



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

CAMILA SENA ARAÚJO

COLORAÇÕES BACKBONE EM GRAFOS COM GALÁXIAS BACKBONE

FORTALEZA

2021

CAMILA SENA ARAÚJO

COLORAÇÕES BACKBONE EM GRAFOS COM GALÁXIAS BACKBONE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- A688c Araújo, Camila Sena.
Colorações Backbone em Grafos com Galáxias Backbone / Camila Sena Araújo. – 2021.
78 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo.
1. Coloração em Grafos. 2. Coloração Backbone Circular. 3. Grafos Planares. I. Título.

CDD 510

CAMILA SENA ARAÚJO

COLORAÇÕES BACKBONE EM GRAFOS COM GALÁXIAS BACKBONE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Combinatória.

Aprovada em: 11/03/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a Dra. Cláudia Linhares Sales
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vinicius Fernandes dos Santos
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

À minha mãe Eliete, por todo amor, dedicação e cuidado durante toda a minha existência.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por todo suporte financeiro e, principalmente, emocional. Em especial, à minha mãe Eliete, pelo amor incondicional e por todos os valores transmitidos.

Aos meus professores Rafael Lima e Geny Marfim, por me orientarem em meus primeiros passos na minha trajetória científica.

A todos os professores dos departamentos de Matemática e Computação da UFC que contribuíram para a minha formação, por todo o conhecimento transmitido. Em especial, ao meu orientador, Júlio Araújo, pela presença, apoio, motivação e por ter me orientado com muita dedicação e competência durante a graduação e mestrado. Às professoras Ana Shirley, Cláudia Linhares e ao professor Vinicius dos Santos (UFMG), por terem aceitado o convite de fazer parte da banca examinadora e pelas valiosas sugestões de melhoria no texto.

Ao melhor amigo que a graduação me propiciou e que se fez ainda mais importante durante o mestrado, José Walisson, pelo conjunto não-enumerável de vezes em que esteve ao meu lado compartilhando as alegrias e os dissabores dessa caminhada.

Aos meus companheiros de graduação e pós-graduação, Isnard Lopes, Valderlanio Ribeiro, Gabriel Barbosa, Selene Carvalho, Pedro Arraes, Mateus Gondim, Davi Andrade, Vinicius Lopes, Beatriz Martins e Otávio Araújo, pelas discussões matemáticas e não-matemáticas, assim como os momentos de descontração.

Aos meus amigos, fora do âmbito acadêmico, Gustavo Monteiro, Vitória Luz, Igor Damasceno, Antonio Mateus, Vitor Pimentel, Alexandre Holanda, Brenna Lopes, Lívia Matos e Amanda Albuquerque, por toda torcida e carinho. Em especial, ao meu amigo e companheiro Anderson, por tornar minha vida mais leve com sua inesgotável fonte de calma e paciência, me ajudando a enfrentar os momentos mais difíceis permanecendo ao meu lado e estendendo sempre sua mão amiga.

À Andrea Dantas, secretária da pós-graduação em Matemática da UFC, por toda competência e assistência a todos os alunos da pós-graduação.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A estrada em frente vai seguindo
Deixando a porta onde começa.
Agora longe já vai indo,
Devo seguir, nada me impeça;
Por seus percalços vão meus pés,
Até a junção com a grande estrada,
De muitas sendas através.
Que vem depois? Não sei mais nada.

(TOLKIEN, 1954)

RESUMO

Uma k -coloração (própria) de um grafo G é uma função $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$, para toda aresta $uv \in E(G)$. Dados um grafo G e um subgrafo $H \subseteq G$, uma k -coloração q -backbone de (G, H) é uma k -coloração de G em que vale a desigualdade $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq q$, para toda aresta $uv \in E(H)$. O número cromático q -backbone de (G, H) , denotado por $\text{BBC}_q(G, H)$, é o menor $k \in \mathbb{Z}$ tal que existe uma k -coloração q -backbone de (G, H) . Uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) é uma k -coloração de G onde $q \leq |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq k - q$, para toda aresta $uv \in E(H)$. O número cromático q -backbone circular de (G, H) , denotado por $\text{CBC}_q(G, H)$, é o menor $k \in \mathbb{Z}$ para o qual existe uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) . Nesta dissertação, além de uma breve exposição dos resultados relacionados à Coloração Backbone, apresentamos nossas contribuições, dentre as quais respondemos parcialmente três problemas propostos em (HAVET et al., 2014): mostramos que se G é um grafo planar com um subgrafo gerador H , então $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 2$ quando $q \geq 3$ e H é uma galáxia; $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q$ quando $q \geq 4$ e H é um emparelhamento; e, $\text{CBC}_3(G, H) \leq 7$ quando G não possui um par de triângulos com arestas adjacentes e H é um emparelhamento. Alguns desses resultados, seguem como consequência de resultados mais gerais que obtivemos acerca do parâmetro $\text{CBC}_q(G, H)$ para classes de grafos maiores do que a classe dos grafos planares. Além disso, mostramos que é possível determinar $\text{BBC}_q(G, H)$ e $\text{CBC}_q(G, H)$ em tempo polinomial quando G é um grafo de largura em árvore limitada e H é um emparelhamento de G . Finalmente, apresentamos um erro na demonstração de que $\text{BBC}_2(G, H) \leq \Delta(G) + 1$, para qualquer emparelhamento H em um grafo G arbitrário (MISKUF et al., 2010), e apresentamos uma demonstração para esse resultado.

Palavras-chave: coloração de grafos; coloração backbone circular; grafos planares.

ABSTRACT

A (proper) k -coloring of a graph G is a function $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ such that $\varphi(u) \neq \varphi(v)$, for all edge $uv \in E(G)$. Given a graph G and a subgraph $H \subseteq G$, a q -backbone k -coloring of (G, H) is a k -coloring of G such that $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq q$, for all edge $uv \in E(H)$. The q -backbone chromatic number of (G, H) , denoted by $\text{BBC}_q(G, H)$, is the smallest $k \in \mathbb{Z}$ such that there exists a q -backbone k -coloring of (G, H) . A circular q -backbone k -coloring of (G, H) is a k -coloring of G such that $q \leq |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq k - q$, for all edge $uv \in E(H)$. The circular q -backbone chromatic number of (G, H) , denoted by $\text{CBC}_q(G, H)$, is the smallest $k \in \mathbb{Z}$ such that there exists a circular q -backbone k -coloring of (G, H) . In this dissertation, in addition to a brief presentation of the results related to Backbone Coloring, we present our contributions, among which we partially answer three problems proposed in (HAVET et al., 2014): we show that if G is a planar graph with a spanning subgraph H , then $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 2$ when $q \geq 3$ and H is a galaxy; $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q$ when $q \geq 4$ and H is a matching; and, $\text{CBC}_3(G, H) \leq 7$ when G does not have a pair of triangles with adjacent edges and H is a matching. Some of these results follow as a consequence of more general results we obtained about the parameter $\text{CBC}_q(G, H)$ for graph classes larger than the class of planar graphs. In addition, we show that it is possible to determine $\text{BBC}_q(G, H)$ and $\text{CBC}_q(G, H)$ in polynomial time when G has bounded treewidth graph and H is a matching of G . Finally, we present an error in the demonstration that $\text{BBC}_2(G, H) \leq \Delta(G) + 1$, for any matching H in an arbitrary graph G (MISKUF et al., 2010), and we present a demonstration for this result.

Keywords: graph coloring; circular backbone coloring; planar graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de um grafo planar que é a representação de um mapa.	11
Figura 2 – Um grafo representando um determinado conjunto de transmissores.	12
Figura 3 – Um exemplo de distribuição de canais de frequência.	13
Figura 4 – Representações distintas para o grafo G	17
Figura 5 – Exemplos de um caminho e de um ciclo.	19
Figura 6 – Exemplo de blocos em um grafo.	20
Figura 7 – Contração da aresta uv	21
Figura 8 – Subdivisão da aresta uv	25
Figura 9 – Ilustração do Lema 2.1.	31
Figura 10 – Exemplo de uma 8-coloração 3-backbone de (G, H)	34
Figura 11 – Exemplo de um grafo planar G com um emparelhamento M e tal que $\text{BBC}_2(G, M) = 5$	37
Figura 12 – Exemplo de um grafo periplanar G com um emparelhamento M tal que $\text{BBC}_2(G, M) = 4$	39
Figura 13 – Exemplo de uma ordenação boa nos vértices de um grafo G	40
Figura 14 – Um contraexemplo para o Lema 3.1.	41
Figura 15 – Exemplo de um grafo de decomposição em blocos de um grafo.	42
Figura 16 – Decomposição em árvore de G	49
Figura 17 – Distância entre 5 e 2 em $\ \cdot\ _5$	52
Figura 18 – Exemplo de uma 10-coloração 3-backbone circular de (G, H)	53
Figura 19 – Exemplo de um par $(K_4, K_{1,3})$ em que $\text{CBC}_q(K_4, K_{1,3}) = 2q + 2$	56
Figura 20 – O grau q -total de um vértice u	60
Figura 21 – Ilustração do conjunto $[6]_{8,3} \subset \mathbb{Z}_8$	60
Figura 22 – v é um vértice M -insaturado.	66
Figura 23 – $\text{CBC}_3(G_1, M_1) = 7$	67
Figura 24 – Uma 7-coloração 3-backbone de (G_1, M_1)	68
Figura 25 – Partição dos conjuntos de cores de γ	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES E NOTAÇÕES	17
2.1	Grafos Planares	22
2.2	O Método do Descarregamento	26
2.3	O Método do Descarregamento em Grafos Planares	27
2.4	O Teorema de Brooks	29
3	COLORAÇÕES BACKBONE	34
3.1	Teorema do Tipo Brooks para Colorações Backbone	39
3.2	Um Algoritmo Polinomial para Grafos com Largura em <i>Árvore Limitada</i>	46
4	COLORAÇÕES BACKBONE CIRCULARES	52
4.1	Grafos Menores-fechado e g -limitados	57
4.2	Emparelhamentos Backbone	59
4.3	Galáxias Backbone	68
5	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

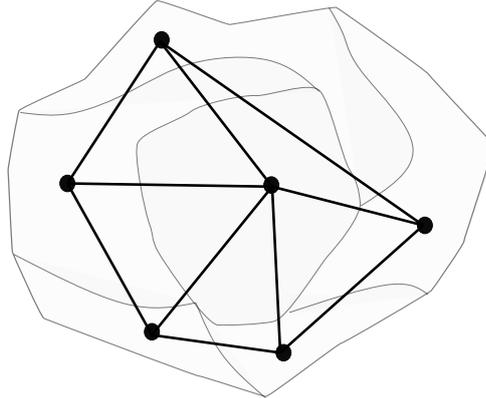
Os primeiros resultados envolvendo colorações em grafos foram motivados, inicialmente, pelo *Problema das Quatro Cores*. A história desse problema teve início em 1852, quando Francis Guthrie, enquanto tentava colorir os distritos do mapa da Inglaterra de modo que regiões vizinhas não possuíssem a mesma cor, conjecturou que sempre seria possível colorir qualquer mapa dessa forma utilizando no máximo quatro cores. Após várias tentativas, Guthrie repassou o problema para seu irmão mais novo, Frederick Guthrie, aluno de Augustus De Morgan, que logo em seguida repassou o problema para seu professor. De Morgan, entusiasmado com o problema, também o repassou para seus demais alunos e, em seguida, apresentou o problema para o Sir William Rowan Hamilton através de uma carta. O problema, entretanto, não chamou a atenção de Hamilton, que respondeu com pouco entusiasmo à carta de De Morgan. Apesar do desinteresse de Hamilton, De Morgan escreveu cartas para outros matemáticos conhecidos, o problema chamou a atenção de alguns desses matemáticos e obteve alguns avanços, mas a questão permaneceu em aberto.

Nos anos seguintes, o problema perdeu força entre a comunidade científica, até que em 1878, Arthur Cayley o divulgou na *London Mathematical Society*, fazendo com que, assim, o problema ganhasse o interesse da comunidade matemática britânica. Em 1879, Alfred Bray Kempe publicou no *American Journal of Mathematics* uma suposta demonstração de que a conjectura era realmente verdadeira (KEMPE, 1879). A demonstração dada por Kempe foi estudada por diversos matemáticos e considerada correta, dando origem ao então conhecido *Teorema das Quatro Cores*. No entanto, em 1890, onze anos após a publicação de Kempe, Percy John Heawood encontrou um erro sutil na demonstração de Kempe, apontando um contraexemplo. Heawood não conseguiu obter uma solução para o problema, mas, apesar disso, usou parte das ideias de Kempe para demonstrar o conhecido *Teorema das Cinco Cores* (HEAWOOD, 1890), onde demonstrou que são necessárias no máximo cinco cores para colorir qualquer mapa de modo que regiões vizinhas não recebam a mesma cor.

Finalmente, após 124 anos, o Teorema das Quatro Cores foi provado por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, em 1976 (APPEL e HAKEN, 1977), com o auxílio de um computador IBM 160 para a verificação e análise de diversos casos. Por outro lado, a demonstração dada por eles era demasiadamente longa e eram necessárias mais de mil horas para que o computador verificasse todos os casos. Tais dificuldades serviram de estímulo para que diversos matemáticos partissem em busca de uma demonstração mais curta. O último avanço nessa busca ocorreu em 1994 quando Paul Seymour, ao lado de Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas (SEYMOUR et al., 1997), apresentou outra versão mais simples para a demonstração do problema, reduzindo a quantidade de cálculos, mas sem dispensar o auxílio de um computador.

A modelagem matemática para o problema de coloração de mapas consiste em representar cada cidade ou região por um ponto no plano, ao qual chamamos de vértice, de modo que cada par de vértices que representam regiões vizinhas são conectados por uma curva no plano, à qual chamamos de aresta. O objeto matemático obtido dessa representação é o que chamaremos de grafo planar, cuja definição um pouco mais formal será dada adiante.

Figura 1 – Exemplo de um grafo planar que é a representação de um mapa.



Fonte: elaborada pelo autor.

Um grafo simples $G = (V, E)$ é uma estrutura matemática formada por um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto $E(G)$ de pares não-ordenados de vértices, chamados de arestas. Se um par não-ordenado de vértices pertence a $E(G)$, diremos que esses vértices são adjacentes. Um subgrafo H de um grafo G é um grafo no qual $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Uma k -coloração própria em um grafo G é uma função que associa uma cor, dentre k cores, a cada vértice de G , de modo que vértices adjacentes recebem cores distintas. O número cromático de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor número inteiro k para o qual é possível obter uma k -coloração própria de G . O problema clássico de coloração em grafos consiste em, dado um grafo G , determinar qual é o valor de $\chi(G)$. Dizemos que um grafo G é planar se existir uma imersão de G no plano de modo que não haja cruzamento entre suas arestas.

Através da modelagem do problema de coloração de mapas por meio de grafos planares, podemos enunciar o Teorema das Quatro Cores da seguinte forma: se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$.

Devido às inúmeras aplicações práticas que surgiram a partir desse resultado, deu-se início à vasta área de colorações em grafos, com diversas variações do problema original. Alguns exemplos dessas variações são: *Colorações Acíclicas* (GRÜNBAUM, 1973), incluindo coloração *harmônica* e *estrela*, *Colorações por Listas* (ERDOS et al., 1979), *Colorações Ponderadas* (GUAN e XUDING, 1997). *b-Colorações* (KRATOCHVÍL et al., 2002) e *L(2, 1)-Colorações* (GRIGGS e YEH, 1992).

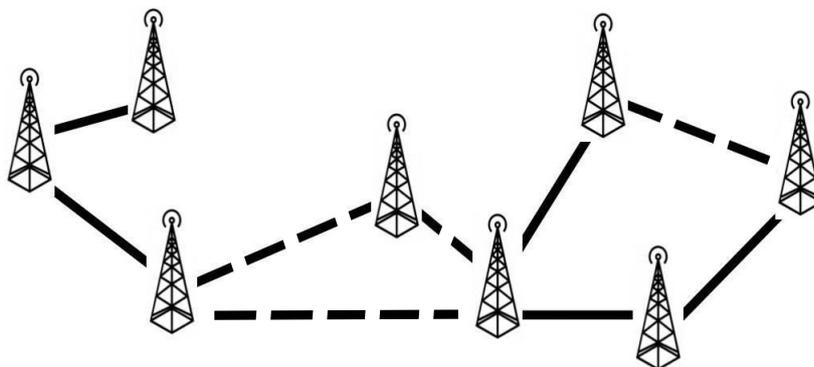
Nesta dissertação, apresentamos um breve estado da arte, bem como algumas

contribuições, acerca de uma variação do problema de coloração conhecida como Coloração Backbone. A noção de Coloração Backbone foi introduzida por Broersma *et al.* (BROERSMA et al., 2003) motivada por problemas de coloração relacionados com distribuição de frequências. Tais problemas são constantemente utilizados para modelar a topologia e a relação de interferência entre transmissores (ou receptores). A modelagem é feita do seguinte modo: consideramos um grafo cujos vértices representam os transmissores e tal que dois vértices são adjacentes quando os transmissores correspondentes estão próximos de tal maneira que ocorra interferência de sinal se esses transmissores receberem o mesmo, ou similar, canal de frequência. Em prática, o problema consiste em distribuir canais de frequência aos transmissores de modo que não ocorra interferência de sinais. Essa modelagem nos permite produzir tipos diversos de problemas de coloração, dependendo da maneira com a qual modelamos o tipo de interferência. De um modo geral, é possível modelar esses problemas da seguinte maneira:

Sejam G_1 um grafo e G_2 um subgrafo de G_1 , determine uma coloração nos vértices de G_1 satisfazendo uma determinada propriedade P_1 em G_1 e uma propriedade P_2 em G_2 .

A maior parte dos resultados obtidos sob esse ponto de vista são concentrados no caso em que G_1 é um grafo planar, utilizando inteiros positivos para representar as cores (para modelar os canais de frequência) a fim de determinar uma coloração de G_1 e G_2 tal que as cores de vértices adjacentes em G_1 sejam distintas e as cores de vértices adjacentes em G_2 diferem de pelo menos $q \geq 2$. Recomendamos a leitura de (BODLAENDER et al., 2000), (CHANG e KUO, 1996) e (BROERSMA, 2007) para mais detalhes.

Figura 2 – Um grafo representando um determinado conjunto de transmissores.



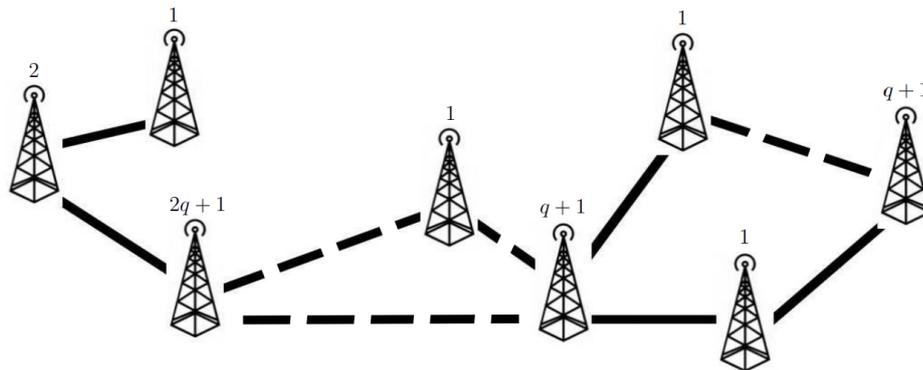
Fonte: elaborada pelo autor.

Para ilustrar essa ideia aplicada ao problema de distribuição de canais de frequência para transmissores, suponha que queremos distribuir canais de frequência para o conjunto de transmissores representado no grafo da Figura 2 acima, onde cada par de

transmissores conectados por uma aresta estão suficientemente próximos de modo que não é possível distribuir um mesmo canal de frequência para ambos sem que ocorra uma interferência de sinal e, além disso, transmissores conectados por uma aresta tracejada estão tão próximos, que apenas atribuir canais de frequência distintos não é suficiente para evitar uma interferência de sinal, ou seja, é necessário atribuir canais de frequência com um determinado nível de diferença. Além disso, imagine que cada canal de frequência possui um custo e desejamos distribuir os canais de frequência de modo a obter o menor custo possível.

Agora, para modelar esse problema, considere cada canal de frequência como sendo um número inteiro positivo. Suponha que a diferença mínima entre os canais de frequência atribuídos aos transmissores conectados por arestas tracejadas, de modo que não ocorra interferência de sinal, seja pelo menos $q \geq 2$. Dessa forma, observe que a distribuição de canais de frequência ilustrada na Figura 3 satisfaz as condições impostas para o nosso problema.

Figura 3 – Um exemplo de distribuição de canais de frequência.



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que uma atribuição de canais de frequência para um conjunto de transmissores pode ser modelado como um problema de coloração em vértices de G . Com efeito, considerando G o grafo ilustrado nas figuras acima, em que cada vértice representa um transmissor, e H um subgrafo de G que representa apenas transmissores que são conectados pelas arestas tracejadas, uma distribuição de canais de frequência satisfazendo as condições do parágrafo anterior pode ser vista como uma coloração própria de G tal que vértices adjacentes em H recebem cores a uma distância de pelo menos q . Tal coloração é o que chamaremos de coloração q -backbone de (G, H) , onde H é chamado o backbone de G . De um modo semelhante ao problema de coloração própria, definimos o número cromático q -backbone de (G, H) , denotado por $BBC_q(G, H)$, o menor inteiro positivo k para o qual é possível obter uma coloração q -backbone com k cores.

Conforme mencionado anteriormente, existem diversos problemas na literatura que são modelados a partir do problema de distribuição de frequências. Um exemplo

interessante é o problema de $L(2, 1)$ -Coloração introduzida inicialmente em (GRIGGS e YEH, 1992). Uma $L(2, 1)$ -Coloração de um grafo G é uma coloração própria de G tal que vértices a uma distância dois recebem cores distintas e vértices adjacentes recebem cores a uma distância maior ou igual a dois. Observe que o problema de $L(2, 1)$ -Coloração pode ser visto como um caso particular do problema de Coloração Backbone. De fato, uma $L(2, 1)$ -coloração de um grafo G corresponde a uma coloração 2-backbone de (G^2, G) , onde G^2 , conhecido como quadrado de G , é o grafo obtido a partir de G pela adição de uma aresta entre cada par de vértices que estejam a uma distância dois em G .

Em 2014, Havet *et al.* (HAVET et al., 2014) apresentaram um caso especial de colorações backbone, conhecido como Coloração Backbone Circular. Nesse caso, os inteiros positivos $1, \dots, k$ que utilizamos para representar os canais de frequência estão dispostos de maneira circular, de modo que a distância entre um par x e y desses inteiros é definida como a menor distância entre eles através desse círculo, ou seja, é igual ao $\min\{|x - y|, k - |x - y|\}$. Dessa forma, uma k -coloração q -backbone circular de um par (G, H) é uma k -coloração própria de G em que vértices adjacentes em H recebem cores à uma distância de pelo menos q , através dessa nova métrica circular definida anteriormente. Como exemplo, observe que a distribuição de canais de frequência ilustrada na Figura 3 pode ser vista como uma $3q$ -coloração q -backbone circular do par (G, H) descrito anteriormente. De modo análogo ao que fizemos anteriormente, definimos o número cromático q -backbone circular de um par (G, H) , denotado por $\text{CBC}_q(G, H)$, como o menor inteiro positivo k para o qual existe uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) .

Assim como no estudo de colorações próprias, a maior parte dos resultados envolvendo colorações backbone encontrados na literatura estão relacionados com os valores de $\text{BBC}_q(G, H)$ e $\text{CBC}_q(G, H)$ para um determinado par (G, H) sob dois pontos de vista: primeiro, sob ponto de vista de otimização, onde desejamos obter um limitante superior para esses valores dependendo apenas da classe de grafos para qual G ou H pertencem; segundo, sob ponto de vista de complexidade computacional, quando analisamos se para um determinado par (G, H) , decidir o valor de $\text{BBC}_q(G, H)$ ou de $\text{CBC}_q(G, H)$ é um problema NP-Completo ou um problema com solução em tempo polinomial.

As principais contribuições dessa dissertação são respostas parciais para o problema de determinar um limitante superior para o parâmetro $\text{CBC}_q(G, H)$ quando G é um grafo planar e H é uma galáxia, ou uma subclasse de galáxias, como uma estrela ou um emparelhamento. Esse problema foi proposto inicialmente por Havet *et al.* (HAVET et al., 2014), quando os autores, após demonstrarem que $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 4$ quando G é um grafo planar e H uma floresta geradora, conjecturaram que esse limitante poderia ainda ser reduzido em uma unidade nesse caso, em duas unidades no caso em que H é uma galáxia geradora e em três unidades no caso em que H é um emparelhamento e $q \geq 3$, isto é, quando G é um grafo planar, podemos ter $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 2$ quando H é uma galáxia geradora e $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 1$ quando H é um emparelhamento e $q \geq 3$. Nesse

mesmo trabalho, os autores já haviam obtido respostas para esse problema em alguns casos específicos, atribuindo condições para o tamanho da cintura de G ou para o grau máximo de H . Em nossos esforços em busca desse limitante, obtivemos dois resultados mais gerais, que envolvem classes de grafos maiores do que a classe dos grafos planares. O primeiro resultado concerne grafos pertencentes a uma classe de grafos menor-fechada e g -limitada \mathcal{G} , para uma dada função $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$, com um emparelhamento como backbone, onde mostramos que para tais pares vale que $\text{CBC}_q(G, H) \leq \chi(H) \cdot \max\{g(G), q\}$ (as definições de uma classe de grafos g -limitada e menor-fechada se encontram na página 57). No segundo resultado impomos apenas a restrição de que $q \geq \chi(G) - 1$ para o caso em que G é um grafo qualquer com uma galáxia geradora como backbone e mostramos que, nesse caso, temos que $\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + \chi(G) - 2$. Em ambos os casos, esses resultados resolvem as questões iniciais para quase todos os valores possíveis de q .

Para o parâmetro $\text{BBC}_q(G, H)$, discutimos um problema na demonstração feita por Miskuf *et al.* em (MISKUF et al., 2010) de que $\text{BBC}_2(G, H) \leq \Delta(G) + 1$, quando H é um emparelhamento de um grafo G qualquer, e, em seguida, apresentamos uma correção para esse problema. Ainda nesse parâmetro, apresentamos um algoritmo que determina em tempo polinomial o valor do parâmetro quando G é um grafo com largura em árvore limitada e H é um emparelhamento em G . Inicialmente, nosso objetivo era construir um algoritmo para o caso em que G é um grafo periplanar mas, durante a construção desse algoritmo, percebemos que o fator essencial para a sua execução era a condição de que grafos periplanares possuem largura em árvore limitada, de modo que o resultado pôde ser facilmente estendido para um caso mais geral. Ressaltamos ainda que, apesar da construção do algoritmo ser feita para o parâmetro $\text{BBC}_q(G, H)$, é possível obter o mesmo resultado se considerarmos o parâmetro $\text{CBC}_q(G, H)$ na execução do algoritmo.

A organização deste trabalho se encontra da seguinte forma:

- a) No Capítulo 2, apresentamos as definições e a terminologia que servirão como base para o bom entendimento do desenvolvimento deste trabalho; em seguida, no mesmo capítulo, abordamos de modo um pouco mais detalhado resultados elementares sobre planaridade em grafos; o método do descarregamento; e, por último, uma demonstração do Teorema de Brooks;
- b) No Capítulo 3, é apresentado formalmente o conceito de Coloração Backbone, bem como as principais propriedades e os resultados que nos motivaram para o estudo desse problema; em seguida, apresentamos uma correção na demonstração de um resultado em (MISKUF et al., 2010) similar ao Teorema de Brooks, no contexto de Colorações Backbone; e, por fim, apresentamos um algoritmo que calcula o valor de $\text{BBC}_q(G, M)$ em tempo polinomial através da decomposição em árvore de G , em que G é um grafo com largura em árvore limitada e M é um emparelhamento em G ;
- c) No Capítulo 4, tratamos do conceito formal de Coloração Backbone Circular e apre-

sentamos as propriedades e resultados que motivaram nosso estudo; em seguida, apresentamos um resultado que determina um limitante superior para o parâmetro $CBC_q(G, H)$ quando G é um grafo g -limitado e menor-fechado e H um subgrafo gerador de G . Tal resultado responde parcialmente o problema proposto por Havet *et al.* para o caso em que G é um grafo planar com um emparelhamento H e $q \geq 4$; em seguida, ainda no caso em que G é um grafo planar e H é um emparelhamento, determinamos, via método do descarregamento, um limitante superior para o parâmetro $CBC_q(G, H)$ quando $q \geq 4$ ou quando $q = 3$ e G não possui triângulos adjacentes; e, por último, determinamos um limitante superior para o parâmetro $CBC_q(G, H)$ quando H é uma galáxia geradora e $q \geq \chi(G) - 1$, o que também responde parcialmente o problema proposto por Havet *et al.* no caso em que G é um grafo planar com uma galáxia geradora H e $q \geq 3$;

- d) Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos as considerações finais acerca do trabalho desenvolvido e possíveis linhas de pesquisa em trabalhos futuros.

Todos os resultados obtidos em nossa pesquisa e apresentados nesta dissertação foram também apresentados no *X Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium* (LAGOS) em 2019 e submetidos ao periódico *Discrete Applied Mathematics* (DAM).

2 PRELIMINARES E NOTAÇÕES

Nesta seção, concentramo-nos em introduzir os conceitos básicos e a terminologia necessária para o bom entendimento do conteúdo desta dissertação. Todos os conceitos aqui apresentados podem ser encontrados com mais detalhes em (WEST, 2001) e (BONDY e MURTY, 2008).

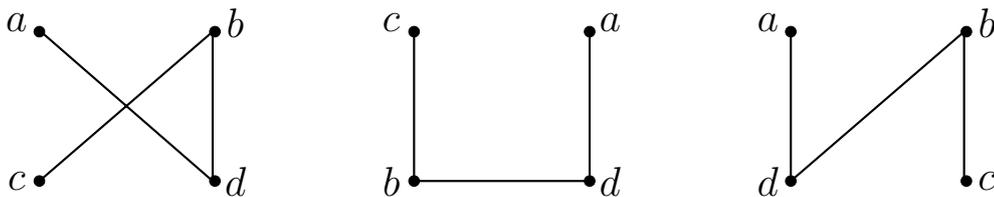
Dados um conjunto não-vazio X e um número $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $\binom{X}{k}$ a família dos subconjuntos de X com k elementos, isto é, o conjunto $\{A \subset X : |A| = k\}$.

Um *grafo (simples)* é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto não-vazio, cujos elementos são chamados de *vértices* de G , e E é um subconjunto de $\binom{V}{2}$, cujos elementos são chamados de *arestas* de G . Os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo G são denotados por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Doravante, qualquer grafo mencionado será tal que $V(G)$ é um conjunto finito. Ademais, no caso em que $|V(G)| = 1$ diremos que G é um *grafo trivial*.

Se G é um grafo e $u, v \in V(G)$, diremos que u e v são *adjacentes* (ou *vizinhos*) se $\{u, v\} \in E(G)$. Neste caso, dizemos que a aresta $\{u, v\}$ *incide* em u e v e ainda que u e v são *extremidades* de $\{u, v\}$, e denotamos a aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv ou vu .

A fins práticos, é conveniente representar um grafo $G = (V, E)$ geometricamente associando a cada vértice de G um ponto no plano e a cada aresta de G uma curva ligando o par de vértices correspondentes. Essa representação, no entanto, tem como propósito apenas representar as relações de adjacência entre os vértices de G . Por exemplo, a Figura 4 a seguir nos fornece representações distintas para o grafo $G = \{\{a, b, c, d\}, \{ad, bc, bd\}\}$.

Figura 4 – Representações distintas para o grafo G .



Fonte: elaborada pelo autor.

Para um dado grafo $G = (V, E)$ e um vértice $v \in V(G)$ fixado, chamaremos de *vizinhança de v em G* ou simplesmente *vizinhança de v* , o conjunto dos vértices adjacentes (ou vizinhos) a v , isto é, o conjunto $\{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. Denotaremos tal conjunto por $N_G(v)$ ou, quando G estiver claro no contexto, simplesmente $N(v)$. De um modo geral, dado um subconjunto $S \subset V(G)$, definiremos a *vizinhança de S* como o conjunto $N_G(S) := \bigcup_{v \in S} N_G(v)$. Nesse contexto, definiremos o *grau de um vértice v em G* , denotado por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$), o valor $|N_G(v)|$. Ademais, denotaremos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os valores associados ao menor e ao maior grau de um vértice em G ,

respectivamente. Diremos que um grafo é *regular* se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, quando $\delta(G) = \Delta(G)$. Observe que quando consideramos a soma dos graus de todos os vértices de um grafo G qualquer, cada aresta contribui com duas unidades para essa soma, uma unidade para cada uma de suas extremidades, de modo que temos a seguinte

Propriedade 2.1. *Seja G um grafo qualquer, vale que*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Um *subgrafo de G* é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, tal relação será simplesmente denotada por $H \subseteq G$. Para o caso em que $V(H) = V(G)$, diremos que H é um *subgrafo gerador* de G . Denotaremos por $G - e$ o subgrafo obtido pela remoção de uma aresta $e \in E(G)$ ou, de um modo geral, $G - M$ o subgrafo obtido pela remoção de um subconjunto $M \subseteq E(G)$ de arestas de G . Similarmente, fixado um vértice $v \in V(G)$ ou um subconjunto $S \subseteq V(G)$, denotaremos por $G - v$ e por $G - S$ os subgrafos obtidos pela remoção de v e de S , respectivamente, no grafo G . Fixado um conjunto $T \subseteq V(G)$, caracterizamos por *subgrafo de G induzido por T* o subgrafo $G - \bar{T}$, onde $\bar{T} = V(G) - T$, e denotaremos tal subgrafo por $G[T]$. Essencialmente, podemos enxergar $G[T]$ como o subgrafo de G consistindo de T e todas as arestas de G cujas extremidades pertencem a T .

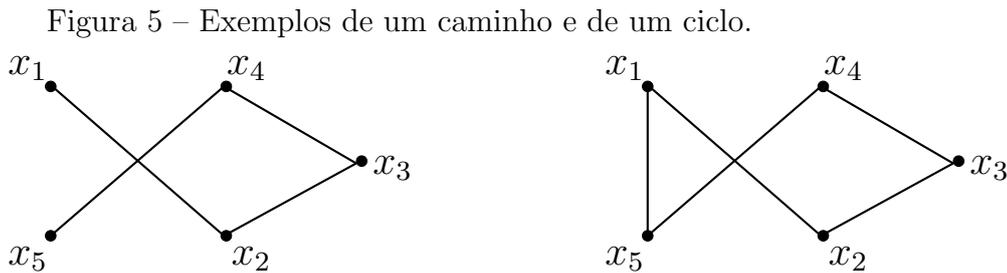
Dados um grafo G e um subgrafo $H \subseteq G$, um *par* é um par ordenado (G, H) onde H será chamado de *backbone* de G . Dado um par (G, H) , um *subpar* de (G, H) é um par (G', H') onde $G' \subseteq G$ e $H' \subseteq H$, denotado por $(G', H') \subseteq (G, H)$. Diremos que um subpar $(G', H') \subseteq (G, H)$ é *próprio* se ou H' ou G' é um subgrafo próprio de H ou de G , respectivamente. Um subpar (G', H') será dito um *subpar induzido* de G e H se G' é um subgrafo de G e H' é o subgrafo de H induzido por $V(H) \cap V(G')$. Observe que dado qualquer $S \subset V(G)$, o par $(G - S, H - S)$ é um subpar induzido de (G, H) . Dado um vértice $v \in V(G)$, denotaremos por $(G, H) - v$ o subpar (G', H') tal que $G' = G - v$ e $H' = H - v$. De modo análogo, dada uma aresta $e \in E(G)$, denotaremos por $(G, H) - e$ o subpar (G', H') tal que $G' = G - e$ e $H' = H - e$.

Um subconjunto $S \subset V(G)$ em um grafo G é dito um *conjunto independente* se seus vértices são dois-a-dois *não-adjacentes*. Por vacuidade, se S consiste de apenas um vértice, então S é um conjunto independente. No caso em que S é um subconjunto de vértices dois-a-dois adjacentes, diremos que S é uma *clique* em G . Ainda nesse caso, quando $S = V(G)$, diremos que G é um *grafo completo* e o denotaremos por K_n , onde $n = |V(G)|$. Um subgrafo $H \subseteq G$ é um *grafo split* quando $V(H)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y de tal forma que X é uma clique e Y é um conjunto independente.

Um *caminho* em um grafo G é um subgrafo de G cujos vértices podem ser orde-

dados de forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, são vértices consecutivos nessa ordenação. Observe que, fixado um caminho, a ordenação em seus vértices é única, com exceção da ordenação inversa. Assim, dados dois vértices u e v em $V(G)$, definimos um uv -caminho como um caminho em G cujo primeiro vértice desse caminho é u e o último vértice é v . Um caminho $P \subseteq G$ será chamado de *caminho Hamiltoniano* quando $V(P) = V(G)$. Um *ciclo* em G é um subgrafo de G cujos vértices podem ser dispostos de modo circular de forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, aparecem consecutivamente ao redor do círculo. O *tamanho* de um ciclo (ou de um caminho) é quantidade de vértices pertencentes a esse ciclo. Denotaremos um ciclo de tamanho k por C_k e diremos que C_k é um *ciclo par* se k for um número par, caso contrário, diremos que C_k é um *ciclo ímpar*. Um grafo será dito *acíclico* quando não possuir ciclos. A *cintura* de um grafo G é o tamanho do menor ciclo em G . No caso em que G é acíclico, diremos que G tem cintura infinita. Dados dois vértices u e v em um grafo G , a *distância* entre u e v em G é o tamanho do menor uv -caminho em G .

Na Figura 5 adiante, vemos uma das representações possíveis para P_5 e para C_5 .



Fonte: elaborada pelo autor.

Um *passeio* em um grafo G é uma sequência $v_1e_1v_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$ cujos termos são vértices e arestas dispostos alternadamente satisfazendo a condição de que $e_i = v_{i-1}v_i$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Um passeio $v_1e_1v_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$ será dito um *passeio fechado* se $v_1 = v_k$.

Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ pode ser escrito como uma união de dois conjuntos independentes, chamados de *partes* de G . Ademais, G será dito um *grafo bipartido completo* ou uma *biclique* quando dois vértices são adjacentes se, e somente se, estão em partes de G distintas. Nesse último caso, denotaremos o grafo por $K_{m,n}$, onde m e n são as cardinalidades de suas partes. Um resultado conhecido na literatura, provado em (KONIG, 1936), nos diz que um grafo é bipartido se, e somente se, não contém ciclos ímpares. De modo geral, G é um grafo k -partido quando $V(G)$ pode ser expresso como união de k conjuntos independentes.

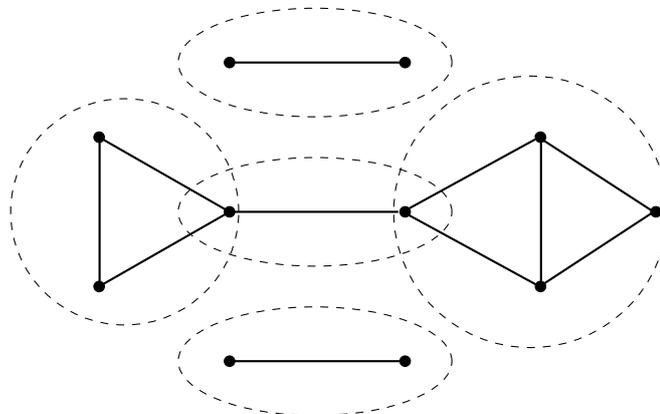
Um grafo não-trivial G é dito *conexo* se dada qualquer partição de $V(G)$ em dois subconjuntos não-vazios X e Y existir uma aresta com uma extremidade em X e a outra extremidade em Y . Caso isso não seja possível, diremos que G é *desconexo*. De

outra forma, um grafo é conexo se para quaisquer $uv \in V(G)$ existir um uv -caminho. Por vacuidade, um grafo trivial também será dito conexo. De um modo geral, não é difícil ver que todo grafo pode ser visto como uma união disjunta de grafos conexos, chamados de *componentes conexas de G* (ou simplesmente *componentes de G*). Para tanto, basta observar que cada componente de G é um subgrafo conexo de G que é maximal com respeito a essa propriedade. Uma *aresta de corte* de G é uma aresta tal que $G - e$ possui mais componentes do que G . Analogamente, diremos que um vértice $v \in V(G)$ é um *vértice de corte* de G quando $G - v$ possuir um número de componentes maior do que o número de componentes de G .

De um modo geral, definimos a *conectividade de um grafo G* , denotada por $\kappa(G)$, como sendo a menor cardinalidade possível para um conjunto S de modo que $G - S$ é desconexo ou um grafo trivial. Dessa forma, dado $k \in \mathbb{N}$, diremos que um grafo G é *k -conexo* quando $\kappa(G) \geq k$. Observe que, no caso em que $k = 2$, um grafo 2-conexo não possui vértices de corte. A recíproca, por outro lado, não é necessariamente verdadeira para todo grafo conexo, como no caso em que $G = K_1$ ou $G = K_2$. Por outro lado, subgrafos conexos sem vértices de corte nos fornecem uma decomposição bastante útil de um grafo, o que nos motiva a definir um tipo especial de subgrafo em um grafo qualquer, como veremos no parágrafo seguinte.

Um *bloco* de um grafo G é um subgrafo conexo de G que não possui vértices de corte e que, além disso, é maximal com respeito a essa propriedade. Quando G é um grafo conexo e sem vértices de corte, temos que G é um bloco. Observe que por essa definição, se H é um bloco de um grafo G , então H não possui vértices de corte mas, por outro lado, é possível que H possua vértices que são vértices de corte de G . Na Figura 6, por exemplo, temos um grafo possuindo cinco blocos: três cópias de K_2 , uma cópia de K_3 e um subgrafo que não é nem um ciclo e nem uma clique.

Figura 6 – Exemplo de blocos em um grafo.



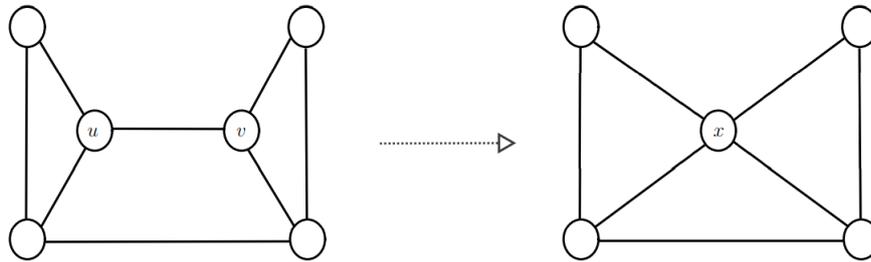
Fonte: (WEST, 2001).

Dado um grafo conexo G , se existirem três vértices $x, y, v \in V(G)$ tais que $G - x - y$ é conexo, $x, y \in N(v)$ e $xy \notin E(G)$, diremos que $(v; x, y)$ é um *fork* em G .

Essa estrutura, como veremos futuramente, possui grande utilidade para a demonstração de alguns resultados apresentados nessa dissertação.

Dados um grafo G e uma aresta $e \in E(G)$, em que $e = uv$, uma *contração de e* é o processo de remoção dos vértices u e v seguido pela adição de um novo vértice x adjacente a todos os vizinhos de u e de v . Diremos que um grafo H é um *menor de G* se H pode ser obtido de G através de uma sequência finita de contrações de arestas ou remoções de vértices ou arestas de G . Na Figura 7 abaixo, temos um exemplo de um grafo obtido pela contração de uma aresta uv . Dessa forma, o grafo da direita é um menor do grafo da esquerda.

Figura 7 – Contração da aresta uv .



Fonte: elaborada pelo autor.

Um grafo G é chamado de *floresta* quando cada uma de suas componentes são grafos acíclicos. No caso em que G é um grafo conexo, dizemos que G é uma *árvore*. Em outras palavras, uma floresta é um grafo onde cada componente é uma árvore. Dado um grafo G qualquer, uma *árvore geradora de G* é um subgrafo gerador de G que é uma árvore. Observe que todo grafo conexo G possui uma árvore geradora, basta remover, passo-a-passo, uma aresta de cada ciclo existente em G . Dizemos que um vértice $v \in V(G)$ é uma *folha* se $d(v) = 1$. Uma árvore é dita uma *árvore enraizada* quando podemos destacar um determinado vértice, ao qual chamaremos de *vértice raiz*. Os vértices de uma árvore enraizada serão chamados por *nós*.

Dada uma árvore T enraizada em um nó $r \in V(T)$, chamaremos de *nível* de um nó $v \in V(T)$ em T o tamanho do rv -caminho em T . Dessa forma, cada aresta de T é tal que suas extremidades pertencem a níveis consecutivos. Ademais, fixado um nó $v \in V(T)$, cada nó no rv -caminho em T será chamado de *ancestral* de v , e cada nó para o qual v é um ancestral será chamado *descendente* de v . Se o ancestral ou descendente de um nó $v \in V(T)$ for diferente de v , diremos que tal nó é um ancestral ou descendente *próprio* de v . Ao ancestral próprio imediato de v , chamaremos de *pai* de v , e aos nós para os quais v é um pai, chamaremos de *filhos* de v . Uma *subárvore* T_v de T é uma árvore enraizada em um vértice $v \in V(T)$ definida pelo subgrafo induzido por v e todos os seus descendentes.

Uma subclasse especial de árvores é a classe das *estrelas*. Uma *estrela* com n vértices é uma árvore com $n - 1$ folhas. O vértice de uma estrela que é adjacente a todas

as folhas é chamado de *vértice central*. De outro modo, uma estrela com n vértices é o grafo $K_{1,n-1}$. Uma *galáxia* é um grafo onde cada componente conexa é uma estrela.

Um *emparelhamento* M em um grafo G é um subconjunto $M \subseteq E(G)$ de arestas que não compartilham extremidades. Quando um vértice $v \in V(G)$ é extremidade de alguma aresta em M , diremos que v é um vértice *M -saturado*. Caso contrário, diremos que v é *M -insaturado*. Doravante, quando não houver risco de confusão e com abuso de notação, também chamaremos subgrafos induzidos por um emparelhamento simplesmente por emparelhamentos. Sob esse ponto de vista, observe que emparelhamentos formam uma subclasse de galáxias.

Como visto anteriormente, uma *k -coloração* em um grafo G é uma função $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Dizemos que uma k -coloração f é *própria* quando $f(u) \neq f(v)$ sempre que $uv \in E(G)$. O valor de f em um vértice v é chamado de *cor de v* . Os vértices na pré-imagem de uma cor $i \in \{1, \dots, k\}$ por f formam um conjunto chamado *classe da cor i* . Um grafo é dito *k -colorível* se existir uma k -coloração própria em G . O *número cromático* de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro $k \in \mathbb{Z}$ para o qual G é k -colorível. Quando $\chi(G) = k$, dizemos que G é um grafo *k -cromático*. Um grafo G é dito *k -crítico* quando G é k -cromático e $\chi(H) < k$ sempre que H for um subgrafo próprio de G .

Pela definição dada no parágrafo anterior, é fácil deduzir que cada classe de cor em uma k -coloração própria é um conjunto independente, de modo que um grafo G é k -colorível se, e somente se, é um grafo k -partido. Por esse ponto de vista, observe que $\chi(C_{2k}) = 2$ e $\chi(C_{2k+1}) = 3$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Ademais, como qualquer conjunto independente no grafo completo K_n consiste de um único vértice, temos que $\chi(K_n) = n$.

Por fim, dados um grafo G , um subgrafo próprio $H \subset G$ e uma k -coloração própria $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, denotaremos por $\varphi \upharpoonright_H$ a k -coloração própria em H tal que $\varphi \upharpoonright_H(v) = \varphi(v)$, para cada $v \in V(H)$. Nesse caso, diremos também que $\varphi \upharpoonright_H$ é uma *k -coloração parcial* em G .

2.1 Grafos Planares

Como introduzimos anteriormente, um grafo G será dito *planar* se admitir alguma representação no plano (ou na esfera) sem que suas arestas se intersectem além de suas extremidades. Tal representação será dita uma *representação planar* de G . Um *grafo plano* é uma representação planar específica de um grafo planar. O conceito planaridade em grafos surgiu da necessidade de representar graficamente um mapa no plano, como uma ferramenta para resolver o problema de coloração em mapas, o que, em seguida, motivou diversos estudos em Teoria dos Grafos envolvendo aspectos topológicos do plano e de superfícies em \mathbb{R}^3 , dando início a uma nova área conhecida posteriormente como Teoria Topológica dos Grafos. Nessa dissertação, no entanto, daremos ênfase aos aspectos

combinatórios, deixando como recomendação a leitura de (MOHAR e THOMASSEN, 2014) para um tratamento topológico mais rigoroso. Todavia, alguns conceitos topológicos são indispensáveis no estudo de planaridade e giram em torno do conceito de *curvas simples*. Uma *curva* é uma imagem contínua de um intervalo fechado na reta em \mathbb{R}^2 . Dizemos que uma curva é uma *curva fechada* quando os valores das extremidades do intervalo no domínio são iguais. Uma curva ou uma curva fechada será dita *simples* se a função correspondente é injetiva. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é dito *conexo por arcos* quando quaisquer dois pontos de X pertencem a uma curva inteiramente contida em X .

As definições apresentadas no parágrafo anterior são essenciais no estudo de planaridade, uma vez que um ciclo em um grafo plano pode ser visto como uma curva fechada simples. Ademais, esses conceitos são necessários no enunciado do teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em (MOHAR e THOMASSEN, 2014).

Teorema 2.1 (Teorema da Curva de Jordan). *Qualquer curva fechada simples no plano o divide em dois conjuntos conexos por arcos disjuntos.*

De posse do resultado acima, veja que um grafo plano divide o plano em uma quantidade finita de conjuntos abertos conexos por arcos. Tais conjuntos serão chamados de *faces* de G . Todo grafo plano possui uma única face ilimitada, essa face será chamada de *face externa*. Denotaremos por $F(G)$ o conjunto das faces de um grafo plano G . A *fronteira* de uma face f é a fronteira do conjunto f no sentido topológico. Uma face de um grafo plano é dita *incidente* aos vértices e arestas que estão em sua fronteira. Ademais, duas faces serão *adjacentes* quando suas fronteiras compartilharem uma aresta. Quando um grafo plano é conexo, a fronteira de cada face desse grafo é um passeio fechado. No caso em que G é um grafo plano desconexo, G possui faces em que a fronteira consiste de mais de um passeio fechado. De toda forma, definiremos *comprimento* de uma face f em um grafo plano G como o menor comprimento de um passeio fechado que define a fronteira de f , e denotaremos tal valor por $|f|$.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades elementares que nos ajudarão a concluir de forma mais rápida, como veremos nos exemplos que as seguem, quando um grafo não é planar.

Propriedade 2.2. *Se G um grafo plano e conexo, então*

$$\sum_{f \in F(G)} |f| = 2|E(G)|.$$

Considerando um grafo G^* em que cada vértice representa uma face de um grafo plano G e $uv \in E(G^*)$ se, e somente se, as faces representadas por u e v compartilham fronteira não-trivial em G , a Propriedade 2.2 acima segue diretamente da Propriedade 2.1

aplicada em G^* . O grafo G^* é conhecido como o *grafo dual* de G .

Em (EULER, 1758), Leonhard Euler demonstrou uma das propriedades mais conhecidas envolvendo grafos planares, onde podemos relacionar o número de faces, arestas e vértices de um grafo plano conexo através da fórmula enunciada na seguinte

Propriedade 2.3 (Fórmula de Euler). *Se G é um grafo plano conexo, então*

$$|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| = 2.$$

A fórmula acima pode ser obtida facilmente por indução em $|V(G)|$.

Como consequência da Fórmula de Euler, observe que o grafo $K_{3,3}$ é um exemplo de um grafo não-planar. De fato, suponha que exista uma representação planar de $K_{3,3}$ e, como $K_{3,3}$ é conexo, pela Fórmula de Euler, devemos ter $|F(K_{3,3})| = 5$. Ademais, como $K_{3,3}$ é bipartido, todas as suas faces têm comprimento par e, portanto, comprimento maior ou igual a 4, de modo que

$$2 \cdot |E(K_{3,3})| = \sum_{f \in F(K_{3,3})} |f| \Rightarrow 2 \cdot 9 \geq 4 \cdot |F(K_{3,3})| \Rightarrow 18 \geq 20,$$

o que é um absurdo.

Propriedade 2.4. *Se G é um grafo planar com pelo menos três vértices, então*

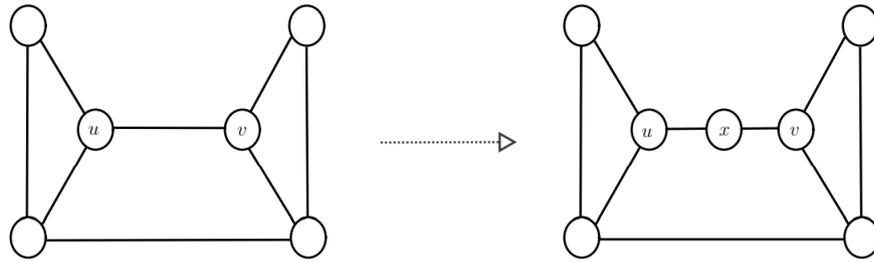
$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

A Propriedade 2.4 acima é uma consequência imediata da Propriedade 2.2 juntamente com a Fórmula de Euler, uma vez que todas as faces de um grafo plano têm comprimento maior ou igual a 3. Como consequência, observe que o grafo K_5 não é um grafo planar. De fato, se K_5 for um grafo planar, a Propriedade 2.4 nos diz que $10 \leq 9$, o que é um absurdo.

Fixada uma aresta e em um grafo G , com extremidades u e v , uma *subdivisão de e* é o processo de remoção da aresta e seguido pela adição de um novo vértice x adjacente a u e v . Diremos que um grafo H é um *menor topológico* de G se G pode ser obtido de H através de uma sequência finita de subdivisões em arestas de H ou pela adição de vértices ou arestas em H . Na Figura 8 abaixo, o grafo à esquerda é um menor topológico do grafo à direita, obtido pela subdivisão da aresta uv .

Pela definição apresentada no parágrafo anterior, observe que se H é um menor topológico de G , então H é também um menor de G .

Ademais, note que se G é um grafo planar, é possível obter uma representação

Figura 8 – Subdivisão da aresta uv .

Fonte: elaborada pelo autor.

planar para qualquer que seja o subgrafo $H \subseteq G$, de modo que todo subgrafo de um grafo planar é também um grafo planar. Por outro lado, observe também que não há como obter uma representação planar para um grafo obtido através de uma sequência de subdivisões nas arestas de um grafo não-planar. Dessa forma, se G não é um grafo planar, qualquer subdivisão de G também não é planar. De posse dessa observação, veja que se um grafo G possui $K_{3,3}$ ou K_5 como menores topológicos, então G não pode ser um grafo planar. Em 1930, Kuratowski demonstrou que essa condição é também uma condição suficiente para que um grafo seja planar, fornecendo assim uma das mais conhecidas e importantes caracterizações para grafos planares:

Teorema 2.2 (Kuratowski, 1930). *Um grafo G é planar se, e somente se, não possui K_5 ou $K_{3,3}$ como menores topológicos.*

Uma vez que um grafo contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menores topológicos se, e somente se, também contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menores, o Teorema de Kuratowski tem como consequência o seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se em (WAGNER, 1937):

Teorema 2.3 (Wagner, 1937). *Um grafo G é planar se, e somente se, não possui K_5 ou $K_{3,3}$ como menores.*

Um grafo G será dito *periplanar* se admitir uma representação planar em que todos os vértices se encontram na face externa. Observe que todo grafo periplanar é também um grafo planar. Mais ainda, se G é um grafo periplanar, é possível obter uma representação planar para o grafo obtido de uma representação planar de G com a adição de um vértice adjacente a todos os vértices de G . Dessa forma, temos a seguinte caracterização para grafos periplanares, como consequência do Teorema de Kuratowski:

Teorema 2.4. *Um grafo G é periplanar se, e somente se, não possui K_4 ou $K_{2,3}$ como menores topológicos.*

De posse do Teorema 2.4 acima, observe que a classe dos grafos periplanares é uma subclasse da classe dos grafos série-paralelos: uma classe de grafos que pode ser caracterizada como a classe de grafos que não possuem K_4 como menor. Tais classes de grafos são frequentemente utilizadas como modelo quando desejamos analisar a complexidade em diversos problemas em grafos.

2.2 O Método do Descarregamento

O método do descarregamento, também conhecido como o método da descarga, é uma ferramenta comumente utilizada para demonstrar propriedades estruturais em Teoria dos Grafos. Tal método costuma ser empregado em diversos contextos, como, por exemplo, em problemas de imersão ou de decomposição em grafos, disseminação de infecções em redes, problemas geométricos e, mais frequentemente, em problemas de coloração em grafos planares, onde, em muitos casos, consideramos grafos imersos em outras superfícies, como o plano projetivo e o toro, por exemplo. Uma das aplicações mais notáveis do método é na demonstração do Teorema das Quatro Cores, visto que o método teve papel central na versão de Appel e Haken (APPEL e HAKEN, 1977) e, posteriormente, na versão de Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (SEYMOUR et al., 1997).

De um modo geral, o método funciona da seguinte forma: Suponha que desejamos demonstrar que todo grafo pertencente a uma certa classe Σ de grafos possui uma determinada propriedade P . A primeira etapa do método consiste em considerarmos um grafo arbitrário $G \in \Sigma$ e atribuirmos cargas em elementos específicos de G (por exemplo: em vértices, arestas ou faces) de modo que, tendo posse de alguma propriedade característica de Σ , possamos demonstrar que a carga total atribuída ao grafo G é constante ou menor do que uma determinada constante. Na segunda etapa, chegamos a um absurdo ao demonstrarmos que a ausência da propriedade P em G nos permite redistribuir as cargas, por meio de *regras de descarregamento*, de modo que a carga total seja diferente ou maior do que a constante inicial.

O modo mais frequente com que o método é utilizado é iniciando a demonstração por contradição assumindo que existem grafos em Σ que não satisfazem a propriedade P e, dentre todos esses grafos, consideramos o que possui o menor tamanho, digamos G_0 , para aplicarmos a primeira etapa do método. Antes disso, partindo do pressuposto de que G_0 é um contraexemplo mínimo, conseguimos demonstrar que algumas estruturas locais não devem existir em G_0 , pois a existência de tais estruturas implicaria a presença da propriedade P em G_0 ou violaria a regularidade da carga total. Por outro lado, ao aplicarmos a segunda etapa do método, concluímos que a ausência da propriedade P em G_0 acarretaria na ocorrência de tais estruturas locais em G_0 , chegando a uma contradição.

A fim de tornar as ideias apresentadas no parágrafo anterior mais precisas,

estabelecemos as seguintes definições: Uma *configuração* em um grafo G pode ser uma estrutura qualquer em G (frequentemente, uma classe específica de subgrafo). Uma configuração é dita uma *configuração redutível* para uma determinada propriedade P quando esta configuração não ocorre em um grafo minimal que não possui a propriedade P . Finalmente, diremos que uma configuração é *inevitável* quando ela sempre ocorre em um grafo minimal que não possui a propriedade P .

A inconsistência na noção de configuração nos permite utilizar o método em contextos diversos. Ademais, a minimalidade de um grafo é determinada com respeito a uma certa ordem parcial sobre a classe de grafos considerada. Em geral, essa minimalidade é vista com relação a uma determinada propriedade possuída pelo grafo que é preservada em todo subgrafo próprio do grafo considerado.

2.3 O Método do Descarregamento em Grafos Planares

Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma breve exposição do uso do método do descarregamento em grafos planares através de alguns exemplos. O primeiro exemplo, como veremos a seguir, é um resultado elementar em Teoria dos Grafos cuja demonstração pode ser feita de modo mais simples sem o uso do método do descarregamento. Entretanto, para um melhor entendimento do método, apresentaremos uma demonstração em termos do descarregamento.

Exemplo 2.1. *Todo grafo planar possui um vértice com grau no máximo 5.*

Demonstração. Considere $G = (V, E)$ um grafo plano arbitrário e F o conjunto das faces de G . Inicialmente, iremos atribuir $d(v) - 6$ unidades de carga para cada vértice $v \in V$ e $2|f| - 6$ unidades de carga para cada face $f \in F$ com comprimento $|f|$. Pelas Propriedades 2.1 e 2.2, temos que $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} |f|$, de modo que, pela Fórmula de Euler, temos

$$6(|E| - |V| - |F|) = -12 \Rightarrow \sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2|f| - 6) = -12.$$

Por outro lado, como todas as faces de G tem comprimento maior ou igual a 3, o segundo somatório acima é sempre não-negativo. Dessa forma, para que a última igualdade acima seja válida, deve existir um vértice em G com carga negativa. Portanto, a fim de que exista um vértice $v \in V$ tal que $d(v) - 6 < 0$, devemos ter $d(v) \leq 5$. Como desejado. \square

Observe que no exemplo acima não foi necessário recorrermos à segunda etapa do método. Essa situação, por outro lado, nem sempre ocorre, como veremos no exemplo seguinte.

Exemplo 2.2 (Abbot, H. e Zhou, B., 1991). *Todo grafo planar sem ciclos de tamanho k , com $k \in \{4, \dots, 11\}$, é 3-colorível.*

Demonstração. Iremos dividir a demonstração desse resultado em dois passos. No primeiro passo, encontraremos as configurações redutíveis em um contraexemplo minimal para a afirmação enunciada acima. Em seguida, aplicaremos as etapas do método do descarregamento para concluir que as configurações redutíveis encontradas no passo anterior são inevitáveis.

Com efeito, assuma, por absurdo, que a afirmação acima seja falsa e considere $G = (V, E)$ um contraexemplo com o menor número de vértices possível. Desse modo, temos que G é um grafo 4-crítico e, além disso, devido à sua minimalidade, temos que G é conexo. Afirmamos que (a) um vértice com grau no máximo 2, e (b) um vértice de corte são configurações redutíveis em G . De fato, suponha que existe um vértice $v \in V(G)$ com grau no máximo 2. Como G é 4-crítico, podemos obter uma 3-coloração em $G - \{v\}$. Daí, como v possui no máximo dois vizinhos, podemos estender tal coloração para G atribuindo uma cor para v diferente das cores atribuídas aos seus vizinhos, o que nos dá uma contradição. Ademais, se G possui um vértice de corte $u \in V$, podemos considerar as componentes conexas C_1, \dots, C_k de $G - \{u\}$, com $k \geq 2$. Novamente, como G é 4-crítico, podemos obter uma 3-coloração $\varphi_i: V(C_i^*) \rightarrow [3]$ em cada $C_i^* := C_i \cup \{u\}$, com $1 \leq i \leq k$. Dessa forma, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi_i(u) = 1$, para $1 \leq i \leq k$ (permutando as cores de cada φ_i , se necessário). Observe que a união dessas colorações nos dá uma 3-coloração de G , nos dando novamente uma contradição.

No que segue, iremos mostrar que as configurações redutíveis vistas acima são inevitáveis. Para tanto, atribuiremos $d(v) - 6$ unidades de carga para cada vértice $v \in V(G)$ e $2|f| - 6$ unidades de carga para cada face $f \in F$ com comprimento $|f|$, onde F é o conjunto das faces de G . Como vimos no Exemplo 2.1, temos que a carga total atribuída ao grafo é igual a -12 . Ademais, todas as faces de G recebem carga não-negativa, uma vez que G é simples. Mais ainda, os únicos vértices de G com carga negativa são os vértices com grau 3, 4 ou 5, uma vez que (a) é uma configuração redutível. Iremos prosseguir com a segunda etapa do método utilizando a seguinte regra de descarregamento: cada face $f \in F$ com comprimento $|f| \geq 12$ enviará $\frac{3}{2}$ unidades de carga para seus vértices. Observe que G não possui faces de comprimento 3 compartilhando arestas, uma vez que G não possui ciclos de tamanho 4. Dessa forma, cada vértice $v \in V(G)$ é incidente a pelo menos $\lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$ faces de comprimento maior ou igual a 12. Agora, para um certo $v \in V(G)$ arbitrário, temos as seguintes possibilidades:

- $3 \leq d(v) \leq 5$: Nesse caso, temos que v recebe carga maior ou igual a $\frac{3}{2} \cdot \lceil \frac{3}{2} \rceil = 3$. Como a carga inicial de v é $d(v) - 6 \geq -3$, temos que a carga total de v após esse procedimento é não-negativa.
- $d(v) \geq 6$: Nesse caso, v não possuía carga negativa e, como não perdeu nenhuma unidade carga no procedimento, permanece com carga não-negativa.

Desse modo, após aplicarmos a segunda etapa do método, todos os vértices em G possuem carga não-negativa. Ademais, como as faces de comprimento 3 têm carga não-negativa e não perdem carga durante o procedimento, tais faces permanecem com carga não-negativa. Observe que como não existem ciclos de tamanho $k \in \{4, \dots, 11\}$ em G , não podemos ter faces $f \in F$ com comprimento $4 \leq |f| \leq 11$. Finalmente, como as demais faces em G têm comprimento maior ou igual a 12 e estas enviam apenas $\frac{3}{2}|f| \leq 2|f| - 6$ unidades de carga para seus vértices, temos que tais faces também permanecem com carga não-negativa. Dessa forma, ao final do procedimento, todas as faces e vértices de G possuem carga não-negativa. Um absurdo, pois a carga total em G é igual a -12 . \square

De um modo geral, sempre que quisermos demonstrar algum resultado utilizando o método do descarregamento, muitas vezes é suficiente encontrarmos um bom conjunto inicial de cargas ou uma boa regra de descarregamento. Por outro lado, existem algumas situações em que não há como melhorar um resultado apenas aplicando o descarregamento, uma vez que é possível existirem grafos que não possuem nenhuma das configurações redutíveis atuais. Quando isso ocorrer, nosso propósito será encontrar um novo conjunto de configurações redutíveis e, possivelmente, um novo conjunto de regras de descarregamento que funcionem quando admitimos essas novas configurações.

Frequentemente, as buscas por um conjunto de configurações redutíveis e um conjunto de regras de descarregamento que funcionam com essas configurações estão correlacionados, no sentido em que analisar um conjunto atual de regras de descarregamento nos dá algumas dicas sobre que tipo de novas configurações redutíveis devemos buscar. Uma maneira de fazer isso é observar os elementos que possuem carga negativa após a aplicação do conjunto atual de regras de descarregamento, mas não se encontra dentro do nosso conjunto atual de configurações redutíveis. Muitas vezes, esses elementos estão dentro de algo que provamos ser uma nova configuração redutível. Por outro lado, às vezes não podemos encontrar novas configurações redutíveis. Então, devemos refazer nossas regras de descarregamento para enviar mais unidades de carga para os elementos com carga negativa. Ao leitor interessado em resultados mais elaborados envolvendo o método do descarregamento, recomendamos a leitura de (CRANSTON e WEST, 2017).

2.4 O Teorema de Brooks

Para o problema clássico de coloração, existe um algoritmo de tempo polinomial para determinar quando um grafo é 2-colorível, uma vez que um grafo é 2-colorível se, e somente se, é bipartido. Essa observação decorre do fato de que é possível determinar uma bipartição em um grafo por meio de um algoritmo de tempo polinomial (utilizando busca em largura, por exemplo). Em contraste, decidir se $\chi(G) \leq 3$ é um problema NP-completo. Dessa forma, por questões práticas, frequentemente buscamos por procedimentos heurísticos eficientes e com um bom desempenho para problemas de decisão

envolvendo colorações em grafos. Um modo natural de fazer isso é colorindo os vértices de um grafo de maneira gulosa, considerando uma ordenação nos vértices desse grafo e atribuindo a cor $i \in \mathbb{N}$ a um vértice v se, e somente se, todas as cores menores do que i já foram atribuídas a algum vizinho que antecede v nessa ordenação. Esse procedimento é descrito no algoritmo abaixo.

Algoritmo 1: Algoritmo Guloso de Coloração

Entrada: Um grafo G e uma ordem $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ em $V(G)$.

Saída: Uma coloração própria de G .

```

1 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
2   | O vértice  $v_i$  recebe a menor cor disponível que ainda não foi atribuída aos
   | seus vizinhos já coloridos.
3 fim

```

Dado um grafo G arbitrário, dizemos que uma k -coloração de G obtida através do Algoritmo 1 é uma k -coloração gulosa de G .

É importante enfatizar que o número de cores $k \in \mathbb{N}$ de uma k -coloração gulosa depende essencialmente da ordenação escolhida para os vértices de G . Todavia, independentemente da ordenação escolhida, esse número nunca é superior a $\Delta(G) + 1$, uma vez que, fixado um vértice v , o número de vizinhos de v já coloridos anteriormente, durante a execução do Algoritmo 1, é no máximo $d(v)$ que, por sua vez, é no máximo $\Delta(G)$. Dessa forma, sempre teremos uma cor disponível em $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ para atribuir ao vértice v . À vista disso, a desigualdade

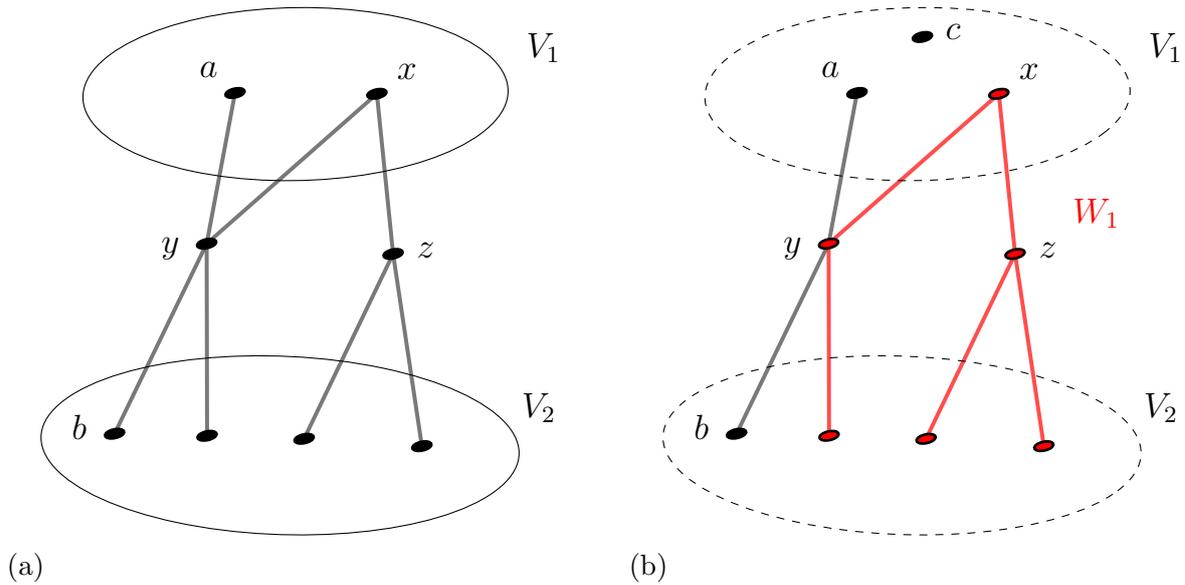
$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

é sempre válida para qualquer grafo G .

Como vimos anteriormente, a desigualdade acima pode ser escrita em forma de igualdade quando um grafo conexo G é um ciclo ímpar ou um grafo completo. Na verdade, escolhendo uma ordenação nos vértices de forma adequada, é possível mostrar que esses são, essencialmente, os únicos grafos conexos com essa propriedade. Esse resultado foi apresentado pela primeira vez em (BROOKS, 1941), mas a demonstração que apresentaremos a seguir é uma modificação da demonstração feita em (LOVASZ, 1975) e será útil para um bom entendimento da demonstração do Teorema 3.3 apresentado na Seção 3.1.

Antes de seguirmos com esse resultado, recorde que, dado um grafo conexo G , um *fork* $(v; x, y)$ em G é uma estrutura em que v, x e y são vértices de G tais que $G - x - y$ é ainda um grafo conexo e x e y são vértices não-adjacentes em $N_G(v)$. De posse dessa definição, podemos recorrer ao lema seguinte.

Figura 9 – Ilustração do Lema 2.1.



Fonte: elaborada pelo autor.

Lema 2.1 (Bryant, 1996). *Se G é um grafo 2-conexo, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é um ciclo ou um grafo completo;
- (ii) $G - \{u, v\}$ é desconexo, sempre que $u, v \in V(G)$ não são adjacentes;
- (iii) G não possui um *fork*.

Demonstração. Observe que as implicações (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) são imediatas.

(iii) \Rightarrow (i): Suponha que G seja um grafo 2-conexo que não possui um *fork* e não é um grafo completo, com $\Delta(G) = d$. Mostraremos que, nessas condições, G é um ciclo.

Inicialmente, observe que $d \geq 2$, uma vez que G é um grafo 2-conexo que não é um grafo completo. Ademais, a hipótese de que G não é um grafo completo também nos garante a existência de um vértice x de grau d em G para o qual existem dois vértices em sua vizinhança, digamos y e z , que não são adjacentes. De fato, a existência de tal vértice é garantida pois, uma vez que G é conexo, se todos os d vizinhos de um vértice x de grau d forem mutuamente adjacentes, teríamos que G é um grafo completo. Assim, como G não possui um *fork*, por hipótese, temos que $G - \{y, z\}$ é desconexo, de modo que $V(G)$ pode ser particionado em três subconjuntos não-vazios V_1 , $\{y, z\}$ e V_2 , em que $G[V_1]$ é a componente conexa de $G - \{y, z\}$ contendo x , conforme vemos na Figura 9a.

Mostraremos que $V_1 = \{x\}$, o que torna imediato que $d = 2$. De fato, assumamos que $V_1 \neq \{x\}$. Como G é 2-conexo, existe um vértice em $V_1 - \{x\}$, digamos a , que deve ser vizinho de y ou de z . Suponha, sem perda de generalidade, que $ay \in E(G)$. Ademais, como $G - z$ é conexo, deve existir um vértice $b \in V_2$ tal que $yb \in E(G)$. Dessa forma, como a e b são vértices a distância 2 em G e não existe um *fork* em G , devemos ter

que $G - \{a, b\}$ é desconexo, de modo que $V(G)$ pode ser particionado em três conjuntos não-vazios W_1 , $\{a, b\}$ e W_2 , em que $G[W_1]$ é a componente conexa de $G - \{a, b\}$ contendo x, y e z . Observe que todos os caminhos de W_1 para W_2 passam por a ou b e, além disso, deve existir um vértice $c \in W_2 \subset V_1 \cup V_2$, como mostra a Figura 9b. Por outro lado, se $c \in V_1$, todos os caminhos de c para y em G devem passar por a , o que contradiz o fato de que $G - a$ é conexo. Similarmente, se $c \in V_2$, então todos os caminhos de c para y passam por b , o que contradiz o fato de que $G - b$ é conexo. Logo, devemos ter $V_1 = \{x\}$, de modo que $d = 2$.

Portanto, como $d = 2$ e G não possui vértices de grau 0 ou 1, segue que G é um grafo 2-regular conexo, o que implica que G é um ciclo. Como queríamos. \square

Teorema 2.5 (Brooks, 1941). *Se G é um grafo conexo que não é um grafo completo nem um ciclo ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo que não é um grafo completo nem um ciclo ímpar, com $\Delta(G) = d$. Observe que $d \geq 2$, uma vez que para $d = 0$ ou $d = 1$ temos que G é um grafo completo ($G = K_1$ ou $G = K_2$, respectivamente). Além disso, se $d = 2$, como G não é um ciclo ímpar, temos que G é bipartido e, dessa forma, $\chi(G) \leq 2$.

Em vista disso, iremos considerar o caso em que $d \geq 3$. Nosso objetivo será obter uma ordenação σ nos vértices de G de modo que cada vértice tenha no máximo $d - 1$ cores proibidas ao executarmos o Algoritmo 1 considerando a ordem σ . Dessa forma, ao final da execução do algoritmo, obtemos uma coloração gulosa de G com no máximo d cores.

Inicialmente, observe que se G não for um grafo d -regular, existe um vértice $v_n \in V(G)$ tal que $d(v_n) < d$. Dessa forma, podemos construir uma ordenação em $V(G)$ a partir de uma árvore de busca enraizada em v_n , atribuindo índices aos vértices de G de modo decrescente a medida em que esses vértices são encontrados na busca. Posto isso, observe que cada vértice diferente de v_n na ordenação $(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ assim obtida possui algum vizinho de índice maior ao longo do caminho até v_n na árvore de busca. Assim, cada vértice tem no máximo $d - 1$ vizinhos que o antecedem nessa ordenação, de modo que, aplicando o Algoritmo 1, obtemos uma coloração gulosa de G com no máximo d cores.

De posse da observação acima, iremos considerar o caso em que G é um grafo d -regular. Inicialmente, suponha que G possui um vértice de corte, digamos v , e considere C uma componente conexa de $G - v$. Seja G' o subgrafo de G induzido por $C + v$. Observe que $d_{G'}(v) < d$, de modo que o argumento utilizado no parágrafo anterior nos fornece uma coloração de G' com no máximo d cores. Repetindo esse argumento para cada componente conexa de $G - v$ e permutando, se necessário, os nomes das cores em alguns dos subgrafos obtidos, conseguimos obter uma coloração de G com no máximo d cores.

Dessa forma, iremos assumir que G é um grafo 2-conexo. Como toda ordenação

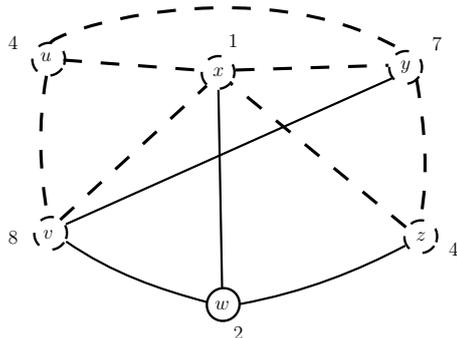
de $V(G)$ é tal que o último vértice v_n possui d vizinhos que o antecedem nessa ordem, o único modo de obtermos uma coloração com no máximo d cores após aplicarmos o Algoritmo 1 ocorre quando existirem dois vértices na vizinhança de v_n que foram coloridos com a mesma cor. Por outro lado, pelo Lema 2.1, como G não é um grafo completo e nem um ciclo, segue que G possui um *fork*, digamos $(v_n; v_1, v_2)$. Dessa forma, como $G - \{v_1, v_2\}$ é conexo, podemos ordenar os seus vértices a partir de uma árvore de busca enraizada em v_n , novamente atribuindo índices aos vértices de $G - \{v_1, v_2\}$ de modo decrescente a medida em que esses vértices são encontrados na busca. Novamente, observe que cada vértice que antecede v_n possui no máximo $d - 1$ vizinhos antecessores nessa ordem. Assim, aplicando o Algoritmo 1, obtemos uma coloração utilizando no máximo $d - 1$ cores para os vizinhos de v_n , uma vez que v_1 e v_2 recebem a mesma cor. \square

3 COLORAÇÕES BACKBONE

Nesta seção, além de apresentarmos um breve histórico dos resultados relacionados à Colorações Backbone existentes na literatura que motivaram o desenvolvimento desta dissertação, iremos apresentar algumas de nossas contribuições acerca do tema.

Como já introduzido anteriormente, o problema de Coloração Backbone é uma variação do problema clássico de coloração em vértices de um grafo apresentada inicialmente em (BROERSMA et al., 2003). Dados um par (G, H) e dois inteiros positivos $k, q \in \mathbb{Z}_+$, uma k -coloração q -backbone de (G, H) é uma k -coloração própria $\varphi: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de G em que $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq q$ sempre que $uv \in E(H)$. Na Figura 10 abaixo, temos um exemplo de uma 8-coloração 3-backbone do par (G, H) , onde H é o subgrafo de G em destaque. Uma k -coloração q -backbone parcial de um par (G, H) é uma k -coloração q -backbone de um subpar $(G', H') \subset (G, H)$. Observe que uma k -coloração q -backbone parcial de (G, H) é também uma k -coloração parcial de G .

Figura 10 – Exemplo de uma 8-coloração 3-backbone de (G, H) .



Fonte: elaborada pelo autor.

Definimos o *número cromático q -backbone* de um par (G, H) , denotado por $\text{BBC}_q(G, H)$, o menor inteiro positivo k tal que (G, H) admite uma k -coloração q -backbone. Note que na Figura 10 utilizamos a menor quantidade de cores possível a fim de obter uma coloração 3-backbone de (G, H) . Com efeito, suponha que exista uma 7-coloração 3-backbone de (G, H) , digamos φ . Como x, y e z são dois a dois adjacentes em H , devemos ter $\{\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)\} = \{1, 4, 7\}$. Além disso, como x, u e v são dois a dois adjacentes em H , temos que $\{\varphi(x), \varphi(u), \varphi(v)\} = \{1, 4, 7\}$. Dessa forma, temos que $\{\varphi(y), \varphi(z)\} = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$. Por outro lado, como y é adjacente a u e a v , temos que $\varphi(y) \notin \{\varphi(u), \varphi(v)\}$, uma contradição. Portanto, vale que $\text{BBC}_3(G, H) = 8$.

Dada uma k -coloração própria φ de G , observe que podemos definir uma nova coloração γ atribuindo a cada vértice $v \in V(G)$ o valor $\gamma(v) = q \cdot \varphi(v) - (q - 1)$, observe que tal coloração é uma $(q \cdot k - q + 1)$ -coloração q -backbone do par (G, G) e, portanto, é também uma $(q \cdot k - q + 1)$ -coloração q -backbone de (G, H) , para qualquer que seja

$H \subseteq G$. Dessa forma, dado um par (G, H) , temos a seguinte relação entre os valores de $\chi(G)$ e $\text{BBC}_q(G, H)$:

$$\text{BBC}_q(G, H) \leq q \cdot \chi(G) - q + 1. \quad (1)$$

Os primeiros resultados existentes sobre Colorações Backbone, encontrados em (BROERSMA et al., 2003), foram limitantes superiores para o número $\text{BBC}_q(G, H)$, com $q = 2$, quando H é um caminho Hamiltoniano de G e quando H é uma árvore geradora de um grafo split G . Ao longo dos anos, diversos resultados nesse aspecto foram encontrados para outras classes de grafos com outras classes de backbone e para valores maiores de q . Aqui, a maior parte dos resultados que serão expostos giram em torno de encontrar esse limitante quando G é um grafo planar e H é uma galáxia ou simplesmente um emparelhamento em G . Na próxima seção, mostraremos que se M é um emparelhamento em um grafo G qualquer, então $\text{BBC}_2(G, M) \leq \Delta(G) + 1$. Esse resultado foi provado inicialmente em (MISKUF et al., 2010) mas, conforme discutiremos na Seção 3.1, encontramos um problema na demonstração apresentada pelos autores e propusemos uma correção para tal problema. Previamente, as proposições a seguir nos indicam que esse resultado é verdade quando G é um ciclo ou um grafo completo.

Proposição 3.1. *Se M é um emparelhamento não-vazio em um ciclo C_n , então*

$$\text{BBC}_q(C_n, M) = q + 1.$$

Demonstração. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ o conjunto dos vértices de C_n dispostos de forma consecutiva de acordo com seus índices. Se n for um número par, então podemos considerar $\varphi: V(C_n) \rightarrow \{1, q + 1\}$ onde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é par;} \\ q + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que φ é uma $(q + 1)$ -coloração q -backbone de (C_n, M) mesmo que M seja um emparelhamento perfeito. Suponha, então, que n é ímpar. Nesse caso, note que M não pode ser um emparelhamento perfeito, de modo que existe um $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que v_k é um vértice que não é saturado por M . Suponha, sem perda de generalidade, que $k = 1$. Dessa forma, podemos considerar $\varphi: V(C_n) \rightarrow \{1, 2, q + 1\}$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é par;} \\ 2, & \text{se } i = 1; \\ q + 1, & \text{se } i \text{ é ímpar e } i \neq 1. \end{cases}$$

Veja que φ é uma $(q + 1)$ -coloração q -backbone de (C_n, M) . Dessa forma,

concluimos que $\text{BBC}_q(C_n, M) \leq q + 1$ para qualquer ciclo C_n com um emparelhamento M , atingindo a igualdade se, e somente se, M é um emparelhamento não-vazio em C_n . Como queríamos. \square

Observe que quando $q = 2$, temos exatamente $\text{BBC}_2(C_n, M) \leq \Delta(C_n) + 1$, uma vez que para qualquer inteiro positivo n , C_n é um grafo 2-regular. Ademais, como K_n é um grafo $(n - 1)$ -regular, para qualquer inteiro positivo n , a Proposição 3.2 a seguir nos diz que $\text{BBC}_2(K_n, M) \leq \Delta(K_n) + 1$.

Proposição 3.2 (Miskuf et al., 2010). *Se M é um emparelhamento em um grafo completo K_n , com $n \geq 3$, então*

$$\text{BBC}_2(K_n, M) \leq n.$$

Demonstração. Inicialmente, considere $M = \{e_1, \dots, e_s\}$, com $s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se $s = 1$, então podemos simplesmente atribuir cores 1 e n às extremidades da aresta e_1 e, como $n \geq 3$, podemos atribuir aos demais vértices cores distintas em $\{2, \dots, n - 1\}$. Observe que a coloração assim obtida é uma n -coloração 2-backbone de (K_n, M) . Para o caso em que $s \geq 2$, observe que $(s + i) - i \geq 2$, de modo que, para $i \in \{1, \dots, s\}$, podemos atribuir cores i e $s + i$ às extremidades de e_i e cores distintas em $\{2s + 1, \dots, n\}$ aos demais vértices, uma vez que $s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Observe que tal coloração é uma n -coloração 2-backbone de (K_n, M) . \square

Em 2009, Broersma et al. determinaram limitantes superiores acerca do número $\text{BBC}_q(G, M)$ em função de $\chi(G)$ quando M é um emparelhamento perfeito:

Teorema 3.1 (Broersma et al., 2009). *Dados um inteiro $q \geq 2$, um G um grafo qualquer com $k = \chi(G)$ e M um emparelhamento perfeito de G , temos que*

$$\text{BBC}_q(G, M) \leq \begin{cases} k + q - 1, & \text{se } 2 \leq k \leq q; \\ 2k - 2, & \text{se } q + 1 \leq k \leq 2q; \\ 2k - 3, & \text{se } k = 2q + 1; \\ 2tq, & \text{se } k = t(q + 1), \text{ com } t \geq 2; \\ 2tq + 2c - 1, & \text{se } k = t(q + 1) + c, \text{ com } t \geq 2 \text{ e } 1 \leq c < \frac{q+3}{2}; \\ 2tq + 2c - 2, & \text{se } k = t(q + 1) + c, \text{ com } t \geq 2 \text{ e } \frac{q+3}{2} \leq c \leq q. \end{cases}$$

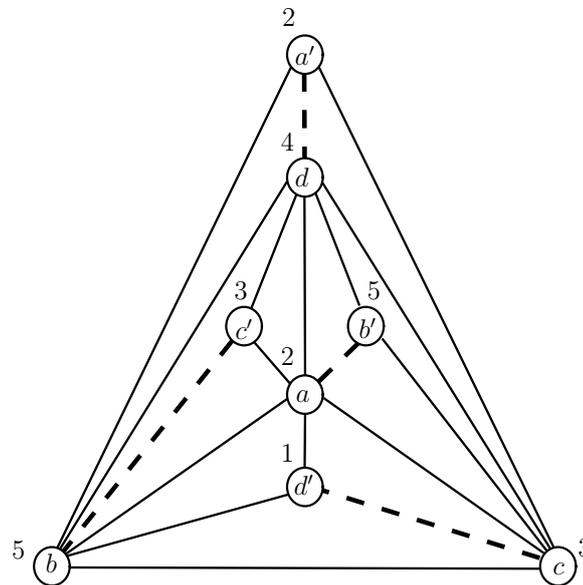
Observe que quando G é um grafo planar e $q = 2$, o Teorema 3.1 acima juntamente com o Teorema das Quatro Cores nos dão o seguinte

Corolário 3.1 (Broersma et al., 2009). *Se G é um grafo planar e M é um emparelhamento de G , então*

$$\text{BBC}_2(G, M) \leq 6.$$

Embora o Corolário 3.1 acima nos forneça um bom limitante, ainda não existe nenhuma demonstração de que tal limitante é o melhor possível. No entanto, Broersma et al. mostraram que este limitante não pode ser reduzido mais do que uma unidade. O par (G, M) na Figura 11 abaixo é um exemplo de um grafo planar com um emparelhamento M que admite uma 5-coloração 2-backbone. Mais do que isso, tal par é um exemplo para o qual $\text{BBC}_2(G, M)$ é exatamente igual a 5. Com efeito, observe que G pode ser obtido a partir de uma imersão plana de K_4 induzida pelos vértices a, b, c e d e incluindo um novo vértice em cada face (inclusive a face externa), adicionando arestas entre cada um desses vértices aos três vértices na fronteira da face associada e atribuindo o rótulo x' ao novo vértice na face triangular delimitada pelo ciclo com vértices $\{u, v, w\}$, onde $\{u, v, w, x\} = \{a, b, c, d\}$. Dessa forma, suponha que exista uma 4-coloração 2-backbone de (G, M) . Então, a partir dessa construção, observe que a, b, c e d possuem cores distintas e que a cor de um vértice $x \in \{a, b, c, d\}$ é igual a cor de x' . Sem perda de generalidade, assumamos que a e a' possuem a cor 2. Então, temos que b' e d possuem a cor 4, um absurdo, pois $b'd \in E(G)$. Desse modo, como (G, M) admite uma 5-coloração 2-backbone, temos que $\text{BBC}_2(G, M) = 5$.

Figura 11 – Exemplo de um grafo planar G com um emparelhamento M e tal que $\text{BBC}_2(G, M) = 5$.



Fonte: elaborada pelo autor.

De posse da discussão feita anteriormente, os autores propuseram as seguintes perguntas:

Pergunta 3.1 (Broersma et al., 2009). *Para todo grafo planar G contendo um emparelhamento M , é verdade que $\text{BBC}_2(G, M) \leq 5$?*

Pergunta 3.2 (Broersma et al., 2009). *Sejam G um grafo planar e M um emparelhamento de G . Existe uma prova de que $\text{BBC}_2(G, M) \leq 6$ sem utilizar o Teorema das Quatro Cores?*

Sob o ponto de vista de complexidade, temos o seguinte

Teorema 3.2 (Broersma et al., 2004).

- (a) *O seguinte problema pode ser resolvido em tempo polinomial para $\ell \leq 3$: Dado um grafo G com um emparelhamento perfeito M , decidir quando $\text{BBC}_2(G, M) \leq \ell$.*
- (b) *O seguinte problema é NP-completo para qualquer $\ell \geq 4$: Dado um grafo G com um emparelhamento perfeito M , decidir quando $\text{BBC}_2(G, M) \leq \ell$.*

Diante de toda essa discussão, podemos analisar os resultados e os problemas acima restritos a uma classe especial de grafos planares. Diremos que um grafo é *periplanar* quando admitir uma representação planar em que todos os vértices estão na fronteira da face externa. Tal representação é chamada de *representação periplanar* do grafo. Um *grafo periplano* é uma representação periplanar de um grafo periplanar. Observe que se um grafo G é periplanar, então $\chi(G) \leq 3$. De fato, basta observar que dada uma representação periplanar de um grafo G , podemos construir um novo grafo G' a partir de G adicionando um vértice v adjacente a todos os vértices de G . Observe que G' é planar e, pelo Teorema das Quatro Cores, possui número cromático no máximo 4. Dessa forma, dada uma 4-coloração de G' , digamos φ , a cor $\varphi(v)$ é diferente da cor de todos os vértices de G , de modo que $\varphi \upharpoonright_G$ é uma 3-coloração própria de G . Assim, podemos nos questionar se os limitantes nas perguntas acima também podem ser melhorados no caso em que G é um grafo periplanar. De posse da segunda linha da inequação no Teorema 3.1 juntamente com a discussão anterior, temos a seguinte

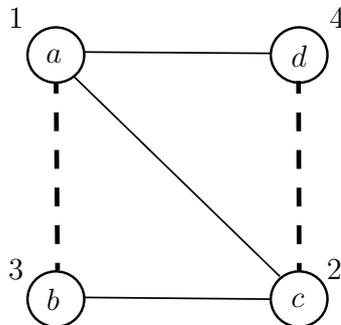
Proposição 3.3. *Se G é um grafo periplanar e M é um emparelhamento de G , então*

$$\text{BBC}_2(G, M) \leq 4.$$

O resultado acima é, de fato, o melhor possível. O par (G, M) na Figura 12 a seguir é um exemplo de um grafo periplanar G com um emparelhamento M que admite uma 4-coloração 2-backbone e, mais do que isso, (G, M) é tal que $\text{BBC}_2(G, M) = 4$. De fato, como os vértices a , b e c são dois a dois adjacentes, então eles devem receber cores distintas em qualquer coloração própria. Assim, em uma 3-coloração de G , como $ab \in M$, devemos ter a e b com cores em $\{1, 3\}$ e c com cor 2. Por outro lado, a única cor disponível para d em $\{1, 2, 3\}$ é a cor de b . De toda forma, como $cd \in M$, tal coloração não seria

uma 3-coloração 2-backbone de (G, M) . Desse modo, temos que $\text{BBC}_2(G, M) = 4$.

Figura 12 – Exemplo de um grafo periplanar G com um emparelhamento M tal que $\text{BBC}_2(G, M) = 4$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Do ponto de vista de complexidade restrito a classe dos grafos periplanares, mostraremos na Seção 3.2 que é sempre possível decidir em tempo polinomial se $\text{BBC}_q(G, M) \leq k$, dados dois inteiros positivos k e q e um grafo periplanar G com um emparelhamento M . Mais do que isso, esse resultado se estende a uma classe de grafos muito maior do que a classe dos grafos periplanares. De fato, mostraremos que esse resultado vale sempre que G é um grafo com largura em árvore limitada.

3.1 Teorema do Tipo Brooks para Colorações Backbone

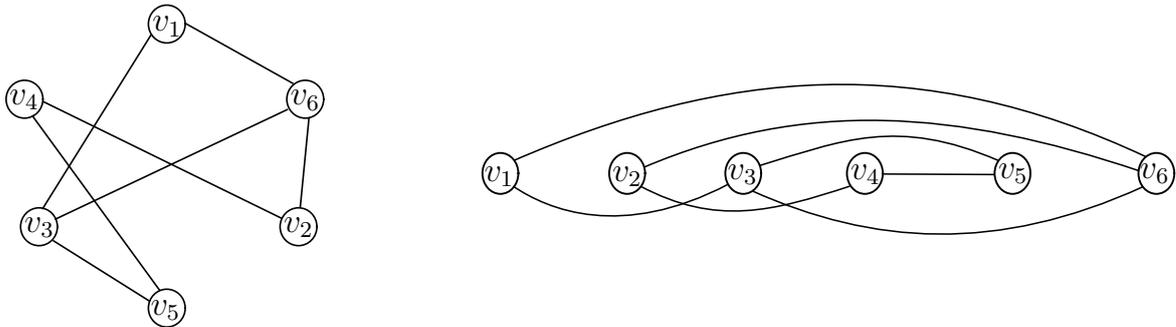
Vimos na Seção 2.4 que o limitante $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ é válido para qualquer grafo G , atingindo a igualdade apenas quando G é um grafo completo ou um ciclo ímpar. Em (MISKUF et al., 2010), os autores demonstraram que esse limitante superior ainda é válido sob o ponto de vista de Colorações Backbone quando o backbone é um emparelhamento e $q = 2$, isto é, se M é um emparelhamento de um grafo G , então $\text{BBC}_2(G, M) \leq \Delta(G) + 1$. Em sua demonstração, no entanto, é necessária a utilização de um lema que torna parte da prova incorreta, como mostraremos adiante.

Relembre que um *fork* $(v; x, y)$ em um grafo conexo G é uma estrutura onde $x, y, v \in V(G)$ são tais que $G - x - y$ é conexo, $x, y \in N_G(v)$ e $xy \notin E(G)$. De posse dessa definição, a demonstração dada por Miskuf *et al.* é semelhante à demonstração do Teorema 2.5. A ideia central é considerar um *fork* $(v; x, y)$ para construir uma ordenação (v_1, \dots, v_n) de $V(G)$, onde $n = |V(G)|$, satisfazendo as seguintes condições:

- (1) $v_1 v_2 \notin E(G)$;
- (2) $\{v_1 v_n, v_2 v_n\} \subseteq E(G)$;
- (3) para cada v_i , com $i \neq n$, existe um vizinho v_j , com $j > i$.

Uma ordenação satisfazendo as propriedades acima é o que chamaremos de *ordenação boa*. Na Figura 13 adiante, vemos um exemplo de um grafo G ao lado de uma possível representação geométrica na qual seus vértices estão dispostos seguindo uma ordenação boa.

Figura 13 – Exemplo de uma ordenação boa nos vértices de um grafo G .



Fonte: elaborada pelo autor.

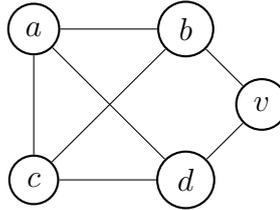
Quando uma ordenação satisfizer somente a condição (3) acima e for tal que $d(v_n) < \Delta(G)$, diremos que tal ordenação é uma ordenação *quase boa*. Assim, utilizamos uma tal ordenação para colorir gulosamente os vértices de G . No entanto, diferentemente do que ocorre no Teorema 2.5, quando nossa preocupação é apenas colorir propriamente os vértices de G , devemos ter um cuidado maior ao lidar com os vértices de corte, uma vez que estes vértices podem ser vértices saturados pelo emparelhamento. Essa é a razão para a qual os autores necessitaram do seguinte resultado:

Lema 3.1 (Miskuf *et al.*, 2010). *Se G é um grafo 2-conexo tal que todos os seus vértices têm o mesmo grau $d \geq 3$, com exceção de um único vértice v , onde $d(v) < d$, então G possui um fork $(w; x, y)$ tal que $v \notin \{x, y\}$.*

O Lema 3.1 acima foi utilizado para garantir a existência de um *fork* em uma determinada componente 2-conexa de G que é também um *fork* de G e que não contém um vértice de corte de G . No entanto, a afirmação enunciada nesse lema, como antecipamos, não é verdadeira. Na Figura 14 abaixo, vemos um exemplo simples de um grafo G satisfazendo todas as hipóteses do Lema 3.1, tomando $d = 3$, mas que, por outro lado, seus únicos *forks* são $(b; a, v)$, $(b; c, v)$, $(d; a, v)$ e $(d; c, v)$, ou seja, o único vértice de grau inferior a 3 está contido em $\{x, y\}$ para todo *fork* $(w; x, y)$ de G .

Embora o Lema 3.1 esteja incorreto, o limitante superior $\Delta(G) + 1$ ainda é verdadeiro nesse contexto. Nosso objetivo nessa seção é apresentar uma nova demonstração de que $\text{BBC}_2(G, M) \leq \Delta(G) + 1$, para todo grafo G com um emparelhamento M , sem utilizar o Lema 3.1. Antes disso, necessitaremos de alguns conceitos que serão definidos no parágrafo seguinte.

Figura 14 – Um contraexemplo para o Lema 3.1.



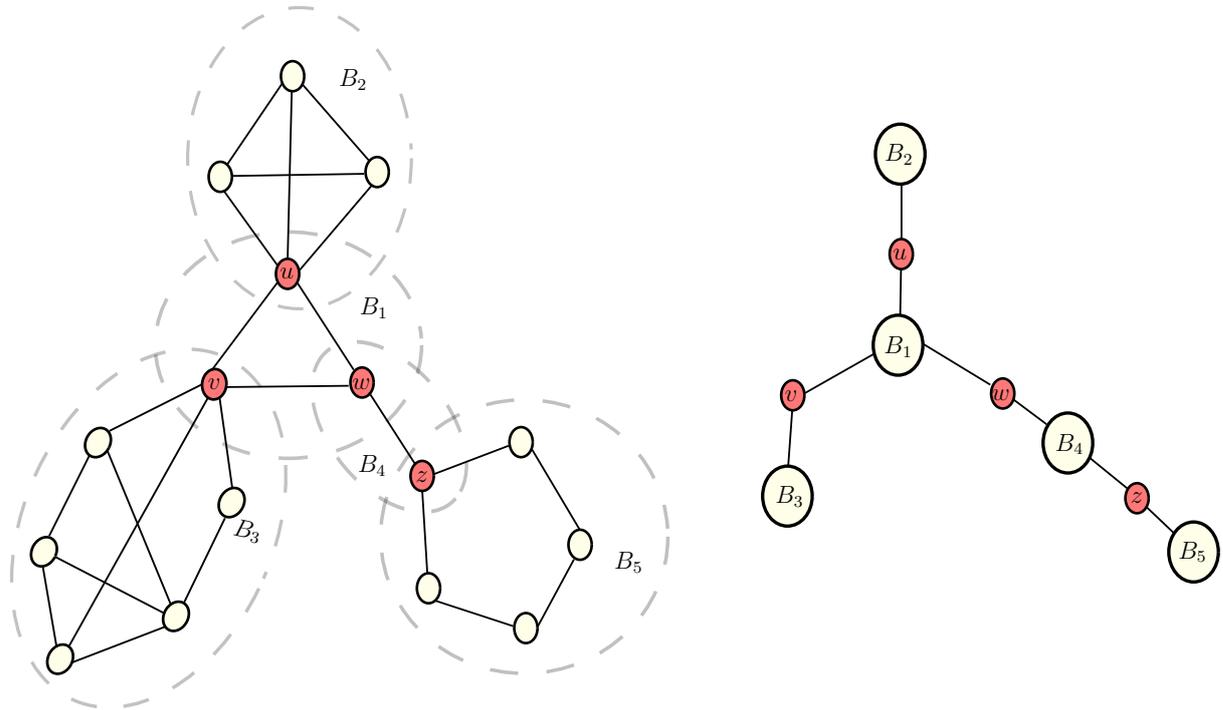
Fonte: elaborada pelo autor.

O *grafo de decomposição em blocos* (*block-cutpoint graph*) T_G de um grafo conexo G é um grafo bipartido em que uma de suas partes é o conjunto dos vértices de corte de G e a partição restante possui um vértice representando cada bloco de G , onde um vértice de corte v é adjacente a um vértice correspondente a um bloco B em G se, e somente se, $v \in V(B)$.

Observe que se G é um grafo 2-conexo, então $T_G = K_1$. Ademais, se G é um grafo conexo com pelo menos dois blocos, então dado um par de blocos B_1 e B_2 em G , existe um caminho entre os vértices correspondentes a B_1 e B_2 em T_G . De fato, como G é conexo, existe um caminho entre qualquer par de vértices $v_1 \in V(B_1)$ e $v_2 \in V(B_2)$. Além disso, tal caminho deve visitar uma sequência de blocos de G entre B_1 e B_2 , deslocando-se de um bloco para outro através de um vértice de corte de G . Dessa forma, tal caminho pode ser descrito como um caminho entre os vértices correspondentes a B_1 e a B_2 em T_G , de modo que T_G é também um grafo conexo. Não é difícil ver que T_G é também um grafo acíclico. De fato, se T_G possuir um ciclo, digamos C , pela construção de T_G , deve existir um vértice de corte de G em C , digamos v , cujos vizinhos em C , digamos v_{B_1} e v_{B_2} , são vértices que representam os blocos B_1 e B_2 em G e tais que $v \in V(B_1) \cap V(B_2)$. Dessa forma, observe que o caminho entre v_{B_1} e v_{B_2} em $C - v$ induz um caminho entre qualquer par de vértices $v_1 \in V(B_1)$ e $v_2 \in V(B_2)$ em G que não passa por v , o que é um absurdo, uma vez que cada par de blocos em G deve compartilhar no máximo um vértice. Assim, T_G é uma árvore cujas folhas são blocos de G . Um bloco de G que é uma folha em T_G será chamado de *bloco folha de G* . Dado um bloco folha B em G , diremos que um vértice $v \in V(B)$ é um *vértice interno* se v não for um vértice de corte de G . Por último, se G é um grafo 1-conexo e T_G é um caminho, diremos que G possui uma *estrutura de caminho*. Na Figura 15 abaixo, temos um exemplo de uma decomposição em blocos de um grafo.

Como vimos na demonstração do Teorema 2.5, para obter o limitante superior $\Delta(G) + 1$ era suficiente considerar o caso em que G é um grafo 2-conexo, pois no caso em que G possui vértices de corte, basta colorir gulosamente cada bloco de G através de uma ordenação adequada e considerando uma nova rotulação, se necessário for, nas cores dos vértices de corte de G a fim de obter uma coloração em todo o grafo. No entanto, sob o ponto de vista de colorações backbone, essa técnica não pode ser aplicada, uma vez que as cores nesse contexto não são simétricas: podemos ter, por exemplo, um vértice de corte v recebendo a cor 1 quando aplicamos o procedimento em um bloco de G con-

Figura 15 – Exemplo de um grafo de decomposição em blocos de um grafo.



Fonte: elaborada pelo autor.

tendo v e recebendo a cor 2 quando aplicamos o procedimento em um outro bloco de G contendo v , o que pode nos causar problemas ao rotularmos novamente essas cores em um desses blocos, já que não podemos mais garantir que as extremidades de uma aresta do emparelhamento permanecerão coloridas com cores a uma distância maior ou igual a 2 da cor dada ao vértice v . Observe que o Lema 2.1 na Seção 2 nos garante que todo grafo 2-conexo que não é um ciclo e nem um grafo completo possui um *fork*. De um certo modo, o Lema 3.2 a seguir nos dá uma versão do Lema 2.1 para grafos 1-conexos, onde mostraremos que se um grafo conexo G com $\delta(G) \geq 3$ não possui um *fork*, então ele possui uma propriedade bem específica, como veremos logo abaixo.

Lema 3.2. *Seja G um grafo conexo que não é um grafo completo nem um ciclo. Se $\delta(G) \geq 3$, então pelo menos uma das condições abaixo é satisfeita:*

1. G contém um *fork*;
2. todo bloco folha B de G contendo um vértice de corte $u \in V(G)$ satisfaz exatamente uma das seguintes condições:
 - 2.1. $B - u$ é um grafo completo;
 - 2.2. $B - u$ é um grafo completo menos uma aresta xy , com $N_B(u) = \{x, y\}$.

Demonstração. Inicialmente, observe que se G é um grafo 2-conexo, então, pelo Lema 2.1, G possui um *fork*. Dessa forma, suponhamos que G não é um grafo 2-conexo, isto é, G

possui pelo menos um vértice de corte. Nesse caso, temos que o grafo de decomposição em blocos T_G de G é um grafo não-trivial, de modo que existem pelo menos dois blocos folha em G . Considere B um bloco folha qualquer de G e seja u o vértice de corte de G em $V(B)$. Feito isso, analisemos os seguintes casos:

Caso 1: $\kappa(B - u) = 1$:

Nesse caso, temos que T_{B-u} é um grafo não trivial e, além disso, como B é 2-conexo, temos que u é adjacente, em B , a pelo menos um vértice interno de cada bloco folha de $B - u$. Dessa forma, considere x e y dois vértices internos em $B - u$ que são vizinhos de u em B e estão contidos em blocos folha distintos. Observe que se $d_B(u) \geq 3$, então $B - \{x, y\}$ é ainda conexo, de modo que $G - \{x, y\}$ é conexo e $(u; x, y)$ é um *fork* de G .

Desse modo, iremos supor que $d_B(u) = 2$, o que implica que $B - u$ possui uma estrutura de caminho. Ademais, como $\delta(G) \geq 3$, cada bloco folha em $B - u$ possui pelo menos três vértices. Assim, no caso em que $B - u$ possui apenas dois blocos, digamos B_1 e B_2 , iremos considerar o único vértice de corte $B - u$, digamos v . Desse modo, como B_1 e B_2 são os únicos blocos de $B - u$, $d_B(u) = 2$ e cada bloco folha em $B - u$ possui pelo menos três vértices, segue que v possui dois vizinhos $w \in V(B_1)$ e $z \in V(B_2)$ que não estão na vizinhança de u , de modo que $(v; w, z)$ é um *fork* em G .

Consideremos então o caso em que $B - u$ possui pelo menos três blocos. Nesse caso, tomamos B_1 como um bloco folha de $B - u$ e B_2 o único bloco de $B - u$ compartilhando um vértice de corte de $B - u$, digamos p , com B_1 . Novamente, podemos escolher um vértice $s \in N_{B_1}(p)$ que não é adjacente a u , uma vez que $d_B(u) = 2$ e cada bloco folha de $B - u$ possui pelo menos três vértices. Ademais, dado qualquer vértice $t \in N_{B_2}(p)$, temos que $(p; s, t)$ é um *fork* em G , mesmo no caso em que B_2 consiste de apenas uma aresta.

Caso 2: $B - u$ é 2-conexo:

Suponha que $B - u$ não é um grafo completo, caso contrário, já temos o desejado. Além disso, se $B - u$ é um ciclo, então, como $\delta(G) \geq 3$ e $B - u$ não é completo, temos que $B - u$ é um ciclo com pelo menos quatro vértices e tal que todos os seus vértices são adjacentes a u . Dessa forma, dados dois vértices não consecutivos em $B - u$, digamos a e b , temos que $(u; a, b)$ é um *fork* em G . Assim, podemos supor que $B - u$ não é um grafo completo e nem um ciclo e, nesse caso, pelo Lema 2.1, temos que $B - u$ possui um *fork*, digamos $(x; y, z)$.

Desse modo, pela definição de *fork*, temos que o subgrafo $B' = (B - u) - \{y, z\}$ é conexo. Observe que se u possuir algum vizinho em B' , temos que $B - \{y, z\}$ é conexo, de modo que $(x; y, z)$ é também um *fork* em G . Caso contrário, se $N_B(u) \cap V(B') = \emptyset$, como B é 2-conexo, devemos ter $N_B(u) = \{y, z\}$. Nesse caso, considerando o subgrafo $B'' = B - \{u, y\}$, observe que $|N_{B''}(\{u, y\})| \geq 3$, uma vez que $d(y) \geq 3$ e $z \in N(u) \setminus N(y)$. Isso implica que se existir um *fork* em B'' , este *fork* também será um *fork* de G . De

fato, considerando $(v; s, t)$ um *fork* de B'' , como $|N_{B''}(\{u, y\})| \geq 3$, existe um vértice $p \in N_{B''}(\{u, y\})$ tal que $p \notin \{s, t\}$, de modo que $B - \{s, t\}$ é ainda conexo e, dessa forma, $(v; s, t)$ é um *fork* em G .

Assim, mostraremos que ou B'' possui um *fork* ou então $B - u$ possui a estrutura desejada. Para tanto, analisaremos primeiro os casos em que B'' é um grafo completo ou um ciclo. No primeiro caso, se $N_{B''}(y) = V(B'') - \{z\}$, temos que $B - u$ é um grafo completo sem a aresta yz . Se isso não ocorre, considere $w \in V(B'') - N_{B''}(y)$ tal que $w \neq z$ e, dessa forma, observe que $(x; y, w)$ é um *fork* em G . Agora, no caso em que B'' é um ciclo, com pelo menos quatro vértices, como $\delta(G) \geq 3$ e $N_B(u) = \{y, z\}$, cada vértice em B'' , com exceção de z , deve ser adjacente a y em B , de modo que quaisquer três vértices consecutivos em B'' formam um *fork* em G .

Feito isso, resta analisar o caso em que B'' não é um grafo completo nem um ciclo. Nesse caso, se B'' é 2-conexo, pelo Lema 2.1, temos que B'' possui um *fork*, de modo que G possui um *fork*. Finalmente, se B'' não é 2-conexo, como $\delta(B'') \geq 2$, cada bloco folha de B'' possui pelo menos três vértices. Dessa forma, observe que os mesmos argumentos utilizados no Caso 1 nos fornecem um *fork* em B'' . \square

Dados um grafo G de grau máximo Δ e um emparelhamento M de G , o Algoritmo 2 a seguir é utilizado para obter uma $(\Delta + 2)$ -coloração 2-backbone em (G, M) dada uma ordenação em $V(G)$:

Algoritmo 2: Obtenção de uma $(\Delta + 2)$ -coloração 2-backbone em um par (G, M)	
Entrada: Um par (G, M) e uma ordem $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ em $V(G)$	
Saída: Uma coloração 2-backbone φ de (G, M) com no máximo $\Delta(G) + 2$ cores	
1	para $k \leftarrow 1$ até $\Delta + 2$ faça
2	para $i \leftarrow 1$ até n faça
3	se v_i <i>não é colorido</i> e
4	<i>a cor k não aparece na vizinhança de v_i em G e</i>
5	<i>a cor $k - 1$ não aparece na vizinhança de v_i em M</i>
6	então
7	faça $\varphi(v_i) := k$
8	fim
9	fim
10	fim

No Algoritmo 2, observe que, diferentemente do que ocorre no Algoritmo 1, as cores não são atribuídas aos vértices seguindo a ordenação σ , ou seja, podem existir dois inteiros positivos $j < i$ tais que v_i recebeu uma cor $\varphi(v_i)$ em um determinado momento da iteração em que v_j ainda não foi colorido. Também não é difícil verificar que o Algoritmo 2 retorna uma $(\Delta + 2)$ -coloração 2-backbone de (G, M) , porém, recomendamos novamente a leitura de (MISKUF et al., 2010), onde o algoritmo é apresentado em um

contexto mais geral, quando o backbone é um subgrafo d -degenerado de G . Nesse caso, o intervalo de cores para a iteração do algoritmo depende dos valores de Δ e d . De toda forma, a verificação desses fatos é semelhante ao procedimento feito na demonstração do Teorema 3.3 a seguir, onde iremos reproduzir parte da demonstração dada pelos autores com as devidas correções a fim de obtermos o resultado desejado. A ideia central é mostrar que quando σ é uma ordenação boa ou uma ordenação quase boa de $V(G)$, o Algoritmo 2 nos fornece uma $(\Delta + 1)$ -coloração 2-backbone de (G, M) e, feito isso, mostramos que todo grafo G que não é completo nem um ciclo possui uma ordenação boa ou quase boa em seus vértices, obtendo assim o resultado que desejamos, uma vez que o limitante também é válido quando G é um grafo completo ou um ciclo.

Teorema 3.3. *Se M é um emparelhamento em um grafo G de grau máximo Δ , então*

$$\text{BBC}_2(G, M) \leq \Delta + 1.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos explicar como a ideia central para aplicar o Algoritmo 2 na demonstração apresentada em (MISKUF et al., 2010) funciona. Dado um vértice $v \in V(G)$, se v for um vértice saturado por M , denotaremos por \bar{v} o vértice para o qual $v\bar{v} \in M$. Iremos admitir que G é um grafo conexo, do contrário basta aplicar o resultado para cada componente conexa de G . Seja $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ uma ordenação de $V(G)$. Sendo φ a coloração obtida através do Algoritmo 2 utilizando (G, M) e σ como entrada, afirmamos que se σ é uma ordenação boa ou uma ordenação quase boa então φ é uma coloração 2-backbone de (G, M) com no máximo $\Delta + 1$ cores. Com efeito, observe que durante a execução do algoritmo, fixado um inteiro positivo $i \in \{1, \dots, n\}$, as seguintes propriedades ocorrem independentemente da ordenação σ :

- (i) Se \bar{v}_i é um vizinho antecessor de v_i , então \bar{v}_i proíbe apenas as cores $\varphi(\bar{v}_i)$ e $\varphi(\bar{v}_i) + 1$ para v_i ;
- (ii) Se \bar{v}_i é um vizinho sucessor de v_i , então \bar{v}_i proíbe apenas a cor $\varphi(\bar{v}_i) + 1$ para v_i ;
- (iii) Cada vizinho antecessor v_j de v_i em $G - M$ proíbe apenas a cor $\varphi(v_j)$ para v_i ;
- (iv) Todos os vizinhos sucessores de v_i em $G - M$ não proíbem cor alguma para v_i .

Dessa forma, suponha que σ satisfaz a condição (3) descrita na página 39 (o que ocorre quando σ é uma ordenação boa ou quase boa). Nesse caso, para cada $i < n$, de acordo com as propriedades mencionadas acima, se \bar{v}_i é um vizinho antecessor de v_i , no máximo $2 + (\Delta - 2) = \Delta$ cores são proibidas para v_i . Caso contrário, se \bar{v}_i for um vizinho sucessor de v_i , então no máximo $1 + (\Delta - 2) = \Delta - 1$ cores são proibidas para v_i . De toda forma, existem no máximo Δ cores proibidas para v_i , de modo que podemos atribuir uma cor em $\{1, \dots, \Delta + 1\}$ para v_i . Para o caso em que $i = n$, se σ é uma

ordenação boa, então v_1 e v_2 recebem a mesma cor e, por (i) e (iii), existem no máximo $2 + (\Delta - 1) - 1 = \Delta$ cores proibidas para v_n . Ademais, se σ for uma ordenação quase boa, como $d(v_n) < \Delta$, temos, de (i) e (iii), que no máximo $2 + (\Delta - 2) = \Delta$ cores são proibidas para v_n . Portanto, existe uma cor disponível em $\{1, \dots, \Delta + 1\}$ para atribuir ao vértice v_n . Em todo caso, se σ é uma ordenação boa ou uma ordenação quase boa, o Algoritmo 2 retorna uma coloração 2-backbone de (G, M) com no máximo $\Delta + 1$ cores.

À vista disso, mostraremos que se G não for um grafo completo ou um ciclo, então G possui uma ordenação boa ou uma ordenação quase boa, de modo que existe uma coloração 2-backbone de (G, M) com no máximo $\Delta + 1$ cores. Para o caso em que G é um grafo completo ou um ciclo, o resultado segue diretamente a partir das Proposições 3.1 e 3.2. Desse modo, suponha que G não seja um grafo completo ou um ciclo. Inicialmente, observe que se G possui um *fork*, digamos $(v; x, y)$, como $G - \{x, y\}$ é conexo, podemos construir uma ordenação boa em $V(G)$ começando por x e y e determinando as posições dos demais vértices de G a partir de uma árvore de busca em $G - \{x, y\}$ enraizada em v , atribuindo índices aos vértices de $G - \{x, y\}$ de forma decrescente na medida em que esses vértices são encontrados na busca. Ademais, se G não for um grafo Δ -regular, ou seja, no caso em que G possui um vértice de grau menor do que Δ , digamos v , então é possível obter uma ordenação quase boa em $V(G)$ novamente a partir de uma árvore de busca enraizada em v . Desse modo, é suficiente analisar o caso em que G é um grafo Δ -regular que não contém um *fork*. Nesse caso, como G não é um ciclo e nem um grafo completo, então $\Delta = \delta(G) \geq 3$, de modo que, pelo Lema 3.2, dado qualquer bloco folha B de G contendo um vértice de corte u de G , temos que $B - u$ é um grafo completo menos uma aresta xy com $N_B(u) = \{x, y\}$ (observe que $B - u$ não pode ser um grafo completo, pois G é regular). Assim, considere os subgrafos $B' = B - \{u, x, y\}$ e $G' = G - B'$ e tome $M' = M \cap E(G')$. Feito isso, como G' não é um grafo regular, podemos obter uma ordem quase boa em $V(G')$ começando por x e y e novamente determinando as posições dos demais vértices de G' através de uma árvore de busca enraizada em u . Dessa forma, obtemos uma $(\Delta + 1)$ -coloração 2-backbone de (G', M') , digamos φ' . Ademais, observe que como $B - u$ é um grafo completo sem a aresta xy , temos que φ' pode ser estendida para G utilizando ainda no máximo $\Delta + 1$ cores, basta distribuir as cores $1, \dots, \Delta + 1$ de modo que as extremidades de M recebam cores a uma distância maior ou igual a 2. \square

3.2 Um Algoritmo Polinomial para Grafos com Largura em Árvore Limitada

Nesta seção, nós apresentamos um algoritmo polinomial para decidir quando, dados dois inteiros positivos k e q , $\text{BBC}_q(G, H) \leq k$, no caso em que G é um grafo com largura em árvore limitada e H é um subgrafo gerador de G . A motivação para esse resultado surgiu da nossa busca em resolver o mesmo problema para a classe dos grafos periplanares com emparelhamentos como backbone. No entanto, utilizamos em

nossas tentativas apenas o fato de que grafos periplanares possuem largura em árvore limitada, obtendo, por fim, o resultado para uma classe um pouco mais geral de grafos que será apresentado nessa seção. Antes de apresentarmos a construção de tal algoritmo, introduziremos algumas definições necessárias para o bom entendimento dessa construção.

Uma *decomposição em árvore* de um grafo G é um par $\mathcal{D} = (\{X_t\}_{t \in V(T)}, T)$, onde T é uma árvore e, para cada $i \in V(T)$, existe um subconjunto $X_i \subseteq V(G)$ onde as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) $\bigcup X_i = V(G)$;
- (ii) Para toda aresta $uv \in E(G)$, existe um $i \in V(T)$ tal que $\{u, v\} \subseteq X_i$;
- (iii) Dado $\{i, j, k\} \subseteq V(T)$, se j está no caminho entre i e k em T , então $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Definimos a *largura* de uma decomposição em árvore $\mathcal{D} = (\{X_t\}_{t \in V(T)}, T)$ como:

$$\max\{|X_t| - 1 \mid t \in V(T)\}.$$

A *largura em árvore* de um grafo G é a largura mínima dentre todas as decomposições em árvore de G e será denotada por $\text{tw}(G)$.

A grosso modo, a largura em árvore de um grafo nos diz o quão próximo a estrutura desse grafo se assemelha, do ponto de vista de conexidade, com a estrutura de uma árvore, isto é, quanto menor a largura em árvore de um grafo, mais este grafo é semelhante a um grafo minimalmente conexo. Visto desse modo, o processo de decomposição em árvore de um grafo é uma poderosa ferramenta utilizada para desenvolver algoritmos eficientes para diversos tipos de problemas de otimização em grafos. Para o nosso problema, utilizaremos uma decomposição em árvore mais específica, conforme definiremos mais adiante.

De posse da definição de decomposição em árvore de um grafo, não é difícil concluir que se H é uma clique em um grafo G e $\mathcal{D} = (\{X_t\}_{t \in V(T)}, T)$ é uma decomposição em árvore de G , então existe $t \in V(T)$ tal que $V(H) \subseteq X_t$. Ao leitor interessado na demonstração dessa e de outras propriedades elementares sobre decomposição em árvore, recomendamos a leitura de (DIESTEL, 2008). A Proposição 3.4 a seguir, cuja demonstração também pode ser encontrada em (DIESTEL, 2008), nos diz, de um modo mais geral, que grafos periplanares possuem largura em árvore limitada, uma vez que a classe dos grafos série-paralelo contém a classe dos grafos periplanares.

Proposição 3.4. *Um grafo G é série-paralelo se, e somente se, $\text{tw}(G) \leq 2$.*

Uma decomposição em árvore será dita uma decomposição *boa* quando T é uma árvore enraizada em um vértice $r \in V(T)$ qualquer e cada nó $t \in V(T)$ pode ser

classificado como um dos seguintes tipos:

1. *nó folha*: t é uma folha em T e $|X_t| = 1$;
2. *nó de abandono*: t tem exatamente um filho t' e existe um vértice $u \in V(G)$ tal que $X_t = X_{t'} \setminus \{u\}$;
3. *nó de introdução*: t tem exatamente um filho t' e existe um vértice $u \in V(G)$ tal que $X_t = X_{t'} \cup \{u\}$;
4. *nó de junção*: t tem exatamente dois filhos, t_1 e t_2 , e $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$.

Veja na Figura 16 dois exemplos de decomposição em árvore do grafo G , ilustrado na Figura 16a. Na Figura 16b temos uma decomposição em árvore de G , de largura 2. Uma vez que G possui cliques de comprimento 3, segue que $\text{tw}(G) = 2$. Na Figura 16c temos uma decomposição em árvore boa de G , também de largura 2, obtida da decomposição da Figura 16b.

De um modo mais geral, uma decomposição em árvore boa pode ser utilizada como ferramenta para resolver problemas recursivamente através de um algoritmo em programação dinâmica. É um fato conhecido que encontrar uma decomposição em árvore boa de largura $\mathcal{O}(\text{tw}(G))$ pode ser feito em tempo $2^{\mathcal{O}(\text{tw}(G))} \cdot n$. Ao leitor interessado nesse resultado, recomendamos a leitura de (BODLAENDER, 2009) e (CYGAN et al., 2015).

Teorema 3.4. *Sejam G um grafo com largura em árvore tw , H um subgrafo gerador de G , e sejam k e q dois inteiros positivos. Decidir se $\text{BBC}_q(G, H) \leq k$ pode ser feito em tempo $\mathcal{O}(k^{\text{tw}} \cdot \text{tw} \cdot n)$.*

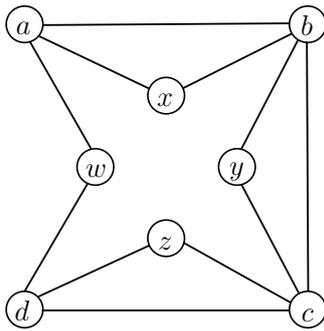
Demonstração. O primeiro passo é encontrar uma decomposição em árvore boa de G , digamos $\mathcal{D} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$, através do procedimento fornecido em (BODLAENDER, 2009) e (CYGAN et al., 2015), onde T é uma árvore enraizada em um vértice $r \in V(T)$ qualquer. Depois disso, para cada nó $t \in V(T)$, denotamos por T_t a subárvore de T enraizada em t ; por V_t o subconjunto $\bigcup_{t' \in V(T_t)} X_{t'}$; e por (G_t, H_t) o par $(G[V_t], H[V_t])$. Além disso, para cada k -coloração $\varphi : X_t \rightarrow [k]$, definimos o seguinte:

$$B_t(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma } k\text{-coloração } q\text{-backbone} \\ & \varphi' \text{ de } (G_t, H_t) \text{ que estende } \varphi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

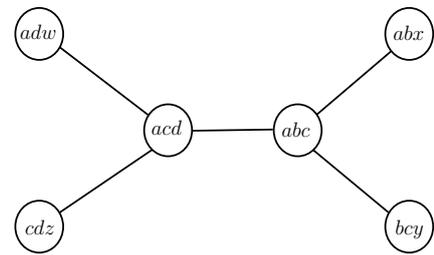
Observe que é possível calcular os valores da função acima para todos os nós de T visitando cada nó exatamente uma vez. De fato, isso pode ser feito através de uma *travessia em pós-ordem*: percorrendo todos os nós de T seguindo uma ordem na qual os valores da função definida acima associados aos filhos de um nó $t \in V(T)$ são processados antes do valor de $B_t(\varphi)$.

De posse dessa observação, mostraremos como computar cada $B_t(\varphi)$. Consi-

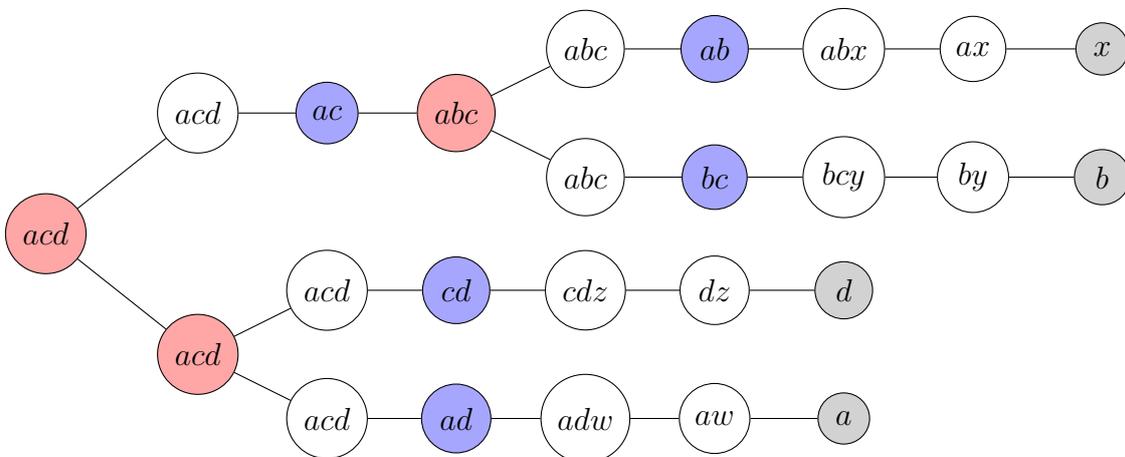
Figura 16 – Decomposição em árvore de G .



(a) o grafo G .



(b) Decomposição em árvore de G .



(c) Decomposição em árvore boa de G : os nós destacados com as cores cinza, azul, branco e vermelho representam nós do tipo folha, de abandono, de introdução e de junção, respectivamente.

Fonte: elaborada pelo autor.

dere um nó t e uma k -coloração φ de $G[X_t]$. Se t é uma folha, temos que $B_t(\varphi) = 1$ se, e somente se, φ é uma k -coloração q -backbone de $(G[X_t], H[X_t])$. Veja que esse processo pode ser verificado em tempo $\mathcal{O}(\text{tw})$. Assim, suponha que t não é uma folha e considere que os valores de $B_{t'}(\varphi)$ já são conhecidos para cada filho t' de t . Analisamos cada tipo possível de t :

1. t é de abandono: Sejam t' o filho de t e $u \in V(G)$ tais que $X_t = X_{t'} \setminus \{u\}$. Observe que $(G_t, H_t) = (G_{t'}, H_{t'})$. Dessa forma, temos que existe uma k -coloração q -backbone φ' de (G_t, H_t) que estende φ se, e somente se, φ' é uma k -coloração q -backbone de $(G_{t'}, H_{t'})$ que estende φ . Assim, se definirmos φ_i como

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \neq u; \\ i, & \text{se } x = u. \end{cases}$$

para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, temos que:

$$B_t(\varphi) = 1 \text{ se, e somente se, } B_{t'}(\varphi_i) = 1 \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Observe que checar se tal entrada existe leva tempo $\mathcal{O}(k)$.

2. t é de introdução: Sejam t' o filho de t e $u \in V(G)$ tais que $X_t = X_{t'} \cup \{u\}$. Então, como $N_{G_t}(u) \subseteq X_t$, existe uma k -coloração q -backbone φ' de (G_t, H_t) que estende φ se, e somente se, φ é uma k -coloração q -backbone de $(G[X_t], H[X_t])$ e existe uma k -coloração q -backbone φ'' de $(G_{t'}, H_{t'})$ que estende $\varphi' = \varphi|_{X_{t'}}$. Assim, temos que:

$$B_t(\varphi) = 1 \text{ se, e somente se, } B_{t'}(\varphi') = 1,$$

o que pode ser verificado em tempo constante.

3. t é de junção: Sejam t_1, t_2 filhos de t . Como X_t separa $G_{t_1} - X_t$ de $G_{t_2} - X_t$, temos que a união de duas k -colorações q -backbone de G_{t_1} e G_{t_2} que concordam com X_t nos dá uma k -coloração q -backbone de (G_t, H_t) . Assim,

$$B_t(\varphi) = 1 \text{ se, e somente se, } B_{t_1}(\varphi) = B_{t_2}(\varphi) = 1.$$

As igualdades acima também podem ser verificadas em tempo constante.

Assim, como computar uma entrada $B_t(\varphi)$ leva tempo $\mathcal{O}(\text{tw})$ e existem $\mathcal{O}(n)$ nós em T , com k^{tw} entradas por nó, temos a complexidade desejada. Quando chegamos à raiz r de T , a resposta para saber se $\text{BBC}_q(G, H) \leq k$ é “sim” se, e somente se, $B_r(\varphi) = 1$, para alguma k -coloração φ de X_r . \square

Agora, observe que o Teorema 3.4 acima juntamente com a Proposição 3.4 e a desigualdade (1) na página 35, nos fornecem o seguinte resultado:

Corolário 3.2. *Sejam G um grafo série-paralelo, H um subgrafo gerador de G e q um inteiro positivo. Então, podemos calcular $\text{BBC}_q(G, H)$ em tempo $\mathcal{O}(q^3 \cdot n)$.*

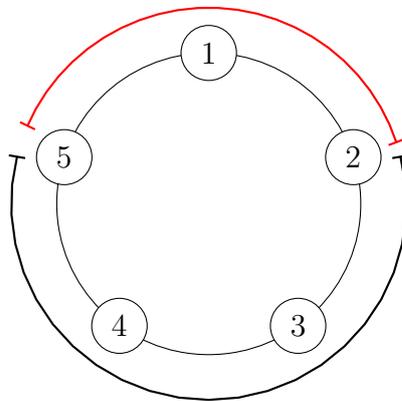
A demonstração do resultado acima consiste em testar, através do algoritmo obtido pelo procedimento feito no Teorema 3.4, quando $\text{BBC}_q(G, H) \leq k$, para cada valor de k possível. Como podemos computar cada etapa em tempo $\mathcal{O}(q^2 \cdot n)$ e existem $\mathcal{O}(q)$ valores possíveis, obtemos a complexidade desejada. Em particular, conforme já discutimos antecipadamente, grafos série-paralelos contêm a mais conhecida subclasse dos grafos periplanares, o que nos permite obter o seguinte

Corolário 3.3. *Sejam G um grafo periplanar com um emparelhamento perfeito M e q um inteiro positivo. Então, podemos calcular $\text{BBC}_q(G, H)$ em tempo $\mathcal{O}(q^3 \cdot n)$.*

4 COLORAÇÕES BACKBONE CIRCULARES

Apresentamos neste capítulo uma família especial de colorações backbone, onde, dado um inteiro positivo k , o espaço das cores de 1 a k é um espaço munido com uma *métrica circular* $\|\cdot\|_k$, isto é, uma métrica que se comporta como a distância usual no conjunto \mathbb{Z}_k . De modo mais preciso, dados dois inteiros $a, b \in \{1, \dots, k\}$, temos que $|a - b|_k \geq q$ se, e somente se, $q \leq |a - b| \leq k - q$. Intuitivamente, podemos enxergar o conjunto \mathbb{Z}_k como um ciclo de tamanho k com conjunto de vértices $\{1, \dots, k\}$ dispostos ordenadamente, onde a distância entre dois vértices a e b é definida como o tamanho do menor caminho entre a e b através do ciclo. Por exemplo, a distância entre 2 e 5 através dessa métrica em \mathbb{Z}_5 é igual a 2, como podemos ver na Figura 17.

Figura 17 – Distância entre 5 e 2 em $\|\cdot\|_5$.



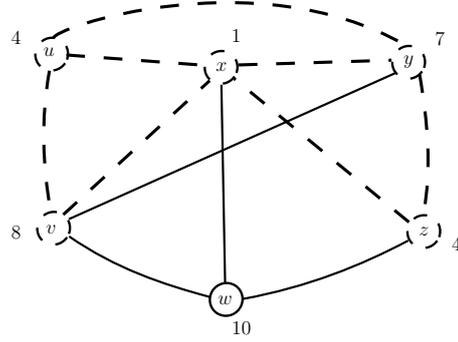
Fonte: elaborada pelo autor.

Neste contexto, dados um par (G, H) e um inteiro positivo q , uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) é uma aplicação $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ em que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ sempre que $uv \in E(G)$ e, além disso, $|\varphi(u) - \varphi(v)|_k \geq q$ sempre que $uv \in E(H)$. Uma k -coloração q -backbone circular parcial de um par (G, H) é uma k -coloração q -backbone circular de um subpar $(G', H') \subset (G, H)$ que é também uma k -coloração parcial de G . Definimos o *número cromático q -backbone circular* de (G, H) , denotado por $\text{CBC}_q(G, H)$, como o menor inteiro positivo k para o qual existe uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) . Considerando o mesmo par (G, H) apresentado na Figura 10, observe que (G, H) possui uma 10-coloração 3-backbone circular, como podemos ver na Figura 18 adiante.

De acordo com as definições acima, não é difícil notar que uma k -coloração q -backbone circular de um par (G, H) é também uma k -coloração q -backbone de (G, H) . Ademais, adicionando $q - 1$ novas cores ao espaço de cores $\{1, \dots, k\}$, é também possível notar que uma k -coloração q -backbone de (G, H) é uma $(k + q - 1)$ -coloração q -backbone circular de (G, H) . Resumidamente, para um dado par (G, H) , onde H é um subgrafo gerador de G , temos as seguintes desigualdades:

$$\text{BBC}_q(G, H) \leq \text{CBC}_q(G, H) \leq \text{BBC}_q(G, H) + q - 1. \quad (2)$$

Figura 18 – Exemplo de uma 10-coloração 3-backbone circular de (G, H) .



Fonte: elaborada pelo autor.

Em função do número cromático, temos também

$$q \cdot \chi(H) \leq \text{CBC}_q(G, H) \leq q \cdot \chi(G). \quad (3)$$

A seguir, iremos expor uma breve revisão bibliográfica associada aos nossos resultados. De início, observe que se G é um grafo bipartido e $E(H)$ é não-vazio, as desigualdades em (3) acima nos dizem que $\text{CBC}_q(G, H) = 2q$. De um modo mais geral, quando $\chi(G) = \chi(H)$, temos que $\text{CBC}_q(G, H) = q \cdot \chi(G)$. Para o caso em que $2 \leq \chi(H) < \chi(G)$, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1 (Havet et al., 2014). *Se (G, H) é um par tal que H é um subgrafo gerador de G e $2 \leq \chi(H) < \chi(G)$, então*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq (\chi(G) + q - 2)\chi(H).$$

Demonstração. Inicialmente, denote $\chi(G)$ e $\chi(H)$ por k e ℓ , respectivamente, e considere $\alpha: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ uma k -coloração de G e $\beta: V(H) \rightarrow \{1, \dots, \ell\}$ uma ℓ -coloração de H . Temos os seguintes casos:

1. ℓ é par.

Nesse caso, defina uma $(\ell(k + q - 2))$ -coloração de G da seguinte forma:

$$\varphi(v) = \begin{cases} (\beta(v) - 1)(k + q - 2) + \alpha(v), & \text{se } \beta(v) \text{ é ímpar;} \\ (\beta(v) - 1)(k + q - 2) + k - \alpha(v), & \text{se } \beta(v) \text{ é par.} \end{cases} \quad (4)$$

Provaremos que φ é uma $(\ell(k + q - 2))$ -coloração q -backbone circular de (G, H) . Para tanto, considere, para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$, o conjunto

$$I_i = \{(i - 1)(k + q - 2) + 1, \dots, (i - 1)(k + q - 2) + k\}.$$

Observe que para todo $v \in V(G)$, temos $\varphi(v) \in I_{\beta(v)}$, de sorte que se $\beta(v) \neq \beta(u)$,

temos que $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq q - 1$. Além disso, note que $|\varphi(u) - \varphi(v)| = q - 1$ ocorre somente quando $\alpha(u) = \alpha(v)$. Dessa forma, dada uma aresta $uv \in E(G)$, se $\beta(u) \neq \beta(v)$, então $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Por outro lado, no caso em que $\beta(u) = \beta(v)$, temos que $|\varphi(u) - \varphi(v)| = |\alpha(u) - \alpha(v)| \neq 0$, uma vez que α é própria.

Agora, dada uma aresta $uv \in E(H)$, temos que $\beta(u) \neq \beta(v)$. Como α é própria e $k > 2$, segue que $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq q$. Além disso, no caso em que $\beta(u)$ e $\beta(v)$ têm a mesma paridade, como ℓ é par, temos que:

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(v)| &= |(\beta(u) - \beta(v))(k + q - 2) + (\alpha(u) - \alpha(v))| \\ &\leq (\ell - 2)(k + q - 2) + (k - 1) \\ &= \ell(k + q - 2) - q - (q + k - 3) \\ &< \ell(k + q - 2) - q. \end{aligned}$$

No caso em que $\beta(u)$ e $\beta(v)$ têm paridades distintas, suponha, sem perda de generalidade, que $\beta(v)$ é ímpar e $\beta(u)$ é par, de sorte que:

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(v)| &= |(\beta(u) - \beta(v))(k + q - 2) + k - (\alpha(u) + \alpha(v))| \\ &\leq (\ell - 1)(k + q - 2) + k - 3 \\ &= \ell(k + q - 2) - q - 1 \\ &< \ell(k + q - 2) - q. \end{aligned}$$

2. ℓ é ímpar.

Nesse caso, definimos a seguinte $((k + q - 2)\ell)$ -coloração de G :

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } \beta(v) = 1 \text{ e } \alpha(v) = k; \\ \alpha(v) + 1, & \text{se } \beta(v) = 1 \text{ e } \alpha(v) < k; \\ k + q - 1, & \text{se } \beta(v) = 2 \text{ e } \alpha(v) = k - 1; \\ k + q, & \text{se } \beta(v) = 2 \text{ e } \alpha(v) = k; \\ 2k + q - 2 - \alpha(v), & \text{se } \beta(v) = 2 \text{ e } \alpha(v) < k - 1; \\ (\beta(v) - 1)(q - 2 + k) + \alpha(v), & \text{se } \beta(v) \text{ é ímpar e } \beta(v) > 2; \\ (\beta(v) - 1)(q - 2 + k) + k - \alpha(v), & \text{se } \beta(v) \text{ é par e } \beta(v) > 2. \end{cases}$$

Em qualquer caso na equação acima, como α é própria, temos que φ também é uma coloração própria. Ademais, dada uma aresta $uv \in E(H)$, se $\beta(u), \beta(v) > 2$, de modo análogo ao caso anterior, temos que $q \leq |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \ell(k + q - 2) - q$. No caso em que $\beta(u), \beta(v) \leq 2$, suponha, sem perda de generalidade, que $\beta(u) = 1$ e $\beta(v) = 2$. Se

$\varphi(u) = 1$, como $\ell \geq 2$, temos que $q < |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \ell(k+q-2) - q$. No caso em que $\varphi(v) = \alpha(v)+1$, também não é difícil verificar que $q \leq |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \ell(k+q-2) - q$. \square

Observe, pelo Teorema das Quatro Cores, que quando G é um grafo planar e H é uma floresta geradora de G , temos que $\chi(G) \leq 4$ e $\chi(H) \leq 2$, de modo que a Proposição 4.1 acima nos fornece o corolário a seguir:

Corolário 4.1 (Havet et al., 2014). *Se G é um grafo planar e H é uma floresta geradora de G , então*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 4.$$

Por outro lado, é possível que o limitante superior acima possa ser reduzido em pelo menos uma unidade, embora ainda não exista nenhuma demonstração dessa afirmação encontrada na literatura. Por esse motivo, Havet et al. (2014) conjecturaram o seguinte resultado:

Conjectura 4.1 (Havet et al., 2014). *Se G é um grafo planar e H é uma floresta geradora de G , então*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 3.$$

Uma pergunta também natural é se o limitante acima é o melhor possível. No caso em que H é uma floresta de estrelas, isto é, H é uma galáxia, Broersma et al. mostraram em (BROERSMA et al., 2009) que $\text{BBC}_q(G, H) \leq q + 4$, de modo que, pela desigualdade (2) na página 52, o limitante na Conjectura 4.1 é sempre válido.

Proposição 4.2 (Broersma et al., 2009). *Se G é um grafo planar e H é uma galáxia geradora de G , então*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 3.$$

Contudo, é possível que o limitante acima também possa ser melhorado em uma unidade e, em caso afirmativo, esse limitante seria o melhor possível. De fato, basta considerar o par $(K_4, K_{1,3})$ com a coloração indicada na Figura 19.

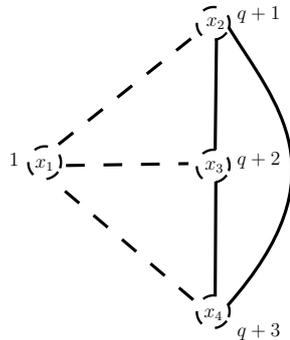
Conjectura 4.2 (Havet et al., 2014). *Se G é um grafo planar e H é uma galáxia geradora de G , então*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 2.$$

Mostraremos na Seção 4.3 que a Conjectura 4.2 acima é verdadeira quando $q \geq 3$. Mais do que isso, mostraremos um limitante para grafos gerais em função apenas dos valores $\chi(G)$ e q , quando $q \geq \chi(G) - 1$.

No caso em que H é um emparelhamento, Broersma et al. (2009) construíram

Figura 19 – Exemplo de um par $(K_4, K_{1,3})$ em que $\text{CBC}_q(K_4, K_{1,3}) = 2q + 2$.



Fonte: elaborada pelo autor.

um exemplo em que $\text{CBC}_2(G, M) = 6$, de modo que o limitante na Conjectura 4.2 é atingido quando $q = 2$. Quando $q \geq 3$, no entanto, Havet et al. (2014) conjecturaram que esse limitante pode ser ainda melhorado:

Conjectura 4.3 (Havet et al., 2014). *Se G é um grafo planar, M é um emparelhamento de G e $q \geq 3$, então*

$$\text{CBC}_q(G, M) \leq 2q + 1.$$

No mesmo artigo, Havet et al. demonstraram que a Conjectura 4.3 acima é verdadeira se acrescentarmos a hipótese de que G é um grafo de cintura pelo menos 5, deixando em aberto o seguinte resultado:

Problema 4.1 (Havet et al., 2014). *Se G é um grafo planar de cintura pelo menos 4 e M é um emparelhamento de G , então $\text{CBC}_q(G, M) \leq 2q + 1$?*

Nas Seções 4.1 e 4.2, mostraremos resultados que respondem parcialmente a Conjectura 4.3 e o Problema 4.1 acima, além de nos fornecer um limitante superior para o número $\text{CBC}_q(G, H)$ consideravelmente melhor do que o obtido na Proposição 4.1 quando G é um grafo planar.

Do ponto de vista de complexidade, Havet et al. (2014) demonstraram que para $k \in \{4, 5\}$, é NP-completo decidir se $\text{CBC}_2(G, M) \leq k$ quando G é um grafo planar e M é um emparelhamento de G .

Ademais, não é difícil verificar que a demonstração do Teorema 3.4 continua sendo verdadeira quando consideramos colorações backbone circulares, de sorte que temos os seguintes resultados:

Teorema 4.1. *Sejam G um grafo com largura em árvore tw , H um subgrafo gerador de G , e sejam k e q dois inteiros positivos. Decidir se $\text{CBC}_q(G, H) \leq k$ pode ser feito em*

tempo $\mathcal{O}(k^{\text{tw}} \cdot \text{tw} \cdot n)$.

Corolário 4.2. *Sejam G um grafo série-paralelo, H um subgrafo gerador de G e q um inteiro positivo. Então, podemos calcular $\text{CBC}_q(G, H)$ em tempo $\mathcal{O}(q^3 \cdot n)$.*

Corolário 4.3. *Sejam G um grafo periplanar com um emparelhamento perfeito M e q um inteiro positivo. Então, podemos calcular $\text{CBC}_q(G, H)$ em tempo $\mathcal{O}(q^3 \cdot n)$.*

4.1 Grafos Menores-fechado e g -limitados

Nesta seção, investigaremos uma classe de grafos um pouco mais geral a fim de respondermos parcialmente a Conjectura 4.3 e o Problema 4.1. Mais especificamente, dada uma classe de grafos \mathcal{G} , diremos que \mathcal{G} é *menor-fechada* se $G' \in \mathcal{G}$ sempre que G' é um menor de algum $G \in \mathcal{G}$. Por exemplo, sendo \mathcal{P} a classe dos grafos planares, note que \mathcal{P} é uma classe menor-fechada. Ademais, dada uma função $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$, diremos que \mathcal{G} é g -limitada se $\chi(G) \leq g(G)$ para todo $G \in \mathcal{G}$, e $g(G') \leq g(G)$ sempre que G' é um menor de G . Observe que, pelo Teorema das Quatro Cores, considerando a função constante $g(G) = 4$ para todo $G \in \mathcal{P}$, temos que a classe dos grafos planares é g -limitada.

Teorema 4.2. *Seja \mathcal{G} uma classe de grafos menor-fechada e g -limitada, para alguma função $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$. Se (G, H) é um par, onde $G \in \mathcal{G}$ e $H \subseteq G$ é um subgrafo gerador de G tal que cada componente conexa de H é um subgrafo induzido de G , então:*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq \chi(H) \cdot \max\{g(G), q\}.$$

Demonstração. Inicialmente, denote $\chi(H)$ e $g(G)$ por t e k , respectivamente. Seja G' o grafo obtido de G pela contração de todas as arestas de H e pela remoção, após esse processo, da menor quantidade possível de arestas de modo que não existam arestas com apenas uma extremidade ou algum par de arestas compartilhando as mesmas extremidades. Para cada componente C de H , seja x_C o vértice resultante da contração de todas as arestas em $E(C)$. Note que $V(G') = \{x_C \mid C \text{ é uma componente de } H\}$, uma vez que H é um subgrafo gerador de G . Agora, como $G \in \mathcal{G}$ e \mathcal{G} é uma classe menor-fechada e g -limitada, temos que $G' \in \mathcal{G}$ e, além disso, $\chi(G') \leq g(G') \leq k$. Dessa forma, considere $\varphi_{G'}$ uma k -coloração própria de G' e φ_H uma t -coloração própria de H . Para cada vértice $v \in V(G)$, denote por C_v a componente de H que contém v . Feito isso, considere $\ell = \max\{k, q\}$ e defina uma $(t \cdot \ell)$ -coloração $\varphi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, t \cdot \ell\}$ da seguinte forma:

$$\varphi(v) = \varphi_{G'}(x_{C_v}) + \ell(\varphi_H(v) - 1), \forall v \in V(G). \quad (5)$$

Mostraremos que φ é uma (ℓt) -coloração q -backbone circular de (G, H) . Para

tanto, considere uma aresta $uv \in E(G)$. Feito isso, analisaremos os seguintes casos:

1. $C_u = C_v$: Nesse caso, temos que $\varphi_{G'}(x_{C_u}) = \varphi_{G'}(x_{C_v})$ e $\varphi_H(u) \neq \varphi_H(v)$, uma vez que cada componente de H é um subgrafo induzido de G , de sorte que:

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| = |\ell \cdot (\varphi_H(u) - \varphi_H(v))| \geq \ell \geq q \quad (6)$$

e, como $1 \leq \varphi_H(v), \varphi_H(u) \leq t$,

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| = |\ell \cdot (\varphi_H(v) - \varphi_H(u))| \leq |\ell(t - 1)| \leq \ell t - q. \quad (7)$$

Desse modo, $q \leq |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \ell t - q$.

2. $C_u \neq C_v$: Nesse caso, devemos ter $uv \in E(G')$, de modo que $\varphi_{G'}(x_{C_u}) \neq \varphi_{G'}(x_{C_v})$ e $uv \notin E(H)$. Assim, é suficiente mostrar que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Com efeito, suponha, por contradição, que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Como $1 \leq \varphi_{G'}(x_{C_u}), \varphi_{G'}(x_{C_v}) \leq k$, temos que

$$1 \leq |\varphi_{G'}(x_{C_u}) - \varphi_{G'}(x_{C_v})| \leq k - 1 < \ell, \quad (8)$$

de sorte que

$$0 = \varphi(u) - \varphi(v) = (\varphi_{G'}(x_{C_u}) - \varphi_{G'}(x_{C_v})) + (\ell(\varphi_H(u) - 1) - \ell(\varphi_H(v) - 1)) \quad (9)$$

$$\Rightarrow |\varphi_{G'}(x_{C_u}) - \varphi_{G'}(x_{C_v})| = \ell|\varphi_H(u) - \varphi_H(v)|. \quad (10)$$

Agora, se tivermos $\varphi_H(u) = \varphi_H(v)$, chegamos a uma contradição, uma vez que $\varphi_{G'}(x_{C_u}) \neq \varphi_{G'}(x_{C_v})$. Por outro lado, também não podemos ter $\varphi_H(u) \neq \varphi_H(v)$ pois, nesse caso, temos que $\ell|\varphi_H(u) - \varphi_H(v)| \geq \ell$, enquanto $|\varphi_{G'}(x_{C_u}) - \varphi_{G'}(x_{C_v})| < \ell$. Em todo caso, concluímos que a afirmação é falsa, de modo que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. \square

Observe que o Teorema 4.2 acima nos dá um limitante superior para o número $\text{CBC}_q(G, M)$ bem melhor do que o limitante obtido pela Proposição 4.1 quando G é um grafo planar. Mais do que isso, quando M é um emparelhamento não-vazio de um grafo planar G , o Teorema 4.2 juntamente com as desigualdades em (3), na página 53, nos fornecem o seguinte resultado:

Proposição 4.3. *Se G é um grafo planar com um emparelhamento não-vazio M e $q \geq 4$, então*

$$\text{CBC}_q(G, M) \leq 2q.$$

Observe que a Proposição 4.3 nos diz que a Conjectura 4.3 e o Problema 4.1

não somente são verdadeiros no caso em que $q \geq 4$, como podem ser melhorados em uma unidade.

4.2 Emparelhamentos Backbone

Como consequência imediata do resultado apresentado na Seção 4.1, temos que $\text{CBC}_q(G, M) \leq 2q$ sempre que G é um grafo planar com um emparelhamento M e $q \geq 4$, o que responde parcialmente a Conjectura 4.3, deixando ainda em aberto a resposta para o caso em que $q = 3$. Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que o limitante da Conjectura 4.3 é ainda verdadeiro no caso em que $q = 3$ e G não possui nenhuma representação plana com faces de comprimento três compartilhando arestas, o que responde parcialmente o resultado desejado. Esse limitante será obtido por meio de um par (G', M') que é um contraexemplo minimal em arestas para o valor $\text{CBC}_q(G, M)$. Iremos formalizar essa noção de minimalidade no parágrafo seguinte e, no que segue, apresentaremos mais algumas definições e notações, a fim de facilitar a leitura das demonstrações dos resultados a serem expostos posteriormente.

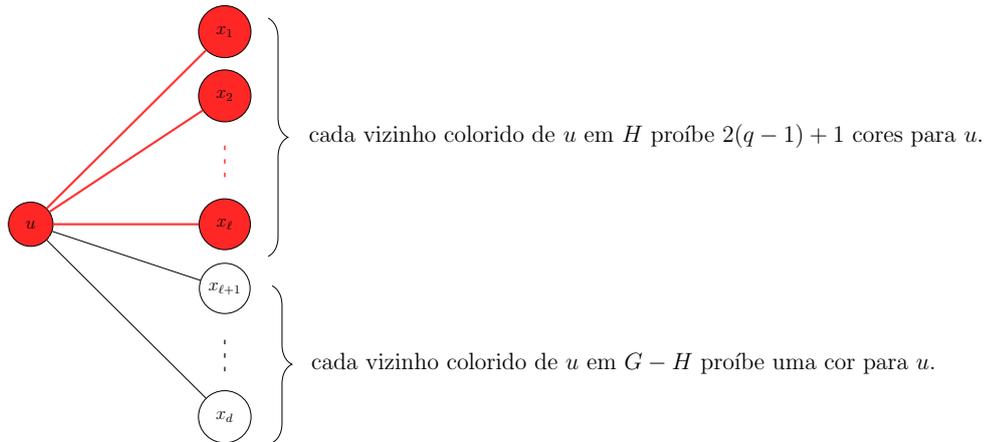
Um par (G, H) será dito (k, q) -aresta-minimal se for tal que $\text{CBC}_q(G, H) > k$ mas para qualquer subpar próprio (G', H') de (G, H) , em que $(G', H') = (G, H) - u - v$ para alguma aresta $uv \in E(H)$, tivermos $\text{CBC}_q(G', H') \leq k$. Observe que na definição anterior, se $\text{CBC}_q(G, H) > k$, então deverá existir um subpar (G', H') de (G, H) que é (k, q) -aresta-minimal. Observe também que se (G, H) é um par (k, q) -aresta-minimal, então ou G é um grafo conexo ou G possui no máximo uma componente conexa não-trivial. De fato, basta observar que a união das 7-colorações 3-backbone circulares de cada componente conexa de G nos fornece uma 7-coloração 3-backbone circular de (G, H) .

Dados um par (G, H) e um vértice $u \in V(G)$, o grau q -total de u em (G, H) é dado por:

$$d_{(G,H),q}^t(u) = d_G(u) + (2q - 2)d_H(u). \quad (11)$$

Quando G, H e q são evidentes no contexto, serão omitidos na notação acima.

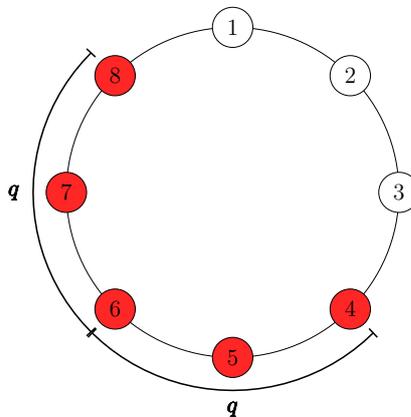
Intuitivamente, o grau total nos fornece um limitante superior para o número de cores proibidas para um vértice sempre que sua vizinhança já estiver parcialmente colorida. De fato, imagine que temos uma coloração q -backbone circular parcial em (G, H) em que todos os vértices na vizinhança de um vértice não-colorido u já estão coloridos e desejamos atribuir uma cor ao vértice u de modo que a coloração resultante ainda seja uma coloração q -backbone circular parcial de (G, H) . Com o auxílio da Figura 20, onde as arestas destacadas estão em H , $d_H(u) = \ell$ e $d_G(u) = d$, observe que u deverá receber uma cor diferente das cores de seus vizinhos e, além disso, tal cor deverá estar em um raio de distância de $q - 1$ da cor de cada vizinho de u em H . Sendo assim, ainda no caso em que as cores dos vértices na vizinhança de u são todas distintas, teremos, no máximo,

Figura 20 – O grau q -total de um vértice u .

Fonte: elaborada pelo autor.

$d^t(u)$ cores proibidas para u .

Nesse contexto, dados um espaço de cores \mathbb{Z}_k , uma cor $c \in \mathbb{Z}_k$ e um inteiro positivo q , denotamos por $[c]_{k,q}$ o conjunto das cores $i \in \mathbb{Z}_k$ que satisfazem $|c - i| < q$ ou $|c - i| > k - q$. Intuitivamente, dispendo os elementos de \mathbb{Z}_k de forma circular, podemos imaginar o conjunto $[c]_{k,q}$ como sendo o conjunto das $2q - 1$ cores consecutivas tais que c é a cor central. Para ilustrar essa ideia, considere o caso em que $k = 8$, com $\mathbb{Z}_8 = \{1, \dots, 8\}$, $q = 3$ e $c = 6$. Dispendo os elementos de \mathbb{Z}_8 de modo circular, temos que $[6]_{8,3}$ é o conjunto formado pelas cores destacadas na Figura 21, isto é, o conjunto $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Dados um subconjunto $S \subseteq \mathbb{Z}_k$ e uma cor $c \in \mathbb{Z}_k$, dizemos que a cor c é q -ruim para S se $S \subseteq [c]_{k,q}$. Observe que se um vértice possui cor $c \in \mathbb{Z}_k$ em uma k -coloração q -backbone de um par (G, H) , a cor de qualquer vizinho de tal vértice em H não poderá estar em $[c]_{k,q}$.

Figura 21 – Ilustração do conjunto $[6]_{8,3} \subset \mathbb{Z}_8$.

Fonte: elaborada pelo autor.

Dados uma k -coloração q -backbone circular parcial φ de (G, H) e um vértice $u \in V(G)$ não-colorido por φ , o conjunto das *cores disponíveis para u* (em φ) é definido

como:

$$A_\varphi(u) = \{1, \dots, k\} \setminus \left(\bigcup_{v \in N_G(u)} \{\varphi(v)\} \cup \bigcup_{v \in N_H(u)} [\varphi(v)]_{k,q} \right). \quad (12)$$

Observe que $|A_\varphi(u)| \geq k - d^t(u)$, onde, de agora em diante, denotaremos $|A_\varphi(u)|$ por $a_\varphi(u)$.

No que segue, iremos apresentar os resultados que serão utilizados para garantir que, no caso em que $q = 3$ e G não possui uma representação plana com faces de comprimento 3 compartilhando arestas, o limitante da Conjectura 4.3 não somente é verdadeiro, como pode ser reduzido em uma unidade.

Lema 4.1. *Seja (G, M) um par $(7, 3)$ -aresta-minimal em que G é um grafo plano e M é um emparelhamento de G . Se $uv \in E(M)$, $d_G(u) \leq 7$ e $d_G(v) \leq 7$, então*

$$d^t(u) + d^t(v) \geq 18.$$

Demonstração. Inicialmente, como (G, M) é um par $(7, 3)$ -aresta-minimal, podemos admitir que G é um grafo conexo, uma vez que G possui no máximo uma componente conexa não-trivial. Ademais, como $uv \in E(M)$ e M é um emparelhamento de G , temos que $d_M(u) = d_M(v) = 1$ e, pela definição de grau 3-total, temos que:

$$\begin{cases} d^t(u) = d_G(u) + 4 \geq 5; \\ d^t(v) = d_G(v) + 4 \geq 5. \end{cases} \quad (13)$$

Agora, considere $(G', M') = (G, M) - u - v$. Como (G, M) é $(7, 3)$ -aresta-minimal e $uv \in E(M)$, existe uma 7-coloração 3-backbone circular φ de (G', M') . Iremos mostrar que se $d^t(u) + d^t(v) \leq 17$, então é possível obter uma 7-coloração 3-backbone circular de (G, M) a partir de φ , isto é, atribuindo cores aos vértices u e v e mantendo as cores dos demais vértices por φ , contradizendo a hipótese de que (G, M) é um par $(7, 3)$ -aresta-minimal.

De início, considere

$$\begin{cases} r = d_G(u) - 1 = d^t(u) - 5; \\ s = d_G(v) - 1 = d^t(v) - 5. \end{cases} \quad (14)$$

Como $d_G(u) \leq 7$ e $d_G(v) \leq 7$, observe que:

$$\begin{cases} r = d_G(u) - 1 \leq 6; \\ s = d_G(v) - 1 \leq 6. \end{cases} \quad (15)$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}
d^t(u) + d^t(v) &\leq 17 \\
r + 5 + s + 5 &\leq 17 \\
r &\leq 7 - s.
\end{aligned} \tag{16}$$

Agora, observe que existem no máximo $d_G(v) - 1 = s$ cores proibidas para v , uma vez que u ainda não foi colorido e $uv \in M$. Dessa forma, temos que $a_\varphi(v) \geq 7 - s \geq 1$ e, do mesmo modo, $a_\varphi(u) \geq 7 - r \geq 1$. Em particular,

$$a_\varphi(v) \geq 7 - s \geq r. \tag{17}$$

Dessa forma, temos que existem cores disponíveis para atribuir aos vértices u e v , resta garantir que existem cores suficientemente distantes, uma vez que $uv \in E(M)$. Para tanto, mostraremos que no máximo $r - 1$ cores são 3-ruins para $A_\varphi(u)$. Uma vez feito isso, podemos colorir primeiro v com uma cor que não é 3-ruim para $A_\varphi(u)$ e ainda teríamos pelo menos uma cor disponível para u que poderá ser usada para obter uma 7-coloração 3-backbone circular de (G, M) , contradizendo a hipótese de que $\text{CBC}_3(G, M) > 7$.

Desse modo, considere B um conjunto de cores 3-ruins para $A_\varphi(u)$ e denote $|B|$ por b . Mostraremos que $b \leq r - 1$. Com efeito, temos, por definição, que $A_\varphi(u) \subseteq [i]_{7,3}$ para todo $i \in B$, o que nos diz que $A_\varphi(u) \subseteq \bigcap_{i \in B} [i]_{7,3} = I$. Iremos provar que $|I| \leq 6 - b$ pois, uma vez feito isso, como $A_\varphi(u) \subseteq I$ e $a_\varphi(u) \geq 7 - r$, segue que

$$7 - r \leq a_\varphi(u) \leq |I| \leq 6 - b. \tag{18}$$

O que implica $b \leq r - 1$, como gostaríamos.

Assim, para mostrar que $|I| \leq 6 - b$, vamos primeiro analisar a intersecção $[i]_{7,3} \cap [j]_{7,3}$ para um par $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, 7\}$, com $i \neq j$, de acordo com a sua distância. Mais formalmente, observe que

$$\begin{aligned}
[i]_{7,3} \cap [i + 1]_{7,3} &= \{i - 1, i, i + 1, i + 2\}; \\
[i]_{7,3} \cap [i + 2]_{7,3} &= \{i, i + 1, i + 2\}; \\
[i]_{7,3} \cap [i + 3]_{7,3} &= \{i + 1, i + 2, i - 2\}.
\end{aligned}$$

Além disso, observe que como o espaço das cores é circular, as possibilidades acima são as únicas, ou seja, para qualquer escolha de i e j , com $i \neq j$, devemos ter $j \in \{i + 1, i + 2, i + 3\}$. Agora, analisemos os seguintes casos:

1. $b = 1$:

Se $B = \{i\}$, temos que $|I| \leq 5 = 6 - b$, uma vez que, nesse caso, $I = [i]_{7,3}$.

2. $b \leq 3$:

Se $b \leq 3$, temos, pelas igualdades acima, que $|I| \leq 6 - b$.

3. $b = 4$:

Nesse caso, veja que existe $i \in B$ tal que $i + 3 \in B$. Daí, pela terceira igualdade acima, temos que $I \subseteq \{i + 1, i + 2, i - 2\}$. Como $i - 2 \notin [i + 1]_{7,3}$ e $i - 2 \notin [i + 2]_{7,3}$, temos que ou $i + 1$ ou $i + 2$ é um elemento de B , de modo que $i - 2 \notin I$. Dessa forma, $|I| \leq 2 = 6 - b$. Do mesmo modo, podemos verificar que se $i - 1$, $i - 2$ ou $i - 3$ são elementos de B , então no máximo um elemento de $\{i + 1, i + 2\}$ pertence a I , de modo que $|I| \leq 2 = 6 - b$.

4. $b = 5$:

Nesse caso, temos que $\{i + 1, i + 2\} \cap B \neq \emptyset$ e $\{i - 1, i - 2, i - 3\} \cap B \neq \emptyset$. Portanto, aplicando o mesmo argumento utilizado no caso anterior, temos que $(i - 2) \notin I$ e $|\{i + 1, i + 2\} \cap I| \leq 1$, de modo que $|I| \leq 1 = 6 - b$.

5. $b \geq 6$:

Nesse caso, observe que para todo $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$, existe $j \in B$ tal que $i \notin [j]_{7,3}$, de modo que $j \in \{i + 4, i + 5\}$. Assim, devemos ter $I = \emptyset$, contradizendo o fato de que $A_\varphi(u) \subseteq I$, uma vez que $A_\varphi(u) \neq \emptyset$. Portanto, não podemos ter $b \geq 6$.

Diante dos casos acima, temos que $|I| \leq 6 - b$, de modo que a desigualdade (18) é satisfeita e temos o resultado desejado. \square

O Lema 4.2 a seguir será necessário para aplicarmos o Método do Descarregamento na demonstração do Teorema 4.3.

Lema 4.2. *Sejam G um grafo plano conexo, M um emparelhamento perfeito de G e $q = 3$. Então,*

$$\sum_{v \in V(G)} (d^t(v) - 8) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) = -8.$$

Demonstração. De início, observe que como M é um emparelhamento perfeito, temos que $d^t(v) = d_G(v) + 4$, para todo $v \in V(G)$. Além disso, como G é um grafo plano, temos a seguinte igualdade:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|. \quad (19)$$

Assim, usando a Fórmula de Euler, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(G)} (d^t(v) - 8) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) &= \sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} d(f) - \sum_{f \in F(G)} 4 \\
&= \sum_{v \in V(G)} d_G(v) - \sum_{f \in F(G)} 4 + 2|E(G)| - 4|F(G)| \\
&= 4(|E(G)| - |V(G)| - |F(G)|) \\
&= -8.
\end{aligned}$$

□

Doravante, chamaremos uma face de comprimento três em um grafo plano de *triângulo*. Ademais, diremos que dois triângulos são *adjacentes* quando compartilharem alguma de suas arestas.

Teorema 4.3. *Seja G um grafo plano que não possui nenhum par de triângulos adjacentes. Se M é um emparelhamento perfeito de G , então*

$$\text{CBC}_3(G, M) \leq 7.$$

Demonstração. Inicialmente, denote $|V(G)|$ e $|E(G)|$ por n e m , respectivamente. A demonstração será feita utilizando o Método do Descarregamento. Por contradição, suponha que $\text{CBC}_3(G, M) > 7$ para todo par (G, M) satisfazendo as hipóteses do enunciado e considere um par (G, M) tal que G possui o menor número de vértices. Inicialmente, iremos mostrar que (G, M) é um par $(7, 3)$ -aresta-minimal. Com efeito, se existir uma aresta $uv \in E(M)$ que faça com que $\text{CBC}_3(G, M) > 7$, então considere o par (G', M') , onde $G' = G - u - v$ e $M' = M - uv$. Como $G' \subset G$, temos que G' também é um grafo que não possui triângulos compartilhando arestas. Ademais, como $M' = M - uv$, temos que M' é um emparelhamento perfeito de G' . Observe que isso contradiz a escolha de (G, M) . Dessa forma, (G, M) é um par $(7, 3)$ -aresta-minimal satisfazendo as hipóteses do enunciado.

Agora, atribuiremos as seguintes quantidades de carga para cada vértice ou face de G :

$$\begin{cases} c(v) = d^t(v) - 8, & \text{para todo vértice } v \in V(G); \\ c(f) = d(f) - 4, & \text{para toda face } f \in F(G). \end{cases}$$

Observe que as únicas faces com carga negativa em G são os triângulos.

Desse modo, pelo Lema 4.2, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} (d^t(v) - 8) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) = -8, \quad (20)$$

ou seja, a soma total das cargas é negativa.

Agora, a ideia central é aplicar o método do descarregamento a fim de obter uma contradição para o Lema 4.2. Para tanto, mostraremos primeiro que para cada $uv \in E(M)$, uma dos casos abaixo ocorre:

- (1) $c(u) + c(v) \geq 2$;
- (2) $c(u) + c(v) = 1$ e $d(u) = 1$.

E, denotando por n_1 a quantidade de vértices de grau 1, observe que isso implica

$$\sum_{v \in V(G)} c(v) = \sum_{uv \in M} (c(u) + c(v)) \geq 2|M| - n_1 = n - n_1.$$

Uma vez feito isso, provaremos que o número de triângulos em G é no máximo $n - n_1$. Dessa forma, concluímos que cada vértice possui carga suficientemente alta para que possamos distribuir parte dessa carga aos triângulos que o contém e, assim, obter uma soma total de cargas não-negativa no grafo, chegando a uma contradição, uma vez que, pela igualdade em (20), essa soma é negativa.

Inicialmente, considere uv uma aresta em M . No caso em que $d_G(u) \leq 7$ e $d_G(v) \leq 7$, temos, pelo Lema 4.1, que

$$c(u) + c(v) = (d^t(u) - 8) + (d^t(v) - 8) \geq 18 - 16 = 2. \quad (21)$$

Assim, suponha que pelo menos uma das extremidades, digamos v , é tal que $d_G(v) \geq 8$. Ademais, recorde que $d^t(w) = d_G(w) + 4$ e, portanto, temos que $c(w) = d_G(w) - 4$, para todo $w \in V(G)$. Desse modo, temos que $c(v) \geq 4$. Além disso, se $d_G(u) = 1$, temos $c(u) = -3$ e, conseqüentemente, $c(u) + c(v) \geq 1$. Da mesma forma, se $d_G(u) \geq 2$, temos que $c(u) \geq -2$ e, nesse caso, $c(u) + c(v) \geq 2$.

Agora, denote por f_3 o número de triângulos em G . Iremos mostrar que f_3 é no máximo $n - n_1$. Com efeito, considere G' o grafo obtido de G pela remoção de todos os vértices de grau 1. Assim, denote $|E(G')|$ por m' , $|V(G')|$ por n' e o número de triângulos em G' por f'_3 . Como vértices de grau 1 não podem estar contidos em nenhum triângulo, temos que $f'_3 = f_3$. Dessa forma, é suficiente mostrar que $f'_3 \leq n - n_1$. Com efeito, iremos mostrar que, na verdade,

$$f'_3 \leq n' - n_1 = n - n_1 - 2.$$

Para tanto, observe que como G' não possui triângulos adjacentes, existem no máximo $d_{G'}(v)/2$ contendo um vértice v . Além disso, somando o número de triângulos contendo cada vértice, observe que cada triângulo é contado três vezes. Assim, como G' é ainda um grafo planar, temos que $m' \leq 3n' - 6$ (ref pela propriedade xx). Dessa forma, temos

$$f'_3 \leq \frac{1}{3} \cdot \sum_{v \in V(G')} \frac{d_{G'}(v)}{2} = \frac{2m'}{6} \leq n' - 2.$$

□

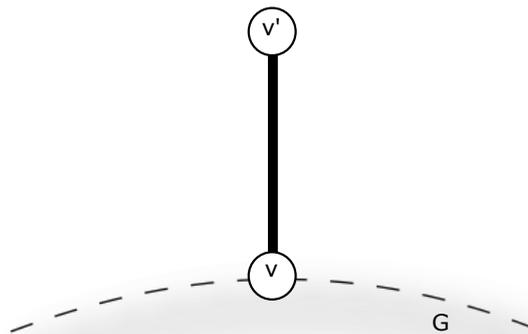
Mostraremos agora que o limitante obtido no Teorema 4.3 acima é válido mesmo quando M não for um emparelhamento perfeito.

Corolário 4.4. *Se G é um grafo plano sem triângulos adjacentes e M é um emparelhamento de G , então*

$$\text{CBC}_3(G, M) \leq 7.$$

Demonstração. Seja (G, M) satisfazendo as hipóteses acima. Para cada vértice $v \in G$ que é M -insaturado, iremos adicionar um novo vértice v' de modo que $N(v') = \{v\}$ e $uv \in E(M)$, conforme vemos na Figura 22.

Figura 22 – v é um vértice M -insaturado.



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere (G', M') o par obtido após repetir esse procedimento até não existir mais nenhum vértice M -insaturado em G . Observe que, por construção, M' é um emparelhamento perfeito de G' , e, além disso, como G' foi obtido de G apenas pela adição de vértices de grau 1, G' também não possui triângulos adjacentes, de modo que $\text{CBC}_3(G', M') \leq 7$. Como (G, M) é um subpar de (G', M') . Dessa forma, temos, pelo Teorema 4.3, que $\text{cbc}_3(G', M') \leq 7$. Por outro lado, como (G, M) é um subpar de (G', M') , temos que

$$\text{CBC}_3(G, M) \leq \text{CBC}_3(G', M'),$$

de modo que $\text{CBC}_3(G, M) \leq 7$.

□

De posse da Proposição 4.3 e do Corolário 4.4 acima, temos, pelo Teorema das Quatro Cores, o seguinte resultado:

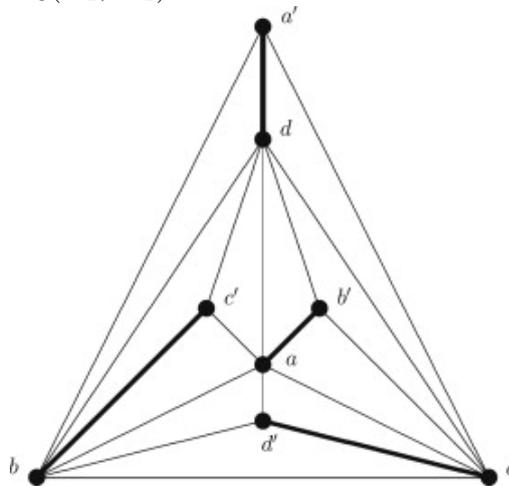
Corolário 4.5. *Se G é um grafo planar e M é um emparelhamento de G , então:*

- (a) *Para qualquer $q \geq 4$, temos $\text{CBC}_q(G, M) \leq 2q$;*
- (b) *Se G não possui triângulos adjacentes, então $\text{CBC}_3(G, M) \leq 7$.*

Como $\text{CBC}_q(G, H) \geq 2q$ sempre que H é não-vazio, de acordo com a desigualdade (3) na página 53, temos que o limitante obtido no Corolário 4.5 (a) é o melhor possível. Ademais, $2q$ não é um limitante superior para o caso em que $q = 3$ e G possui triângulos adjacentes (conforme veremos adiante), de modo que, nesse caso, $\text{CBC}_3(G, M) \geq 7$. Por outro lado, ainda no caso em que G não possui triângulos adjacentes, não sabemos se o limitante do Corolário 4.5 (b) é também o melhor possível.

O grafo utilizado para mostrar que o limitante em (a) é o melhor possível é o mesmo usado em (BROERSMA et al., 2009) para mostrar que $\text{BBC}_2(G, M) \leq 5$ é o melhor possível.

Figura 23 – $\text{CBC}_3(G_1, M_1) = 7$.



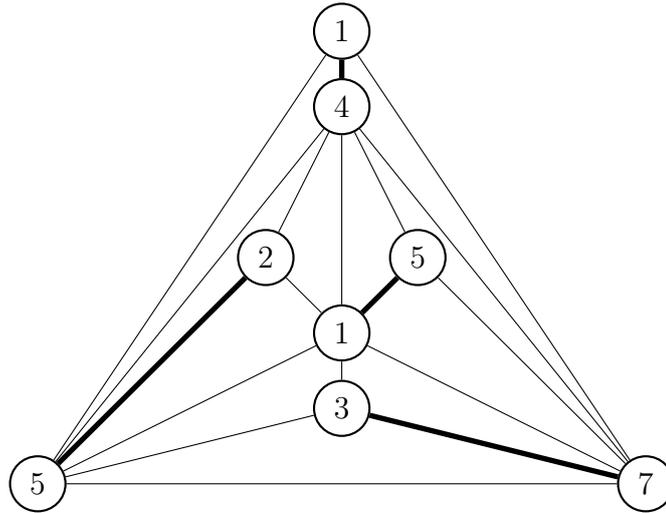
Fonte: Broersma et al. (2009).

Proposição 4.4. *Seja (G_1, M_1) o par da Figura 23. Então*

$$\text{CBC}_3(G_1, M_1) = 7.$$

Demonstração. Conforme vemos na Figura 24 adiante, (G_1, M_1) admite uma 7-coloração 3-backbone circular, de modo que $\text{CBC}_3(G_1, M_1) \leq 7$.

Mostraremos que $\text{CBC}_3(G_1, M_1) \geq 7$. Para tanto, suponha, por contradição, que existe uma 6-coloração 3-backbone circular φ de (G_1, M_1) . Observe que se uv é uma aresta de M_1 , então exatamente uma das possibilidades abaixo ocorre:

Figura 24 – Uma 7-coloração 3-backbone de (G_1, M_1) .

Fonte: elaborada pelo autor.

1. $\{\varphi(u), \varphi(v)\} = \{1, 4\}$;
2. $\{\varphi(u), \varphi(v)\} = \{2, 5\}$;
3. $\{\varphi(u), \varphi(v)\} = \{3, 6\}$.

Diremos que uv é uma ij -aresta quando $\{\varphi(u), \varphi(v)\} = \{i, j\}$.

Iremos assumir, sem perda de generalidade, que ab' é uma 14-aresta. Como d é vizinho de a e de b' , então d possui uma cor diferente de ambos e, sem perda de generalidade, iremos assumir que $a'd$ é uma 25-aresta. Dessa forma, como o único não-vizinho de c é o vértice c' , temos que $c'd$ é uma 36-aresta. Consequentemente, como b é adjacente a a' , d , c e d' , então bc' deve ser uma 14-aresta, o que é uma contradição, uma vez que o vértice a é adjacente aos vértices b e c' e $\varphi(a) \in \{1, 4\}$. \square

4.3 Galáxias Backbone

Nesta seção, mostraremos que a Conjectura 4.2 é verdadeira quando $q \geq 3$. De fato, mostraremos que nesse caso o resultado é ainda mais forte do que o enunciado por Havet et al. (2014), pois o limitante encontrado é válido para qualquer que seja o grafo G e depende somente dos valores de $\chi(G)$ e de q , quando $q \geq \chi(G) - 1$. O limitante da Conjectura 4.2 é então obtido como consequência desse resultado e do Teorema das Quatro Cores.

Proposição 4.5. *Seja G um grafo e H uma galáxia geradora de G . Se $q \geq \chi(G) - 1$, então*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + \chi(G) - 2.$$

Além disso, esse limitante é o melhor possível.

Demonstração. A fins práticos, denotaremos $\chi(G)$ por k . Para cada estrela da galáxia H , vamos considerar um único vértice central. Tecnicamente, no caso em que a estrela não consiste de apenas uma aresta, existe um único vértice nessa estrela que não é uma folha e, nesse caso, a estrela possui um único vértice central. Caso contrário, iremos fixar um de seus vértices como vértice central. Feito isso, iremos denotar por C o conjunto dos vértices centrais em H e tomaremos $L = V(G) - C$. Ademais, para cada $v \in L$, denote por $\bar{v} \in C$ o vértice central da estrela que contém o vértice v . Observe que um vértice isolado em H será considerado um vértice central.

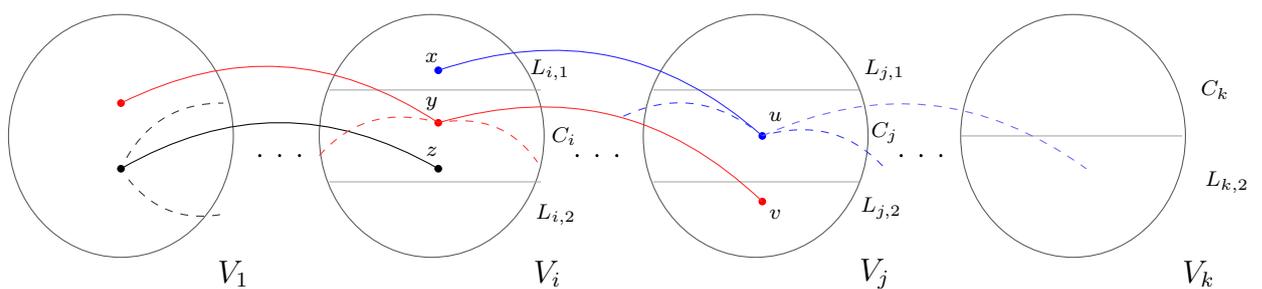
Agora, a ideia para obter uma $(2q + k - 2)$ -coloração q -backbone circular $\varphi: V \rightarrow \{1, \dots, 2q + k - 2\}$ de (G, H) será considerar uma k -coloração própria de G , digamos γ , e, a partir dos conjuntos de cores de γ , construir os conjuntos de cores de φ de acordo com os tipos de vértices em cada conjunto. Isso será feito da seguinte forma: Como H é uma galáxia geradora, cada conjunto $V_i = \{v \in V(G) \mid \gamma(v) = i\}$, com $i \neq 1$, poderá ser dividido em três conjuntos:

- $C_i = \{v \in V_i \mid v \in C \text{ ou } \gamma(\bar{v}) = 1\}$;
- $L_{i,1} = \{v \in V_i \mid v \in L \text{ e } \gamma(\bar{v}) > \gamma(v)\}$;
- $L_{i,2} = \{v \in V_i \mid v \in L \text{ e } 1 \neq \gamma(\bar{v}) < \gamma(v)\}$.

Observe que $L_{k,1}$ é um conjunto vazio, de modo que se $v \in L_{\gamma(v),1}$, então $1 \neq \gamma(v) < k$.

Podemos ver na Figura 25 a seguir uma nova partição de $V(G)$ obtida pela construção dos conjuntos acima sobre a partição induzida pelo conjunto de cores de γ .

Figura 25 – Partição dos conjuntos de cores de γ .



Fonte: elaborada pelo autor.

Iremos definir $\varphi: V \rightarrow \{1, \dots, 2q + k - 2\}$ como segue

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \gamma(v) = 1; & (i) \\ \gamma(v) & , \text{ se } v \in L_{\gamma(v),1} \text{ e } \gamma(v) \neq 1; & (ii) \\ \gamma(v) + q - 1 & , \text{ se } v \in C_{\gamma(v)} \text{ e } \gamma(v) \neq 1; & (iii) \\ \gamma(v) + 2(q - 1) & , \text{ se } v \in L_{\gamma(v),2} \text{ e } \gamma(v) \neq 1. & (iv) \end{cases} \quad (22)$$

Inicialmente, mostraremos que φ é uma coloração própria. Primeiro, observe que dada uma aresta $uv \in E(G)$ qualquer, se os vértices u e v pertencem a um mesmo caso na Equação (22), então segue que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$, uma vez que γ é uma coloração própria. Ademais, observe que os casos (i), (ii), (iii) e (iv) definem intervalos de cores consecutivas distintos: qualquer vértice v em G satisfazendo as condições dadas no caso (ii) será tal que $\varphi(v) \in \{2, \dots, k-1\}$; se v satisfaz as condições em (iii) temos que $\varphi(v) \in \{q+1, \dots, k+q-1\}$ e, por último; se v satisfaz as condições em (iv), temos que $\varphi(v) \in \{2q+1, \dots, k+2(q-1)\}$. Como os conjuntos $\{1\}, \{2, \dots, k-1\}, \{q+1, \dots, k+q-1\}$ e $\{2q+1, \dots, k+2(q-1)\}$ são dois-a-dois disjuntos, não é possível ter $\varphi(u) = \varphi(v)$ para quaisquer dois vértices u e v pertencentes a casos distintos na equação acima. Em particular, se $uv \in E(G)$ e u e v pertencem a casos distintos na Equação (22), temos que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Logo, φ é uma coloração própria de G .

Agora, considere uma aresta $v\bar{v} \in E(H)$. Iremos analisar os seguintes casos:

(1) $\gamma(\bar{v}) = 1$

Nesse caso, temos que $\varphi(\bar{v}) = 1$ e o vértice v satisfaz as condições do caso (iii) e, dessa forma, $\varphi(v) \in \{q+1, \dots, k+q-1\}$, de modo que $|\varphi(v) - \varphi(\bar{v})| \geq q$ e

$$|\varphi(v) - \varphi(\bar{v})| \leq q + k - 2 = (2q + k - 2) - q. \quad (23)$$

(2) $\gamma(\bar{v}) \neq 1$

Nesse caso, temos que $\varphi(\bar{v}) = \gamma(\bar{v}) + q - 1$ e exatamente uma das seguintes situações ocorrem:

(2.1) $\gamma(v) = 1$

Nesse caso, temos que $\varphi(v) = 1$, de modo que

$$|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| = |(\gamma(\bar{v}) + q - 2)| = |q - (2 - \gamma(\bar{v}))| \geq q, \quad (24)$$

uma vez que $\gamma(\bar{v}) \geq 2$.

Ademais, como $\gamma(\bar{v}) \leq k$, temos que

$$|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| = |(\gamma(\bar{v}) + q - 2)| \leq q + k - 2 = (2q + k - 2) - q. \quad (25)$$

(2.2) $\gamma(v) \neq 1$ e $\gamma(v) < \gamma(\bar{v})$

Nesse caso, temos que v satisfaz as condições do caso (ii) na Equação (22), de modo que $\varphi(v) = \gamma(v)$. Dessa forma, vale que

$$|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| = |(\gamma(\bar{v}) + q - 1) - \gamma(v)| = |(\gamma(\bar{v}) - \gamma(v)) + q - 1| \geq q, \quad (26)$$

pois γ é uma coloração própria. Além disso, como $1 \leq \gamma(v) < \gamma(\bar{v}) \leq k$, segue

que $|\gamma(\bar{v}) - \gamma(v)| \leq k + 1$ e então

$$|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| = |(\gamma(\bar{v}) - \gamma(v)) + q - 1| \leq q + k - 2 = (2q + k - 2) - q. \quad (27)$$

(2.3) $\gamma(v) \neq 1$ e $\gamma(v) > \gamma(\bar{v})$

Nesse caso, v satisfaz as condições do caso (iv) na Equação (22) e, dessa forma, $\varphi(v) = \gamma(v) + 2(q - 1)$. Assim, temos que

$$|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| = |\gamma(\bar{v}) - \gamma(v) - q + 1| \geq q, \quad (28)$$

uma vez que γ é uma coloração própria. Ademais, como $1 \leq \gamma(\bar{v}) < \gamma(v) \leq k$, temos que $|\gamma(\bar{v}) - \gamma(v)| \leq k - 1$, de modo que

$$|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| = |\gamma(\bar{v}) - \gamma(v) - q + 1| \leq q + k - 2 = (2q + k - 2) - q. \quad (29)$$

Em todos os casos listados acima concluímos que $|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| \geq q$ e que $|\varphi(\bar{v}) - \varphi(v)| \leq (2q + k - 2) - q$. Desse modo, como a aresta $v\bar{v} \in E(H)$ foi tomada de modo arbitrário, temos que φ é uma $(2q + k - 2)$ -coloração backbone circular de (G, H) .

Agora, para mostrar que esse limitante é o melhor possível, considere G o grafo completo com n vértices e H uma galáxia geradora de G com vértice central v . Seja γ uma k -coloração q -backbone circular de (G, H) , vamos mostrar que $k \geq 2q + n - 2$. Sem perda de generalidade, suponha que $\gamma(v) = 1$ e, dessa forma, observe que existem $2q - 1$ cores que não podem ser utilizadas para colorir os demais vértices. Assim, como cada um dos $n - 1$ vértices restantes deverá ter uma cor distinta dos demais, temos que $k \geq (2q - 1) + (n - 1) = 2q + n - 2$. Como queríamos. \square

De posse do resultado acima, segue que quando G é um grafo planar, o Teorema das Quatro Cores nos fornece o seguinte

Corolário 4.6. *Sejam G um grafo planar e H uma galáxia de G . Se $q \geq 3$, então*

$$\text{CBC}_q(G, H) \leq 2q + 2.$$

5 CONCLUSÃO

Conforme foi apresentado anteriormente, o conceito de Coloração Backbone foi introduzido em (BROERSMA et al., 2003) há pouco menos de vinte anos. No entanto, podemos encontrar diversos resultados obtidos desde então sob o ponto de vista não somente estrutural, como pela complexidade computacional do problema para determinados pares de grafos, além de alguns resultados em combinatória extremal envolvendo o número cromático backbone. Nesta dissertação, demos ênfase aos resultados que determinam o número cromático backbone de um par (G, H) de acordo com informações estruturais do grafo G ou do backbone H , embora, na Seção 3.2, também apresentamos um resultado de complexidade acerca do número cromático backbone em grafos de largura em árvore limitada cujo backbone é um emparelhamento. O mesmo resultado, conforme comentamos na Seção 4, também é válido para o número cromático backbone circular de um tal par.

As principais contribuições desta dissertação são:

- a) Uma correção na prova de um resultado obtido em (MISKUF et al., 2010), cuja demonstração foi feita de modo similar à demonstração do Teorema de Brooks;
- b) Um resultado de polinomialidade acerca do cálculo do número cromático backbone e do número cromático backbone circular de um grafo com largura em árvore limitada com um subgrafo gerador como backbone;
- c) Um resultado mais geral que responde parcialmente duas conjecturas propostas em (HAVET et al., 2014) acerca de grafos planares com emparelhamento como backbone;
- d) Um resultado envolvendo o método do descarregamento que também responde parcialmente uma das conjecturas propostas em (HAVET et al., 2014);
- e) Respondemos positivamente uma conjectura também proposta em (HAVET et al., 2014) acerca de grafos planares com galáxias como backbone, para o caso em que $q \geq 3$, por meio de um resultado mais geral em que o parâmetro $\text{CBC}_q(G, H)$ depende apenas do número cromático de G e do número inteiro q .

Um possível caminho em busca de resultados futuros é buscar responder totalmente as conjecturas propostas em (HAVET et al., 2014) que já conseguimos responder parcialmente. Ou seja, determinar qual o maior valor que o número cromático backbone circular de um par (G, H) pode atingir quando G é um grafo planar e H é uma galáxia

ou um emparelhamento de G . No primeiro caso, resta somente determinar esse valor para o caso em que $q = 2$. Para o segundo caso, resta determinar esse valor apenas quando $q = 3$. Nesse caso, ainda é possível que a resposta para a Conjectura 4.3 seja negativa, o que deve ocorrer somente em grafos planares em que qualquer representação plana possua pelo menos um par de triângulos adjacentes.

Com relação ao número cromático backbone, um possível caminho a percorrer seria determinar um bom limitante superior para o parâmetro $BBC_q(G, H)$ quando G é um grafo planar e H é um emparelhamento em G , obtendo respostas para as Perguntas 3.1 e 3.2, propostas em (BROERSMA et al., 2009).

Mais além, como existem poucos resultados encontrados na literatura acerca dos valores de $BBC_q(G, H)$ e $CBC_q(G, H)$ quando G não é planar, um outro caminho que poderíamos percorrer seria partir em busca de resultados similares para classes maiores de grafos, bem como outras classes de subgrafos maiores do que emparelhamentos ou galáxias, obtendo, assim, resultados mais gerais.

REFERÊNCIAS

- WEST, Douglas B.. **Introduction to Graph Theory**. Prentice Hall, 2001.
- BONDY, J. A.; MURTY, U.S.R. **Graph Theory**. Springer Publishing Company, Incorporated, 1. ed., 2008.
- DIESTEL, R.. **Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)**. Springer, 2005.
- MOHAR, B.; THOMASSEN, Carsten. Graphs on Surfaces. **Johns Hopkins University Press**, 2001.
- APPEL, K.; HAKEN, W.. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 21, n. 3, p. 429–490, 1977.
- HEAWOOD, P. J.. Map-Colour Theorems **Quarterly Journal of Mathematics**, v. 24, p. 332–338, 1890.
- KEMPE, A.. On the Geographical Problem of the Four Colors **American Journal of Mathematics**, v. 2, n. 3, p. 193–200, 1879.
- SEYMOUR, Paul; ROBERTSON, Neil; SANDERS, Daniel; THOMAS, Robin. The Four-Colour Theorem **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 70, n. 1, p. 2–44, 1997.
- ERDOS, Paul; RUBIN, Arthur; TAYLOR, Herbert. Choosability in graphs **Proc. of the West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing**, 1979.
- GRÜNBAUM, Branko. Acyclic colorings of planar graphs **Israel Journal of Mathematics**, v. 14, n. 4, p. 390–408, 1973.
- GUAN, D. J.; XUDING, Zhu. A coloring problem for weighted graphs **Information Processing Letters**, v. 61, n. 2, p. 77–81, 1997.
- KRATOCHVÍL, Jan; TUZA Zsolt; VOIGT, Margit. On the b-Chromatic Number of Graphs **Journal of Optimization Theory and Applications - J OPTIMIZ THEOR APPL**, v. 109, p. 310–320, 2002.
- BROERSMA, Hajo; FOMIN, Fedor; GOLOVACH, Petr A.; WOEGINGER, Gerhard. Backbone Colorings for Networks **Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg**, v. 109, p. 131–142, 2003.
- BODLAENDER, Hans L.; KLOKS, Ton; TAN, Richard B.; LEEUWEN, Jan van. λ -Coloring of Graphs **Proceedings of the 17th Annual Symposium on Theoretical**

Aspects of Computer Science, Springer-Verlag, p. 395–406, 2000.

CHANG, Gerard J.; KUO, David. The $L(2, 1)$ -Labeling Problem on Graphs **SIAM J. Discret. Math.**, v. 9, n. 2, p. 309–316, 1996.

BROERSMA, Hajo; FOMIN, Fedor; GOLOVACH, Petr A.; WOEGINGER, Gerhard. Backbone colorings for graphs: Tree and path backbones. **Journal of Graph Theory**, v. 55, p. 137–152, 2007.

BROOKS, R. L.. On colouring the nodes of a network **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 37, n. 2, p. 194–197, 1941.

LOVASZ, L.. Three short proofs in graph theory **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 19, n. 3, p. 269–271, 1975.

MISKUF, Jozef; SKREKOVSKI, Riste; TANCER, Martin. Backbone colorings of graphs with bounded degree. **Discrete Applied Mathematics**, v. 158, p. 534–542, 2010.

BRYANT, Victor. A characterisation of some 2-connected graphs and a comment on an algorithmic proof of Brooks' theorem. **Discrete Mathematics**, v. 158, n. 1, p. 279–281, 1996.

BROERSMA, H.; FUJISAWA, J.; MARCHAL, L.; PAULUSMA, D.; SALMAN, A.N.M.; YOSHIMOTO, K.. λ -backbone colorings along pairwise disjoint stars and matchings. **Discrete Mathematics**, v. 309, n. 18, p. 5596–5609, 2009.

BROERSMA, H.; FUJISAWA, J.; YOSHIMOTO, Kiyoshi. Backbone colorings along perfect matchings. **University of Twente**, 2004.

CYGAN, Marek; FOMIN, Fedor V.; KOWALIK, Lukasz; LOKSHTANOV, Daniel; MARX, Daniel; PILIPCZUK, Marcin; PILIPCZUK, Michal; SAURABH, Saket. **Parameterized Algorithms**. Springer Publishing Company, Incorporated, 2015.

BODLAENDER, H.. A Linear-Time Algorithm for Finding Tree-Decompositions of Small Treewidth. **SIAM Journal on Computing**, v. 25, n. 6, p. 1305–1317, 1996.

HAVET, Frédéric; KING, Andrew; LIEDLOFF, Mathieu; TODINCA, Ioan. (Circular) backbone colouring: Forest backbones in planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 169, p. 119–134, 2014.

EULER, Leonhard. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. **Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, p. 140–160, 1758.

ABBOTT, H.L.; ZHOU, Bing. On small faces in 4-critical graphs. **Ars Combinatoria**,

v. 32, p. 203–207, 1991.

CRANSTON, Daniel; WEST, Douglas. An introduction to the discharging method via graph coloring.. **Discrete Mathematics**, p. 766–793, 2017.

KURATOWSKI, K.. Sur le problème des courbes gauches en Topologie.. **Fundamenta Mathematicae**, v. 15, p. 271–283, 1930.

KÖNIG, D.. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.. **Akademische Verlagsgesellschaft**, 1936.

WAGNER, K.. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. **Mathematische Annalen**, v. 114, p. 570–590, 1937.

GRIGGS, Jerold; YEH, Roger. Labelling Graphs with a Condition at Distance 2. **SIAM J. Discrete Math**, v. 5, p. 586–595, 1992.