os efeitos do atraso em um sistema de controle de malha fechada foi elaborada por Smith (1957), esta baseada na ideia de realimentação da saída de um modelo do processo sem atraso. Em sua filosofia, o modelo interno funciona como um preditor em uma abordagem no domínio da frequência incluindo uma realimentação também de um erro entre as saídas do processo e do modelo interno utilizado para as previsões.

Contudo, a eficácia do preditor de Smith é restrita ao controle de sistemas estáveis em malha aberta e, eventualmente, com intuito de contornar essa limitação, durante as décadas de 1970 e 1980 outros dois métodos emergiram, em uma abordagem em espaço de estados. Além disso, outro inconveniente no uso do preditor de Smith é a sua conhecida sensibilidade a incertezas no atraso já estudada por diversos trabalhos na literatura (MICHIELS; NICULESCU, 2003; MICHIELS; NICULESCU, 2014; GRIMHOLT; SKOGESTAD, 2018; MACHADO *et al.*, 2019; SILVA *et al.*, 2020).

O método de Manitius e Olbrot (1979) fundamenta-se em uma análise no domínio do tempo e apresenta uma extensão para as aplicações nos casos de sistemas instáveis em malha aberta e de múltiplas entradas e saídas. Nele, propõe-se a substituição das previsões por um controle linear com o qual a malha fechada se comporta como um sistema livre do atraso e tem

espectro finito após um tempo finito.

O método de redução de Artstein (1982) se concentra na geração das predições por uma representação transformada do espaço de estados, que considera a evolução das predições como um sistema sem atraso.

Essas duas últimas técnicas naturalmente introduziram uma nova área de estudo dentro da teoria de controle de sistemas com atraso, denominada controle baseado em preditor.

A capacidade de compensar longos atrasos é apontada como a principal vantagem do controle baseado em preditor em comparação a outros métodos, como aqueles que envolvem o procedimento de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii (HALE; LUNEL, 1993; GU *et al.*, 2003; SEURET; GOUAISBAUT, 2013; FRIDMAN, 2014; BARREAU *et al.*, 2017), em que toma-se como objetivo o ajuste dos parâmetros de controle para obter a maior robustez possível aos efeitos negativos do atraso. De fato, em se tratando do controle baseado em preditor, um esquema para gerar as predições do estado e o efeito na realimentação destas é uma solução ativa na compensação do atraso, independente de sua magnitude.

Um desenvolvimento detalhado dos fundamentos e uma extensa apresentação dos principais trabalhos para diferentes classes de problemas utilizando essa técnica podem ser encontrados em Deng *et al.* (2022). Portanto, é evidente o crescente interesse desde o início deste século e a grande quantidade de trabalhos recentemente publicados na área de controle baseado em preditor, sendo este um tema relevante e atual para a teoria de controle.

1.2 Revisão bibliográfica

Um dos trabalhos mais citados no tema de controladores baseados em preditor e que, talvez, tenha sido responsável por colocar em destaque os métodos de controle baseado em preditores nos últimos sete anos foi o de (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a). Nele, o esquema de predição utilizado no método de Artstein é revisado e a proposta da inclusão de uma estimativa de perturbações desconhecidas demonstra sucesso em reduzir eficientemente erros de predição para certas classes de perturbação. Sucedendo a essa abordagem, Santos (2016) foca na síntese de controle baseada no preditor de Artstein modificado.

Outro método na literatura, proposto por Sanz *et al.* (2016) utiliza a ideia de não somente prever o estado do sistema a ser controlado, mas também de prover predições da perturbação para uma realimentação compensada. Essa técnica utiliza, como denominado, um diferenciador de rastreamento, utilizado para estimar as perturbações e suas derivadas até

uma determinada ordem, o que leva a resultados significativamente bons para os objetivos de atenuação de perturbações desconhecidas.

Entretanto, estas propostas são dedicadas a sistemas lineares de tempo contínuo e supõe-se, ainda, que o estado do sistema está disponível para medição.

Pode-se argumentar, portanto, que esta última suposição faz com que os métodos possuam uma limitação nas aplicações, uma vez que o acesso ao estado do sistema nem sempre é realizável.

No trabalho de Léchappé *et al.* (2015b), seu esquema de predição para perturbações desconhecidas é, portanto, estendido ao caso de conhecimento parcial do estado do sistema, o que sumariamente corresponde à necessidade de utilização de um observador de estado.

Os trabalhos de Hao *et al.* (2017) e Wu e Wang (2021) generalizam de certa forma, respectivamente, as ideias de Léchappé *et al.* (2015a) e Santos (2016) para sistemas lineares de tempo discreto.

Em especial, o primeiro considera implicações práticas de esquemas de predição e de controle baseado em preditor para perturbações desconhecidas, dotando-se de um observador de estado estendido para dispor não só a estimativa dos estados a partir da saída do sistema, mas também a estimativa das perturbações para consequentemente incluir uma compensação destas na lei de controle.

Verifica-se, portanto, a síntese dos ganhos de realimentação em uma lei de controle anti-perturbação para garantir o objetivo de controlar a saída para o valor desejado.

Wu e Wang (2021) formalizam uma ideia de esquemas de predição, os quais consideram a adição de termos de correção obtidos com base no erro de predição do esquema antecedente, que corresponde à generalização da ideia de Léchappé *et al.* (2015a) para sistemas lineares de tempo discreto e a um novo esquema de predição. Esse trabalho consiste em uma abordagem eficiente para o problema de compensação do atraso com atenuação de algumas classes de perturbações e pode ser considerado de grande importância na área.

Contudo, a abordagem de Léchappé *et al.* (2015a), Léchappé *et al.* (2015b) e Wu e Wang (2021) tem como desvantagem a dinâmica do preditor utilizada para a síntese da realimentação das predições, a qual é afetada diretamente pela característica dinâmica da perturbação.

As estruturas de controle baseadas em preditores que utilizam observador de estado têm como principal desafio o fato de que a dinâmica das predições realizadas com o estado ob-

servado dependem direta ou indiretamente das perturbações. Isso foi verificado por Léchappé *et al.* (2015b), onde as predições utilizando o estado observado dependem do valor suficientemente próximo da origem para o qual o erro do observador converge.

Portanto, esquemas de predição utilizando observador de estado são limitados em desempenho, o que será analisado adiante no texto desta dissertação.

Desse modo, são atrativos esquemas de predição em combinação com observadores de estado e de perturbação, como forma de diminuir os efeitos da perturbação no erro do observador. Em particular, esses observadores consideram a perturbação como um estado adicional no sistema a partir de uma formulação da representação em espaço de estados por meio de alguma manipulação algébrica, a exemplo da utilização de operadores de diferenças.

Com isso, a dinâmica do observador não depende mais da perturbação de maneira direta, mas sim de sua dinâmica, isto é, de suas diferenças finitas. O esquema de controle anti-perturbação de Hao *et al.* (2017) é um exemplo dessa estratégia, para o caso em que o observador de estado e de perturbação depende da diferença da perturbação.

Finalmente, tem-se uma estratégia recentemente publicada por Castillo e García (2021) que apresenta a ideia de observadores de ordem elevada para estimar o estado do sistema, a perturbação e suas derivadas com objetivo de inseri-las na série de *Taylor* para uma reconstrução do sinal de perturbação, estabelecendo um esquema de predição para o estado do sistema.

A ideia é generalizada para sistemas de tempo discreto por Lima *et al.* (2022) onde utiliza-se uma série de *Newton*, do cálculo de diferenças finitas, com o mesmo objetivo.

Essas duas estratégias se provam muito promissoras em fornecer uma predição exata do estado do sistema para uma ampla classe de perturbações e de superar as limitações dos esquemas preditivos publicados nos últimos sete anos.

1.3 Motivação

O interesse na compensação do atraso utilizando o princípio do controle baseado em preditor também leva ao estudo de implicações práticas, por exemplo, como formular predições do estado do sistema a partir da saída, que pode ser medida, e como essa abordagem se alinha à ideia principal do controle baseado em preditor: controlar os sistemas utilizando uma estrutura homóloga sem atraso.

Além disso, o método de redução de Artstein não considera perturbações na elaboração das predições, mesmo aquelas sendo tão comuns na maioria das aplicações de engenharia de

controle. Assim, não surpreendentemente, diversos esquemas de predição têm sido propostos em trabalhos recentes, preocupando-se principalmente em mitigar esse problema.

Do ponto de vista prático, pode-se inferir que o problema de atenuação de perturbações em controladores baseados em preditor é um dos mais investigados em trabalhos publicados em um período contendo os últimos dez anos.

Nesse contexto, as propostas de diversas técnicas de controle baseado em preditor consistem não somente em utilizar esquemas preditivos para o controle de sistemas com atraso, mas também em desenvolver métodos anti-perturbação que possam efetivamente regular as variáveis desejadas.

Portanto, a análise das técnicas de controle baseado em preditor com atenuação de perturbação para sistemas de tempo discreto com atraso é a motivação principal deste trabalho. Faz-se útil para essa finalidade a consideração dos aspectos práticos de aplicação, como o emprego de observadores de estado para obter estimativas do estado do sistema e da perturbação em uma abordagem em espaço de estados no domínio do tempo discreto.

1.4 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral a apresentação e o desenvolvimento sistemáticos das técnicas de controle baseado em preditor para sistemas de tempo discreto com perturbação. Objetivos pontuais são: analisar os esquemas preditivos propostos recentemente na literatura para o caso em que uma medição do estado do sistema não é acessível e analisar a extensão do procedimento de síntese de controladores baseados em preditor para o caso de um controlador dinâmico.

1.5 Contribuições

A principal contribuição deste trabalho está na apresentação de maneira sistemática dos resultados propostos na literatura para controle baseado em esquemas preditivos, na proposta de uma estrutura de controle que considera uma dinâmica na lei de controle para melhorar a capacidade de atenuação de perturbações e no procedimento de síntese do observador utilizado nesta estrutura para diminuir os efeitos das perturbações no esquema preditivo proposto.

1.6 Trabalhos publicados

Durante o Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, o autor desta dissertação participou como autor ou co-autor dos seguintes artigos científicos listados em ordem cronológica:

- 1) Regra de sintonia de controlador PI para processos instáveis com atraso de transporte. XIV IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON) - 2021
- 2) Novo método de sintonia do preditor de Smith filtrado simplificado para processos de primeira ordem. XXIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) - 2022
- 3) Preditor de Smith filtrado simplificado com ação feedforward para processos de primeira ordem. XXIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) - 2022
- 4) Estudo de processos com atraso variável controlados por compensadores PI. XXIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) - 2022
- 5) Controle baseado em observador-preditor com atenuação de perturbações para sistemas de tempo discreto com atraso. XXIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) - 2022

1.7 Organização do texto

O texto está organizado como segue: no Capítulo 1.2 é apresentada uma breve revisão bibliográfica dos principais trabalhos no tema nos últimos sete anos, o Capítulo 2 é dedicado à fundamentação teórica e definições necessárias e utilizadas no texto, o Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento central do trabalho composto por uma análise de esquemas preditivos, por uma síntese de controladores baseados em preditores e pela extensão dos resultados para o caso de controladores dinâmicos, o Capítulo 5 trata de resultados numéricos de simulação e, por fim, as conclusões do trabalho são apresentadas no Capítulo 6.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Naturalmente, é indispensável a apresentação dos principais fundamentos acerca da teoria de sistemas dinâmicos, em especial os de tempo discreto, para situar o leitor acerca da linguagem utilizada e sobre o tipo de problema analisado nesta dissertação. Sendo assim, este capítulo introduz as definições mais gerais relacionadas a essa teoria.

2.1 Sistemas dinâmicos

Uma definição bem detalhada de um sistema dinâmico é encontrada no livro de Haddad e Chellaboina (2011), parafraseada neste trabalho e voltada à sua ideia geral na seguinte definição:

Definição 2.1.1 *Um sistema é uma entidade singular cujas partes são claramente ou vagamente definidas, combinadas e relacionadas entre si através de um conjunto específico de variáveis: os estados do sistema. Ademais, um sistema é dinâmico quando seus estados mudam com o tempo.*

As entradas e as saídas constituem as partes de um sistema relacionadas entre si através dos estados. Os estados são significativamente importantes e responsáveis pela interpretação da ideia de memória em um sistema dinâmico, uma vez que determinam completamente seu comportamento, pois relacionam todas as suas partes. Essa ideia é elucidada quando os estados em um determinado instante de tempo são unicamente definidos pelas entradas neste instante e pelos estados em um tempo inicial.

2.1.1 Sistemas dinâmicos de tempo contínuo e equações diferenciais

Frequentemente, sistemas físicos podem ser modelados por um número finito de equações diferenciais ordinárias acopladas (KHALIL, 1992), na forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t))
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $t \in \mathbb{T}$, com $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ um conjunto totalmente ordenado, $f_i : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $x_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, são os estados e $u_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, são as entradas.

Nota-se que $x_i \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, são as funções definidas pela i -ésima coordenada de $x \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$ no instante $t \in \mathbb{T}$ e, analogamente, $u_i \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$, são as funções definidas pela i -ésima coordenada de $u \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^m)$ no instante $t \in \mathbb{T}$. Então:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Portanto, utiliza-se a notação de vetores para reescrever as equações diferenciais de maneira compacta em uma equação vetorial diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.3)$$

onde $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Naturalmente, tem-se $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Uma equação vetorial para as saídas $y_i: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, é definida por:

$$y(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.4)$$

onde $g: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

Daqui em diante, o vetor cujos elementos são os estados do sistema dinâmico será denominado de estado, poupando o plural, e representado por $x(t)$. O mesmo vale para a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$. Sumariamente, um sistema dinâmico pode ser visto como a estrutura de um modelo matemático constituído de um estado $x(t)$, uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$ e que descreve de certa forma um sistema físico.

2.1.2 Sistemas dinâmicos de tempo discreto e equações a diferenças

Uma outra classe de modelo de um sistema físico é formulado por meio de um número finito de equações a diferenças. A definição desse tipo de sistema dinâmico difere do caso com equações diferenciais em alguns aspectos:

1. A variável de tempo é $t \in \mathbb{T}$, com $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$ um conjunto totalmente ordenado.
2. As equações a diferenças são escritas como:

$$x_i(t+1) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

3. A equação vetorial a diferenças é:

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.6)$$

Em especial, sistemas lineares autônomos de tempo discreto são os objetos de estudo deste trabalho. Um sistema linear autônomo é aquele no qual $f(t, x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t)$, isto é:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.7)$$

onde $A \in \mathbb{R}(n, n)$ e $B \in \mathbb{R}(n, m)$.

Ainda, para a saída, considera-se em um sistema autônomo com $g(t, x(t), u(t)) = Cx(t) + Du(t)$, isto é:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.8)$$

onde $C \in \mathbb{R}(p, n)$ e $D \in \mathbb{R}(p, m)$.

Finalmente, reforça-se que uma excelente definição dos fundamentos de sistemas dinâmicos é apresentada nos livros de Haddad e Chellaboina (2011) e de Khalil (1992).

Na seção seguinte, algumas definições de conjuntos, funcionais e operadores importantes utilizados no texto são enunciadas.

2.2 Conjuntos e operadores

2.2.1 Ponto de equilíbrio

Todo ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é dito um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico quando uma vez que $x(t_0) = x^*$ implica $x(t) = x^* \forall t \in \mathbb{T}(t_0, +\infty)$. Em outras palavras, toda trajetória começando em x^* permanece em x^* .

No caso de sistemas lineares autônomos em que $u(t) = 0 \in \mathbb{R}^m \forall t \in \mathbb{T}$ (diz-se que esses sistemas são não-forçados), tem-se que a origem é um ponto de equilíbrio, pois é a solução da equação:

$$f(x(t)) = Ax(t) = 0, A \in M = \{A \in \mathbb{R}(n, n); \det(A) \neq 0\} \quad (2.9)$$

2.2.2 Bola fechada de centro c e raio r

Define-se o conjunto:

$$\mathcal{B}(c, r) := \{w \in \mathbb{R}^n; \|w - c\| \leq r\} \quad (2.10)$$

como a bola fechada de raio $r \in \mathbb{R}$ positivo centrada em $c \in \mathbb{R}^n$.

2.2.3 Operador $v(\cdot)$ do controle dinâmico

Sejam $t \in \mathbb{T}$, $v \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^m); \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^m))$, $u \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^m)$ e $v(u) \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^m)$, representa-se o operador $v(\cdot)$ no domínio da frequência utilizando a Transformada \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}\{u\} = S(z) \mathcal{Z}\{v(u)\} \quad (2.11)$$

onde $S(z) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^m; \mathbb{C}^m)$ é uma matriz de transferência.

Exemplo 1 Um exemplo do operador $v(u)$ no contexto desta dissertação é:

$$v(u)(t) = u(t) - u(t-1) \quad (2.12)$$

no domínio da frequência:

$$\mathcal{Z}\{u\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{v(u)\} \quad (2.13)$$

Exemplo 2 Um outro exemplo do operador $v(u)$ no contexto desta dissertação é:

$$v(u)(t) = u(t) - 2 \cos(\omega) u(t-1) + u(t-2) \quad (2.14)$$

e no domínio da frequência, tem-se:

$$\mathcal{Z}\{u\} = \frac{z^2}{z^2 - 2 \cos(\omega)z + 1} \mathcal{Z}\{v(u)\} \quad (2.15)$$

Portanto, ao definir um operador $v(\cdot)$, assume-se que existe uma representação em espaço de estados que relaciona o funcional e a entrada de controle e que $v(0) = 0$.

2.2.4 Operador de diferenças

O operador de diferenças $\Delta: \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$ é um operador linear que tem como definição a seguinte regra:

$$\Delta d(t) = d(t+1) - d(t) \quad (2.16)$$

onde $d(t) \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $d_i \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, as funções definidas pela i -ésima coordenada de $d \in \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$. Portanto, é natural definir-se:

$$\Delta d(t) = d(t+1) - d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t+1) - d_1(t) \\ \vdots \\ d_n(t+1) - d_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Além disso, vale:

$$\Delta^{r+1}d(t) = \Delta^r d(t+1) - \Delta^r d(t) \tag{2.18}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$ não-negativo.

3 CONTROLE BASEADO EM PREDITOR

Nesta seção, os principais esquemas de predição e de controle propostos na literatura são revisados e uma breve análise das propriedades de cada estratégia é realizada. Por fim, é apresentado um procedimento de síntese de controle baseado em preditor.

3.1 Formulação do problema

Considera-se o sistema linear autônomo no domínio do tempo discreto representado por:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t-h) + d(t), \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (3.2)$$

$$u(t) = u_0(t), \text{ para } t \in \mathbb{Z}[-h, -1] \quad (3.3)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.4)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $d(t) \in \mathbb{R}^n$ e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ são, respectivamente, o estado, a entrada, a perturbação e a saída do sistema. Ademais, $u_0(t)$ e x_0 definem as condições iniciais desse sistema.

Premissa 3.1 *O atraso $h \in \mathbb{Z}$ é uma constante positiva conhecida.*

Definição 3.1.1 *Uma perturbação é dita constante se, e somente se, $d(t) = d_0 \forall t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, onde $d_0 \in \mathbb{R}^n$ é constante.*

Definição 3.1.2 *Uma perturbação é dita assintoticamente estável se $d(t) = d_0 \forall t \in \mathbb{Z}[T_0, +\infty)$, onde $d_0 \in \mathbb{R}^n$ é constante e $T_0 \in \mathbb{Z}_+$ é suficientemente grande.*

Embora em cada trabalho diferentes representações de um sistema com perturbação sejam utilizadas, neste texto optou-se por adotar o sistema (3.1) para todas as estruturas. Isso ocorre sem perda de generalidade, uma vez que é possível definir $d(t) = B_w w(t)$, onde $w \in \mathbb{R}^q$ e $B_w \in \mathbb{R}(n, q)$.

A predição exata do estado do sistema h -amostras à frente é formulada recursivamente a partir da equação (3.1), o que resulta em:

$$x(t+h) = A^h x(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} B u(j) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j+h) \quad (3.5)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

O calculo do estado em (3.5) não pode ser realizado uma vez que os valores futuros da perturbação são desconhecidos. Por consequência, a ideia central do controle baseado em preditor é utilizar um esquema que pode prever com precisão o estado. Se esse objetivo é alcançado, então pode-se utilizar a dinâmica da predição, que resulta em um sistema sem atraso, para projetar uma lei de controle. Portanto, a eficiência do esquema preditivo é crucial para compensar o atraso na entrada do sistema quando se utiliza o controle baseado em preditor.

3.2 Esquemas preditivos

Nesta seção, três esquemas preditivos de trabalhos da literatura são revisados e é realizada uma simples análise desses esquemas, resultando em algumas proposições. Além disso, é apresentado o caso em que não há acesso ao estado do sistema e um observador de estado é utilizado nos esquemas preditivos.

3.2.1 Esquemas preditivos com acesso ao estado do sistema

3.2.1.1 Preditor de Artstein (1982) para sistemas de tempo discreto

Devido a não considerar perturbações na representação do sistema, o preditor utilizado por Artstein (1982) negligencia o último termo referente à predição exata (3.5) do estado do sistema e é definido por:

$$x_{p0}(t) = A^h x(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} B u(j) \quad (3.6)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

A expressão matemática da dinâmica desse preditor é obtida substituindo (3.1) em (3.6):

$$x_{p0}(t+1) = A x_{p0}(t) + B u(t) + A^h d(t) \quad (3.7)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

O erro de predição é definido como a diferença entre a predição exata (3.5) e o preditor. Para o caso do preditor de Artstein (1982), tem-se que:

$$x(t+h) - x_{p0}(t) = \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j+h) \quad (3.8)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

Proposição 3.2.1 *Em um sistema com perturbação constante ou assintoticamente estável, tem-se que se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p0}(t) = x_*$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_* + \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j+h)$, onde $x_* \in \mathbb{R}^n$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j+h)$ é uma constante diferente de zero.*

Demonstração 1 *Dado que:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p0}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p0}(t-h) = x^*$$

Tomando a equação (3.8) no instante $t-h$ e tomando o limite com $t \rightarrow +\infty$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^* + \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j)$$

Se a perturbação é constante ou assintoticamente estável, tem-se que $d(t) = d_0$ para algum t , então:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^* + (A - I_n)^{-1} (A^h - I_n) d_0$$

□

A conclusão dessa análise é verificada em diversos trabalhos e é generalizada para o problema de estabilização assintótica: em sistemas com perturbação, estabilizar assintoticamente um ponto de equilíbrio x^* utilizando a dinâmica $x_{p0}(t)$ não implica a estabilidade deste mesmo ponto em (3.1) (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015a; WU; WANG, 2021). Isso é particularmente interessante, uma vez que mostra que um controle baseado no preditor de Artstein (1982) não é adequado para o objetivo de atenuação de perturbações.

3.2.1.2 Preditor de Léchappé *et al.* (2015a) para sistemas de tempo discreto

Com o objetivo de melhorar a predição de Artstein (1982), Léchappé *et al.* (2015a) propôs a inclusão indireta de alguma informação da perturbação, ou seja, sem utilizar medições desta. A ideia desse esquema de predição é comparar $x(t)$ a $x_{p0}(t-h)$:

$$x(t) - x_{p0}(t-h) = \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j) \quad (3.9)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$, e utilizar essa comparação como um termo de correção, definindo um novo preditor $x_{p1}(t)$:

$$x_{p1}(t) = x_{p0}(t) + x(t) - x_{p0}(t-h) \quad (3.10)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$.

Desse modo, de maneira indireta alguma informação da perturbação é considerada nesse preditor. Entende-se que, estando $x(t)$ e $x_{p0}(t-h)$ disponíveis em um instante t , o termo não calculável em (3.5) referente às perturbações futuras pode ser aproximado pela diferença $x(t) - x_{p0}(t-h)$.

Uma questão apontada em Léchappé *et al.* (2015a) e Wu e Wang (2021) é a definição de $x_{p1}(t)$ quando $t \in \mathbb{Z}[0, h-1]$, que resulta em utilizar $x_{p0}(t-h) = x_{p0}(0)$ neste intervalo. Portanto, tem-se:

$$x_{p1}(t) = \begin{cases} x_{p0}(t) + x(t) - x_{p0}(t-h), & t \in \mathbb{Z}[h, +\infty) \\ x_{p0}(t) + x(t) - x_{p0}(0), & t \in \mathbb{Z}[0, h-1] \end{cases} \quad (3.11)$$

A dinâmica do preditor de Léchappé *et al.* (2015a) para sistemas de tempo discreto é formulada por:

$$x_{p1}(t+1) = Ax_{p1}(t) + Bu(t) + d(t) + A^h[d(t) - d(t-h)] \quad (3.12)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$.

E o erro de predição associado a esse esquema é dado por:

$$x(t+h) - x_{p1}(t) = \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} [d(j+h) - d(j)] \quad (3.13)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$.

Sendo assim, pode-se enunciar na seguinte proposição a vantagem desse preditor em relação ao de Artstein (1982) ao considerar perturbações constantes e assintoticamente estáveis:

Proposição 3.2.2 *Em um sistema com perturbação constante ou assintoticamente estável, tem-se que se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p1}(t) = x_*$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_*$, onde $x_* \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração 2 *Dado que:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p1}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p1}(t-h) = x^*$$

Tomando a equação (3.8) no instante $t-h$ e tomando o limite com $t \rightarrow +\infty$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^* + \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} [d(j) - d(j-h)]$$

Se a perturbação é constante ou assintoticamente estável, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j-h)$$

então:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

□

Portanto, para o caso de perturbações constantes ou assintoticamente estáveis, a estabilização assintótica de um ponto de equilíbrio x^* de (3.12) implica que este mesmo é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (3.1).

3.2.1.3 Preditor de Wu e Wang (2021)

O trabalho de Wu e Wang (2021) possui, dentre outros objetivos, definir quantos preditores forem necessários para melhorar a predição do estado do sistema com atraso na entrada, utilizando uma generalização da ideia de Léchappé *et al.* (2015a) para sistemas de tempo discreto.

Assim, o estado $x(t)$ é comparado a $x_{p1}(t-h)$, o que resulta em:

$$x(t) - x_{p1}(t-h) = \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} [d(j) - d(j-h)] \quad (3.14)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$.

Essa diferença é utilizada para melhorar a predição $x_{p1}(t)$ incluindo informação da perturbação de forma indireta, definindo um novo preditor $x_{p2}(t)$:

$$x_{p2}(t) = x_{p1}(t) + x(t) - x_{p1}(t-h) \quad (3.15)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$.

Ao substituir $x_{p1}(t)$ e $x_{p1}(t-h)$ em $x_{p2}(t)$, tem-se:

$$x_{p2}(t) = x_{p0}(t) + 2x(t) - x(t-h) - 2x_{p0}(t-h) + x_{p0}(t-2h) \quad (3.16)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$, o que revela que os termos $x_{p0}(t-h)$, $x(t-h)$ e $x_{p0}(t-2h)$ não podem ser calculados para $t \in \mathbb{Z}[0, h-1]$. Ainda, $x_{p0}(t-2h)$ é não-calculável para $t \in \mathbb{Z}[h, 2h-1]$. Assim,

o preditor $x_{p2}(t)$ é bem definido fazendo:

$$x_{p2}(t) = \begin{cases} x_{p0}(t) + 2x(t) - x(t-h) - 2x_{p0}(t-h) + x_{p0}(t-2h), & t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty) \\ x_{p0}(t) + 2x(t) - x(t-h) - 2x_{p0}(t-h) + x_{p0}(0), & t \in \mathbb{Z}[h, 2h-1] \\ x_{p0}(t) + 2x(t) - x(0) - x_{p0}(0), & t \in \mathbb{Z}[0, h-1] \end{cases} \quad (3.17)$$

A dinâmica desse preditor é formulada por:

$$x_{p2}(t+1) = Ax_{p2}(t) + Bu(t) + d(t) + [d(t) - d(t-h)] + A^h [d(t) - 2d(t-h) + d(t-2h)] \quad (3.18)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$.

O erro de predição associado a esse preditor é equacionado como:

$$x(t+h) - x_{p2}(t) = \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j+h) - \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} [2d(j) - d(j-h)] \quad (3.19)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$.

Proposição 3.2.3 *Em um sistema com perturbação constante ou assintoticamente estável, tem-se que se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p2}(t) = x_*$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_*$, onde $x_* \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração 3 *A demonstração é semelhante a da Proposição 3.2.1, basta notar que se a perturbação é constante ou assintoticamente estável, tem-se que:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j-h) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j-2h)$$

Logo, de (3.19) avaliado em $t-h$, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p2}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_{p2}(t-h) = x^* \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

□

A conclusão é a mesma da enunciada para o preditor $x_{p1}(t)$ quanto à estabilização assintótica de um ponto de equilíbrio x^* de (3.1) para o caso de perturbações constantes ou assintoticamente estáveis.

Uma vez que $x_{p1}(t)$ e $x_{p2}(t)$ são formulados utilizando, respectivamente, $x_{p0}(t)$ e $x_{p1}(t)$, uma equação para um esquema de predição $x_{pk}(t)$ pode ser definida como (WU; WANG, 2021):

$$x_{pk}(t) = x_{p(k-1)}(t) + x(t) - x_{p(k-1)}(t-h) \quad (3.20)$$

para $t \in \mathbb{Z}[kh, +\infty)$ e $k \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Esquemas preditivos com observador de estado

Considerando o caso no qual o estado em (3.1) não é acessível, um observador de estado é utilizado com objetivo de estimá-lo a partir da medição da saída (3.2). A garantia de existência de um observador de estado é decorrente da seguinte premissa:

Premissa 3.2 *O sistema (3.1) – (3.2) é observável.*

Nesse caso, considera-se um observador linear:

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t-h) + L[C\hat{x}(t) - y(t)], \quad (3.21)$$

onde $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado estimado e $L \in \mathbb{R}(n, p)$ é a matriz de ganho do observador. Nota-se que é possível, por conta das Premissas 3.1 e 3.2, construir um observador de estado dessa forma.

Definição 3.2.1 *Define-se o erro de observação em um instante t como a diferença entre o estado $x(t)$ do sistema (3.1) e o estado $\hat{x}(t)$ em (3.21), ou seja:*

$$e(t) := x(t) - \hat{x}(t), \quad (3.22)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, onde $e(t) \in \mathbb{R}^n$.

A dinâmica do erro de observação é formulada por:

$$\begin{aligned} e(t+1) &= x(t+1) - \hat{x}(t+1) \\ &= Ae(t) - L[C\hat{x}(t) - y(t)] + d(t) \\ &= (A + LC)e(t) + d(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. A matriz de ganho do observador pode ser definida tal que (3.23) é assintoticamente estável para o caso em que $d(t) = 0, \forall t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

Proposição 3.2.4 *Em um sistema com perturbação constante ou assintoticamente estável, tem-se que a solução de:*

$$e(t+1) = (A + LC)e(t) + d(t) \quad (3.24)$$

onde $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, converge para $\mathcal{B}(0, r) = \{w \in \mathbb{R}^n; \|w\| \leq r\}$, onde: $r = \|(I - (A + LC))^{-1}\| \cdot \|d_0\|$.

Demonstração 4 A solução da equação vetorial à diferenças é dada por:

$$e(t) = (A + LC)^t e(0) + (I - (A + LC))^{-1} d_0$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, onde $(I - (A + LC))$ é invertível. Portanto, a seguinte desigualdade é válida:

$$\|e(t)\| \leq \|(A + LC)^t\| \cdot \|e(0)\| + \|(I - (A + LC))^{-1}\| \cdot \|d_0\|$$

Tomando o limite dessa desigualdade quando $t \rightarrow +\infty$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(A + LC)^t\| \cdot \|e(0)\| + \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(I - (A + LC))^{-1}\| \cdot \|d_0\|$$

Se $A + LC$ é Schur, então:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| \leq \|(I - (A + LC))^{-1}\| \cdot \|d_0\|$$

Portanto, a solução de (3.23) converge para a bola fechada $\mathcal{B}(0, r) = \{w \in \mathbb{R}^n; \|w\| \leq r\}$, onde:

$$r = \|(I_n - (A + LC))^{-1}\| \cdot \|d_0\|.$$

□

A predição exata do estado estimado h -amostras à frente é calculada recursivamente a partir de (3.21), obtida por:

$$\hat{x}(t+h) = A^h \hat{x}(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} B u(j) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} L [C \hat{x}(j+h) - y(j+h)] \quad (3.25)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Assim, ao substituir (3.2) nessa expressão, a parcela

$-\sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} L C e(j+h)$ é incalculável em um instante t , pois depende de valores futuros do erro de observação.

No trabalho de Léchappé *et al.* (2015b), a ideia de Léchappé *et al.* (2015a) é generalizada para o caso em que não há acesso ao estado do sistema (3.21), utilizando um observador do tipo (3.21). Neste trabalho, os preditores de Léchappé *et al.* (2015b) são generalizados para o domínio do tempo discreto.

3.2.2.1 Preditores de Artstein (1982) com observador de estado para sistemas de tempo discreto

O preditor \hat{x}_{p0} é definido como:

$$\hat{x}_{p0}(t) = A^h \hat{x}(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} B u(j) \quad (3.26)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

A equação matemática da dinâmica desse preditor é obtida substituindo (3.21) em (3.26):

$$\hat{x}_{p0}(t+1) = A\hat{x}_{p0}(t) + Bu(t) - A^h L C e(t) \quad (3.27)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

O erro de predição é formulado por:

$$x(t+h) - \hat{x}_{p0}(t) = A^h e(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} d(j+h) \quad (3.28)$$

para $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

3.2.2.2 Preditor de Léchappé et al. (2015b) para sistemas de tempo discreto

Uma maneira de melhorar essa predição é considerar a diferença entre \hat{x} no instante t e \hat{x}_{p0} em $t-h$, dada por:

$$\hat{x}(t) - \hat{x}_{p0}(t-h) = - \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} L C e(j) \quad (3.29)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$, e definir um novo preditor \hat{x}_{p1} :

$$\hat{x}_{p1}(t) = \hat{x}_{p0}(t) + \hat{x}(t) - \hat{x}_{p0}(t-h) \quad (3.30)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$. De maneira indireta, inclui-se alguma informação do erro de observação na predição.

A dinâmica do preditor é formulada por:

$$\hat{x}_{p1}(t+1) = A\hat{x}_{p1}(t) + Bu(t) - L C e(t) - A^h L C [e(t) - e(t-h)] \quad (3.31)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$.

O erro de predição ao utilizar \hat{x}_{p1} como preditor é calculado por:

$$x(t+h) - \hat{x}_{p1}(t) = A^h [e(t) - e(t-h)] + e(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} [d(j+h) - d(j)] \quad (3.32)$$

para $t \in \mathbb{Z}[h, +\infty)$.

A subtração de $\hat{x}_{p1}(t-h)$ de $\hat{x}(t)$ é útil para generalizar o preditor de Wu e Wang (2021) para o uso de observador de estado e é calculada pela diferença:

$$\hat{x}(t) - \hat{x}_{p1}(t-h) = A^h [e(t-h) - e(t-2h)] + e(t-h) + \sum_{j=t-h}^{t-1} A^{t-1-j} [d(j) - d(j-h)] \quad (3.33)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$.

3.2.2.3 Preditor de Wu e Wang (2021) com observador de estado

Neste trabalho, o novo preditor \hat{x}_{p2} é definido:

$$\hat{x}_{p2}(t) = \hat{x}_{p1}(t) + \hat{x}(t) - \hat{x}_{p1}(t-h) \quad (3.34)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$.

A dinâmica de \hat{x}_{p2} é formulada por:

$$\hat{x}_{p2}(t+1) = A\hat{x}_{p2}(t) + Bu(t) - LCe(t) - LC[e(t) - e(t-h)] - A^h LC[e(t) - 2e(t-h) + e(t-2h)] \quad (3.35)$$

para $t \in \mathbb{Z}[2h, +\infty)$.

De maneira similar ao caso com acesso ao estado do sistema, uma equação para um esquema de predição $\hat{x}_{pk}(t)$ pode ser definida como:

$$\hat{x}_{pk}(t) = \hat{x}_{p(k-1)}(t) + \hat{x}(t) - \hat{x}_{p(k-1)}(t-h) \quad (3.36)$$

para $t \in \mathbb{Z}[kh, +\infty)$ e $k \in \mathbb{N}$.

Comparando os preditores com acesso ao estado e com o uso de observador, a relação $d(t) = -LCe(t)$ evidencia a ideia de considerar alguma informação da perturbação no erro de observação.

3.3 Controle com atenuação de perturbação baseado em preditor

Considerando a dinâmica do estado em (3.1) e o operador Δ aplicado a $d(t)$, pode-se escrever o seguinte sistema de equações:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t-h) + d(t) \quad (3.37)$$

$$d(t+1) = d(t) + \Delta d(t)$$

Seja $\bar{x}(t) := [x(t)^\top d(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ definido para escrever o seguinte sistema discreto em espaço de estados:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t-h) + \bar{I}\Delta d(t) \quad (3.38)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \quad (3.39)$$

As matrizes $\bar{A} \in \mathbb{R}(2n, 2n)$, $\bar{B} \in \mathbb{R}(2n, m)$, $\bar{I} \in \mathbb{R}(2n, n)$ e $\bar{C} \in \mathbb{R}(p, 2n)$ são dadas por:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \ 0 \ 0] \quad (3.40)$$

Premissa 3.3 A matriz \bar{A} possui posto completo, isto é:

$$\text{posto}(\bar{A}) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} A & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) = 2n \quad (3.41)$$

Um observador pode ser projetado para estimar o estado de (3.1) e a perturbação $d(t)$ utilizando a representação (3.38)–(3.39). Este observador é denominado observador de estado estendido e foi utilizado por Hao *et al.* (2017) em conjunto com o esquema de predição de Santos (2016) para controle com atenuação de perturbação. Neste trabalho essa ideia é utilizada para os preditores $\hat{x}_{pk}(t)$ apresentados na seção anterior.

3.3.1 Observador de estado e de perturbação

Considera-se a seguinte premissa:

Premissa 3.4 O sistema (3.38) – (3.39) é observável.

Portanto, é possível utilizar um observador de estado para o sistema (3.38), dado pela seguinte equação:

$$\hat{\bar{x}}(t+1) = \bar{A}\hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}u(t-h) + \bar{L}[\bar{C}\hat{\bar{x}}(t) - y(t)] \quad (3.42)$$

onde $\bar{L} \in \mathbb{R}(2n, p)$.

Tem-se que é possível construir um observador de estado dessa forma por conta das Premissas 3.1 e 3.4.

A dinâmica do erro de observação nesse contexto é definida como:

$$\bar{e}(t+1) = (\bar{A} + \bar{L}\bar{C})\bar{e}(t) + \bar{I}\Delta d(t) \quad (3.43)$$

para $t \in \bar{\mathbb{Z}}_+$.

No caso em que $\Delta d(t)$ é nulo, é simples ver que se \bar{L} é calculado de tal forma que a matriz $\bar{A} + \bar{L}\bar{C}$ é *Schur*, então a diferença $\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)$ é nula para todo $t \in \bar{\mathbb{Z}}_+$ suficientemente grande.

A consequência direta disso é que qualquer preditor $\hat{x}_{pk}(t)$ possui a mesma dinâmica do preditor $x_{pk}(t)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pode-se escrever a dinâmica do k -ésimo preditor como:

$$x_{pk}(t+1) = Ax_{pk}(t) + Bu(t) + d(t) + \Phi_k(t) \quad (3.44)$$

onde $\Phi_k(t) \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação na equação vetorial à diferenças que depende do esquema de predição utilizado, por exemplo:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= A^h [d(t) - d(t-h)] \\ \Phi_2(t) &= [d(t) - d(t-h)] + A^h [d(t) - 2d(t-h) + d(t-2h)] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Em particular, para que $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ sejam identicamente nulos é suficiente que a perturbação seja periódica, isto é:

$$d(t) = d\left(t - a\frac{h}{b}\right), \quad a, b \in \mathbb{N} \implies \Phi_{1,2}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (3.46)$$

o que, em geral, pode não ocorrer.

Portanto, é motivador realizar a síntese de uma lei de controle que tenha como objetivo minimizar os efeitos das perturbações na equação vetorial à diferenças. Desse modo, considera-se a lei de controle:

$$u(t) = K\hat{x}_{pk}(t) + F\hat{d}(t) \quad (3.47)$$

onde $K, F \in \mathbb{R}(m, n)$. Evidentemente, essa lei de controle pode ser formulada, pois há acesso, a partir do observador, à estimativa do estado e da perturbação.

Substituindo $u(t)$ na dinâmica do preditor, tem-se:

$$x_{pk}(t+1) = Ax_{pk}(t) + BK\hat{x}_{pk}(t) + BF\hat{d}(t) + d(t) + \Phi_k(t) \quad (3.48)$$

que pode ser reescrito como:

$$x_{pk}(t+1) = (A + BK)x_{pk}(t) - BK[x_{pk}(t) - \hat{x}_{pk}(t)] - BF[d(t) - \hat{d}(t)] + (BF + I)d(t) + \Phi_k(t) \quad (3.49)$$

Dessa forma é possível analisar que a convergência do erro do observador utilizado compreende um dos fatores que afetam a dinâmica do preditor, sendo um outro fator $\Phi_k(t)$, que depende do esquema preditivo utilizado.

Baseado nessa análise, a matriz K é projetada para o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_{pk}(t+1) &= (A+BK)x_{pk}(t) + \Psi_k(t) \\ y_{pk}(t) &= Cx_{pk}(t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde $\Psi_k(t) = -BK[x_{pk}(t) - \hat{x}_{pk}(t)] - BF[d(t) - \hat{d}(t)] + (BF+I)d(t) + \Phi_k(t) \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 3.3.1 *O sistema (3.50) é assintoticamente estável com índice de desempenho $\mu \in \mathbb{R}_+$, tal que:*

$$\|y_{pk}(t)\|_2 \leq \sqrt{\mu} \|\Psi_k(t)\|_2 \quad (3.51)$$

se existem matrizes $P = P^\top > 0 \in \mathbb{R}(n,n)$ e $W \in \mathbb{R}(m,n)$ com as quais a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\begin{bmatrix} P & 0 & PC^\top & PA^\top + W^\top B^\top \\ * & \mu I & 0 & I \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.52)$$

A matriz de realimentação é determinada por $K = WP^{-1}$.

Demonstração 5 *A função de Lyapunov candidata é quadrática e definida por $V(x_{pk}(t)) = x_{pk}(t)^\top P^{-1}x_{pk}(t)$, onde $P = P^\top \in \mathbb{R}(n,n)$.*

Do método de Lyapunov, tem-se que quando as seguintes condições são atendidas:

$$V(x_{pk}(t)) = x_{pk}(t)^\top P^{-1}x_{pk}(t) = 0, \quad x_{pk}(t) = 0 \quad (3.53)$$

$$V(x_{pk}(t)) = x_{pk}(t)^\top P^{-1}x_{pk}(t) > 0, \quad \forall x_{pk}(t) \neq 0 \quad (3.54)$$

$$-V(x_{pk}(t+1)) + V(x_{pk}(t)) > 0, \quad \forall x_{pk}(t) \neq 0 \quad (3.55)$$

a estabilidade assintótica da origem é verificada. Segue que (3.54) se, e somente se, $P^{-1} = (P^{-1})^\top > 0 \implies P = P^\top > 0$.

Da condição de desempenho, tem-se $\mu \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$\|y_{pk}(t)\|_2 \leq \sqrt{\mu} \|\Psi_k(t)\|_2$$

que é reescrito como:

$$-y_{pk}(t)^\top y_{pk}(t) + \Psi_k(t) \mu \Psi_k(t)^\top \geq 0$$

resultando em:

$$-x_{pk}(t)^\top C^\top C x_{pk}(t) + \Psi_k(t) \mu \Psi_k(t)^\top \geq 0$$

em um domínio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{2n}$, onde deve ser verificada a condição (3.55) de estabilidade assintótica.

Logo, se:

$$-V(x_{pk}(t+1)) + V(x_{pk}(t)) - x_{pk}(t)^\top C^\top C x_{pk}(t) + \Psi_k(t)^\top \mu \Psi_k(t) > 0$$

é verificado para todo $[x_{pk}(t)^\top \ \Psi_k(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$, então $-V(x_{pk}(t+1)) + V(x_{pk}(t)) > 0$ é verificada em \mathbb{D} .

Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} & -y_{pk}(t)^\top y_{pk}(t) + \Psi_k(t)^\top \mu \Psi_k(t) > V(x_{pk}(t+1)) - V(x_{pk}(t)) \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} x_{pk}(t)^\top \\ \Psi_k(t)^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -(A+BK)^\top P^{-1}(A+BK) + P^{-1} - C^\top C & -(A+BK)^\top P^{-1} \\ * & \mu I - P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{pk}(t) \\ \Psi_k(t) \end{bmatrix} > 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -(A+BK)^\top P^{-1}(A+BK) + P^{-1} - C^\top C & -(A+BK)^\top P^{-1} \\ * & \mu I - P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \\ & \text{para todo } [x_{pk}(t)^\top \ \Psi_k(t)^\top]^\top \neq 0 \end{aligned}$$

Esta desigualdade pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -(A+BK)^\top P^{-1}(A+BK) + P^{-1} & -(A+BK)^\top P^{-1} \\ * & \mu I - P^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^\top \\ 0 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} > 0 \\ & \Leftrightarrow \text{complemento de Schur} \begin{bmatrix} -(A+BK)^\top P^{-1}(A+BK) + P^{-1} & -(A+BK)^\top P^{-1} & C^\top \\ * & \mu I - P^{-1} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0 \\ & \Leftrightarrow \text{complemento de Schur} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ * & \mu I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (A+BK)^\top P^{-1} \\ P^{-1} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} P^{-1}(A+BK) & P^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^\top \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & I \end{bmatrix} > 0 \\ & \Leftrightarrow \text{complemento de Schur} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & C^\top & (A+BK)^\top P^{-1} \\ * & \mu I & 0 & P^{-1} \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Utilizando uma transformação de congruência na desigualdade acima, tem-se:

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ * & I & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & C^\top & (A+BK)^\top P^{-1} \\ * & \mu I & 0 & P^{-1} \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ * & I & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P \end{bmatrix} > 0$$

$$\implies \begin{bmatrix} P & 0 & PC^\top & PA^\top + PK^\top B^\top \\ * & \mu I & 0 & I_n \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P \end{bmatrix} > 0$$

A mudança de variável $W = KP$, $W \in \mathbb{R}(m, n)$ resulta na seguinte desigualdade:

$$\begin{bmatrix} P & 0 & PC^\top & PA^\top + W^\top B^\top \\ * & \mu I & 0 & I \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P \end{bmatrix} > 0$$

finalizando a demonstração.

□

Nota-se que a matriz F pode ser calculada de maneira que a parcela $(BF + I)d(t)$ seja identicamente nula. Um exemplo disso é quando existir uma pseudo-inversa $B^\dagger \in \mathbb{R}(m, n)$; $B^\dagger = (B^\top B)^{-1} B^\top$, então toma-se $F = -B^\dagger$.

Finalmente, um problema de otimização é formulado tendo como função objetivo o índice de desempenho considerado e como conjunto viável o conjunto de todas as matrizes P e W que satisfazem a desigualdade (3.52):

$$\min_{P>0, W} \mu \tag{3.56}$$

sujeito a (3.52)

Considerando o caso em que $\Delta d(t)$ é não-nulo, existirá sempre um erro entre $x_{pk}(t)$ e $\hat{x}_{pk}(t)$, o que limita o desempenho do controle baseado em preditores que não possuem acesso ao estado de (3.1).

4 CONTROLE DINÂMICO BASEADO EM PREDITOR COM ATENUAÇÃO DE PERTURBAÇÃO

Com base na análise realizada no capítulo anterior, uma abordagem para o caso de leis de controle dinâmico, isto é, um controlador que possui representação em espaço de estados é utilizada neste capítulo.

Considera-se algum operador $v(u)$ como definido no Capítulo 2. Tem-se que uma representação em espaço de estados com $v(u)(t-h)$ como entrada e $u(t-h)$ como saída pode ser formulada como:

$$v(t+1) = Mv(t) + Nv(u)(t-h) \quad (4.1)$$

$$u(t-h) = Qv(t) + Rv(u)(t-h) \quad (4.2)$$

$$v(0) = v_0 \quad (4.3)$$

onde $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$, $M \in \mathbb{R}(n_v, n_v)$, $N \in \mathbb{R}(n_v, m)$, $Q \in \mathbb{R}(m, n_v)$ e $R \in \mathbb{R}(p, m)$.

Associando em série os sistemas (3.1)–(3.2) e (4.1)–(4.2) pode-se obter uma representação em espaço de estados tendo como entrada $v(u)(t)$ e saída $y(t)$ dada por:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ v(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BQ \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BR \\ N \end{bmatrix} v(u)(t-h) + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \quad (4.4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Uma vez definido este sistema, é possível utilizar a ideia introduzida na Subseção 3.2.2 para predições com o uso de um observador de estado. Para isso, define-se o sistema de equações vetoriais como:

$$x(t+1) = Ax(t) + BQv(t) + BRv(u)(t-h) + d(t) \quad (4.6)$$

$$v(t+1) = Mv(t) + Nv(u)(t-h)$$

Tem-se como resultado:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}v(u)(t-h) + \bar{I}d(t), \quad (4.7)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \quad (4.8)$$

onde $\bar{x}(t) := [x(t)^\top \ v(t)^\top]^\top$.

As matrizes $\bar{A} \in \mathbb{R}(n+n_v, n+n_v)$, $\bar{B} \in \mathbb{R}(n+n_v, m)$, $\bar{I} \in \mathbb{R}(n+n_v, n)$ e $\bar{C} \in \mathbb{R}(p, n+n_v)$ são, portanto:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BQ \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} BR \\ N \end{bmatrix}, \quad \bar{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Premissa 4.1 A matriz \bar{A} possui posto completo, isto é:

$$\text{posto}(\bar{A}) = n + n_v \quad (4.10)$$

4.0.1 Observador de estado aumentado

Partindo da seguinte premissa:

Premissa 4.2 O sistema (4.7) – (4.8) é observável.

um observador de estado é considerado:

$$\hat{\bar{x}}(t+1) = \bar{A}\hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}v(u)(t-h) + \bar{L}[\bar{C}\hat{\bar{x}}(t) - y(t)] \quad (4.11)$$

onde $\bar{L} \in \mathbb{R}(n+n_v, p)$.

A dinâmica do erro do observador é dada por:

$$\bar{e}(t+1) = (\bar{A} + \bar{L}\bar{C})\bar{e}(t) + \bar{I}d(t) \quad (4.12)$$

para $t \in \bar{\mathbb{Z}}_+$, onde $\bar{e}(t) \in \mathbb{R}^{n+n_v}$. A matriz \bar{L} pode ser projetada com objetivo de garantir estabilidade da origem de (4.12) quando $d(t) = 0$.

Evidentemente, a perturbação afeta diretamente o erro do observador e, consequentemente, essa análise é realizada de maneira semelhante à apresentada na Proposição 3.2.4.

4.0.2 Esquema preditivo para o estado aumentado

A partir da estimativa do estado aumentado fornecida pelo observador (4.11), tem-se a seguinte proposta de esquema preditivo:

$$\hat{\bar{x}}_p(t) = \hat{\bar{x}}_{p0}(t) - \bar{A}^{h-1}\bar{L}\bar{C}\bar{e}(t) \quad (4.13)$$

para todo $t \in \bar{\mathbb{Z}}_+$, onde:

$$\hat{\bar{x}}_{p0}(t) = \bar{A}^h\hat{\bar{x}}(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} \bar{A}^{t-1-j}\bar{B}v(u)(j) \quad (4.14)$$

A predição $\hat{x}_p(t)$ é obtida a partir da solução recursiva de (4.11) desconsiderando todos os termos que não podem ser calculados, isto é, considerando (3.25) para o estado aumentado, tem-se:

$$\hat{x}(t+h) = \underbrace{\hat{x}_{p0}(t) + \bar{A}^{h-1} \bar{L} [\bar{C} \hat{x}(t) - y(t)]}_{\hat{x}_p(t)} + \sum_{j=t+1-h}^{t-1} \bar{A}^{t-1-j} \bar{L} [\bar{C} \hat{x}(j+h) - y(j+h)] \quad (4.15)$$

Assim como nos esquemas preditivos com observador de estado apresentados, a ideia de considerar alguma informação da perturbação a partir do erro é utilizada em (4.13).

A dinâmica do preditor é definida por:

$$\begin{aligned} \hat{x}_p(t+1) &= \hat{x}_{p0}(t+1) - \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t+1) \\ &= \bar{A} \hat{x}_{p0}(t) + \bar{B} v(u)(t) - \bar{A}^h \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t) - \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t+1) \\ &= \bar{A} \left[\hat{x}_{p0}(t) - \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t) \right] + \bar{B} v(u)(t) - \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t+1) \\ &= \bar{A} \hat{x}_p(t) + \bar{B} v(u)(t) - \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t+1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

e o erro de predição com esse esquema é formulado por:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t+h) - \hat{x}_p(t) &= \bar{A}^h \bar{e}(t) + \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t) + \sum_{j=t-h}^{t-1} \bar{A}^{t-1-j} \bar{I} d(j+h) \\ &= \bar{A}^h \bar{e}(t) + \bar{A}^{h-1} [\bar{L} \bar{C} \bar{e}(t) + \bar{I} d(t)] + \sum_{j=t+1-h}^{t-1} \bar{A}^{t-1-j} \bar{I} d(j+h) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nota-se que, mesmo com a convergência para zero do erro do observador, o erro de predição do estado aumentado não é anulado mesmo para o caso em que a perturbação é constante ou assintoticamente estável com $d_0 \neq 0$. No entanto, se o erro do observador possui informação da perturbação de maneira que $-\bar{L} \bar{C} \bar{e}(t) = \bar{I} d(t)$, então o efeito desta sobre o erro de predição é nulo no instante t .

4.0.3 Síntese da estrutura de controle

Com o objetivo de minimizar o efeito da perturbação e do erro do observador no esquema de predição do estado aumentado, define-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \bar{e}(t+1) &= (\bar{A} + \bar{L} \bar{C}) \bar{e}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}}_{B_\Psi} \Psi(t) \\ \bar{e}_p(t) &= \bar{A}^h \bar{e}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}^{h-1} & I \end{bmatrix}}_{D_\Psi} \Psi(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $\bar{e}_p(t) := \bar{x}(t+h) - \hat{x}_p(t)$, $\Psi(t) := [\Phi_d(t)^\top \ \Phi_{\bar{e}d}(t)^\top]^\top$ tal que:

$$\begin{aligned} \Phi_d(t) &= \bar{I}d(t) \\ \Phi_{\bar{e}d}(t) &= \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} \bar{e}(t) + \sum_{j=t+1-h}^{t-1} \bar{A}^{t-1-j} \bar{I}d(j+h) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Portanto, \bar{L} pode ser projetado por meio da resolução de um problema de otimização, que é o principal resultado deste trabalho, formulado no seguinte teorema.

Teorema 4.0.1 *O sistema (4.18) é estável se o seguinte problema de otimização possui soluções globais $Z = Z^\top > 0 \in \mathbb{R}(n+n_v, n+n_v)$, $W \in \mathbb{R}(n+n_v, p)$ e $\gamma \in \mathbb{R}_+$:*

$$\begin{aligned} & \min_{Z>0, W} \gamma \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} Z & -(\bar{A}^h)^\top D_\Psi & (\bar{A}^h)^\top & \bar{A}^\top Z + \bar{C}^\top W^\top & 0 \\ * & \gamma I & 0 & B_\Psi^\top P^{-1} & D_\Psi^\top \\ * & * & I & 0 & 0 \\ * & * & * & Z & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nesse caso, a seguinte desigualdade é válida com o índice de desempenho ótimo:

$$\|\bar{x}(t+h) - \hat{x}_p(t)\|_2 \leq \sqrt{\gamma} \|\Psi(t)\|_2 \quad (4.21)$$

Demonstração 6 *A função de Lyapunov candidata é quadrática e definida por $V(\bar{e}(t)) = \bar{e}(t)^\top P^{-1} \bar{e}(t)$, onde $P = P^\top \in \mathbb{R}(n+n_v, n+n_v)$.*

Do método de Lyapunov, tem-se que quando as seguintes condições são atendidas:

$$V(\bar{e}(t)) = \bar{e}(t)^\top P^{-1} \bar{e}(t) = 0, \bar{e}(t) = 0 \quad (4.22)$$

$$V(\bar{e}(t)) = \bar{e}(t)^\top P^{-1} \bar{e}(t) > 0, \forall \bar{e}(t) \neq 0 \quad (4.23)$$

$$-V(\bar{e}(t+1)) + V(\bar{e}(t)) \geq 0, \forall \bar{e}(t) \neq 0 \quad (4.24)$$

a estabilidade da origem é verificada. Segue que (4.23) se, e somente se, $P^{-1} = (P^{-1})^\top > 0 \implies P = P^\top > 0$.

Da condição de desempenho, tem-se $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$\|\bar{e}_p(t)\|_2 \leq \sqrt{\gamma} \|\Psi(t)\|_2$$

que é reescrito como:

$$-\bar{e}_p(t)^\top \bar{e}_p(t) + \Psi(t)^\top \gamma \Psi(t) \geq 0$$

e é equivalente a:

$$\begin{aligned} -\bar{e}(t)^\top \left(\bar{A}^h\right)^\top \bar{A}^h \bar{e}(t) - \bar{e}(t)^\top \left(\bar{A}^h\right)^\top D_\Psi \Psi(t) - \Psi(t)^\top D_\Psi^\top \left(\bar{A}^h\right) \bar{e}(t) \\ + \Psi(t)^\top \left(\gamma I - D_\Psi^\top D_\Psi\right) \Psi(t) \geq 0 \end{aligned}$$

em um domínio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+n_v}$.

Se a desigualdade:

$$\begin{aligned} -V(\bar{e}(t+1)) + V(\bar{e}(t)) - \bar{e}(t)^\top \left(\bar{A}^h\right)^\top \bar{A}^h \bar{e}(t) - \bar{e}(t)^\top \left(\bar{A}^h\right)^\top D_\Psi \Psi(t) - \Psi(t)^\top D_\Psi^\top \left(\bar{A}^h\right) \bar{e}(t) \\ + \Psi(t)^\top \left(\gamma I - D_\Psi^\top D_\Psi\right) \Psi(t) \geq 0 \end{aligned}$$

é satisfeita para todo $[\bar{e}(t)^\top \ \Psi(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{n+n_v}$, então $-V(\bar{e}(t+1)) + V(\bar{e}(t)) > 0$ é satisfeita em \mathbb{D} .

Portanto, tem-se que:

$$-\bar{e}_p(t)^\top \bar{e}_p(t) + \Psi(t)^\top \gamma \Psi(t) \geq V(\bar{e}(t+1)) - V(\bar{e}(t))$$

se, e somente se, para todo $[\bar{e}(t)^\top \ \Psi(t)^\top]^\top$:

$$\begin{bmatrix} -(\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} (\bar{A} + \bar{L}\bar{C}) + P^{-1} - (\bar{A}^h)^\top \bar{A}^h & -(\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} B_\Psi - (\bar{A}^h)^\top D_\Psi \\ * & \gamma I - D_\Psi^\top D_\Psi - B_\Psi^\top P^{-1} B_\Psi \end{bmatrix} \geq 0$$

Tem-se que esta desigualdade implica:

$$\begin{bmatrix} -(\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} (\bar{A} + \bar{L}\bar{C}) + P^{-1} & -(\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} B_\Psi - (\bar{A}^h)^\top D_\Psi \\ * & \gamma I - D_\Psi^\top D_\Psi - B_\Psi^\top P^{-1} B_\Psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\bar{A}^h)^\top \\ 0 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} \bar{A}^h & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$



complemento de Schur

$$\begin{bmatrix} -(\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} (\bar{A} + \bar{L}\bar{C}) + P^{-1} & -(\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} B_\Psi - (\bar{A}^h)^\top D_\Psi & (\bar{A}^h)^\top \\ * & \gamma I - D_\Psi^\top D_\Psi - B_\Psi^\top P^{-1} B_\Psi & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \text{complemento de Schur} \end{array} \\
& \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} P^{-1} & -(\bar{A}^h)^\top D_\Psi \\ * & \gamma I - D_\Psi^\top D_\Psi \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} (\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} \\ B_\Psi^\top P^{-1} \\ * \end{array} \right] P \left[\begin{array}{cc} P^{-1}(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}) & P^{-1}B_\Psi \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} (\bar{A}^h)^\top \\ 0 \\ I \end{array} \right] \end{array} \right] \geq 0 \\
& \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} P^{-1} & -(\bar{A}^h)^\top D_\Psi & (\bar{A}^h)^\top & (\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} \\ * & \gamma I - D_\Psi^\top D_\Psi & 0 & B_\Psi^\top P^{-1} \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & P^{-1} \end{array} \right] \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \text{complemento de Schur} \end{array} \\
& \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} P^{-1} & -(\bar{A}^h)^\top D_\Psi \\ * & \gamma I \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 0 \\ D_\Psi^\top \end{array} \right] I \left[\begin{array}{cc} 0 & -D_\Psi \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} (\bar{A}^h)^\top & (\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} \\ 0 & B_\Psi P^{-1} \end{array} \right] \\ * & \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ * & P^{-1} \end{array} \right] \end{array} \right] \geq 0 \\
& \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} P^{-1} & -(\bar{A}^h)^\top D_\Psi & (\bar{A}^h)^\top & (\bar{A} + \bar{L}\bar{C})^\top P^{-1} & 0 \\ * & \gamma I & 0 & B_\Psi^\top P^{-1} & D_\Psi^\top \\ * & * & I & 0 & 0 \\ * & * & * & P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & I \end{array} \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Utilizando as mudanças de variável $Z = P^{-1}$ e $W = Z\bar{L}$, $W \in \mathbb{R}(n + n_v, p)$, tem-se:

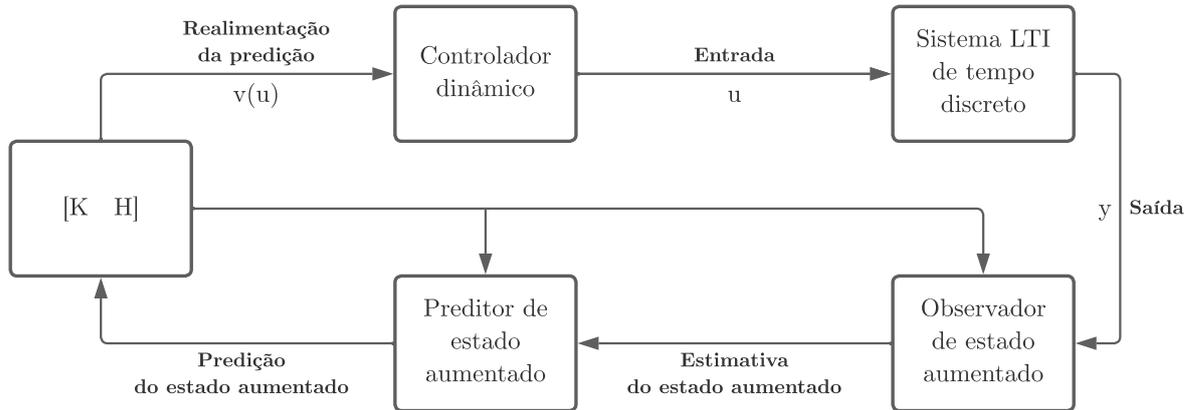
$$\left[\begin{array}{ccccc} Z & -(\bar{A}^h)^\top D_\Psi & (\bar{A}^h)^\top & \bar{A}^\top Z + \bar{C}^\top W^\top & 0 \\ * & \gamma I & 0 & B_\Psi^\top P^{-1} & D_\Psi^\top \\ * & * & I & 0 & 0 \\ * & * & * & Z & 0 \\ * & * & * & * & I \end{array} \right] \geq 0 \quad (4.25)$$

Finalmente, a matriz do observador é obtida através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{Z > 0, W} \gamma \quad (4.26)$$

sujeito a (4.25)

Figura 1 – Diagrama de blocos que representa a estrutura de controle proposta neste trabalho.



Fonte: Elaborada pelo autor.

com $\bar{L} = Z^{-1}W$, o que conclui a demonstração do teorema.

□

Finalmente, tem-se que da dinâmica do preditor em (4.16):

$$\hat{x}_p(t+1) = \bar{A}\hat{x}_p(t) + \bar{B}v(u)(t) - \bar{A}^{h-1}\bar{L}\bar{C}\bar{e}(t+1) \quad (4.27)$$

faz-se:

$$v(u)(t) = \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \hat{x}_p(t) \quad (4.28)$$

e calcula-se $K \in \mathbb{R}(m, n)$ e $H \in \mathbb{R}(m, n_v)$ tal que a matriz $\bar{A} + \bar{B} \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix}$ é Schur.

A estrutura de controle proposta é representada no diagrama de blocos na Figura 1. Nela, mostra-se que a estimativa do estado aumentado gerada pelo observador de estado (4.11) a partir da saída y e de $v(u)$ é utilizada pelo preditor proposto (4.13) e a predição do estado aumentado é utilizada para definir a realimentação $v(u)(t) = \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \hat{x}_p(t)$ que é a entrada do controlador dinâmico proposto. Por fim, no diagrama de blocos a entrada u , fornecida pelo controlador dinâmico é aplicada ao sistema (3.1).

5 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os principais resultados numéricos utilizando as estratégias de controle baseado em preditor analisadas no capítulo anterior.

Considera-se dois cenários de simulação:

- 1) O sistema (3.1) afetado por perturbações em que $\Delta d(t)$ é nulo para algum $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$;
- 2) O sistema (3.1) afetado por perturbações em que $\Delta d(t)$ é não-nulo para todo $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

5.1 Perturbações constantes ou assintoticamente estáveis

No caso de perturbações constantes, é fácil verificar que:

$$\Delta d(t) = d(t+1) - d(t) = d_0 - d_0 = 0 \quad (5.1)$$

para todo $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

Em contrapartida, no caso de perturbações assintoticamente estáveis a condição de $\Delta d(t)$ nulo só é válida a partir de algum $t = T_0 \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande.

Assim, o primeiro tipo de perturbação é utilizado no primeiro cenário de simulação. Neste, o exemplo retirado de Wu e Wang (2021) é apresentado a seguir.

Exemplo 3 *Considera-se o sistema linear autônomo no domínio do tempo discreto representado por:*

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3,2 & -1,4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,6 \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$u(t) = 0, \text{ para } t \in \mathbb{Z}[-h, -1]$$

$$x(0) = [1,5 \quad 1]^\top$$

O problema de otimização (3.56) é resolvido para os preditores $\hat{x}_{p1}(t)$ e $\hat{x}_{p2}(t)$

associados ao observador de perturbação (3.42). O resultado são as matrizes:

$$\begin{aligned}
 P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 2,6180 \end{bmatrix} \\
 K &= \begin{bmatrix} -3,2000 & 1,4000 \end{bmatrix} \\
 F &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 L &= \begin{bmatrix} -0,8000 & -3,2000 & -0,8000 & 0 \\ -1,0000 & 0,6000 & 0 & -0,8000 \end{bmatrix}^{\top}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

e o índice de desempenho $\mu = 2,6180$. O ganho do observador é calculado para que os autovalores da matriz dinâmica do erro sejam 0,2, 0,2, 0 e 0.

Para o controle dinâmico baseado em preditor, considera-se duas estruturas de controle:

– Controlador dinâmico 1:

$$\mathcal{Z}\{u\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{v(u)\} \tag{5.4}$$

e as matrizes no sistema aumentado:

$$M = N = Q = R = 1 \tag{5.5}$$

As matrizes do controle por realimentação são obtidas para o mesmo índice de desempenho $\mu = 2,6180$ e o ganho do observador é calculado para a alocação dos autovalores da matriz dinâmica do erro em 0,2, 0,2, e 0.:

$$\begin{aligned}
 [K \ H] &= \begin{bmatrix} -3,2000 & 1,4000 & -1,0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{L} &= \begin{bmatrix} 0,2000 & -3,2000 & -0,0000 \\ -1,0000 & 0,6000 & -0,8000 \end{bmatrix}^{\top}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

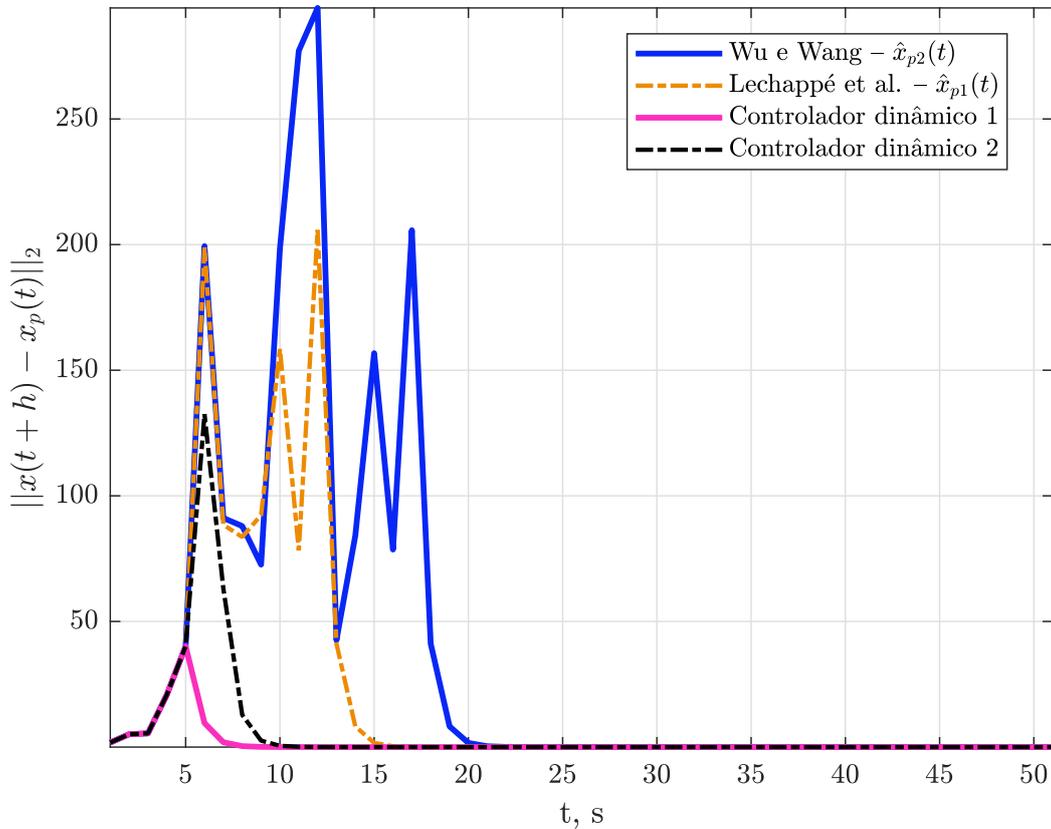
– Controlador dinâmico 2:

$$\mathcal{Z}\{u\} = \left(\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.9} \right) \mathcal{Z}\{v(u)\} \tag{5.7}$$

e as matrizes no sistema aumentado:

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 1,9000 & -0,9000 \\ 1,0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 Q &= \begin{bmatrix} 0,9500 & -0,9000 \end{bmatrix}, \quad R = 2
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Figura 2 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do erro de previsão e sua evolução no tempo. (Exemplo 3)



Fonte: Elaborada pelo autor.

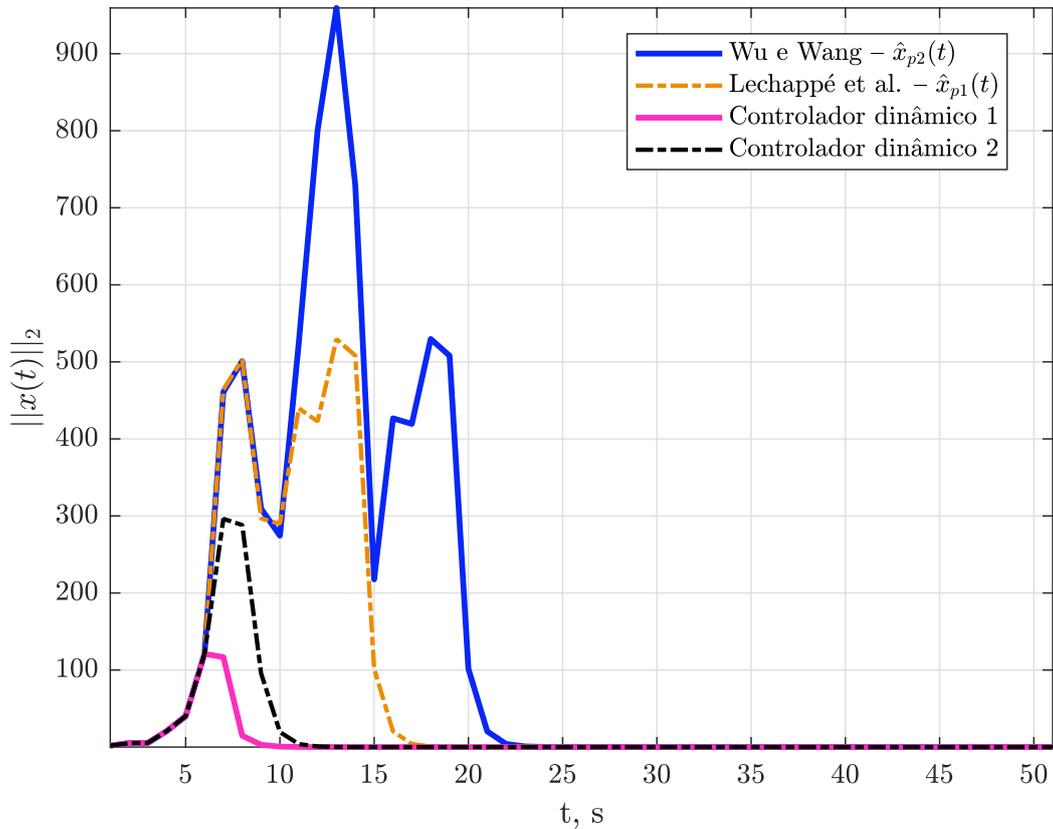
As matrizes do controle por realimentação são obtidas para o mesmo índice de desempenho $\mu = 2,6180$ e o ganho do observador é calculado para a alocação dos autovalores da matriz dinâmica do erro em $0,2, 0,2, 10^{-9}$ e 0 :

$$\begin{aligned} [K \ H] &= [-1,6000 \ 0,7000 \ -0,4750 \ 0,4500] \\ \bar{L} &= \begin{bmatrix} 0,2000 & 0,3799 & 403,0986 & 421,0300 \\ -1,0000 & -0,2976 & -272,7117 & -285,2780 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5.9)$$

As Figuras 2 e 3 mostram os resultados de simulação comparando os quatro controladores com relação à norma euclidiana do erro de previsão dos esquemas preditivos e à norma euclidiana do estado do sistema (3.1), respectivamente.

△

Figura 3 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclídeana do estado do sistema e sua evolução no tempo. (Exemplo 3)



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Perturbações senoidais

No caso em que $d(t) = \text{sen}(\omega t)$, onde $\omega \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $\Delta d(t)$ é diferente de zero para todo $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, então esse caso pertence ao segundo cenário de simulação, onde é utilizado o exemplo de Wu e Wang (2021).

Exemplo 4 Considera-se o sistema linear autônomo no domínio do tempo discreto representado

por:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3,2 & -1,4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,6\text{sen}(1,35t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$u(t) = 0, \text{ para } t \in \mathbb{Z}[-h, -1]$$

$$x(0) = [1,5 \quad 1]^\top$$

Neste exemplo, os controladores com $\hat{x}_{p1}(t)$ e $\hat{x}_{p2}(t)$ do Exemplo 3 são utilizados e, para comparação, os controladores dinâmicos considerados são:

– Controlador dinâmico 1 para perturbação de frequência conhecida:

$$\mathcal{Z}\{u\} = \frac{z^2}{(z^2 - 2\cos(1,35)z + 1)} \cdot \frac{z^2}{(z-1)^2} \mathcal{Z}\{v(u)\} \quad (5.11)$$

e as matrizes no sistema aumentado:

$$M = \begin{bmatrix} 2,4380 & -1,4380 & 1,2190 & -1,0000 \\ 2,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5000 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$Q = [1,2190 \quad -0,7190 \quad 0,6095 \quad -0,5000], \quad R = 1$$

As matrizes do controle por realimentação são obtidas para o índice de desempenho $\mu = 2,6181$ e o ganho do observador é calculado utilizando o Teorema 4.0.1, o que resulta em:

$$\begin{aligned} [K \quad H] &= [-3,2000 \quad 1,4000 \quad -1,2190 \quad 0,7190 \quad -0,6095 \quad 0,5000] \\ \bar{L} &= \begin{bmatrix} 0,1121 & -3,6979 & -0,7811 & -0,5789 & 0,1027 & -0,0154 \\ -1,0590 & 0,5220 & -1,8698 & -3,1012 & -1,1306 & 0,1118 \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \quad (5.13)$$

e os autovalores de $\bar{A} + \bar{L}\bar{C}$ são:

$$0,1502 \pm i0,7416$$

$$0,0006 + i0,0000$$

$$0,4293 \pm i0,2565$$

$$0,5126 + i0,0000$$

(5.14)

– Controlador dinâmico 2 para perturbação de frequência desconhecida:

$$\mathcal{L}\{u\} = \left[\frac{z^2}{z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{h}\right)z + 1} \right]^2 \cdot \frac{z^2}{(z-1)^2} \mathcal{L}\{v(u)\} \quad (5.15)$$

e as matrizes no sistema aumentado:

$$M = \begin{bmatrix} 3,2361 & -2,9271 & 1,8090 & -1,4635 & 0,8090 & -0,5000 \\ 2,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5000 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0,8090 & -0,7318 & 0,4523 & -0,3659 & 0,2023 & -0,1250 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

As matrizes do controle por realimentação são obtidas para o índice de desempenho $\mu = 2,6181$ e o ganho do observador é calculado utilizando o Teorema 4.0.1, o que resulta em:

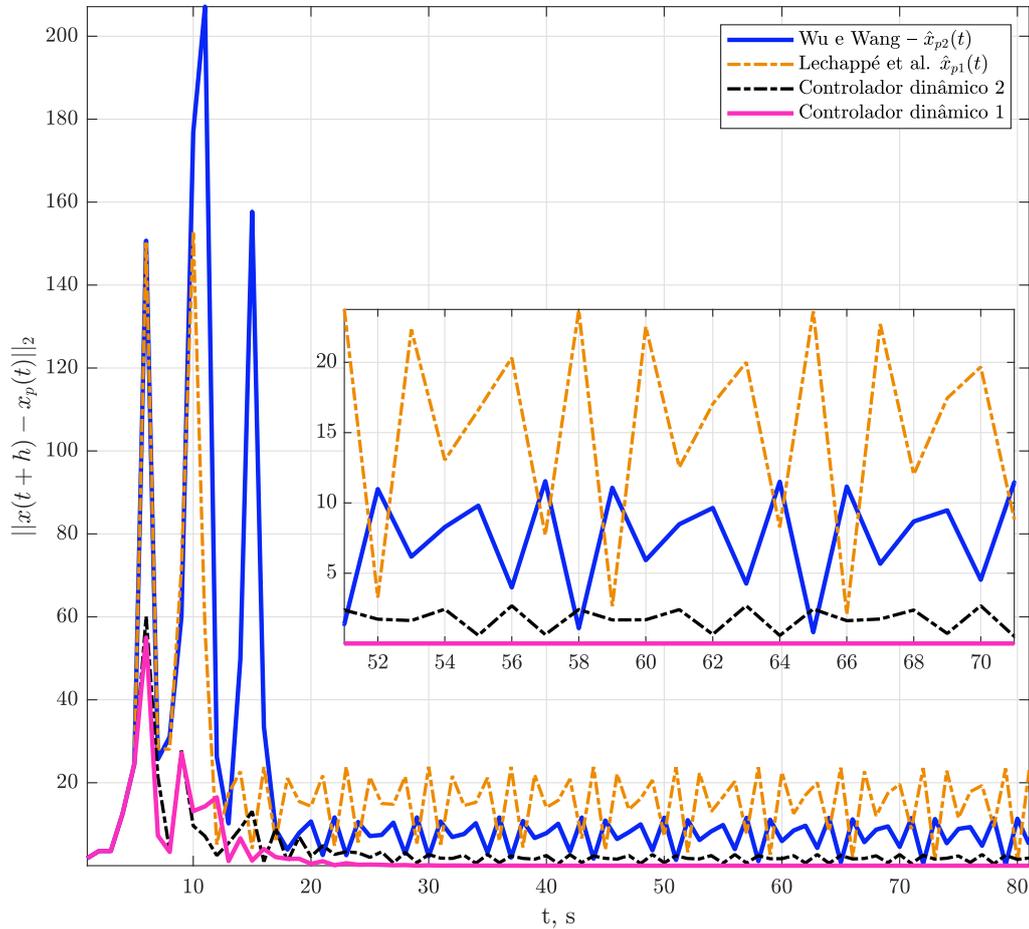
$$\begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,2000 & 1,4000 & -0,8090 & 0,7318 & -0,4523 & 0,3659 & -0,2023 & 0,1250 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0,0981 & -3,7310 & -1,7698 & -0,9322 & 0,8276 & 0,0237 & -0,8779 & -0,2139 \\ -1,0484 & 0,3484 & -4,3795 & -6,7539 & -3,2164 & 1,5605 & -0,1846 & -0,8686 \end{bmatrix}^T \quad (5.18)$$

e os autovalores de $\bar{A} + \bar{L}\bar{C}$ são:

$$\begin{aligned} &0,0593 \pm i0,8093 \\ &0,3074 \pm i0,6141 \\ &-0,0008 + i0,0000 \\ &0,4844 \pm i0,2434 \\ &0,5810 + i0,0000 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Figura 4 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do erro de previsão e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

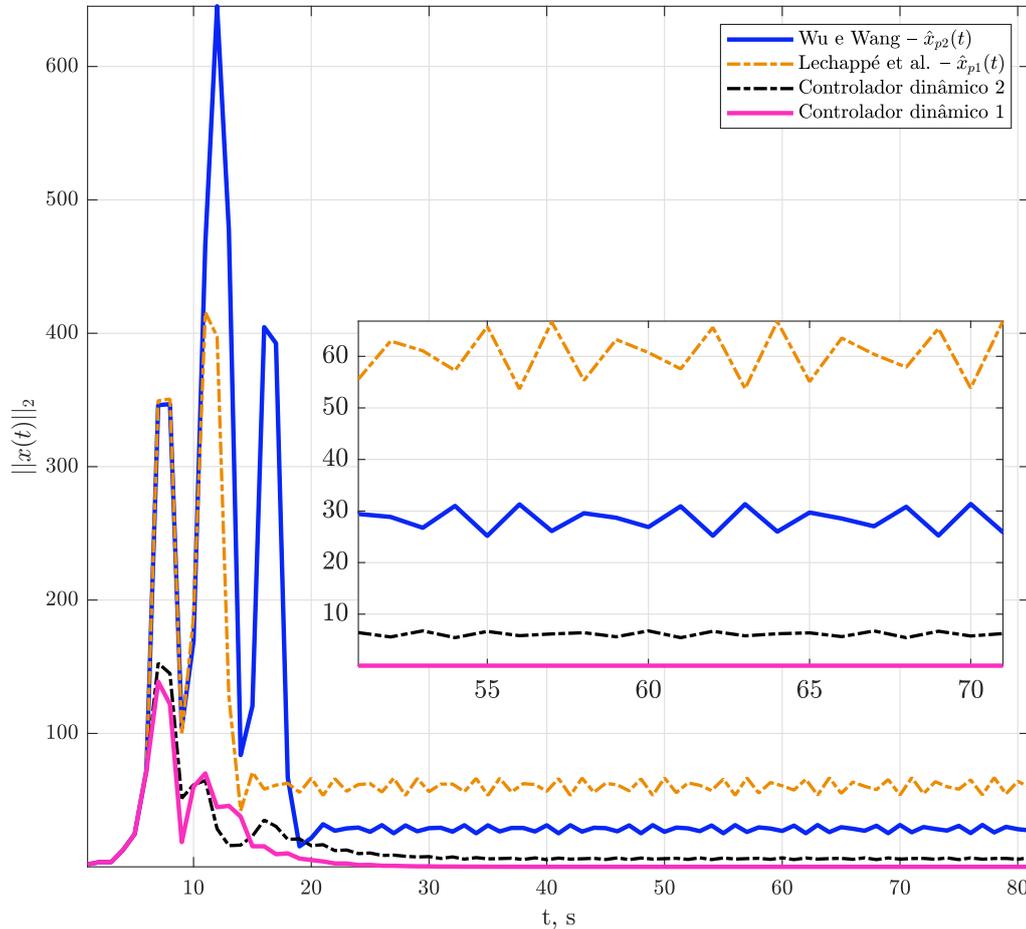
As Figuras 4 e 5 mostram os resultados de simulação comparando os quatro controladores com relação à norma euclidiana do erro de previsão dos esquemas preditivos e à norma euclidiana do estado do sistema (3.1), respectivamente.

A definição das expressões dos controladores dinâmicos neste exemplo preza pelo objetivo de incluir uma dinâmica senoidal na lei de controle, seja para o caso de perturbações com frequência conhecida ou para o caso de perturbações desconhecidas, no qual, neste último caso considera-se uma lei de controle com componente senoidal de período em função do valor do atraso h conhecido.

△

A análise no domínio da frequência é uma ferramenta importante para avaliar o de-

Figura 5 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do estado do sistema e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

sempenho das estruturas de controle baseado em preditor em uma perspectiva geral, considerando o sinal de perturbação e seus componentes de diferentes frequências.

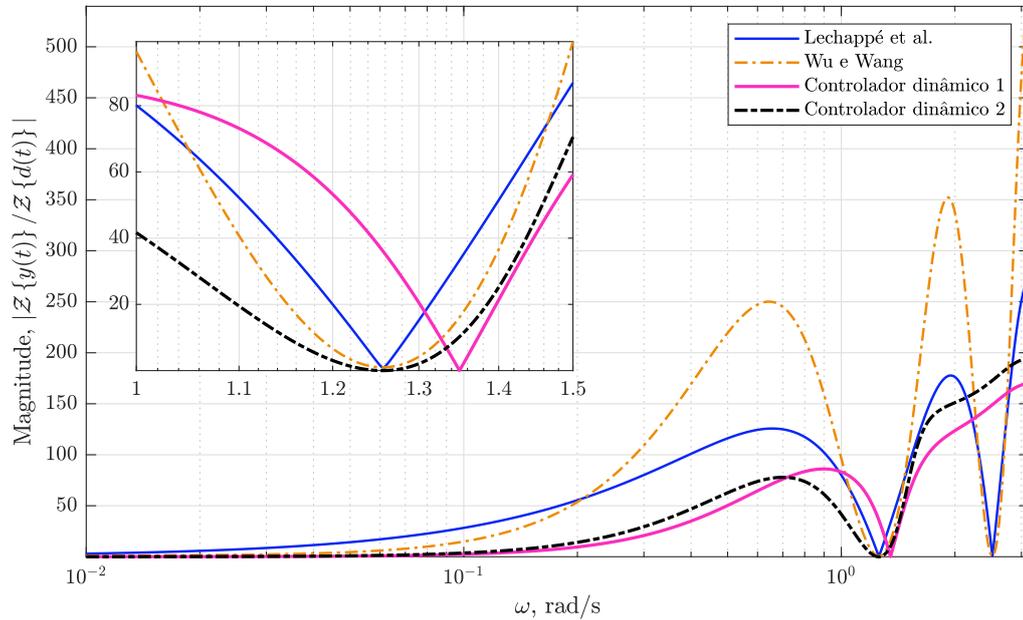
Portanto, o exemplo seguinte tem como objetivo mostrar resultados numéricos de comparação entre os esquemas preditivos por meio de gráficos da magnitude da relação saída-perturbação parametrizada na frequência. Nele, também é explorada a estratégia do controlador dinâmico para o caso de perturbação desconhecida, proposto no exemplo anterior.

Para a obtenção dos resultados, as funções de transferência $\mathcal{L}\{y(t)\} / \mathcal{L}\{d(t)\}$ para cada esquema preditivo são listadas a seguir:

- Controle com o preditor de Artstein (1982) para sistemas de tempo discreto:

$$\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{d(t)\}} = C(zI - A)^{-1} \left(BK(zI - A - BK)^{-1} A^h z^{-h} + I \right) \quad (5.20)$$

Figura 6 – Resultado numérico da magnitude da relação saída-perturbação parametrizada na frequência na comparação entre os controladores dinâmicos utilizados no Exemplo 4 e os esquemas preditivos de Léchappé *et al.* (2015a) e de Wu e Wang (2021).



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Controle com o preditor de Léchappé *et al.* (2015a) para sistemas de tempo discreto:

$$\frac{\mathcal{Z}\{y(t)\}}{\mathcal{Z}\{d(t)\}} = C(zI - A)^{-1} \left(BK(zI - A - BK)^{-1} \left(I + A^h(1 - z^{-h}) \right) z^{-h} + I \right) \quad (5.21)$$

- Controle com o preditor de Wu e Wang (2021) para sistemas de tempo discreto:

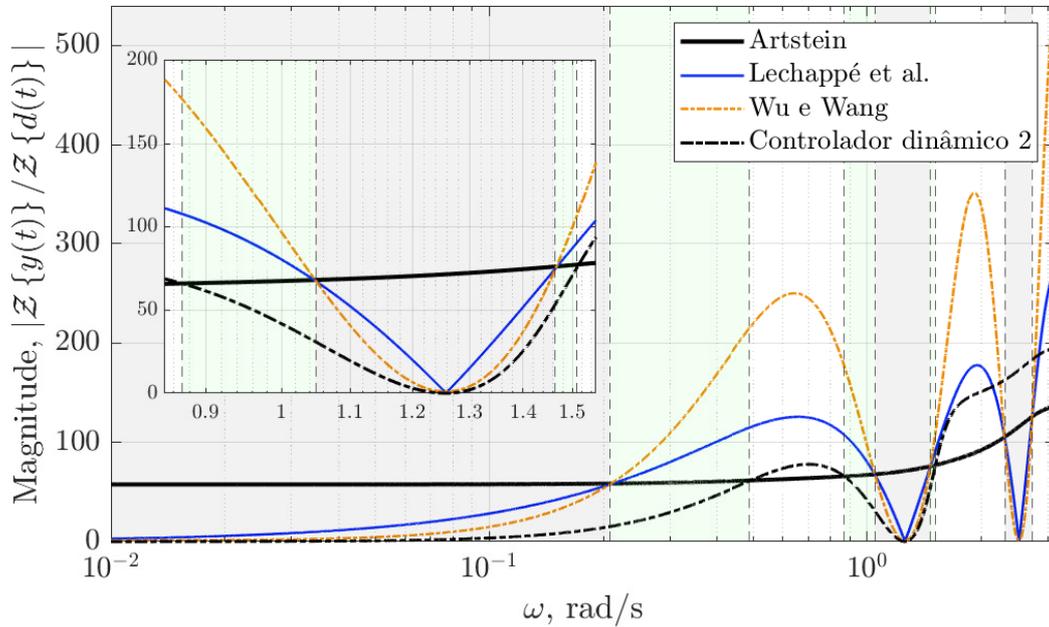
$$\frac{\mathcal{Z}\{y(t)\}}{\mathcal{Z}\{d(t)\}} = C(zI - A)^{-1} \left(BK(zI - A - BK)^{-1} \left(2I - (I + 2A^h)z^h + A^h z^{-2h} \right) z^{-h} + I \right) \quad (5.22)$$

- Controle com atenuação de perturbação com o preditor e o observador de estado aumentado para sistemas de tempo discreto propostos nesta dissertação:

$$\frac{\mathcal{Z}\{y(t)\}}{\mathcal{Z}\{d(t)\}} = C(zI - A)^{-1} \left(B \left(Q(zI - M)^{-1} N + R \right) [K \ H] z^{-h} \left(-(zI - \bar{A} - \bar{B}[K \ H])^{-1} \bar{A}^{h-1} \bar{L} \bar{C} z (zI - \bar{A} - \bar{L} \bar{C})^{-1} \bar{I} \right) + I \right) \quad (5.23)$$

Exemplo 5 Na Figura 6, os controladores dinâmicos utilizados no Exemplo 4 são comparados ao controle com os esquemas preditivos de Léchappé *et al.* (2015a) e de Wu e Wang (2021) quanto a capacidade de atenuação de perturbações. De maneira clara é possível ver que, para perturbações senoidais conhecidas, a dinâmica do controlador pode ser ajustada de maneira a atenuar completamente o efeito da perturbação na saída.

Figura 7 – Resultado numérico da magnitude da relação saída-perturbação parametrizada na frequência para a comparação entre a estrutura de controle dinâmico 2 utilizada no Exemplo 4 e controladores com os esquemas preditivos da literatura.



Fonte: Elaborada pelo autor.

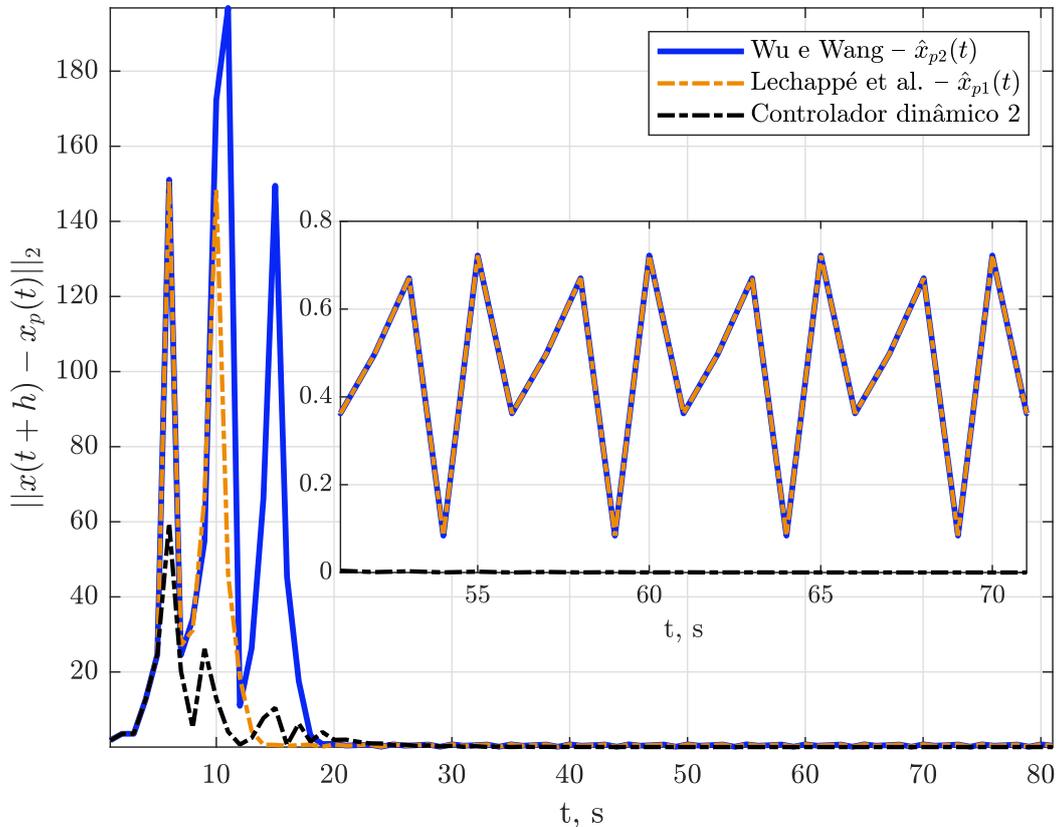
Quanto ao controlador dinâmico 2 no Exemplo 4, a estratégia na definição de sua dinâmica tem como objetivo incluir uma característica de atenuação de perturbações com período cujo valor é um múltiplo de h , o que é uma característica também observada nos esquemas preditivos propostos por Léchappé et al. (2015a) e generalizados por Wu e Wang (2021).

A avaliação do desempenho com esse ajuste pode ser realizada com base nos resultados numéricos apresentados na Figura 7. Neste resultado, tem-se que a região em cinza representa as faixas de frequência nas quais o controle com o preditor de Wu e Wang (2021) possui melhor resultado de atenuação de perturbações em comparação aos preditores de Artstein (1982) e de Léchappé et al. (2015a) para sistemas de tempo discreto.

Ainda, constata-se que com a estrutura proposta neste trabalho, a reunião das regiões cinza e verde em baixas frequências representa o melhor resultado na atenuação de um intervalo maior de frequências de perturbações em comparação ao controle com o preditor de Artstein (1982).

O desempenho do controlador dinâmico 2 para perturbações desconhecidas pode ainda ser avaliado considerando o resultado numérico de simulação do Exemplo 4 quando

Figura 8 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do erro de predição e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

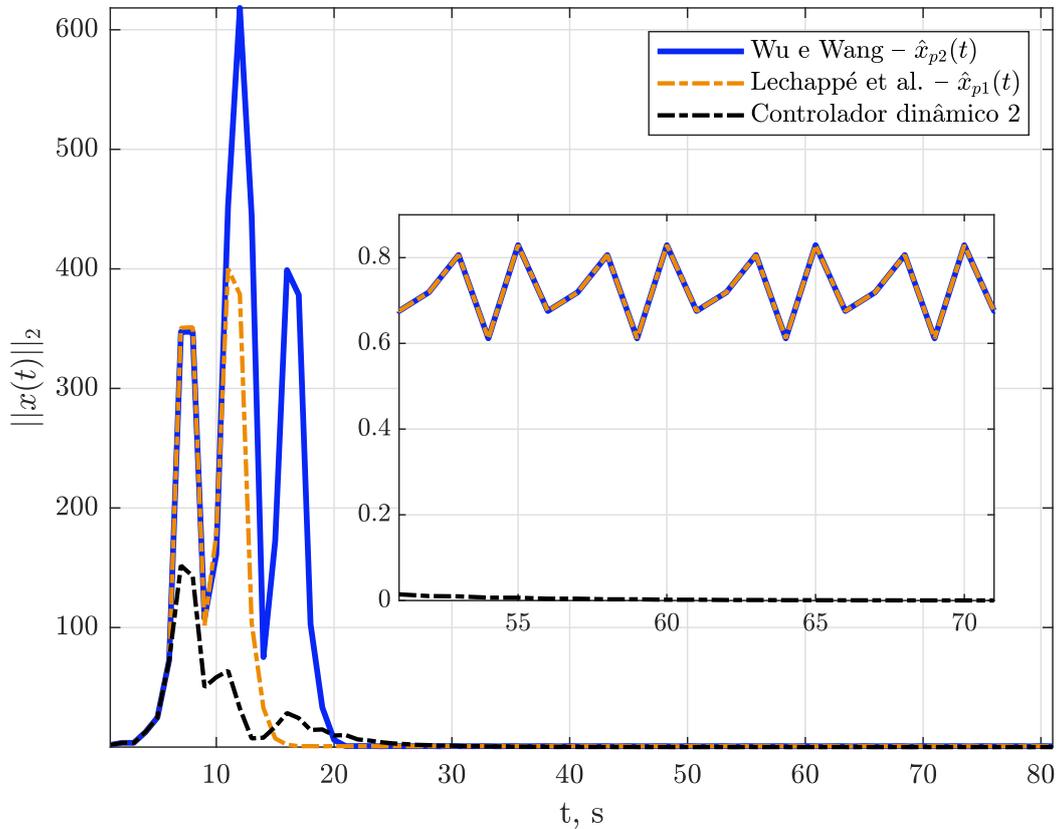
a perturbação possui frequência angular igual a $\frac{2\pi}{h}$ rad/s. Naturalmente, com o projeto do controlador dinâmico 2, a perturbação é completamente atenuada em regime estacionário, enquanto os controladores que utilizam os preditores de Léchappé et al. (2015a) e de Wu e Wang (2021) em sua estrutura não fornecem o resultado desejado de atenuação completa.

As Figuras 8 e 9 mostram a norma euclidiana do erro de predição e do estado, respectivamente, com os controladores utilizados no exemplo.

A diferença no desempenho entre a estrutura de controle proposta e os controladores que utilizam os esquemas de predição da literatura é justificada pela influência da dinâmica do erro de observação. Neste exemplo, a utilização conjunta dos esquemas de predição de Léchappé et al. (2015a) e de Wu e Wang (2021) com um observador de estado faz com que o desempenho mostrado na Figura 7 não seja alcançado por conta da influência do erro de observação.

Por outro lado, com o controlador proposto, a influência do erro de observação já é

Figura 9 – Resultado numérico de comparação entre as estratégias de controle quanto ao valor da norma euclidiana do estado do sistema e sua evolução no tempo. (Exemplo 4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

levada em consideração na análise numérica da Figura 7, portanto, de certa forma, o uso ou não de observador de estado na estrutura proposta não altera qualitativamente a sua capacidade de atenuação de perturbações de frequência conhecida e, concomitantemente, não altera sua capacidade de atenuação de perturbações desconhecidas.

△

5.3 Comentários

Uma primeira avaliação dos resultados do Exemplo 3 pode ser feita considerando que todas as estruturas de controle são capazes de atenuar a perturbação constante. Isso é esperado para os preditores $\hat{x}_{p1}(t)$ e $\hat{x}_{p2}(t)$, pois o erro do observador converge para zero, o que garante que a dinâmica do preditor com observador é igual a do preditor com acesso ao estado do sistema para algum $t \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

Desse modo, como mostrado nas Proposições 3.2.2 e 3.2.3, confirma-se que estabi-

lizar um determinado ponto de equilíbrio utilizando o esquema preditivo implica estabilizar o mesmo ponto de equilíbrio do sistema (3.1).

No caso dos controladores dinâmicos, fica clara a vantagem de utilizá-los pois, simplesmente definindo o operador $v(u)$ apropriadamente, pode-se atenuar perturbações constantes. Percebe-se que, para o exemplo, o desempenho do controlador dinâmico é superior em comparação aos controladores com os esquemas de predição $\hat{x}_{p1}(t)$ e $\hat{x}_{p2}(t)$.

No segundo cenário de simulação, novamente fica clara a vantagem de utilizar o controlador dinâmico. São dois motivos principais que permitem essa conclusão: o operador $v(u)$ quando definido para que $u(t)$ possua a dinâmica exata da perturbação faz com o que a rejeição desta em regime permanente seja obtida e a síntese do observador de estado aumentado conforme o Teorema 4.0.1 diminua consideravelmente os efeitos no transitório das respostas com controladores dinâmicos apresentados.

Além disso, mesmo quando $u(t)$ não possui a dinâmica exata da perturbação, como é o caso com o controlador dinâmico 2, a norma euclideana do estado é menor em comparação a obtida com os dois preditores $\hat{x}_{p1}(t)$ e $\hat{x}_{p2}(t)$ na resposta transitória e na de regime estacionário.

Os controladores dinâmicos utilizados no Exemplo 4 e considerados na Figura 6, para o sistema com perturbação senoidal, são considerados no Exemplo 5 e mostram a maior capacidade de atenuação de perturbações de diferentes frequências.

Em particular, o intervalo de frequências em que se obtém melhores resultados com a estrutura proposta nesta dissertação é maior em comparação aos considerados com os esquemas preditivos de Wu e Wang (2021), como mostram em detalhes a Figura 7.

Sumariamente, a melhoria com a estrutura de controle proposta neste trabalho é superior até médias frequências para o exemplo considerado e isso demonstra a maior capacidade da proposta deste trabalho na atenuação das perturbações.

Por fim, entende-se que há vantagem em utilizar a estratégia com o operador $v(u)$, principalmente quando se têm alguma informação das perturbações, isto é, quando a dinâmica é conhecida ou também quando as perturbações são determinísticas.

Ademais, a síntese do observador de estado aumentado é um resultado interessante que, no âmbito dos exemplos apresentados nesta dissertação fez com que o desempenho dos controladores na atenuação das perturbações fosse superior de maneira satisfatória, principalmente para as respostas transitórias.

6 CONCLUSÕES

Esta dissertação apresentou de maneira sistemática alguns dos resultados propostos recentemente na literatura para controladores baseados em preditor. Alguns dos resultados foram estendidos para o caso em que não há acesso ao estado do sistema, isto é, utilizando observadores de estado.

Além disso, esquemas preditivos de trabalhos recentes como o de Wu e Wang (2021) foram analisados em conjunto do procedimento de síntese dos controladores baseado no trabalho de Hao *et al.* (2017), onde o objetivo de minimizar o efeito da perturbação no desempenho dos controladores pôde ser alcançado.

Na proposta de uma estrutura que considera a dinâmica da lei de controle para melhorar a capacidade de atenuação de perturbações, é apresentado um procedimento de síntese do observador de estado aumentado com objetivo de diminuir os efeitos das perturbações na qualidade das predições do esquema proposto.

A eficiência da estrutura de controle proposta na predição dos estados e na atenuação das perturbações é evidente nas comparações com os esquemas preditivos com observador baseados no trabalho de Wu e Wang (2021). Nessas comparações, tanto no caso de perturbação constante quanto no de perturbação senoidal, o desempenho do esquema preditivo e a atenuação das perturbações são maiores com a estrutura proposta.

O resultado principal desta dissertação é o procedimento de síntese do observador de estado aumentado como proposto no Teorema 4.0.1 com o qual, nos exemplos considerados, alcançou-se melhor desempenho principalmente na parte transitória das respostas em comparação a estratégias de controle da literatura.

De maneira geral, erro nulo na predição do estado do processo em regime permanente é obtida a partir da inserção da dinâmica exata da perturbação na lei de controle. Além disso, mesmo quando não se tem conhecimento da dinâmica da perturbação, a estrutura de controle proposta permite a obtenção de melhores resultados de maneira geral nas comparações realizadas com exemplos numéricos de simulação com o ajuste da dinâmica do sinal de controle. A análise dos esquemas de controle no domínio da frequência confirma o sucesso do método proposto para a atenuação de perturbações e sua eficácia.

Perspectivas pontuais para a evolução do método proposto neste trabalho incluem: a definição de diferentes dinâmicas para cada coordenada da entrada de controle e a melhoria do esquema preditivo utilizado ou uma nova proposta.

Não menos importante, a apresentação de uma breve revisão de alguns trabalhos recentemente publicados no tema de controle baseado em preditor mostra que o tema é promissor no âmbito de pesquisa e que cada vez mais os resultados apresentados na área têm mostrado a evolução das diferentes soluções do problema. Portanto, há interesse em estudar as implicações da abordagem tratada nesta dissertação para outros problemas, como em sistemas com atraso variável no tempo e com incertezas no atraso.

REFERÊNCIAS

- ARTSTEIN, Z. Linear systems with delayed controls: A reduction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Manhattan, Nova Iorque, v. 27, n. 4, p. 869–879, August 1982. ISSN 1558-2523.
- BARREAU, M.; SEURET, A.; GOUAISBAUT, F. Wirtinger-based exponential stability for time-delay systems 11this work is supported by the anr project scidis contract number 15-ce23-0014. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, Amsterdã, Países Baixos, v. 50, n. 1, p. 11984–11989, 2017. ISSN 2405-8963. 20th IFAC World Congress.
- CASTILLO, A.; GARCÍA, P. Predicting the future state of disturbed lti systems: A solution based on high-order observers. **Automatica**, Amsterdã, Países Baixos, v. 124, p. 109365, 2021. ISSN 0005-1098.
- DENG, Y.; LÉCHAPPÉ, V.; MOULAY, E.; CHEN, Z.; LIANG, B.; PLESTAN, F.; HAN, Q.-L. Predictor-based control of time-delay systems: a survey. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, Reino Unido, v. 53, n. 12, p. 2496–2534, 2022.
- FRIDMAN, E. **Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control**. EUA: Springer International Publishing, 2014. 1–22 p. ISBN 978-3-319-09393-2.
- GRIMHOLT, C.; SKOGESTAD, S. Should we forget the smith predictor? **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, Amsterdã, Países Baixos, v. 51, n. 4, p. 769–774, 2018. ISSN 2405-8963. 3rd IFAC Conference on Advances in Proportional-Integral-Derivative Control PID 2018.
- GU, K.; KHARITONOV, V. L.; CHEN, J. **Introduction to Time-Delay Systems**. Boston, MA, EUA: Birkhäuser Boston, 2003. 1–28 p. ISBN 978-1-4612-0039-0.
- HADDAD, W.; CHELLABOINA, V. **Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach**. Princeton, Nova Jersey, EUA: Princeton University Press, 2011. ISBN 9781400841042.
- HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to Functional Differential Equations**. Nova Iorque, NY: Springer New York, 1993. 1–10 p. ISBN 978-1-4612-4342-7.
- HAO, S.; LIU, T.; ZHOU, B. Predictor-based output feedback control design for sampled systems with input delay subject to disturbance. **IET Control Theory & Applications**, Institution of Engineering and Technology, Futures Place, Stevenage, Reino Unido, v. 11, p. 3329–3340(11), December 2017. ISSN 1751-8644.
- KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. Nova Iorque, EUA: Macmillan Publishing Company, 1992. ISBN 9780023635410.
- LIMA, T. A.; VIANA, V. V.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G.; MADEIRA, D. de S. Newton-series-based observer–predictor control for disturbed input-delayed discrete-time systems. **Automatica**, Amsterdã, Países Baixos, v. 146, p. 110624, 2022. ISSN 0005-1098.
- LÉCHAPPÉ, V.; MOULAY, E.; PLESTAN, F.; GLUMINEAU, A.; CHRIETTE, A. New predictive scheme for the control of lti systems with input delay and unknown disturbances. **Automatica**, Amsterdã, Países Baixos, v. 52, p. 179–184, 2015. ISSN 0005-1098.

LÉCHAPPÉ, V.; MOULAY, E.; PLESTAN, F.; GLUMINEAU, A.; CHRIETTE, A. Predictive scheme for observer-based control of lti systems with unknown disturbances. *In: 2015 European Control Conference (ECC)*. Amsterdã, Países Baixos: [S. n.], 2015. p. 2050–2055.

MACHADO, G. F.; PEREIRA, R. D. O.; TORRICO, B. C.; NOGUEIRA, F. G. Porque não deveríamos esquecer o preditor de smith. *In: Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Ouro Preto, MG, Brasil: Galoá, 2019. ISSN 2358-4483.

MANITIUS, A.; OLBROT, A. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Manhattan, Nova Iorque, v. 24, n. 4, p. 541–552, August 1979. ISSN 1558-2523.

MICHIELS, W.; NICULESCU, S.-I. On the delay sensitivity of smith predictors. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, Reino Unido, v. 34, n. 8-9, p. 543–551, 2003.

MICHIELS, W.; NICULESCU, S.-I. **Stability, Control, and Computation for Time-Delay Systems**. Philadelphia, PA, EUA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.

NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. **Dead-time Processes**. Londres, Reino Unido: Springer London, 2007. 9–53 p. ISBN 978-1-84628-829-6.

SANTOS, T. L. M. Modified artstein predictor for lti systems with dead time and unknown disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Brasil, v. 27, p. 263–273, 2016. ISSN 2195-3899.

SANZ, R.; GARCIA, P.; ALBERTOS, P. Enhanced disturbance rejection for a predictor based control of lti systems with input delay. **Automatica**, Amsterdã, Países Baixos, v. 72, p. 205–208, 2016. ISSN 0005-1098.

SEURET, A.; GOUAISBAUT, F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems. **Automatica**, Amsterdã, Países Baixos, v. 49, n. 9, p. 2860–2866, 2013. ISSN 0005-1098.

SILVA, L. R. da; FLESCH, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E. Controlling industrial dead-time systems: When to use a pid or an advanced controller. **ISA Transactions**, Amsterdã, Países Baixos, v. 99, p. 339–350, 2020. ISSN 0019-0578.

SMITH, O. J. Closer control of loops with dead time. **Chemical Engineering Progress**, EUA, v. 53, n. 5, p. 217–219, 1957.

WU, A.-G.; WANG, Y. Prediction schemes for disturbance attenuation of discrete-time linear systems with input-delay. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Hoboken, Nova Jersey, EUA, v. 31, n. 3, p. 772–786, 2021.