

CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE FRATURA LINEAR ELÁSTICO BASEADO NUMA ESTRATÉGIA AUTO-ADAPTATIVA

T. Denyse de Araújo*, D. Roehl*, L.F. Martha* e T.N. Bittencourt†

* Departamento de Engenharia Civil
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea
CEP 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
e-mail: {denyse,droehl,lfm}@civ.puc-rio.br

† Departamento de Estruturas e Fundações e Laboratório de Mecânica Computacional
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP)
45000-023 - São Paulo - SP - Brazil
e-mail: tbitten@usp.br

Keywords: Adaptive Analysis, Fracture Mechanics, Finite Element, Error Estimation.

Abstract. *Several finite element adaptive strategies are available for linear-elastic problems. However, few works deal with adaptive analysis of fracture problems^{1,2,3,4}. This is due mainly to the singularity at crack tips. An efficient adaptive technique must be able to localize singularity regions, in addition to correctly define element sizes in these regions. The way the singularity is treated differs from author to author. Some^{2,4} incorporate the intensity of the singularity in the computation of the characteristic size of elements adjacent to the singularity region, while others³ claim that this is not necessary. In addition, in fracture problems, elements at the crack tip need to be sufficiently small to capture the existing singularity. Therefore, some requirements are imposed to the mesh generation algorithms such as to provide good mesh transition between regions of different element sizes and to avoid bad shaped elements at the crack tip. Previous work of the authors proposed mesh generation techniques for two-dimensional models with cracks⁵. This work describes the adopted adaptive strategy for linear-elastic fracture problems. This strategy is based on a type “h” refinement, with an ‘a posteriori’ error estimator, which is based on an energy norm⁴. To evaluate the proposed strategy, examples of numerical computation of fracture parameters are presented.*

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo de uma estratégia adaptativa é controlar o erro de discretização de um modelo discreto e aumentar a precisão das soluções da maneira mais econômica possível. Pode-se obter uma melhor precisão aumentando-se o número de elementos da malha, porém usando a mesma ordem de interpolação dos elementos (versão h); mantendo-se a malha original e aumentando-se a ordem do polinômio de interpolação dos elementos (versão p); ou, variando-se simultaneamente o tamanho e a ordem dos elementos (versão $h-p$). Destes, o refinamento h tem sido o mais utilizado, por não necessitar de uma vasta biblioteca de elementos finitos como no refinamento p e por tirar partido da simplicidade de elementos de baixa ordem (número de graus de liberdade e ordem de integração).

Estimadores de erro, *a priori* e *a posteriori*, baseados nas quantidades integradas, tornam-se necessários no processo adaptativo, principalmente se houver geração automática de malhas. O estimador de erro *a priori* é baseado no conhecimento das propriedades das soluções e das propriedades de aproximação dos métodos discretos. O conhecimento antecipado do erro proporciona informações qualitativas sobre a magnitude do erro e sobre o modo de convergência das soluções, quando o tamanho dos elementos da malha tende a zero. As informações sobre o erro atual, no entanto, não estão disponíveis durante o processo de análise. O estimador de erro *a posteriori* é baseado nas informações obtidas durante o processo de solução. As estimativas de erro podem ser feitas para cada elemento ou para a malha globalmente. Este último estimador é o mais utilizado na prática.

Para que uma técnica adaptativa seja dita eficiente, ela deve ser capaz de localizar exatamente as regiões de concentração de tensões, ou de singularidade, além de definir corretamente o tamanho dos elementos nestas regiões. Poucos trabalhos são encontrados na literatura que se utilizam destas técnicas em problemas de fratura. O refinamento preferido de alguns autores é a versão $h-p$ ^{1,4} ou versão h ^{2,3,6,7}. A maneira de tratar a singularidade difere também em alguns trabalhos. Zienkiewicz e Zhu⁴ e Coorevits *et al.*² consideram a intensidade de singularidade no cálculo do tamanho característico dos elementos adjacentes à esta região. Contudo, Lee e Bathe⁸ recomendam excluir os elementos destas regiões do cálculo do erro, pois podem apresentar valores relativamente altos. Já Liebowitz *et al.*³ acreditam que se a nova malha é gerada de tal maneira que o erro estimado é igualmente distribuído em cada elemento, a malha é dita 'ótima' e a influência da singularidade é eliminada, ou seja, não é necessário considerar a intensidade de singularidade na análise.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma estratégia auto-adaptativa confiável, robusta e eficiente para processos de fraturamento estrutural em material elástico linear, bidimensional, que considere, adequadamente, os atributos físicos e geométricos do modelo.

A estratégia adaptativa baseia-se em um estimador de erro *a posteriori* com refinamento h . Nela, o modelo é analisado em um único passo e o processo é repetido até que um critério de convergência para o erro de discretização seja atendido. Um sistema computacional gráfico interativo⁹ é usado para introduzir a trinca no modelo e gerar a malha. A geração da malha é baseada nas técnicas de enumeração espacial recursiva, que consiste de uma partição em árvore binária (*binary tree*) para as curvas do contorno, incluindo as curvas das trincas, e uma partição em árvore quaternária (*quadtree*) para a geração da malha no domínio. Nesta última,

as vantagens do algoritmo baseado na técnica da *quadtrees* são combinadas com a técnica de triangulação por contração do contorno, a qual é baseada nas propriedades de Delaunay. Uma triangulação baseada em padrões aplicados às células da *quadtrees* é utilizada em todo o domínio, exceto na estreita região próxima ao contorno, onde a triangulação por contração de contorno é usada. Para assegurar a geração de elementos bem formados nas pontas das trincas, uma roseta uniforme de elementos triangulares, T6 ou *quarter-points*¹⁰ é inserida em torno de cada ponta da trinca. Contudo, neste trabalho, somente a roseta de elementos *quarter-points* é estudada.

2 ESTIMADOR DE ERRO

O estimador de erro empregado, neste trabalho, é o proposto por Zienkiewicz e Zhu⁴. Este estimador considera o erro na norma de energia tal que

$$\|e\|^2 = \sum_E \|e_E\|^2 \quad (1)$$

Com

$$\|e_E\|^2 = \int_{W_E} (\mathbf{s}^h - \mathbf{s}^*)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{s}^h - \mathbf{s}^*) dW_E \quad (2)$$

onde $\|e\|$ é o erro absoluto total da discretização, $\|e_E\|$ é o erro absoluto do elemento E , W_E é o subdomínio do elemento E , \mathbf{C} é a matriz constitutiva elástica e \mathbf{s}^h são as tensões provenientes da análise de elementos finitos. As tensões suavizadas, \mathbf{s}^* , tidas como as ‘soluções exatas’ do problema, são suavizadas para os nós do elemento pelo método superconvergente¹¹. Assim, as tensões suavizadas \mathbf{s}_{ij}^* em um determinado ponto do elemento são obtidas por interpolação:

$$\mathbf{s}_{ij}^* = \sum_k N_k(r, s) (\hat{\mathbf{s}}_{ij}^*)_k \quad (3)$$

onde as funções de interpolação $N_k(r, s)$ são aquelas usadas para os deslocamentos, r e s são as coordenadas paramétricas dos pontos de Gauss, k é o número do nó do elemento e $(\hat{\mathbf{s}}_{ij}^*)_k$ são as tensões suavizadas no nó k .

Os erros como descritos pelas equações (1) e (2), contudo, não são convenientes para cálculos práticos, pois têm dimensão de energia. Os erros relativos são mais favoráveis por serem adimensionais. Então, o erro relativo do elemento \mathbf{h}_E é calculado dividindo o erro absoluto do elemento por uma norma de energia corrigida pelo erro nesta norma, ou seja,

$$\mathbf{h}_E = \frac{\|e_E\|}{\sqrt{\|u^h\|^2 + \|e\|^2}} \quad (4)$$

em que

$$\|u^h\|^2 = \int_W \mathbf{s}^h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}^h dW \quad (5)$$

é a norma de energia. Um erro relativo global \mathbf{h} é definido, segundo a equação (1), tal que

$$\mathbf{h}^2 = \sum_E (\mathbf{h}_E)^2 \quad (6)$$

Desta forma obtém-se que

$$\mathbf{h} = \frac{\|e\|}{\sqrt{\|u^h\|^2 + \|e\|^2}} \quad (7)$$

3 ESTRATÉGIA DE REFINAMENTO

O procedimento de refinamento da malha é feito de uma forma padrão com o objetivo de alcançar uma distribuição uniforme do erro entre os elementos¹². Além disso, deseja-se que o erro relativo global esteja abaixo de um limite predefinido, ou seja,

$$\mathbf{h} \leq \mathbf{h}^* \quad (8)$$

Sendo assim, um erro relativo admissível $\bar{\mathbf{h}}$ é estabelecido para cada elemento, supondo-se que este seja igual em todos os elementos da malha. Então, substituindo nas equações (6) e (8) tem-se que

$$\mathbf{h} = \sqrt{m \bar{\mathbf{h}}^2} = \mathbf{h}^* \quad (9)$$

onde m é o número de elementos da malha e \mathbf{h}^* é o erro definido pelo usuário. Desta relação obtém-se o erro relativo admissível, o qual é dado por:

$$\bar{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}^*}{\sqrt{m}} \quad (10)$$

O novo tamanho do elemento é então previsto de acordo com a taxa de convergência do erro. Esta convergência está relacionada ao tamanho do elemento h por

$$e = O(h^q) \text{ com } q = \text{menor}(\mathbf{I}, p) \quad (11)$$

onde p é a ordem do polinômio de interpolação usada para descrever o elemento e λ é a intensidade de singularidade. Segundo Zienkiewicz e Zhu⁴, λ deve ser inferior a 0,5 no caso de trincas. Coorevits *et al.*² consideram 0,52 um valor satisfatório, enquanto Sandhu e Liebowitz⁶ observam que a influência da singularidade é eliminada se a malha gerada é dita ‘ótima’. Neste trabalho, é considerado o valor de 0,5 para λ , para qualquer tipo de elemento presente em torno da ponta da trinca.

Então, a razão do tamanho do elemento está relacionada a uma razão de erro por

$$\frac{h_O^E}{h_N^E} = \mathbf{z}_E^{1/p}, \quad (12)$$

para elementos não adjacentes às singularidades, e por

$$\frac{h_O^E}{h_N^E} = \mathbf{z}_E^{1/l}, \quad (13)$$

para elementos adjacentes às singularidades. Os índices N e O correspondem ao novo (*new*) e ao antigo (*old*) tamanho do elemento E , respectivamente. \mathbf{z}_E é a razão de erro do elemento E , definida por:

$$\mathbf{z}_E = \frac{\mathbf{h}_E}{\bar{\mathbf{h}}} \quad (14)$$

Então, o refinamento da malha é orientado pelo tamanho característico de cada elemento, predito de acordo com a razão de erro e o grau da função de interpolação do elemento, ou da intensidade de singularidade se trincas estão presentes no modelo. Desta forma, refinam-se ($\mathbf{z}_E > 1$) as regiões onde uma malha mais discretizada é necessária, e desrefinam-se ($\mathbf{z}_E < 1$) as áreas onde uma discretização mais grosseira é aconselhável.

4 CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE FRATURA

Os fatores de intensidade de tensão são calculados por três métodos diferentes. A Técnica de Correlação dos Deslocamentos¹³ (TCD) é usada quando elementos singulares estão presentes na ponta da trinca; o Método de Fechamento da Trinca Modificado (FTM), proposto por Rybicki e Kannin¹⁴ e Raju¹⁵, é empregado para vários tipos de elementos, incluindo os elementos singulares *quarter-points*; e a integral J que é calculada pelo Método da Integral de Domínio Equivalente¹⁶ (IDE).

4.1 Técnica de Correlação dos Deslocamentos

Esta técnica correlaciona os deslocamentos em determinados pontos nodais da trinca, obtidos pela análise de elementos finitos, com as soluções analíticas¹⁷ a fim de que os fatores de intensidade de tensão sejam obtidos. Então, os fatores de intensidade de tensão para os Modos I e II são, respectivamente:

$$\begin{aligned} K_I &= \left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k} + 1} \right) \sqrt{\frac{2\mathbf{p}}{L}} (4v_{j-1} - v_{j-2}) \\ K_{II} &= \left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k} + 1} \right) \sqrt{\frac{2\mathbf{p}}{L}} (4u_{j-1} - u_{j-2}) \end{aligned} \quad (15)$$

onde m é o módulo de cisalhamento, $k = 3 - 4n$ para o estado de deformação plana e $k = 3 - n/1 + n$ para o estado de tensão plana, n é o coeficiente de Poisson, r é a distância da ponta da trinca a um ponto qualquer do corpo, L é o tamanho do elemento, v_{j-1} e v_{j-2} são os deslocamentos relativos na direção do eixo local y , nos nós $j-1$ e $j-2$ (Figura 1), u_{j-1} e u_{j-2} são os deslocamentos relativos na direção do eixo local x , nos nós $j-1$ e $j-2$ (Figura 1).

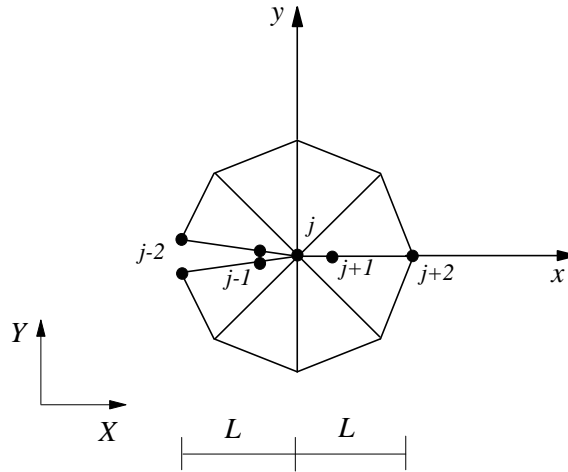


Figura 1. Elementos singulares na ponta da trinca.

4.2 Método de Fechamento da Trinca Modificado

Este método é baseado no conceito de Irwin¹⁷. Este conceito supõe que, no Modo I de carregamento, quando uma trinca propaga de a para $a+da$, sendo da infinitesimal, o deslocamento de abertura da nova ponta da trinca é aproximadamente igual ao deslocamento da ponta da trinca original. Então, o trabalho necessário para aumentar a trinca de a para $a+da$ é o mesmo necessário para fechá-la de $a+da$ para a (Figura 2). Neste caso, a taxa de liberação de energia é obtida, para os Modos I e II, pelas seguintes expressões:

$$G_I = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{1}{2da} \int_0^{da} v(r) \mathbf{s}_y(r) dr \quad (16)$$

$$G_{II} = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{1}{2da} \int_0^{da} u(r) \mathbf{s}_{xy}(r) dr$$

onde da é o acréscimo virtual da trinca, \mathbf{s}_y e \mathbf{s}_{xy} são as tensões normal e de cisalhamento na frente da ponta da trinca; $v(r)$ e $u(r)$ são os deslocamentos de abertura e de cisalhamento em uma distância r atrás da nova ponta da trinca.

Raju¹⁵ baseou este método nas seguintes suposições: simetria dos elementos em torno dos planos da trinca; as distribuições de tensões obedecem a distribuição clássica ($1/\sqrt{r}$) e os

deslocamentos, $u(r)$ e $v(r)$, são determinados pelas funções de forma dos elementos. Então, as tensões são determinadas das forças equivalentes nodais na ponta da trinca e na frente dela. Portanto, somente os elementos que estão em torno da ponta da trinca são usados para determiná-las. Com os valores das tensões e dos deslocamentos provenientes da análise de elementos finitos, calcula-se G substituindo-os na equação (16). É importante dizer que tanto as forças, quanto os deslocamentos, devem estar no sistema local de coordenadas da trinca (x,y) .

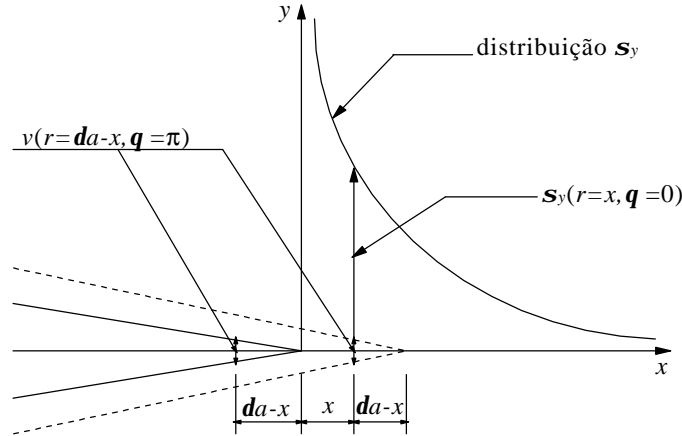


Figura 2. Conceito de Irwin

As expressões para G são diferentes para cada tipo de elemento. Para o elemento singular QP, Raju propõe dois tipos de fórmulas: a fórmula consistente, que usa três forças no elemento, e a fórmula simplificada, que usa somente duas forças no elemento. Ele mostrou que as fórmulas simplificadas são mais fáceis de trabalhar e apresentam resultados mais exatos do que as fórmulas consistentes.

As fórmulas simplificadas, para o Modo I puro, Modo II puro e condições de modo misto de carregamento, são dadas por:

$$G_I = -\frac{1}{2da} \left[F_{y_i} \{t_{11}(v_m - v_{m'}) + t_{12}(v_l - v_{l'})\} + F_{y_j} \{t_{21}(v_m - v_{m'}) + t_{22}(v_l - v_{l'})\} \right] \quad (17)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2da} \left[F_{x_i} \{t_{11}(u_m - u_{m'}) + t_{12}(u_l - u_{l'})\} + F_{x_j} \{t_{21}(u_m - u_{m'}) + t_{22}(u_l - u_{l'})\} \right]$$

onde $t_{11} = 6 - 3\frac{p}{2}$; $t_{12} = 6p - 20$; $t_{21} = \frac{1}{2}$; $t_{22} = 1$. F_{x_i} , F_{x_j} , F_{y_i} e F_{y_j} são as forças nodais equivalentes atuando nos nós i e j nas direções x e y , respectivamente; u e v são os deslocamentos nodais nos nós m , m' , l e l' nas direções x e y , respectivamente. Os nós e as forças nodais, na direção y , para este elemento, estão mostradas na Figura 3.

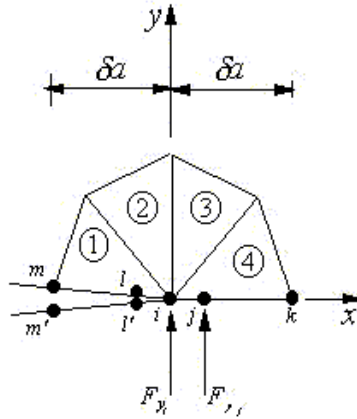


Figura 3. Idealização de elementos finitos para o elemento singular QP.

As forças no nó i , F_{x_i} e F_{y_i} , são a soma das contribuições dos elementos 1, 2, 3 e 4, enquanto que as forças no nó j , F_{x_j} e F_{y_j} , utilizam apenas a contribuição do elemento 4.

Em uma análise elástica linear, os fatores de intensidade de tensão estão relacionados às taxas de liberação de energia pelas seguintes expressões:

$$G_I = \frac{k+1}{8m} K_I^2 \quad (18)$$

$$G_{II} = \frac{k+1}{8m} K_{II}^2$$

4.3 Método da Integral de Domínio Equivalente

A integral J foi introduzida por Rice¹⁸ para estudar o comportamento de materiais não lineares, dentro da condição de “pequeno escoamento”. É uma integral de caminho independente definida como:

$$J = \int_C \left[W n_1 - \mathbf{s}_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] ds \quad (19)$$

onde W é a densidade de energia de deformação que é dada por:

$$W = \int \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij}; \quad (20)$$

C é qualquer caminho que começa na face inferior da trinca, envolve a ponta da trinca e termina na face superior (Figura 4a); \mathbf{s}_{ij} é o tensor das tensões; u_i são os deslocamentos no

eixo local i ; s é o comprimento de arco ao longo do contorno de integração; n_j corresponde à componente normal ao contorno C .

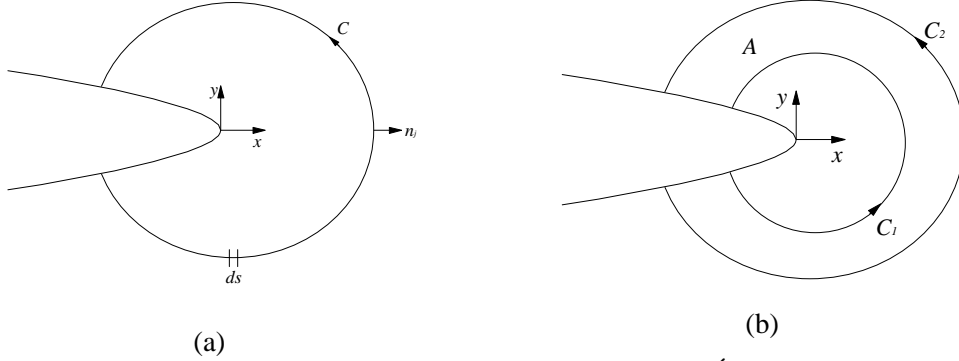


Figura 4. (a) Contorno arbitrário envolvendo a ponta da trinca; (b) Área a ser empregada no cálculo da integral J .

O método da integral de domínio equivalente transforma a integral de contorno em uma integral de domínio finito pelo teorema da divergência. Em modelos de elementos finitos, este método é mais conveniente, pois é mais fácil avaliar uma integral de domínio do que uma integral de linha. Para problemas bidimensionais, a integral de linha é substituída por uma integral de área, cujo contorno C_1 é substituído pela área anular A mostrada na Figura 4b. Uma função contínua, q , em A é empregada tal que seu valor é unitário sobre o contorno C_1 e nulo no contorno C_2 . Então, a integral J como definida na equação (19) é reescrita como

$$J = - \int_A \left[W \frac{\partial q}{\partial x} - \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} \right] dA - \int_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{s}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] \right\} q dA - \int_s t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} q ds \quad (21)$$

onde t_i é a força de superfície nas faces da trinca e ds é uma integral de linha. O terceiro termo desta equação desaparece se as faces da trinca não estiverem carregadas, ou se $q = 0$ nos trechos carregados. Para o caso de materiais elásticos, o segundo termo desta equação é nulo.

A definição da integral J considera um balanço de energia mecânica somente para uma translação local da frente da trinca na direção x (Modo I). Isto quer dizer que se um corpo trincado está submetido a qualquer um dos modos de carregamento puro, o valor resultante da integral J - equação (21) - permite que qualquer um dos fatores de intensidade de tensão sejam calculados. Contudo, se o corpo trincado está submetido a um carregamento combinado, o valor da integral J , sozinha, não permite que estes fatores sejam calculados separadamente. Neste caso, as integrais invariantes são usadas. Usualmente, as integrais definidas por Knowles e Sternberg¹⁹ são empregadas:

$$J_k = - \int_A \left[W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] dA - \int_A \left[\frac{\partial W}{\partial x_k} - \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] q dA - \int_s t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q ds \quad (22)$$

onde k corresponde à direção de um dos eixos coordenados locais (x, y) . Estas integrais têm sido utilizadas para pequenas deformações¹⁸ e foram generalizadas por Atluri²⁰ para deformações finitas. Então, os campos de deslocamentos e tensões são decompostos em partes simétricas e antissimétricas, como proposto por Bui²¹.

Os deslocamentos podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} u &= u^I + u^{II} = \frac{1}{2}(u + u') + \frac{1}{2}(u - u') \\ v &= v^I + v^{II} = \frac{1}{2}(v - v') + \frac{1}{2}(v + v') \end{aligned} \quad (23)$$

onde u e v são os deslocamentos nas direções x e y , respectivamente; $u'(x, y) = u(x, -y)$ e $v'(x, y) = v(x, -y)$. Os sobrescritos I e II, nos deslocamentos u e v , indicam os campos associados correspondentes às partes simétricas e antissimétricas dos deslocamentos, respectivamente.

As tensões são assim divididas:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{xx} &= \mathbf{s}_{xx}^I + \mathbf{s}_{xx}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xx} + \mathbf{s}'_{xx}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xx} - \mathbf{s}'_{xx}) \\ \mathbf{s}_{yy} &= \mathbf{s}_{yy}^I + \mathbf{s}_{yy}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{yy} + \mathbf{s}'_{yy}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{yy} - \mathbf{s}'_{yy}) \\ \mathbf{s}_{zz} &= \mathbf{s}_{zz}^I + \mathbf{s}_{zz}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{zz} + \mathbf{s}'_{zz}) \\ \mathbf{s}_{xy} &= \mathbf{s}_{xy}^I + \mathbf{s}_{xy}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xy} - \mathbf{s}'_{xy}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xy} + \mathbf{s}'_{xy}) \end{aligned} \quad (24)$$

onde $\mathbf{s}'_{ij}(x, y) = \mathbf{s}_{ij}(x, -y)$ e $\mathbf{s}_{zz}^{II} = 0$.

As novas integrais J_I e J_{II} têm, agora, a seguinte propriedade:

$$J = J_I + J_{II} \quad (25)$$

onde J_I é a integral associada aos campos simétricos (Modo I) e J_{II} , aos campos antissimétricos (Modo II). J é igual à taxa de liberação de energia e suas componentes, J_I e J_{II} , estão relacionadas aos fatores de intensidade de tensão pela equação (18).

5 EXEMPLO

Uma placa com uma trinca central inclinada é utilizada na avaliação da estratégia auto-adaptativa aqui proposta. A placa tem as seguintes dimensões: largura e altura $W = 254$ mm, comprimento da trinca $a = 25,4$ mm e espessura $B = 25,4$ mm (Figura 5a). O módulo de Young é igual a 6895 Mpa e coeficiente de Poisson igual a 0,3, em estado de tensão plana.

As respostas são comparadas com as soluções analíticas, que são conhecidas e dadas por:

$$\begin{aligned} K_I &= \mathbf{s} \sin^2 \mathbf{b} \sqrt{pa} \\ K_{II} &= \mathbf{s} \sin \mathbf{b} \cos \mathbf{b} \sqrt{pa} \end{aligned} \quad (26)$$

onde \mathbf{s} é a tensão aplicada e \mathbf{b} é o ângulo da trinca. A variação deste ângulo possibilita avaliar vários níveis de carregamento de modo misto, sendo \mathbf{b} igual a 90° , 60° , 45° e 20° .

A análise auto-adaptativa é feita para cada inclinação de trinca, cujas malhas iniciais estão mostradas na Figura 5. A roseta em torno da ponta da trinca é formada pelos elementos singulares *quarter-points*. A tolerância, definida como critério de parada da análise, é 3% para \mathbf{b} igual a 90° e 60° , 2% para \mathbf{b} igual a 45° e 1,4% para \mathbf{b} igual a 20° .

Dois tipos de análise são realizadas: a primeira considera a intensidade de singularidade $I = 0,5$ para o cálculo do tamanho característico dos elementos adjacentes à singularidade na ponta da trinca; a segunda, leva em consideração a ordem de interpolação dos elementos adjacentes à singularidade.

Cada configuração de trinca necessita apenas de um passo de adaptação para obter uma malha otimizada, nas duas análises. Os erros relativos na norma de energia são bastante reduzidos na malha final (Tabela 1), sendo que os da segunda análise ($p = 2,0$) são, aproximadamente, duas vezes os da primeira análise ($I = 0,5$). Isto acontece porque a primeira análise refina muito mais os modelos do que a segunda, como se pode ver na Figura 6. Contudo, ambas as análises capturam as singularidades das pontas da trinca, refinando e desrefinando a malha onde necessário.

		$I = 0,5$	$p = 2,0$
\mathbf{b}	h da malha inicial	h da malha final	h da malha final
90°	3,03%	0,60%	1,20%
60°	3,12%	0,50%	1,16%
45°	2,72%	0,37%	1,00%
20°	1,48%	0,22%	0,57%

Tabela 1. Erros relativos na norma de energia para as duas análises adaptativas e cada configuração de trinca.

A distribuição do erro na norma de energia, através dos elementos das malhas, é mostrada na Figura 7. Nota-se que a segunda análise ($p = 2,0$) distribui mais uniformemente o erro entre os elementos do que a primeira análise ($I = 0,5$), sendo que os valores mais altos da escala correspondem aos elementos adjacentes às pontas da trinca.

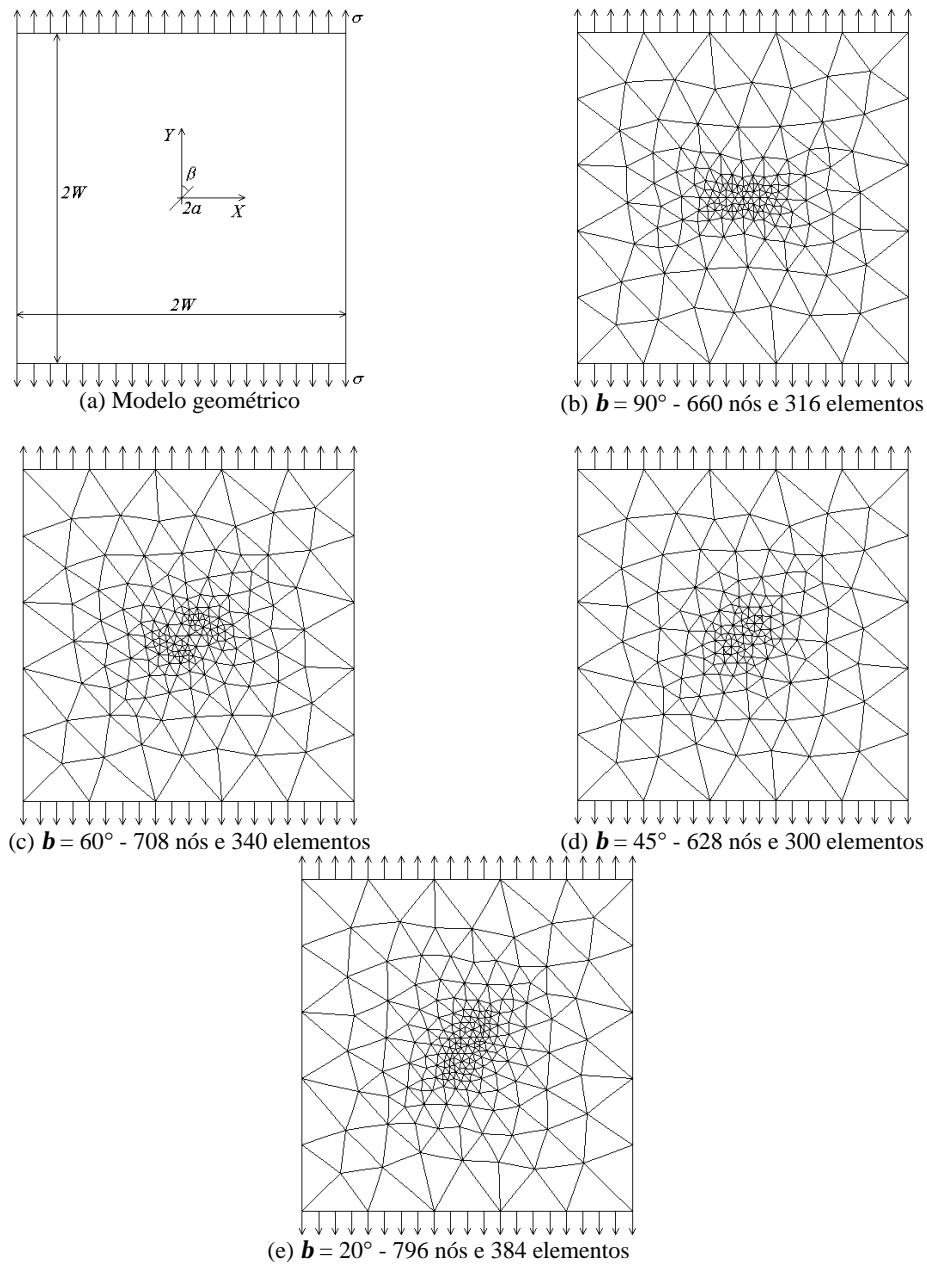


Figura 5. Malhas iniciais da placa com trinca central com vários ângulos de inclinação.

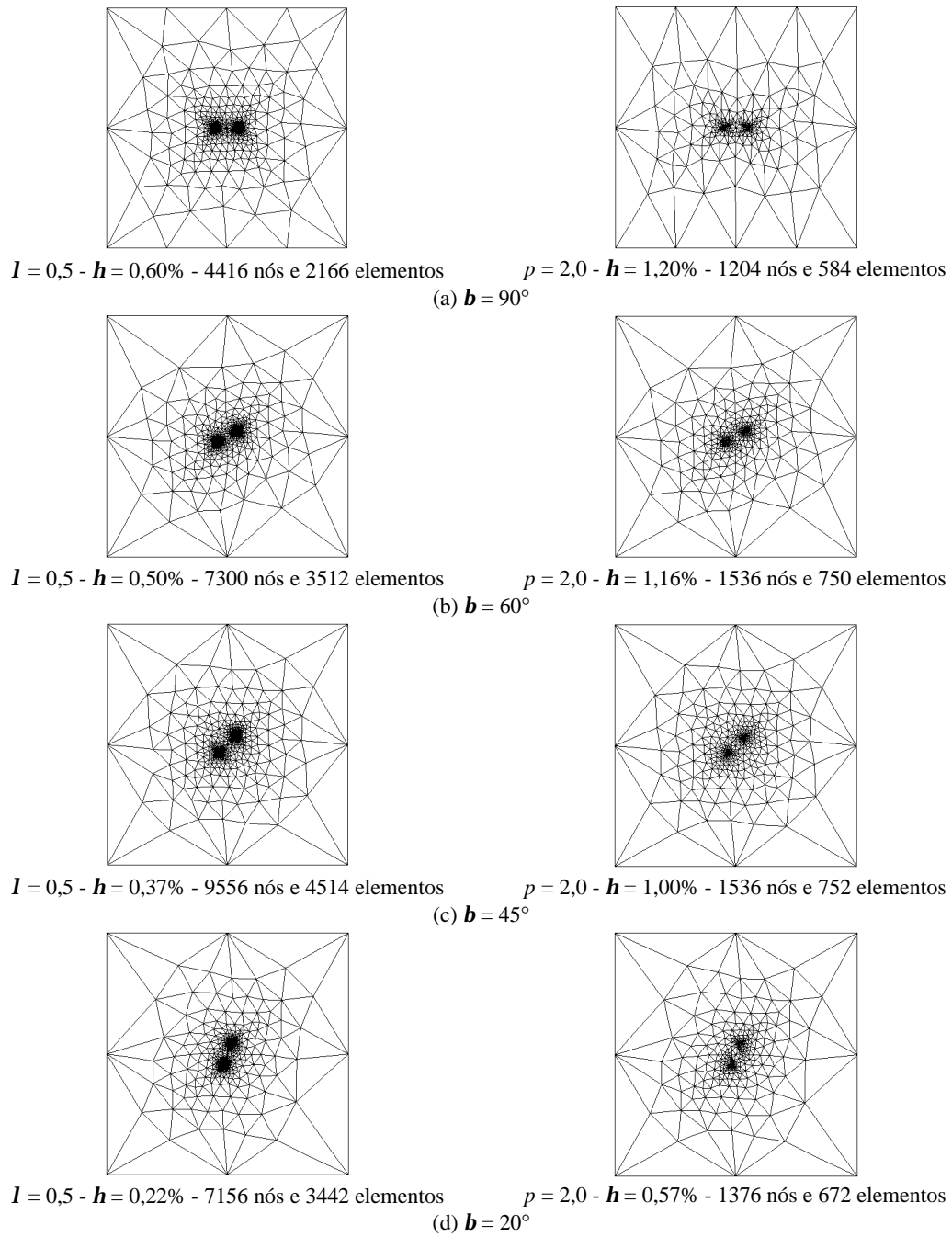


Figura 6. Malhas finais da análise auto-adaptativa para as configurações de trinca da placa.

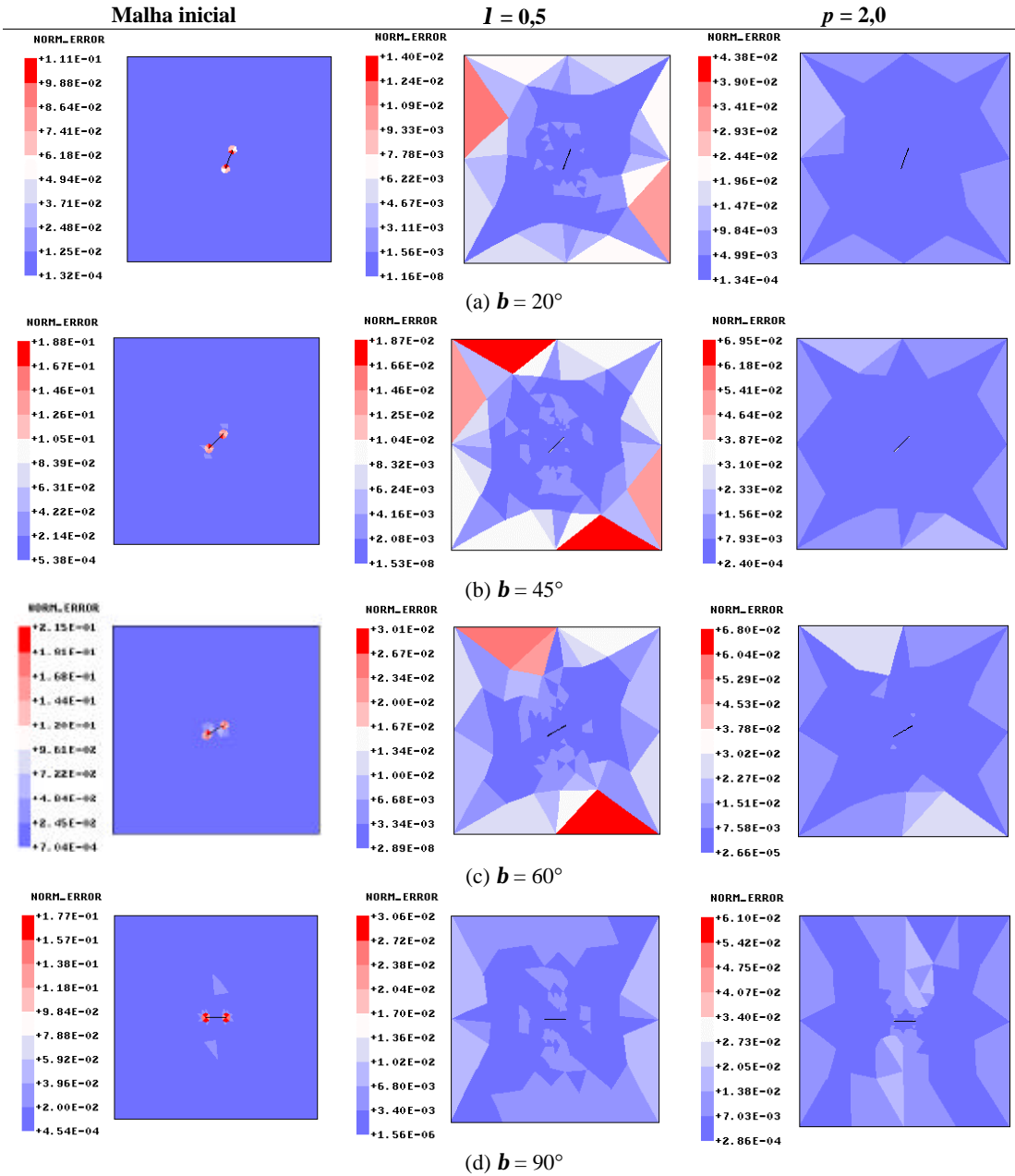


Figura 7. Distribuição do erro na norma de energia, para cada análise e cada configuração de trinca.

Os fatores de intensidade de tensão, obtidos pelas duas análises, proporcionam valores muito próximos entre si, nos três métodos de cálculo (Tabela 2 e Tabela 3). Estes valores aproximam-se dos valores teóricos com pequenas margens de erro. Na adaptação com $I = 0,5$, o maior erro está em torno de 3,5% para K_I e 0,8% para K_{II} , no método FTM; 4,9% para K_I e 1,2% para K_{II} , no método IDE. Contudo, o método TCD apresenta um erro de 15% em K_I para $\beta = 20^\circ$, enquanto que para as outras inclinações de trinca, os erros estão abaixo de 2,5%. Já para K_{II} , o maior erro está em torno de 6,3%. Na adaptação com $p = 2,0$, o maior erro está em torno de 0,9% para K_I e 0,7% para K_{II} , no método FTM; 2,2% para K_I e 1,3% para K_{II} , no método IDE. Já o método TCD apresenta o maior erro em torno de 4% para K_I e 2,2% para K_{II} .

β	Teóricos	$\lambda = 0,5$			$p = 2,0$		
		TCD	FTM	IDE	TCD	FTM	IDE
90°	19,47	19,67	19,69	19,74	19,89	19,65	19,78
60°	14,60	14,80	14,76	14,83	14,86	14,72	14,81
45°	9,74	9,98	10,00	10,02	9,90	9,81	9,87
20°	2,27	2,61	2,35	2,38	2,36	2,29	2,32

Tabela 2. Resultados de K_I ($\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$).

β	Teóricos	$\lambda = 0,5$			$p = 2,0$		
		TCD	FTM	IDE	TCD	FTM	IDE
90°	0,00	-0,01	0,01	0,02	0,00	-0,01	-0,04
60°	8,43	8,23	8,50	8,53	8,28	8,49	8,54
45°	9,74	9,13	9,76	9,68	9,53	9,78	9,84
20°	6,26	5,98	6,26	6,24	6,15	6,27	6,33

Tabela 3. Resultados de K_{II} ($\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$).

Observa-se, portanto, que os erros no cálculo dos fatores de intensidade de tensão em relação aos valores de referência são menores para o segundo processo adaptativo ($p = 2,0$) do que para o primeiro ($I = 0,5$). Esta diferença pode ser proveniente de problemas numéricos acarretados por elementos mal formados em torno da trinca e da roseta. Se comparados com os obtidos com a malha inicial, sem adaptação²² (Tabela 4), verifica-se que os erros tendem a diminuir para o método TCD, tanto para K_I quanto para K_{II} . No entanto, no método FTM, os erros são majorados para K_I e diminuem para K_{II} . Na verdade, este método, segundo o próprio Raju¹⁵, não necessita de malhas tão refinadas na ponta da trinca para obter soluções exatas, principalmente, quando os elementos singulares são usados. Já no método IDE, os erros permanecem na mesma ordem de grandeza tanto para K_I quanto para K_{II} , portanto, não fazendo diferença o grau de discretização da malha.

	$K_I (MPa\sqrt{m})$				$K_{II} (MPa\sqrt{m})$			
	<i>Teóricos</i>	<i>DCT</i>	<i>MCCI</i>	<i>EDI</i>	<i>Teóricos</i>	<i>DCT</i>	<i>MCCI</i>	<i>EDI</i>
$\beta = 90^\circ$	19,47	21,11	19,41	19,77	0,00	-0,01	-0,00	0,02
$\beta = 60^\circ$	14,60	15,98	14,54	14,85	8,43	8,72	8,30	8,52
$\beta = 45^\circ$	9,74	10,55	9,70	9,86	9,74	10,04	9,61	9,84
$\beta = 20^\circ$	2,27	2,47	2,26	2,31	6,26	6,46	6,17	6,32

Tabela 4. Resultados de K_I e K_{II} na malha inicial, sem auto-adaptação.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho propõe um sistema auto-adaptativo para análise de elementos finitos de problemas de fraturamento linear, bidimensional, com modo misto de carregamento.

A principal vantagem de qualquer processo adaptativo é iniciar a análise de um modelo, trincado ou não, com uma malha inicial grosseira e, através dos vários passos adaptativos, segundo um critério de erro estabelecido, obter automaticamente uma malha final ‘ótima’ cujas soluções aproximam-se dos valores exatos. O exemplo apresentado mostra a eficiência do processo auto-adaptativo em refinar e desrefinar o domínio, ressaltando-se, principalmente, sua capacidade em localizar as regiões de concentração de tensões (singularidade), as quais não são identificadas *a priori*. Estas regiões concentram-se nas pontas das trincas e são capturadas eficientemente, mesmo quando as rosetas de elementos singulares estão presentes. Estes elementos não têm sido considerados por outros autores^{1,2,3,4}. A afirmativa de Liebowitz *et al.*³ de que esta singularidade não interfere no processo, quando a malha é dita ‘ótima’, é comprovada. Neste trabalho, esta assertiva é estendida aos elementos *quarter-points*. Contudo, as malhas finais, obtidas quando a análise considera a intensidade da singularidade (I), apresentam um maior grau de refinamento do que as malhas obtidas considerando p . Com isso, a primeira análise necessita de menos iterações no processo adaptativo.

O erro final na norma de energia, obtido considerando I , é bem mais reduzido do que o obtido quando p é considerado. Apesar disso, os valores calculados para os parâmetros de fraturamento deste último são bem melhores do que os do primeiro. O gerador de malha, no entanto, não gera elementos bem formados na ponta da trinca, acarretando, com isso, problemas numéricos na análise. O método FTM não necessita de malhas tão refinadas para obter os fatores de intensidade de tensão quando rosetas de elementos singulares estão presentes nas pontas das trincas, confirmando assim as observações feitas por Raju¹⁵.

REFERENCES

- [1] B. Andersson, U. Falk, I. Babuška and T. von Petersdorff, “Reliable Stress and Fracture Mechanics Analysis of Complex Components Using a h - p Version of FEM”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 2135-2163, (1995).

- [2] P. Coorevits, P. Ladevèze and J.P. Pelle, “An Automatic Procedure with a Control of Accuracy for Finite Element Analysis in 2D Elasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **121**, 91-120, (1995).
- [3] H. Liebowitz, J.S. Sandhu, F.C.M. Menandro and J.D. Lee, “Smart Computational Fracture of Materials and Structures”, *Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selected Papers from the 8th International Conference on Fracture, 1993*/editors V. V. Panasyuk *et al.*, 1st edition, 117-143, (1994).
- [4] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu and N.G. Gong, “Effective and Practical *h-p*-Version Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 879-891, (1989).
- [5] T.D.P. Araújo, J.B. Cavalcante Neto, M.T.M. Carvalho, T.N. Bittencourt and L.F. Martha, “Adaptive Simulation of Fracture Processes Based on Spatial Enumeration Techniques”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **3/4**, 551 (Abstract) and CD-Rom (full paper), (1997).
- [6] J.S. Sandhu and H. Liebowitz, “Examples of Adaptive FEA in Plasticity”, *Engineering Fracture Mechanics*, **50**, 947-956, (1995).
- [7] M. Vaz Jr., M. Dutko and D.R.J. Owen, “Adaptive Strategy for Ductile Fracture Analysis in Damaged Elastoplastic Solids”, *IV World Congress on Computational Mechanics* (versão final em CD-rom), Buenos Aires, Argentina, (1998).
- [8] N.S. Lee and K.J. Bathe, “Error Indicators and Adaptive Remeshing in Large Deformation Finite Element Analysis”, *Finite Elements in Analysis and Design*, **16**, 99-139, (1994).
- [9] T.D. Araújo, “Análise Elasto-Plástica Adaptativa de Estruturas com Trincas”, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, (1999).
- [10] R.S. Barsoum, “On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **10**, 25-37, (1976).
- [11] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, “The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1. The Recovery Technique”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1331-1364, (1992).
- [12] L.-Y. Li and P. Bettess, “Notes on Mesh Optimal Criteria in Adaptive Finite Element Computations”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **11**, 911-915, (1995).
- [13] C.F. Shih, H.G. De Lorenzi and M.D. German, “Crack Extension Modeling with Singular Quadratic Isoparametric Elements”, *International Journal of Fracture*, **12**, 647-651, (1976).
- [14] E.F. Rybicki, and M.F. Kanninen, “A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral”, *Engineering Fracture Mechanics*, **9**, 931-938, (1977).

- [15] I.S. Raju, "Calculation of Strain-Energy Release Rates with Higher Order and Singular Finite Elements", *Engineering Fracture Mechanics*, **28**, 251-274, (1987).
- [16] G.P. Nikishkov and S.N. Atluri, "Calculation of Fracture Mechanics Parameters for an Arbitrary Three-Dimensional Crack, by the 'Equivalent Domain Integral' Method" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, 1801-1821, (1987).
- [17] T.L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, CRC Press, Inc., Florida, (1991).
- [18] J.R. Rice, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, **35**, 379-386, (1968).
- [19] J.K. Knowles and E. Sternberg, "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics", *Archives for Rational Mechanics & Analysis*, **44**, 187-211, (1972).
- [20] S.N. Atluri, "Path-Independent Integrals in Finite Elasticity and Inelasticity, with Body Forces, Inertia, and Arbitrary Crack-Face Conditions", *Engineering Fracture Mechanics*, **16**, 341-364, (1982).
- [21] H.D. Bui, "Associated Path Independent J-Integrals for Separating Mixed Modes", *Journal Mechanics & Physics Solids*, **31**, 439-448, (1983).
- [22] T.D. Araújo, D. Roehl, T.N. Bittencourt and L.F. Martha, "Numerical Estimation of Fracture Parameters in Elastic and Elastic-Plastic Analysis", ECCOMAS 2000 (11-14 Set.), Barcelona.