



ESTABILIDADE DE PLACAS E CASCAS LAMINADAS CONSIDERANDO A FALHA DO MATERIAL

Pedro Sanderson Bastos Barros

Evandro Parente Junior

Iuri Barcelos Carneiro Montenegro da Rocha

pedrosanderson88@gmail.com

evandro@ufc.br

i.barcelos@wmc.eu

Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização, Universidade Federal do Ceará

Campus do Pici, Bloco 728, 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brasil

Áurea Silva de Holanda

aurea@det.ufc.br

Departamento de Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Ceará

Campus do Pici, Bloco 703, 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brasil

Resumo. *Placas e cascas laminadas têm sido amplamente utilizadas na fabricação de componentes de aeronaves, automóveis e estruturas navais. A consideração da flambagem é de fundamental importância no projeto destas estruturas, devido a sua elevada esbeltez. Adicionalmente, o comportamento pós-crítico destas estruturas é de grande importância, visto que ele traz informações acerca da sensibilidade às imperfeições iniciais e da sua capacidade de carga. Assim, diversos trabalhos estudam o comportamento pós-crítico de placas e cascas laminadas. Contudo, a grande maioria destes estudos considera apenas o comportamento elástico, desprezando a falha do material. De forma a permitir um estudo mais realista do comportamento destas estruturas, o presente trabalho apresenta uma metodologia baseada no Método dos Elementos Finitos para análise não linear física e geométrica de estruturas laminadas. Os resultados obtidos mostram que a consideração da falha progressiva pode ser importante no estudo do comportamento destas estruturas, uma vez que ela leva a uma redução da capacidade de carga quando comparada a modelos que consideram apenas a não linearidade geométrica.*

Palavras-Chave: Materiais Compósitos, Comportamento Pós-crítico, Falha Progressiva.

1 INTRODUÇÃO

A elevada capacidade mecânica e o baixo peso, aliados à versatilidade de fabricação, tem feito crescer a aplicação de materiais compósitos na engenharia. Deste modo, placas e cascas laminadas têm sido amplamente utilizadas na fabricação de componentes das indústrias aeronáutica, automobilística e naval. A flambagem tem grande importância no projeto destas estruturas, já que geralmente elas são muito esbeltas, fazendo com que a sua falha possa ocorrer com as tensões inferiores à resistência do material. Desta forma, o projeto de muitos componentes estruturais é determinado a partir de restrições de estabilidade juntamente com resistência e rigidez (Liu et al., 2000; Bloomfield et al., 2009).

Devido aos grandes deslocamentos que estas estruturas podem apresentar, a análise na sua configuração inicial pode levar a resultados imprecisos. Assim, análises não lineares geométricas devem ser realizadas, permitindo obter os caminhos de equilíbrio do sistema e estudar o comportamento pós-crítico destas estruturas.

O estudo do comportamento pós-crítico é importante, pois permite classificar a forma de perda de estabilidade, obter a capacidade de carga destas estruturas e quantificar a sensibilidade às imperfeições iniciais. Assim, existem diversos trabalhos disponíveis na literatura, onde se estuda a estabilidade de placas e cascas laminadas, incluindo a determinação do caminho pós-crítico (Rasheed & Yousif, 2005; Houliara & Karamanos, 2006; Le-Manh & Lee, 2014). Contudo, estes trabalhos geralmente desprezam a falha do material, considerando que toda a perda de estabilidade ocorre no regime elástico.

Na prática, mesmo no caso de estruturas esbeltas, os fenômenos não lineares físicos, devido à degradação ou falha do material, podem ocorrer de forma simultânea à instabilidade e grandes deslocamentos. A interação entre as não linearidades física e geométrica pode resultar em uma redução da capacidade de carga das estruturas laminadas, em relação à capacidade calculada considerando um comportamento puramente elástico.

É importante notar que o início do processo de falha não implica que a estrutura atingiu sua capacidade de carga, uma vez que as tensões resistidas pelo material que falhou podem ser redistribuídas para as lâminas adjacentes. Desta forma, a análise com falha progressiva deve simular o descarregamento das lâminas que falharam. Existem diversas formas de se fazer este tipo de simulação, incluindo a utilização de modelos simples de degradação, seja ela constante, gradual ou instantânea (Rocha, 2013) e a utilização da Mecânica do Dano Contínuo (Maimí et al., 2007a, Maimí et al., 2007b).

Visando permitir uma simulação mais realista de estruturas laminadas, este trabalho propõe uma metodologia baseada no Método dos Elementos Finitos para análise não linear física e geométrica de placas e cascas laminadas considerando a falha progressiva. O modelo de degradação das propriedades mecânicas proposto por Tsai (Liu & Tsai, 1998; Kuraishi et al., 2002; Rocha, 2013) é aplicado no presente trabalho.

O resto deste trabalho é organizado da seguinte forma. O Item 2 discute o comportamento mecânico de compósitos laminados e o modelo de degradação utilizado. O Item 3 discute a Teoria de Reissner-Mindlin e o Item 4 apresenta o elemento finito de casca abatida utilizado. Finalmente, o Item 5 apresenta os exemplos numéricos analisados e o Item 6 apresenta as conclusões deste trabalho.

2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE UMA LÂMINA

Neste trabalho são estudados laminados onde cada lâmina é feita de material compósito reforçado por fibras unidirecionais. Estes materiais são formados por fibras de alta resistência e rigidez (e.g. carbono e vidro) imersas em uma matriz polimérica. Em condições usuais de serviço e para cargas estáticas onde o efeito das deformações lentas é desprezado, o comportamento mecânico dos compósitos reforçados por fibras pode ser considerado como linear elástico (Jones, 1999).

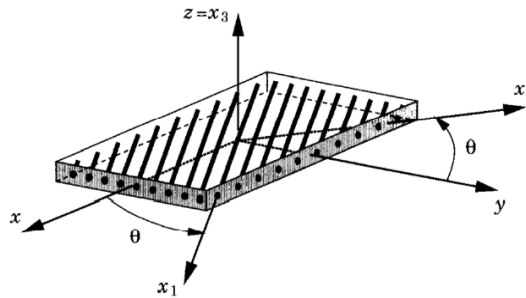


Figura 1 – Sistemas de coordenadas (Reddy, 2004).

Devido à presença das fibras unidirecionais, cada lâmina apresenta um comportamento ortotrópico no sistema do material, mostrado na Figura 1. Neste sistema, x_1 é paralelo à direção das fibras, x_2 é perpendicular à direção das fibras e x_3 é perpendicular à lâmina. Considerando um comportamento linear elástico até a falha do material, a relação tensão-deformação pode ser representada pela lei de Hooke generalizada. Se as lâminas são finas, considera-se que as mesmas estão submetidas a um Estado Plano de Tensões. Assim, a relação entre deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ e tensões $\boldsymbol{\sigma}_1$ no sistema do material é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (1)$$

onde \mathbf{S} é simétrica (Jones, 1999) e é conhecida como matriz de flexibilidade do material, cujos coeficientes são dados por:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2)$$

Nestas expressões, E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade nas direções principais, enquanto ν_{ij} é o coeficiente de Poisson na direção i , devido à aplicação de uma carga na direção j e G_{12} é o módulo de elasticidade transversal. É importante notar que os coeficientes de Poisson (ν_{ij}) devem satisfazer a seguinte relação (Jones, 1999):

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j=1,2,3) \quad (3)$$

A relação constitutiva é escrita no sistema do material (x_1, x_2, x_3), mas as relações cinemáticas e equações de equilíbrio são escritas no sistema global (x, y, z). Assim, é necessário transformar tensões e deformações entre estes dois sistemas. A partir da Teoria da

Elasticidade pode-se obter uma matriz de transformação \mathbf{T}_m que leva as deformações do sistema global para o local:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}_m \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

Invertendo a Equação (1), tem-se a relação tensão-deformação no sistema do material:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (5)$$

onde:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (6)$$

Quando o laminado é espesso, torna-se necessário captar o efeito do cisalhamento transversal. Assim, as componentes de deformação γ_{13} e γ_{23} devem ser consideradas. Deste modo, pela Teoria da Elasticidade, obtém-se uma matriz \mathbf{T}_s que relaciona as deformações de cisalhamento nos sistemas local e global:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\gamma} \quad (7)$$

As tensões de cisalhamento referentes a estas deformações são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_1 \quad (8)$$

sendo $Q_{44} = G_{13}$ e $Q_{55} = G_{23}$.

Pode-se mostrar, ainda, que a transformação das tensões do sistema local para o sistema global é realizada através de:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{T}_m^T \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\tau}_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (4) e (5) e as Eqs. (7) e (8) na Eq. (9), obtêm-se as relações tensão-deformação no sistema de coordenadas global:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{T}_m^T \mathbf{Q}_m \mathbf{T}_m \\ \boldsymbol{\tau} &= \bar{\mathbf{Q}}_s \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s \end{aligned} \quad (10)$$

Finalmente, pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}}_s \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde $\bar{\mathbf{Q}}$ é chamada matriz de rigidez transformada e ela transforma as deformações em tensões no sistema global. Os coeficientes \bar{Q}_{ij} são calculados conforme as operações matriciais apresentadas anteriormente.

2.1 Critério de Falha

O critério de Tsai-Wu (1971) é utilizado no presente trabalho. Este se baseia em uma teoria polinomial de falha que utiliza tensores baseados nas resistências básicas do material para ponderar os valores das tensões. Neste critério, considera-se um critério quadrático que pode ser expresso, em notação indicial, da seguinte forma:

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (12)$$

onde $f_4 = f_5 = f_6 = f_{14} = f_{15} = f_{16} = f_{24} = f_{25} = f_{26} = f_{34} = f_{35} = f_{36} = f_{45} = f_{46} = f_{56} = 0$ e os termos restantes são dados por (Daniel & Ishai, 1994):

$$f_i = \frac{1}{F_{iT}} - \frac{1}{F_{iC}} \quad f_{ii} = \frac{1}{F_{iT} F_{iC}} \quad f_{jj} = \frac{1}{S_j} \quad (13)$$

onde F_{iT} , F_{iC} e S_j são as resistências à tração e à compressão nas direções i ($i = 1, 2, 3$) e a resistência ao cisalhamento nos planos 1-3 ($j = 4$), 2-3 ($j = 5$) ou 1-2 ($j = 6$).

Liu & Tsai (1998), mostram que o termo f_{ij} , para lâminas típicas com fibras de carbono ou vidro, pode ser aproximado de forma razoável por:

$$f_{ij} \approx -\frac{1}{2} \sqrt{f_{ii} f_{jj}} \quad (14)$$

O critério de Tsai-Wu para o Estado Plano de Tensões pode ser escrito como:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = f_{ij} \sigma_i \sigma_j + f_i \sigma_i - 1 \leq 0 \quad (15)$$

Como se pode notar, este critério é expresso em uma só equação. Por outro lado, este não é capaz de identificar diretamente o modo de falha da lâmina. É importante notar que para aplicação do critério as tensões devem estar no sistema local.

Fazendo as devidas simplificações para materiais isotrópicos, pode-se mostrar que a combinação das Eqs. (12) a (14) se resume ao critério de von Mises utilizado para metais.

2.2 Modelo de Degradação

O modelo de degradação utilizado neste trabalho foi proposto por Kuraishi et al. (2002) dentro do *Worldwide Failure Exercise* (WFE), tendo sido um dos critérios que apresentou melhores resultados na comparação entre as diversas teorias de falha participantes deste exercício. Este modelo é baseado no critério de falha apresentado no item anterior.

Para aplicação da degradação, este modelo define dois estados básicos para o material compósito: o *Estado Intacto* e o *Estado Degradado*. No Estado Intacto, o material possui sua resistência e rigidez inicial. No Estado Degradado, admite-se que a primeira falha corresponde à falha da matriz e a segunda falha corresponde à falha das fibras.

Após a falha, o material permanece contínuo e ocupando a mesma posição, mas tem suas propriedades elásticas reduzidas. Quando ocorre a falha da matriz, a degradação das propriedades mecânicas é feita a partir de um coeficiente de redução α_m :

$$E_2^d = \alpha_m E_2 \quad G_{ij}^d = \alpha_m G_{ij} \quad \nu_{ij}^d = \alpha_m \nu_{ij} \quad (16)$$

onde o superescrito d indica que a propriedade mecânica foi degradada. Considera-se ainda uma redução da resistência à compressão das fibras, dada por:

$$F_{1C}^d = F_{1C} \left(\frac{E_2^d}{E_2} \right)^n \quad (17)$$

sendo n um fator exponencial de degradação.

Se ocorrer uma segunda falha do mesmo material, considera-se esta corresponde à falha das fibras e as propriedades elásticas do material são degradadas utilizando um fator α_f :

$$E_1^f = \alpha_f E_1 \quad E_2^f = \alpha_f E_2^d \quad G_{ij}^f = \alpha_f G_{ij}^d \quad \nu_{ij}^f = \alpha_f \nu_{ij}^d \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (18)$$

onde o superescrito f indica a propriedade mecânica do material após a falha. Os valores dos parâmetros de degradação utilizados neste trabalho são $\alpha_m = 0.08$, $\alpha_f = 0.01$ e $n = 0.1$ (Kuraishi et al., 2002).

Pode-se considerar este modelo de degradação como um modelo Dano Contínuo simplificado. Esta interpretação é válida porque as deformações do material degradado continuam sendo calculadas pela Mecânica do Contínuo. A principal diferença é que neste modelo a degradação das propriedades após o início do dano ocorre de forma brusca em duas etapas, enquanto nos modelos clássicos da Mecânica do Dano Contínuo, o dano evolui de forma suave com o aumento das deformações.

É importante notar que o modelo adotado é termodinamicamente consistente. Isto ocorre porque uma vez as propriedades mecânicas tendo sido degradadas utilizando as Eqs. (16)-(18), elas não retornam aos seus valores anteriores, mesmo que a carga seja reduzida e as deformações diminuam. Assim, a irreversibilidade do processo de dano é garantida.

Ao reduzir as propriedades elásticas, o modelo promove o descarregamento do material, uma vez que para as mesmas deformações as tensões no material degradado são muito menores que no material antes da degradação. Estas tensões são redistribuídas para lâminas que ainda estão intactas. Com o aumento do carregamento, as tensões em outras lâminas vão aumentando e a falha vai se espalhando pela estrutura, daí o processo ser conhecido como falha progressiva. O colapso da estrutura ocorre quando esta não for capaz de redistribuir as tensões atuantes no material que falhou.

3 TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

Sabe-se que a Teoria Clássica de Placas (TCL) leva a bons resultados para placas finas, porém esta precisão diminui à medida que a espessura da estrutura aumenta, visto que o efeito do cisalhamento transversal tende a amplificar os deslocamentos e a reduzir a frequência natural e a carga crítica da estrutura (Szilard, 2004).

Com esta limitação da TCL, tornou-se necessário o desenvolvimento de teorias mais refinadas, de modo a se obter resultados mais precisos para estrutura mais espessas. Assim,

diversas teorias foram desenvolvidas com a finalidade de levar em conta o efeito deste cisalhamento transversal. Reissner (1945) desenvolveu uma teoria onde as tensões eram tratadas como variáveis e, em seguida, Mindlin (1951) tratou os deslocamentos como variáveis do problema. Em ambas as teorias, o cisalhamento transversal é tratado como constante ao longo da seção (Szilard, 2004).

A hipótese básica da Teoria de Mindlin é que uma reta normal ao plano médio da placa não necessariamente permanecerá normal ao plano médio da placa após a deformação, como mostrado na Figura 2.

Deste modo, pode-se constatar que os deslocamentos em qualquer ponto da placa são dados por:

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) + z\theta_y \quad u_y(x, y, z) = v(x, y) - z\theta_x \quad u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (19)$$

onde u , v e w são os deslocamentos no plano x , y e z e θ_x e θ_y são as rotações da reta normal em torno dos eixos x e y , respectivamente.

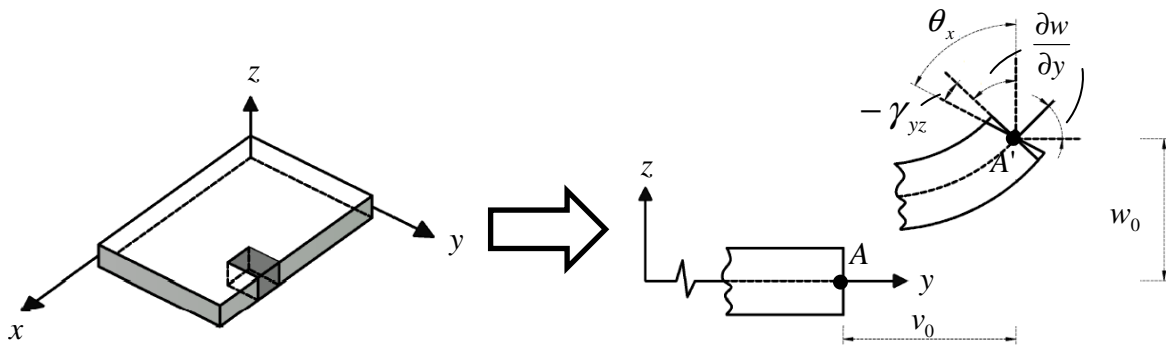


Figura 2 - Configuração indeformada e deformada de um trecho de uma placa.

Quando os deslocamentos são moderadamente grandes, começa haver uma interação entre os efeitos de membrana e flexão, devido aos deslocamentos transversais. Para levar em conta este acoplamento, utilizam-se as deformações de Green-Lagrange, desprezando os termos não-lineares associados às componentes do deslocamento nas direções do plano da placa, u_x e u_y (Crisfield, 1991). Neste caso, as componentes de deformações em qualquer ponto da placa são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2(w_{,x})(w_{,y}) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m) + z\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + z\boldsymbol{\kappa} \quad (20)$$

onde as duas primeiras parcelas da Eq. (20) correspondem às deformações de membrana ($\boldsymbol{\varepsilon}^m$) – sendo que uma ocorre devido ao comportamento linear ($\boldsymbol{\varepsilon}_0^m$) e a outra por conta do efeito não-linear dos deslocamentos transversais ($\boldsymbol{\varepsilon}_L^m$) – e a terceira parcela é associada à curvatura ($\boldsymbol{\kappa}$) da placa.

As deformações devido ao cisalhamento transversal são dadas por:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (21)$$

As forças e momentos resultantes são obtidos por integração das tensões ao longo da espessura da placa:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (22)$$

É importante notar que as deformações são contínuas ao longo da espessura do laminado, o que não ocorre com as componentes de tensão. Pode-se ainda escrever os esforços internos em termos das deformações generalizadas, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (23)$$

onde as componentes das sub-matrizes são dadas por:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k) \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} \quad (24)$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^n f_s \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k)$$

Sendo **A**, **B**, **D** e **G** as matrizes de rigidez extensional, de acoplamento membrana-flexão, flexional e de cisalhamento, respectivamente, e $f_s = 5/6$, é o fator de correção das tensões de cisalhamento (Reddy, 2004).

As expressões da TCL podem ser obtidas fazendo $\theta_y = -w_{,x}$ e $\theta_x = w_{,y}$ na Eq. (21), que são o resultado da hipótese das retas planas e perpendiculares ao plano da placa, assim permanecerem após a aplicação das cargas. Com isto, tem-se que $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, nas Eqs. (22) e (23), respectivamente.

4 ANÁLISE NÃO LINEAR

Na formulação de um elemento não linear geométrico, pode-se adotar uma abordagem Lagrangeana Total, Lagrangeana Atualizada ou Corrotacional (Crisfield, 1991). O presente trabalho se limita à apresentação do elemento finito de casca abatida, desenvolvido por Rocha (2013), aplicando a Teoria de Reissner-Mindlin com uma abordagem Lagrangeana Total.

Aplica-se a Teoria de Marguerre nas deformações de von Kármán, para se incluir o efeito das imperfeições iniciais na placa (Crisfield, 1991). Com isto, adiciona-se à Eq. (20) uma função $z_0(x, y)$, conhecida. Deste modo, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^m \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w + z_0)_{,x}^2 \\ (w + z_0)_{,y}^2 \\ 2(w + z_0)_{,x} (w + z_0)_{,y} \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} z_{0,x}^2 \\ z_{0,y}^2 \\ 2z_{0,x} z_{0,y} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Desenvolvendo a Eq. (25), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_{,x} z_{0,x} \\ w_{,y} z_{0,y} \\ w_{,x} z_{0,y} + w_{,y} z_{0,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,x} w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Como se pode notar, na presente formulação ocorrem três tipos de acoplamento membrana-flexão: um devido ao efeito do laminado, por conta da matriz \mathbf{B} (Eq. (23)); o segundo devido à Teoria de von Kármán, que incorpora a não linearidade nos termos de deformação de membrana de Green-Lagrange, simplificando-os para o caso deslocamentos moderadamente grandes e; por fim, o terceiro ocorre por conta da curvatura inicial da estrutura, que gera uma nova parcela nas componentes de deformação.

A partir das Eqs. (20), (21) e (26), pode-se organizar o vetor de deformações, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_x^m \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y^m \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy}^m \quad \boldsymbol{\kappa}_x \quad \boldsymbol{\kappa}_y \quad \boldsymbol{\kappa}_{xy} \quad \boldsymbol{\gamma}_{xz} \quad \boldsymbol{\gamma}_{yz} \right\}^T = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad \boldsymbol{\kappa} \quad \boldsymbol{\gamma} \right\}^T \quad (27)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^m$, $\boldsymbol{\kappa}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ são mostrados nas equações mencionadas anteriormente.

4.1 Método dos Elementos Finitos

No elemento de casca abatida, cinco graus de liberdade são interpolados: os deslocamentos de membrana e transversal (u , v e w , respectivamente) e as rotações da estrutura relacionadas à flexão (θ_x e θ_y):

$$u = \sum_{i=1}^{nn} H_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{nn} H_i v_i \quad w = \sum_{i=1}^{nn} H_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^{nn} H_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^{nn} H_i \theta_{yi} \quad (28)$$

Onde H_i são as funções de forma do elemento. Compactando as equações acima em notação matricial, temos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{u}_e \quad (29)$$

Sendo \mathbf{u} e \mathbf{u}_e os vetores de deslocamentos da estrutura e nos seus nós e \mathbf{H} a matriz das funções de forma.

Além disso, no desenvolvimento do presente elemento, utiliza-se uma formulação isoparamétrica, de modo que a geometria da estrutura seja interpolada pelas mesmas funções de forma que seus graus de liberdade, ou seja:

$$x = \sum_{i=1}^{nn} H_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^{nn} H_i y_i \quad z_0 = \sum_{i=1}^{nn} H_i z_{0i} \quad (30)$$

O vetor de deformações (Eq. (27)) se relaciona com o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u}_e por meio de uma matriz \mathbf{B} , da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (31)$$

De modo a se obter os termos da matriz \mathbf{B} , deve-se analisar cada termo de deformação separadamente. Combinando as Eqs. (27) e (28), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \begin{Bmatrix} u_{,x} + w_{,x} z_{0,x} \\ v_{,y} + w_{,y} z_{0,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} z_{0,y} + w_{,y} z_{0,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^m \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_0^m = \begin{bmatrix} H_{i,x} & 0 & Z_x H_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & H_{i,y} & Z_y H_{i,y} & 0 & 0 \\ H_{i,y} & H_{i,x} & Z_x H_{i,y} + Z_y H_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,x} w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^m \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_L^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i,x} W_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{i,x} W_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{i,x} W_y + H_{i,x} W_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^b \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & H_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & -H_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_{i,x} & H_{i,y} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} - \theta_x \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^s \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_0^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i,x} & 0 & H_i \\ 0 & 0 & H_{i,y} & H_i & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

sendo:

$$Z_x = \sum_{i=1}^{nm} H_{i,x} z_{0i} \quad Z_y = \sum_{i=1}^{nm} H_{i,y} z_{0i} \quad W_x = \sum_{i=1}^{nm} H_{i,x} w_i \quad W_y = \sum_{i=1}^{nm} H_{i,y} w_i \quad (36)$$

Portanto, a Eq. (31) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{bmatrix} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \left(\mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (37)$$

4.2 Vetor de Forças Internas

Com o campo de deformações apresentado na Eq. (27), as equações de equilíbrio do sistema podem ser obtidas. Deste modo, fazendo a variação do trabalho interno igual à do trabalho externo, temos que:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (38)$$

sendo:

$$\delta W_{int} = \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V} dA_0 \quad (39)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{S_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (40)$$

onde δW_{int} e δW_{ext} são as variações do trabalho interno e externo, respectivamente, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é a deformação virtual decorrente do deslocamento virtual infinitesimal $\delta \mathbf{u}$, \mathbf{b} representa as forças de corpo, \mathbf{q} é o vetor das forças de superfície prescritas em A_0 , $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor das tensões, $\delta \mathbf{u}_i$ é o deslocamento virtual no ponto de aplicação de \mathbf{p}_i , que representam as cargas concentradas que atuam em n pontos sobre a estrutura e \mathbf{f} é o vetor de cargas externas na casca. As integrações são feitas na área e volume iniciais da casca, A_0 e V_0 , visto que uma formulação Lagrangeana Total está sendo aplicada.

Desenvolvendo a equação da variação do Trabalho interno, aplicando a Eq. (27), substituindo o vetor das tensões e fazendo a integral no volume inicial igual à integral na área inicial e na espessura, obtém-se a forma do δW_{int} apresentada na Eq. (39).

Pode-se, ainda, relacionar os incrementos de deformação $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ com os incrementos de deslocamentos nodais $\delta \mathbf{u}_e$ por meio de uma matriz $\bar{\mathbf{B}}$, que pode ser obtida a partir das Eqs. (32) a (35), como se segue:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (41)$$

Sendo:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \bar{\mathbf{B}}_0^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^m \delta \mathbf{u}_e \quad (42)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{A} \mathbf{G}) \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{A} \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}}_L^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_L^m \delta \mathbf{u}_e \quad (43)$$

$$\delta \boldsymbol{\kappa} = \bar{\mathbf{B}}_0^b \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^b \delta \mathbf{u}_e \quad (44)$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \bar{\mathbf{B}}_0^s \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^s \delta \mathbf{u}_e \quad (45)$$

Portanto, a Eq. (41) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_0^m \\ \bar{\mathbf{B}}_0^b \\ \bar{\mathbf{B}}_0^s \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_e + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_e = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (46)$$

Substituindo os termos obtidos na Eq. (39), tem-se:

$$\delta W_{int} = \delta \mathbf{u}^T \left[\int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \mathbf{V} dA_0 \right] = \delta \mathbf{u}^T \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dA_0 \quad (47)$$

Finalmente, a Eq. (38) que descreve o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), pode ser compactada da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{u}^T \left(\int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dA_0 - \mathbf{f} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dA_0 \quad (48)$$

Nota-se que o vetor de forças internas $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ depende dos deslocamentos da estrutura por conta dos efeitos da não linearidade geométrica nos termos de deformação de Green-Lagrange, além de possíveis não linearidades físicas, que serão abordadas posteriormente.

Do PTV, admite-se que $\delta \mathbf{u}$ é arbitrário e cinematicamente possível, mas não nulo. Portanto, a partir da Eq. (48), obtemos a condição de equilíbrio do sistema, que implica que as forças externas estejam em equilíbrio com as forças internas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (49)$$

4.3 Matriz de Rigidez Tangente

A solução das equações de equilíbrio não lineares e o traçado do caminho de equilíbrio são realizados normalmente utilizando métodos incrementais-iterativos como Controle de Carga, Deslocamento ou Comprimento de Arco (Crisfield, 1991). Nestes métodos, a solução

das equações de equilíbrio a cada passo é realizada através do Método de Newton-Raphson. Este método é baseado na linearização das equações de equilíbrio, sendo necessário determinar a matriz de rigidez tangente da estrutura.

A matriz de rigidez tangente corresponde à variação do resíduo \mathbf{r} com os deslocamentos nodais \mathbf{u} . No caso de cargas independentes dos deslocamentos, tem-se:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial [\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}]}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T d\boldsymbol{\sigma} dA_0 + \int_{A_0} d\bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dA_0 \quad (50)$$

O primeiro termo desta equação corresponde à matriz de rigidez \mathbf{K}_L enquanto o segundo corresponde à matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_σ . Utilizando a regra da cadeia:

$$\mathbf{K}_T = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\mathbf{u}_e} dA_0 + \int_{A_0} (d\bar{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{N} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \bar{\mathbf{B}} dA_0 + \int_{A_0} (d\bar{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{N} dA_0 = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (51)$$

sendo \mathbf{C}_T a matriz que define a lei constitutiva tangente do laminado. Esta matriz relaciona os incrementos de tensão ($d\boldsymbol{\sigma}$) com os incrementos de deformação ($d\boldsymbol{\varepsilon}$).

Utilizando a Eq. (43), a parcela da matriz de rigidez geométrica pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_\sigma d\mathbf{u} = \int_{A_0} \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \mathbf{N} dA_0 = \left(\int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \right) d\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{K}_\sigma = \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \quad (52)$$

onde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (53)$$

4.4 Não-linearidade Física

A formulação desenvolvida nos itens anteriores pode ser utilizada tanto para materiais com comportamento linear elástico como com comportamento não linear, incluindo o modelo de falha progressiva descrito no Item 2.2.

No caso de materiais com comportamento linear a matriz constitutiva (\mathbf{Q}) de cada lâmina é constante, assim como a matriz constitutiva do laminado ($\mathbf{C} = \mathbf{C}_T$). Assim, a matriz \mathbf{C} pode ser integrada exatamente na espessura utilizando a Eq. (24) e os esforços internos podem ser calculados diretamente utilizando a Eq. (23). Em consequência, a integração numérica é realizada apenas na superfície média da casca utilizando a quadratura de Gauss.

Por outro lado, no caso de materiais com comportamento não linear, a matriz constitutiva (\mathbf{Q}) pode variar ao longo da lâmina (tanto na superfície quanto na espessura), à medida que o material vai falhando. Assim, os esforços internos ($\boldsymbol{\sigma}$) e a matriz constitutiva tangente do laminado (\mathbf{C}_T), utilizadas nas Eqs. (48), (51) e (53), devem ser integradas numericamente ao longo da espessura.

Neste trabalho, a integração ao longo da espessura é efetuada utilizando a quadratura de Lobatto com 3 pontos de integração em cada lâmina. Esta quadratura foi escolhida porque ela possui pontos nos extremos do intervalo, permitindo captar melhor o início do processo de degradação do material. Além disso, 3 pontos de Lobatto permite integrar exatamente os esforços internos e a matriz constitutiva quando o material está no regime elástico (i.e. antes da falha). A integração ao longo da superfície média da casca continua a ser realizada utilizando a quadratura de Gauss.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A formulação apresentada neste trabalho foi implementada no FAST (Rocha, 2013; Dantas Junior, 2014), que é um programa de análise de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização da UFC. O FAST (*Finite Element Analysis Tool*) é um programa implementado em C++ utilizando o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). O programa foi desenvolvido inicialmente para materiais homogêneos e depois foi estendido para o tratamento de materiais compósitos (Rocha, 2013; Dantas Junior, 2014).

A seguir serão apresentados exemplos de análise de placas e cascas homogêneas e laminadas, com objetivo de validar a formulação apresentada e de estudar o efeito da degradação do material sobre a capacidade de carga da estrutura.

5.1 Exemplo 1

Este exemplo trata da investigação do comportamento pós-crítico de placas retangulares, isotrópicas e laminadas, simplesmente apoiadas, sujeitas a cargas de compressão uniaxial e biaxial. Estes estudos foram comparados com os trabalhos desenvolvidos por Le-Manh & Lee (2014), Liew et al. (2006) e Sundaresan et al. (1996). Os dados da geometria (Figura 3) e parâmetros dos materiais são apresentados na Tabela 1.

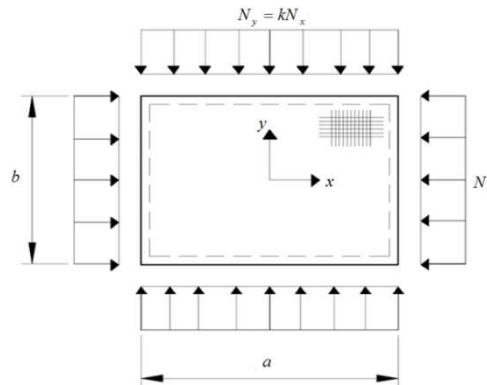


Figura 3 - Placa analisada.

Tabela 1 - Dados do Exemplo 2.

Tipo	Geometria			Material					
	a	b	h	$E_1 (\times 10^6)$	$E_2 (\times 10^5)$	ν_{12}	$G_{12} = G_{13} (\times 10^4)$	$G_{23} (\times 10^4)$	
Isotrópica	10	10	0.20	3.00	-	-	-	-	
Laminada	$(45/-45)_s$	10	10	1.00	3.00	1.20	0.25	6.00	2.40
	$(45/-45)_2$	10	10	1.00	3.00	1.20	0.25	6.00	2.40

As análises deste exemplo foram realizadas utilizando os programas FAST e ABAQUS (Simulia, 2009). Foram obtidos resultados satisfatórios em ambos os programas (ver Figuras 4, 5 e 6) utilizando malhas com 10×10 elementos quadriláteros quadráticos com integração reduzida. A integração reduzida foi utilizada para permitir a comparação dos resultados do elemento Q8 (FAST) com os do elemento S8R (ABAQUS). Como esta estrutura apresenta um caminho pós-crítico estável, o Método do Controle de Carga (Crisfield, 1991) foi utilizado na para análise estrutural.

A geometria imperfeita da estrutura pode ser modelada como o resultado de uma combinação linear dos seus modos de flambagem (φ_i):

$$\mathbf{x}_{imp} = \mathbf{x}_{perf} + \sum_{i=1}^n \Delta_i \varphi_i \quad (54)$$

onde \mathbf{x}_{imp} e \mathbf{x}_{perf} são as coordenadas dos pontos que definem a geometria na configuração imperfeita e perfeita, respectivamente, e Δ_i é a amplitude da imperfeição relacionada ao modo de flambagem φ_i , uma vez que estes são normalizados de forma que sua maior componente seja unitária. Neste trabalho, considerou-se apenas o primeiro modo.

Inicialmente, foram modeladas duas placas isotrópicas ($k = 0$, Figura 3) imperfeitas com Δ/a igual a 10^{-5} e 10^{-3} , respectivamente. A Figura 4 apresenta as curvas carga-deslocamento normalizadas obtidas. As diferenças obtidas entre Le-Manh & Lee (2014), Liew et al. (2006) e Sundaresan et al. (1996) se devem às condições de contorno aplicadas na placa, visto que os dois últimos usaram as condições de contorno SS-1 definidas por Reddy (2004), enquanto o primeiro aplicou condições de contorno diferentes.

Le-Manh et al. (2014) definiram as seguintes condições de contorno para o problema (aqui chamadas de CC-1):

$$\begin{cases} w = \theta_x = 0, & x = \pm a/2 \\ w = \theta_y = 0, & y = \pm b/2 \end{cases} \quad (55)$$

Por outro lado, as condições de contorno definidas como SS-1 por Reddy (2004) são (aqui chamadas de CC-2):

$$\begin{cases} v = w = \theta_x = 0, & x = \pm a/2 \\ u = w = \theta_y = 0, & y = \pm b/2 \end{cases} \quad (56)$$

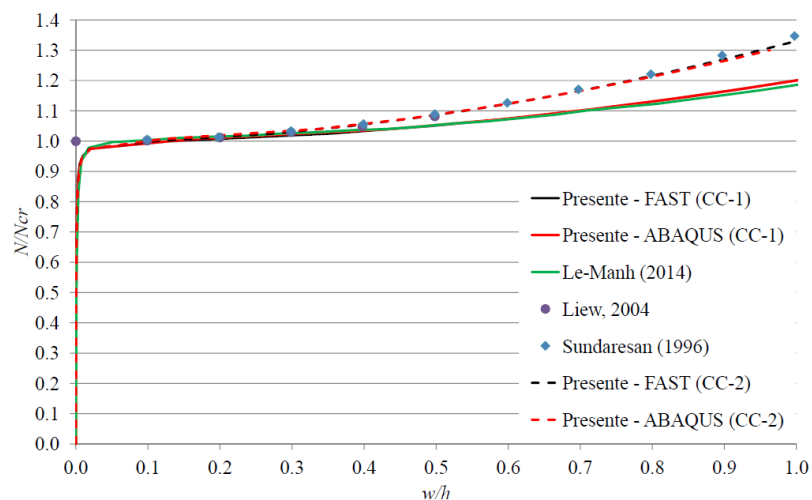


Figura 4 - Placa isotrópica ($a/h = 50$) simplesmente apoiada sujeita a carregamento uniaxial ($\Delta = 10^{-5}$).

Nota-se que o comportamento pós-crítico da estrutura é sensível à condição de contorno aplicada, visto que o ganho de capacidade de carga da placa, quando os deslocamentos chegam à magnitude da espessura, é da ordem de 35% quando os apoios são definidos como CC-1 e de 20% quando se aplicam as condições de contorno CC-2.

Na sequência, são analisadas as placas com laminações do tipo *angle-ply* simétrica $(45/-45)_s$ e antissimétrica $(45/-45)_2$ sujeitas a compressão biaxial ($k = 1$, Figura 3). Em ambos os

casos, aplicam-se as condições de contorno do tipo CC-1. A Figura 5 e a Figura 6 mostram o comportamento pós-crítico da placa para o caso de laminação *angle-ply* simétrica e antissimétrica, respectivamente. Nota-se que ambas as curvas estão em concordância com os autores citados.

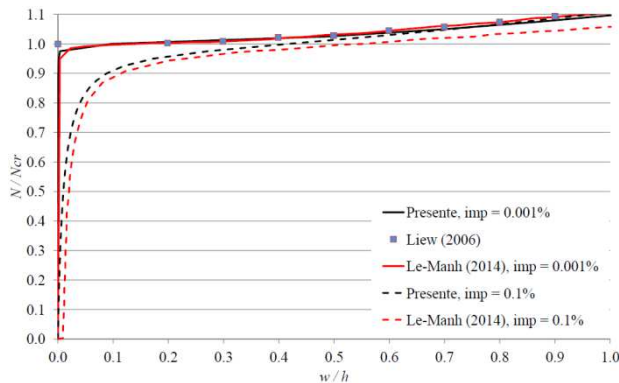


Figura 5 - Placa *angle-ply* simétrica ($a/h = 10$) simplesmente apoiada sujeita a carregamento biaxial.

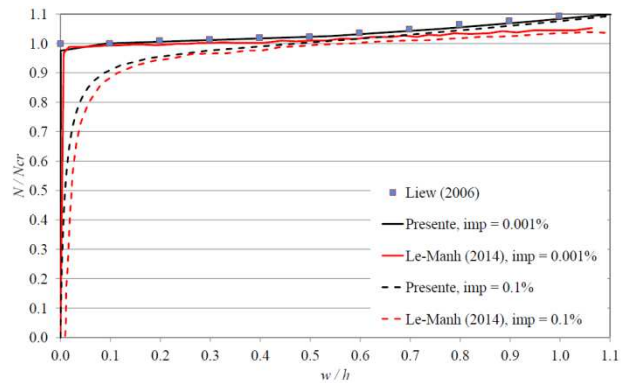


Figura 6 - Placa *angle-ply* antissimétrica ($a/h = 10$) simplesmente apoiada sujeita a carregamento biaxial.

Os resultados obtidos confirmam que placas, tanto homogêneas quanto laminadas, apresentam comportamento típico de bifurcação simétrica estável, com pequena sensibilidade às imperfeições. Por outro lado, os resultados evidenciaram a importância das condições de contorno sobre a resistência pós-crítica de placas.

5.2 Exemplo 2

Neste exemplo serão abordadas análises não lineares da casca abatida mostrada na Figura 7 sujeita a uma carga concentrada no seu centro. O exemplo foi retirado de Sze (2004), no qual o autor apresenta o caminho de equilíbrio da estrutura, considerando um material isotrópico e duas laminações do tipo *cross-ply*. Sze et al. (2004) ainda analisam o efeito da espessura h da casca no caminho de equilíbrio.

Entretanto, neste trabalho, o modelo será validado pelas laminações utilizadas pelo autor e estendido para duas laminações *angle-ply*, como mostrado na Tabela 2. Neste exemplo, os resultados obtidos serão validados e, então, será incluído o efeito da falha do material, como apresentado no Item 2.2. Da geometria da estrutura, tem-se $R = 2540$, $\theta = 0.1$ rad, $L = 254$, $h_1 = 6.35$ e $h_2 = 12.7$. As propriedades elásticas e de falha do material estão dispostas na Tabela 3. A casca é considerada simplesmente apoiada ($u = w = 0$) nos trechos AB e DE e livre em AD e BE . Vale ressaltar que as fibras na direção 0° são paralelas ao eixo longitudinal.

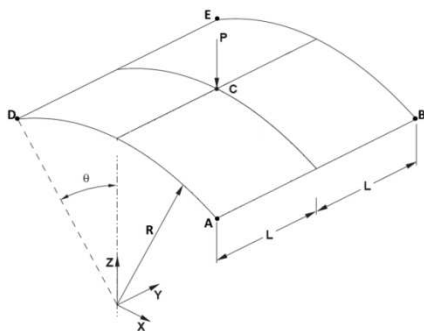


Figura 7 – Casca abatida sujeita a carga concentrada (Adaptado de Sze, 2004).

Tabela 2 – Esquemas de laminação adotados.

Laminação	
L1	[0/90/0]
L2	[90/0/90]
L3	[45/-45/45/-45]
L4	[45/-45/-45/45]

Tabela 3 – Propriedades mecânicas do material.

E_1	$E_2 = E_3$	$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	G_{12}	$G_{13} = G_{23}$	F_{1T}	F_{1C}	$F_{2T} = F_{3T}$	$F_{2C} = F_{3C}$	$S_4 = S_5$	S_6
3300	1100	0.25	660	440	38	42	4	17	10	8

A análise desta estrutura foi realizada utilizando o programa FAST com uma malha de 10×10 elementos do tipo Q8 com integração reduzida. Inicialmente, o modelo foi validado considerando as laminações L1 e L2 e as espessuras h_1 e h_2 . Em seguida, a estrutura foi analisada considerando a falha do material. Em ambos os casos as análises foram realizadas utilizando o Método do Comprimento de Arco (Crisfield, 1991). Os resultados obtidos, em termos dos deslocamentos do ponto C, são apresentados na Figura 8.

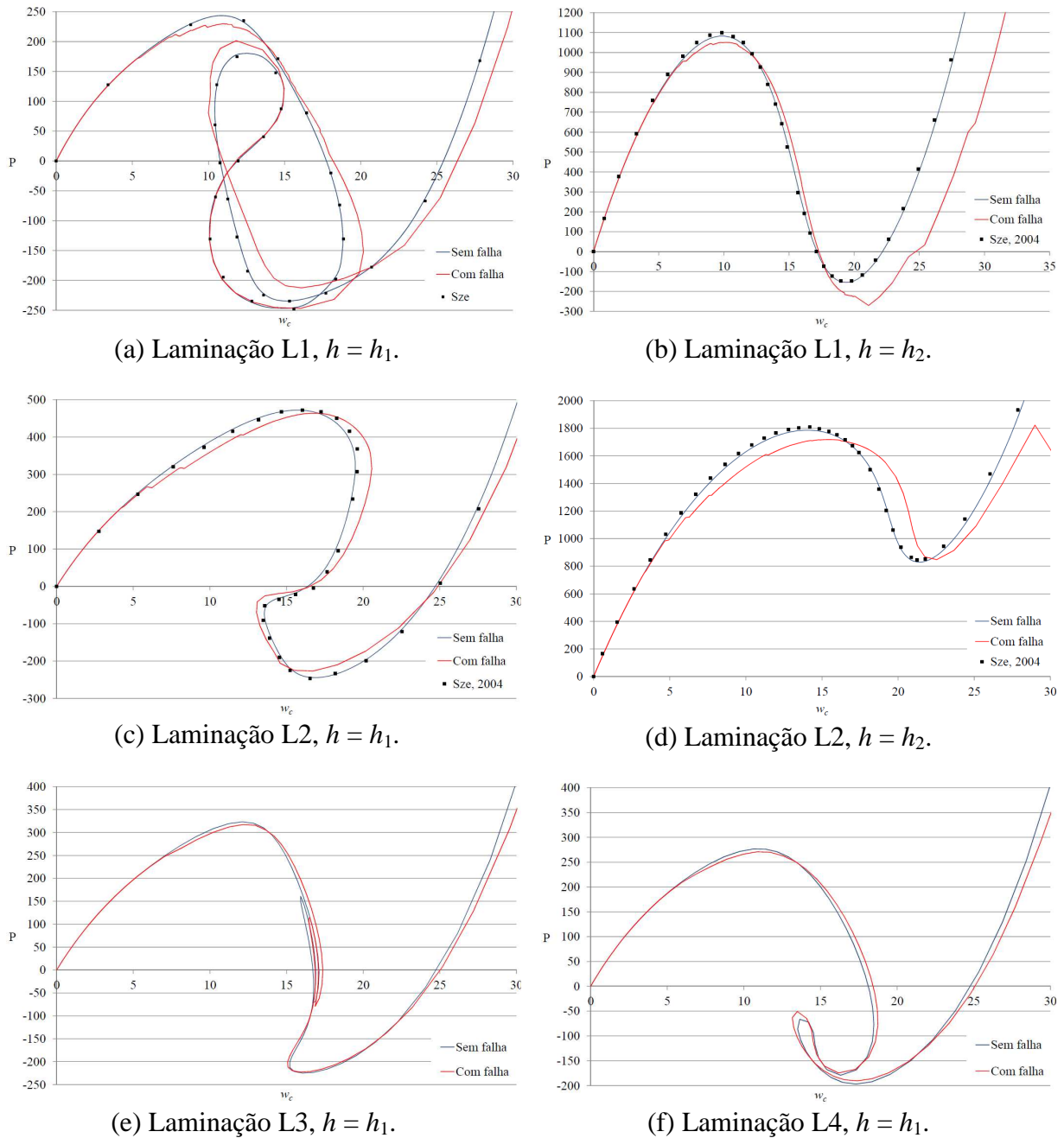


Figura 8 – Caminho de equilíbrio da casca abatida variando a laminação e a espessura do laminado.

Percebe-se que a perda de estabilidade da estrutura ocorre por ponto limite e verifica-se a ocorrência dos fenômenos *snap-through* e *snap-back*. Quando a falha do material é incluída, nota-se que a primeira lâmina falha antes do ponto limite e que a carga de pico é menor. A Tabela 4 apresenta os valores das cargas P nas quais ocorrem a falha da primeira lâmina (*First Ply Failure* – FPF) e o ponto limite (Lim). Nota-se que a diferença nos valores das cargas nos pontos limites é pequena, mostrando que o efeito da não linearidade geométrica é dominante para esta estrutura. Por outro lado, verifica-se que o esquema de laminação tem uma grande influência sobre a capacidade de carga, com e sem falha progressiva.

Um aspecto importante mostrado pelos resultados obtidos é que seria antieconômico basear o projeto destas estruturas na falha da primeira lâmina (FPF), pois esta pode ocorrer para uma carga muito inferior a carga limite, com a estrutura apresentando uma reserva considerável de capacidade de carga até que a perda da estabilidade ocorra. Esta reserva de carga é maior, em se tratando de laminados mais espessos.

Tabela 4 – Comparação entre as cargas limite da estrutura.

Laminação	Sem falha		Com falha		dif (%)	
	P_{Lim}	P_{FPF}	P_{Lim}	P_{FPF}/P_{Lim}		
L1	$h = h_1$	243.325	169.341	229.927	0.736	5.506
	$h = h_2$	1082.330	737.781	1050.900	0.702	2.904
L2	$h = h_1$	471.270	209.161	463.836	0.451	1.577
	$h = h_2$	1785.290	746.892	1718.200	0.435	3.758
L3	$h = h_1$	323.237	247.887	317.391	0.781	1.809
L4	$h = h_1$	276.506	192.104	270.852	0.709	2.045

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, buscou-se analisar a influência da consideração da falha progressiva em placas e cascas abatidas laminadas. Para isto, utilizou-se o elemento de casca abatida implementado por Rocha (2013) para simular a não linearidade geométrica e o modelo de degradação de Tsai (Kuirashi et al., 2002) para considerar a não linearidade física.

Deste modo, dois exemplos numéricos foram apresentados. No primeiro exemplo, foi feita a análise não linear puramente geométrica de placas isotrópica e laminadas simplesmente apoiadas, sujeitas a carregamentos uniaxial e biaxial, respectivamente. Verifica-se, neste exemplo, a importância das condições de contorno do problema, visto que esta pode interferir consideravelmente no comportamento pós-crítico da estrutura.

No segundo exemplo, analisou-se uma casca abatida laminada sujeita a uma carga concentrada, conforme apresentado por Sze (2004). Neste, percebe-se que a perda de estabilidade da estrutura ocorre por ponto limite. Quando a falha do material é adicionada ao modelo, a capacidade de carga da estrutura é reduzida, como era esperado. Entretanto, a inclusão da não linearidade física não muda, de forma qualitativa, o modo de ruptura da casca abatida, que é definido basicamente pela não linearidade geométrica.

Finalmente, verifica-se que no projeto de estruturas abatidas, pode ser antieconômica a adoção da restrição de falha na primeira lâmina, visto que o laminado pode apresentar uma reserva de carga considerável até o ponto limite.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem ao suporte financeiro da CAPES e do CNPq.

REFERÊNCIAS

- Bloomfield, M. W., Herencia, J. E., Weaver, P. M. Enhanced two-level optimization of an anisotropic laminated composite plates with strength and buckling constraints. *Thin-Walled Structures*, v. 47, p. 1161-1167, 2009.
- Crisfield, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, vol. 1, John Wiley and Sons, 1991.
- Dagenhardt, R., Kling, A., Rohwer, K., Orifici, A. C., Thomson, R. S. Design and analysis of stiffened composite panels including post-buckling and collapse, *Computers & Structures*, vol. 86, pp. 919-929, 2008.
- Dantas Junior, E. M. *Análise não linear de compósitos laminados utilizando o método dos elementos finitos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2014.
- Daniel, I. M.; Ishai, O. *Engineering mechanics of composite materials*, 1a ed., Oxford University Press, 1994.
- Houliara, S., Karamanos, S. A. Buckling and post-buckling of long pressurized elastic thin-walled tubes under in-plane bending, *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 41, pp.491-511, 2006.
- Jones, R. M. *Mechanics of composite materials*, 2 ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
- Kuirashi, A., Tsai, S. W., Liu, K. K. S. A progressive quadratic failure criterion, part B, *Composites, Sciences and Technology*, vol. 62, pp. 1683-1695, 2002.
- Lanzi, L. A numerical and experimental investigation on composite stiffened panels into post-buckling, *Thin-Walled Structures*, vol. 42, pp. 1645-1664, 2004.
- Le-Manh, T., Lee, J. Postbuckling of laminated composite plates using NURBS-based isogeometric analysis, *Composite Structures*, vol. 109, pp. 286-293, 2014.
- Liew, K. M., Wang, J., Tan, M. J., Rajendran, S. Postbuckling analysis of laminated composite plates using the mesh-free kp-Ritz method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 551, 570, 2006.
- Liu, B., Haftka, R. T., Akgun, M. A., Todoroki, A. Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, pp. 357-372, 2000.
- Liu, K. S., Tsai, S. W. A progressive quadratic failure criterion for a laminate, *Composite Sciences and Technology*, vol. 58, p. 1023-1032, 1998.
- Maimí P., Camanho P. P., Mayugo J. A., Dávila C. G. A continuum damage model for composite laminates: part I - constitutive model, *Mechanics of Materials*, vol. 39, pp. 897-908, 2007a.
- Maimí P., Camanho P. P., Mayugo J. A., Dávila C. G. A continuum damage model for composite laminates: part II - computacional implementation and validation, *Mechanics of Materials*, vol. 39, pp. 909-919, 2007b.

Rasheed, H. A., Yousif, O. H. Stability of anisotropic laminated rings and long cylinders subjected to external hydrostatic pressure, *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 8, pp. 129-138, 2005.

Reddy, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC Press, 2004.

Rocha, I. B. C. M.. *Análise e otimização de cascas laminadas considerando a não linearidade geométrica e falha progressiva*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2013.

Simulia. *ABAQUS/Standard user's manual*, Version 6.9, Providence, RI, USA, 2009.

Sundaresan, P., Singh, G., Rao, G. V. Buckling and postbuckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates, *Computers & Structures*, vol. 61, pp. 79-86, 1996.

Szillard, R. *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*, John Wiley & Sons, 2004.

Tsai, S. W., Wu, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials, *Journal of Composite Materials*, vol. 5, pp. 58-80, 1971.