



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO
CEARÁ CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

SHALON GONÇALVES DE SOUZA

**NÚMEROS COMPLEXOS, PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E PROJEÇÃO
DE MERCATOR: UMA PROPOSTA DE MOTIVAÇÃO AO ALUNO DO
COLÉGIO NAVAL A RESPEITO DO CURSO DE HIDROGRAFIA**

FORTALEZA

2022

SHALON GONÇALVES DE SOUZA

NÚMEROS COMPLEXOS, PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E PROJEÇÃO DE
MERCATOR: UMA PROPOSTA DE MOTIVAÇÃO AO ALUNO DO COLÉGIO NAVAL A
RESPEITO DO CURSO DE HIDROGRAFIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira
Melo.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S235n Souza, Shalon Gonçalves de.
Números complexos, projeção estereográfica e projeção de Mercator : uma proposta de motivação ao aluno do Colégio Naval a respeito do curso de hidrografia / Shalon Gonçalves de Souza. – 2022.
57 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo.

1. Números complexos - Estudo e ensino. 2. Projeção estereográfica. 3. Projeção de Mercator (Cartografia). 4. Colégio Naval (Brasil). 5. Hidrografia. I. Título.

CDD 510

SHALON GONÇALVES DE SOUZA

NÚMEROS COMPLEXOS, PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E PROJEÇÃO DE
MERCATOR: UMA PROPOSTA DE MOTIVAÇÃO AO ALUNO DO COLÉGIO NAVAL A
RESPEITO DO CURSO DE HIDROGRAFIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 11/11/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade do Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAr)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que, não obstante as minhas limitações, permite que eu navegue neste mar chamado vida.

À minha esposa, Andréa Vieira, e aos meus filhos, André Luiz e João Pedro, por me realizarem como marido e como pai.

À minha família próxima (mãe, irmãs, cunhados) e estendida (sogro, sogra, cunhados e cunhadas), todos representados na figura do meu pai, Edivaldo Ferreira (in memorian), por materializarem estímulo vivificante ao aprendizado contínuo no convívio fraterno.

Aos professores doutores da Universidade Federal do Ceará (UFC) que ministraram aulas no PROFMAT, em especial (por ordem alfabética), Abdênago Alves, Antônio Caminha, José Alberto Duarte e Marcelo Melo, pela dedicação e amor à Matemática demonstrado no ato de ensinar.

Ao professor Dr. Marcelo Melo, meu orientador, pelo incentivo e por todos os ensinamentos na missão de dividir, além de conhecimentos, sabedoria.

À turma de mestrandos ingressantes em 2019 no PROFMAT pela UFC, pelo vínculo de amizade e admiração construídos ao longo dessa jornada.

Por fim, mas não menos importante, aos meus colegas de trabalho, por proporcionarem um ambiente propício ao desenvolvimento profissional e pessoal.

RESUMO

O Colégio Naval (CN) é a única instituição de ensino militar no Brasil que tem como missão principal a preparação intelectual e física de jovens visando ao ingresso na Escola Naval (EN). A EN, por sua vez, forma Oficiais para os postos iniciais das carreiras dos Corpos da Armada, de Fuzileiros Navais e de Intendentes da Marinha. Seria útil e conveniente, tanto para os jovens formandos do CN como para a Marinha do Brasil, identificar aqueles com determinada aptidão e apresentá-los, ainda no CN, às possibilidades de carreira com maior probabilidade de conciliar as necessidades da Força com a propensão inata dos alunos. Assim, a presente Dissertação visa oferecer uma proposta para identificar os alunos do CN que apresentem predileção pela Matemática e sugerir uma opção de curso de carreira como Oficial do Corpo da Armada. Daí a motivação para o tema “Números Complexos, Projeção Estereográfica e Projeção de Mercator: um proposta de motivação ao aluno do Colégio Naval a respeito do Curso de Hidrografia”. Para alcançar o objetivo, depois de pontuar na Introdução a relevância dos Números Complexos e a controversa decisão de não mais cobrar determinados assuntos como habilidades exigíveis no Exame Nacional do Ensino Médio, passa-se ao capítulo 2, com breve histórico dos Números Complexos, finalizando com a fundamentação teórica necessária. No capítulo 3, são apresentadas as Projeções Estereográfica e de Mercator, com algumas características de cada uma, destacando-as como elo entre temas marinheiros e a Matemática, para, em seguida, apresentar o Curso de Hidrografia para Oficiais. No capítulo 4 são sintetizadas as Considerações Finais, concluindo com a sugestão do Curso de Hidrografia para Oficiais como uma alternativa de carreira para os alunos do CN que desejam estender a vivência da Matemática para além dos bancos escolares da Marinha do Brasil.

Palavras-chave: números complexos; projeção estereográfica; projeção de mercator; Colégio Naval; hidrografia.

ABSTRACT

Colégio Naval (CN) is the only military education institution in Brazil that has as its main mission the intellectual and physical preparation of young people with a view to entering the *Escola Naval* (EN). The EN, in turn, trains Officers for the initial positions of the Navy Corps, Marine Corps and Navy Intendants. It would be useful and convenient, both for the young students of the CN and for the Brazilian Navy, to identify those with a certain aptitude and to introduce them, while still in the CN, to the career possibilities most likely to reconcile the needs of the Force with the innate propensity from the students. Thus, the present Dissertation aims to offer a proposal to identify CN students who have a predilection for Mathematics and suggest a career course option as an Officer of the Navy Corps. Hence the motivation for the theme “Complex Numbers, Stereographic Projection and Mercator Projection: a proposal to motivate the *Colégio Naval* student about the Hydrography Course”. To achieve the objective, after pointing out in the Introduction the relevance of Complex Numbers and the controversial decision to no longer charge certain subjects such as skills required in the National High School Exam, we move on to chapter 2, with a brief history of Complex Numbers, ending with the necessary theoretical foundation. In chapter 3, the Stereographic and Mercator Projections are presented, with some characteristics of each, highlighting them as a link between marine themes and Mathematics, to then present the Hydrography Course for Officers. In chapter 4, the Final Considerations are summarized, concluding with the suggestion of the Hydrography Course for Officers as a career alternative for CN students who wish to extend the experience of Mathematics beyond the school benches of the Brazilian Navy.

Keywords: complex numbers; stereographic projection; mercator projection; Colégio Naval; hidrography.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Colégio Naval	9
Figura 2 – Plano de Argand-Gauss	19
Figura 3 – Representação geométrica de z, w e $z + w$ no \mathbb{R}^2	21
Figura 4 – Apresentação polar de z	22
Figura 5 – Apresentação polar de z e z^n para o caso $\rho > 1$ e $n > 1$	23
Figura 6 – Raízes da equação (3)	25
Figura 7 – Raízes da equação (4)	25
Figura 8 – Exemplo de Projeção Estereográfica do Pólo Sul	28
Figura 9 – Ilustração da Projeção de Mercator	34
Figura 10 – Exemplo de Projeção de Mercator do Porto do Mucuripe (Fortaleza-CE)	35
Figura 11 – Detalhe dos pontos A, B, C , com respectivas projeções no cilindro circunscrito ao Equador terrestre.	37
Figura 12 – Navios Polares	42

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	NÚMEROS COMPLEXOS	11
2.1	Breve Histórico	12
2.2	Definições e proposições sobre Números Complexos	16
2.2.1	<i>Representação algébrica</i>	17
2.2.2	<i>Representação Geométrica</i>	19
2.2.3	<i>Representação Polar</i>	21
2.2.4	<i>Potenciação de números complexos</i>	23
2.2.5	<i>Radiciação de números complexos</i>	24
3	PROJEÇÕES ESTEREOGRÁFICA E DE MERCATOR	26
3.1	A Projeção Estereográfica e a Navegação	26
3.2	A Projeção Estereográfica e a Matemática	29
3.3	A Projeção de Mercator e a Navegação	33
3.4	A Projeção de Mercator e a Matemática	36
3.5	A opção do Curso de Hidrografia para Oficiais	39
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
	REFERÊNCIAS	44
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES	48
	APÊNDICE B – CURSOS DE APERFEIÇOAMENTO PARA OFICIAIS DO CORPO DA ARMADA	56

1 INTRODUÇÃO

O Colégio Naval (CN), conforme define a Marinha do Brasil (MB) (BRASIL, 2022g), é uma instituição militar de nível médio que prepara os jovens, visando ao ingresso no Corpo de Aspirantes da Escola Naval (EN), sendo esta última, por sua vez, a instituição de Ensino Superior da MB onde são formados Oficiais para ocupar os postos iniciais nos Corpos da Armada, de Fuzileiros Navais ou de Intendentes da Marinha.

Figura 1 – Colégio Naval



Fonte: COLÉGIO (2022).

O ingresso no CN é realizado mediante concurso público. Depois de aprovado, é exigido do jovem aluno um bom domínio nas disciplinas do Ensino Médio, mas especialmente em Matemática. No currículo, há um predomínio patente das Ciências Exatas (BRASIL, 2019).

As disciplinas do CN são divididas em dois grupos, as do Ensino Básico e as do Ensino Militar-Naval. Considerando somente as do Ensino Básico, que são aquelas encontradas num currículo tradicional de Ensino Médio, só Matemática e Física compõem 28,57% da carga horária obrigatória no 1º ano, chegando a 39,28% no 3º ano.

Durante o curso do CN, paralelamente à exigência acadêmica, constata-se a legítima intenção institucional de fomentar nos jovens alunos o gosto pelas “coisas do mar”, isto é, por temas que aprofundem as experiências interrelacionadas, em algum grau, com o mar, incentivando-os à carreira naval.

Diante desse contexto, objetivou-se neste trabalho apresentar temas que proporcionassem aprofundamento em assuntos instigantes e acessíveis, do ponto de vista matemático, e que, ao mesmo tempo, envolvessem o aluno do CN com assuntos marinhos, abrindo espaço, de quebra, para indicar uma opção de carreira ao futuro Oficial do Corpo da Armada.

Os temas matemáticos principais a que se fez alusão no parágrafo anterior são Números Complexos e as Projeções Estereográfica e de Mercator. Eventualmente, os assuntos “Funções”, “Trigonometria” e “Cálculo Diferencial e Integral” serão necessários, porém, em relação a esses temas, admitir-se-á o prévio conhecimento, uma vez que compõem a grade curricular do CN (BRASIL, 2019).

Com efeito, considerando o papel auxiliar neste trabalho dos temas acima mencionados, eles serão abordados nos capítulos 2 e 3 de forma superficial, apenas no que for essencial ao cumprimento da promessa da Dissertação, permitindo aprofundamento um pouco maior em relação aos Números Complexos. Este último assunto também não será esgotado, mas apresentado numa profundidade suficiente para a caracterização do enlace desejado na essência deste trabalho, qual seja, entre a Matemática e o Mar.

Demonstrada a acessibilidade a respeito dos temas matemáticos, em especial dos Números Complexos, apresentamos como interface entre o tema matemático e a discussão pelas “coisas do mar” as Projeções Estereográfica e de Mercator.

Ordinariamente apresentadas na disciplina de Navegação, ainda no 1º ano do CN (BRASIL, 2019), as Projeções Estereográfica e de Mercator possuem características que justificam sua utilização, por exemplo, a Estereográfica, pela possibilidade de se representar cartograficamente os polos com distorções reduzidas, e a de Mercator, por representar deslocamentos na superfície da Terra como retas na projeção. As características das referidas projeções, dentre outros detalhes, serão dispostos no capítulo 3.

Ainda no capítulo 3, e dentro do mote “assuntos marinhos”, é apresentado o Curso de Aperfeiçoamento em Hidrografia para Oficiais como uma das possíveis escolhas de carreira ao futuro Oficial do Corpo da Armada. Por fim, o desfecho do trabalho será registrado nas considerações finais.

2 NÚMEROS COMPLEXOS

Os Números Complexos materializam um dos incontáveis temas palpantes da Matemática por permitirem a conexão entre inúmeras áreas (como Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Funções de Variável Complexa, dentre outras).

No contexto desta Dissertação, os Números Complexos ganham relevância pois, não obstante a sua versatilidade ao permitir a conexão entre áreas em princípio estanques, oficialmente desde 2018, eles não são mais obrigatórios nos currículos acadêmicos do Ensino Médio, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018a), e, conseqüentemente, não são mais exigidos como uma das habilidades no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de acordo com a Matriz de Referência (INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA, 2022).

É imperioso ressaltar que a consideração do tema como não obrigatório não o tornou menos importante, mas apenas representou uma decisão do Brasil, por meio do Ministério da Educação, de priorizar certas habilidades em detrimento de outras.

Ademais, a alteração quanto à obrigatoriedade do tema, tanto na BNCC como na Matriz de Referência do ENEM, não impôs a sua retirada dos currículos das instituições de Ensino Médio, tampouco desobrigou (e nem poderia) as Instituições de Ensino Superior (IES) de o cobrarem nos seus processos seletivos de ingresso.

A Resolução nº 4, de 17 dezembro de 2018 (BRASIL, 2018b), do Conselho Nacional de Educação (CNE), que instituiu a BNCC, deixa evidente no art. 1º, §2º, a previsão para que as instituições de ensino adotem formas de organização e propostas de progressão que julgarem necessárias na construção de suas propostas pedagógicas. Justamente o que o CN fez ao manter em sua grade curricular o ensino dos Números Complexos (item 8, Matemática 3º ano CN) (BRASIL, 2019).

No tocante às IES, desde a discussão de novas formas de acesso ao Ensino Superior, a autonomia de tais instituições foi preservada pelo CNE.

De acordo com o Parecer nº CP 98/99 (BRASIL, 1999), do CNE (até hoje em vigor), as IES detêm liberdade para definir os cursos que disponibilizarão assim como para fixar os assuntos que serão objeto de avaliação nos certames de acesso. Ainda no referido Parecer, sedimentou-se que o mecanismo adotado para ingresso nas IES deve avaliar não apenas a capacidade dos alunos para entrar, mas também a de cursar e prosseguir em sua formação.

Portanto, é possível concluir que as instituições de ensino médio podem organizar

suas propostas pedagógicas, como fez o CN. Também se conclui que as IES têm competência para decidir o que devem cobrar nos respectivos exames de acesso, como o fazem atualmente (em grau mais elementar ou mais incisivo), em relação aos Números Complexos, por exemplo, a Escola Naval (BRASIL, 2022f), o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA, 2022), o Instituto Militar de Engenharia (BRASIL, 2022a), e a Universidade Estadual de Campinas (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, 2021).

Demonstrado que a supressão dos Números Complexos do rol de assuntos obrigatórios para o ENEM não os destituiu quanto à relevância, e, por isso, foi tomado como um dos temas principais desta Dissertação, passemos a um breve histórico do tema.

2.1 Breve Histórico

A reconstrução histórica dos Números Complexos é muito interessante, pois, embora componham um conjunto que contém os Números Reais e apresentem a mesma estrutura algébrica de Corpo, assim como os Reais; sua concepção não trilhou uma rota linear (dos Naturais aos Complexos, passando pelos Reais). Sua formalização se deu de forma lenta e gradual, tendo sua “cidadania matemática” publicamente chancelada cerca de 250 anos depois dos primeiros rumores de que existiam.

O início se ambienta na Europa, durante a efervescência cultural, artística e científica do Renascimento, precisamente no início do século XVI.

Em sua obra *Ars Magna* (1545) (CARDANO, 1968), poder-se-ia dizer que Girolamo Cardano (italiano, 1501-1576) apresentou o “bater de asas de borboleta” que culminaria em profunda contribuição à matemática e, por consequência, à humanidade. Quanto ao “bater de asas de borboleta”, faz-se referência ao matemático e meteorologista americano Edward Lorenz (GAUR, 2022), sobre a imprevisibilidade das consequências de uma ação desprezível, observada de algum ponto de vista mais afastado.

Embora, desde a publicação de *Ars Magna*, Cardano tivesse sido exposto quanto ao fato de que Scipione del Ferro (1465-1526) e Tartaglia (1500-1557) já conheciam uma fórmula para resolver equações do terceiro grau, ele também foi contundente ao reconhecê-lo juntamente com o detalhe de que a dupla não havia apresentado ao autor a demonstração da mencionada fórmula.

Na tradução de *Ars Magna* empreendida por T. Richard Witmer, e prefaciada por Oystein Ore, recomenda-se enfaticamente que todos os matemáticos escritores deveriam em-

prender esforços no sentido de garantir a Del Ferro a titularidade da fórmula mencionada, sugerindo, pois, o nome “Fórmula de Del Ferro” (CARDANO, 1968, p. *xii*).

Passando ao largo de discussões quanto à verdadeira titularidade da fórmula, e demarcando lealdade à fonte apresentada no parágrafo anterior, é certo que a multicitada obra de Cardano foi a que deu publicidade ao fato.

Pois bem, na referida obra, ainda nas equações de segundo grau, dentre as inúmeras abordagens, Cardano investigou possíveis números que, simultaneamente, atenderiam às condições de que somados resultassem em 10 e que, multiplicados, produzessessem 40 (CARDANO, 1968, p. 219). A descrição do problema em notação matemática moderna pode ser interpretada como a busca de raízes para a seguinte equação polinomial do segundo grau: $x^2 - 10x + 40 = 0$.

Então, abstraindo as tortuosas complicações formais que sua conduta poderia levantar, Cardano ousou considerar que os números $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ poderiam resolver o problema proposto (CARDANO, 1969, pp. 219-220). De fato, pois $5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10$ e, por um “distributividade corajosa”, ter-se-ia $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$. Contudo, ao final do raciocínio, concluiu que a sutileza dos progressos aritméticos envolvidos em tal esforço seria tão refinada quanto inútil (CARDANO, 1968, p. 220).

Em relação às equações do terceiro grau, nos capítulos XI e XII de *Ars Magna*, Cardano oferece um método para se chegar às soluções de equações do tipo $x^3 + px = q$ ou $x^3 = px + q$, para $p, q \in \mathbb{N}$, dando, como exemplo, as equações $x^3 + 6x = 20$ e $x^3 = 6x + 40$, com respectivas soluções, $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ e $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} - \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$ (CARDANO, 1968, pp. 99 e 103).

De fato, as soluções oferecidas são verdadeiras, porém, a partir de exemplos, não se pode garantir que o método é eficaz para quaisquer equações terceiro grau, reduzidas à forma chamada simplificada ($x^3 + px = q$ ou $x^3 = px + q$). Bastaria a existência de um contraexemplo.

Sabe-se que a equação $x^3 = 15x + 4$, quando aplicado o método de del Ferro publicado por Cardano, apresenta como solução $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Ocorre que raiz quadrada de número negativo (no caso $\sqrt{-121}$) não era considerada como número.

Por outro lado, por simples observação, constata-se que 4 é raiz da referida equação. Então, verdadeira confusão se apresentava, pois não se sabia como, ao mesmo tempo, 4 (um número reconhecido) e $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ (um objeto até então não manipulável) poderiam ser raízes da mesma $x^3 = 15x + 4$.

Seria uma saída altiva e “definitiva” à época, seguindo a cartilha utilizada desde os gregos (BOYER, 1974, p. 210), dizer que a equação não era resolúvel (como o fizera Cardano de maneira sutil em relação à equação $x^2 - 10x + 40 = 0$), não fosse o impulso conferido à imperceptível ventania causada por *Ars Magna*.

Com efeito, verdadeiro vórtice gerou Rafael Bombeli (italiano, 1526-1572) ao, em vez de atacar o tema de forma tímida, ser mais contundente no arsenal técnico desenvolvido.

A abordagem se deu em *L'Algebra* (BOMBELLI, 1956) de 1572, no contexto de operações com números. Simplesmente Bombeli, munido da coragem científica da qual os gênios compartilham, ofereceu regras bem coerentes para o tratamento de números negativos.

Assim, foi apresentada por Bombeli o que hoje se conhece popularmente com a regra de sinais para o produto, onde “mais por mais dá mais”, “mais por menos dá menos”, “menos por mais dá menos” e “menos por menos dá mais” (BOMBELLI, 1956, p. 62).

Não bastasse a coragem de oferecer uma regra para se operar com números negativos, Bombeli considerou ser possível operar com raiz quadrada de -1 , apresentado novamente a regra de sinais, agora com a consequência prática de que, em notação moderna, o produto de $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1}$ daria -1 , e que $\sqrt{-1}$ por $-\sqrt{-1}$ daria 1 . Tal conclusão é obtida ao se interpretar o resultado de $(3 + 4i)^3$ chegando corretamente a $-117 + 44i$, em notação moderna (sendo $i = \sqrt{-1}$) (BOMBELLI, 1956, p. 146).

O interessante é que, embora tal proposta desbravasse caminhos cientificamente inexplorados, a direção correta (como hoje o sabemos) levava a conclusões coerentes com os conhecimentos até então disponíveis.

Outra conclusão coerente do autor foi a de que, ao tentar realizar a simplificação, em notação atual, da expressão $6 - 12\sqrt{-1}$, segundo Bombeli, somente seria possível encontrar $-12\sqrt{-1} + 6$ como valor operado equivalente, sugerindo que as parcelas envolvidas seriam “objetos de naturezas distintas”, logo não passíveis de simplificação (BOMBELLI, 1956, p. 148).

Mas um ponto crucial da iniciativa foi que a abordagem de Bombeli lançava luz à dúvida suscitada quanto à possibilidade de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ser raiz de $x^3 = 15x + 4$. De fato, operando-se segundo as regras apresentadas, obtém-se que:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = \\ & = \sqrt[3]{8 - 6 + 12\sqrt{-1} - \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{8 - 6 - 12\sqrt{-1} + \sqrt{-1}} = \\ & = \sqrt[3]{8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1}} = \\ & = \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Ora, por mais esdrúxula que pudesse ser, e a depender da validade das regras de Bombeli, alguma conexão havia entre $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ e 4, pois, de alguma forma, aplicando-se as regras estabelecidas, tais elementos deveriam ser números iguais.

Não obstante a potencial conexão, o ceticismo acadêmico de seus contemporâneos não tardou a ser propalado. A desconfiança com que abordavam as operações apresentadas por Bombeli pode ser ilustrada no livro *The Geometry* (1637), de René Descartes (francês, 1596-1650), em que tratou como *imaginárias* as raízes que apresentavam $\sqrt{-1}$ em composição. Segue excerto da emblemática passagem em livre tradução do inglês para o português (DESCARTES, 1954, pp. 174-175):

Nem as raízes verdadeiras nem as falsas são sempre reais, às vezes são imaginárias. Isto é, embora possamos sempre conceber tantas raízes para cada equação quantas já atribuí, nem sempre há uma quantidade definida correspondente a cada raiz assim concebida. Assim, embora possamos conceber a equação $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ como tendo três raízes, ainda assim há apenas uma raiz real, 2, enquanto as outras duas, por mais que possamos aumentá-las, diminuí-las ou multiplicá-las de acordo com as regras que acabamos de estabelecer, permanecem sempre imaginárias.

De fato, é possível constatar que 2 é raiz da equação destacada por Descartes ($x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$), a qual também pode ser representada por $(x - 2)(x^2 - 4x + 5) = 0$. Porém, resolvendo o fator que é composto por um trinômio do segundo grau, temos que suas raízes são $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$.

Descartes não considerou a dupla de candidatas a raízes como sendo números reais, por isso as chamou de *imaginárias*. Tal nomenclatura sedimentou-se no dicionário acadêmico.

Não obstante a pouca atenção despendida ao tema por uma parcela dos matemáticos (existência e até mesmo utilidade de se considerar $\sqrt{-1}$ como número), ninguém mais pôde desconsiderar tal possibilidade após a contribuição do matemático mais prolífico da História, em termos de produção acadêmico-científica (INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, 2021).

Foi Leonhard Euler (suíço, 1707-1783) que, além de apresentar utilidade ao número $\sqrt{-1}$ (vislumbrando sua presença e aplicação em outras áreas da matemática, como na Trigonometria), batizou-o de *i*. Foi em *Institutionum calculi integralis volumen quartum* (1794), uma obra póstuma, quando no início da resolução de um problema, Euler expressamente declara que assumiria dali por diante que $\sqrt{-1} = i$, e, como decorrência lógica, que $i^2 = -1$ e $\frac{1}{i} = -i$ (EULER, 1794, p. 184).

Mas foi em meados do século XVIII que os números complexos adquiriram cidadania plena na matemática, e o chanceler de honra foi Karl Friedrich Gauss (alemão, 1777-1855).

Em sua tese de doutorado (GAUSS, 1799), Gauss apresenta a primeira demonstração válida de que toda equação polinomial tem pelo menos uma raiz, quer os coeficientes sejam reais ou imaginários. Nesse caminho, Gauss utilizou largamente a notação $a + bi$ onde, $a, b \in \mathbb{R}$ e i é o número $\sqrt{-1}$. A constatação demonstrada por Gauss foi batizada de Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Foi também em sua tese que se consagrou a denominação dos números da forma $a + bi$ como sendo exemplar do conjunto dos Números Complexos.

Gauss ainda apresentou outras demonstrações para o TFA, nestes casos sem auxílio essencial da visão geométrica, diferentemente, portanto, da linha adotada na primeira demonstração, esforçando-se por encontrar provas inteiramente algébricas, como destacou Boyer (BOYER, 1974, p. 371).

Inúmeras aplicações puderam ser extraídas a partir das formulações de Gauss, como por exemplo a utilização de eixos coordenados perpendiculares para representar um número complexo como forma eficiente de se trabalhar com vetores. Dada também a iniciativa independente de Jean-Robert Argand (francês, 1768-1822) de interpretar o conjunto dos complexos como pontos do plano (ARGAND, 1874), quando abordados sob a perspectiva de números, o plano cartesiano também é hoje conhecido como plano de Argand-Gauss.

Portanto, depois de ganharem “cidadania matemática plena”, os Números Complexos tornaram-se essenciais em várias áreas, seja aplicada (por exemplo, aerodinâmica e mecânica dos fluidos), seja pura (como funções de variável complexa) (SILVA *et al.*, 2009).

Considerando a importância dos Números Complexos também para uma boa formação do aluno do CN, antes de apresentarmos a Projeção Estereográfica e a de Mercator, seguidas sobre a perspectiva da Hidrografia como uma proposta de carreira para o futuro Oficial do Corpo da Armada, mostra-se fundamental oferecer uma visão mais ampla dos Números Complexos.

Passemos, pois, às definições e proposições mais importantes sobre os Números Complexos.

2.2 Definições e proposições sobre Números Complexos

Neste subtópico serão apresentados os pontos que municiarão o aluno/leitor com os elementos necessários para poder trabalhar com segurança quando do desenvolvimento dos tópicos seguintes.

Mais especificamente, serão apresentadas as formas algébrica, geométrica e polar de representação dos Números Complexos. Existe também uma forma bastante intuitiva de representação de tais números, porém ela exige ferramental teórico prévio para sua abordagem. Embora seja um assunto essencial na matemática, assim como ocorrera com os Números Complexos, o pré-requisito teórico também foi retirado da BNCC (BRASIL, 2018a). Trata-se de “Matrizes”.

Não obstante a aparente limitação, entende-se de grande proveito a representação dos Números Complexos na forma matricial por, pelo menos, três grandes motivos: primeiro, o assunto “Matrizes” é fundamental na matemática, permitindo o entendimento e a resolução de temas relacionados, por exemplo, a Sistemas de Equações Lineares, à Álgebra Linear, ou à Análise no \mathbb{R}^n ; segundo, o fato de o assunto “Matrizes” não mais constar na BNCC não impede a sua apresentação neste trabalho, mas o coloca em pé de igualdade (em termos de justificativa desta Dissertação) com os Números Complexos; e, terceiro, assim como os Números Complexos, o tema também é apresentado ao aluno do CN (item 1, Matemática 2º ano CN), podendo-se assumir como sendo de conhecimento prévio do público-alvo.

Assim, apenas por questão de organização, a apresentação dos Números Complexos na forma matricial será feita no Apêndice A.

2.2.1 Representação algébrica

O conjunto dos números complexos (\mathbb{C}) é assim definido:

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

Nesta representação, se $z = a + bi$, chamamos a e b , respectivamente, de *parte real* e *parte imaginária* de z , respectivamente representados por $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$.

Definamos também que as partes real e imaginária de um $z \in \mathbb{C}$ obedecem as mesmas regras de adições e multiplicações de \mathbb{R} , assumindo sempre que $i^2 = -1$.

Ademais, por definição, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, temos que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Então, valendo-nos de associatividade, distributividade e comutatividade, teremos:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

É muito útil percebermos que \mathbb{C} , com as características definidas acima, apresenta a estrutura algébrica de um *corpo*. Então, munido das operações denominadas de adição e multiplicação, por ser um corpo, \mathbb{C} apresenta as seguintes propriedades para todo $z, w, u \in \mathbb{C}$, todas demonstradas no Apêndice A:

P1) as duas operações são comutativas: $z + w = w + z$ e $z \cdot w = w \cdot z$;

P2) as operações são associativas: $(z + w) + u = z + (w + u)$ e $z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u$;

P3) as operações possuem elementos neutros, sendo 0 para a adição e 1 para a multiplicação, onde: $a + 0 = a$ e $1 \cdot a = a$;

P4) a multiplicação é distributiva em relação à adição: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

P5) todo elemento a possui um simétrico ($-a$) tal que: $a + (-a) = 0$;

P6) todo elemento $a \neq 0$ possui um inverso multiplicativo (a^{-1}) tal que: $a \cdot a^{-1} = 1$.

Também é útil perceber que, se $z = a + bi$, fazendo $b = 0$, temos que $z \in \mathbb{R}$, levando à conclusão de que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. É possível, ainda, demonstrar (Apêndice A) que os elementos 0 e 1 são únicos e são os mesmos para \mathbb{R} e \mathbb{C} .

Definamos agora o *conjugado* de $z \in \mathbb{C}$, representado por \bar{z} , onde se $z = a + bi$, então $\bar{z} = a - bi$. É imediato constatar que $\bar{\bar{z}} = z$.

A utilização do conjugado mostra-se muito útil no desenvolvimento de um dos temas, principalmente, pelas propriedades que apresenta. Assim, se \bar{z} e \bar{w} são respectivamente os conjugados de z e w , todos elementos de \mathbb{C} , temos que são válidas as propriedades abaixo (Apêndice A):

C1) $\bar{\bar{z}} = z$;

C2) $\bar{\bar{z}} = z$;

C3) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

C4) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$;

C5) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;

C6) $z \neq 0 \Rightarrow \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$;

C7) $z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$ e $z - \bar{z} = 2 \cdot i \cdot \text{Im}(z)$.

Com base nos elementos até aqui erigidos, podemos definir as operações subtração e divisão. Assim, dados $z, w \in \mathbb{C}$, com $w \neq 0$, temos que:

$$z - w = z + (-w) \text{ e } \frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{w^{-1}}{w^{-1}} = z \cdot \frac{w^{-1}}{1} = z \cdot w^{-1}$$

A forma algébrica dos Números Complexos geralmente é apresentada como porta de entrada ao novo conjunto. Por outro lado, diante da utilidade da representação geométrica,

apresentemos no subtópico seguinte o plano de Argand-Gauss.

2.2.2 Representação Geométrica

Consideremos $z \in \mathbb{C}$ em sua forma algébrica $a + bi$, onde $i^2 = -1$. A visão privilegiada de Argand e de Gauss constatou que os pontos do plano cartesiano (a, b) apresentam relação biunívoca com os Números Complexos $a + bi$. Assim, o \mathbb{R}^2 , quando analisado sob a perspectiva de \mathbb{C} , é chamado de plano de Argand-Gauss.

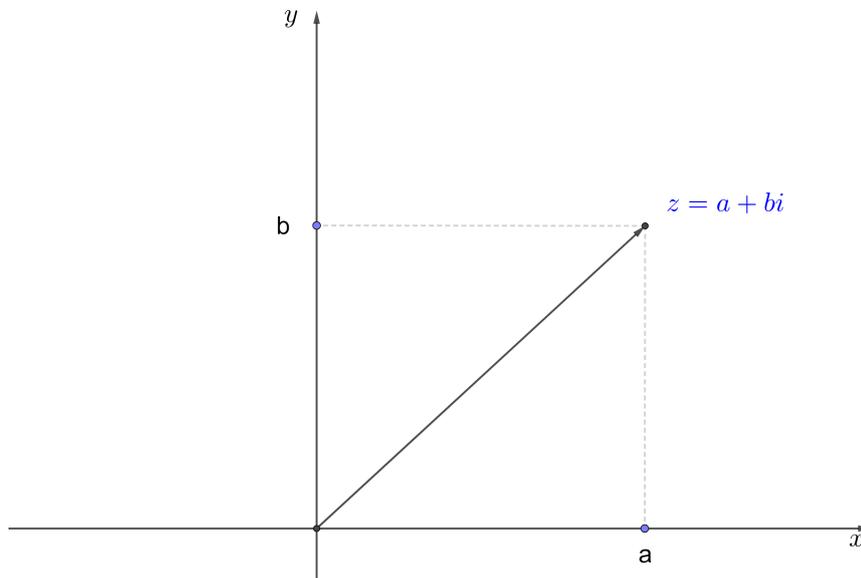
Portanto, se cada $a + bi$ corresponde ao par (a, b) (vide Figura 2), aplicando as definições para as operações na forma algébrica, chegamos às seguintes conclusões sob a perspectiva de coordenadas:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \Rightarrow (a + c) + (b + d)i \mapsto (a + c, b + d) \quad (1)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \Rightarrow (a + bi) \cdot (c + di) \mapsto (ac - bd, ad + bc) \quad (2)$$

Portanto, a soma de números complexos se resolve pela soma das respectivas partes real e imaginária (1). Já a multiplicação é dada pela relação que encontramos em (2).

Figura 2 – Plano de Argand-Gauss



Fonte: elaborada pelo autor.

Também é imediato perceber que $a \in \mathbb{R}$ corresponderá ao par $(a, 0)$ no plano de Argand-Gauss, além disso, vemos que a adição e a multiplicação funcionam sem qualquer ressalva, isto é, poder-se-ia tratar o número a por $(a, 0)$ e vice-versa:

$$\begin{cases} a \mapsto (a, 0) \\ b \mapsto (b, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \\ a \cdot b = (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (ab, 0) \end{cases}$$

Ademais, ao constatararmos que $i = 0 + 1 \cdot i$ e aplicarmos tanto a relação biunívoca $0 + 1 \cdot i \mapsto (0, 1)$ como a multiplicação definida em (2), chegamos à seguinte conclusão:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) \Rightarrow i^2 \mapsto -1$$

Assim, mostra-se consistente considerarmos os pontos (a, b) do plano cartesiano como o número complexo $a + bi$, aplicando-se, neste último caso, as regras descritas em (1) e (2) deste subitem. Em outras palavras, o conjunto \mathbb{C} se confunde com o \mathbb{R}^2 .

Com efeito, é extremamente válido considerarmos o número complexo $z = a + bi$ como o ponto (a, b) do \mathbb{R}^2 (ou plano de Argand-Gauss) conforme a Figura 2. Percebe-se que a abscissa é a parte real de z ($a = \text{Re}(z)$) e a ordenada, a parte imaginária ($b = \text{Im}(z)$), justamente como ilustrado na Figura 2.

Uma das vantagens em se reconhecer a relação biunívoca entre pontos do plano e os Números Complexos é que, a partir de então, se pode trabalhar com regras algébricas para se operar com vetores, obtendo-se uma interpretação geométrica dos Complexos.

Para ilustrar a interpretação geométrica, dados $z, w \in \mathbb{C}$, onde $z = a + bi$ e $w = c + di$, e se a, b, c, d fossem todos positivos, teríamos a representação de z e w como vetores de origem no centro do plano \mathbb{R}^2 e suas extremidades respectivamente nos pontos (a, b) e (c, d) . Como visto acima, sabe-se que $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Então, pela interpretação vetorial dada a z e w , $z + w$ também seria um vetor partindo do centro comum do plano, chegando aos ponto $(a + c, b + d)$.

A visão geométrica de z, w e $z + w$ pode ser vista, portanto, na Figura 3.

Outro conceito de extrema importância para o desenvolvimento da teoria dos Números Complexos é o de *módulo*. Define-se o *módulo* de z (notação $|z|$) por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. O módulo de números complexos tem as seguintes propriedades (Apêndice A):

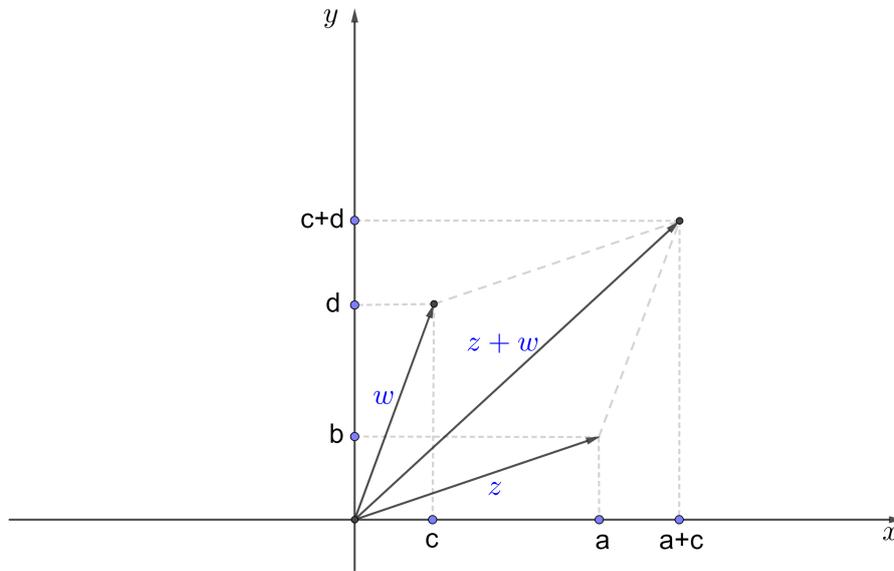
$$\text{M1) } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\text{M2) } |z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$\text{M3) } \text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |z| \text{ e } \text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)| \leq |z|$$

$$\text{M4) } |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Figura 3 – Representação geométrica de z, w e $z + w$ no \mathbb{R}^2



Fonte: elaborada pelo autor.

2.2.3 Representação Polar

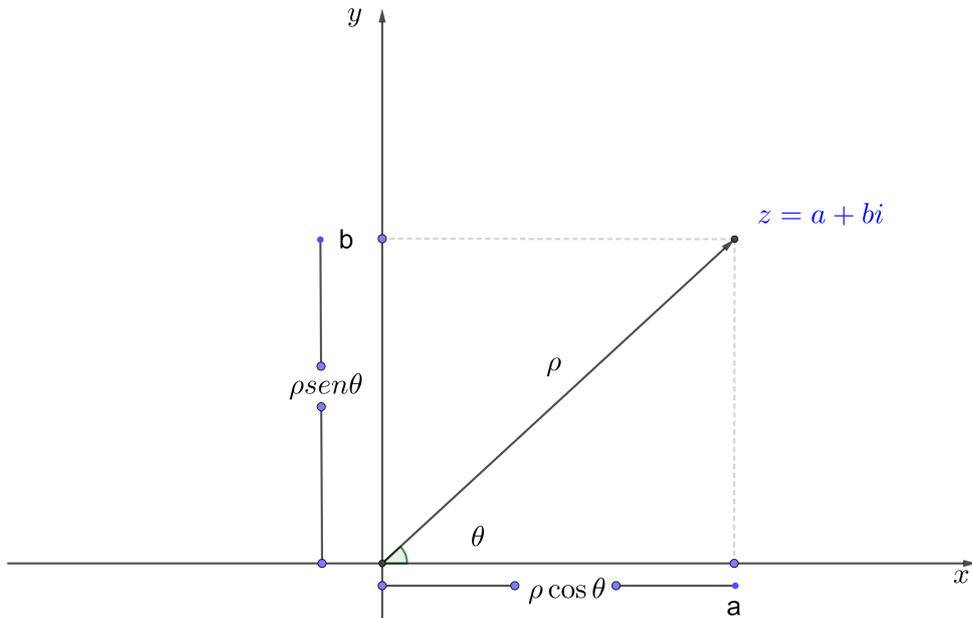
Outra forma de apresentar um número complexo z é conhecida como *forma polar* ou *forma trigonométrica*, devida ao matemático Leonhard Euler. Esta forma de apresentação utiliza, basicamente, o módulo de z e o ângulo (contado no sentido anti-horário) formado entre a semirreta positiva do eixo das abscissas e o segmento de ligação entre a origem do sistema de coordenadas e z .

Assim, seja um número complexo $z = a + bi$, não nulo, e O a origem do plano de Argand-Gauss, representado por $(0,0)$. Considerando a relação biunívoca entre z os pontos do plano, temos que o ponto P , dado por (a, b) , também representa o complexo z .

Nestas condições, temos que o módulo do vetor \overrightarrow{OP} tem a mesma medida que o módulo de z . Sendo θ o ângulo (contado no sentido anti-horário) que o eixo das abscissas forma com \overrightarrow{OP} , tem-se que $\theta \in [0, 2\pi)$, lido em radianos.

A nomenclatura usual para a posição de z , que coincide com P , é *afixo*, e para θ é *argumento principal* de z (notação $\theta = \arg(z)$). Assim, dado z , sua representação polar ou trigonométrica pode ser observada na Figura 4.

Aplicando as definições de seno e cosseno num triângulo retângulo, a partir da Figura 4, temos que $z = a + bi$ (distinto da origem, logo, $ab \neq 0$) pode ser representado da seguinte forma $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, pois $a = \rho \cos \theta$, $b = \rho \sin \theta$, e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ (logo $\rho > 0$). Outra

Figura 4 – Apresentação polar de z 

Fonte: elaborada pelo autor.

forma mais concisa da representação de z na forma trigonométrica é $z = cis\theta$, onde *cis* é um acrônimo em que “*c*” se refere a cosseno; “*i*”, à unidade imaginária; “*s*”, a seno; e “ θ ”, o ângulo formado.

Destaque-se que o conhecimento básico das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente será utilizado quando da abordagem da Projeção de Mercator. Neste ponto, é oportuno considerar que os alunos do CN apresentam em sua grade curricular o assunto Trigonometria já no 1º ano (itens 6, 7, 11 e 14, Matemática 1º do CN) (BRASIL, 2019).

Além do acima apresentado, há grande vantagem na utilização da forma trigonométrica quando se estiver operando com multiplicação ou divisão de Complexos. Tal constatação é evidenciada na proposição abaixo.

Proposição 1. *Dados $z_1 = \rho_1 cis\theta_1$ e $z_2 = \rho_2 cis\theta_2$, então $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$. E, no caso de $z_2 \neq 0$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} cis(\theta_1 - \theta_2)$.*

A demonstração da Proposição 1 encontra-se no Apêndice A. Com efeito, questão que se apresenta como bastante razoável é pensar na potência de expoente n ($n \in \mathbb{N}$) para um complexo $z = \rho cis\theta$ e na raiz n -ésima ($n \geq 2$) do referido número.

De fato, se $z \in \mathbb{C}$, a curiosidade quase que nos impele a pensarmos nas respostas para z^2, z^3, \dots, z^n . Ademais, a partir do valiosíssimo avanço de Gauss com o TFA, se qualquer polinômio de coeficientes complexos apresenta pelo menos uma raiz complexa, equações do tipo $z^n = b, b \in \mathbb{R}$, levam à prospecção de raízes que poderiam ir além de $z = \sqrt[n]{b}$.

Foi justamente o que o matemático Abraham de Moivre (francês, 1667-1754) fez, chegando a resultados tão importantes que até hoje, em algumas referências, são chamados de leis e, ainda por cima (nada mais justo), levam seu nome. São os objetos das subseções seguintes.

2.2.4 Potenciação de números complexos

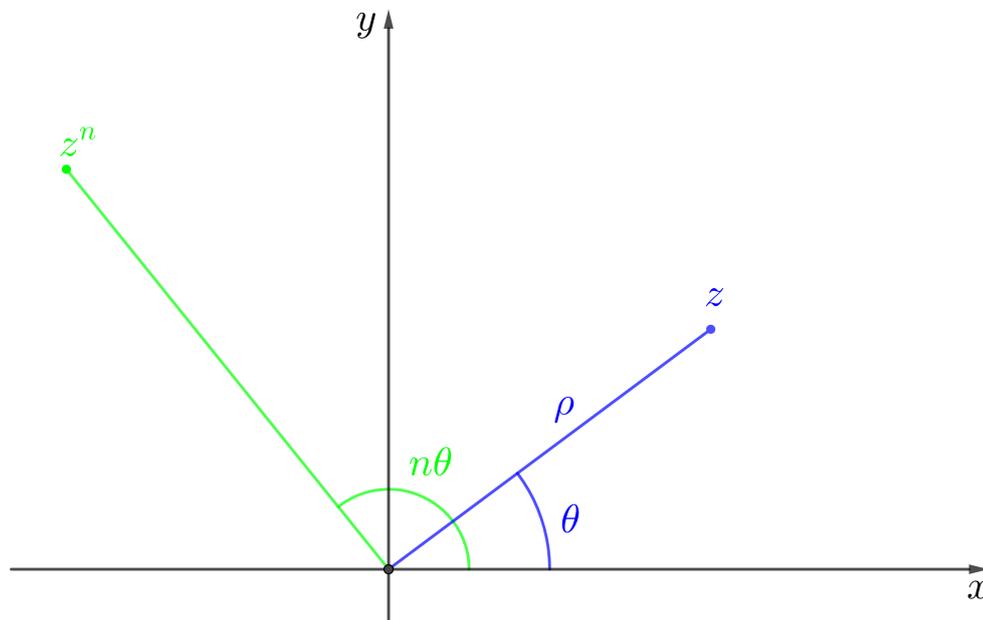
Se $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, pela Proposição 1, temos que $z^2 = \rho^2 \operatorname{cis} 2\theta$; $z^3 = z^2 \cdot z = \rho^3 \operatorname{cis} 3\theta$; $z^4 = z^3 \cdot z = \rho^4 \operatorname{cis} 4\theta$. A intuição leva à conclusão primeiramente apresentada por de Moivre, a qual se encontra abaixo descrita.

Teorema 1. [Primeira fórmula de Moivre] Dado o complexo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ e o inteiro n , tem-se que $z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$.

A demonstração do Teorema 1 encontra-se no apêndice A.

Interpretando geometricamente a potência de um número complexo, por exemplo, z^n , $n \in \mathbb{N}$, a distância do afixo ao centro vai aumentar, se $\rho > 1$; diminuir, se $0 < \rho < 1$; e se manter se $\rho = 1$. Quanto ao argumento, o novo afixo vai girar no sentido anti-horário, formando um ângulo $n\theta$, conforme demonstrado na Figura 5.

Figura 5 – Apresentação polar de z e z^n para o caso $\rho > 1$ e $n > 1$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Se conclusão interessante foi alcançada na potenciação de complexos, a jornada de investigação poder-se-ia mostrar promissora na radiciação, e Moivre navegou por essa rota.

2.2.5 Radiciação de números complexos

Uma das conclusões decorrentes do TFA é que um polinômio de coeficientes complexos, sendo n o maior expoente da variável z , apresenta n raízes. Assim, encontrar raízes, por exemplo, para a equação polinomial $z^3 = 1$ exigia uma abordagem mais arrojada, visando encontrar as outras duas raízes diferentes de 1.

Nesta área, Moivre também foi pioneiro, chegando à conclusão abaixo apresentada.

Teorema 2. [Segunda fórmula de Moivre] Dado o complexo não nulo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ e um natural $n \geq 2$, então existem n raízes n -ésimas de z que são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left[\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right], \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq k \leq n - 1$$

A demonstração do Teorema 2 se encontra no Apêndice A.

Uma interpretação geométrica, e muito interessante, da radiciação de um número complexo não nulo é que tais raízes compõem os vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$.

De fato, pelo Teorema 2, se tivermos $z^n = \rho \operatorname{cis} \theta$, com $z \neq 0$ e $n \geq 2$, teremos que os n afijos das raízes distam $\sqrt[n]{\rho}$ do centro do plano de Argand-Gauss e os respectivos argumentos formam uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\frac{\theta}{n}$ e a razão $\frac{2k\pi}{n}$, com $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 1$.

Assim, por exemplo, as raízes quartas de 16 e as raízes sextas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ são, respectivamente, as raízes das seguintes equações $z^4 = 16 \operatorname{cis} 0^\circ$ (3) e $w^6 = \operatorname{cis} 60^\circ$ (4).

Encontrando as progressões aritméticas mencionadas para a interpretação geométrica das n -ésimas raízes de números complexos, teremos as seguintes raízes para (3) e (4).

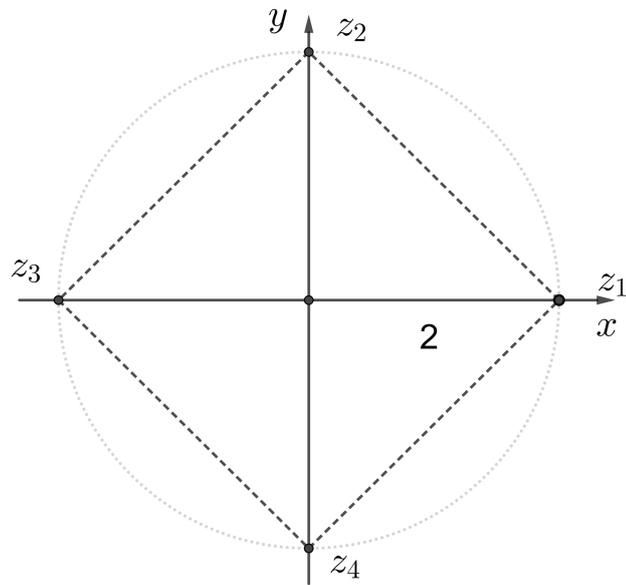
$$z_1 = 2 \operatorname{cis} 0^\circ, z_2 = 2 \operatorname{cis} 90^\circ, z_3 = 2 \operatorname{cis} 180^\circ \text{ e } z_4 = 2 \operatorname{cis} 270^\circ; \text{ e}$$

$$w_1 = \operatorname{cis} 0^\circ, w_2 = \operatorname{cis} 60^\circ, w_3 = \operatorname{cis} 120^\circ, w_4 = \operatorname{cis} 180^\circ, w_5 = \operatorname{cis} 240^\circ \text{ e } w_6 = \operatorname{cis} 300^\circ.$$

A seguir, nas Figuras 6 e 7, são apresentados no plano de Argand-Gauss os afijos das raízes, ilustrando a propriedade de serem vértices de polígonos regulares. Ou seja, na equação polinomial (3), cujo expoente de z era 4, as raízes compõem os vértices de um quadrado, e na equação polinomial (4), em que o expoente de w era 6, as raízes são os vértices de um hexágono.

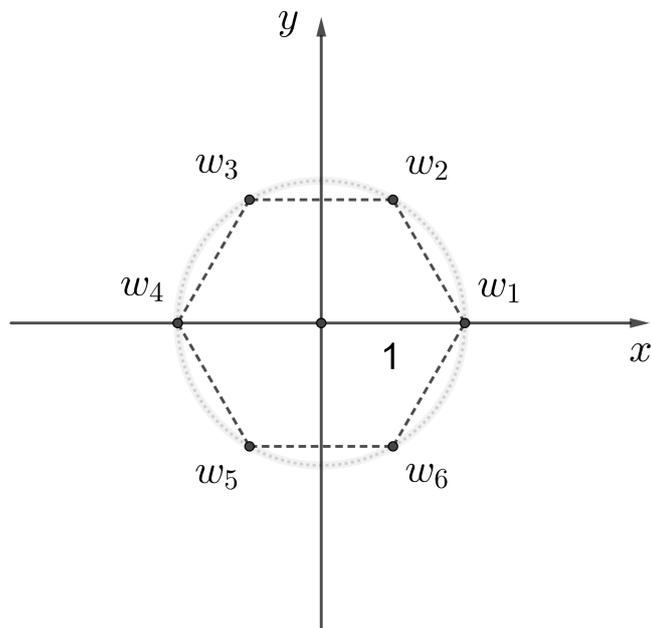
Munidos, pois, do ferramental teórico, passemos à apresentação da Projeção Estereográfica e da Projeção de Mercator.

Figura 6 – Raízes da equação (3)



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 7 – Raízes da equação (4)



Fonte: elaborada pelo autor.

3 PROJEÇÕES ESTEREOGRÁFICA E DE MERCATOR

São as duas projeções mais utilizadas em navegação. A de Mercator, para navegação em escalas maiores, e a Estereográfica, para menores. As propriedades matemáticas de cada uma justificam tais utilizações.

Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar cada uma das projeções, ilustrando propriedades matemáticas de ambas que justificam a menção delas nas referências bibliográficas tanto da disciplina de Navegação, no CN, como, internacionalmente, em publicação oficial da Organização Hidrográfica Internacional (OHI).

Em seguida, apresenta-se uma possibilidade de carreira para o futuro Oficial de Marinha pertencente ao Corpo da Armada. Iniciemos com a apresentação da projeção estereográfica no contexto da Navegação.

3.1 A Projeção Estereográfica e a Navegação

Essencialmente, uma esfera menos um ponto encontra correlação perfeita (bijeção) com um plano. Em outras palavras, a cada ponto da esfera é possível correlacionar, de forma exclusiva, um ponto do plano que passa pelo centro da esfera e é perpendicular à reta que passa por dois pontos diametralmente opostos, denominados de polos.

Tal bijeção pode, num primeiro momento, causar espanto ao “afrontar” o senso comum do aluno/leitor de que uma esfera, possuindo uma área *limitada* e retirando-se-lhe um ponto, ainda assim apresenta tantos pontos quanto um plano de área *finita*. Contudo, a “afrota” é apenas aparente, pois não se trata de “esticar” a área de uma esfera e sobrepô-la perfeitamente à do plano.

Na verdade, a abordagem é mais sutil e encontra resposta na bijeção entre conjuntos infinitos (dos pontos da esfera, com exceção de um, nos pontos do plano), conforme será apresentado.

A Projeção Estereográfica, com fundamentação matemática plenamente acessível ao público-alvo, mostra-se como uma das projeções que consegue representar altas latitudes com ganhos práticos, em especial, permite projetar os polos. Vejamos o que diz a principal referência bibliográfica adotada pelo CN nas aulas de Navegação (MIGUENS, 1996, p. 32):

A projeção estereográfica resulta da projeção geométrica de pontos da superfície da Terra sobre um plano tangente, desde um ponto de vista situado na posição oposta ao ponto de tangência.

(...)

Um hemisfério completo pode ser representado em uma projeção estereográfica, sem distorções excessivas. Tal como em outras projeções azimutais, os círculos máximos que passam pelo ponto de tangência aparecem como linhas retas. Todos os demais círculos, incluindo meridianos e paralelos, são representados como círculos ou arcos de círculos. O principal uso da projeção estereográfica em Cartografia Náutica é para construção de cartas das regiões polares.

O conceito da multicitada projeção, descrito apenas com palavras, pode ser de difícil compreensão ao aluno recém admitido no CN (1º ano) ou para um leitor não afeito à matéria. Também pode ser um complicado exercício ao mesmo público interlocutor constatar que “os círculos máximos que passam pelo ponto de tangência aparecem como linhas retas” ou que “todos os demais círculos, incluindo meridianos e paralelos, são representados como círculos ou arcos de círculos”.

Para Miguens, Meridianos “são círculos máximos que contêm os polos da Terra”, e Paralelos, “círculos menores paralelos ao Equador e, portanto, perpendiculares ao eixo da Terra” (MIGUENS, 1996, pp. 6-7).

Portanto, os dois parágrafos acima tencionam dizer que, depois de projetados, meridianos são representados por retas concorrentes no polo e os paralelos, por círculos concêntricos, tendo o mesmo polo como centro comum.

Do ponto de vista internacional, em se tratando de projeções cartográficas, detém relevância a OHI. Trata-se de uma entidade cujo objetivo é garantir que “todos os mares, oceanos e águas navegáveis do mundo sejam pesquisados e mapeados, apoiando assim a segurança da navegação e a proteção do ambiente marinho” (ORGANIZAÇÃO HIDROGRÁFICA INTERNACIONAL, 2022). Segundo a MB, a OHI é um órgão intergovernamental, de cunho consultivo, que estabelece normas visando uniformizar a parametrização de cartas e documentos náuticos (BRASIL, 2022e).

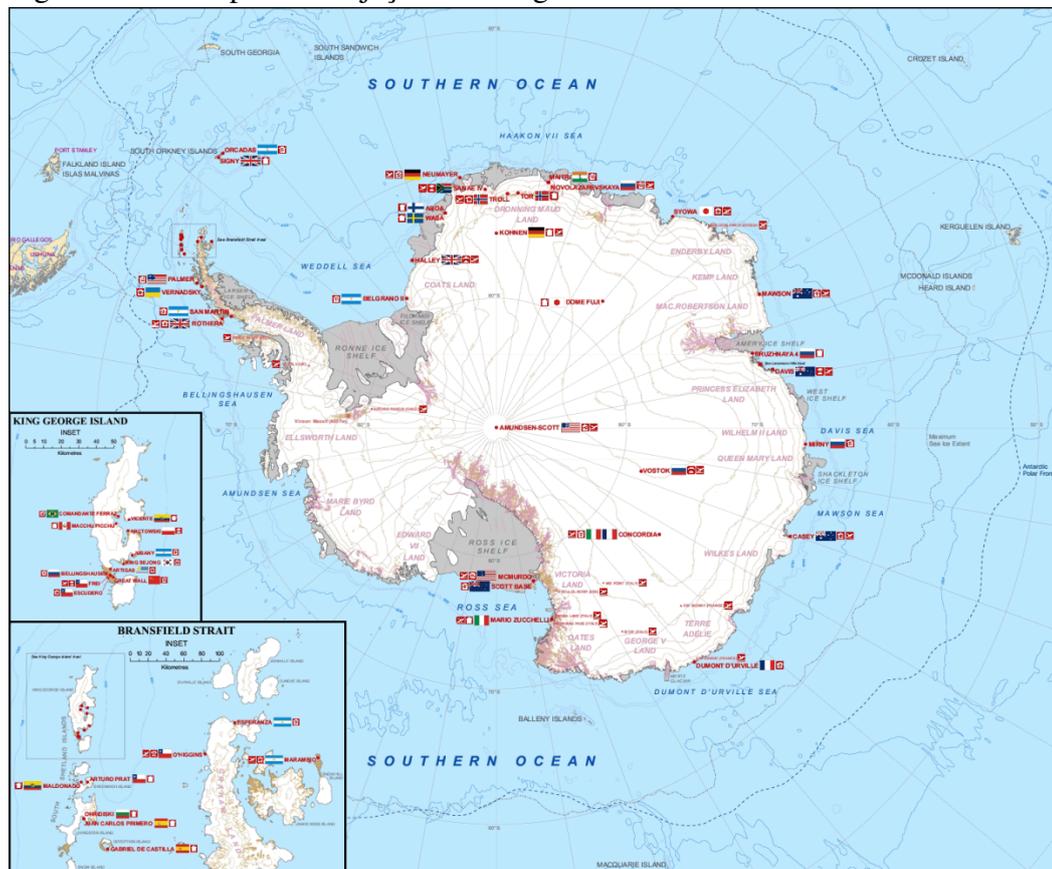
O normativo da OHI que trata das especificações para a elaboração de cartas náuticas declara expressamente que a projeção estereográfica é mais adequada para representar os polos, conforme o original em espanhol (ORGANIZAÇÃO HIDROGRÁFICA INTERNACIONAL, 2018, B-203.2, p. 3):

B-203.2 Las cartas a escalas menores que 1:50 000 normalmente se deben compilar en proyección Mercator. Excepciones a esta regla pueden ser necesarias en latitudes altas, donde la proyección Mercator no es adecuada debido a las grandes distorsiones. Por ejemplo, la proyección conforme cenital, estereográfica polar, que representa los paralelos como círculos concéntricos y los meridianos como líneas espaciadas regularmente con origen en el polo,

puede ser más adecuada para cartas de latitudes altas (por encima de los 70° aproximadamente).

Um exemplo que materializa a apresentação da projeção estereográfica é a contida em sítio da MB (Figura 8), onde se fornece a localização da Estação Antártica Comandante Ferraz (EACF), encravada na Península Keller, na Baía do Almirantado, na Ilha Rei George, arquipélago das Shetland do Sul, na posição de latitude 62° 05' S e longitude 058° 24' O (BRASIL, 2022c).

Figura 8 – Exemplo de Projeção Estereográfica do Pólo Sul



Fonte: MARINHA DO BRASIL (2022d).

No exemplo de carta náutica de pequena escala é possível constatar que meridianos e paralelos, na referida projeção, aparecem respectivamente como retas e círculos concêntricos. Porém, a proposta é ir além da experiência visual, oferecendo ao aluno do CN uma oportunidade para aplicar conhecimentos matemáticos ao seu alcance, tendo como pano de fundo um tema eminentemente marinho.

A partir da subseção seguinte, passa-se à construção da bijeção aventada no início da subseção.

3.2 A Projeção Estereográfica e a Matemática

A partir deste ponto, assumem-se os seguintes tópicos como sendo de conhecimento prévio, uma vez que são itens componentes do currículo dos alunos do CN (BRASIL, 2019): Grandezas Vetoriais (item 3, 1º ano), Funções (item 8, 1º ano; item 1, 3º ano), Coordenadas no \mathbb{R}^3 (item 4, 3º ano), Álgebra Vetorial (item 5, 3º ano), Estudo da reta no \mathbb{R}^3 (item 14, 3º ano), e, obviamente, as noções de Números Complexos, ponto que, além de ter sido desenvolvido na presente Dissertação apenas até o nível necessário para a aplicação adiante, compõe o item 2 do 3º ano.

Pois bem, partamos de um sistema de coordenadas ortogonais $OXYZ$ de centro $O = (0, 0, 0)$, mais conhecido como \mathbb{R}^3 . Pensemos numa esfera (\mathbb{S}^2) de raio igual a 1. Então, de forma objetiva, \mathbb{S}^2 pode ser assim definida:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Separaremos o ponto $N = (0, 0, 1)$, chamado de polo norte, e consideremos o plano OXY como o Plano de Argand-Gauss (ou como o \mathbb{R}^2). Noutras palavras, referido plano intersecta a esfera dada no seu equador. Em notação matemática, todos os pontos do conjunto interseção são da forma $(x_1, x_2, 0)$ tal que $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

A intenção é, utilizando os conceitos de Números Complexos, encontrar uma regra de correspondência adequada, que correlacione os pontos do domínio (formado pelos pontos da esfera inicialmente considerada, com exceção do ponto N) com os do contradomínio (formado pelo Plano de Argand-Gauss), e demonstrar que tal correlação é, em verdade, uma bijeção. Como o contradomínio coincide com o conjunto dos Números Complexos, esse plano será o próprio conjunto \mathbb{C} .

Em notação matemática, buscamos encontrar a função $\varphi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Tomemos então o ponto $P \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ e construamos a reta que passa por P e por N . Da Álgebra Vetorial, temos que um vetor e um ponto definem uma reta. Partindo de N , é possível alcançar P .

$$P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \text{ e } x_3 \neq 1$$

$$\text{Reta } \overleftrightarrow{NP} : \gamma(t) = N + \overrightarrow{NP}t = N + (P - N)t = N + tP - tN = (1 - t)N + tP =$$

$$= (1 - t)(0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, t(x_3 - 1) + 1)$$

$$\overleftrightarrow{NP} \cap \mathbb{C} : t(x_3 - 1) + 1 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{1 - x_3}$$

Substituindo t_0 em $\gamma(t)$ teremos que $\gamma(t_0) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right)$. Por fim, como o plano em que a cota é 0 coincide com \mathbb{C} , temos que $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$.

Portanto, cada ponto de $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ corresponde a algum ponto do plano \mathbb{C} .

Com efeito, é possível demonstrar que φ é uma bijeção. Para tanto, devemos demonstrar que φ é injetiva e sobrejetiva. Comprovemos primeiro a injetividade.

Sejam $\{P, P'\} \subset \mathbb{S}^2 - \{N\}$, $\{A, A'\} \subset \mathbb{C}$, $\varphi(P) = A$ e $\varphi(P') = A'$ e $P \neq P'$. Deseja-se demonstrar que se $(P \neq P' \Rightarrow A \neq A')$, então φ é injetiva.

Por absurdo, suponhamos que a seguinte hipótese $(P \neq P' \Rightarrow A = A')$ seja verdadeira e cheguemos a uma contradição.

No referido caso, teríamos que $\overrightarrow{NA} = \lambda \overrightarrow{NP}$ (5) e $\overrightarrow{NA'} = \beta \overrightarrow{NP'}$ (6), onde $\lambda \cdot \beta \neq 0$. Como, por hipótese forçada, $A = A'$, então $\overrightarrow{NA} = \lambda \overrightarrow{NP} = \beta \overrightarrow{NP'} \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \frac{\beta}{\lambda} \overrightarrow{NP'}$, o que implica P e P' estarem sobre a mesma reta, culminando numa contradição.

Assim, temos que se $P \neq P'$, então $A \neq A'$, logo φ é injetiva. Provemos a sobrejetividade.

Tomemos um ponto qualquer do Plano de Angand-Gauss, digamos (m, n) . Por φ , um ponto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ é levado no par $\left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$. Igualando os dois pares ordenados, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} = m \\ \frac{x_2}{1-x_3} = n \end{cases}$$

Por artifício de cálculo, podemos admitir que $\frac{1}{1-x_3} = t$ com $t \neq 0$, pois $-1 \leq x_3 < 1$.

Isso leva à conclusão de que $x_3 = 1 - \frac{1}{t}$.

Em relação ao sistema dado, teremos o seguinte:

$$\begin{cases} tx_1 = m \\ tx_2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m}{t} \\ x_2 = \frac{n}{t} \end{cases}$$

Portanto, qualquer ponto (m, n) representará uma imagem, por φ , desde que

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{m}{t}, \frac{n}{t}, \frac{t-1}{t} \right).$$

Logo, se todos os pontos (m, n) podem ser imagem, por φ , de pontos do domínio, isto implica que o contradomínio é igual à imagem. Assim, φ é sobrejetiva. Se φ é injetiva e sobrejetiva, então φ é uma bijeção.

Ora, se φ é bijeção, então existe φ^{-1} , tal que $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$. Naveguemos, então, em busca da relação determinada φ^{-1} . Passemos à demonstração.

Seja $z = x + iy$, então $z = (x, y) \in \mathbb{C} \Rightarrow z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$. A reta que liga N a z pode ser parametrizada.

Então: $\gamma(t) = N + t \cdot \vec{Nz} = (0, 0, 1) + t[(x, y, 0) - (0, 0, 1)] = (0, 0, 1) + t(x, y, -1) = (tx, ty, 1 - t)$ (7). Vemos que $t \neq 0$, pois, como $N \notin \mathbb{S}^2$, então $1 - t \neq 1$, logo $t \neq 0$.

Por definição, $\varphi^{-1}(z) \in \gamma(t) \cap (\mathbb{S}^2 - \{N\})$, então:

$$\begin{aligned} (tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 &= 1 \Rightarrow t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow tx^2 + ty^2 - 2 + t &= 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{t} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{2}{t} - 1 \Rightarrow |z|^2 = \frac{2}{t} - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{t} &= |z|^2 + 1 \Rightarrow t = \frac{2}{|z|^2 + 1} \quad (8). \end{aligned}$$

Substituindo (8) em (7), teremos:

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} \right) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Considerando que $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$, temos que:

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{2\text{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\text{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Chegamos à conclusão que $\varphi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma bijeção tal que $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$, tendo por inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$, cuja relação de correspondência é $\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{2\text{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\text{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$.

Com fundamento nas conclusões a respeito de φ , é possível demonstrar matematicamente as principais características de representação cartográfica que possuem a projeção estereográfica.

Propriedade 1. *A função φ transforma os círculos de \mathbb{S}^2 que passam pelo polo norte (N) em retas de \mathbb{C} , e os círculos que não contém N , em círculos contidos em \mathbb{C} .*

Na primeira parte, queremos mostrar que círculos \mathcal{C} sobre \mathbb{S}^2 que passam por N são levados por φ em retas contidas em \mathbb{C} .

Seja o plano $\pi : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ que, intersectado com \mathbb{S}^2 , resulta em \mathcal{C} . Como $N \in \mathcal{C}$, então $N \in \pi$. Fazendo a substituição de $N = (0, 0, 1)$ em π , teremos que $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = d \Rightarrow c = d$. Portanto, $\pi : ax_1 + bx_2 + cx_3 = c$.

Seja, ainda, r a reta resultante da interseção entre π e \mathbb{C} , logo: $\pi \cap \mathbb{C} = r \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow ax_1 + bx_2 + c \cdot 0 = c \Rightarrow r : ax_1 + bx_2 = c$.

Seja $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathcal{C}$ e $\varphi(Q) = \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_3}, \frac{\alpha_2}{1-\alpha_3} \right) \in \mathbb{C}$. Provemos que $\varphi(Q) \in r$, ou seja, que um ponto Q de \mathcal{C} é levado por φ em um ponto de r :

$$\begin{aligned} Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \pi &\Leftrightarrow a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = c \Leftrightarrow a\alpha_1 + b\alpha_2 = c - c\alpha_3 \Leftrightarrow \\ a\alpha_1 + b\alpha_2 = c(1 - \alpha_3) &\Leftrightarrow a \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_3} \right) + b \left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_3} \right) = c \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_3}, \frac{\alpha_2}{1-\alpha_3} \right) \in r \Leftrightarrow \varphi(Q) \in r. \end{aligned}$$

Assim, como todos os pontos $\varphi(Q)$ pertencem a r , e sendo φ uma bijeção, temos que os círculos de \mathbb{S}^2 que passam por N são levados por φ na reta r .

Na segunda parte, temos que todo círculo \mathcal{C} sobre $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ é dado pela interseção da esfera (menos N) com um plano, digamos $\pi : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, onde $c \neq d$ (caso contrário, teríamos exatamente o que fora demonstrado na primeira parte).

Deseja-se mostrar, neste momento, que \mathcal{C} é transformado por φ em um círculo λ contido em \mathbb{C} , e, em razão de φ ser bijetiva, $\varphi^{-1}(\lambda) = \mathcal{C}$.

Tomemos os pontos $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ que formam uma certa circunferência $\lambda \subset \mathbb{C}$. Portanto, se $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \varphi^{-1}(z) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$, pois φ é bijeção e os pontos de \mathbb{C} são levados em $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ por φ^{-1} . Com efeito, sabendo-se que $\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(z) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(z) \in (\mathbb{S}^2 - \{N\}) \cap \pi \Leftrightarrow \varphi^{-1}(z) \in \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \cdot \frac{2x}{|z|^2+1} + b \cdot \frac{2y}{|z|^2+1} + c \cdot \frac{c(|z|^2-1)}{|z|^2+1} = d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2ax + 2by + c(|z|^2-1) = d(|z|^2+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2ax + 2by + (c-d)|z|^2 = c+d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2ax + 2by + (c-d)(x^2+y^2) = c+d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2a}{c-d}x + \frac{2b}{c-d}y = \frac{c+d}{c-d} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - \frac{2a}{d-c}x + \frac{a^2}{(d-c)^2} - \frac{a^2}{(d-c)^2} + y^2 - \frac{2b}{d-c}y + \frac{b^2}{(d-c)^2} - \frac{b^2}{(d-c)^2} = \frac{c^2-d^2}{(d-c)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{d-c} \right)^2 + \left(y - \frac{b}{d-c} \right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-d^2}{(d-c)^2}. \end{aligned}$$

A relação encontrada representa a equação geral da circunferência λ . Assim, um círculo \mathcal{C} de $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ é transformado num círculo $\lambda \subset \mathbb{C}$.

Em especial, no caso dos paralelos ao Equador, o centro de cada \mathcal{C} é $(0, 0, x_3)$, donde $\varphi(0, 0, x_3) = \left(\frac{0}{1-x_3}, \frac{0}{1-x_3} \right) = (0, 0)$, ou seja, serão levados em círculos concêntricos, todos de centro $(0, 0)$ em \mathbb{C} .

Passemos, agora, à apresentação da Projeção de Mercator.

3.3 A Projeção de Mercator e a Navegação

No início do século XVI, Portugal despontava como potência naval. À frente de seu tempo, Pedro Nunes (português, 1502-1578), polímata lusitano e cosmógrafo real (matemático, médico, filósofo), recebeu um problema para ser resolvido.

Por ocasião do retorno da 1ª expedição de colonização do Brasil (1530-1532), Martin Afonso de Souza questionou Pedro Nunes sobre a possibilidade de, em singraduras semelhantes à que fizera, ser possível traçar uma rota que maximizasse a eficiência da navegação, isto é, tornasse a viagem mais rápida em razão de se ter percorrido uma distância menor (RANDLES, 2002).

É que a navegação por grandes distâncias exigia (e ainda exige) mudanças constantes de rumo se o desejo do navegante fosse percorrer o menor caminho, o que matematicamente pode ser interpretado como percorrer um arco de círculo máximo, trajeto este hoje denominado como ortodromia.

Pensando no problema, em seu *Tratado em defensam da carta de marear* (1537), Pedro Nunes desenvolveu o raciocínio da loxodromia (RANDLES, 2002), que, na definição de Miguens (1996), é a linha que intercepta os vários meridianos segundo um ângulo constante.

Expandindo a ideia das cartas de marear (como eram chamadas as cartas utilizadas na navegação), Mercator aplicou a essência da ideia de loxodromia para construir uma representação cartográfica do mundo com aplicações práticas à navegação, onde os meridianos eram linhas retas perpendiculares ao Equador e às suas linhas de latitude (GURGEL, 2012).

A grande vantagem de tal projeção era que o rumo, por ser o ângulo formado entre o Norte e a direção adotada pelos navios, podia ser lido diretamente na carta, uma vez que ângulos poderiam ser transportados sem deformação.

O nome da projeção se deve ao cartógrafo idealizador, Gerardo Kremer (Flanders 1512-1594), que no processo de latinização de seu nome obteve-se como tradução Gerardo Mercator (MIGUENS, 1996, p. 23).

Hodiernamente, trata-se da projeção cartográfica mais aplicada à navegação, pois apresenta a valiosa propriedade de conformidade, isto é, os ângulos observados na superfície da Terra são preservados na projeção. A tradução de tal propriedade matemática em termos práticos é o de - ao se desejar navegar num determinado rumo - ser possível “ler” tal rumo na Carta e marcar o deslocamento da embarcação sobre uma linha reta no plano projetado.

Em linhas gerais, a projeção consiste em envolver um cilindro tangenciando a

Terra no Equador, projetar os pontos de interesse da superfície terrestre no cilindro e, por fim, planificar o cilindro, conduzindo, a partir de então, as análises e traçados de rotas nos elementos planificados.

A bibliografia utilizada no curso de Navegação no CN é de autoria do Altineu Pires Miguens, que a respeito da Projeção de Mercator assim a apresenta (MIGUENS, 1996, p. 24):

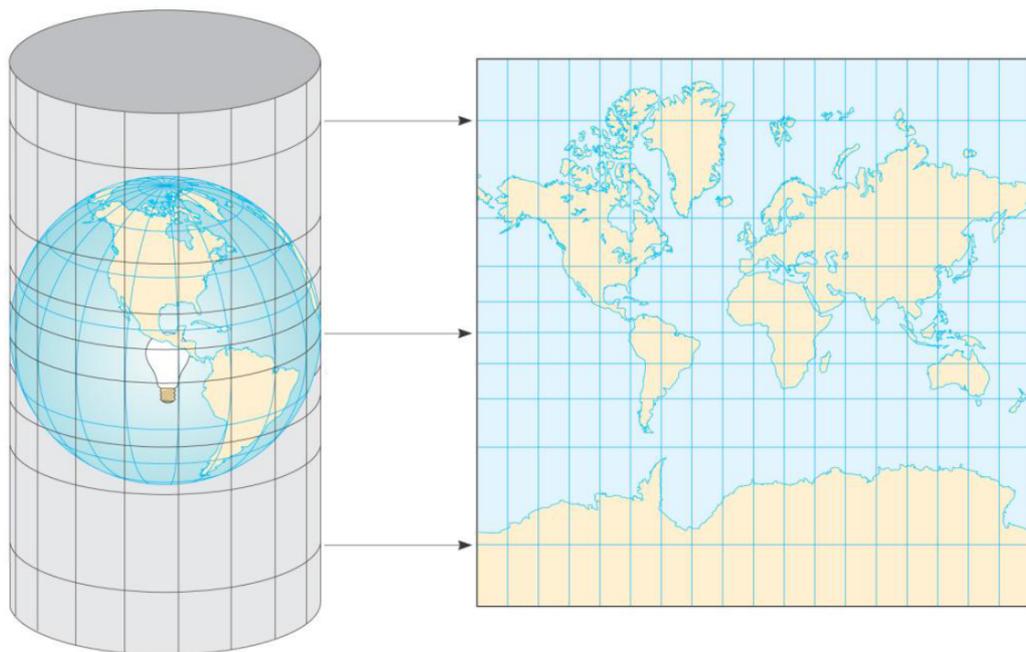
A Projeção de Mercator pertence à classe das projeções por desenvolvimento cilíndrico e à categoria das projeções conformes. Da condição de conformidade, isto é, da inexistência de deformações angulares, surge a propriedade de manutenção da forma das pequenas áreas.

A Projeção de Mercator é uma modalidade equatorial das projeções cilíndricas, isto é, o cilindro é considerado tangente à superfície da Terra no equador.

Assim, o propriedade conforme faz com que meridianos e paralelos (perpendiculares na superfície da Terra) apresentem-se como retas também perpendiculares na mencionada projeção, sendo, as primeiras, verticais, e as segundas, horizontais (Figura 9).

Em contraponto à vantagem de não deformar ângulos, é possível constatar que, à medida que se deseja projetar pontos de latitudes mais elevadas, a Carta sob a Projeção de Mercator apresenta grandes deformações de áreas (decorrente das “latitudes crescidas”), por exemplo, a Groenlândia parece ter a mesma área que a do continente africano (Figura 9), quando, na realidade, é cerca de 15 vezes menor.

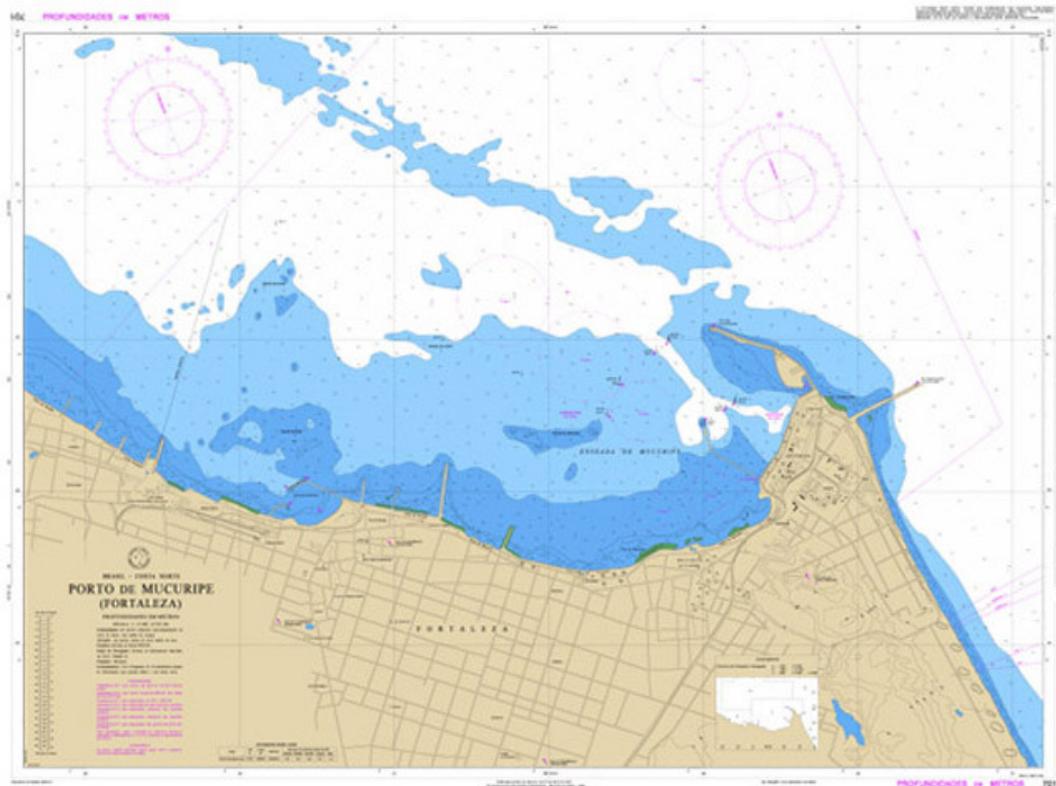
Figura 9 – Ilustração da Projeção de Mercator



Devido a tais deformações em altas latitudes é que a OHI, em seu “Reglamento de la OHI para Cartas Internacionales (INT) y Especificaciones cartográficas de la OHI”, aponta a utilização de tal projeção entre 70° Norte e 70° Sul (ORGANIZAÇÃO HIDROGRÁFICA INTERNACIONAL, 2019, B-203.2).

Um exemplo que materializa numa escala maior a Projeção de Mercator é o da Figura 10, onde é apresentado o Porto do Mucuripe (Fortaleza-CE), localizado na posição de latitude 3° 42’ 36” S, e longitude 38° 28’ 24” O.

Figura 10 – Exemplo de Projeção de Mercator do Porto do Mucuripe (Fortaleza-CE)



Fonte: PORTO (2022).

Nas Figuras 9 e 10, as retas verticais são paralelas aos meridianos, e as horizontais são paralelas ao Equador e, conseqüentemente, aos Paralelos da Terra.

Com efeito, a projeção cartográfica concebida por Mercator se valeu de métodos estritamente gráficos ou gráfico-mecânicos para as suas construções, pois como o Cálculo Diferencial e Integral ainda não havia sido desbravado, não era possível deduzir uma equação analítica para tal projeção.

Portanto, à época da concepção da Carta de Mercator, não era possível apresentar equações em que, dadas como entradas as informações de latitude e longitude (φ, λ), fornecessem como saídas coordenadas planoretangulares (x, y), onde as abscissas representassem, na

carta, a projeção da longitude, e as ordenadas, as “latitudes crescidas”.

Tal questão somente foi possível ser resolvida com os avanços proporcionados no Cálculo Diferencial e Integral, descoberto por Newton (inglês, 1643-1727) e Leibniz (alemão, 1646-1716), e será objeto de atenção do subitem seguinte.

3.4 A Projeção de Mercator e a Matemática

Assim, neste ponto da dissertação, valendo-nos na premissa de que os alunos do CN já detêm conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial e Integral (3º ano, itens 9, 13, 17, 19, 21) e de Trigonometria (1º ano, itens 7, 11, 14) (BRASIL, 2019), apresentemos uma forma de deduzir a equação da Projeção de Mercator.

Sejam, pois, φ e λ as variáveis que se referem à latitude e à longitude de um ponto no globo terrestre. Deseja-se deduzir analiticamente as equações que representam as coordenadas (x, y) na Projeção de Mercator.

Apenas para visualizar mais facilmente e simplificar o ponto de partida, seja A o ponto de referência, a interseção entre o Meridiano de Greenwich e o Equador, apresentando, portanto, latitude (φ_A) e longitude (λ_A) iguais a 0° .

Sejam, ainda, um ponto C (de latitude e longitude φ_C e λ_C , respectivamente) mais a oeste e a norte de A ; B o ponto que esteja na mesma latitude de C ($\varphi_B = \varphi_C$) e mesma longitude de A ($\lambda_B = \lambda_A$); os pontos B' e C' , respectivamente, as projeções de B e de C no cilindro; e o ponto O' a projeção do centro O da esfera terrestre (de raio R) no plano que contém o paralelo que passa por B e por C (Figura 11).

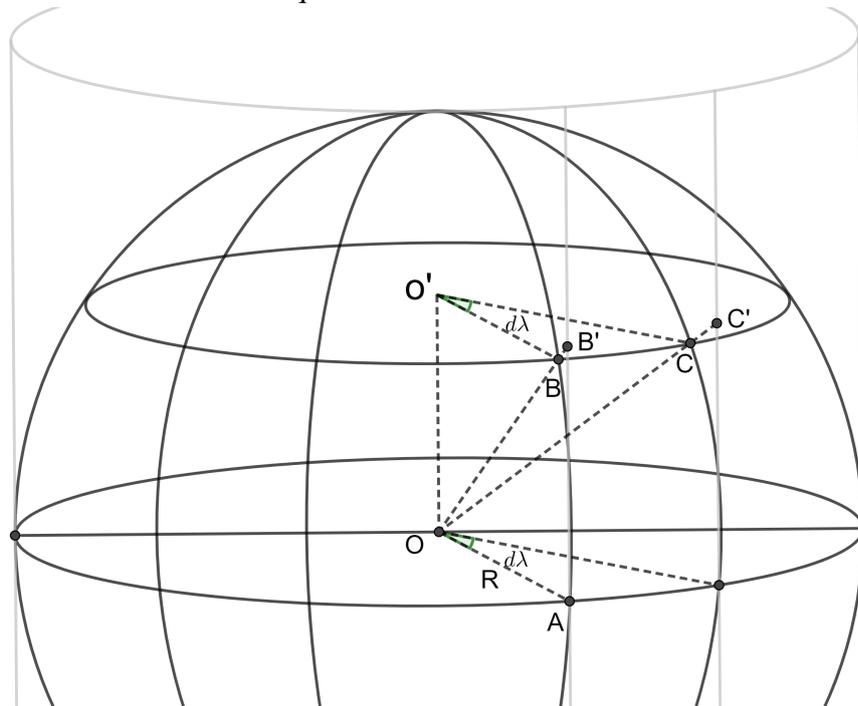
À medida que se considera aproximar C de A (a ponto de se conduzir a discussão até padrões infinitesimais), temos que a planificação das superfícies ABC e $AB'C'$ aproximar-se-ão de triângulos retângulos planos (retos em B e B' respectivamente), e os arcos obtidos poderão ser considerados como segmentos de reta.

Pensemos, primeiro, nos pontos sobre a Terra, em especial nos arcos \widehat{BC} e \widehat{AB} do triângulo esférico ABC .

A projeção de OB no plano que contém $O'BC$ impõe que se tenha $O'B = R \cos \varphi$. Considerando uma separação infinitesimal de longitude entre B e C , temos que $\widehat{BC} = R \cos \varphi (d\lambda)$. A seu turno, considerando também uma variação infinitesimal de latitude entre A e B , tem-se que $\widehat{AB} = R (d\varphi)$.

Pensemos, agora, no figura $AB'C'$. Os pontos B' e C' , por estarem sobre o cilindro

Figura 11 – Detalhe dos pontos A , B , C , com respectivas projeções no cilindro circunscrito ao Equador terrestre.



Fonte: elaborada pelo autor.

circunscrito referencial, pressupõem extremos de um arco de círculo máximo de raio R , que subentendem, na perspectiva infinitesimal, um ângulo central $d\lambda$. Assim, a medida linear dx (isto é, depois de planificado o cilindro) é igual a $Rd\lambda$.

Por sua vez, o cateto infinitesimal vertical observado na projeção AB' , e denominado dy , é justamente o que se deseja encontrar.

Pois bem, para que a conformidade da carta esteja preservada, tem-se que o rumo μ , marcado a partir de A até C , deve ser o mesmo tanto na Terra como na projeção. Em outras palavras, o rumo real e o traçado na carta deve apresentar a mesma inclinação.

Logo, a inclinação observada na carta é dada por $\tan \mu = \frac{dx}{dy}$, e na superfície terrestre,

por $\tan \mu = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}}$. Com as reduções infinitesimais apresentadas (em que os arcos \widehat{BC} e \widehat{AB} são segmento de reta), é possível constatar que:

$$\tan \mu = \frac{dx}{dy} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}} \Rightarrow \frac{R \cdot d\lambda}{dy} = \frac{R \cos \varphi \cdot d\lambda}{R d\varphi} \Rightarrow dy = R \sec \varphi \cdot d\varphi$$

Tem-se, portanto, as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} dx = Rd\lambda \\ dy = R \sec \varphi d\varphi \end{cases}$$

Resolvendo-as, teremos:

$$dx = Rd\lambda \Rightarrow \int dx = \int R d\lambda \Rightarrow x = R\lambda \quad (9).$$

$$dy = R \sec \varphi d\varphi \Rightarrow \int dy = R \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad (10).$$

Procedamos a uma mudança de variável, onde $\varphi = 90^\circ - \delta$ (11) $\Rightarrow d\varphi = -d\delta$ (12).

Aplicando (11) e (12) em (10), teremos:

$$y = -R \int \frac{d\delta}{\sin \delta} = -R \int \frac{d\delta}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = -R \int \frac{1 \cdot d\delta}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = -R \int \frac{(\sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2}) \cdot d\delta}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} =$$

$$-R \int \left(\frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} \right) d\delta \Rightarrow y = -R \int \left(\frac{\sin \frac{\delta}{2}}{2 \cos \frac{\delta}{2}} + \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \right) d\delta \quad (13).$$

Recorramos a mais duas mudanças de variáveis, quais sejam $u = \cos \frac{\delta}{2}$ (14) e $v = \sin \frac{\delta}{2}$ (15), que, por sua vez, implicam $du = -\sin(\frac{\delta}{2}) \frac{d\delta}{2}$ (16) e $dv = \cos(\frac{\delta}{2}) \frac{d\delta}{2}$ (17). Substituindo (14), (15), (16) e (17) em (13) teremos:

$$y = -R \int \left(\frac{\sin \frac{\delta}{2}}{2 \cos \frac{\delta}{2}} + \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \right) d\delta = -R \int \left(\frac{-2du}{2u} + \frac{2dv}{2v} \right) = -R \left(\int \frac{dv}{v} - \int \frac{du}{u} \right) \Rightarrow$$

$$y = -R(\ln|v| - \ln|u| + C) \Rightarrow y = -R \ln \frac{|v|}{|u|} + C \quad (18).$$

Aplicando (14) e (15) em (18), teremos:

$$y = -R \ln \frac{|\sin \frac{\delta}{2}|}{|\cos \frac{\delta}{2}|} + C = (-1) \cdot R \ln \left| \tan \frac{\delta}{2} \right| + C = R \ln \left| \tan \frac{\delta}{2} \right|^{-1} + C = R \ln \left| \cotg \frac{\delta}{2} \right| + C \Rightarrow$$

$$y = R \ln \frac{|\cos \frac{\delta}{2}|}{|\sin \frac{\delta}{2}|} + C \Rightarrow y = R \ln \frac{|\sin(90^\circ - \frac{\delta}{2})|}{|\cos(90^\circ - \frac{\delta}{2})|} + C \quad (19). \text{ Substituindo (11) em (19), teremos:}$$

$$y = R \ln \frac{|\sin(90^\circ - \frac{90^\circ - \varphi}{2})|}{|\cos(90^\circ - \frac{90^\circ - \varphi}{2})|} + C = R \ln \frac{|\sin(45^\circ + \frac{\varphi}{2})|}{|\cos(45^\circ + \frac{\varphi}{2})|} + C \Rightarrow y = R \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] + C \quad (20).$$

Considerando que o paralelo de latitude 0° é o Equador, que, a seu turno, representa o Paralelo de origem na projeção de Mercator, é possível substituir $y = 0$ e $\varphi = 0^\circ$ em (20) a fim de se determinar o valor da constante C :

$$0 = R \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{0^\circ}{2} \right) \right] + C \Rightarrow 0 = R \ln [\tan(45^\circ)] + C \Rightarrow 0 = R \ln(1) + C \Rightarrow 0 = R \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0. \text{ Aplicando tal resultado a (20), finalmente, teremos:}$$

$$y = R \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

Assim, dada uma posição (φ, λ) na esfera terrestre, ela é representada na Projeção de Mercator por coordenadas planoretangulares $(x, y) = (R\lambda, R \ln [\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})])$, conclusão compatível (a menos da escolha da notação para cada variável), com o exercício 74 do livro Geometria Diferencial de Paulo Ventura Araújo (ARAÚJO, 2016, p. 105).

Pois bem, os subitens 2.2, 3.2 e 3.4 objetivaram apresentar de forma acessível uma matemática, em geral (e principalmente com a entrada da BNCC em vigor), não abordada no Ensino Médio, mas exigida nos alunos do CN. Vislumbrando o interesse pelas possibilidades de

carreira para um Oficial do Corpo da Armada, apresenta-se a seguir uma opção ao jovem aluno do CN com pendor para a matemática, que mescla tudo o que foi visto até aqui: o interesse pelas “coisas do mar” e pela matemática.

Trata-se da opção pelo Curso de Aperfeiçoamento em Hidrografia para Oficiais.

3.5 A opção do Curso de Hidrografia para Oficiais

Tendo sido apresentada a conexão entre matemática e temas marinheiros, destaca-se uma opção de carreira ao aluno do CN, vislumbrando seu futuro como Oficial da Armada da MB. Por certo que não é a intenção da MB se aprofundar nos rigorosos detalhes matemáticos de cada uma das projeções cartográficas ao formar os alunos do CN, os Aspirantes da EN ou os Oficiais Hidrógrafos.

Contudo, a busca das melhores pessoas para o exercício de determinadas posições aponta para uma estratégia universalmente eficiente.

Tal constatação apresenta-se nas mais diversas situações do cotidiano. Se uma pessoa tem propensão para ser atleta, com índices maiores que o esperado para a sua faixa, há uma grande probabilidade de que ela se destaque no esporte. Se outra pessoa ama transmitir conhecimento e ajudar no desenvolvimento de outras pessoas, é muito provável que ela se realize no magistério. Se um vendedor, além de ser bom no que faz, consegue liderar eficientemente, terá grande chance de exercer melhor suas potencialidades gerenciando.

Seguindo a mesma linha dos exemplos acima, se um aluno do CN, já com a propensão pelas "coisas do mar", demonstra desenvoltura com matemática, mostra-se como bastante razoável a ideia de apresentar-lhe o quanto antes a opção, dentro da MB e para o Corpo da Armada, que provavelmente permita a potencialização de suas habilidades.

É exatamente na estreita correlação entre a matemática e o CAHO que reside parte da fundamentação para cumprir a promessa desta Dissertação. Então, depois de cursar 3 anos como aluno do ensino médio no CN, mais 4 anos como Aspirante, no ensino superior da EN, e mais 1 ano como Guarda-Marinha (esta última fase dividida entre cursos e Viagem de Instrução no Navio-Escola Brasil), dá-se a nomeação como Segundo-Tenente. O jovem Oficial tem opção de escolher qual Curso de Aperfeiçoamento atender. Trata-se de curso obrigatório de carreira. E um dos cursos disponíveis é o Curso de Aperfeiçoamento em Hidrografia para Oficiais (CAHO).

Exclusivo para Oficiais do Corpo da Armada, que, segundo a MB, é o Corpo que conduz, opera e mantém todos os navios de guerra, de pesquisa e de apoio da Marinha do Brasil

e executa funções administrativas e operativas em organizações militares de terra, privadas deste Corpo (SPÍNOLA, 2022).

No currículo do CAHO (BRASIL, 2010), é possível constatar a natureza das disciplinas, e, assim, concluir que a Matemática é um tema prevalente ao longo do referido curso.

O objetivo geral do CAHO é qualificar Oficiais para planejar, dirigir e executar todas as atividades técnicas de responsabilidade da Diretoria de Hidrografia e Navegação (DHN) (BRASIL, 2010, p. 4).

Dentre as atividades técnicas de responsabilidade da DHN, inúmeras exigem do Oficial cursado em Hidrografia habilidades nas áreas de hidrografia, geodésia, análise de dados, teoria dos erros, oceanografia, meteorologia, marés (BRASIL, 2010, p. 7).

Da análise das disciplinas que formatam o Curso em questão, inúmeras exigem do Oficial-Aluno sólido conhecimento em Matemática e Física (como as exemplificadas no parágrafo anterior). Com efeito, uma das disciplinas componentes da grade curricular é a de Projeções Cartográficas, onde são apresentadas as projeções planas (em especial as abordadas nesta Dissertação) e algumas de suas propriedades.

Na disciplina mencionada é apresentada de passagem a Projeção Estereográfica, e como motivação são destacadas suas propriedades, como permitir a projeção gráfica dos polos da Terra com distorções reduzidas, apresentando os meridianos como retas concorrentes no polo, e os paralelos, como circunferências concêntricas, o que inclusive já fora demonstrado no subitem anterior.

Na mesma disciplina, é apresentada a Projeção de Mercator como sendo uma das principais projeções, pois é o padrão brasileiro para a concepção das cartas náuticas em papel. O motivo é justamente a vantagem trazida pela conformidade da projeção.

Portanto, a partir da rota até aqui navegada, fica patente que a matemática é fundamental na formação do Oficial de Marinha, desde o ingresso pelo CN, passando (ou mesmo ingressando diretamente) pela EN. Ademais, ante a especificidade dos cursos de aperfeiçoamento para Oficiais do Corpo da Armada (Apêndice B), é possível constatar que o CAHO é o que apresenta maior carga horária de conteúdo matemático.

A elevada exigência de conhecimentos matemáticos básicos, tanto no concurso de ingresso no CN, como no desenvolvimento do curso, aliada à missão do CN (BRASIL, 2022b) tornam mais natural a busca por temas de interseção entre experiência marinheira e desenvolvimento lógico-matemático.

Inúmeras disciplinas no CAHO apresentam em sua composição conteúdo matemático, conforme se vê na Tabela 1. Em verdade, a depender da natureza da disciplina, há as que cobram ainda mais matemática, por isso os temas elencados na Tabela 1 são apenas exemplificativos.

Tabela 1 – Assuntos envolvendo matemática nas disciplinas do CAHO

Disciplina	Assuntos
Oceanografia	6.1 A equação do movimento para os oceanos, 7.1 A equação do movimento geostrofico, 7.2 Cálculo do fluxo geostrofico, 12.1 Técnicas de modelagem numérica
Análise de Dados	1 Introdução à Teoria da Probabilidades, 2 Variáveis Aleatórias, 4 Funções de Variáveis Aleatórias, 12.1 Séries temporais;
Topografia Costeira	4.3 Nivelamento geométrico; 4.4 Nivelamento trigonométrico, 5.1 Sistemas de coordenadas planas;
Meteorologia	2.2 Leis de conservação aplicadas ao movimento da atmosfera 2.6 Noções de modelagem numérica de tempo e clima;
Geodésia	2.1 Introdução à Geodésia Geométrica, 2.2 Quádricas e cônicas, 2.3 Geometria no elipsóide de revolução, 5.1 Geometria das órbitas normais; 5.2 Sistemas de coordenadas;
Projeções Cartográficas	1.1 Representação da superfície da Terra sobre o plano, 1.2 Classificação dos sistemas de projeção, 2.1 Propriedades e aplicações das projeções planas, 3.1 Propriedades e aplicações das projeções cônicas;
Marés	6.1 Aplicação da análise de Fourier em séries discretas de dados de maré, 8.1 e 8.2 Método harmônico e não harmônico de previsão de marés, 9.1 Métodos de Lagrange e de Euler para medição de corrente;
Acústica Submarina	2.2 Ondas planas e esféricas, 2.3 Reflexão e refração de ondas, 2.4 Equação da onda, 5.5 Técnicas de Fourier: séries e transformadas de sinais de tempo discreto, 5.6 Propriedades da Transformada de Fourier;
Teoria dos Erros	1.2 Distribuição de Gauss e Distribuição Normal Unidimensional, 3.1 Elipse dos erros, 3.2 Elipse de confiança e outras formas de expressar a incerteza posicional
Nivelamento em Matemática e Física	1.1 Análise Vetorial, 1.2 Sistema de Equações Lineares, 1.3 Séries de Funções, 1.6 Equações Diferenciais, 1.7 Sistema de coordenadas.

Fonte: BRASIL (2010).

Efeméride digna de registro no intuito de evidenciar o gosto pelo mar e pela matemática, caso a rota escolhida pelo futuro Oficial da Armada seja cursar o CAHO, trata da estreita relação do Hidrógrafo com a região polar do Hemisfério Sul.

Anualmente, dois Navios da MB subordinados indiretamente à DHN (BRASIL, 2022d) realizam viagem à Estação Antártica Comandante Ferraz, visando apoiar projetos científicos relacionados ao Programa Antártico Brasileiro bem como oferecer apoio logístico

àquela Estação. São eles: o Navio Polar Almirante Maximiano (H 41) e o Navio de Apoio Oceanográfico Ary Rongel (H 44) (Figura 12).

Figura 12 – Navios Polares



Fonte: NAVIOS (2015).

Nesses dois Navios, os Chefes de Operações e os Encarregados da Navegação têm sido Oficiais Hidrógrafos. Além daqueles dois, há outros Hidrógrafos que, em conjunto com Oficiais de outras áreas (como médico, capelão, da área de máquinas, dentre outros), compõem a Oficialidade dos Navios, porém apenas os Oficiais oriundos do CAHO foram apresentados às disciplinas mais afetas com o emprego dos Navios.

Portanto, neste capítulo, foi apresentada a forte presença da matemática na formação do Oficial de Marinha, desde o ingresso no CN, assim como foi indicado um caminho de interseção entre a matemática e conhecimentos marinhos, o qual pode indicar ao aluno do CN com dileção pelos “números” e pelas “coisas do mar” o CAHO como uma opção de carreira.

É oportuno destacar a existência de outro curso de aperfeiçoamento para Oficiais da Armada com elevada carga de conteúdo matemático, qual seja o Curso de Aperfeiçoamento em Engenharia. Porém, após cursá-lo, os Oficiais deixam de pertencer ao respectivo Corpo e passam a integrar o Corpo de Engenheiros da Marinha (HONORATO, GUIMARÃES; 2018, pp. 5-8). Por tal motivo, o Curso de Aperfeiçoamento em Engenharia foi aqui desconsiderado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscou-se ao longo deste trabalho apresentar uma proposta de motivação ao aluno do CN, visando aliar as potencialidades daqueles com maior propensão à matemática ao objetivo da instituição escolar, que é preparar o jovem para uma carreira como futuro Oficial de Marinha.

Para traçar o caminho selecionado, foi escolhido como tema matemático principal os Números Complexos e, como elo entre matemática e motivação marinheira, as Projeções Estereográfica e de Mercator.

Na rota adotada, cada capítulo apresentou-se como ponto conspícuo. Na Introdução, foi apresentado o CN, demonstrando-se a sua singularidade como instituição de ensino com missão específica. Em seguida, foram traçados os rumos que seriam adotados nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 2, partindo de um breve histórico, foi reconstruída a trajetória dos Números Complexos, descrevendo-se os pontos técnicos mais relevantes do assunto e essenciais ao ponto subsequente.

No Capítulo 3, foi trazida a lume d'água as Projeções Estereográfica e de Mercator, com destaque para as propriedades e respectivas demonstrações, todas plenamente acessíveis à maturidade matemática dos alunos do 3º do CN. E, ao final desse mesmo capítulo, aventou-se o CAHO como uma possível escolha de carreira para os Oficiais do Corpo da Armada da MB.

A submersão nos assuntos referenciados por certo não teve como propósito esgotar o que existe de conhecimento sobre tais matérias, mas de tornar mais evidente a relação entre a matemática e as “coisas do mar”, demonstrando, para aqueles alunos com gosto por números e pelo mar que é plenamente factível alcançar tema interessante que intersekte os dois mundos.

A singradura teve como desfecho a apresentação das Projeções Estereográfica e de Mercator como os elos entre a aplicação da matemática, em um nível que provoque interesse no público-alvo, e a exposição de tema eminentemente marinheiro, culminando com a apresentação do CAHO como proposta de carreira ao futuro Oficial.

Por fim, é imperioso afirmar que uma eventual opção do CAHO como curso de aperfeiçoamento não significa que o Oficial desenvolverá, ao longo de sua carreira pós-curso, apenas temas relativos ao que ali aprendera. Em verdade, a carreira do Oficial de Marinha é dinâmica e exige elevada capacidade de adaptação, sendo possível vivenciar missões sem relação direta com o CAHO. Por outro lado, é certo afirmar, tal opção abre portas para uma carreira com grande abertura para trabalhar junto à comunidade científica e... com matemática, claro!

REFERÊNCIAS

- ARGAND, J. R.. **Essay ser une manière de représenter les quantités imaginaires daks les constructions Géométriques**. 2^a ed. Paris: Gauthie-Villaris, Imprimeur-Libraire, 1874.
- ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria diferencial**. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- BOMBELLI, Rafael. **L'Algebra**, Prima edizione integrale. Milano: Feltrinelli editore, 1956.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgar Blucher: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- BRASIL. Exército. Departamento de Ciência e Tecnologia. Edital n° 2 do Concurso de Admissão ao Curso de Formação de Oficiais da Ativa do Quadro de Engenheiros Militares. **Diário Oficial União**, Poder Executivo, Brasília, n. 94, p. 50, Seção 3, de 19 maio 2022a. Disponível em: <https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=19/05/2022&jornal=530&pagina=50&totalArquivos=368>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- BRASIL. Marinha. Colégio Naval. **Currículo [do] Curso de Preparação para Aspirantes**. Rio de Janeiro: Colégio Naval, 2019. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/cn/curriculo>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- BRASIL. Marinha. Colégio Naval. Missão do Colégio Naval. *In*: BRASIL. Marinha. Colégio Naval. **Institucional**. Rio de Janeiro: Colégio Naval, 2022b. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/cn/missao>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- BRASIL. Marinha. Diretoria de Ensino da Marinha. **Currículo do Curso de Aperfeiçoamento de Hidrografia para Oficiais (CAHO)**. Rio de Janeiro: DENSM, 2010. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/dhn/sites/www.marinha.mil.br/dhn/files/cursos/CAHO.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- BRASIL. Marinha. Diretoria de Hidrografia e Navegação. Estação Antártica Comandante Ferraz. *In*: BRASIL. Marinha. Diretoria de Hidrografia e Navegação. **Programa Antártico Brasileiro**. Niterói: DHN, 2022c. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/secirm/pt-br/proantar/eacf>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- BRASIL. Marinha. Diretoria de Hidrografia e Navegação. Navios subordinados ao grupamento de navios hidroceanográficos. *In*: BRASIL. Marinha. Diretoria de Hidrografia e Navegação. **Grupamento de Navios Hidroceanográficos (GNHo)**. Niterói: DHN, 2022d. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/dhn/?q=pt-br/gnho>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- BRASIL. Marinha. Diretoria de Hidrografia e Navegação. Organização Hidrográfica Internacional (OHI). *In*: BRASIL. Marinha. Diretoria de Hidrografia e Navegação. **Organizações internacionais**. Niterói: DHN, 2022e. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/dhn/?q=pt-br/ohi>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- BRASIL. Marinha. Serviço de Seleção de Pessoal. Edital do Concurso Público de Admissão à Escola Naval em 2022 (CPAEN/2022). **Diário Oficial da União**, Poder Executivo, Brasília, n. 6, p. 37, Seção 3, de 10 jan. 2022f. Disponível em: <https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?>

[data=10/01/2022&jornal=530&pagina=37&totalArquivos=282](#). Acesso em: 16 jul. 2022.

BRASIL. Marinha. Serviço de Seleção do Pessoal. O Colégio Naval é a instituição de Ensino Médio da Marinha do Brasil. *In*: BRASIL. Marinha. Serviço de Seleção do Pessoal da Marinha. **Colégio Naval**. Rio de Janeiro: SSPM, 2022g. Disponível em: https://www.marinha.mil.br/sspm/?q=colegionaval/colegio_princ. Acesso em: 16 jul. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018a. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 16 jul. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução nº 4, de 17 de dezembro de 2018. Institui a Base Nacional Comum Curricular na Etapa do Ensino Médio (BNCC-EM), como etapa final da Educação Básica [...]. **Diário Oficial da União**, Poder Executivo, Brasília, DF, ed. 242, seção 1, p. 120, 18 dez. 2018b. Disponível em: <https://www.in.gov.br/web/dou/-/resolucao-n-4-de-17-de-dezembro-de-2018-55640090>. Acesso em: 16 jul. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Conselho Nacional de Educação. **Parecer nº CP 98/99**. Publicado em 29/07/1999, Edição 144-E Seção 1, p. 11. Disponível em: <https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=29/07/1999&jornal=1&pagina=11&totalArquivos=144>. Acesso em: 16 jul. 2022.

CAMINHA, A. **Tópicos de matemática elementar: polinômios**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 6.

CARDANO, Girolano. **Ars Magna or The Rules of Algebra**. Translated by T. Richard Witmer. New York: Dover Publications, 1968. Título original: Arts magnae, sive de regylis algebraicis.

COLÉGIO naval. *In*: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. [Flórida: Wikimedia Foundation], 2022. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Colégio_Naval. Acesso em: 16 jul. 2022.

DESCARTES, René. **The geometry**: of Rene Descartes with a facsimile of the first edition. Translated from de French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, 1954.

GAUR, Aakanksha *et al.* (ed.). Edward Lorenz. *In*: ENCYCLOPAEDIA Britannica. Chicago: Encyclopædia Britannica, 2022. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Edward-Lorenz>. Acesso em: 16 jul. 2022.

GAUSS, Carl Friedrich. **New proof of the theorem that every algebraic rational integral function in one variable can be resolved into real factors of the first or the second degree**. Translated by Ernest Fandreyer. Fitchburg, MA: Fitchburg State College, [20--?]. Disponível em: https://quantresearch.org/Gauss_PhD_Dissertation.pdf. Acesso em: jul. 2022.

GURGEL, Abilio Castro. **Mercator e sua contribuição à cartografia e ao dos mapas**. 2012. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. p. 114.

HONORATO, GUIMARÃES; H. G., H. C. A. Formação do Engenheiro Naval oriundo da Escola Naval: o convênio Marinha do Brasil e Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. **The Journal of Engineering and Exact Sciences – JCEC**, v. 4, n. 4, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufv.br/jcec/article/view/2560/1081>. Acesso em 16 jul. 2022.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Euler, o matemático mais prolífico da história**. Rio de Janeiro: IMPA, 2021. Publicado em 24/02/2021. Disponível em: <https://impa.br/noticias/euler-o-matematico-mais-prolifico-da-historia/#:~:text=Leonhard%20Euler%20%C3%A9%20um%20dos,prol%C3%ADfico%20de%20todos%20os%20tempos>. Acesso em: 16 jul. 2022.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (Brasil). **Matriz de referência do ENEM atualizada**. Brasília, DF: INEP, 2022. Disponível em: <https://enem.net/wp-content/uploads/2022/08/enem-matriz-referencia.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2022.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA (Brasil). **Anexo D do Edital do Concurso Público de Admissão ao Instituto Tecnológico da Aeronáutica em 2022 (Vestibular 2022)**. São José dos Campos: ITA, 2022. Disponível em: https://vestibular.ita.br/instrucoes/edital_2022.pdf. Acesso em: 16 jul. 2022.

EULER, Leonhard. **Institutionum calculi integralis**: volumen quartum. Editio tertia. Petropoli: Impensis Academiae Imperialis Scientiarum, 1794. Continens supplementa partim inedita partim jam in operibus academiae imperialis scientiarum. Disponível em: <https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1659&context=euler-works>. Acesso em: 16 jul. 2022.

MIGUENS, Altineu Pires (org.). **Navegação: a ciência e a arte: navegação estimada, costeira e em águas restritas, volume I**. Rio de Janeiro: DHN, 1996. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/dhn/?q=pt-br/npublicacoes>. Acesso em: 16 jul. 2022.

NAVIOS polares da Marinha: Navio Polar Almirante Maximiano (H 41) e Navio de Apoio Oceanográfico Ary Rongel (H 44). *In*: CANAL do Porto de Santos. Santos, SP, 2015. Disponível em: <http://www.canaloportodesantos.com/2015/10/navios-polares-da-marinha-ary-rougel-e.html>. Acesso em: 16 jul. 2022.

ORGANIZAÇÃO HIDROGRÁFICA INTERNACIONAL. **Reglamento de la OHI para Cartas Internacionales y especificaciones cartográficas de la OHI**. Monaco: IHO, 2018. Disponível em: <https://iho.int/en/standards-and-specifications>. Acesso em: 16 jul. 2022.

ORGANIZAÇÃO HIDROGRÁFICA INTERNACIONAL. Monaco: IHO, 2022. Disponível em: <https://iho.int/>. Acesso em 16 jul. 2022.

PORTO de Mucuripe (Fortaleza). Fortaleza: EMGEPRON, 2022. 1 mapa, color. Escala 1:13 000. Disponível em: <https://cartasnauticasbrasil.com.br/carta-701-porto-de-mucuripe-fortaleza.html>. Acesso em: 16 jul. 2022.

RANDLES, W. G. L. Pedro Nunes e a Descoberta da Curva Loxodrômica. **Gazeta de Matemática**, n. 143, p. 90, 2002. Disponível em: <https://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=63>. Acesso em: 16 jul. 2022.

SILVA, Edvaldo Lima da *et al.* Alguns estudos de fluxo de fluido utilizando software gráfico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 3, p. 3502, 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/KJy9rLdkwnvK79GK7RpX3GB/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 16 jul. 2022.

SOARES, Marcio G. **Cálculo em uma variável complexa**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

SPÍNOLA, Camila. Corpo da Armada e Corpo de Fuzileiros Navais: eles são iguais? *In*: BRASIL. Marinha. Serviço de Seleção do Pessoal da Marinha. **Notícias**. Rio de Janeiro: SSPM, 2022. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/sspm/?q=noticias/corpo-da-armada-e-corpo-de-fuzileiros-navais-eles-s%C3%A3o-iguais-0>. Acesso em: 16 jul. 2022.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Gabinete do Reitor. **Resolução nº. 52/2021, de 08/07/2021**. Dispõe sobre o Vestibular Unicamp 2022 para vagas no ensino de Graduação. Campinas: Gabinete do Reitor, 2021. Disponível em: https://www.comvest.unicamp.br/wp-content/uploads/2021/07/Edital_VU_2022.pdf. Acesso em: 16 jul. 2022.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES

Este apêndice tem como propósito desenvolver as demonstrações de teoremas e proposições apresentados ao longo do texto, bem como o de destacar uma das formas de caracterização dos Números Complexos. Cada ponto será apresentado em alíneas cujos títulos seguem a baixo:

- a) Forma matricial dos Números Complexos (p. 16);
- b) \mathbb{C} é um corpo (p. 16);
- c) 0 e 1 são elementos único de \mathbb{C} (p. 16);
- d) Propriedades do conjugado de $z \in \mathbb{C}$ (p. 16);
- e) Propriedades do módulo de $z \in \mathbb{C}$ (p. 18);
- f) Proposição 1 (p. 20);
- g) Teorema 1 (p. 20);
- h) Teorema 2 (p. 20);

Ao lado do assunto, aparece a página onde a ele se faz menção no corpo do texto. Passemos a eles.

a) Forma matricial dos Números Complexos (p. 16)

No seu livro “Cálculo em uma variável complexa” (SOARES, 2007), o autor apresenta as formas algébrica, geométrica e polar de representação dos complexos, acrescentado uma quarta forma, que lhe deve ser creditada, qual seja a forma matricial.

Conforme disposto no início do subtópico 2.2, a forma matricial de introdução dos Números Complexos parece-nos bem mais intuitiva do que as demais pelo fato de se utilizar os conceitos já estabelecidos para operações com matrizes. Outro ponto que conta a seu favor é que a regra para o produto de complexos surge naturalmente, e, como consequência, a conclusão de que $i^2 = -1$ mostra-se mais palpável ao aluno/leitor.

Inicialmente, recorre-se à equação $x^2 + 1 = 0$. Sabe-se que o produto de dois números reais iguais sempre tem sinal positivo. Logo, $x^2 > 0 \Rightarrow x^2 \neq -1 \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0$. Portanto, a equação dada não terá solução real.

Entretanto, se considerarmos que os entes envolvidos na equação forem matrizes de ordem 2×2 , e as operações, as mesmas aplicáveis a matrizes, é possível extrairmos conclusões úteis. Senão vejamos.

Façamos corresponder x a uma matriz X , de ordem 2×2 , isto é $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), e ao número 1, a matriz identidade de mesma ordem $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, a equação

$x^2 = -1$ poderia ser representada por $X^2 = -I$.

Antes de buscarmos as possíveis soluções para a equação matricial, notemos que a decisão de relacionar a cada número real a uma matriz aI mostra-se consistente, pois a soma e o produto de números reais levam a resultados que ainda podem ser representados na forma matricial.

De fato, pois a soma $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ fica associada à matriz $(a_1 + a_2)I$, e o produto $a_1 a_2 = a_2 a_1$, à matriz $a_1 a_2 I$. Assim, uma conclusão imediata neste ponto é que as matrizes aI se comportam exatamente da mesma forma que os números reais em relação à soma e ao produto. Constatado este fato, passemos à solução da equação matricial.

$$X^2 = -I \Rightarrow X \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A última igualdade entre matrizes permite montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 & (1) \\ ab + bd = 0 & (2) \\ ac + cd = 0 & (3) \\ bc + d^2 = -1 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (4) chegamos que $a^2 = d^2$ que implica $a = d$ (5) ou $a = -d$ (6). Analisemos, primeiro, a hipótese de (5) ser válida. Substituindo-a, pois, (5) no sistema, teremos $\begin{cases} ab = 0 & (7) \\ ac = 0 & (8) \end{cases}$.

De (7), temos que $a = 0$ (8) ou $b = 0$ (9). Se considerássemos possível (9), aplicando-a em (1), teríamos que $a^2 = -1$, o que é absurdo pois $a \in \mathbb{R}$. Logo, $a = 0$ e $b \neq 0$. Raciocínio análogo aplicado a (8), leva à conclusão equivalente, isto é $a = 0$ e $c \neq 0$.

Assim, valendo-nos de (1), (5) e (8), temos que $X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ (primeira solução matricial).

Analisemos, agora a possibilidade trazida em (6). Aplicando-a no sistema original, tem-se que $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ (segunda solução matricial). Notemos que a primeira solução matricial é um caso particular da segunda (quando $a = 0$).

A segunda solução matricial estabelece a existência de infinitas possibilidades para X . Com efeito, verdadeiro ponto de inflexão no raciocínio é apresentado pelo autor quando considera a possibilidade de X (já que infinitos exemplares de resolve $X^2 = -I$) ser uma matriz de rotação.

Sabe-se a matriz 2×2 da forma $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ representa uma transformação linear de rotação no \mathbb{R}^2 , onde “sen”, “cos” e “ θ ” representam, respectivamente as funções seno, cosseno

e o ângulo de rotação.

Resolvendo a equação $\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, temos que os elementos da diagonal principal devem ser iguais, logo $a = 0$ (levando à primeira solução matricial). Considerando que os elementos da diagonal secundária devem ser simétricos, temos que $\frac{-1}{b} = -b \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$. Por sua vez, quando $b = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, e quando $b = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$.

Portanto, considerando a convenção de que as rotações no círculo trigonométrico são positivas no sentido anti-horário, temos que as duas soluções representam rotações, sendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ de 90° no sentido anti-horário, e $\theta = -\frac{\pi}{2}$ de 90° no sentido horário.

Temos, até aqui, que a matriz $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (que representa uma rotação de 90° no sentido anti-horário no \mathbb{R}^2) é uma solução da equação $X^2 = -I$. A audácia genial do autor foi considerar a existência de “números” da forma $\alpha I + \beta X$.

Percebamos, de partida, que $\alpha I + \beta X$ é matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. A grande vantagem em cogitar “números” dessa forma é que, valendo-nos da álgebra matricial, chegamos naturalmente às regras de soma e produto de números complexos, bem como à conclusão de que existe um objeto matemático que, elevado ao quadrado, fornece -1 como resposta.

Outro ponto que merece destaque é que os “números” $\alpha I + \beta X$ podem representar os números reais. Basta considerar $\beta = 0$. Nesse caso, αI será designada *parte real* de $\alpha I + \beta X$. Por outro lado, se fizermos $\alpha = 0$, teremos exclusivamente a matriz βX , e como não existe uma representação real para βX , esta será a *parte imaginária* de $\alpha I + \beta X$.

Definamos, pois, a soma e o produto de “números complexos” $\alpha I + \beta X$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Considerando as regras válidas para matrizes (soma, produto, associatividade, comutatividade, distributividade), então teremos para a soma:

$$\begin{aligned} & (\alpha I + \beta X) + (\gamma I + \delta X) = \\ & = \alpha I + \underbrace{(\beta X + \gamma I)}_{\text{associatividade}} + \delta X = \\ & = \alpha I + \underbrace{(\gamma I + \beta X)}_{\text{comutatividade}} + \delta X = \\ & = \underbrace{(\alpha I + \gamma I)}_{\text{associatividade}} + \underbrace{(\beta X + \delta X)}_{\text{associatividade}} = \\ & = \underbrace{(\alpha + \gamma)I}_{\text{distributividade}} + \underbrace{(\beta + \delta)X}_{\text{distributividade}}. \end{aligned}$$

E para o produto:

$$\begin{aligned} & (\alpha I + \beta X) \cdot (\gamma I + \delta X) = \\ & = \underbrace{\alpha I \cdot (\gamma I + \delta X)}_{\text{distributividade}} + \underbrace{\beta X \cdot (\gamma I + \delta X)}_{\text{distributividade}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\alpha I \cdot \gamma I + \alpha I \cdot \delta X}_{\text{distributividade}} + \underbrace{\beta X \cdot \gamma I + \beta X \cdot \delta X}_{\text{distributividade}} = \\
&= \underbrace{\alpha \gamma I^2 + \alpha \delta I \cdot X + \beta \gamma X \cdot I + \beta \delta X^2}_{\text{comutatividade e produto}} = \\
&= \underbrace{\alpha \gamma I + \alpha \delta X + \beta \gamma X + \beta \delta (-I)}_{\substack{I^2=I, \text{ comutatividade}, X^2=-I}} = \\
&= \underbrace{\alpha \gamma I - \beta \delta I}_{\text{comutatividade}} + \underbrace{\alpha \delta X + \beta \gamma X}_{\text{comutatividade}} = \\
&= \underbrace{(\alpha \gamma - \beta \delta) I}_{\text{distributividade}} + \underbrace{(\alpha \delta + \beta \gamma) X}_{\text{distributividade}}
\end{aligned}$$

Portanto, valendo-se apenas do ferramental algébrico de matrizes, o autor oferece uma elegante definição para soma e produto de “números complexos”.

Ademais, aplicando-se a regra acima, constata-se sem esforço que o produto de $0I + 1X$ por ele mesmo leva ao resultado $-I$, associado, por sua vez, ao número -1 . De fato: $(0I + 1X)^2 = (0I + 1X) \cdot (0I + 1X) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1)I + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)X = (-1)I + (0)X = -I \rightarrow -1$.

b) \mathbb{C} é um corpo (p. 16).

Seja um conjunto \mathbb{K} onde estão definidas duas operações $(+, \cdot)$, denominadas adição e multiplicação. Se os elementos de \mathbb{K} abservarem a associativa, comutativa, e existência de elemento neutro para as duas operações, a de existência de elementos simétrico e inverso (para os elementos de $\mathbb{K} - \{0\}$), e, ainda a distributividade do produto em relação à adição, então \mathbb{K} será um corpo.

Os elementos de \mathbb{C} geralmente são apresentados com a forma $a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Outra forma de definir o mesmo conjunto é apresentar seus elementos como sendo pares ordenados (a, b) , e definir as operações de adição e multiplicação.

Partindo da validade da adição e do produto no conjunto dos \mathbb{R} , e dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$, define-se a adição por $+$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Por sua vez, a multiplicação é definida por \cdot : $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

A partir das duas operações acima no conjunto \mathbb{C} , provemos todas as propriedades na página 16.

A1) Associatividade da adição:

$$\begin{aligned}
&(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + ([c + e], [d + f]) = \\
&= (a + [c + e], b + [d + f]) = ([a + c] + e, [b + d] + f) = \\
&= ([a + c], [b + d]) + (e, f) = [(a, b) + (c, d)] + (e, f).
\end{aligned}$$

A2) Comutatividade da adição:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b).$$

A3) Elemento neutro da adição:

Existe o elemento $\mathbf{0} \in \mathbb{C}$ tal que $(a, b) + \mathbf{0} = (a, b)$. De fato, se $\mathbf{0} = (0, 0)$, tem-se que $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.

A4) Elemento simétrico:

Todo elemento $(a, b) \in \mathbb{C}$ possui um simétrico (z_1, z_2) em \mathbb{C} , tal que $(a, b) + (z_1, z_2) = (0, 0)$. De fato, $(z_1, z_2) = (-a, -b)$, pois $(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$.

M1) Associatividade da multiplicação:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] &= (a, b) \cdot [(ce - df, cf + de)] = \\ &= (a[ce - df] - b[cf + de], a[cf + de] + b[ce - df]) = \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) = \\ &= ([ac - bd]e - [ad + bc]f, [ac - bd]f + [ad + bc]e) = \\ &= ([ac - bd], [ad + bc]) \cdot (e, f) = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f). \end{aligned}$$

M2) Comutatividade da multiplicação:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b).$$

M3) Elemento neutro da multiplicação

Existe o elemento $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}$ tal que $(a, b) \cdot (w_1, w_2) = (a, b)$. De fato, se $(w_1, w_2) = (1, 0)$, tem-se que $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$.

M4) Elemento inverso:

Todo elemento $(a, b) \in \mathbb{C} - \{0\}$ possui um simétrico (k_1, k_2) em \mathbb{C} , tal que $(a, b) \cdot (k_1, k_2) = (1, 0)$.

De fato, $(k_1, k_2) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$, pois:

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{[-b]}{a^2+b^2}, a \cdot \frac{[-b]}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2} \right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{0}{a^2+b^2} \right) = (1, 0).$$

D1) Distributividade da multiplicação em relação à adição:

Dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$, vale a relação $(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$.

De fato:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) = \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) = \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) = \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) = \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f). \end{aligned}$$

b) 0 e 1 são elementos únicos de \mathbb{C} (p. 17)

Sabe-se que 0 é o elemento neutro da adição e 1, o do produto. Deseja-se demonstrar que são únicos em \mathbb{C} .

Da definição, sabe-se, ainda, que $x + 0 = x$ (1) e que $\exists (-x) \in \mathbb{C}$ tal que $x + (-x) = 0$. Suponhamos existisse outro elemento neutro da adição, digamos θ . Então, em situação análoga a (1), teríamos que $x + \theta = x$ (2). Porém, somando-se a ambos os membros de (2) o elemento $(-x)$, teremos: $x + \theta = x \Rightarrow (-x) + x + \theta = (-x) + x \Rightarrow \theta = 0$.

Raciocínio similar deve ser aplicado para se demonstrar que 1 é o único elemento neutro para o produto em \mathbb{C} . Inicialmente, da definição, sabe-se que $x \cdot 1 = x$ (3) e ainda que, dado $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists x^{-1}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$. Por absurdo, suponhamos que existe outro elemento, digamos κ , tal que $x \cdot \kappa = x$ (4), com $x \neq 0$. Então, multiplicando-se ambos os membros de (4) por x^{-1} , teremos: $x \cdot \kappa = x \Rightarrow x^{-1} \cdot x \cdot \kappa = x^{-1} \cdot x \Rightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot \kappa = (x^{-1} \cdot x) \Rightarrow (1) \cdot \kappa = 1 \Rightarrow (1 \cdot \kappa) = 1 \Rightarrow \kappa = 1$.

c) Propriedades do conjugado de $z \in \mathbb{C}$ (p. 17)

C1) $\bar{\bar{z}} = z$;

$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Se $\bar{z} = 0 \Rightarrow a - bi = 0 - 0i \Rightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow \bar{z} = 0$. Por outro lado, se $z = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i = 0 - 0i = \bar{z} \Rightarrow \bar{\bar{z}} = z$.

C2) $\overline{\bar{z}} = z$;

Seja $z = a + bi$ e $w = \bar{z}$. Então $\overline{\bar{z}} = \bar{w} = a - (-b)i = a + bi = z$

C3) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

Seja $z = a + bi$, então $\bar{z} = a - bi$. Se $z = \bar{z} \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = a \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

C4) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

Sejam $z = a + bi$, $w = c + di$ e $k = z + w$. Então, $k = z + w = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$. Por definição, $\overline{z + w} = \bar{k} = (a + c) - (b + d)i = a + c - bi - di = a - bi + c - di = \bar{z} + \bar{w}$. Como a propriedade vale para qualquer z e w , a demonstração para a subtração é atendida quando pensamos no lugar de w o seu simétrico, isto é, $-w$.

C5) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;

Sejam $z = a + bi$, $w = c + di$ e $k = z \cdot w$. Logo, $k = z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

Por definição:

$$\overline{z \cdot w} = \bar{k} = ac - bd - (ad + bc)i = ac - bd - adi - bci = ac - (-b)(-d) + a(-d)i + (-b)ci = ac - (-b)(-d) + [a(-d) + (-b)c]i = (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

C6) $z \neq 0 \Rightarrow \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$

Seja $z \neq 0$ e $z = a + bi$, então:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2} \Rightarrow \overline{z}^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+(-b)^2} - \frac{(-b)i}{a^2+(-b)^2} = \overline{z}^{-1}.$$

$$C7) z + \overline{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \text{ e } z - \overline{z} = 2 \cdot i \cdot \operatorname{Im}(z).$$

Se $z = a + bi$, por definição temos que $\overline{z} = a - bi$. Então:

$$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \text{ e } z - \overline{z} = a + bi - a + bi = 2bi = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$$

d) Propriedades do módulo de $z \in \mathbb{C}$ (p. 18)

$$M1) z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Por definição, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2.$$

$$M2) |z| = |\overline{z}| = |-z|$$

$$\underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{|z|} = \underbrace{\sqrt{a^2 + (-b)^2}}_{|\overline{z}|} = \underbrace{\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}}_{|-z|}.$$

$$M3) \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ e } \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

Da definição de módulo de número real, temos que $a \leq |a|$. Como $\operatorname{Re}(z) = a$, $|a| = |\operatorname{Re}(z)|$, então $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$. Por sua vez, $\operatorname{Re}(z) = a \leq |a| = \sqrt{|a|^2} = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. A demonstração para a parte imaginária é análoga.

$$M4) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{z \cdot w}) = (z \cdot w) \cdot (\overline{z} \cdot \overline{w}) = (z \cdot \overline{z}) \cdot (w \cdot \overline{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$

Logo, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

e) Proposição 1 (p. 20)

Proposição 1. Dados $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$, então $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$. E, caso de

$$z_2 \neq 0, \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Na primeira parte teremos: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) =$

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

Por sua vez, na segunda parte: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} =$

$$= \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{\rho_2(\cos^2 \theta_2 + i \sin^2 \theta_2)} = \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2))}{\rho_2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

f) Teorema 1 (p. 20)

Teorema 1. Dado o complexo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ e o inteiro n , tem-se que $z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$.

Provemos por indução para $n \in \mathbb{N}$.

Primeiro, o caso base $n = 1$ é trivial, pois $z^1 = \rho^1 \operatorname{cis}(1\theta) \Rightarrow z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$.

Suponhamos que a relação seja válida para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, onde $z^k = \rho^k \text{cis}(k\theta)$ (1). Multiplicando a equação (1) por $z = \rho \text{cis}(\theta)$ e aplicando o proposição 1 teremos: $z^k \cdot z = \rho^k \text{cis}(k\theta) \cdot \rho \text{cis}(\theta) \Rightarrow z^{k+1} = \rho^{k+1} \text{cis}((k+1)\theta)$. Portanto, a relação $z^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$ é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$.

Se o expoente for inteiro e negativo (digamos $-n$) para $z \neq 0$, teremos:

$$\begin{aligned} \text{Como } z = \rho \text{cis}(\theta) \text{ e } z \neq 0, \text{ então } z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos(-\theta) - i \sin(-\theta)}{1} = \rho^{-1} \text{cis}(-\theta) \Rightarrow z^{-1} = \rho^{-1} \text{cis}(-\theta) \quad (2). \end{aligned}$$

Aplicando a primeira parte demonstrada no teorema 1 à equação (2), teremos:

$z^{-n} = (z^{-1})^n = (\rho^{-1} \text{cis}(-\theta))^n = \rho^{-n} \text{cis}(-n\theta)$. Por fim, provemos que a relação vale para $n = 0$:

$$1 = \frac{z^n}{z^n} = z^{n-n} = z^0 = \rho^0 (\cos 0 + i \sin 0) = 1(1 + i \cdot 0) = 1.$$

Portanto, como a relação apresentada no enunciado vale tanto para inteiros positivos ($n > 0$), negativos ($-n < 0$) e para o 0, vale para todos os inteiros.

g) Teorema 2 (p. 20)

Teorema 2. *Dado o complexo não nulo $z = \rho \text{cis} \alpha$ e um natural $n \geq 2$, então existem n raízes n -ésimas de z que são da forma: $z_k = \sqrt[n]{\rho} \text{cis} \left[\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \right]$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq n-1$.*

A presente demonstração teve como referência o livro Tópicos de Matemática Elementar, Polinômios volume 6, de Antônio Caminha Muniz Neto (CAMINHA, 2016, p. 21).

Se $w = r \text{cis} \theta$, então:

$$w^n \Leftrightarrow (r \text{cis} \theta)^n = \rho \text{cis} \alpha \Leftrightarrow r^n \text{cis}(n\theta) = \rho \text{cis} \alpha \Leftrightarrow r^n = \rho \text{ e } n\theta = \alpha + 2k\pi, \exists k \in \mathbb{Z}.$$

Estas últimas duas igualdades ocorrem se, e só se, $r = \sqrt[n]{\rho}$ e $\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, haverá tantas raízes n -ésimas de z distintas quantos forem os números $\text{cis} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$ distintos. Mas é fácil ver que $\text{cis} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) = \text{cis} \left(\frac{\alpha + 2(k+n)\pi}{n} \right)$ e $\text{cis} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \neq \text{cis} \left(\frac{\alpha + 2l\pi}{n} \right)$ para $0 \leq k < l < n$, de maneira que basta considerarmos os inteiros k tais que $0 \leq k < n$.

APÊNDICE B – CURSOS DE APERFEIÇOAMENTO PARA OFICIAIS DO CORPO DA ARMADA

Solicitei informações ao Comando da Marinha pelo canal Fala.Br, uma plataforma integrada de ouvidoria e acesso à informação, a respeito dos cursos de aperfeiçoamento para Oficiais do Corpo da Armada, egressos da Escola Naval. Nos dias 17 de agosto e 17 de setembro de 2021, as perguntas foram respondidas. Segundo a MB, os cursos podem ser de caráter voluntário e obrigatório, e, em regra, apenas um deles é cursado e concluído pelo Oficial. De acordo com as informações prestadas, os cursos apresentados abaixo ao lado da sinopse de suas ementas:

OBRIGATÓRIOS

Cursos de Aperfeiçoamento em Armamento para Oficiais do (C-Ap-Arm): noções gerais de redes; princípios de óptica e sistemas optoeletrônicos; processamento digital de sinais; guerra eletrônica; radar em sensores de armas; introdução à tecnologia da informação; sistema de mísseis navais; alinhamento de sistemas de armas; radares de direção de tiro; e metodologia da pesquisa.

Cursos de Aperfeiçoamento em Comunicações para Oficiais do (C-Ap-Com) e em Eletrônica para Oficiais do (C-Ap-Elt): noções gerais de redes; administração de redes na MB; princípios de transmissão e comutação; procedimentos de comunicações navais; sistemas de guerra eletrônica; processamento digital de sinais; introdução à tecnologia da informação; e metodologia da pesquisa.

Cursos de Aperfeiçoamento em Máquinas para Oficiais do (C-Ap-Maq): administração de máquinas; planta de propulsão à turbina a gás; introdução à termodinâmica; máquinas térmicas; sistemas auxiliares; instrumentação e automação; planta elétrica; sistemas de navegação; noções gerais de rede; sistema de gerenciamento integrado de plataformas; monitoração de vibração na propulsão; e metodologia da pesquisa.

VOLUNTÁRIOS

Cursos de Aperfeiçoamento de Aviação para Oficiais (CAAVO): aeronaves na guerra naval; meteorologia; fenômenos de transporte nos fluidos; mecânica, aerodinâmica; propulsão; eletrônica de aviação; tráfego aéreo; navegação aérea; logística de suprimento de aviação; medicina de aviação; segurança de aviação; sobrevivência; excelência em gestão; trabalho de pesquisa bibliográfica; tática aeronaval; estágios e qualificações em asa rotativa e asa fixa.

Cursos de Aperfeiçoamento de Submarinos para Oficiais (CASO): plataforma; sistema de combate integrado; propulsão, força auxiliar e comunicações interiores; emprego operativo do submarino; fator humano na atividade de submarino; simuladores de submarino; e qualificação de oficiais em submarinos.

Cursos de Aperfeiçoamento de Mergulhador de Combate para Oficiais (CAMECO): processo de planejamento militar; liderança; fisiologia do mergulho; física do mergulho; tabela de descompressão; equipamento de mergulho autônomo em circuito aberto e trabalhos submersos; higiene de campanha e primeiros socorros; armamento; comunicações e optrônicos; orientação terrestre e náutica e montanhismo básico; equipamento de mergulho autônomo em circuito fechado; e disciplinas relacionadas ao emprego operativo do mergulhador de combate.

Cursos de Aperfeiçoamento de Hidrografia para Oficiais (CAHO): o currículo está disponível na referência MARINHA DO BRASIL (2010).

Cursos de Aperfeiçoamento de Engenharia (CA-EngNav): conforme referenciado (HONORATO, GUIMARÃES; 2018), o Oficial que se voluntaria para tal curso deixa o Corpo da Armada e ingressa no Corpo de Engenheiros da Marinha, e, por isso, não foi considerado na pesquisa.

Por razões de sigilo, a sinopse de cada curso foi apresentada sem detalhes. Nada obstante, ainda que um dos cursos acima (com exceção do CAHO) contivesse em sua carga horária algum(ns) tema(s) matemático(s), de acordo com as informações prestadas, o(s) tema(s) não seriam relevantes para o curso em questão.

Portanto, conforme se observa no corpo da Dissertação, é nítido que o CAHO materializa o Curso que detém a maior carga horária em Matemática.