UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VALRICÉLIO MENEZES XAVIER

SOBRE PRINCÍPIOS DO MÁXIMO RELACIONADOS AO CRESCIMENTO DE VOLUME E SUAS APLICAÇÕES

FORTALEZA

2022

VALRICÉLIO MENEZES XAVIER

SOBRE PRINCÍPIOS DO MÁXIMO RELACIONADOS AO CRESCIMENTO DE VOLUME E SUAS APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

X24s Xavier, Valricélio Menezes.
Sobre princípios do máximo relacionados ao crescimento de volume e suas aplicações / Valricélio Menezes Xavier. – 2022.
131 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Princípio do máximo. 2. Teoremas tipo-Bernstein. 3. Campo vetorial conforme fechado. 4. Variedades semi-riemannianas. 5. Hipersuperfícies tipo-espaço. I. Título.

CDD 510

VALRICÉLIO MENEZES XAVIER

SOBRE PRINCÍPIOS DO MÁXIMO RELACIONADOS AO CRESCIMENTO DE VOLUME E SUAS APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 31/08/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luís José Alías Linares
Universidad de Murcia (UMU)

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me iluminar neste árduo caminho.

À meus pais, Manoel Celio Xavier e Maria Aglailde Menezes Xavier, e meu irmão, Mateus Menezes Xavier, que sempre me apoiaram e incentivaram em todas as decisões que tomei ao longo desses anos.

À minha esposa, Josefa Regina, por me aguentar, compreender e se fazer presente em todos os momentos. Somente ela sabe o quanto eu me dediquei e abdiquei para chegar até aqui.

Ao meu orientador, professor Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, que dispôs de seu tempo orientando não somente este trabalho como também toda minha trajetória como pesquisador matemático, ensinando um pouco de sua experiência de vida e profissional, não só com suas palavras, mas também através de seu exemplo e sem o qual eu certamente não conseguiria escrever um texto desse nível.

A todos os professores do departamento de Matemática UFC, em especial aqueles que puderam compartilhar seu conhecimento comigo ao longo de toda pós-graduação, Antonio Caminha, Abdênago Barros, Cleon Barroso, Ernani Ribeiro, Frederico Girão, Gleydson Ricarte, Marcelo Melo, Fernanda Camargo, Diego Moreina, Ederson Braga, Edson Sampaio e Luquesio Jorge e a todos os professores do IFCE, em especial Angelo Papa, Aluísio Cabral, Maria Eugênia, Jânio Kléo e José Stálio.

Aos membros da banca Abdênago Barros, Jonantan Floriano, Luis Alías, Marco Velásquez e Yure Nascimento, pela disponibilidade e suas ótimas sugestões para melhorar esse texto.

A todos meus amigos da pós-graduação que puderam compartilhar comigo suas experiências e aflições para além da sala de aula, em especial, àqueles que estiveram comigo desde o mestrado: André Costa, Antônio Aguiar, Danuso Rocha, Diego Silva, Edilson Filho, Emanoel Ferreira, Felipe Fernandes,Rosa Tayane e Tiago Gadelha.

À Andrea Dantas e Jessyca Soares, secretárias da PGMAT, por toda competência e agilidade ao resolver quaisquer problemas que surgiram.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

“Somewhere, something incredible is waiting to be known.”(SAGAN, 1977)

RESUMO

Este trabalho está dividido em três partes. Na primeira parte, o objetivo é generalizar o princípio do máximo para funções suaves f em variedades riemannianas M completas e não compactas, com crescimento de volume polinomial ou exponencial, para os quais exista um campo vetorial X de norma estimada pela função distância elevada a k, para $k \in [0,1]$, tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ em M e $\operatorname{div} X \geq af$ fora de um subconjunto fechado de M, para alguma função positiva $a \in \mathcal{C}^1(M)$ com a condição de $\langle \nabla a, X \rangle \geq 0$. Com esse resultado, provaremos teoremas de rigidez do tipo-Bernstein para hipersuperfícies orientadas imersas em uma variedade riemanniana munida de um campo conforme fechado. Para a segunda parte, estenderemos esse princípio do máximo para variedade riemannianas com peso σ, além de provar teoremas de rigidez do tipo-Bernstein para hipersuperfícies orientadas imersas em uma variedade riemanniana com peso munida de um campo conforme fechado. Por fim, na última parte, estudaremos aplicações desses princípios do máximo em variedades lorentzianas, começando por hipersuperfícies tipo-espaço de espaços-tempo conformemente estacionários, passando por hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados e finalizando em hipersuperfícies tipo-espaço de espaços-tempo pp-wave.

Palavras-chave: princípio do máximo; teoremas tipo-Bernstein; campo vetorial conforme fechado; variedades semi-riemannianas; hipersuperfícies tipo-espaço.

ABSTRACT

This work is divided into three parts. In the first part, the objective is to generalize the maximum principle for smooth functions f in complete and noncompact Riemannian manifolds M with polynomial or exponential volume growth, for which there is a vector field X whose norm is estimated by the distance function to the power of k, for $k \in [0, 1]$, such that $\langle \nabla f, X\rangle \geq 0$ in M and div $X \geq af$ outside a closed subset of M, for some positive function $a \in \mathcal{C}^1(M)$ such that $\langle \nabla a, X\rangle \geq 0$. With this result at hand, we will prove Bernstein-type rigidity theorems for oriented hypersurfaces immersed in a Riemannian manifold with a closed conformal field. For the second part, we will extend this maximum principle to weighted Riemannian manifolds σ, in addition to proving Bernstein-type rigidity theorems for oriented hypersurfaces embedded in a weighted Riemannian manifold endowed with a closed conformal field. Finally, in the last part, we will study applications of these maximum principles in Lorentzian manifolds, starting with spacelike hypersurfaces of conformally stationary spacetimes, passing through spacelike hypersurfaces in generalized Robertson-Walker spacetimes and ending with spacelike hypersurfaces in pp-wave spacetimes.

Keywords: maximum principle; Bernstein-type theorems; closed conformal vector field; semi-Riemannian manifolds; spacelike hypersurface.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em Geometria Diferencial, diversas situações geométricas são modeladas de forma analítica, principalmente, com o auxílio de operadores diferenciais parciais lineares ou elípticos quasilineares, tais como o gradiente e o divergente. Por exemplo, sabemos pelo Teorema de Hopf, que as únicas funções subharmônicas em variedades riemannianas compactas sem bordo são as funções constantes. Esse resultado, por sua vez, conduz a diversas aplicações envolvendo variedades compactas. Na tentativa de estender diversos teoremas que utilizam o Teorema de Hopf, de variedades compactas para variedades completas não compactas, diversas formas de princípio do máximo foram desenvolvidas.

Nesse sentido, em 1967, Omori introduziu uma importante forma de princípio do máximo conhecida como o princípio do máximo de Omori (veja [29]), a qual foi posteriormente modificada por Yau (veja [35]), dando origem ao famoso princípio do máximo de Omori-Yau. Diversos trabalhos foram elaborados com objetivo obter princípios do máximo em variedades completas não compactas, tais como [3, 4, 6, 12, 31].

Em especial, o presente trabalho estende o princípio do máximo em variedades riemanniandas com crescimento de volume prescríto, presente no trabalho de Alías, Caminha e Nascimento (cf. [4]). Nesse artigo, é provado o seguinte resultado:

Teorema 1.1 (Alías-Caminha-Nascimento). *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial limitado em M, com $|X| < c$, e K um subconjunto compacto de M tal que $M \setminus K$ é estável sob o fluxo de X. Suponha que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ é tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ em M e $\mathrm{div}X \geq af$ em $M \setminus K$, para alguma constante $a > 0$.*

(a) Se M tem crecimento de volume polinomial, então $f \leq 0$ em $M \setminus K$.

(b) Se M tem crecimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, então $f \leq \frac{c\beta}{a}$ em $M \setminus K$.

Assim, a presente tese é motivada por dois objetivos principais: estender o Teorema 1.1 e mostrar suas aplicações em diversos contextos. Com isso, as Seções 3.1 e 4.2 buscam obter o primeiro objetivo, enquanto as Seções 3.2 e 4.3 e o Capítulo 5 procuram atender o segundo objetivo.

No Capítulo 3, inicialmente estendemos o Teorema 1.1, fazendo com que K seja somente um conjunto fechado ao invés de compacto e tomando a como uma função suave e positiva tal que $\langle \nabla a, X \rangle \geq 0$ em M. O outro teorema principal dessa seção é o Teorema 3.4, no qual se obtém um princípio do máximo para o caso em que $|X| \leq c\rho^k$, onde c é uma constante positiva, $k \in [0, 1]$ e $\rho = d(o, \cdot)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$. As conclusões desse teorema são semelhantes às conclusões do Teorema 1.1, exceto em dois casos. O primeiro é quando M tem crescimento de volume polinomial, como t^n, e $k = 1$, quando se obtém $f \leq \frac{nc}{a}$ como conclusão. O segundo caso ocorre quando M tem crescimento de volume exponencial e $|X|(x) \to 0$ à medida que $\rho(x) \to +\infty$, quando se obtém $f \leq 0$ como conclusão.

Como consequências iniciais desses princípios do máximo, obtemos aplicações diretas para soluções e subsoluções de algumas EDPs em M, incluindo uma extensão de resultados clássicos de Cheng e Yau [15] (veja os Corolários 3.6 e 3.7), além de mostrar que funções harmônicas, sob certas circunstâncias envolvendo o tensor de Ricci e Hessiano, são constantes. Obtemos, ainda, resultados de certa forma relacionados a teoremas de Fischer-Colbrie e Schoen [19] (veja os Corolários 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12).

Na segunda seção do Capítulo 3, apresentamos aplicações dos princípios do máximo obtidos na seção anterior a resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies imersas em variedades riemannianas munidas de campo vetorial conforme fechado. Nessa parte, procuramos estender resultados obtidos em [3] e [4]. Inicialmente, consideramos os casos onde o operador de Weingarten é não positivo ou não negativo (Teorema 3.15). Outro resultado envolve como hipóteses a não negatividade de uma pertubação do operador de Weingarten por um múltiplo da identidade, além de uma estimativa envolvendo o tamanho de uma função suporte na hipersuperfície (Teorema 3.22). Posteriormente, analisamos o caso em que a variedade ambiente é Einstein, o operador de Weingarten é limitado e uma certa estimativa do tamanho de uma função suporte na hipersuperfície é satisfeito (Teorema 3.30). Obtemos, ainda, dois resultados de rigidez quando a variedade ambiente possui curvatura seccional constante e uma certa função suporte satisfaz estimativas envolvendo as r-ésimas transformações de Newton (Teoremas 3.35 e 3.41). Para cada um desses resultados, obtemos corolários ao trocar o campo conforme fechado por um campo paralelo, e discutimos exemplos envolvendo hipersupefícies de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$.

No Capítulo 4, consideraremos M^n uma variedade riemanniana e uma função suave $\sigma : M^n \to \mathbb{R}$ e designaremos a variedade com peso M^n_σ associada a M^n e σ como a tripla $(M^n, g, d\mu = e^{-\sigma} dM)$, onde dM denota o elemento de volume usual e g é o tensor métrico de M^n. Nesse ambiente, podemos estender a definição de alguns operadores, conforme é mostrado em [34]. O tensor de Bakry-Émery-Ricci é dado por

$$\mathrm{Ric}_\sigma := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,\sigma.$$

A σ-divergência de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dada por

$$\mathrm{div}_\sigma(X) := e^\sigma \mathrm{div}(e^{-\sigma} X) = \mathrm{div}(X) - \langle \nabla\sigma, X\rangle,$$

logo, o σ-laplaciano de uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é dado por:

$$\Delta_\sigma f = \mathrm{div}_\sigma(\nabla f) = \Delta f - \langle \nabla\sigma, \nabla f\rangle.$$

Além disso, volume com peso de um domínio limitado Ω de M é dado por:

$$\mathrm{vol}_\sigma(\Omega) = \int_\Omega e^{-\sigma} dM.$$

O objetivo princial deste capítulo é estender os resultados obtidos no capítulo anterior, a respeito do princípio do máximo, para variedades com crescimento de volume prescrito, alterando a informação de volume usual para volume com peso.

Na segunda seção do Capítulo 4, obtemos o resultado mais abrangente a respeito do princípio do máximo para variedades com crescimento de volume prescrito, conforme motrado no teorema a seguir.

Teorema 1.2. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial em M e K um subconjunto fechado (possivelmente vazio) de M tal que $M \setminus K$ seja estável sob o fluxo de X. Considere $\rho = d(\cdot, o)$ a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e constantes $c > 0$, $0 \leq k \leq 1$. Suponha que $|X| < c\rho^k$ fora de algum subconjunto compacto de M se $0 < k \leq 1$, e $|X| < c$ em M se $k = 0$. Suponha que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ seja tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ em M e $\mathrm{div}_\sigma\, X \geq af$ em $M \setminus K$, para alguma função positiva $a \in \mathcal{C}^1(M)$ tal que $\langle \nabla a, X \rangle \geq 0$. Assim, temos duas situações:*

(a) M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial: se $k < 1$, então $f \leq 0$ em $M \setminus K$. Se $k = 1$ e M_σ tem crescimento de σ-volume como t^n, então $f \leq \frac{nc}{a}$.

(b) M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$: se $k = 0$, então $f \leq \frac{c\beta}{a}$ em $M \setminus K$. Se $|X|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, então $f \leq 0$ em $M \setminus K$.

Observe que o Teorema 1.2 abrange os princípios do máximo obtidos anteriormente, quando consideramos o peso $\sigma \equiv 0$. Com isso, a intenção de separar os casos com e sem peso tem o intuito de mostrar as aplicações de forma mais didática, podendo interessar, separadamente, tanto aqueles que buscam resultados apenas para variedades riemannianas quanto aqueles que buscam resultados envolvendo variedades riemannianas com peso. Além disso, mostra de que forma esses resultados foram obtidos, ao apresentá-los de acordo com a ordem que forma concebidos cronologicamente.

Na terceira seção do Capítulo 4, apresentamos aplicações dos princípios do máximo, para variedades com crescimento de volume com peso prescrito, semelhantes àquelas obtidas na segunda seção do Capítulo 3. Alguns resultados envolvendo variedades com crescimento de volume exponencial puderam ser reobtidos ao transformar tais variedades em variedades com crescimento de σ-volume polinomial, a partir de uma função peso σ adequada, conforme mostrado nos Corolários 4.23, 4.30, 4.35, 4.41 e 4.44. Além disso, essa seção possui uma aplicação envolvendo sólitons de Ricci gradiente, que são variedades que possuem uma função suave σ e uma constante λ tal que $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, \sigma = \lambda\langle , \rangle$, conforme é mostrado no Teorema 4.36. Para cada teorema dessa seção, mostramos aplicações em exemplos envolvendo hipersupefícies de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^k$ e $\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^k$.

Finalmente, no Capítulo 5 estudamos problemas relacionados à geometria de hipersuperfícies imersas em espaços de Lorentz. O estudo dessas variedades vem crescendo nas últimas décadas, principalmente por suas aplicações a modelos de universo no campo da Física, como aparece no livro [18]. Do ponto de vista matemático, estamos interessados em obter a rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço de variedades lorentzianas munidas de campo vetorial conforme fechado. Nesse sentido, estudamos três ambientes lorentzianos ao longo de três seções, que são as variedades semi-riemannianas conformemente estacionárias, os espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados e os espaços-tempo pp-wave.

Na primeira seção do Capítulo 5, estudamos resultados relacionados a variedades conformemente estacionárias, que são variedades lorentzianas orientáveis munidas de um campo conforme tipo-tempo globalmente definido. Em particular, os teoremas principais dessa seção são obtidos quando os campos conformes em questão são fechados. O primeiro resultado de rigidez é obtido através de estimativas envolvendo o operador de Weingarten e o campo conforme fechado, como enunciado a seguir.

Teorema 1.3. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade lorentziana orientada conformemente estácionária, munida com um campo conforme fechado K tipo-tempo cujo fator conforme é ϕ. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Sejam N um campo normal unitário a Σ em $\overline{M}$, tal que o operador $A_\phi := A + \phi/|K|I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten na direção de N e I o operador identidade. Assuma, ainda, que $K^\top(\mathrm{tr}(A_\phi)) \geq 0$ em Σ, que K seja limitado e livre de zeros em Σ e*

$$n\phi + |K|\mathrm{tr}(A_\phi) + \frac{n\eta\phi}{|K|} \geq 0,$$

onde $\eta = \langle N, K\rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\phi/|K|I$.

(b) Se Σ tem crescimento de volume exponencial, $|K^\top|$ tende a zero no infinito e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\phi/|K|I$.

Outro teorema principal dessa seção é obtido quando o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, relacionando estimativas envolvendo a k-ésima transformação de Newton P_k e o campo conforme fechado, como enunciado a seguir.

Teorema 1.4. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade lorentziana orientada, conformemente estácionária e com curvatura seccional constante, munida com um campo conforme fechado K tipo-*

tempo, cujo fator conforme é ϕ*. Considere* $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$*, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em* $\overline{M}$*. Oriente* Σ *pelo campo normal unitário* N*, globalmente definido, e suponha que* Σ *tenha segunda forma fundamental* A *limitada, que, para algum* $k \in \{0, \dots, n-1\}$*,* P_k *seja positiva definida (respectivamente, negativa definida), que* $A_\phi := A + \phi/|K|I$ *seja não negativa (respectivamente, não positiva), que* K *seja limitada, livre de zeros e* $K^\top(\mathrm{tr}(A_\phi P_k)) \geq 0$ *(respectivamente,* $K^\top(\mathrm{tr}(A_\phi P_k)) \leq 0$*) em* Σ *e que valha a seguinte condição:*

$$\phi\mathrm{tr}(P_k) + \mathrm{tr}(A_\phi P_k)|K| + \frac{\eta\phi\mathrm{tr}(P_k)}{|K|} \geq 0,$$

(respectivamente,

$$\phi\mathrm{tr}(P_k) + \mathrm{tr}(A_\phi P_k)|K| + \frac{\eta\phi\mathrm{tr}(P_k)}{|K|} \leq 0\Big)$$

onde $\eta = \langle N, K\rangle$*. Assim, temos duas situações:*

(a) Se Σ *tem crescimento de volume polinomial e existe* $p \in \Sigma$ *tal que* $\theta(p) = 0$*, onde* θ *é a função ângulo hiperbólico entre* K *e* N*, então* Σ *é uma folha da distribuição* $\langle K\rangle^\perp$ *e é umbílica em* $\overline{M}$*, com* $A = -\phi/|K|I$*.*

(b) Se Σ *tem crescimento de volume exponencial,* $|K^\top|$ *tende a zero no infinito e existe* $p \in \Sigma$ *tal que* $\theta(p) = 0$*, onde* θ *é a função ângulo hiperbólico entre* K *e* N*, então* Σ *é uma folha da distribuição* $\langle K\rangle^\perp$ *e é umbílica em* $\overline{M}$*, com* $A = -\phi/|K|I$*.*

Além disso, essa seção também traz aplicações a respeito da geometria de hipersuperfícies tipo-espaço nos espaços de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, em subespaços do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e do espaço anti-De Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$, mostrados nos corolários 5.3, 5.6, 5.8, 5.11, 5.16, 5.17, 5.19 e 5.21.

Na segunda seção do Capítulo 5, estudamos resultados relacionados a espaços-tempo de Roberson-Walker gereneralizados, conhecidos com GRW, que são variedades lorentzianas orientáveis construídas a partir de produtos warped do tipo $-I \times_\varrho M^n$, onde I é um intervalo aberto real, M^n é uma variedade riemanniana e $\varrho : I \to \mathbb{R}$ é uma função suave positiva. Nesse caso, $\varrho\partial_t$ é um campo conforme fechado de fator conforme ϱ'. Um dos resultados principais dessa seção é obtido a partir de estimativas da função altura de uma hipersuperfície tipo-espaço imersa nesse GRW, conforme enunciamos a seguir.

Teorema 1.5. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = -I \times_\varrho M^n_\sigma$ *um espaço-tempo GRW não compacto, com função peso* $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ *tal que* $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t\rangle = 0$*. Considere* $\varphi : \Sigma^n \to -I \times_\varrho M^n_\sigma$*, uma variedade tipo-espaço completa, não compacta, orientada, com campo normal unitário* N *tipo-tempo e situada no interior de uma faixa do produto warped com peso* $-I \times_\varrho M^n_\sigma$*. Suponha que* *exista uma constante real positiva λ satisfazendo a seguinte condição:*

$$h \geq \sup_{\Sigma} h - \lambda(\eta H_\sigma + (\ln \varrho)'(h)),$$

onde $h = \pi_I \circ \varphi$ é a função altura e $\eta = \langle \partial_t, N\rangle$ é limitada. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ e M têm σ-volume polinomial, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

(b) Se Σ e M têm σ-volume exponencial e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

Outro resultado principal dessa seção aparece quando consideramos estimativas envolvendo a função $\zeta(t) = \int_{t_o}^t \varrho dt$ em uma hipersuperfície tipo-espaço imersa nesse GRW, conforme mostramos a seguir.

Teorema 1.6. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_\varrho M_\sigma^n$ um espaço-tempo GRW não compacto, com função peso $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ tal que $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t\rangle = 0$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to -I \times_\varrho M_\sigma^n$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada com campo normal unitário N tipo-tempo e situada no interior de uma faixa do produto warped com peso $-I \times_\varrho M_\sigma^n$. Suponha que exista uma constante real positiva λ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\zeta \geq \sup_{\Sigma} \zeta - \lambda(\eta H_\sigma + (\ln \varrho)'(h)),$$

onde $\hat{\zeta}(t) = \int_{t_0}^t \varrho(s)ds$, $h = \pi_I \circ \varphi$ é a função altura, $\zeta(p) = \hat{\zeta}(h(p))$, para todo $p \in \Sigma$, e $\eta = \langle \partial_t, N\rangle$ é limitada. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ e M têm σ-volume polinomial, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

(b) Se Σ e M têm σ-volume exponencial e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

O outro resultado principal dessa seção é provado quando o espaço em questão é um espaço-tempo GRW *estático*, a que ocorre quando o produto warped é um produto usual, ou seja, $\varrho \equiv 1$, conforme é enunciado a seguir.

Teorema 1.7. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times M_\sigma^n$ um espaço-tempo GRW estático não compacto com função peso $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ tal que $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t\rangle = 0$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to -I \times M_\sigma^n$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada. Suponha que exista um número real positivo λ tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma(N^*, N^*) \geq \lambda |N^*|^2$, onde a segunda forma fundamental A é limitada, $\eta = \langle N, \partial_t\rangle$ é limitada, $N^* = N + \eta\partial_t$ e $\partial_t(H_\sigma) \leq 0$. Assim, temos duas situações:*

(a) Se Σ e M têm σ-volume polinomial, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times M^n$.

(b) Se Σ e M têm σ-volume exponencial e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times M^n$.

Por fim, a terceira seção do Capítulo 5 traz aplicações relacionadas a espaços-tempo pp-wave, que são variedades lorentzianas orientáveis, munidas de um campo paralelo tipo-luz globalmente definido. Esses espaços pertencem a uma classe de soluções exatas das equações de campo de Einstein em condições específicas, conforme mostrado no Capítulo 24 de [21]. O termo espaço-tempo pp-wave é uma abreviação do termo em inglês *spacetimes of plane-fronted gravitational waves with parallel rays*, e o estudo de tais espaços foi iniciado em 1925, com Brinkmann [11].

Para provar os resultados principais dessa seção, precisamos supor que o espaço ambiente tem crescimento de volume polinomial e que satisfaz a condição de convergência, conhecida como TCC, do termo em inglês *Timelike Convergence Condition*. A seguir, enunciamos tais resultados principais.

Teorema 1.8. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave com um campo vetorial paralelo tipo-luz ξ e satisfazendo a condição TCC, e $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta com crescimento de volume polinomial e com segunda forma fundamental limitada. Escolha um campo vetorial normal unitário N tipo-tempo ao longo de Σ, cuja curvatura média H satisfaz $\xi^\top(H) \leq 0$. Se a função suporte $\eta = \langle N, \xi\rangle$ é limitada e $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)+|A|^2 \notin (0,\varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$. Então, Σ é totalmente geodésica em $\overline{M}^{n+1}$ e a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ na direção de N é identicamente nula.*

Teorema 1.9. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave com campo vetorial paralelo tipo-luz ξ e satisfazendo a condição TCC, e $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta e com crescimento de volume polinomial. Escolha um campo vetorial normal unitário N tipo-tempo ao longo de Σ, com operador de Weingarten não positivo (respectivamente, não negativo) e com curvatura média H satisfazendo $\xi^\top(H) \leq 0$. Se em Σ as funções H, $|\nabla H|$ e $\eta = \langle N, \xi\rangle$ forem limitadas, então $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é totalmente geodésica, η é constante e a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ é identicamente nula na direção de N.*

Teorema 1.10. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp wave com campo vetorial paralelo tipo-luz ξ e satisfazendo a condição TCC, e $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, completa, não compacta, tipo-espaço e com crescimento de volume polinomial. Escolha um campo vetorial normal unitário N ao longo de Σ, e suponha que φ tenha curvatura média H satisfazendo $\xi^\top(H) \leq 0$ e operador de Weingarten limitado em relação a N. Suponha, ademais, que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) $\eta = \langle N, \xi\rangle$ *é tal que* $-\infty < \inf_\Sigma \eta \leq \eta \leq \sup_\Sigma \eta < 0$.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ *tal que* $C \cdot \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq \left(\frac{\eta}{\sup_\Sigma \eta} - 1\right)$.

(iii) $2|A\xi^\top|^2 \leq |A|^2|\xi^\top|^2$.

Então, φ é totalmente geodésica e a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ na direção de N é identicamente nula.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, veremos algumas definições e resultados que servirão de base para o restante do trabalho.

2.1 Crescimento de volume

Para discutir estimativas de crescimento de volume, precisaremos da definição a seguir.

Definição 2.1. *Dadas funções $f, g : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$, se existirem $M > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $g(x) > 0$ e $|f(x)| \leq M \cdot g(x)$, para todo $x \geq a$, dizemos que $f(x)$ é "O"grande de $g(x)$ e denotamos*

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)).$$

Em outras palavras, estamos dizendo que o quociente $f(x)/g(x)$ é limitado para $x \geq a$.

Observação 2.2. *Para essa definição, é fácil ver que as seguintes propriedades são válidas:*

i) A equação $f(x) = h(x) + \mathcal{O}(g(x))$ significa que $f(x) - h(x) = \mathcal{O}(g(x))$.

ii) Se f e g forem contínuas $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ para $t \geq a$, então

$$\int_a^x f(t)dt = \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

para $x \geq a$.

iii) Se $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ para $x \geq a$ e $h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ para $x \geq b$ então $f(x) + h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ para $x \geq c = \max\{a, b\}$.

iv) Se quisermos dizer que uma função f é limitada, podemos escrever $f(x) = \mathcal{O}(1)$ para todo x em seu domínio.

Consideremos M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta. Denotemos por $B(p, t)$ a bola geodésica centrada em p e com raio t. Dada uma função $\chi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, dizemos que M tem crescimento de volume como $\chi(t)$ se existir $p \in M$ tal que

$$\mathrm{vol}(B(p, t)) = \mathcal{O}(\chi(t))$$

quando $t \to +\infty$, onde vol denota o volume riemanniano.

Se $p, q \in M$ têm distância d um do outro, não é difícil ver que

$$\frac{\mathrm{vol}(B(p,t))}{\chi(t)} \geq \frac{\mathrm{vol}(B(q,t-d))}{\chi(t-d)} \cdot \frac{\chi(t-d)}{\chi(t)}.$$

Dessa forma, a escolha do ponto $p \in M$ é irrelevante para determinar o crescimento de volume da variedade. Com isso, diremos que M tem *crescimento de volume polinomial* quando o volume de suas bolas geodésicas puderem ser estimados por algum polinômio. Da mesma forma, diremos que M tem *crescimento de volume exponencial* quando o volume de suas bolas geodésicas puderem ser estimados por uma função do tipo $\chi(t) = e^{\beta t}$, com $\beta > 0$.

Exemplo 2.3. *As variedades $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$, com $n > 1$, possuem formas polares, dadas por $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times_t \mathbb{S}^{n-1}$ e $\mathbb{H}^n = \mathbb{R} \times_{\sinh t} \mathbb{S}^{n-1}$, e métricas canônicas dadas, respectivamente, por $ds^2_{\mathbb{R}^n} = dr^2 + r^2 ds^2_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e $ds^2_{\mathbb{H}^n} = dr^2 + \sinh^2 r \; ds^2_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Dados $p \in \mathbb{R}^n$ e $q \in \mathbb{H}^n$, tem-se:*

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n}(B(p,t)) = \omega_{n-1} \int_0^t r^{n-1} dr = \mathcal{O}(t^n)$$

quando $t \to +\infty$ e

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^n}(B(q,t)) = \omega_{n-1} \int_0^t \sinh^{n-1} r \; dr = \mathcal{O}(e^{(n-1)t}),$$

quando $t \to +\infty$. Aqui, $\omega_{n-1} := \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$. Logo, $\mathbb{R}^n$ possui crescimento de volume polinomial e $\mathbb{H}^n$ possui crescimento de volume exponencial.

2.2 Transformações de Newton

Ao longo dessa seção, considere M^{n+1} uma variedade riemanniana e $\psi : \Sigma^n \to M^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana orientável Σ^n em M^{n+1}. Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de Σ^n e M^{n+1}, respectivamente. Oriente Σ^n pela escolha de um campo normal unitário N e denote por A o operador de Weingarten na direção de N, isto é, $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é dado por $AX = -\overline{\nabla}_N X$, para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Doravente, resumimos esse contexto e notação dizendo simplesmente que Σ^n *é uma hipersuperfície orientável de M^{n+1}.*

A r-ésima transformação de Newton, $T_r : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$, é definida recursivamente por:

$$T_0 = I \;\text{ e }\; T_r = S_r I - A T_{r-1}, \; 1 \leq r \leq n,$$

onde I denota a identidade em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $S_r(p)$ denota a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A_p, para cada $p \in \Sigma$.

É fácil verificar, através de indução, que:

$$T_r = S_r I - S_{r-1}A + \cdots + (-1)^{r-1}S_1 A^{r-1} + (-1)^r A^r.$$

Em particular, $T_n = p_A(A)$, onde p_A é o polinômio característico de A, de forma que $T_n = 0$, pelo Teorema de Cayley-Hamilton.

Uma vez que A é autoadjunto e T_r é um polinômio em A, toda base que diagonaliza A diagonaliza T_r. Usando esse fato e o que vimos anteriormente, não é difícil verificar que, para $1 \leq r \leq n$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_r) &= (n-r)S_r, \\ \mathrm{tr}(AT_r) &= (r+1)S_{r+1}, \\ \mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}) &= S_1 S_r - (r+1)S_{r+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Definição 2.4. *Sejam Σ^n uma hipersuperfície conexa e orientável de M^{n+1}. Definimos o divergente da r-ésima transformação de Newton por*

$$\mathrm{div}_\Sigma\, T_r = \mathrm{tr}\left(\nabla T_r\right),$$

onde

$$\left(\nabla_X T_r\right) Y = \nabla_X (T_r Y) - T_r\left(\nabla_X Y\right),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

O lema a seguir foi demonstrado, por caminhos distintos, na Seção 3 de [2] e no Capítulo 2 de [22].

Lema 2.5. *Sejam Σ^n uma hipersuperfície conexa e orientável de M^{n+1}, T_r a r-ésima transformação de Newton e $\overline{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o tensor de Riemann de M. Orientando Σ^n por um campo normal unitário N e tomando um referencial ortonormal local $\{E_i\}_{i=1}^n$ em Σ^n, temos, para todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,*

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma T_r, X\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(N, T_{r-j}E_i)E_i, A^{j-1}X\rangle.$$

Corolário 2.6. *Nas notações acima, se o espaço ambiente M^{n+1} tiver curvatura seccional constante, então $\mathrm{div}_\Sigma T_r = 0$ para cada $0 \leq r \leq n$.*

2.3 Variedades semi-riemannianas

Em tudo o que segue, V denota um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita:
(a) *Positiva definida*, quando $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.
(b) *Negativa definida*, quando $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.
(c) *Não degenerada*, quando $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

Se $\langle , \rangle$ é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subspaço W de V é dito *não degenerado* se $\langle , \rangle|_{W\times W}$ for não degenerada. Além disso, o *índice* de uma forma bilinear simétrica é a maior dimensão de um subspaço W de V tal que $\langle , \rangle|_{W\times W}$ seja negativa definida. Dados uma forma bilinear simétrica $\langle , \rangle$ sobre V e um subespaço W de V, definimos o *complemento ortogonal* de W em V, denotado por $W^\perp$, por

$$W^\perp = \{v \in V; \langle v, w\rangle = 0; \forall w \in W\}.$$

O lema enunciado a seguir é provado em [28] e revela propriedades importantes de formas bilineares simétricas.

Lema 2.7. *Seja $\langle , \rangle$ uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então*
(a) $\langle , \rangle$ é não degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma base de V for invertível.
(b) Se W é não degenerado, então $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ e $(W^\perp)^\perp = W$.
(c) W é não degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^\perp$.

Fixada uma forma bilinear simétrica e não degenerada $\langle , \rangle$ sobre um espaço vetorial V, dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é:

(a) *Tipo-tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;
(b) *Tipo-luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;
(c) *Tipo-espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$.

Além disso, definimos o que significa para um subespaço não degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o sinal $\varepsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\varepsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

Ademais, a *norma* de $v \in V$ é $|v| = \sqrt{\varepsilon_v\langle v, v\rangle}$, e v é unitário se $|v| = 1$. Temos que V admite uma base ortonormal $\{e_i\}$ com respeito a $\langle , \rangle$, ou seja, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \varepsilon_i\delta_{ij}$.

Assim, $v \in V$ pode ser representado com respeito a uma tal base $\{e_i\}$ por

$$v = \sum_i \varepsilon_i \langle v, e_i \rangle.$$

Definição 2.8. *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável M é um 2-tensor covariante e simétrico g sobre M, tal que g_p é não degenerada para todo $p \in M$. Uma variedade semi-riemanniana M é um par (M, g), onde M é uma variedade diferenciável e $g = \langle , \rangle$ é um tensor métrico de índice ν constante sobre M. Quando o índice ν de M é 0, M é simplesmente uma variedade riemanniana, quando $\nu = 1$, M é denominada em variedade de **Lorentz** (ou **espaço-tempo**[1]).*

Exemplo 2.9 (Espaço semi-euclidiano)**.** *$\mathbb{R}^n_\nu$ denota o espaço semi-euclidiano de dimensão n e índice ν, tais que $n \geq \nu + 1 \geq 2$, isto é, o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica semi-riemanniana*

$$\langle , \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} dx_i^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n} dx_j^2,$$

onde $(x_1, \ldots, x_n)$ são as coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^n$. Além disso, o espaço semi-euclidiano $\mathbb{R}^n_1$ é denotado por $\mathbb{L}^n$ e é conhecido como o espaço de Lorentz-Minkowski.

2.4 Imersões isométricas em variedades semi-riemannianas

Sejam Σ^m, M^n variedades semi-riemannianas (onde a primeira, em alguns contextos, será uma variedade riemanniana) orientáveis e $\psi : \Sigma^m \to M^n$ uma imersão isométrica. Em particular, se $m = n - 1$, então Σ é uma *hipersuperfície* de M. Vale mencionar que, se Σ for uma variedade riemanniana e for uma hipersuperfície de uma variedade lorentziana M, então Σ é dita uma *hipersuperfície tipo-espaço.*

Doravante, denotaremos ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de Σ e M, respectivamente. Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, tem-se $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$, onde o $\top$ sobrescrito denota componente tangente. Assim,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde $\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ é a segunda forma fundamental (vetorial) de ψ. Seja N um campo normal unitário de Σ em M. Uma vez que α é $\mathcal{C}(\Sigma)$-bilinear e simétrica,

[1]Em verdade, entre os matemáticos há um uso indevido desse termo. Dentre as variedades de Lorentz, somente aquelas que são soluções para as equações de Einstein são chamadas de espaços-tempo.

definindo

$$\langle A_N X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), N\rangle,$$

obtemos um campo $A_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ de operadores lineares autoadjuntos $A_{N_p} : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$, para $p \in \Sigma$, denominado o *operador de Weingarten na direção de N em p*. É imediato verificar que $A_N X = -(\overline{\nabla}_X N)^{\top}$. No caso em que Σ é uma hipersuperfície de M, temos

$$A_N = -\overline{\nabla}_X N, \;\; \alpha(X,Y) = \varepsilon_N \langle A_N X, Y\rangle N,$$

e denotamos, A_N por A, sempre que não houver perigo de confusão.

Exemplo 2.10. *As variedades semi-riemannianas $\mathbb{S}^n_\nu(c)$ e $\mathbb{H}^n_\nu(c)$ são dadas por*

$$\mathbb{S}^n_\nu(c) = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu ; -\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} x_j^2 = \frac{1}{c} \right\}, \;\; (c > 0)$$

e

$$\mathbb{H}^n_\nu(c) = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1} ; -\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2 + \sum_{j=\nu+2}^{n+1} x_j^2 = \frac{1}{c} \right\}, \;\; (c < 0).$$

Esses espaços são completos e de curvatura seccional constante c (veja [1] ou [28]). Os espaços $\mathbb{S}^n_\nu(c)$ e $\mathbb{H}^n_\nu(c)$ são chamados de semi-esfera e semi-hiperbólico, respectivamente. É possível mostrar (veja [28]) que $\mathbb{S}^n_\nu(c)$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{S}^{n-\nu}$ e $\mathbb{H}^n_\nu(c)$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}$. Esses espaços são conhecidos como formas espaciais semi-riemannianas. Em particular, o $\mathbb{S}^n_1(1)$ é conhecido como espaço de De Sitter e $\mathbb{H}^n_1(-1)$ como espaço anti-De Sitter.

Para finalizar essa seção, iremos definir e mencionar alguns resultados a respeito de Trasnformações de Newton no contexto lorentziano, relativamente a hipersuperfícies tipo-espaço. Considere $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade lorentziana, ou seja, uma variedade semi-riemanniana de índice 1, orientável, munida com um campo vetorial tipo-tempo globalmente definido, e $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão suave tal que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço em $\overline{M}^{n+1}$. Assim, existe um campo vetorial normal unitário tipo-tempo N, globalmente definido em Σ^n. Denote por A o operador de Weingarten na direção de N. Para cada $1 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $S_k : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ a função suave que associa para cada $p \in \Sigma^n$ a k-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de $A_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$. Nesse sentido, a k-ésima transformação de Newton de ψ em relação a

N, denotada $P_k : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$, é definida recursivamente por:

$$P_0 = I \ \text{ e } \ P_k = (-1)^k S_k I - AP_{k-1}, \ 1 \leq k \leq n.$$

É fácil verificar, através de indução, que:

$$P_k = (-1)^k \left(S_k I - S_{k-1} A + S_{k-2} A^2 - \cdots + (-1)^{k-1} S_1 A^{k-1} + (-1)^k A^k \right).$$

Em particular, $P_n = p_A(A)$, onde p_A é o polinômio característico de A, de forma que $P_n = 0$, pelo Teorema de Cayley-Hamilton.

Uma vez que A é autoadjunto e P_k é um polinômio em A, toda base que diagonaliza A diagonaliza P_k. Usando esse fato e o que vimos anteriormente, não é difícil verificar que, para $1 \leq k \leq n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(P_k) &= (-1)^k (n-k) S_k, \\ \operatorname{tr}(AP_k) &= (-1)^k (k+1) S_{k+1}, \\ \operatorname{tr}(A^2 P_k) &= (-1)^k \left(S_1 S_{k+1} - (k+2) S_{k+2} \right). \end{aligned}$$

Para $0 \leq k \leq n$, a k-ésima curvatura média H_k de Σ é definida por

$$\binom{n}{k} H_k = (-1)^k S_k.$$

Nesse caso, H_1 é chamada simplesmente de curvatura média de Σ e denotada por H.

Definição 2.11. *Sejam Σ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa e orientável de $\overline{M}^{n+1}$, uma variedade lorentziana orientável, e P_k a k-ésima transformação de Newton relativamente a um campo normal unitário tipo-tempo N, globalmente definido em Σ. Definimos o divergente da k-ésima transformação de Newton por*

$$\operatorname{div}_\Sigma \, P_k = \operatorname{tr} \left(\nabla P_k \right),$$

onde

$$\left(\nabla_X P_k \right) Y = \nabla_X (P_k Y) - T_r \left(\nabla_X Y \right),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

O lema a seguir foi demonstrado na Seção 3 de [2] e no Capítulo 2 de [22] por caminhos distintos.

Lema 2.12. *Sejam Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço conexa e orientável de $\overline{M}^{n+1}$, uma variedade lorentziana orientável, e P_k a k-ésima transformação de Newton relativamente* *a um campo normal unitário tipo-tempo N, globalmente definido em Σ, e $\overline{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o tensor de Riemann de M. Tomando um referencial ortonormal local $\{E_i\}_{i=1}^n$ em Σ^n, temos, para todo campo vetorial tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, que*

$$\langle \mathrm{div}_\Sigma P_k, X \rangle = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(N, P_{k-j}E_i)E_i, A^{j-1}X \rangle.$$

Corolário 2.13. *Nas notações do lema anterior, quando o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, então $\mathrm{div}_\Sigma P_k = 0$ para cada $0 \leq k \leq n$.*

3 PRINCÍPIOS DO MÁXIMO RELACIONADOS AO CRESCIMENTO DE VOLUME

Neste capítulo, estudaremos extensões do princípio do máximo relacionado ao crescimento de volume obtido em [4] bem como algumas aplicações.

3.1 Sobre o princípio do máximo I

Em tudo o que segue, M denota uma variedade riemanniana orientada, completa e não compacta.

Para os próximos resultados convém recordar que o campo vetorial X na variedade riemanniana M é dito *completo* se seu fluxo $\{\psi_t\}$ for globalmente definido. Além disso, nesse caso, um subconjunto Ω de M é *estável sob o fluxo de* X se $\psi_t(\Omega) \subset \Omega$ para todo $t \geq 0$. Em particular, isso sempre é verdade quando $\Omega = \emptyset$.

Nosso primeiro resultado estende o Teorema 2.1 de [4]. Enquanto naquela versão era pedido $\mathrm{div}_M(X) \geq af$, com a um número real positivo, nessa pedimos que a seja uma função de classe $\mathcal{C}^1(M)$, positiva e tal que $\langle \nabla a, X \rangle \geq 0$.

Teorema 3.1. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial limitado em M, com $|X| < c$, e K um subconjunto fechado de M tal que $M \setminus K$ é estável sob o fluxo de X. Suponha que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ seja tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ em M e $\mathrm{div}X \geq af$ em $M \setminus K$, onde $a \in \mathcal{C}^1(M)$ é positiva e tal que $\langle \nabla a, X \rangle \geq 0$ em M.*

(a) Se M tem crecimento de volume polinomial, então $f \leq 0$ em $M \setminus K$.

(b) Se M tem crecimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, então $f \leq \frac{c\beta}{a}$ em $M \setminus K$.

Observação 3.2. *Apesar da demonstração desse resultado ser bastante similar àquela do Teorema 2.1 de [4], nós a apresentamos para deixar claro o uso das hipóteses mais genéricas sobre a função a.*

Demonstração. Suponha que exista um ponto $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > \alpha > 0$ e $B = B(p, r) \subset\subset A_\alpha = \{x \in M \setminus K; f(x) \geq \alpha\}$.

Como $|X|$ é limitado e M é completa, o fluxo ψ_t de X está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, podemos tomar a função suave $\phi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ pondo

$$\phi(t) = \mathrm{vol}(\psi_t(B)) = \int_{\psi_t(B)} dM = \int_B \psi_t^*(dM).$$

Uma vez que $\overline{B}$ é compacto, temos

$$\begin{aligned}\phi'(t_0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\psi_{t+t_0}(B)} dM = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\psi_{t_0}(B)} \psi_t^*(dM) \\ &= \int_{\psi_{t_0}(B)} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_t^*(dM) = \int_{\psi_{t_0}(B)} \mathrm{div}(X) dM. \qquad (2)\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\frac{d}{dt} f(\psi_t(x)) = \langle \nabla f, X\rangle \geq 0,$$

temos para $x \in A_\alpha$, que

$$f(\psi_t(x)) \geq f(\psi_0(x)) = f(x) > \alpha,$$

para todo $t \geq 0$. Como $M \setminus K$ é estável sob o fluxo de X, tem-se $\psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha$, para todo $t \geq 0$.

Usando o fato de $\mathrm{div}(X) \geq af$ em $M \setminus K$, o resultado em (2) e o fato de que $\psi_t(B) \subset \psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha \subset M \setminus K$, obtemos

$$\phi'(t) = \int_{\psi_t(B)} \mathrm{div}(X) dM \geq \int_{\psi_t(B)} af dM \geq \alpha \int_{\psi_t(B)} a dM = \alpha \int_B (a \circ \psi_t)\psi_t^*(dM), \qquad (3)$$

para todo $t \geq 0$.

Sejam $\tilde{a} : [0, +\infty) \times M \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{a}(t, x) = a \circ \psi_t(x)$ e, para todo $x \in M$, $\tilde{a}_x : [0, +\infty) \to (0, \infty)$ tal que $\tilde{a}_x(t) = \tilde{a}(t, x)$. Temos $\tilde{a} \in \mathcal{C}^1([0, +\infty) \times M)$ e $\tilde{a}_x \in \mathcal{C}^1([0, +\infty))$ para todo $x \in M$. Além disso,

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}_x(t) = \frac{d}{dt} a(\psi_t(x)) = \langle \nabla a, X\rangle \geq 0.$$

Com isso, $\tilde{a}_x$ é uma função não decrescente para todo x. Ademais, como $\overline{B}$ é compacto, $\inf_{x\in B} a(x) = \min_{x\in\overline{B}} a(x) = \underline{a} > 0$. Dessa forma, para todo $x \in B$, temos

$$(a \circ \psi_t)(x) = \tilde{a}_x(t) \geq \tilde{a}_x(0) = a(x) \geq \underline{a}.$$

Usando esse resultado e a desigualdade (3), obtemos

$$\phi'(t) \geq \alpha \int_B (a \circ \psi_t)\psi_t^*(dM) \geq \alpha\underline{a} \int_{\psi_t(B)} dM = \underline{a}\alpha\phi(t),$$

para todo $t \geq 0$. Em particular, se $t \geq 0$, então $\phi'(t) > 0$, uma vez que $\phi(0) = \mathrm{vol}(B) > 0$

para todo $t \geq 0$. Integrando a inequação $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} > \underline{a}\alpha$ ao longo do intervalo $[0,t]$, segue que

$$\phi(t) > \mathrm{vol}(B)e^{\underline{a}\alpha t}, \tag{4}$$

para todo $t \geq 0$.

Seja $d(x,\psi_t(x))$ a distância riemanniana entre x e $\psi_t(x)$. Como $|X| < c$, obtemos

$$d(x,\psi_t(x)) \leq \int_0^t \left|\frac{d}{ds}\psi_s(x)\right| ds = \int_0^t |X(\psi_s(x))| ds \leq ct.$$

Por outro lado, para todo $x \in B$, temos

$$d(p,\psi_t(x)) \leq d(x,\psi_t(x)) + d(p,x) < ct + r.$$

Dessa forma, $\psi_t(B) \subset B(p, ct+r)$ para todo $t \geq 0$. Com isso e de (4), obtemos:

$$\mathrm{vol}(B(p,ct+r)) \geq \mathrm{vol}(\psi_t(B)) = \phi(t) > \mathrm{vol}(B)e^{\underline{a}\alpha t},$$

para todo $t \geq 0$. Por uma mudança linear de variáveis, sabemos que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\mathrm{vol}(B(p,t)) \geq Ce^{\frac{\underline{a}\alpha t}{c}}, \tag{5}$$

para todo $t \geq r$.

Agora, se M tem crescimento de volume polinomial, então (5) não pode ser verdadeira para todo $t \geq r$. Portanto, nossa suposição inicial de que existiria $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > \alpha > 0$ nos conduz a uma contradição, seja qual for o valor de $\alpha > 0$. Assim, não existe $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > 0$, logo, $f \leq 0$ em $M \setminus K$.

Por outro lado, se M tem crescimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, então f não pode ser maior que $\frac{c\beta}{a}$, pois, se isso ocorresse, existiria $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > \frac{c\beta}{a(p)}$. Com isso, tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) > \alpha > \frac{c\beta}{a(p)}$ e fazendo $E_\alpha = \{x \in M \setminus K; f(x) > \alpha > \frac{c\beta}{a(x)}\}$, teríamos E_α aberto (pois é a interseção dos abertos $f^{-1}(\alpha,+\infty)$ e $\left(\frac{c\beta}{a}\right)^{-1}(-\infty,\alpha)$) e não vazio, uma vez que $p \in E_\alpha$. Refazendo toda a construção dessa demonstração, podemos tomar $B = B(p,r) \subset\subset E_\alpha$ e $\underline{a} = \min_{x\in\overline{B}} a(x)$ (por ser o mínimo no conjunto $\overline{B} \subset E_\alpha$, observe que $\alpha > \frac{c\beta}{\underline{a}}$); então, teríamos novamente a estimativa (5). Mas, como M tem crescimento de volume do tipo $e^{\beta t}$, deveríamos ter $\beta \geq \frac{\underline{a}\alpha}{c}$, ou seja, $\alpha \leq \frac{c\beta}{\underline{a}}$, contradizendo nossa hipótese. Portanto, $f(x) \leq \frac{c\beta}{a(x)}$, para todo $x \in M \setminus K$.

$\square$

O próximo é apresentado no preprint [27].

Proposição 3.3. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial em M, com $|X| < c\rho_0^k$ fora de algum subconjunto compacto K de M, onde $c > 0$, $0 \leq k \leq 1$ e $\rho_0 = d(\cdot, o)$ denota a distância riemanniana de um ponto fixado o. Sejam ψ_t o fluxo de X e $t \mapsto \gamma(t)$ a função comprimento de arco de x a $\psi_t(x)$, para algum $x \in M$. Então, X é um campo vetorial completo e:*

(a) Se $k = 1$, então $\gamma(t) \leq A(e^{ct} - 1)$ para todo $t \geq 0$ e alguma constante $A > 0$.

(b) Se $0 \leq k < 1$ e $\rho(\psi_t(x)) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$, onde $\rho = d(\cdot, x)$, então existem $t_1 > 0$ e $C > 0$ tais que $\gamma(t) \leq Ct^{\frac{1}{1-k}}$, para todo $t \geq t_1$.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que X é um campo vetorial completo. Seja (a, b) o intervalo maximal de definição da curva integral $t \mapsto \psi_t(x)$. Se $|X| \leq c\rho_0^k$ fora de um compacto K e $m = \sup_K |X|$, temos pela desigualdade triangular que $|X(\psi_t(x))| \leq c(\rho(\psi_t(x)) + d)^k + m$ em M, onde $d = \rho_0(x)$.

Para $0 \leq t < b$ e $0 \leq k \leq 1$, temos:

$$\gamma'(t) = |X(\psi_s(x))| \leq c(\rho(\psi_t(x)) + d)^k + m \leq c(\gamma(t) + d)^k + m. \tag{6}$$

Para $k = 1$, multiplicando $\gamma'(t) \leq c(\gamma(t) + d) + m$ por um fator de integração e^{-ct} e integrando ao longo do intervalo $[0, t]$, temos:

$$\gamma(t) \leq (d + c^{-1}m)e^{ct} - (d + c^{-1}m).$$

Se b é finito, a curva $\psi_t(x)$ está contida em alguma bola geodésica, para todo $0 \leq t < b$. Uma vez que M é completa, as bolas geodésicas são compactas, contradizendo o Lema da Curva Divergente. Dessa forma, $b = +\infty$. Podemos concluir o mesmo resultado para $a = -\infty$ mudando X por $-X$. Por fim, com $A = d + c^{-1}m$, concluímos o item (a).

Para $k \in [0, 1)$, temos, por hipótese, que $\gamma(t)$ não é menor que 1 para todo $t \geq 0$. Assim, podemos supor que $\gamma(t) \geq 1$ para $t_0 \leq t < b$, e segue de (6) que:

$$\gamma'(t) \leq c(\gamma(t) + d)^k + m \leq c(\gamma(t) + d) + m.$$

Podemos, pois, aplicar o mesmo argumento usado anteriormente para mostrar $b = +\infty$. Dessa forma, para todo $k \in [0, 1]$, temos que X é completo.

Para $k \in [0, 1)$, dado $\bar{c} > c$, temos a partir da hipótese sobre X que $|X| < \bar{c}\rho^k$ fora de algum conjunto compacto. Consequentemente, uma vez que $\lim_{t \to +\infty} \rho(\psi_t(x)) = +\infty$, existe t_0 tal que

$$\gamma'(t) = |X(\psi_t(x))| \leq \bar{c}\rho(\psi_t(x))^k \leq \bar{c}\gamma(t)^k$$

para todo $t \geq t_0$. Integrando a desigualdade $\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^k} \leq \overline{c}$ ao longo de $[t_0, t]$, temos

$$\gamma(t)^{1-k} \leq \overline{c}(1-k)(t-t_0) + \gamma(t_0)^{1-k} \leq \overline{c}(1-k)t + \gamma(t_0)^{1-k}.$$

Tome $t_1 > 0$ tal que $\overline{c}(1-k)t \geq \gamma(t_0)^{1-k}$ para todo $t \geq t_1$. Assim, para todo $t \geq t_1$, temos $\gamma(t)^{1-k} \leq 2\overline{c}(1-k)t$, de sorte que

$$\gamma(t) \leq (2\overline{c}(1-k))^{\frac{1}{1-k}}\, t^{\frac{1}{1-k}}.$$

Basta, então, fazer $C = (2\overline{c}(1-k))^{\frac{1}{1-k}}$

$\square$

De posse da proposição anterior, obtemos mais um teorema que estende o princípio do máximo para variedades com crescimento de volume prescrito. Nesse caso, as hipóteses se concentram no comportamento do campo vetorial X de M, conforme o resultado a seguir. (Veja o preprint [27].)

Teorema 3.4. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial em M e K um subconjunto fechado (possivelmente vazio) de M tal que $M \setminus K$ seja estável sob o fluxo de X. Considere $\rho = d(\cdot, o)$, a distância riemanniana de origem em $o \in M$, e constantes $c > 0$ e $0 \leq k \leq 1$. Suponha que $|X| < c\rho^k$ fora de algum subconjunto compacto de M se $0 < k \leq 1$, e $|X| < c$ em M se $k = 0$. Suponha que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é tal que $\langle \nabla f, X\rangle \geq 0$ em M e $\operatorname{div} X \geq af$ em $M \setminus K$, para alguma constante $a > 0$. Assim, temos duas situações:*

(a) M tem crescimento de volume polinomial: se $k < 1$, então $f \leq 0$ em $M \setminus K$. Se $k = 1$ e M tem crescimento de volume como t^n, então $f \leq \frac{nc}{a}$.

(b) M tem crescimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$: se $k = 0$, então $f \leq \frac{c\beta}{a}$ em $M \setminus K$. Se $|X|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, então $f \leq 0$ em $M \setminus K$.

Demonstração. Suponha que exista um ponto $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > 0$ e escolha α e r satisfazendo $0 < \alpha < f(p)$ e $B = B(p, r) \subset\subset A_\alpha = \{x \in M \setminus K; f(x) \geq \alpha\}$.

Como $|X|$ é completo (conforme mostrado na Proposição 3.3), o fluxo ψ_t de X está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, podemos tomar a função suave $\phi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ pondo

$$\phi(t) = \operatorname{vol}(\psi_t(B)) = \int_{\psi_t(B)} dM = \int_B \psi_t^*(dM).$$

Uma vez que $\overline{B}$ é compacto, temos

$$\phi'(t_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \int_{\psi_t(B)} dM = \int_{\psi_{t_0}(B)} \operatorname{div}(X) dM. \tag{7}$$

Além disso, como

$$\frac{d}{dt}f(\psi_t(x)) = \langle \nabla f, X\rangle \geq 0,$$

temos para $x \in A_\alpha$ que

$$f(\psi_t(x)) \geq f(\psi_0(x)) = f(x) > \alpha,$$

para todo $t \geq 0$.

A partir daí, e tendo em vista que $M \setminus K$ é estável sob o fluxo de X, segue que $\psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha$, para todo $t \geq 0$.

Usando o fato de $\mathrm{div}(X) \geq af$ em $M \setminus K$, o resultado em (7) e o fato de que $\psi_t(B) \subset \psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha \subset M \setminus K$ dão

$$\phi'(t) = \int_{\psi_t(B)} \mathrm{div}(X)dM \geq \int_{\psi_t(B)} af dM > a\alpha \int_{\psi_t(B)} dM = a\alpha\phi(t),$$

para todo $t \geq 0$. Em particular, se $t \geq 0$, então $\phi'(t) > 0$. Dessa forma, $\phi(t) \geq \phi(0) = \mathrm{vol}(B) > 0$ para todo $t \geq 0$. Integrando a inequação $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} > a\alpha$ ao longo do intervalo $[0, t]$, obtemos:

$$\phi(t) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha t}, \tag{8}$$

para todo $t \geq 0$.

Denote por $d(x, \psi_t(x))$ a distância riemanniana entre x e $\psi_t(x)$. Se $d(x, \psi_t(x)) \nrightarrow +\infty$ quando $t \to +\infty$, então existe $L \geq 0$ e uma sequência $(t_i)_{i\geq 1}$, com $t_i \to +\infty$, tal que $d(x, \psi_{t_i}(x)) \leq L$.

Por outro lado, para todo $x \in B$, temos

$$d(p, \psi_t(x)) \leq d(x, \psi_t(x)) + r. \tag{9}$$

Isso significa que $\psi_{t_i}(B) \subset B(p, L + r)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e segue de (8) a seguinte desigualdade:

$$\mathrm{vol}(B(p, L + r)) \geq \mathrm{vol}(\psi_{t_i}(B)) = \phi(t_i) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha t_i}.$$

Isso claramente não pode ocorrer, uma vez $\mathrm{vol}(B(p, L + r)) < +\infty$ e $\mathrm{vol}(B)e^{a\alpha t_i} \to +\infty$ quando $t_i \to +\infty$. Assim, $d(x, \psi_t(x)) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

Pela Proposição 3.3, temos, caso $0 \leq k < 1$,

$$d(x, \psi_t(x)) \leq Ct^m \tag{10}$$

para $m = \frac{1}{1-k}$ e $t \geq t_1 > 0$. Caso $k = 1$, temos, também por aquele resultado,

$$d(x, \psi_t(x)) \leq A(e^{ct} - 1). \tag{11}$$

Para $k < 1$, tome $C' > C$ e $t_2 > t_1$ tais que $C't^m > Ct^m + r$, para $t \geq t_2$. Com isso, segue de (9), (10) e (8) que

$$\mathrm{vol}(B(p, C't^m)) > \mathrm{vol}(B(p, Ct^m + r)) \geq \mathrm{vol}(\psi_t(B)) = \phi(t) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha t},$$

para todo $t \geq t_2$. Por uma mudança de variáveis, temos:

$$\mathrm{vol}(B(p, t)) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha\left(\frac{t}{C'}\right)^{1-k}}, \tag{12}$$

para todo $t \geq t_2$.

Para $k = 1$, tome $A' > A$ e $t' > 0$ tal que $A'e^{ct} > A(e^{ct} - 1) + r$, para $t \geq t'$. Como no caso anterior, segue de (9), (11) e (8) que

$$\mathrm{vol}(B(p, A'e^{ct})) > \mathrm{vol}(B(p, A(e^{ct} - 1) + r)) \geq \mathrm{vol}(\psi_t(B)) = \phi(t) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha t},$$

para todo $t \geq t'$. Por uma mudança de variáveis, supondo $t' > A'$, temos:

$$\mathrm{vol}(B(p, t)) > \mathrm{vol}(B)\left(\frac{t}{A'}\right)^{\frac{a\alpha}{c}}, \tag{13}$$

para todo $t \geq t_2$.

Analisemos, agora, os itens (a) e (b). Suponha que M tem crescimento de volume polinomial. Se $0 \leq k < 1$, então (12) não pode ser verdadeira para todo $t \geq t_2$. Dessa maneira, a suposição inicial de que $f(p) > 0$ para algum $p \in M \setminus K$, nos conduz a uma contradição; logo, $f \leq 0$ em $M \setminus K$. No caso $k = 1$, se $n < \frac{a\alpha}{c}$, então (13) não pode ser verdadeira para $t \geq t'$. Com isso, não podemos ter $f(p) > \frac{cn}{a}$, pois do contrário poderíamos escolher α satisfazendo $f(p) > \alpha > \frac{cn}{a}$, isto é, $n < \frac{a\alpha}{c}$.

Suponha que M tem crescimento de volume exponencial. Se $k = 0$, isto é, $|X| \leq c$, então

$$d(x, \psi_t(x)) \leq \int_0^t \left|\frac{d}{ds}\psi_s(x)\right| ds = \int_0^t |X(\psi_s(x))|\, ds \leq ct.$$

Assim, (9) e (8), fornecem

$$\mathrm{vol}(B(p, ct + r)) \geq \mathrm{vol}(\psi_t(B)) = \phi(t) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha t},$$

para todo $t \geq 0$. Uma mudança linear de variáveis dá

$$\mathrm{vol}(B(p,t)) > \left[\mathrm{vol}(B)e^{-\frac{a\alpha r}{c}}\right] e^{\frac{a\alpha t}{c}}, \tag{14}$$

para todo $t \geq r$.

Se o crescimento de volume exponencial é como $e^{\beta t}$, e existisse $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > \frac{c\beta}{a}$, então poderíamos escolher um número real α satisfazendo $\frac{c\beta}{a} < \alpha < f(p)$. Com isso, (14) não poderia ser verdadeiro para todo $t \geq r$, o que é uma contradição. Logo, $f \leq \frac{c\beta}{a}$ em $M \setminus K$.

Por fim, suponha que $\lim_{\rho(x)\to+\infty} |X| = 0$. Para cada $x \in B$, já sabemos que $\lim_{t\to+\infty} d(x, \psi_t(x)) = +\infty$. Fixando um tal x, considere a função comprimento de arco

$$\gamma(t) = \int_0^t |X(\psi_t(x))| ds.$$

Uma vez que $\gamma(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$, aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \gamma'(t) = \lim_{t\to+\infty} |X(\psi_t(x))| = 0.$$

Esse resultado nos permite tomar uma sequência $(t_j)_{j\geq 1}$ tal que $\frac{\gamma(t_j)}{t_j} < \frac{1}{j}$, onde $t_j \to +\infty$. Consequentemente,

$$d(x, \psi_{t_j}(x)) \leq \gamma(t_j) < \frac{t_j}{j}.$$

De (9) e (8), segue que

$$\mathrm{vol}\left(B\left(p, \frac{t_j}{j} + r\right)\right) > \mathrm{vol}(\psi_{t_j}(B)) = \phi(t_j) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha t_j}. \tag{15}$$

Escrevendo $\gamma_j = \frac{t_j}{j} + r$ e tomando j' que satisfaça $a\alpha j' > 2\beta$, (15) se torna

$$\mathrm{vol}(B(p,\gamma_j)) > \mathrm{vol}(B)e^{a\alpha j(\gamma_j - r)} > \left[\mathrm{vol}(B)e^{-2\beta r}\right] e^{2\beta\gamma_j},$$

para todo $j > j'$. Isso não pode ser verdade se o crescimento de volume for do tipo $e^{\beta t}$. Portanto, é necessário que $f \leq 0$ em $M \setminus K$. $\square$

Observação 3.5. *A constante $a > 0$ no Teorema 3.4 pode ser substituída por uma função $a : M \to \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo condições análogas àquelas do Teorema 3.1.*

O Teorema 3.4 e a Observação 3.5 possuem diversas aplicações para funções suaves em variedades riemannianas. Os dois próximos resultados estendem resultados clássicos de Cheng e Yau (veja [15]).

Corolário 3.6. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta e $\Omega \subset M$ um domínio. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função não negativa tal que $M \setminus \Omega$ é estável sob o fluxo de ∇f e $\Delta f \geq af$ em $M \setminus \Omega$, para alguma $a \in \mathcal{C}^1(M)$ positiva em $M \setminus \Omega$ e tal que $\langle \nabla a, \nabla f \rangle \geq 0$.*

(a) *Se M tem crescimento de volume polinomial e $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$, $0 < k < 1$ são constantes, então $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$.*

(b) *Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\nabla f|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, então $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$.*

Demonstração. Tomando $X = \nabla f$ e $K = \overline{\Omega}$ no Teorema 3.4 e usando a Observação 3.5, concluímos que $f \leq 0$ em $M \setminus \Omega$. Dessa forma, uma vez que $f \geq 0$ em M, temos que $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$. □

Uma aplicação direta do Corolário 3.6 é obtida quando fazemos $\Omega = \emptyset$, conforme mostra o resultado a seguir.

Corolário 3.7. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função não negativa, tal que $\Delta f \geq af$ em M para alguma $a \in \mathcal{C}^1(M)$ positiva tal que $\langle \nabla a, \nabla f \rangle \geq 0$.*

(a) *Se M tem crescimento de volume polinomial e $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$, $0 < k < 1$ são constantes, então $f \equiv 0$ em M.*

(b) *Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\nabla f|(x) \to 0$ quando $\rho(x) \to +\infty$, então $f \equiv 0$ em M.*

O próximo resultado indica quando funções harmônicas são constantes, mediante estimativas envolvendo seus hessiano e gradiente.

Corolário 3.8. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, completa, orientada e não compacta, e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função harmônica. Suponha que $\mathrm{Ric}_M(\nabla f, \nabla f) \geq \lambda |\nabla f|^2$, com $\lambda > 0$.*

(a) *Se M tem crescimento de volume polinomial e existem $c > 0, k \in [0, 1)$ tais que:*

$$|(\mathrm{Hess}_M f)(\nabla f, X)| < c\rho^k, \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ tal que } |X| \leq 1, \tag{16}$$

em que $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, o)$, com $o \in M$ um ponto fixado, então f é constante.

(b) *Se M tem crescimento de volume exponencial e*

$$|(\mathrm{Hess}_M f)(\nabla f, X)|(x) \to 0, \text{ quando } \rho(x) \to +\infty, \tag{17}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $|X| \leq 1$, em que $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, o)$, com $o \in M$ um ponto *fixado, então f é constante.*

Demonstração. Para os dois casos, pela fórmula de Bochner e usando que f é harmônica, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \mathrm{Ric}_M(\nabla f,\nabla f)+\langle\nabla f,\nabla(\Delta f)\rangle+|\mathrm{Hess}_M f|^2\\ &= \mathrm{Ric}_M(\nabla f,\nabla f)+|\mathrm{Hess}_M f|^2\geq \mathrm{Ric}_M(\nabla f,\nabla f)\\ &\geq \lambda|\nabla f|^2.\end{aligned}$$

Para o que segue, devemos analisar cada caso separadamente.
(a) Para M com crescimento de volume polinomial e usando a condição (16), dado um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ em M, obtemos:

$$\begin{aligned}|\nabla|\nabla f|^2|^2 &= \langle\nabla|\nabla f|^2,\nabla|\nabla f|^2\rangle=\sum_{i=1}^n\left[e_i\left(|\nabla f|^2\right)\right]^2\\ &= \sum_{i=1}^n\left[e_i\langle\nabla f,\nabla f\rangle\right]^2=\sum_{i=1}^n\left[2\langle\nabla_{e_i}\nabla f,\nabla f\rangle\right]^2\\ &= \sum_{i=1}^n 4\left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f,e_i)\right]^2\leq\sum_{i=1}^n 4c^2\rho^{2k}\\ &= 4c^2n\rho^{2k}.\end{aligned}$$

Dessa forma, temos $|\nabla|\nabla f|^2|\leq 2c\sqrt{n}\rho^k$.

Assim, a função $|\nabla f|^2 : M\to\mathbb{R}$ é suave, não-negativa, tem a norma de seu gradiente menor ou igual $C_0\rho^k$, onde $C_0>0$ e $k_0\in[0,1)$ e satisfazendo $\Delta|\nabla f|^2\geq 2\lambda|\nabla f|^2$. Pelo Corolário 3.7, $|\nabla f|^2\equiv 0$, portanto, $\nabla f\equiv 0$ e f é constante em M, uma vez que M é conexa.

(b) Para M com crescimento de volume exponencial e usando a condição (17), dado um referencial local ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ de M numa vizinhança de um ponto $x\in M$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|\nabla|\nabla f|^2|^2(x) &= \langle \nabla|\nabla f|^2, \nabla|\nabla f|^2\rangle(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[e_i\left(|\nabla f|^2\right)\right]^2(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[e_i \langle \nabla f, \nabla f\rangle\right]^2(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[2\langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle\right]^2(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 4\left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f, e_i)\right]^2(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} 4 \sup_{X\in\mathfrak{X}(M), |X|\leq 1} \left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f, X)\right]^2(x) \\
&= 4n \sup_{X\in\mathfrak{X}(M), |X|\leq 1} \left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f, X)\right]^2(x).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos $|\nabla|\nabla f|^2|^2(x) \to 0$ quando $\rho(x) \to +\infty$.

Assim, a função $|\nabla f|^2 : M \to \mathbb{R}$ é suave, não negativa, tem o módulo de seu gradiente tendendo a zero no infinito e satisfaz $\Delta|\nabla f|^2 \geq 2\lambda|\nabla f|^2$, Pelo Corolário 3.7, $|\nabla f|^2 \equiv 0$, portanto, $\nabla f \equiv 0$ e f é constante em M, uma vez que M é conexa.

$\square$

As quatro próximas aplicações estão relacionadas a resultados clássicos de Fischer-Colbrie e Schoen (veja [19]). As duas primeiras aplicações referem-se a variedades com crescimento de volume polinomial e as duas últimas a variedades com crescimento de volume exponencial.

Corolário 3.9. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\Omega \subset M$ um domínio limitado e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função positiva. Se M tem crescimento de volume polinomial, então o operador $\Delta - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:*

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$, $0 < k < 1$ são constantes.

(c) $M \setminus \Omega$ é estável sob o fluxo de ∇f.

(d) $\langle \nabla q, \nabla f\rangle \geq 0$ em M ou $\inf_M q > 0$.

Demonstração. Suponha que exista uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfazendo as condições dadas. Se $\langle \nabla q, \nabla f\rangle \geq 0$, então, fazendo $a = q$ no Corolário 3.6, temos que $\Delta f = qf$, logo, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão polinomial desse corolário. Se $\inf_M q > 0$, fazemos $a = \inf_M q > 0$, assim obtendo $\Delta f \geq af$ e, consequentemente, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão polinomial do corolário. Além disso, pela unicidade de continuação para soluções de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem (veja [8]), temos que $f \equiv 0$ em M. Dessa forma, a única solução que goza das propriedades (a), (b), (c) e (d) é $f \equiv 0$, o que demonstra o resultado.

□

Fazendo $\Omega = \emptyset$ no corolário anterior, teremos o seguinte resultado.

Corolário 3.10. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função positiva. Se M tem crescimento de volume polinomial, então o operador $\Delta - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:*

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$, $0 < k < 1$ são constantes.

(c) $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$ em M ou $\inf_M q > 0$.

Quando M é uma variedade riemanniana com crescimento de volume exponencial, obtemos consequências semelhantes.

Corolário 3.11. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\Omega \subset M$ um domínio limitado e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função positiva. Se M tem crescimento de volume exponencial, então o operador $\Delta - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:*

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$.

(c) $M \setminus \Omega$ é estável sob o fluxo de ∇f.

(d) $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$ em M ou $\inf_M q > 0$.

Demonstração. Suponha que exista uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfazendo as condições dadas. Quando $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$, então, fazendo $a = q$ no Corolário 3.6, temos que $\Delta f = qf$, logo, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão exponencial desse corolário. Quando $\inf_M q > 0$, fazemos $a = \inf_M q > 0$, assim, obtemos $\Delta f \geq af$ e, consequentemente, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão exponencial desse corolário. Além disso, pela unicidade de continuação para soluções de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem (veja [8]), temos que $f \equiv 0$ em M. Dessa forma, a única solução que goza das propriedades (a), (b), (c) e (d) é $f \equiv 0$, o que demonstra o resultado. □

Fazendo $\Omega = \emptyset$ no corolário anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.12. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função positiva. Se M tem crescimento de volume polinomial, então o operador $\Delta - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:*

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f|(x) \to 0$, *quando* $\rho(x) \to +\infty$, *onde* $\rho = d(\cdot, o)$ *é a distância riemanniana de origem em* $o \in M$.

(c) $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$ *em* M *ou* $\inf_M q > 0$.

Observação 3.13. *Resultados semelhantes aos corolários 3.6 ao 3.12 podem ser obtidos para operadores diferenciais elípticos de segunda ordem, da forma* $Lu = \mathrm{div}(T(\nabla u))$, *onde* $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *é um* $(1,1)$*-tensor simétrico positivo definido em* M, *com* $\sup_M \|T\| < +\infty$. *As demonstrações são semelhantes, bastando tomar* $X = T(\nabla u)$.

3.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana orientada com métrica $g = \langle , \rangle$ e conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$. Um campo vetorial ξ em $\overline{M}$ é dito *conforme fechado* se

$$\overline{\nabla}_X \xi = \psi X$$

para alguma função suave ψ em M e todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. A função ψ é o *fator conforme* de ξ. Em particular,

$$\psi = \frac{1}{n+1}\mathrm{div}_{\overline{M}}\xi.$$

Considere $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^{n+1}$, e oriente M pela escolha do campo normal unitário N.

Nesta seção, iremos aplicar o Teorema 3.4 para estudar o comportamento de φ. O propósito é obter resultados similares àqueles de [3] e [4], relaxando a hipótese de que N convirja para ξ no infinito e, em compensação, impondo uma restrição ao crescimento de volume da hipersuperfície.

Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\overline{M}$, respectivamente, e denotamos por $A(\cdot) = -\overline{\nabla}_{(\cdot)}N$ o operador de Weingarten de φ com respeito a N. Calculemos o gradiente da função suporte $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Usando o fato de ξ ser campo conforme fechado e a simetria de A, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla \eta, X \rangle &= X(\eta) = \langle \overline{\nabla}_X N, \xi \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X \xi \rangle \\ &= -\langle AX, \xi \rangle + \psi \langle N, X \rangle \\ &= \langle -A\xi^\top, X \rangle, \end{aligned}$$

onde $\xi^\top$ denota a projeção ortogonal de $\xi_{|_M}$ em TM. Dessa forma, temos:

$$\nabla\eta = -A\xi^\top.$$

Ademais, observe que a distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ é integrável, pois dados $X, Y \in \langle\xi\rangle^\perp$, ou seja, tais que $\langle\xi, X\rangle = \langle\xi, Y\rangle = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}\langle\xi, [X,Y]\rangle &= \langle\xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle - \langle\xi, \overline{\nabla}_Y X\rangle = X\langle\xi, Y\rangle - \langle\overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle - Y\langle\xi, X\rangle + \langle\overline{\nabla}_Y\xi, X\rangle\\ &= -\psi\langle X, Y\rangle + \psi\langle Y, X\rangle = 0.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $\eta \leq |\xi|$. Além disso, a igualdade em toda a M ocorre se, e somente se, N é paralelo a ξ ao longo de M, em cujo caso M seria uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e $N = \xi/|\xi|$ no caso em que $\xi \neq 0$ em M. Nessa mesma situação, dados $p \in M$ e $u, v \in T_pM$, a condição de ξ ser conforme fechado nos permite calcular, em p:

$$|\xi|\langle A_p u, v\rangle = -|\xi|\langle\overline{\nabla}_u N, v\rangle = -\langle\overline{\nabla}_u\xi, v\rangle = \langle -\psi u, v\rangle.$$

Nesse caso, se ξ for *livre de zeros* em M, ou seja, $\xi \neq 0$ em todos os pontos de M, temos que $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica umbílica, com $A = -(\psi/|\xi|)I$, onde $I : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é o operador identidade. Sabe-se (veja [33]) que se dim $\overline{M} > 2$, os zeros de ξ são isolados. Assim, A é umbilica em um número finito de pontos.

Na circunstância onde M é uma hipersuperfície de $\overline{M}$ nas condições descritas no início dessa seção, tome $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ dada por $f = |\xi| - \langle N, \xi\rangle$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}2|\xi|\langle\nabla f, X\rangle &= 2|\xi|X(f) = 2|\xi|X(|\xi|) - 2|\xi|X(\langle N, \xi\rangle)\\ &= X(|\xi|^2) - 2|\xi|\langle\overline{\nabla}_X N, \xi\rangle - 2|\xi|\langle N, \overline{\nabla}_X\xi\rangle\\ &= 2\langle\overline{\nabla}_X\xi, \xi\rangle + 2|\xi|\langle AX, \xi\rangle - 2|\xi|\psi\langle N, X\rangle\\ &= 2\psi\langle X, \xi\rangle + 2|\xi|\langle AX, \xi^\top\rangle\\ &= 2\langle\psi\xi^\top + |\xi|A\xi^\top, X\rangle\end{aligned}$$

Dessa forma, se ξ for livre de zeros em M, segue que

$$\nabla f = A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top. \tag{18}$$

O lema a seguir nos mostra expressões para divergências envolvendo $\xi^\top$, o operador de Weingarten e as r-ésimas transformações de Newton quando $\xi \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é somente um campo conforme, isto é, $\mathcal{L}_\xi\langle , \rangle = \psi\langle , \rangle$ para $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$, a qual também é chamada de fator conforme. Essa condição é equivalente à expressão

$$\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y \xi\rangle = \psi\langle X, Y\rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Nesse caso, $\langle \overline{\nabla}_X \xi, X\rangle = \psi\langle X, X\rangle$. Além disso, todo campo conforme fechado é um campo conforme.

Lema 3.14. *Sejam $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade orientável M^n numa variedade orientada $\overline{M}^{n+1}$, N um campo normal unitário globalmente definido em M^n, ξ um campo conforme em $\overline{M}^{n+1}$ com fator conforme ψ e T_r a r-ésima transformação de Newton de φ. Assim, fazendo $\eta = \langle Y, N\rangle$, temos*

(a)

$$\mathrm{div}_M\ (\xi^\top) = n \cdot (\psi + \eta H)\,,$$

onde H é a curvatura média de φ em relação a N;

(b)

$$\mathrm{div}_M\ (A\xi^\top) = -\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + n\psi H + \eta|A|^2,$$

onde $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}$ é o tensor de Ricci de $\overline{M}$;

(c)

$$\mathrm{div}_M\ (T_r\xi^\top) = \langle \mathrm{div}_M\ T_r, \xi\rangle + \psi \cdot \mathrm{tr}(T_r) + \eta \cdot \mathrm{tr}(AT_r);$$

(d)

$$\mathrm{div}_M\ (AT_{r-1}\xi^\top) = \langle \nabla S_r, \xi^\top\rangle + rS_r\psi + \eta \cdot \mathrm{tr}(A^2T_{r-1}) - \langle \mathrm{div}_M\ T_r, Y\rangle,$$

onde S_r é a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A.

Demonstração. Para todos os casos, fixamos um ponto $p \in M$ e um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança de p em M, que seja geodésico em p e que diagonalize A em p.

(a) Calculando o divergente de $\xi^\top$ em M no ponto p, temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_M(\xi^\top) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\xi^\top, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i}(\xi - \eta N), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \big(\langle \psi e_i, e_i\rangle - \eta\langle \overline{\nabla}_{e_i}N, e_i\rangle\big) \\
&= n\psi + \eta\cdot \operatorname{tr}(A) = n\left(\psi + \eta H\right).
\end{aligned}
$$

(b) Fazendo $\lambda_i = \langle A_p e_i, e_i\rangle$, para $1 \le i \le n$, então, calculando o divergente de $A\xi^\top$ em M no ponto p, temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_M(A\xi^\top) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}A\xi^\top, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle -\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{\xi^\top}N, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(\xi^\top, e_i)N - \overline{\nabla}_{\xi^\top}\overline{\nabla}_{e_i}N - \overline{\nabla}_{[\xi^\top, e_i]}N, e_i\rangle \\
&= -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i}\xi^\top, Ae_i\rangle \\
&= -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i}(\xi - \eta N), Ae_i\rangle \\
&= -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + \sum_{i=1}^n (\lambda_i\langle \overline{\nabla}_{e_i}\xi, e_i\rangle + \eta\langle Ae_i, Ae_i\rangle) \\
&= -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + n\psi H + \eta|A|^2.
\end{aligned}
$$

(c) Como T_r é um polinômio de A, podemos fazer $\lambda_{i,r} = \langle (T_r)_p e_i, e_i\rangle$, uma vez que $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial que diagonaliza A em p. Usando o Lema 2.5, calculamos o divergente de $T_r\xi^\top$ em M no ponto p por

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_M(T_r\xi^\top) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(T_r\xi^\top), e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i}T_r)\xi^\top + T_r(\nabla_{e_i}\xi^\top), e_i\rangle \\
&= \langle \operatorname{div}_M T_r, \xi^\top\rangle + \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i}(\xi - \eta N), T_r(e_i)\rangle \\
&= \langle \operatorname{div}_M T_r, \xi^\top\rangle + \sum_{i=1}^n (\lambda_{i,r}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\xi, e_i\rangle - \eta\langle \overline{\nabla}_{e_i}N, T_r(e_i)\rangle) \\
&= \langle \operatorname{div}_M T_r, \xi^\top\rangle + \sum_{i=1}^n (\psi\langle e_i, T_r(e_i)\rangle + \eta\langle Ae_i, T_r(e_i)\rangle).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_M(T_r\xi^\top) &= \langle \mathrm{div}_M T_r, \xi^\top\rangle + \psi\cdot \mathrm{tr}(T_r) + \sum_{i=1}^n \eta\langle e_i, AT_r(e_i)\rangle \\
&= \langle \mathrm{div}_M T_r, \xi^\top\rangle + \psi\cdot \mathrm{tr}(T_r) + \eta\cdot \mathrm{tr}(AT_r).
\end{aligned}$$

(d) Usando o Lema 2.5 e que $AT_{r-1} = S_rI - T_r$, calculamos o divergente de $AT_{r-1}\xi^\top$ em M no ponto p por

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_M(AT_{r-1}\xi^\top) &= \mathrm{div}_M(S_r\xi^\top) - \mathrm{div}_M(T_r\xi^\top) \\
&= \langle \nabla S_r, \xi^\top\rangle + S_r \mathrm{div}_M(\xi^\top) - \mathrm{div}_M(T_r\xi^\top) \\
&= \langle \nabla S_r, \xi^\top\rangle + S_r\left(n\psi + \eta\cdot \mathrm{tr}(A)\right) \\
&\quad -\langle \mathrm{div}_M, \xi^\top\rangle - \psi\cdot \mathrm{tr}(T_r) - \eta\cdot \mathrm{tr}(AT_r) \\
&= \langle \nabla S_r, \xi^\top\rangle + \eta\left(S_1S_r - (r+1)S_{r+1}\right) \\
&\quad \psi\left(nS_r - (n-r)S_r\right) - \langle \mathrm{div}_M, \xi^\top\rangle \\
&= \langle \nabla S_r, \xi^\top\rangle + rS_r\psi + \eta\cdot \mathrm{tr}(A^2T_r) - \langle \mathrm{div}_M, \xi^\top\rangle.
\end{aligned}$$

□

No próximo teorema, veremos condições suficientes para que M seja umbílica em uma variedade $\overline{M}$ munida de campo vetorial conforme fechado $\xi^\top$. Observe que, em seu enunciado, a condição $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ pode ser interpretada geometricamente como garantindo que $\varphi(M)$ se curva na direção de ξ.

Teorema 3.15. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana orientada munida de campo de conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Considere $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Fixado um campo normal unitário N ao longo de φ, suponha que o operador de Weingarten correspondente A seja não negativo (respectivamente, não positivo), que $\inf_M\langle N, \xi\rangle > 0$, $\psi \geq 0$ em M (respectivamente, que $\psi \leq 0$), ξ é limitado e livre de zeros em M e $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ (respectivamente, $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$). Assim, temos duas situações:*

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Demonstração. Analisemos, inicialmente, o caso em que A é não negativo, $\psi \geq 0$ e $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$. Nesse caso, devemos observar que, se $\mathrm{tr}(A) \equiv 0$, o problema está resolvido, já que A é não negativa.

Dessa forma, façamos $f = \mathrm{tr}(A)$, de sorte que $f \geq 0$, e $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Com isso, temos $\langle \nabla f, \xi^\top \rangle = \xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$. Ademais, por conta do Lema 3.14, item (a), obtemos que

$$\mathrm{div}_M(\xi^\top) = n\psi + \eta \cdot \mathrm{tr}(A) \geq \eta \cdot \mathrm{tr}(A) \geq \alpha f,$$

onde $\alpha = \inf_M \langle N, \xi \rangle > 0$. Aplicando o Teorema 3.4 e o fato de que $|\xi^\top| \leq |\xi|$ no caso polinomial, e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, no caso exponencial, temos que $f \leq 0$. Portanto, $f \equiv 0$, provando a primeira parte.

Para o caso em que A é não positivo, $\psi \leq 0$ e $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$, também devemos mostrar que $\mathrm{tr}(A) \equiv 0$. Para isso, basta tomar $f = -\mathrm{tr}(A)$ e trocar $\xi^\top$ por $-\xi^\top$ para obter as mesmas consequências.

□

Exemplo 3.16 (Espaço hiperbólico)**.** *Um dos modelos do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ pode ser concebido como uma hipersuperfície do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, que é o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica de Minkowski*

$$-dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{n+1}^2,$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nesse caso,

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = -1 \text{ e } x_1 > 0\}$$

com métrica indizida de $\mathbb{L}^{n+1}$. Com isso, $\mathbb{H}^n$ é uma variedade riemanniana cujo campo normal unitário é o campo posição $P(x) = x$, com $x \in \mathbb{L}^{n+1}$, e $T_x\mathbb{H}^n = P^\perp(x)$.

O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ também pode ser visto como uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}$: basta tomar, para k constante e $2 \leq i \leq n+1$,

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1, x_1 > 0 \text{ e } x_i = k\} \subset \mathbb{H}^{n+1}.$$

Nesse caso, tanto P quanto $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ são campos normais a $\mathbb{H}^n$, visto como subvariedade de $\mathbb{L}^{n+2}$. Visto como hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}$, o campo $\xi = \partial_i + x_i P$ é um campo normal não nulo em relação a $\mathbb{H}^n$, uma vez que $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ (pois $\langle \xi, P \rangle = x_i + x_i \langle P, P \rangle = 0$) e $\langle X, \xi \rangle = 0$ para todos $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$. Tomando ∇, $\overline{\nabla}$ e D as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$, respectivamente, e $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ quaisquer, temos

$$\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle = \langle D_X(\partial_i + x_i P), Y \rangle = \langle X(x_i)P + x_i X, Y \rangle = \langle x_i X, Y \rangle.$$

Com isso, ξ é um campo conforme fechado de $\mathbb{H}^{n+1}$ cujo fator conforme é x_i. Ademais, $|\xi|^2 = 1 + x_i^2$, logo, $(1 + x_i^2)^{-\frac{1}{2}}\xi$ é um campo normal unitário a $\mathbb{H}^n$ cujo operador de

Weingarten nessa direção é dado por

$$A = -\frac{x_i}{\sqrt{1+x_i^2}} I,$$

onde $I : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$ *é o operador identidade. Portanto, a imersão* $\imath : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *é umbílica e será totalmente geodésica se, e somente se,* $k = 0$.

Como consequência do Teorema 3.15 aplicado ao exemplo construído anteriormente, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.17. *Sejam* $\mathbb{H}^{n+1}$ *o espaço hiperbólico e* $\xi = \partial_i + x_i P$ *o campo vetorial conforme fechado, cujo fator conforme é* x_i*, onde* $2 \leq i \leq n+2$*,* P *é o campo posição e* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$*. Considere* $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em* $\mathbb{H}^{n+1}$*. Fixado um campo normal unitário* N *ao longo de* φ*, suponha que o operador de Weingarten correspondente* A *seja não negativo (respectivamente, não positivo), que* $\inf_M \langle N, \xi \rangle > 0$*,* $x_i \geq 0$ *em* M *(respectivamente,* $x_i \leq 0$*) e* $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ *(respectivamente,* $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$*). Se* M *tem crescimento de volume exponencial e* $|\xi^\top|$ *tende a zero no infinito, então* M^n *é totalmente geodésica.*

Observação 3.18. *O Exemplo 3.16 nos mostra a existência de uma hipersuperfície de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *com crescimento de volume exponencial tal que* $x_i = 0$ *e* $\xi^\top = 0$*, com* $\xi = \partial_i + x_i P$*, que, no caso, é o* $\mathbb{H}^n$*. No corolário 3.17 temos que a hipersuperfície obtida possui crescimento de volume exponencial tal que* $|\xi^\top|$ *tende a zero no infinito e a hipersuperfície é totalmente geodésica, mas esse resultado, em si, não garante que* M^n *seja o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$*. Apesar disso, no trabalho de Do Carmo e Lawson (veja [17]) é provado que hipersuperfícies completamente umbilílicas de mínimas são espaços hiperbólicos. Dessa forma, o resultado anterior garante, junto com [17], que* $M^n = \mathbb{H}^n$*. Para garantir a variedade* M^n *é uma folha de* $\langle \xi \rangle^\perp$ *no caso geral, precisaremos de outras hipóteses, como veremos posteriormente.*

Para o caso em que ξ é um campo de Killing de $\overline{M}$, temos que as fórmulas do Lema 3.14 ainda são válidas, uma vez que todo campo de Killing é um campo conforme de fator conforme nulo. Usando o fato de que $\mathrm{div}_M(\xi^\top) = \eta \cdot \mathrm{tr}(A)$ na demonstração do Teorema 3.15, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.19. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade riemanniana orientada, munida de um campo de Killing* ξ*. Considere* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$*, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em* $\overline{M}$*. Fixado um campo normal unitário* N *ao longo de* φ*, suponha que o operador de Weingarten correspondente* A *seja não negativo (respectivamente, não positivo), que* $\inf_M \langle N, \xi \rangle > 0$*,* ξ *seja limitado em* M *e* $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ *(respectivamente,* $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$*). Assim, temos duas situações:*

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Quando $\overline{M}^{n+1} = G^{n+1}$ é um grupo de Lie munido com uma métrica invariante à esquerda e $\xi \in \mathfrak{g}$ é um elemento do centro da álgebra de Lie de G, isto é, $[X, \xi] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, então ξ é um campo de Killing. De fato, dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\langle \overline{\nabla}_{X_1}\xi, X_2\rangle + \langle X_1, \overline{\nabla}_{X_2}\xi\rangle &= \langle [X_1, \xi] + \overline{\nabla}_\xi X_1, X_2\rangle + \langle X_1, [X_2, \xi] + \overline{\nabla}_\xi X_2\rangle \\ &= \xi\langle X_1, X_2\rangle - \langle X_1, \overline{\nabla}_\xi X_2\rangle + \langle X_1, \overline{\nabla}_\xi X_2\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como todo campo vetorial em G pode ser obtido a partir de uma combinação $\mathcal{C}^\infty(G)$-linear de elementos da álgebra de Lie, segue que ξ é um campo vetorial de Killing e, como consequência do Teorema 3.15, obtemos o corolário a seguir.

Corolário 3.20. *Sejam G^{n+1} um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, munido com uma métrica invariante à esquerda, e ξ um elemento unitário do centro de $\mathfrak{g}$. Considere $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em G. Fixado um campo normal unitário N ao longo de φ, suponha que o operador de Weingarten correspondente A seja não negativo (respectivamente, não positivo), que $\inf_M\langle N, \xi\rangle > 0$ e $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ (respectivamente, $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$). Assim, temos duas situações:*

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é totalmente geodésica em G.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é totalmente geodésica em G.

Quando $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor fixado, então V induz um campo de Killing (de fato, paralelo) em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, em decorrência do Teorema 3.15, temos o corolário a seguir.

Corolário 3.21. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico inteiro sobre $\mathbb{R}^n$, com crescimento de volume polinomial. Se a segunda forma fundamental de M com respeito a um campo normal unitário N for não negativa e $\inf_M\langle N, V\rangle > 0$, onde V é um vetor unitário fixado de $\mathbb{R}^{n+1}$, então M é um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Impondo uma estimativa sobre a função $\eta = \langle N, \xi\rangle$ no Teorema 3.15, podemos retirar a condição $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$, conforme aparece no resultado a seguir.

Teorema 3.22. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana orientada munida com um campo vetorial conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Considere $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma* *imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Sejam N um campo normal unitário a M em $\overline{M}$, tal que o operador $A + \psi/|\xi| I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten na direção de N e I é o operador identidade. Assuma, ainda, que ξ é limitado, livre de zeros em M tal que $\psi \geq 0$ em M e*

$$\eta \geq \frac{|\xi|}{\operatorname{tr}(A) + n\psi|\xi|^{-1} + 1}, \tag{19}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^{\perp}$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^{\top}|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^{\perp}$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

Observação 3.23. *A condição (19), apesar de causar estranheza à primeira vista, é plausível pelo fato de $|\xi| \geq \eta$, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, e do fato de $A + \psi/|\xi| I$ ser não negativo nos fornecer a desigualdade*

$$\operatorname{tr}(A) + \frac{n\psi}{|\xi|} \geq 0,$$

o que implica que

$$\operatorname{tr}(A) + \frac{n\psi}{|\xi|} + 1 \geq \frac{|\xi|}{|\xi|}.$$

Dessa desigualde, obtemos uma condição sobre o comprimento de ξ

$$|\xi| \geq \frac{|\xi|}{\operatorname{tr}(A) + n\psi|\xi|^{-1} + 1}.$$

Com isso, a condição (19) nos pede que a função η esteja entre o comprimento de ξ e o quociente condição em questão.

Demonstração. Conforme fizemos no início desta seção, para provar esse teorema devemos mostrar que N é paralelo a ξ, logo, $\eta \equiv |\xi|$. Assim, fazendo $f = |\xi| - \eta$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $f \geq 0$. Além disso, tomando $\xi^{\top}$, sabemos, pelo Lema 3.14, que $\operatorname{div}_M(\xi^{\top}) = n\psi + \eta \cdot \operatorname{tr}(A)$. Dessa maneira, temos:

$$\eta \geq \frac{|\xi|}{\operatorname{tr}(A) + n\psi|\xi|^{-1} + 1},$$

o que implica que

$$\eta \operatorname{tr}(A) + n\psi \cdot (\eta \cdot |\xi|^{-1}) + \eta \geq |\xi|.$$

Ainda pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $\eta \cdot |\xi|^{-1} \leq 1$. Logo, uma vez que $\psi \geq 0$, obtemos:

$$\eta \cdot \mathrm{tr}(A) + n\psi + \eta \geq \eta \cdot \mathrm{tr}(A) + n\psi \cdot (\eta \cdot |\xi|^{-1}) + \eta \geq |\xi|.$$

Com isso, temos:

$$n\psi + \eta \cdot \mathrm{tr}(A) \geq |\xi| - \eta = f.$$

Isso nos mostra que $\mathrm{div}_M(\xi^\top) \geq f$. Ademais, como ξ não possui zeros em M, conforme calculamos em (18), no início da seção, obtemos:

$$\langle \nabla f, \xi^\top \rangle \;\; = \;\; \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, \xi^\top \right\rangle \geq 0,$$

onde usamos o fato de $A + \psi/|\xi|$ ser um operador não negativo.

Dessa forma, $\mathrm{div}_M(\xi^\top) \geq f$, $\langle \nabla f, \xi^\top \rangle \geq 0$, $|\xi^\top| \leq |\xi|$ no caso polinomial, e $|\xi^\top|$ tende para zero no infinito no caso exponencial, então, pelo Teorema 3.4, temos que $f \equiv 0$ e $|\xi|N \equiv \xi$.

□

Como as folhas da distribuição $\langle \partial_i + x_i P \rangle^\perp$ no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ são os subespaços $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1, x_1 > 0 \text{ e } x_i = k\} \subset \mathbb{H}^{n+1}$, temos o seguinte

Corolário 3.24. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1}$ o espaço hiperbólico e ξ o campo vetorial conforme fechado $\xi = \partial_i + x_i P$, cujo fator conforme é x_i, onde $2 \leq i \leq n+2$, P é o campo posição e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$. Sejam N um campo normal unitário a M em $\overline{M}$, e suponha que o operador $A + x_i \cdot (1+x_i^2)^{-\frac{1}{2}} I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten na direção de N e I é o operador identidade. Assuma que ξ é limitado, não possui zeros em M, $x_i \geq 0$ em M e*

$$\eta \geq \frac{\sqrt{1 + x_i^2}}{\mathrm{tr}(A) + n x_i \cdot (1 + x_i^2)^{-\frac{1}{2}} + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então

$$M^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1, x_1 > 0 \text{ e } x_i = k\} = \mathbb{H}^n,$$

onde k é uma constante.

Exemplo 3.25. *Outro modelo de espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$ *é dado pelo produto warped* $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$, *onde a métrica de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *é*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle (t, x_1, \cdots, x_n) = dt^2 + e^{2t} \left(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \right).$$

Nesse caso, o campo $\xi = e^t \partial_t$, *com* $\partial_t = d/dt$, *é conforme fechado cujo fator conforme é* e^t. *Além disso, a hipersuperfície* $H^n_{\bar{t}} = \{\bar{t}\} \times \mathbb{R}^n$ *de* $\mathbb{H}^{n+1}$, *com sua métrica induzida, é uma horoesfera cujo crescimento de volume é polinomial, uma vez que é isométrica ao espaço euclidiano. Ademais, as folhas da distribuição* $\langle e^t \partial_t \rangle^{\perp}$ *são horoesferas.*

Corolário 3.26. *Sejam* $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ *o espaço hiperbólico e* $\xi = e^t \partial_t$ *o campo vetorial conforme fechado, cujo fator conforme é* e^t. *Considere* $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em* $\overline{M}$. *Sejam* N *um campo normal unitário a* M *em* $\mathbb{H}^{n+1}$, *tal que o operador* $A + e^t I$ *é não negativo, onde* A *é o operador de Weingarten na direção de* N *e* I *é o operador identidade. Assuma* ξ *é limitado em* M, *e*

$$\eta \geq \frac{e^t}{\mathrm{tr}(A) + n + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. *Se* M *tem crescimento de volume polinomial, então* M^n *é uma horoesfera.*

No caso em que ξ é um campo de Killing unitário e fazendo $f = 1 - \langle N, \xi \rangle$ nas notações do Teorema 3.22, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, \xi^{\top} \rangle &= -\langle \nabla \langle N, \xi \rangle, \xi^{\top} \rangle = -\xi^{\top} \langle N, \xi \rangle = -\langle \overline{\nabla}_{\xi^{\top}} N, \xi \rangle - \langle N, \overline{\nabla}_{\xi^{\top}} \xi \rangle \\
&= \langle A\xi^{\top} + \overline{\nabla}_N \xi, \xi^{\top} \rangle = \langle A\xi^{\top}, \xi^{\top} \rangle + \langle \overline{\nabla}_N \xi, \xi \rangle - \langle N, \xi \rangle \langle \overline{\nabla}_N \xi, N \rangle \\
&= \langle A\xi^{\top}, \xi^{\top} \rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de ξ ser unitário para ver que $\langle \overline{\nabla}_N \xi, \xi \rangle = 0$ e o fato de ξ ser Killing para ver que $\langle \overline{\nabla}_N \xi, N \rangle = 0$. De posse desse resultado, uma simples adaptação da demonstração do Teorema 3.22 dá o corolário a seguir.

Corolário 3.27. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade riemanniana orientada, munida com um campo de Killing unitário* ξ. *Considere* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em* $\overline{M}$. *Seja* N *um campo normal unitário a* M *em* $\overline{M}$, *tal que a segunda forma fundamental* A *de* M

com respeito a N é não negativa e

$$\eta \geq \frac{1}{\mathrm{tr}(A)+1}, \tag{20}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^{\perp}$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^{\top}|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^{\perp}$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Aplicando o Corolário 3.27 quando $\overline{M}^{n+1} = G^{n+1}$ for um grupo de Lie munido com uma métrica invariante à esquerda e $\xi \in \mathfrak{g}$ for um elemento unitário do centro da álgebra de Lie, temos o resultado a seguir.

Corolário 3.28. *Sejam G^{n+1} um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, munido com uma métrica invariante à esquerda, e ξ um elemento unitário do centro de $\mathfrak{g}$. Considere $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em G. Seja N um campo normal unitário a M em $\overline{M}$, tal que a segunda forma fundamental A de M com respeito a N seja não negativa e $\eta = \langle N, \xi \rangle$ obedeça a condição (20). Assim, temos duas situações:*

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma classe lateral de subgrupo de Lie de G de codimensão um.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^{\top}|$ tende a zero no infinito, então M é uma classe lateral de subgrupo de Lie de G de codimensão um.

Demonstração. Conforme mostramos anteriormente, ξ é um campo de Killing e, pelo Corolário 3.27, segue que M é uma folha de $\langle \xi \rangle^{\perp}$ e é totalmente geodésica em G. Uma vez que a distribuição $\langle \xi \rangle^{\perp}$ é gerada por campos vetoriais invariantes à esqueda e M é uma folha dela, concluímos que $\langle \xi \rangle^{\perp}$ é uma subálgebra de Lie de codimensão um de $\mathfrak{g}$. Dessa forma, a conexidade de M garante que essa hipersuperfície coincide com a classe lateral de um subgrupo de Lie de G, $\square$

Aplicando o Teorema 3.22 quando $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor unitário fixado, temos o corolário a seguir.

Corolário 3.29. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico inteiro sobre $\mathbb{R}^n$, com crescimento de volume polinomial. Se a segunda forma fundamental de M com respeito a um campo normal unitário N for não negativa e $\eta = \langle N, V \rangle$, onde V é um vetor unitário fixado de $\mathbb{R}^{n+1}$, satisfizer a condição (20), então M é um plano ortogonal a V.*

O próximo resultado é inspirado no Teorema 3.1 de [4].

Teorema 3.30. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana de Einstein orientada, munida de campo vetorial campo conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada, que $\langle A\xi^\top, \psi\xi^\top\rangle \geq 0$ em M, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{|\xi| - nH\psi}{|A|^2 + 1}, \tag{21}$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Assim, temos duas situações:

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi|I$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi|I$.

Demonstração. Assim como fizemos em resultados anteriores, considere $f = |\xi| - \eta$ e $X = A\xi^\top$.

Como ξ é um campo conforme fechado livre de zeros em M, então, por (18), obtemos

$$\langle\nabla f, X\rangle = \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, A\xi^\top\right\rangle = |A\xi^\top|^2 + \left\langle \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, A\xi^\top\right\rangle \geq 0,$$

uma vez que $\langle A\xi^\top, \psi\xi^\top\rangle \geq 0$ por hipótese.

Por outro lado, usando o item (b) do Lema 3.14, que $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) = 0$ por $\overline{M}$ ser uma variedade Einstein, $\xi^\top(nH) = 0$, por H ser constante em M, segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_M(A\xi^\top) &= -\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + nH\psi + \eta|A|^2 \\ &= nH\psi + \eta|A|^2 \end{aligned}$$

Usando a igualdade anterior e a condição (21), temos:

$$\eta \geq \frac{|\xi| - nH\psi}{|A|^2 + 1},$$

o que implica que

$$\eta(|A|^2 + 1) \geq |\xi| - nH\psi,$$

logo

$$\mathrm{div}_M(X) = nH\psi + \eta|A|^2 \geq |\xi| - \eta = f.$$

Portanto, como $\mathrm{div}_M(X) \geq f$, $\langle \nabla f, X\rangle \geq 0$ e $|X| \leq |A||\xi^\top|$, então, para o caso polinomial, temos $|X|$ limitado e $f \leq 0$ e para o caso exponencial, $|X| \leq |A||\xi^\top|$ tende a zero no infinito e $f \leq 0$. Assim, em ambos os casos, $f \equiv 0$ em M, ou seja, $N \equiv \xi/|\xi|$ em M a qual é uma folha de $\langle \xi\rangle^\perp$.

□

Assim como fizemos anteriormente, usando o fato de $\mathbb{H}^{n+1}$ ser uma variedade de Einstein, obtemos os seguintes corolários como aplicação direta do Teorema 3.30.

Corolário 3.31. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1}$ o espaço hiperbólico e $\xi = \partial_i + x_i P$ o campo vetorial conforme fechado cujo fator conforme é x_i, onde $2 \leq i \leq n+2$, P é o campo posição e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada, que $\langle A\xi^\top, x_i\xi^\top\rangle \geq 0$ em M, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{\sqrt{1+x_i^2} - nx_iH}{|A|^2+1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então

$$M^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1, x_1 > 0 \text{ e } x_i = k\} = \mathbb{H}^n,$$

onde k é uma constante.

Corolário 3.32. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ o espaço hiperbólico e $\xi = e^t\partial_t$ o campo vetorial conforme fechado cujo fator conforme é e^t. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada, que $\langle A\xi^\top, \xi^\top\rangle \geq 0$ em M, que ξ seja limitado em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{(1-nH)e^t}{|A|^2+1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Se M tem crescimento de volume polinomial, então M^n é uma horoesfera.

Para o caso em que ξ é paralelo, temos que seu fator conforme é $\psi \equiv 0$. Aplicando esse fato no Teorema 3.30, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.33. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana de Einstein orientada, munida de campo vetorial Killing ξ, unitário. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido, e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada, que ξ seja paralelo e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{1}{|A|^2 + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

(b) Se M é uma variedade com crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Observação 3.34. *O item (a) do Corolário 3.33 foi provado no Teorema 3.1 de [4], contudo ele foi enunciado nessa parte por completude da tese.*

O resultado a seguir traz conclusões semelhantes aos Teoremas 3.22 e 3.30, mas com hipóteses envolvendo as r-ésimas transformações Newton em espaços ambiente com curvatura seccional constante.

Teorema 3.35. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, orientada e munida de campo vetorial conforme fechado ξ com fator conforme ψ. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M em $\overline{M}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{0, \cdots, n-1\}$, $AT_r + \psi/|\xi| T_r$ seja não negativa, que ξ seja limitado, livre de zeros em M, $\psi \geq 0$ em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{|\xi|}{\operatorname{tr}(AT_r) + \psi \cdot |\xi|^{-1} \cdot \operatorname{tr}(T_r) + 1}, \tag{22}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

Demonstração. Fazendo novamente $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e $f = |\xi| - \eta$, temos $f \geq 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $N = \xi/|\xi|$ ao longo de M. Sendo esse o caso, o teorema estará provado. Definamos, ainda, $X = T_r \xi^\top$.

Como ξ é um campo conforme fechado e livre de zeros em M, então, por (18), temos

$$\langle \nabla f, X \rangle = \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, T_r\xi^\top \right\rangle = \left\langle AT_r\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}T_r\xi^\top, \xi^\top \right\rangle \geq 0,$$

uma vez que T_r é autoadjunta e $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear, A e T_r comutam, e $AT_r + \psi/|\xi|T_r$ é não negativa.

Por outro lado, usando o item (c) do Lema 3.14, que $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, obtemos

$$\operatorname{div}_M(X) = \psi \cdot \operatorname{tr}(T_r) + \eta \cdot \operatorname{tr}(AT_r).$$

Assim, pela condição (22), segue que

$$\eta \geq \frac{|\xi|}{\operatorname{tr}(AT_r) + \psi \cdot |\xi|^{-1} \cdot \operatorname{tr}(T_r) + 1},$$

o que implica

$$\eta \cdot \operatorname{tr}(AT_r) + \psi \cdot \eta \cdot |\xi|^{-1} \cdot \operatorname{tr}(T_r) + \eta \geq |\xi|.$$

Ainda pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $\eta \cdot |\xi|^{-1} \leq 1$. Logo, uma vez que $\psi \geq 0$, obtemos:

$$\eta \cdot \operatorname{tr}(AT_r) + \psi \cdot \operatorname{tr}(T_r) + \eta \geq \eta \cdot \operatorname{tr}(AT_r) + \psi \cdot \eta \cdot |\xi|^{-1} \cdot \operatorname{tr}(T_r) + \eta \geq |\xi|.$$

Com isso, temos:

$$\operatorname{div}_M(X) = \psi \cdot \operatorname{tr}(T_r) + \eta \cdot \operatorname{tr}(AT_r) \geq |\xi| - \eta = f.$$

Dessa forma, para o caso polinomial, como $X = T_r\xi^\top$ e ξ e A são limitados em M, temos que T_r e X são limitados em M. Logo, pelo Teorema 3.4, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M.

Para o caso exponencial, percebe-se que, uma vez que T_r é limitado em M e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então $|X|$ tende a zero no infinito. Logo, pelo Teorema 3.4, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M.

□

Observação 3.36. *Como $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, deve ser $\psi/|\xi|$ constante* *em M, pois M é umbílica.*

Assim como fizemos anteriormente, usando o fato de $\mathbb{H}^{n+1}$ ser uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, obtemos os seguintes corolários como aplicação direta do Teorema 3.35.

Corolário 3.37. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1}$ o espaço hiperbólico e $\xi = \partial_i + x_i P$ o campo vetorial conforme fechado cujo fator conforme é x_i, onde $2 \leq i \leq n+2$, P é o campo posição e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{0, \cdots, n-1\}$, o operador $AT_r + x_i \cdot (1+x_i^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_r$ seja não negativo, que ξ seja limitado e livre de zeros em M $x_i \geq 0$ em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{\sqrt{1+x_i^2}}{\operatorname{tr}(AT_r) + x_i \cdot (1+x_i^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tr}(T_r) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então

$$M^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1, x_1 > 0 \text{ e } x_i = k\} = \mathbb{H}^n,$$

onde k é uma constante.

Corolário 3.38. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ o espaço hiperbólico e $\xi = e^t \partial_t$ o campo vetorial conforme fechado cujo fator conforme é e^t. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{0, \cdots, n-1\}$, o operador $AT_r + T_r$ seja não negativo, que ξ seja limitado em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{e^t}{\operatorname{tr}(AT_r) + \operatorname{tr}(T_r) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Se M tem crescimento de volume polinomial, então M^n é uma horoesfera.

Para o caso em que ξ é paralelo, temos que seu fator conforme é $\psi \equiv 0$. Aplicando esse fato no Teorema 3.35, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.39. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, orientada e munida de campo vetorial paralelo ξ, unitário. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$*

uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M em $\overline{M}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{0, \cdots, n-1\}$, o operador AT_r seja não negativo e que valha a seguinte condição:

$$\eta \geq \frac{1}{\operatorname{tr}(AT_r) + 1}, \tag{23}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Aplicando o Corolário 3.39 quando $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $V \in \mathrm{R}^{n+1}$ é um vetor unitário fixado, temos o corolário a seguir.

Corolário 3.40. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico inteiro sobre $\mathbb{R}^n$, com crescimento de volume polinomial. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{0, \cdots, n-1\}$, o operador AT_r seja não negativo. Se $\eta = \langle N, V \rangle$, onde V é um vetor unitário fixado de $\mathbb{R}^{n+1}$, satisfizer a condição (23), então M é um plano ortogonal a V.*

O próximo resultado complementa o Teorema 3.5 de [4], fornecendo conclusões semelhantes àquelas dos Teoremas 3.22, 3.30 e 3.35, mas com hipóteses envolvendo as r-ésimas transformações de Newton.

Teorema 3.41. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, orientada e munida de um campo vetorial conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M em $\overline{M}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{1, \cdots, n\}$, o operador T_{r-1} seja não negativo, $\operatorname{tr}(T_r)$ seja constante em M, que $\langle \psi T_{r-1}\xi^\top, A\xi^\top \rangle \geq 0$, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{|\xi| - r\psi S_r}{\operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1}, \tag{24}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e S_r é a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A. Assim, temos duas situações:

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

Demonstração. Mais uma vez, fazendo $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e $f = |\xi| - \eta$, temos $f \geq 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $N = \xi/|\xi|$ ao longo de M. Assim, também como antes, o teorema estará provado se mostrarmos que $f \equiv 0$. Definimos, ainda, $X = AT_{r-1}\xi^\top$.

Sabendo que ξ é um campo conforme fechado e livre de zeros em M, segue de (18) que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, X\rangle &= \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, AT_{r-1}\xi^\top \right\rangle \\ &= \langle T_{r-1}(A\xi^\top), A\xi^\top\rangle + \left\langle A\xi^\top, \frac{\psi}{|\xi|}T_{r-1}\xi^\top \right\rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos que T_{r-1} é não negativo, que A e T_{r-1} comutam e que $\langle \psi T_{r-1}\xi^\top, A\xi^\top\rangle \geq 0$.

Ademais, sabemos que $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, que, por (1), temos $\mathrm{tr}(T_r) = (n-r)S_r$, logo, S_r é constante e, pelo item (d) do Lema 3.14, obtemos

$$\mathrm{div}_M(X) = r\psi S_r + \eta \cdot \mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}).$$

Assim, pela condição (24), temos

$$\eta \geq \frac{|\xi| - r\psi S_r}{\mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1},$$

o que implica

$$\eta(\mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1) \geq |\xi| - r\psi S_r,$$

nos garantindo

$$\mathrm{div}_M(X) = r\psi S_r + \eta \cdot \mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}) \geq |\xi| - \eta = f.$$

Dessa forma, para o caso polinomial, como $X = AT_{r-1}\xi^\top$, ξ e A são limitados em M, então T_{r-1} e X são limitados em M. Logo, pelo Teorema 3.4, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M.

Para o caso exponencial, percebe-se que, uma vez que AT_{r-1} é limitado em M e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, concluímos que $|X|$ tende a zero no infinito. Logo, pelo Teorema 3.4, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M.

□

Usando o fato de $\mathbb{H}^{n+1}$ ser uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, obtemos os seguintes corolários como aplicação direta do Teorema 3.41.

Corolário 3.42. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1}$ o espaço hiperbólico e $\xi = \partial_i + x_i P$ o campo vetorial conforme fechado cujo fator conforme é x_i, onde $2 \leq i \leq n+2$, P é o campo posição e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{1, \ldots, n\}$, o operador T_{r-1} seja não negativo, $\mathrm{tr}(T_r)$ seja constante em M, que $\langle x_i T_{r-1}\xi^\top, A\xi^\top\rangle \geq 0$, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{\sqrt{1+x_i^2} - r x_i S_r}{\mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e S_r é a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A. Se M tem crescimento de volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então

$$M^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1, x_1 > 0 \text{ e } x_i = k\} = \mathbb{H}^n,$$

onde k é uma constante.

Corolário 3.43. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ o espaço hiperbólico e $\xi = e^t \partial_t$ o campo vetorial conforme fechado cujo fator conforme é e^t. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{1, \ldots, n\}$, o operador T_{r-1} seja não negativo, $\mathrm{tr}(T_r)$ seja constante em M, que $\langle T_{r-1}\xi^\top, A\xi^\top\rangle \geq 0$, que ξ seja limitado em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{(1 - rS_r)e^t}{\mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e S_r é a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A. Se M tem crescimento de volume polinomial, então M^n é uma horoesfera.

Para o caso em que ξ é paralelo, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.44. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, orientada e munida de um campo vetorial paralelo ξ unitário. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M em $\overline{M}$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{1, \ldots, n\}$, o operador T_{r-1} seja não negativo, $\mathrm{tr}(T_r)$ seja constante em M e que* *valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{1}{\operatorname{tr}(A^2T_{r-1}) + 1}, \tag{25}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$*. Assim, temos duas situações:*

(a) Se M *tem crescimento de volume polinomial, então* M *é uma folha da distribuição* $\langle \xi \rangle^{\perp}$ *e é totalmente geodésica em* $\overline{M}$*.*

(b) Se M *tem crescimento de volume exponencial e* $|\xi^{\top}|$ *tende a zero no infinito, então* M *é uma folha da distribuição* $\langle \xi \rangle^{\perp}$ *e é totalmente geodésica em* $\overline{M}$*.*

Observação 3.45. *O item (a) do Corolário 3.44 também foi provado no Teorema 3.1 de [4], contudo ele foi enunciado nessa parte para completude da tese.*

Aplicando o Corolário 3.44 quando $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $V \in \mathrm{R}^{n+1}$ é um vetor unitário fixado, temos o corolário a seguir.

Corolário 3.46. *Seja* $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *um gráfico inteiro sobre* $\mathbb{R}^n$*, com crescimento de volume polinomial. Oriente* M *pelo campo normal unitário* N*, globalmente definido, e suponha que* M *tenha segunda forma fundamental* A *limitada, que, para algum* $r \in \{0, \ldots, n-1\}$*, o operador* T_{r-1} *seja não negativo, que* $\operatorname{tr}(T_r)$ *seja constante e se* $\eta = \langle N, V \rangle$*, onde* V *é um vetor unitário fixado de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, satisfizer a condição (25), então* M *é um plano ortogonal a* V*.*

4 UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO RELACIONADO AO CRESCIMENTO DE VOLUME COM PESO

Neste capítulo, estudaremos extensões do princípio do máximo obtido em [4] a variedades riemannianas com peso.

4.1 Variedades com peso e *sólitons* de Ricci

Dada uma variedade riemanniana n-dimensional completa e orientada (M^n, g) e uma função suave $\sigma : M^n \to \mathbb{R}$, a variedade com peso M^n_σ associada a M^n e σ é a tripla $(M^n, g, d\mu = e^{-\sigma} dM)$, onde dM denota o elemento de volume usual de M^n. Nesse sentido, definimos alguns operadores nessa variedade com peso. (Veja [34] para encontrar as principais definições e resultados dessa teoria.)

1. O tensor ∞-Bakry-Émery-Ricci ou simplesmente o tensor de Bakry-Émery-Ricci é dado por

$$\mathrm{Ric}_\sigma := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,\sigma.$$

2. A σ-divergência de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dada por

$$\mathrm{div}_\sigma(X) := e^{\sigma}\mathrm{div}(e^{-\sigma}X) = \mathrm{div}(X) - \langle \nabla\sigma, X\rangle.$$

Nesse sentido, o σ-laplaciano de uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é dado por:

$$\Delta_\sigma f = \mathrm{div}_\sigma(\nabla f) = \Delta f - \langle \nabla\sigma, \nabla f\rangle.$$

3. É possível obter uma fórmula tipo-Bochner para funções suaves em variedades com peso, conforme provado em [34]: dada uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, onde M^n é uma variedade com peso σ, temos

$$\frac{1}{2}\Delta_\sigma|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}\, f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta_\sigma f)\rangle + \mathrm{Ric}_\sigma(\nabla f, \nabla f).$$

4. O volume com peso de um domínio limitado Ω de M é dado por:

$$\mathrm{vol}_\sigma(\Omega) = \int_\Omega e^{-\sigma} dM.$$

5. Se M for uma variedade completa e não compacta, denotamos por $B(p, t)$ a bola geodésica centrada em $p \in M$ e com raio t. Dada uma função $\chi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, dizemos que M tem crescimento de σ-volume do tipo $\chi(t)$ se existe $p \in M$

tal que:

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p,t)) = \mathcal{O}(\chi(t))$$

quando $t \to +\infty$.

Um *sóliton de Ricci* é um terno $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle, X)$, em que M é uma variedade riemanniana com métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e X é um campo vetorial suave em M satisfazendo a equação do sóliton,

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X\langle,\rangle = \lambda\langle,\rangle,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Quando $\lambda > 0$ dizemos que o sóliton de Ricci é *shrinking*, quando $\lambda = 0$ dizemos que o sóliton é *steady* e no caso em que $\lambda < 0$, o sóliton é dito *expanding*.

Se $X = \nabla\sigma$, com $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, a equação do sóliton se torna:

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,\sigma = \lambda\langle,\rangle$$

e o sóliton é dito *Ricci gradiente*. Em outras palavras, se uma variedade com peso σ é uma variedade de Einstein, em relação ao terno de Ricci com peso, então essa variedade também será um sóliton de Ricci gradiente, uma vez que $\mathrm{Ric}_\sigma = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,\sigma = \lambda\langle,\rangle$.

O exemplo a seguir encontra-se no trabalho de PIGOLA, RIMOLDI e SETTI (veja [32]), que é um exemplo interessante de um sóliton de Ricci gradiente, chamado *espaço gaussino.*

Exemplo 4.1 (Espaço gaussiano)**.** *A variedade $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle, \sigma)$, com métrica canônica e função peso dada por $\sigma(x) = \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$ é o chamado espaço gaussiano. Uma vez que* $\mathrm{Ric}_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$ *e* $\mathrm{Hess}\,\sigma = \lambda\langle,\rangle$ *em $\mathbb{R}^n$, temos que* $\mathrm{Ric}_\sigma = \lambda\langle,\rangle$, *ou seja, o espaço gaussiana é um sóliton de Ricci gradiente. Nesse caso, denotaremos por $\mathbb{G}(\lambda)$ o espaço gaussiano $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle, \sigma)$, com $\sigma(x) = \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$.*

Além disso, se $\lambda = 0$, então o espaço gaussiana será o próprio espaço euclidiano. Assim, supondo $\lambda \neq 0$, usando coordenadas polares, com $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = (0, +\infty) \times_r \mathbb{S}^{n-1}$ e $\omega_{n-1} := \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_\sigma(B(0,R)) &= \int_{B(0,R)} e^{-\frac{\lambda|x|^2}{2}}dx = \omega_{n-1}\int_0^R re^{-\frac{\lambda r^2}{2}}dr \\
&= -\frac{\omega_{n-1}}{\lambda}\int_0^{-\frac{\lambda R^2}{2}} e^u du \\
&= -\frac{\omega_{n-1}}{\lambda}\left(e^{-\frac{\lambda R^2}{2}}-1\right)
\end{aligned}$$

Com isso, se $\lambda > 0$, então o espaço gaussiano $\mathbb{G}(\lambda)$ possui σ-volume finito e se $\lambda < 0$ o espaço gaussiano terá crescimento de σ-volume exponencial.

Esse exemplo nos mostra que a curvatura de Ricci em variedades riemannianas com peso traz características significativamente distantas da curvatura de Ricci padrão, uma vez que o Teorema de Myers (veja [26]) nos revela que se uma variedade riemanniana completa possui curvatura de Ricci limitada por baixo por uma uma constante positiva, isto é, $\mathrm{Ric} \geq K$, com $K > 0$, então essa variedade deve ser compacta. Assim, esse resultado não pode ser estendido diretamente a variedades com peso, já que o espaço gaussiano com $\lambda > 0$ é uma variedade riemanniana completa com $\mathrm{Ric}_\sigma = \lambda > 0$ e não é compacta.

O comportamento do crecimento de σ-volume da Gaussina já era, de certa forma, esperado, uma vez que o Teorema 3.1 e o Corolário 4.1 de [34] nos trazem os seguintes resultados.

Teorema 4.2 (Wei-Wylie)**.** *Se M_σ é uma variedade com peso tal que* $\mathrm{Ric}_\sigma \geq \lambda$*, $p \in M$ e $R > 0$, então, para cada $0 \leq r \leq R$, existem constantes A, B e C tais que*

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p,R)) \leq A + B\int_r^R e^{-\lambda t^2 + Ct}dt.$$

Corolário 4.3. *Se M é completa e* $\mathrm{Ric}_\sigma \geq \lambda > 0$*, então* $\mathrm{vol}_\sigma(M)$ *é finito e M tem grupo fundamental finito.*

É importante salientar que a primeira parte do Corolário 4.3 também foi provada em [25].

Exemplo 4.4. *Considere o espaço hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n$, utilizando como modelo uma hipersuperfície do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, que é o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica de Minkowski*

$$-dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{n+1}^2,$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Nesse caso,*

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = -1 \text{ e } x_1 > 0\},$$

munido com métrica induzida por $\mathbb{L}^{n+1}$. *Com isso,* $\mathbb{H}^n$ *é uma variedade riemanniana, cujo campo normal unitário em* $\mathbb{L}^{n+1}$ *é o campo posição* $P(x) = x$, *com* $x \in \mathbb{H}^n$, *e* $T_x\mathbb{H}^n = P^\perp(x)$. *Tomando* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{H}^n$ *e* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, *obtemos*

$$\langle \nabla x_1^2, X\rangle = X(x_1^2) = 2x_1 X(x_1) = 2x_1\langle X, \partial_1\rangle = \langle X, 2x_1\partial_1^\top\rangle,$$

onde $\partial_1 = \partial/\partial x_1$ *e* $\partial_1^\top = \partial_1 + x_1 P$, *onde* $P(x) = x$ *é o campo posição. Dessa forma,* $\nabla x_1^2 = 2x_1\partial_1^\top$. *Ademais, como* $\partial_1^\top$ *é um campo conforme fechado (consoante ao que foi mostrado no Exemplo 3.16), tomando* $p \in \mathbb{H}^n$ *e* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$ *tal que* $|X(p)| = 1$, *temos*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(x_1^2)(X, X) &= \langle \nabla_X \nabla(x_1^2), X\rangle = 2\langle \nabla_X x_1\partial_1^\top, X\rangle \\
&= 2\langle X(x_1)\partial_1^\top + x_1^2 X, X\rangle \\
&= 2\langle X, \partial_1\rangle^2 + 2x_1^2 \geq 2x_1^2 = 2\left(\sum_{i=2}^{n+1} x_i^2\right) + 2 \\
&\geq 2,
\end{aligned}$$

onde usamos que $-x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = -1$.

Seja $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^n)$ *dada por* $\sigma(x) = x_1^2$. *Dados* $p \in \mathbb{H}^n$ *e* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$ *tal que* $|X(p)| = 1$, *obtemos a seguinte expressão para a curvatura de Ricci com peso em* p

$$(\mathrm{Ric}_{\mathbb{H}^n})_\sigma(X, X) = \mathrm{Ric}_{\mathbb{H}^n}(X, X) + (\mathrm{Hess}\ \sigma)(X, X) = -1 + \langle X, \partial_1\rangle^2 + 2x_1^2 \geq 1,$$

onde usamos que $\mathbb{H}^n$ *é uma variedade de Einstein. Portanto, pelo Corolário 4.3,* $\mathbb{H}^n_\sigma$ *tem* σ*-volume finito, logo, seu crescimento de* σ*-volume é polinomial (basta considerar um polinômio de grau zero).*

No próximo exemplo, presente no trabalho de PIGOLA, RIMOLDI e SETTI (veja [32]), é possível construir sólitons de Ricci gradiente a partir de variedades de Einstein.

Exemplo 4.5. *Seja* N^k *uma variedade de Einstein de dimensão* k, *tal que* $\mathrm{Ric}_N = \lambda\langle , \rangle$. *A partir de* N *podemos construir sólitons de Ricci ao construir a variedade produto* $M^{n+k} = \mathbb{R}^n \times N^k$, *munida com métrica produto. Tomemos a função suave* $\sigma : M \to \mathbb{R}$ *dada por* $\sigma(x, p) = \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$, *para* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $p \in N^k$. *Como* $X(\sigma) = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{X}(N)$, *temos:*

$$(\mathrm{Ric}_M)_\sigma = \mathrm{Ric}_{\mathbb{R}^n} + \mathrm{Ric}_N + \mathrm{Hess}_{\mathbb{R}^n}(\sigma) + \mathrm{Hess}_N(\sigma) = \lambda\langle , \rangle_N + \lambda\langle , \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Dessa forma, $\left(M^{n+k}, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} \oplus \langle , \rangle_{N^k}, \sigma\right)$ *é um sóliton de Ricci gradiente.*

No contexto de variedades com peso, podemos definir a noção de curvatura média com peso para hipersuperfícies. Para tanto, considere Σ^n uma hipersuperfície orientável imersa em uma variedade riemanniana com peso M_σ^{n+1}, e denote o gradiente com respeito à métrica de M^{n+1} por $\overline{\nabla}$. De acordo com [20], a *curvatura média com peso* ou σ*-curvatura média* H_σ de Σ^n é dada por

$$nH_\sigma = nH + \langle N, \overline{\nabla}\sigma \rangle,$$

onde H denota a curvatura média ordinária de Σ^n com respeito ao campo normal unitário N. Nesse contexto, considerando Ω um domínio limitado em Σ^n, de acordo com [9], obtemos a primeira variação do volume com peso

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{vol}_\sigma(\Omega_t) = \int_\Omega H_\sigma \langle N, V \rangle e^{-\sigma}\, d\Sigma,$$

onde V é o campo vetorial variacional da variação.

Além disso, quando $H_\sigma \equiv 0$, dizemos que a variedade Σ^n é σ*-mínima* na variedade com peso M_σ^{n+1}.

Exemplo 4.6. *Sejam* $\mathbb{R}_\sigma^{n+1}$ *variedade gaussiana, com* $\sigma = \lambda|x|^2/2$, *e* R^n *o hiperplano tal que* $R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, V \rangle = 0\}$, *onde* V *é um vetor unitário com extremidade na origem. Nesse caso,* R^n *é uma variedade* σ*-mínima em relação a* $\mathbb{R}_\sigma^{n+1}$, *uma vez que*

$$nH_\sigma = nH + \langle N, \overline{\nabla}\sigma \rangle = \lambda \langle V, x \rangle = 0.$$

Vale salientar que, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e fazendo $\sigma = \frac{|x|^2}{2}$, as hipersuperfícies σ-mínimas são conhecidas como *self-shrinkers*. Conforme mostrado em [16], uma tal hipersuperfície satisfazendo $H = \langle x, N \rangle$, onde x é o vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}$. Com isso, os hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$, construídos conforme o exemplo 4.6, são self-shrinkers.

4.2 Sobre o princípio do máximo II

Concentraremos nessa seção os principais resultados a respeito do princípio do máximo para variedades com peso. O lema a seguir será essencial para provar o resultado principal.

Lema 4.7. *Sejam M_σ uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, com peso $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial completo, com fluxo maximal ψ. Se Ω é um domínio de integração limitado de M, então,*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \int_{\psi_t(\Omega)} d\mu = \int_{\psi_{t_0}(\Omega)} \mathrm{div}_\sigma(X) d\mu,$$

onde $d\mu = e^{-\sigma} dM$.

Demonstração. Uma vez que $\overline{\Omega}$ é compacto, podemos derivar sob o sinal da integral, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \int_{\psi_t(\Omega)} d\mu &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \int_{\psi_t(\Omega)} e^{-\sigma} dM = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \int_{\Omega} \psi_t^*(e^{-\sigma} dM) \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \psi_t^*(e^{-\sigma} dM) = \int_\Omega \psi_{t_0}^* \mathcal{L}_X(e^{-\sigma} dM) \\
&= \int_\Omega \psi_{t_0}^*(\mathcal{L}_X(e^{-\sigma}) dM + e^{-\sigma} \mathcal{L}_X(dM)) \\
&= \int_\Omega \psi_{t_0}^*(\langle \nabla e^{-\sigma}, X \rangle dM + e^{-\sigma} \mathrm{div}(X) dM) \\
&= \int_\Omega \psi_{t_0}^*(\mathrm{div}(e^{-\sigma} X) dM) = \int_\Omega \psi_{t_0}^*(e^{\sigma} \mathrm{div}(e^{-\sigma} X) e^{-\sigma} dM) \\
&= \int_{\psi_{t_0}(\Omega)} \mathrm{div}_\sigma(X) d\mu,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar

□

O próximo resultado generaliza os teoremas 3.1 e 3.4 do capítulo anterior para variedades com peso.

Teorema 4.8. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial em M, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave e K um subconjunto fechado (possivelmente vazio) de M tal que $M \setminus K$ é estável sob o fluxo de X. Considere $\rho = d(\cdot, o)$ a distância riemanniana de origem em $o \in M$, e constantes $c > 0$ e $0 \le k \le 1$. Suponha que $|X| < c\rho^k$ fora de algum subconjunto compacto de M se $0 < k \le 1$, e $|X| < c$ em M se $k = 0$. Suponha que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é tal que $\langle \nabla f, X \rangle \ge 0$ em M e $\mathrm{div}_\sigma X \ge af$ em $M \setminus K$, para alguma função positiva $a \in \mathcal{C}^1(M)$ tal que $\langle \nabla a, X \rangle \ge 0$. Assim, temos duas situações:*

(a) M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial: se $k < 1$, então $f \le 0$ em $M \setminus K$. Se $k = 1$ e M_σ tem crescimento de σ-volume como t^n, então $f \le \frac{nc}{a}$.

(b) M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$: se $k = 0$, então $f \le \frac{c\beta}{a}$ em $M \setminus K$. Se $|X|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, então $f \le 0$ em $M \setminus K$.

Demonstração. Suponha que exista um ponto $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > 0$ e escolha α e r satisfazendo $0 < \alpha < f(p)$ e $B = B(p,r) \subset\subset A_\alpha = \{x \in M \setminus K; f(x) \geq \alpha\}$.

Como X é completo, conforme mostrado na Proposição 3.3, o fluxo ψ_t de X está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, podemos definir a função suave $\phi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ por

$$\phi(t) = \mathrm{vol}_\sigma(\psi_t(B)) = \int_{\psi_t(B)} d\mu = \int_B \psi_t^*(d\mu),$$

onde $d\mu = e^{-\sigma} dM$.

Uma vez que $\overline{B}$ é um domínio de integração compacto, usando Lema 4.7, temos

$$\phi'(t_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \int_{\psi_t(B)} d\mu = \int_{\psi_{t_0}(B)} \mathrm{div}_\sigma(X) d\mu. \tag{26}$$

Além disso, como

$$\frac{d}{dt} f(\psi_t(x)) = \langle \nabla f, X \rangle \geq 0,$$

temos, para $x \in A_\alpha$, que

$$f(\psi_t(x)) \geq f(\psi_0(x)) = f(x) > \alpha,$$

para todo $t \geq 0$.

A partir daí, e tendo em vista que $M \setminus K$ é estável sob o fluxo de X, segue que $\psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha$, para todo $t \geq 0$.

Usando o fato de $\mathrm{div}_\sigma(X) \geq af$ em $M \setminus K$, o resultado em (26) e o fato de que $\psi_t(B) \subset \psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha \subset M \setminus K$ dão

$$\phi'(t) = \int_{\psi_t(B)} \mathrm{div}_\sigma(X) d\mu \geq \int_{\psi_t(B)} af d\mu \geq \alpha \int_{\psi_t(B)} a d\mu = \alpha \int_B (a \circ \psi_t) \psi_t^*(d\mu), \tag{27}$$

para todo $t \geq 0$.

Sejam $\tilde{a} : [0, +\infty) \times M \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{a}(t, x) = a \circ \psi_t(x)$ e, para $x \in M$, $\tilde{a}_x : [0, +\infty) \to (0, \infty)$ tal que $\tilde{a}_x(t) = \tilde{a}(t, x)$. Temos $\tilde{a} \in \mathcal{C}^1([0, +\infty) \times M)$ e $\tilde{a}_x \in \mathcal{C}^1([0, +\infty))$, para todo $x \in M$; além disso,

$$\frac{d}{dt} \tilde{a}_x(t) = \frac{d}{dt} a(\psi_t(x)) = \langle \nabla a, X \rangle \geq 0.$$

Assim, $\tilde{a}_x$ é uma função não-decrescente para todo x. Ademais, como $\overline{B}$ é compacto, $\inf_{x \in B} a(x) = \min_{x \in \overline{B}} a(x) = \underline{a} > 0$. Dessa forma, para todo $x \in B$ temos

$$(a \circ \psi_t)(x) = \tilde{a}_x(t) \geq \tilde{a}_x(0) = a(x) \geq \underline{a}.$$

Usando esse resultado e desigualdade (27), obtemos:

$$\phi'(t) \geq \alpha \int_B (a \circ \psi_t)\psi_t^*(d\mu) \geq \alpha \underline{a} \int_{\psi_t(B)} d\mu = \underline{a}\alpha\phi(t),$$

para todo $t \geq 0$. Em particular, se $t \geq 0$, então $\phi'(t) > 0$, uma vez que $\phi(0) = \mathrm{vol}_\sigma(B) > 0$ para todo $t \geq 0$. Integrando a inequação $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} > \underline{a}\alpha$ ao longo do intervalo $[0, t]$, segue que

$$\phi(t) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha t}, \tag{28}$$

para todo $t \geq 0$.

Denote por $d(x, \psi_t(x))$ a distância riemanniana entre x e $\psi_t(x)$. Se $d(x, \psi_t(x)) \nrightarrow +\infty$ quando $t \to +\infty$, então existe $L \geq 0$ e uma sequência $(t_i)_{i\geq 1}$, com $t_i \to +\infty$, tal que $d(x, \psi_{t_i}(x)) = L$.

Por outro lado, para todo $x \in B$, temos

$$d(p, \psi_t(x)) \leq d(x, \psi_t(x)) + r. \tag{29}$$

Isso significa que $\psi_{t_i}(B) \subset B(p, L + r)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e segue de (28) a seguinte desigualdade:

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p, L + r)) \geq \mathrm{vol}_\sigma(\psi_{t_i}(B)) = \phi(t_i) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha t_i}.$$

Isso claramente não pode ocorrer, uma vez $\mathrm{vol}_\sigma(B(p, L+r)) < +\infty$ e $\mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha t_i} \to +\infty$ quando $t_i \to +\infty$. Assim, $d(x, \psi_t(x)) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

Pela Proposição 3.3, caso $0 \leq k < 1$,

$$d(x, \psi_t(x)) \leq Ct^m \tag{30}$$

para $m = \frac{1}{1-k}$ e $t \geq t_1 > 0$. Caso $k = 1$, também por aquele resultado, temos

$$d(x, \psi_t(x)) \leq A(e^{ct} - 1). \tag{31}$$

Para $k < 1$, tome $C' > C$ e $t_2 > t_1$ tal que $C't^m > Ct^m + r$, para $t \geq t_2$. Com isso, segue de (29), (30) e (28) que

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p, C't^m)) > \mathrm{vol}_\sigma(B(p, Ct^m + r)) \geq \mathrm{vol}_\sigma(\psi_t(B)) = \phi(t) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha t},$$

para todo $t \geq t_2$. Por uma mudança de variáveis, temos:

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p, t)) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha\left(\frac{t}{C'}\right)^{1-k}}, \tag{32}$$

para todo $t \geq t_2$.

Para $k = 1$, tome $A' > A$ e $t' > 0$ tal que $A'e^{ct} > A(e^{ct} - 1) + r$, para $t \geq t'$. Como no caso anterior, segue de (29), (31) e (28) que

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p, A'e^{ct})) > \mathrm{vol}_\sigma(B(p, A(e^{ct} - 1) + r)) \geq \mathrm{vol}_\sigma(\psi_t(B)) = \phi(t) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha t},$$

para todo $t \geq t'$. Por uma mudança de variáveis, supondo $t' > A'$, temos:

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p, t)) > \mathrm{vol}_\sigma(B)\left(\frac{t}{A'}\right)^{\frac{\underline{a}\alpha}{c}}, \tag{33}$$

para todo $t \geq t_2$.

Suponha, agora, que M tem crescimento de σ-volume polinomial. Então, no caso em que $0 \leq k < 1$, (32) não pode ser verdadeira para todo $t \geq t_2$. Dessa maneira, a suposição inicial de que $f(p) > 0$ para algum $p \in M \setminus K$, nos conduz a uma contradição, logo, $f \leq 0$ em $M \setminus K$. No caso $k = 1$, temos que f não pode ser maior que $\frac{cn}{a}$, pois se isso ocorresse, existiria $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > \frac{cn}{a(p)}$. Assim, tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) > \alpha > \frac{cn}{a(p)}$ e fazendo $\overline{A}_\alpha = \{x \in M \setminus K; f(x) > \alpha > \frac{cn}{a(x)}\}$, teríamos $\overline{A}_\alpha$ aberto (pois é a intersecção dos abertos $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ e $\left(\frac{cn}{a}\right)^{-1}(-\infty, \alpha)$) e não vazio, uma vez que $p \in \overline{A}_\alpha$. Refazendo toda a construção dessa demonstração, podemos tomar $B = B(p, r) \subset\subset \overline{A}_\alpha$ e $\underline{a} = \min_{x \in B} a(x)$ (por ser o mínimo, observe que $\alpha > \frac{cn}{\underline{a}}$); então, teríamos novamente a estimativa (33). Mas, como M tem crescimento de σ-volume do tipo t^n, deveríamos ter $n \geq \frac{\underline{a}\alpha}{c}$, ou seja, $\alpha \leq \frac{cn}{\underline{a}}$, contradizendo nossa hipótese. Portanto, $f(x) \leq \frac{cn}{a(x)}$, para todo $x \in M \setminus K$.

Suponha que M tem crescimento de σ-volume exponencial. Se $k = 0$, isto é, $|X| \leq c$, então

$$d(x, \psi_t(x)) \leq \int_0^t \left|\frac{d}{ds}\psi_s(x)\right| ds = \int_0^t |X(\psi_s(x))|\, ds \leq ct.$$

Assim, (29) e (28) fornecem

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p, ct + r)) \geq \mathrm{vol}_\sigma(\psi_t(B)) = \phi(t) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha t},$$

para todo $t \geq 0$. Uma mudança linear de variáveis nos dá

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p, t)) > \left[\mathrm{vol}_\sigma(B)e^{-\frac{\underline{a}\alpha r}{c}}\right] e^{\frac{\underline{a}\alpha t}{c}},$$

para todo $t \geq r$.

Se o crescimento de σ-volume exponencial é como $e^{\beta t}$, então f não pode ser maior que $\frac{c\beta}{a}$, pois se isso ocorresse, existiria $p \in M \setminus K$ tal que $f(p) > \frac{c\beta}{a(p)}$. Com isso, tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) > \alpha > \frac{c\beta}{a(p)}$ e fazendo $\overline{A}_\alpha = \{x \in M \setminus K; f(x) > \alpha > \frac{c\beta}{a(x)}\}$, teríamos $\overline{A}_\alpha$ aberto (pois é a interseção dos abertos $f^{-1}(\alpha,+\infty)$ e $\left(\frac{c\beta}{a}\right)^{-1}(-\infty,\alpha))$ e não vazio, uma vez que $p \in \overline{A}_\alpha$. Refazendo toda a construção dessa demonstração, poderíamos tomar $B = B(p,r) \subset\subset \overline{A}_\alpha$ e $\underline{a} = \min_{x\in B} a(x)$ (por ser o mínimo, observe que $\alpha > \frac{c\beta}{\underline{a}}$); então, teríamos novamente a estimativa (32). Como M tem crescimento de σ-volume do tipo $e^{\beta t}$, deveríamos ter $\beta \geq \frac{\underline{a}\alpha}{c}$, ou seja, $\alpha \leq \frac{c\beta}{\underline{a}}$, contradizendo nossa hipótese. Portanto, $f(x) \leq \frac{c\beta}{a(x)}$, para todo $x \in M \setminus K$.

Por fim, suponha que $\lim_{\rho(x)\to+\infty} |X|(x) = 0$. Para cada $x \in B$, já sabemos que $\lim_{t\to+\infty} d(x,\psi_t(x)) = +\infty$. Fixado um tal x, considere a função comprimento de arco

$$\gamma(t) = \int_0^t |X(\psi_t(x))|ds.$$

Uma vez que $\gamma(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$, aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \gamma'(t) = \lim_{t\to+\infty} |X(\psi_t(x))| = 0.$$

Esse resultado nos permite tomar uma sequência $(t_j)_{j\geq 1}$ tal que $\frac{\gamma(t_j)}{t_j} < \frac{1}{j}$, onde $t_j \to +\infty$. Consequentemente,

$$d(x,\psi_{t_j}(x)) \leq \gamma(t_j) < \frac{t_j}{j}.$$

De (29) e (28), segue que

$$\mathrm{vol}_\sigma\left(B\left(p,\frac{t_j}{j}+r\right)\right) > \mathrm{vol}_\sigma(\psi_{t_j}(B)) = \phi(t_j) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha t_j}. \tag{34}$$

Escrevendo $\gamma_j = \frac{t_j}{j} + r$ e tomando j' que satisfaça $\underline{a}\alpha j' > 2\beta$, (34) se torna

$$\mathrm{vol}_\sigma(B(p,\gamma_j)) > \mathrm{vol}_\sigma(B)e^{\underline{a}\alpha j(\gamma_j - r)} > \left[\mathrm{vol}_\sigma(B)e^{-2\beta r}\right]e^{2\beta\gamma_j},$$

para todo $j > j'$. Isso não pode ser verdade se o crescimento de σ-volume for do tipo $e^{\beta t}$. Portanto, é necessário que $f \leq 0$ em $M \setminus K$.

□

Observação 4.9. *Vale salientar que quando $k = 0$ e a é constante, o Teorema anterior generaliza o Teorema 2.1 de [4] para variedades com peso. O mesmo vale se considerarmos, separadamente, $k = 0$ e a constante, onde o primeiro caso generaliza o Teorema 3.1 e o segundo generaliza o Teorema 3.4 para variedades com peso.*

Os próximos corolários são versões dos corolários 3.6 ao 3.12 para variedades com peso σ.

Corolário 4.10. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave e $\Omega \subset M$ um domínio limitado. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função não negativa tal que $M \setminus \Omega$ é estável sob o fluxo de ∇f e $\Delta_\sigma f \geq af$ em $M \setminus \Omega$, para alguma $a \in \mathcal{C}^1(M)$ positiva em $M \setminus \Omega$ e tal que $\langle \nabla a, \nabla f \rangle \geq 0$.*

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial e $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$ e $0 < k < 1$ são constantes, então $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\nabla f|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, então $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$.

Demonstração. Tomando $X = \nabla f$ e $K = \overline{\Omega}$ no Teorema 4.8, concluímos que $f \leq 0$ em $M \setminus \Omega$. Dessa forma, uma vez que $f \geq 0$ em M, temos que $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$. $\square$

Uma aplicação direta do Corolário 4.10 é obtida quando fazemos $\Omega = \emptyset$, conforme mostra o resultado a seguir.

Corolário 4.11. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função não negativa tal que $\Delta_\sigma f \geq af$ em M, para alguma $a \in \mathcal{C}^1(M)$ positiva tal que $\langle \nabla a, \nabla f \rangle \geq 0$.*

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial e $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$ e $0 \leq k < 1$ são constantes, então $f \equiv 0$ em M.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\nabla f|(x) \to 0$ quando $\rho(x) \to +\infty$, então $f \equiv 0$ em M.

O próximo resultado indica quando funções σ-harmônicas são constantes, mediante estimativas envolvendo seus hessiano e gradiente.

Corolário 4.12. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função σ-harmônica. Suponha que $\mathrm{Ric}_\sigma(\nabla f, \nabla f) \geq \lambda |\nabla f|^2$, $\lambda > 0$.*

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial e existem $c > 0$ e $k \in [0, 1)$ tais que

$$|\mathrm{Hess}_M f(\nabla f, X)| < c\rho^k, \tag{35}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $|X| \leq 1$, em que $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, o)$, com $o \in M$ um ponto fixado, então f é constante.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e

$$|\mathrm{Hess}_M f(\nabla f, X)|(x) \to 0, \text{ quando } \rho(x) \to +\infty, \tag{36}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $|X| \leq 1$, em que $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, o)$, com $o \in M$ um *ponto fixado, então f é constante.*

Demonstração. Para os dois casos, obtemos, pela fórmula de Bochner para variedades com peso e usando que f é σ-harmônica, a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_\sigma|\nabla f|^2 &= \mathrm{Ric}_\sigma(\nabla f,\nabla f)+\langle\nabla f,\nabla(\Delta_\sigma f)\rangle+|\mathrm{Hess}_M f|^2\\ &= \mathrm{Ric}_\sigma(\nabla f,\nabla f)+|\mathrm{Hess}_M f|^2\geq \mathrm{Ric}_\sigma(\nabla f,\nabla f)\\ &\geq \lambda|\nabla f|^2.\end{aligned}$$

Para o que segue, devemos analisar cada caso separadamente.
(a) Para M_σ com crescimento de σ-volume polinomial e usando a condição (35), dado um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ em M, obtemos:

$$\begin{aligned}|\nabla|\nabla f|^2|^2 &= \langle\nabla|\nabla f|^2,\nabla|\nabla f|^2\rangle=\sum_{i=1}^n\left[e_i\left(|\nabla f|^2\right)\right]^2\\ &= \sum_{i=1}^n\left[e_i\langle\nabla f,\nabla f\rangle\right]^2=\sum_{i=1}^n\left[2\langle\nabla_{e_i}\nabla f,\nabla f\rangle\right]^2\\ &= \sum_{i=1}^n 4\left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f,e_i)\right]^2\leq\sum_{i=1}^n 4c^2\rho^{2k}\\ &= 4c^2n\rho^{2k}.\end{aligned}$$

Dessa forma, temos $|\nabla|\nabla f|^2|\leq 2c\sqrt{n}\rho^k$.

Assim, a função $|\nabla f|^2 : M\to\mathbb{R}$ é suave, não-negativa, tem a norma de seu gradiente menor ou igual $C_0\rho^k$, onde $C_0>0$ e $k_0\in[0,1)$, e satisfaz $\Delta_\sigma|\nabla f|^2\geq 2\lambda|\nabla f|^2$. Pelo Corolário 4.11, $|\nabla f|^2\equiv 0$, portanto, $\nabla f\equiv 0$ e f é constante em M, uma vez que M é conexa.
(b) Para M_σ com crescimento de σ-volume exponencial e usando a condição (36), dado um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ de M numa vizinhança de um ponto $x\in M$, obtemos:

$$\begin{aligned}|\nabla|\nabla f|^2|^2(x) &= \sum_{i=1}^n 4\left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f,e_i)\right]^2(x)\\ &\leq \sum_{i=1}^n 4\sup_{X\in\mathfrak{X}(M),|X|\leq 1}\left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f,X)\right]^2(x)\\ &= 4n\sup_{X\in\mathfrak{X}(M),|X|\leq 1}\left[\mathrm{Hess}_M f(\nabla f,X)\right]^2(x).\end{aligned}$$

Dessa forma, temos $|\nabla|\nabla f|^2|^2(x)\to 0$ quando $\rho(x)\to+\infty$.

Assim, a função $|\nabla f|^2 : M \to \mathbb{R}$ é suave, não negativa, tem o módulo de seu gradiente tendendo a zero no infinito e satisfaz $\Delta_\sigma |\nabla f|^2 \geq 2\lambda |\nabla f|^2$. Pelo Corolário 4.11, $|\nabla f|^2 \equiv 0$, portanto, $\nabla f \equiv 0$ e f é constante em M, uma vez que M é conexa.

□

Corolário 4.13. *Seja (M, g, σ) uma variedade riemanniana não compacta com estrutura de Ricci soliton gradiente shrinking e crescimento de σ-volume polinomial. Se $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é σ-harmônica e existem $c > 0$, $k \in [0, 1)$ tais que*

$$|\mathrm{Hess}_M u(\nabla u, X)| < c\rho^k,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $|X| \leq 1$, em que $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, o)$, com $o \in M$ um ponto fixado, então u é constante.

Demonstração. Basta ver que uma variedade riemanniana com estrutura Ricci soliton gradiente shrinking pode ser vista como uma variedade com peso σ tal que existe $\lambda > 0$ com $\mathrm{Ric}_\sigma = \lambda$. Com isso, basta usar o Corolário 4.12 e esse resultado estará provado. □

O Corolário 4.1 de [34] nos diz que, se M_σ é uma variedade riemanniana completa com peso σ tal que $\mathrm{Ric}_\sigma \geq \lambda$, então $\mathrm{vol}_\sigma(M)$ é finito. Aplicando esse resultado ao Corolário 4.12, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.14. *Seja M uma variedade riemanniana não compacta, completa e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ com $\mathrm{Ric}_\sigma \geq \lambda > 0$. Se $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é σ-harmônica, existem $c > 0$ e $k \in [0, 1)$, e vale*

$$|\mathrm{Hess}_M u(\nabla u, X)| < c\rho^k,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $|X| \leq 1$, em que $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, o)$, com $o \in M$ um ponto fixado, então u é constante.

Demonstração. Inicialmente, observe M é uma variedade com peso σ com crescimento de σ-volume finito, logo, polinomial. Como u é σ-harmônica e satisfaz a condição (35), então, pelo Corolário 4.12, temos que u é constante. □

Conforme fizemos anteriormente, as quatro próximas aplicações estão relacionadas a resultados clássicos de Fischer-Colbrie e Schoen (veja [19]). As duas primeiras referem-se a variedades com crescimento de σ-volume polinomial e as duas últimas a variedades com crescimento de σ-volume exponencial.

Corolário 4.15. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave, $\Omega \subset M$ um domínio limitado e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$*

uma função positiva. Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então o operador $\Delta_\sigma - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$ e $0 \leq k < 1$ são constantes.

(c) $M \setminus \Omega$ é estável sob o fluxo de ∇f.

(d) $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$ em M ou $\inf_M q > 0$.

Demonstração. Suponha que exista uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfazendo as condições dadas. Se $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$, fazendo $a = q$ no Corolário 4.10, temos $\Delta_\sigma f = qf$, logo, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão polinomial desse corolário. Se $\inf_M q > 0$, fazemos $a = \inf_M q > 0$, assim obtendo $\Delta_\sigma f \geq af$ e, consequentemente, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão polinomial do corolário. Além disso, pela unicidade de continuação para soluções de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem (veja [8]), temos que $f \equiv 0$ em M. Dessa forma, a única solução que goza das propriedades (a), (b), (c) e (d) é $f \equiv 0$, o que demonstra o resultado.

□

Fazendo $\Omega = \emptyset$ no corolário anterior, teremos o seguinte resultado.

Corolário 4.16. *Sejam M uma variedade riemanniana com peso σ conexa, orientada, completa e não compacta, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função positiva. Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então o operador $\Delta_\sigma - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:*

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f| < c\rho^k$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$ e $c > 0$ e $0 < k < 1$ são constantes.

(c) $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$ em M.

Fazendo M_σ uma variedade com crescimento de σ-volume exponencial, obtemos consequências semelhantes.

Corolário 4.17. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave, $\Omega \subset M$ um domínio limitado e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função positiva. Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial, então o operador $\Delta_\sigma - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:*

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$.

(c) $M \setminus \Omega$ é estável sob o fluxo de ∇f.

(d) $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$ em M.

Demonstração. Suponha que exista uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfazendo as condições dadas. Como $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$, fazendo $a = q$ no Corolário 4.10, temos que $\Delta_\sigma f = qf$, logo, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão exponencial desse resultado. Quando $\inf_M q > 0$, fazemos $a = \inf_M q > 0$, assim, obtemos $\Delta_\sigma f \geq af$ e, consequentemente, $f \equiv 0$ em $M \setminus \Omega$, pela versão exponencial desse corolário. Além disso, pela unicidade de continuação para soluções de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem (veja [8]), temos que $f \equiv 0$ em M. Dessa forma, a única solução goza das propriedades (a), (b), (c) e (d) é $f \equiv 0$, o que demonstra o resultado. □

Fazendo $\Omega = \emptyset$ no corolário anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.18. *Sejam M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave e $q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função positiva. Se M tem crescimento de volume polinomial, então o operador $\Delta_\sigma - q$ não possui solução não trivial $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que satisfaça as seguintes condições:*

(a) f é não negativa em $M \setminus \Omega$.

(b) $|\nabla f|(x) \to 0$, quando $\rho(x) \to +\infty$, onde $\rho = d(\cdot, o)$ é a distância riemanniana de origem em $o \in M$.

(c) $\langle \nabla q, \nabla f \rangle \geq 0$ em M.

Observação 4.19. *Resultados semelhantes aos corolários 4.10 ao 4.18 podem ser obtidos para operadores diferenciais elípticos de segunda ordem da forma $Lu = \mathrm{div}_\sigma(T(\nabla u))$, onde $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é um $(1,1)$-tensor simétrico e positivo definido em M, com $\sup_M \|T\| < +\infty$. A demonstrações são semelhantes, bastando tomar $X = T(\nabla u)$.*

4.3 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana orientada munida de um campo vetorial conforme fechado ξ cujo fator conforme é $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}^{n+1})$. Considere $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^{n+1}$, e oriente M pela escolha de um campo normal unitário N.

Nesta seção, aplicaremos o Teorema 3.4 para estudar o comportamento de φ. O objetivo é obter resultados similares àqueles de [3] e [4], relaxando a hipótese de que N convirja para ξ no infinito e, em compensação, impondo uma restrição ao crescimento de volume da hipersuperfície. Nesse contexto, incluiremos hipóteses envolvendo o crescimento do σ-volume da variedade M, onde $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\overline{M}$, respectivamente, e denotaremos por $A(\cdot) = -\overline{\nabla}_{(\cdot)}N$ o operador de Weingarten de φ com respeito a N.

No próximo resultado, veremos condições suficientes para que M seja totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Teorema 4.20. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade riemanniana conexa, orientada, munida de um campo de conforme fechado* ξ *cujo fator conforme é* ψ. *Considere* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em* $\overline{M}$. *Fixado um campo normal unitário* N *ao longo de* φ, *suponha que o operador de Weingarten correspondente* A *seja não negativo (respectivamente, não positivo), que* $\inf_M \langle N, \xi \rangle > 0$, $\psi \geq 0$ *(respectivamente,* $\psi \leq 0$*) em* M, *que* ξ *seja limitado e livre de zeros em* M *e* $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ *(respectivamente,* $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$*) em* M. *Assim, temos duas situações:*

(a) Se existe uma função $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *tal que* M_σ *tenha crescimento de* σ*-volume polinomial e* $\xi^\top(\sigma) \leq 0$ *(respectivamente,* $\xi^\top(\sigma) \geq 0$*), então* M *é totalmente geodésica em* $\overline{M}$.

(b) Se existe uma função $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *tal que* M_σ *tenha crescimento de* σ*-volume exponencial,* $\xi^\top(\sigma) \leq 0$ *(respectivamente,* $\xi^\top(\sigma) \geq 0$*) e* $|\xi^\top|$ *tende a zero no infinito, então* M *é totalmente geodésica em* $\overline{M}$.

Demonstração. Consideremos, inicialmente, o caso em que A é não negativo, $\psi \geq 0$ e $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$. Nesse caso, devemos observar que se $\mathrm{tr}(A) \equiv 0$ o problema está resolvido, já que A é não negativo.

Dessa forma, façamos $f = \mathrm{tr}(A)$ de sorte que $f \geq 0$ e $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Com isso, temos $\langle \nabla f, \xi^\top \rangle = \xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$. Ademais, por conta do Lema 3.14 item (a) e da definição de divergente com peso, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}_M)_\sigma(\xi^\top) &= \mathrm{div}_M(\xi^\top) - \langle \nabla\sigma, \xi^\top \rangle \\ &= n\psi + \eta \cdot \mathrm{tr}(A) - \xi^\top(\sigma) \\ &\geq \eta \cdot \mathrm{tr}(A) \geq \alpha f,\end{aligned}$$

onde $\alpha = \inf_M \langle N, \xi \rangle > 0$. Aplicando o Teorema 4.8 e o fato de que $|\xi^\top| \leq |\xi|$ no caso polinomial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito no caso exponencial, temos que $f \leq 0$. Portanto, $f \equiv 0$, provando a primeira parte.

Para o caso em que A é não positivo, $\psi \leq 0$, $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$ e $\xi^\top(\sigma) \geq 0$, também devemos mostrar que $\mathrm{tr}(A) \equiv 0$. Para isso, basta tomar $f = -\mathrm{tr}(A)$ e trocar $\xi^\top$ por $-\xi^\top$ para obter as mesmas consequências.

□

Observação 4.21. *O Teorema 4.20 não prova, a prori, que a subvariedade* M *é uma folha de* $\langle \xi \rangle^\perp$. *Sua conclusão é somente que* M *é totalmente geodésica. Contudo, é possível obter a rigidez descrita inicialmente dependendo da variedade riemanniana ambiente* $\overline{M}^{n+1}$.

Quando a variedade ambiente é $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor unitário fixado, então V induz um campo paralelo em $\overline{M}$. Ademais, qualquer hiperplano paralelo a $\langle V\rangle^{\perp}$ é isométrico a $\mathbb{R}^n$ e o espaço gaussaino $(\langle V\rangle^{\perp}, \langle , \rangle, \nabla\sigma)$, com $\sigma = \lambda|x|^2/2$, tem crescimento de σ-volume polinomial se $\lambda \geq 0$ e crescimento de σ-volume exponencial se $\lambda < 0$, conforme mostrado no Exemplo 4.1. Aplicando o Teorema 4.20 a esse contexto, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.22. *Seja $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário fixado. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$, dada por $\tilde{\sigma}(x) = \lambda|x|^2/2$ e com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\sigma \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Fixado um campo normal unitário N ao longo de φ, suponha que o operador de Weingarten correspondente A seja não negativo (respectivamente, não positivo), que $\inf_M \langle N, V\rangle > 0$ e $V^{\top}(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ (respectivamente, $V^{\top}(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$) em M. Assim, temos duas situações:*

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial e $\lambda\langle P, V^{\top}\rangle \leq 0$ (respectivamente, $\lambda\langle P, V^{\top}\rangle \geq 0$), onde P é o campo posição, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V\rangle^{\perp}$, tal que $\lambda > 0$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial, $\lambda\langle P, V^{\top}\rangle \leq 0$ (respectivamente, $\lambda\langle P, V^{\top}\rangle \geq 0$), onde P é o campo posição, e $|V^{\top}|$ tende a zero no infinito, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V\rangle^{\perp}$, tal que $\lambda < 0$.

Demonstração. Tomando ξ como o campo vetorial induzido por V em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\sigma = \lambda|x|^2/2$, temos que ξ é paralelo e $\nabla\sigma = \lambda P^{\top}$, onde P é o campo posição de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dessa forma, aplicando o Teorema 4.20, obtemos que M é totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{n+1}$ e, por ser uma variedade completa, M é um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\lambda > 0$ no caso em que M tem crescimento de σ-volume polinomial e $\lambda < 0$ no caso em que M tem crescimento de σ-volume exponencial. Seja w a projeção de V em M. No caso em $\lambda > 0$ e $\langle P, V^{\top}\rangle \leq 0$, temos que $0 \geq \langle P(w), V^{\top}\rangle = |V^{\top}|$. Logo, $V^{\top} = 0$ e M é um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ paralelo a $\langle V\rangle^{\perp}$. Os outros casos são provados de forma análoga, trocando w por $-w$, se necessário. $\square$

Para o espaço hiperbólico dado por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1\}$$

e $\sigma : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $\sigma(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_1^2$, temos que existe uma subvariedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$, totalmente geodésica e com crescimento de σ-volume polinomial, que é a variedade

$$\mathbb{H}^{n} = \{(x_1, \cdots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1 \text{ e } x_i = 0\},$$

onde $i \in \{2, \ldots, n+2\}$. Dessa forma, obtemos a seguinte resultado.

Corolário 4.23. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1}$ o espaço hiperbólico, no modelo subespaço de $\mathbb{L}^{n+2}$, munido com o campo conforme fechado $\xi = \partial_i + x_i P$, onde $i \in \{2, \dots, n+2\}$ e P é o campo posição. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$, dada por $\tilde{\sigma}(x_1, \dots, x_{n+2}) = x_1^2$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Fixado um campo normal unitário N ao longo de φ, suponha que o operador de Weingarten correspondente A seja não negativo (respectivamente, não positivo), que $\inf_M \langle N, \xi \rangle > 0$, $x_i \geq 0$ em M (respectivamente, $x_i \leq 0$), que ξ é limitado e livre de zeros em M e $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ (respectivamente, $\xi^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$) em M. Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial e $\xi^\top(\sigma) \leq 0$ (respectivamente, $\xi^\top(\sigma) \geq 0$) em M, então M é totalmente geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Observação 4.24. *Destacamos, novamente, que no caso em que o espaço ambiente é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, então, suas hipersuperfícies totalmente goedésica são isométricas a espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^n$ (veja [17]).*

No caso em que N^k é uma variedade de Einstein de dimensão k tal que $\mathrm{Ric}_N = \lambda\langle , \rangle$, tomemos o sóliton de Ricci gradiente construído a partir da variedade produto $M^{m+k+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times N^k$ e a função suave $\sigma : M \to \mathbb{R}$ dada por $\sigma(x,p) = \dfrac{\lambda}{2}|x|^2$, para $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in N^k$. Dessa forma, $\big(M^{m+k+1}, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} \oplus \langle , \rangle_{N^k}, \sigma\big)$ é um sóliton de Ricci gradiente. Além disso, dado $\partial_i = \partial/\partial x_i$, para $1 \leq i \leq m+1$ um campo coordenado de $\mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1} \times N^k$, temos que ∂_i é paralelo e é um campo normal a subvariedades do tipo $M_i(t) = \{(x,p) \in M^{m+k+1}; x_i = t \in \mathbb{R}\}$. Ademais, para cada $t \in \mathbb{R}$, a hipersuperfície $M_i(t)$ é um sóliton de Ricci gradiente e é totalmente geodésica em M^{m+k+1}. Vale salientar que $\big(M^{m+k+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle , \rangle_{\mathbb{S}^k}, \sigma\big)$, com $\sigma(x,p) = |x|^2/2$, tem crescimento de σ-volume polinomial, enquanto $\big(M^{m+k+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle , \rangle_{\mathbb{H}^k}, \sigma\big)$, com $\sigma(x,p) = -|x|^2/2$, tem crescimento de σ-volume exponencial.

Corolário 4.25. *Considere $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$ e o campo paralelo ∂_i, onde $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Seja $\varphi : M^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k)$, dada por $\tilde{\sigma}(x,p) = |x|^2/2$ tal que $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in \mathbb{S}^k$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Fixado um campo normal unitário N ao longo de φ, suponha que o operador de Weingarten correspondente A seja não negativo (respectivamente, não positivo), que $\inf_M \langle N, \partial_i \rangle > 0$ e $\partial_i^\top(\mathrm{tr}(A)) \geq 0$ (respectivamente, $\partial_i^\top(\mathrm{tr}(A)) \leq 0$) em M. Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial e $\partial_i^\top(\sigma) \leq 0$ (respectivamente, $\partial_i^\top(\sigma) \geq 0$) em M, então M é totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$.*

Corolário 4.26. *Considere $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$ e o campo paralelo ∂_i, onde $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Seja $\varphi : M^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa,* *orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k)$, dada por $\tilde{\sigma}(x,p) = -|x|^2/2$ tal que $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in \mathbb{H}^k$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Fixado um campo normal unitário N ao longo de φ, suponha que o operador de Weingarten correspondente A seja não negativo (respectivamente, não positivo), que $\inf_M \langle N, \partial_i \rangle > 0$ e $\partial_i^\top(\operatorname{tr}(A)) \geq 0$ (respectivamente, $\partial_i^\top(\operatorname{tr}(A)) \leq 0$) em M. Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial, $\partial_i^\top(\sigma) \leq 0$ (respectivamente, $\partial_i^\top(\sigma) \geq 0$) em M e $|\partial_i^\top|$ tende a zero no infinito, então, M é totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$.*

Impondo uma estimativa sobre a função $\eta = \langle N, \xi \rangle$ no Teorema 4.20, podemos retirar a condição $\xi^\top(\operatorname{tr}(A)) \geq 0$, conforme aparece no resultado a seguir.

Teorema 4.27. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana orientada, munida com um campo vetorial conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Considere $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Ademais, considere uma função $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Sejam N um campo normal unitário a M em $\overline{M}$, tal que o operador $A + \psi/|\xi| I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten de φ na direção de N e I é o operador identidade. Assuma que ξ seja limitado e livre de zeros em M e $\psi \geq 0$ em M, e*

$$\eta \geq \frac{|\xi| + \langle \xi^\top, \nabla\sigma \rangle}{\operatorname{tr}(A) + n\psi|\xi|^{-1} + 1}, \tag{37}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

Demonstração. Conforme fizemos no capítulo anterior, para provar esse resultado devemos mostrar que N é paralelo a ξ, logo, $\eta \equiv |\xi|$. Assim, fazendo $f = |\xi| - \eta$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $f \geq 0$. Além disso, sabemos, pelo Lema 3.14, que

$$(\operatorname{div}_M)_\sigma(\xi^\top) = \operatorname{div}_M(\xi^\top) - \langle \xi^\top, \nabla\sigma \rangle = n\psi + \eta \cdot \operatorname{tr}(A) - \langle \xi^\top, \nabla\sigma \rangle.$$

Dessa maneira, pela condição (37), temos:

$$\eta \geq \frac{|\xi| + \langle \xi^\top, \nabla\sigma \rangle}{\operatorname{tr}(A) + n\psi|\xi|^{-1} + 1},$$

o que implica

$$\eta \mathrm{tr}(A) + n\psi \cdot (\eta \cdot |\xi|^{-1}) + \eta \geq |\xi| + \langle \xi^\top, \nabla\sigma \rangle.$$

Ainda pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $\eta \cdot |\xi|^{-1} \leq 1$. Logo, uma vez que $\psi \geq 0$, obtemos:

$$\eta \cdot \mathrm{tr}(A) + n\psi + \eta \geq \eta \cdot \mathrm{tr}(A) + n\psi \cdot (\eta \cdot |\xi|^{-1}) + \eta \geq |\xi| + \langle \xi^\top, \nabla\sigma \rangle.$$

Com isso, temos:

$$(\mathrm{div}_M)_\sigma(\xi^\top) = n\psi + \eta \cdot \mathrm{tr}(A) - \langle \xi^\top, \nabla\sigma \rangle \geq |\xi| - \eta = f.$$

Ademais, como ξ não possui zeros em M e conforme calculamos em (18), no capítulo anterior, obtemos:

$$\langle \nabla f, \xi^\top \rangle \;=\; \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, \xi^\top \right\rangle \geq 0,$$

onde usamos o fato de $A + \psi/|\xi|$ ser um operador não negativo.

Dessa forma, $(\mathrm{div}_M)_\sigma(\xi^\top) \geq f$, $\langle \nabla f, \xi^\top \rangle \geq 0$, com $|\xi^\top| \leq |\xi|$ no caso polinomial, e $|\xi^\top|$ tendendo a zero no infinito no caso exponencial. Então, pelo Teorema 4.8, temos que $f \equiv 0$ e $|\xi| N \equiv \xi$.

□

Observação 4.28. *Diferentemente do Teorema 4.20, os resultados de rigidez envolvendo estimativas sobre a função suporte $\eta = \langle N, \xi \rangle$, nesse trabalho, nos revelam que a hipersuperfície M deve ser uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$. Além disso, o resultado anterior nos fornece uma extensão do Teorema 3.22, uma vez que basta tomar $\sigma \equiv 1$.*

Aplicando esse resultado no ambiente $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e considerando o campo induzido por um vetor unitário fixado $V \in \mathbb{R}^{n+1}$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.29. *Seja $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor unitário fixado. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, dada por $\tilde{\sigma}(x) = \lambda |x|^2/2$ e com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Sejam N um campo normal unitário a M em $\mathbb{R}^{n+1}$, tal que o operador de Weingarten A de φ na direção de N é não negativo. Suponha, por fim, que*

$$\eta \geq \frac{1 + \langle V^\top, P \rangle}{\mathrm{tr}(A) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e P é o campo posição. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V \rangle^\perp$, tal que $\lambda > 0$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V \rangle^\perp$, tal que $\lambda < 0$.

Quando o espaço ambiente é o espaço hiperbólico dado pelo modelo

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1\}$$

e $\tilde{\sigma} : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é dado por $\tilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_1^2$, temos que as folhas da distribuição $\langle \partial_i + x_i P \rangle^\perp$, onde $i \in \{2, \cdots, n+2\}$ e P é o campo posição, são as hipersuperfícies

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1 \text{ e } x_i = t\},$$

com $t \in \mathbb{R}$. Ademais, essa variedade é conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{H}^{n+1}$, além de ser umbílica e ter crescimento de σ-volume polinomial para $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \imath$ e $\imath : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ a inclusão dos espaço dados anteriormente. Dessa forma, obtemos a seguinte resultado.

Corolário 4.30. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1}$ o espaço hiperbólico, no modelo subespaço de $\mathbb{L}^{n+2}$, e ξ o campo de conforme fechado $\xi = \partial_i + x_i P$, onde $i \in \{2, \ldots, n+2\}$ e P é o campo posição. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$, dada por $\tilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_1^2$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Sejam N um campo normal unitário a M em $\overline{M}$, tal que o operador $A + x_i \cdot (1 + x_i^2)^{-\frac{1}{2}} I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten na direção de N e I o operador identidade. Assim, por fim, que ξ é limitado e livre de zeros em M, $x_i \geq 0$ em M e*

$$\eta \geq \frac{|\xi| + 2\langle \xi^\top, \partial_1 \rangle}{\operatorname{tr}(A) + n x_i \cdot (1 + x_i^2)^{-\frac{1}{2}} + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$. Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1 \text{ e } x_i = t\},$$

com $t \in \mathbb{R}$ e $A = -t \cdot (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} I$.

Conforme mencionamos anteriormente, sabemos que

$$\left(M^{m+k+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} \oplus \langle , \rangle_{\mathbb{S}^k}, \sigma\right),$$

com $\sigma(x,p) = |x|^2/2$, tem crescimento de σ-volume polinomial, enquanto

$$\left(M^{m+k+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k, \langle,\rangle_{\mathbb{R}^n} \oplus \langle,\rangle_{\mathbb{H}^k}, \sigma\right),$$

com $\sigma(x,p) = -|x|^2/2$, tem crescimento de σ-volume exponencial. Aplicando o que sabemos a respeito desses sólitons de Ricci, obtemos o seguinte resultado a partir do Teorema 4.27.

Corolário 4.31. *Considere $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$ e o campo paralelo ∂_i, onde $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Seja $\varphi : M^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k)$, dada por $\tilde{\sigma}(x,p) = |x|^2/2$ tal que $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in \mathbb{S}^k$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Seja N um campo normal unitário a M em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$, e suponha que o operador de Weingarten A de φ na direção de N seja não negativo. Suponha, ademais, que*

$$\eta \geq \frac{1 + \langle \partial_i^\top, \nabla\sigma \rangle}{\operatorname{tr}(A) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \partial_i \rangle$. Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é uma variedade totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$ dada por

$$M^{m+k} = \{(x,p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k; x_i = t\},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Corolário 4.32. *Considere $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$ e o campo paralelo ∂_i, onde $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Seja $\varphi : M^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k)$, dada por $\tilde{\sigma}(x,p) = -|x|^2/2$ tal que $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in \mathbb{H}^k$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Seja N um campo normal unitário a M em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$, e suponha que o operador de Weingarten A de φ na direção de N seja não negativo. Suponha, ademais, que*

$$\eta \geq \frac{1 + \langle \partial_i^\top, \nabla\sigma \rangle}{\operatorname{tr}(A) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \partial_i \rangle$. Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\partial_i^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma variedade totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$ dada por

$$M^{m+k} = \{(x,p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k; x_i = t\},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.33. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana de Einstein orientada, munida de campo vetorial campo conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^{n+1}$. Ademais, considere uma função $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada, que $\langle A\xi^\top, \psi\xi^\top\rangle \geq 0$ em M, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{|\xi| - nH\psi + \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle}{|A|^2 + 1}, \tag{38}$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi|I$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi|I$.

Demonstração. Assim como fizemos em resultados anteriores, considere $f = |\xi| - \eta$ e $X = A\xi^\top$.

Como ξ é um campo conforme fechado livre de zeros em M, temos por (18) que

$$\langle \nabla f, X\rangle = \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^2, A\xi^\top \right\rangle = |A\xi^\top|^2 + \left\langle \frac{\psi}{|\xi|}\xi^2, A\xi^\top \right\rangle \geq 0,$$

uma vez que $\langle A\xi^\top, \psi\xi^\top\rangle \geq 0$ por hipótese.

Por outro lado, usando o item (b) do Lema 3.14, juntamente com o fato de que $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) = 0$ (por $\overline{M}$ ser uma variedade Einstein) e $\xi^\top(nH) = 0$ (por H ser constante em M), segue que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}_M)_\sigma(X) &= (\mathrm{div}_M)_\sigma(A\xi^\top) = \mathrm{div}_M(A\xi^\top) - \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle \\
&= -\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + nH\psi + \eta|A|^2 - \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle \\
&= nH\psi + \eta|A|^2 - \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle
\end{aligned}$$

Usando a igualdade anterior e a condição (38), temos:

$$\eta \geq \frac{|\xi| - nH\psi + \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle}{|A|^2 + 1},$$

o que implica

$$\eta(|A|^2 + 1) \geq |\xi| - nH\psi + \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle,$$

nos garantindo que

$$(\mathrm{div}_M)_\sigma(X) = nH\psi + \eta|A|^2 - \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle \geq |\xi| - \eta = f.$$

Portanto, como $(\mathrm{div}_M)_\sigma(X) \geq f$, $\langle \nabla f, X\rangle \geq 0$ e $|X| \leq |A||\xi^\top|$, no caso polinomial temos $|X|$ limitado e $f \leq 0$ e no caso exponencial temos que $|X| \leq |A||\xi^\top|$ tende a zero no infinito e $f \leq 0$. Assim, em ambos os casos, $f \equiv 0$ em M, ou seja, $N \equiv \xi/|\xi|$ em M, a qual é uma folha de $\langle\xi\rangle^\perp$.

□

Como $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ são variedades riemanianas de Einstein, obtemos os seguintes corolários.

Corolário 4.34. *Seja $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário fixado. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$. Ademais, considere as funções $\tilde\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, dada por $\tilde\sigma(x) = \lambda|x|^2/2$ e com $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde\sigma\circ\varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{1 + \lambda\langle AV^\top, P\rangle}{|A|^2 + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e P é o campo posição. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V\rangle^\perp$, tal que $\lambda > 0$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V\rangle^\perp$, tal que $\lambda < 0$.

Corolário 4.35. *Sejam o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, no modelo subespaço de $\mathbb{L}^{n+2}$, e o campo de conforme fechado $\xi = \partial_i + x_iP$, onde $i \in \{2, \ldots, n+2\}$ e P é o campo posição x_i. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Ademais, considere as funções $\tilde\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$, dada por $\tilde\sigma(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_1^2$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde\sigma\circ\varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada, que $\langle A\xi^\top, x_i\xi^\top\rangle \geq 0$ em M, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{\sqrt{1 + x_i^2} - nx_iH + 2\langle A\xi^\top, \partial_1\rangle}{|A|^2 + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Se M tem crescimento de

σ-volume polinomial, então M é dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1 \text{ e } x_i = t\},$$

com $t \in \mathbb{R}$ e $A = -t \cdot (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} I$.

Ao trocar a hipótese da variedade ambiente $\overline{M}^{n+1}$ ser uma variedade de Einstein para ser um sóliton de Ricci gradiente, conseguimos uma conclusão semelhante à do Teorema 4.33, alterando também uma hipótese na estimativa da função suporte $\eta = \langle N, \xi \rangle$, consoante o resultado a seguir.

Teorema 4.36. *Seja $(\overline{M}^{n+1}, \langle , \rangle, \overline{\nabla}\overline{\sigma})$ um soliton de Ricci gradiente orientado e munido de um campo vetorial campo conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^{n+1}$. Ademais, considere $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ dada por $\sigma = \overline{\sigma} \circ \varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada, que $\langle A\xi^\top, \psi\xi^\top \rangle \geq 0$ em M, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{|\xi| - nH\psi - \xi^\top(N(\overline{\sigma}))}{|A|^2 + 1}, \tag{39}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$. Em particular, se $(M, \langle , \rangle, \nabla\sigma)$ é soliton de Ricci grandiente shrinking, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

Demonstração. Considere $f = |\xi| - \eta$ e $X = A\xi^\top$. Como ξ é um campo conforme fechado livre de zeros em M, (18) dá

$$\langle \nabla f, X \rangle = \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^2, A\xi^\top \right\rangle = |A\xi^\top|^2 + \left\langle \frac{\psi}{|\xi|}\xi^2, A\xi^\top \right\rangle \geq 0,$$

uma vez que $\langle A\xi^\top, \psi\xi^\top \rangle \geq 0$ por hipótese.

Da definição do tensor de Ricci com peso, temos

$$(\mathrm{Ric}_{\overline{M}})_{\overline{\sigma}}(\xi^\top, N) = \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + (\mathrm{Hess}\, \overline{\sigma})(\xi^\top, N)$$

Calculando o (Hess $\overline{\sigma}$)$(\xi^\top, N)$ separadamente, obtemos

$$\begin{aligned}(\text{Hess }\overline{\sigma})(\xi^\top, N) &= \langle \overline{\nabla}_{\xi^\top}\overline{\nabla}\overline{\sigma}, N\rangle \\ &= \xi^\top\langle \overline{\nabla}\overline{\sigma}, N\rangle - \langle \overline{\nabla}\overline{\sigma}, \overline{\nabla}_{\xi^\top}N\rangle \\ &= \xi^\top(N(\overline{\sigma})) - (\overline{\nabla}_{\xi^\top}N)(\overline{\sigma}) \\ &= \xi^\top(N(\overline{\sigma})) + \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle.\end{aligned}$$

Como $\overline{M}^{n+1}$ é um sóliton de Ricci gradiente, então

$$\text{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(N(\overline{\sigma})) + \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle = (\text{Ric}_{\overline{M}})_{\overline{\sigma}}(\xi^\top, N) = \lambda\langle \xi^\top, N\rangle = 0.$$

Dessa forma, usando a igualdade mostrada anteriormente, o item (b) do Lema 3.14 e que $\xi^\top(nH) = 0$ (por H ser constante em M), segue que

$$\begin{aligned}(\text{div}_M)_\sigma(A\xi^\top) &= \text{div}_M(A\xi^\top) - \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle \\ &= -\text{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + nH\psi + \eta|A|^2 - \langle A\xi^\top, \nabla\sigma\rangle \\ &= nH\psi + \eta|A|^2 + \xi^\top(N(\overline{\sigma})).\end{aligned}$$

Usando a igualdade anterior e a condição (39), temos:

$$\eta \geq \frac{|\xi| - nH\psi - \xi^\top(N(\overline{\sigma}))}{|A|^2 + 1},$$

o que implica

$$\eta(|A|^2 + 1) \geq |\xi| - nH\psi - \xi^\top(N(\overline{\sigma})),$$

nos garantindo que

$$(\text{div}_M)_\sigma(X) = nH\psi + \eta|A|^2 + \xi^\top(N(\overline{\sigma})) \geq |\xi| - \eta = f.$$

Portanto, como $(\text{div}_M)_\sigma(X) \geq f$, $\langle \nabla f, X\rangle \geq 0$ e $|X| \leq |A||\xi^\top|$, para o caso polinomial temos $|X|$ limitado e $f \leq 0$, e, para o caso exponencial, $|X| \leq |A||\xi^\top|$ tende a zero no infinito e $f \leq 0$. Assim, em ambos os casos, $f \equiv 0$ em M, ou seja, $N \equiv \xi/|\xi|$ em M, a qual é uma folha de $\langle \xi\rangle^\perp$. Em particular, se $(M, \langle,\rangle, \nabla\sigma)$ é soliton de Ricci grandiente shrinking, então M_σ tem crescimento de σ-volume finito, conforme foi mostrado do Corolário 4.3. Logo, o resultado segue do caso polinomial.

$\square$

Conforme mencionamos anteriormente, sabemos que

$$\left(M^{m+k+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} \oplus \langle , \rangle_{\mathbb{S}^k}, \sigma\right),$$

com $\sigma(x,p) = |x|^2/2$, é um sóliton de Ricci gradiente shrinking, enquanto

$$\left(M^{m+k+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} \oplus \langle , \rangle_{\mathbb{H}^k}, \sigma\right),$$

com $\sigma(x,p) = -|x|^2/2$, é um sóliton de Ricci gradiente expanding com crescimento de σ-volume exponencial. Aplicando o que sabemos a respeito desses sólitons de Ricci, obtemos os seguintes resultados a partir do Teorema 4.36.

Corolário 4.37. *Considere em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$ o campo paralelo ∂_i, onde $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Seja $\varphi : M^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$. Considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k)$, dada por $\tilde{\sigma}(x,p) = |x|^2/2$ tal que $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in \mathbb{S}^k$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{1 - \partial_i^\top(N(\tilde{\sigma}))}{|A|^2 + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é uma variedade totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k$, dada por

$$M^{m+k} = \{(x,p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{S}^k ; x_i = t\},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Corolário 4.38. *Considere $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$ e o campo paralelo ∂_i, onde $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Seja $\varphi : M^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$. Considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k)$, dada por $\tilde{\sigma}(x,p) = -|x|^2/2$ tal que $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $p \in \mathbb{H}^k$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N globalmente definido e suponha que M tenha curvatura média constante, segunda forma fundamental A limitada e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{1 - \partial_i^\top(N(\tilde{\sigma}))}{|A|^2 + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e H é a curvatura média com respeito a N. Se M_σ tem crescimento de

σ-volume exponencial e $|\partial_i^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma variedade totalmente geodésica em $\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k$, dada por

$$M^{m+k} = \{(x,p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{H}^k; x_i = t \in \mathbb{R}\},$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

Os dois próximos teoremas mostram resultados de rigidez para hipersuperfícies a partir do comportamento de transformações de Newton, semelhante ao que foi feito nos teoremas 3.35 e 3.41.

Teorema 4.39. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, orientada e munida de campo vetorial conforme fechado ξ cujo fator conforme é ψ. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M em $\overline{M}$. Considere uma função $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{0,\ldots,n-1\}$, $AT_r + \psi/|\xi|T_r$ seja não negativo, que ξ seja limitado e livre de zeros em M, que $\psi \geq 0$ em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{|\xi| + \langle T_r\xi^\top, \nabla\sigma\rangle}{\operatorname{tr}(AT_r) + \psi \cdot |\xi|^{-1} \cdot \operatorname{tr}(T_r) + 1}, \tag{40}$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M_σ é uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi|I$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M_σ é uma folha da distribuição $\langle\xi\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi|I$.

Demonstração. Fazendo novamente $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e $f = |\xi| - \eta$, temos $f \geq 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $N = \xi/|\xi|$ ao longo de M. Sendo esse o caso, o teorema estará provado. Definamos, ainda, $X = T_r\xi^\top$.

Como ξ é um campo conforme fechado e livre de zeros em M, segue de (18) que

$$\langle \nabla f, X\rangle = \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, T_r\xi^\top \right\rangle = \left\langle AT_r\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}T_r\xi^\top, \xi^\top \right\rangle \geq 0,$$

uma vez que T_r é autoadjunta e $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear, A e T_r comutam e $AT_r + \psi/|\xi|T_r$ é não negativo.

Por outro lado, usando o item (c) do Lema 3.14 e o Corolário 2.13, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}_M)_\sigma(X) &= \mathrm{div}_M(X) - \langle \nabla\sigma, X\rangle \\ &= \psi\cdot \mathrm{tr}(T_r) + \eta\cdot \mathrm{tr}(AT_r) - \langle \nabla\sigma, X\rangle.\end{aligned}$$

Assim, pela condição (40), segue que

$$\eta \geq \frac{|\xi| + \langle T_r\xi^\top, \nabla\sigma\rangle}{\mathrm{tr}(AT_r) + \psi\cdot|\xi|^{-1}\cdot \mathrm{tr}(T_r) + 1},$$

o que implica

$$\eta\cdot \mathrm{tr}(AT_r) + \psi\cdot\eta\cdot|\xi|^{-1}\cdot \mathrm{tr}(T_r) + \eta \geq |\xi| + \langle T_r\xi^\top, \nabla\sigma\rangle.$$

Ainda pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos $\eta\cdot|\xi|^{-1} \leq 1$. Logo, uma vez que $\psi \geq 0$ em M, obtemos:

$$\begin{aligned}\eta\cdot \mathrm{tr}(AT_r) + \psi\cdot \mathrm{tr}(T_r) + \eta &\geq \eta\cdot \mathrm{tr}(AT_r) + \psi\cdot\eta\cdot|\xi|^{-1}\cdot \mathrm{tr}(T_r) + \eta \\ &\geq |\xi| + \langle T_r\xi^\top, \nabla\sigma\rangle.\end{aligned}$$

Com isso, temos:

$$(\mathrm{div}_M)_\sigma(X) = \psi\cdot \mathrm{tr}(T_r) + \eta\cdot \mathrm{tr}(AT_r) - \langle T_r\xi^\top, \nabla\sigma\rangle \geq |\xi| - \eta = f.$$

Dessa forma, para o caso polinomial, como $X = T_r\xi^\top$ e ξ e A são limitados em M, temos que T_r e X são limitados em M. Logo, pelo Teorema 4.8, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M.

Para o caso exponencial, percebe-se que, uma vez que T_r é limitado em M e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então $|X|$ tende a zero no infinito. Logo, pelo Teorema 4.8, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M.

□

Como $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ são variedades riemanianas com curvaturas seccionais constantes, obtemos os seguintes corolários.

Corolário 4.40. *Seja $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário fixado. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$. Ademais, considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, dada por $\tilde{\sigma}(x) = \lambda|x|^2/2$ e com $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma}\circ\varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{0, \ldots, n-1\}$, o operador AT_r seja não* *negativo e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{1 + \lambda\langle T_r V^\top, P\rangle}{\mathrm{tr}(AT_r) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ *e* P *é o campo posição. Assim, temos duas situações:*

(a) Se M_σ *tem crescimento de* σ*-volume polinomial, então* M *é um hiperplano paralelo a* $\langle V\rangle^\perp$*, tal que* $\lambda > 0$.

(b) Se M_σ *tem crescimento de* σ*-volume exponencial e* $|\xi^\top|$ *tende a zero no infinito, então* M *é um hiperplano paralelo a* $\langle V\rangle^\perp$*, tal que* $\lambda < 0$.

Corolário 4.41. *Sejam* $\mathbb{H}^{n+1}$ *o espaço hiperbólico, no modelo subespaço de* $\mathbb{L}^{n+2}$ *e* ξ *o campo de conforme fechado* $\xi = \partial_i + x_i P$*, onde* $i \in \{2, \ldots, n+2\}$ *e* P *é o campo posição. Considere* $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em* $\overline{M}$*. Considere as funções* $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$*, dada por* $\tilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_1^2$*, e* $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$*, dada por* $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$*. Oriente* M *pelo campo normal unitário* N*, globalmente definido, e suponha que* M *tenha segunda forma fundamental* A *limitada, que, para algum* $r \in \{0, \cdots, n-1\}$*,* $AT_r + x_i \cdot (1 + x_i^2)^{-\frac{1}{2}} T_r$ *seja não negativa, que* ξ *seja limitado e livre de zeros em* M*, que* $x_i \geq 0$ *em* M *e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{\sqrt{1 + x_i^2} + 2\langle T_r \xi^\top, \partial_1\rangle}{\mathrm{tr}(AT_r) + x_i \cdot (1 + x_i^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{tr}(T_r) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$*. Se* M *tem crescimento de* σ*-volume polinomial, então* M *é dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1 \text{ e } x_i = t\},$$

com $t \in \mathbb{R}$ *e* $A = -t \cdot (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} I$.

Teorema 4.42. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante, orientada e munida de um campo vetorial conforme fechado* ξ *cujo fator conforme é* ψ*. Seja* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta* M *em* $\overline{M}$*. Considere uma função* $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$*. Oriente* M *pelo campo normal unitário* N*, globalmente definido, e suponha que* M *tenha segunda forma fundamental* A *limitada, que, para algum* $r \in \{1, \ldots, n\}$*, o operador* T_{r-1} *seja não negativo,* $\mathrm{tr}(T_r)$ *seja constante em* M*, que* $\langle \psi T_{r-1}\xi^\top, A\xi^\top\rangle \geq 0$*, que* ξ *seja limitado e livre de zeros em* M *e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{|\xi| - r\psi S_r + \langle AT_{r-1}\xi^\top, \nabla\sigma\rangle}{\mathrm{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1}, \tag{41}$$

onde $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e S_r é a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

(b) Se M tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é uma folha da distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\psi/|\xi| I$.

Demonstração. Mais uma vez, fazendo $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e $f = |\xi| - \eta$, temos $f \geq 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $N = \xi/|\xi|$ ao longo de M. Assim, também como antes, o teorema estará provado se mostrarmos que $f \equiv 0$. Definamos $X = AT_{r-1}\xi^\top$.

Sabendo que ξ é um campo conforme fechado e livre de zeros em M, segue de (18) que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, X \rangle &= \left\langle A\xi^\top + \frac{\psi}{|\xi|}\xi^\top, AT_{r-1}\xi^\top \right\rangle \\ &= \langle T_{r-1}(A\xi^\top), A\xi^\top \rangle + \left\langle A\xi^\top, \frac{\psi}{|\xi|} T_{r-1}\xi^\top \right\rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos que T_{r-1} é não negativo, que A e T_{r-1} comutam e que $\langle \psi T_{r-1}\xi^\top, A\xi^\top \rangle \geq 0$.

Ademais, sabemos que $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, que, por (1), temos $\operatorname{tr}(T_r) = (n-r)S_r$, logo, S_r é constante e, pelo item (d) do Lema 3.14, obtemos

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_M)_\sigma(X) &= \operatorname{div}_M(X) - \langle AT_{r-1}\xi^\top, \nabla\sigma \rangle \\ &= r\psi S_r + \eta \cdot \operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) - \langle AT_{r-1}\xi^\top, \nabla\sigma \rangle. \end{aligned}$$

Assim, pela condição (41), temos

$$\eta \geq \frac{|\xi| - r\psi S_r + \langle AT_{r-1}\xi^\top, \nabla\sigma \rangle}{\operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1},$$

o que implica

$$\eta(\operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) + 1) \geq |\xi| - r\psi S_r + \langle AT_{r-1}\xi^\top, \nabla\sigma \rangle,$$

nos garantindo

$$(\operatorname{div}_M)_\sigma(X) = r\psi S_r + \eta \cdot \operatorname{tr}(A^2 T_{r-1}) - \langle AT_{r-1}\xi^\top, \nabla\sigma \rangle \geq |\xi| - \eta = f.$$

Dessa forma, para o caso polinomial, como $X = AT_{r-1}\xi^\top$, ξ e A são limitados em M, então T_{r-1} e X são limitados em M. Logo, pelo Teorema 4.8, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M.

Para o caso exponencial, uma vez que AT_{r-1} é limitado em M e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, concluímos que $|X|$ tende a zero no infinito. Logo, pelo Teorema 4.8, temos $f \leq 0$ e, assim, $f \equiv 0$ em M. □

Usando novamente o fato de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ serem variedades riemanianas com curvaturas seccionais constantes, obtemos os seguintes resultados.

Corolário 4.43. *Seja $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário fixado. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$, e sejam as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, dada por $\tilde{\sigma}(x) = \lambda|x|^2/2$ e com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{1, \ldots, n\}$, o operador T_{r-1} seja não negativo, $\mathrm{tr}(T_r)$ seja constante em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{1 + \lambda\langle AT_{r-1}V^\top, P\rangle}{\mathrm{tr}(A^2T_{r-1}) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e P é o campo posição. Assim, temos duas situações:

(a) Se M_σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V\rangle^\perp$, tal que $\lambda > 0$.

(b) Se M_σ tem crescimento de σ-volume exponencial e $|\xi^\top|$ tende a zero no infinito, então M é um hiperplano paralelo a $\langle V\rangle^\perp$, tal que $\lambda < 0$.

Corolário 4.44. *Sejam $\mathbb{H}^{n+1}$ o espaço hiperbólico, no modelo subespaço de $\mathbb{L}^{n+2}$, e ξ o campo de conforme fechado $\xi = \partial_i + x_iP$, onde $i \in \{2, \ldots, n+2\}$ e P é o campo posição. Considere $\varphi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Considere as funções $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$, dada por $\tilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_1^2$, e $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dada por $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Oriente M pelo campo normal unitário N, globalmente definido, e suponha que M tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $r \in \{1, \ldots, n\}$, o operador T_{r-1} seja não negativo, $\mathrm{tr}(T_r)$ seja constante em M, que $\langle x_iT_{r-1}\xi^\top, A\xi^\top\rangle \geq 0$, que ξ seja limitado e livre de zeros em M e que valha a seguinte condição:*

$$\eta \geq \frac{\sqrt{1 + x_i^2} - rx_iS_r + 2\langle AT_{r-1}\xi^\top, \partial_1\rangle}{\mathrm{tr}(A^2T_{r-1}) + 1},$$

onde $\eta = \langle N, \xi\rangle$ e S_r é a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A. Se M tem crescimento de σ-volume polinomial, então M é dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1 \text{ e } x_i = t\},$$

com $t \in \mathbb{R}$ *e* $A = -t \cdot (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} I.$

5 HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO EM VARIEDADES DE LORENTZ

Neste capítulo veremos aplicações do princípio do máximo para hipersupercícies tipo-espaço em variedades semi-riemannianas com crescimento de volume estimado. Dividimos esse capítulo em três seções, onde cada uma delas mostra um tipo de variedade semi-riemanniana. Na primeira seção, traremos resultados onde o espaço ambiente é uma variedade semi-riemanniana conformemente estacionária, na segunda seção, os espaços ambiente são variedades generalizadas de Robertson-Walker (GRW) e na última seção os espaços ambiente são variedades espaço-tempo pp-wave.

5.1 Hipersuperfícies tipo-espaço em variedades semi-riemannianas conformemente estacionárias

Nessa seção estudaremos o comportamento de hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempo conformemente estacionários usando, novamente, os princípios do máximo para variedades com volume estimado. Os teoremas obtidos nessa parte estão diretamente ligados a resultados presentes no artigo [5].

Uma variedade orientável $\overline{M}^{n+1}$ de dimensão $n+1$ ($n \geq 2$) munida com uma métrica lorentziana é dita *conformemente estacionária* no espaço-tempo se possui um campo vetorial conforme tipo-tempo globalmente definido $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Em particular, se K for Killing, diremos que $\overline{M}$ é *estacionário* no espaço-tempo. Uma vez que K é globalmente definido em $\overline{M}$, ele determina uma orientação temporal para $\overline{M}^{n+1}$.

Devemos lembrar que $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é conforme em $\overline{M}$, logo, existe uma função $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ tal que, para todos $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, tem-se

$$\langle \overline{\nabla}_V K, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$. Assim,

$$\phi = \frac{1}{n+1}\mathrm{Div}\ K.$$

Além disso, K é dito *fechado* se $\overline{\nabla}_V K = \phi V$ para todo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Uma imersão suave $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade conexa n-dimensional Σ^n em $\overline{M}^{n+1}$ que é dita *tipo-espaço* se o 2-tensor covariante induzido em Σ por ψ, a partir da métrica lorentiziana de $\overline{M}$, for uma métrica riemanniana. Nesse caso, existe um único campo normal unitário tipo-tempo N globalmente definido em Σ e com a mesma orientação de K, de forma que $\langle K, N\rangle \leq -|K| = -\sqrt{-\langle K, K\rangle} < 0$ em toda Σ.

Se ∇ representa a conexão de Levi-Civita de Σ, então as fórmulas de Gauss e

Weingarten para hipersuperfícies de $\overline{M}$ são dadas, respectivamente, por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y\rangle N \text{ e } A(X) = -\overline{\nabla}_X N,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é operador de Weingarten de Σ na direção de N.

Consideremos $K^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, a componente tangencial de K em Σ, tal que $K^\top = K + \langle K, N\rangle N$. Tomando um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ em Σ^n e geodésico em $p \in \Sigma^n$, em p, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(K^\top) &= \sum_{i=1}^n e_i\langle K^\top, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n e_i\langle K + \langle K, N\rangle N, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \big(\langle \overline{\nabla}_{e_i}(K + \langle K, N\rangle N), e_i\rangle + \langle K + \langle K, N\rangle N, \nabla_{e_i} e_i\rangle\big) \\
&= \sum_{i=1}^n \big(\langle \overline{\nabla}_{e_i} K, e_i\rangle + \langle K, N\rangle\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle\big) \\
&= \sum_{i=1}^n (\phi - \langle K, N\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle) \\
&= n\phi + nH\langle K, N\rangle,
\end{aligned}$$

onde

$$H = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}(A)$$

é a curvatura média de ψ na direção de N.

Seja Σ uma hipersuperfície orientada, completa, não-compacta imersa em uma variedade lorentziana conformemente estacionária $\overline{M}$ munida com campo campo conforme fechado tipo-tempo K. A *função-ângulo* hiperbólico $\theta : \Sigma \to [0, +\infty)$ é dada implicitamente por:

$$\langle K, N\rangle = -|K| \cosh\theta.$$

Assim, $\theta(x) = 0$ se, e somente se, $K^\top(x) = 0$.

Vale salientar que a distribuição em $\overline{M}$, formada pelos campos $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ tais que $\langle X, K\rangle = 0$, é suave e integrável, uma vez que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ tais que $\langle X, K\rangle = \langle Y, K\rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle K, [X, Y]\rangle &= \langle K, \overline{\nabla}_X Y\rangle - \langle K, \overline{\nabla}_Y X\rangle \\
&= X\langle K, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_X K, Y\rangle - Y\langle K, X\rangle + \langle \overline{\nabla}_Y K, X\rangle \\
&= -\phi\langle X, Y\rangle + \phi\langle Y, X\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Se $\mathcal{F}$ é uma folha dessa distribuição, então ϕ e $|K|$ são constantes em $\mathcal{F}$ e a segunda forma fundamental de $\mathcal{F}$ na direção de $K/|K|$ é $-(\phi/|K|)Id$. Em particular, $\mathcal{F}$ é totalmente umbílica em $\overline{M}$, com curvatura média, com respeito a $K/|K|$, constante e igual a $\phi/|K|$. Baseado nessa informação, dada uma imersão suave $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, de uma variedade tipo-espaço conexa n-dimensional Σ^n em $\overline{M}^{n+1}$, tal que K seja livre de zeros em Σ^n, definimos o operador $A_\phi : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ dado por $A_\phi = A + \phi/|K|I$, onde A é o operador de Weingarten e I o operador identidade. De certa forma, esse operador A_ϕ nos mostra o quanto a hipersuperfície Σ^n de $\overline{M}^{n+1}$ deixa de ser uma folha de $\mathcal{F}$ a medida que A_ϕ é diferente do operador identicamente nulo. Pensando nisso, se A_ϕ é um operador semidefinido, positivo ou negativo, e adicionando algumas hipóteses em relação a K, esse operador e o crescimento de volume de Σ^n, conseguimos o resultado a seguir.

Teorema 5.1. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade lorentziana orientada conformemente estácionária munida com um campo conforme fechado K tipo-tempo, cujo fator conforme é ϕ. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Sejam N um campo normal unitário a Σ em $\overline{M}$, tal que o operador $A_\phi := A + \phi/|K|I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten na direção de N e I o operador identidade, $K^\top(\mathrm{tr}(A_\phi)) \geq 0$ em Σ. Assuma, ainda, que K seja limitado e livre de zeros em Σ e*

$$n\phi + |K|\mathrm{tr}(A_\phi) + \frac{n\eta\phi}{|K|} \geq 0, \tag{42}$$

onde $\eta = \langle N, K\rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\phi/|K|I$.

(b) Se Σ tem crescimento de volume exponencial, $|K^\top|$ tende a zero no infinito e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\phi/|K|I$.

Demonstração. Primeiramente, devemos observar que se $\theta \equiv 0$ em Σ, então $N \parallel K$ e Σ está contida em uma folha de $\langle K\rangle^\perp$. Além disso, pela observação acima, então $A = -(\phi/|K|)I$.

Assim, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned} 2|K|X(|K|) &= X(|K|^2) = -X\langle K, K\rangle = -2\langle \overline{\nabla}_X K, K\rangle \\ &= -2\phi\langle X, K^\top\rangle. \end{aligned} \tag{43}$$

Considerando $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ dada por $f = -|K| - \langle K, N\rangle$. Devemos notar que $f = |K|(\cosh\theta - 1) \geq 0$ em Σ. Assim, por (43), obtemos

$$
\begin{aligned}
|K|\langle \nabla f, X\rangle &= -|K|X(|K|) - |K|X\langle N, K\rangle \\
&= \phi\langle X, K^\top\rangle + |K|\langle AX, K^\top\rangle - \phi|K|\langle N, X\rangle \\
&= \langle \phi X + |K|AX, K^\top\rangle.
\end{aligned}
$$

Assim, se K é livre de zeros em Σ, temos

$$\nabla f = A_\phi K^\top. \tag{44}$$

Tomando $X = K^\top$, então, por (44), temos

$$\langle \nabla f, K^\top\rangle = \langle A_\phi K^\top, K^\top\rangle \geq 0,$$

uma vez que o operador A_ϕ é positivo semidefinido.

Conforme mostramos anteriormente, sabemos que $\mathrm{div}(K^\top) = n\phi + n\eta H$. Além disso, da desigualdade (42), segue que

$$n\phi \geq -|K|\mathrm{tr}(A_\phi) - \frac{n\eta\phi}{|K|}.$$

Aplicando essa desigualdade na expressão do divergente de $K^\top$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(K^\top) &= n\phi + n\eta H \geq -|K|\mathrm{tr}(A_\phi) - \frac{n\eta\phi}{|K|} + n\eta H \\
&= -|K|\mathrm{tr}(A_\phi) - \eta\left(\frac{n\phi}{|K|} - nH\right) \\
&= (-|K| - \eta)\mathrm{tr}(A_\phi) = \mathrm{tr}(A_\phi)f.
\end{aligned}
$$

Como A_ϕ é um operador não negativo, então $\mathrm{tr}(A_\phi) \geq 0$. Se mostrarmos que $\mathrm{tr}(A_\phi) \equiv 0$ em Σ^n nosso problema estará resolvido, uma vez que, por (44), $\nabla f = A_\phi K^\top \equiv 0$, logo, f seria constante e, como $f(p) = 0$, então $f \equiv 0$ em Σ.

Para isso, considere $F = \{x \in \Sigma^n; \mathrm{tr}(A_\phi)(x) = 0\}$. Assim, se $x \in \Sigma \setminus F$, então $\mathrm{tr}(A_\phi)(x) > 0$. Além disso, se ψ_t é o fluxo de $K^\top$, afirmamos que $\Sigma \setminus F$ é estável sob o fluxo de $K^\top$, ou seja, $\psi_t(\Sigma \setminus F) \subset \Sigma \setminus F$ para $t \geq 0$. De fato, sabemos que

$$\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(A_\phi)(\psi_t(x)) = \langle \nabla \mathrm{tr}(A_\phi), K^\top\rangle = K^\top(\mathrm{tr}(A_\phi)) \geq 0.$$

Logo, para todo $t \geq 0$ e $x \in \Sigma \setminus F$, segue que

$$\mathrm{tr}(A_\phi)(\psi_t(x)) \geq \mathrm{tr}(A_\phi)(\psi_0(x)) = \mathrm{tr}(A_\phi)(x) > 0,$$

dessa forma, $\psi_t(x) \in \Sigma \setminus F$, o que mostra que $\Sigma \setminus F$ é estável sob o fluxo de $K^\top$.

À vista disso, sabemos que K é limitado, $\langle \nabla f, K^\top \rangle \geq 0$, $\mathrm{div}(K^\top) \geq \mathrm{tr}(A_\phi) f$ em Σ, com $\mathrm{tr}(A_\phi)$ positivo em $\Sigma \setminus F$ e tal que $\langle \nabla \mathrm{tr}(A_\phi), K^\top \rangle \geq 0$. Se Σ tem crescimento de volume polinomial, então, pelo Teorema 3.1, temos que $f \leq 0$. Para o caso exponencial, temos as mesmas hipóteses com $K^\top$ tendendo a zero no infinito, logo, pelo Teorema 3.4, temos também que $f \leq 0$. Logo, $f \equiv 0$ em $\Sigma \setminus F$, tanto no caso em que Σ tem crescimento de volume polinomial quanto exponencial, com isso, N seria paralelo a K e $A_\phi \equiv 0$ em $\Sigma \setminus F$. Assim, $\Sigma \setminus F = \emptyset$, mostrando que $F = \Sigma$. Portanto, Σ é uma folha da distribuição $\langle K \rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\phi/|K| I$.

□

Se K é um campo vetorial de Killing, então, para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos que $|K| X(|K|)$ é nulo e $\mathrm{div}(K^\top) = nH\langle K, N \rangle$. Além disso, se A, o operador de Weingarten de Σ é não negativo, então, a condição (42) será automaticamente satisfeita, já que $\phi \equiv 0$. Consequentemente, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.2. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade lorentziana orientada conformemente estácionária munida com um campo de Killing unitário K tipo-tempo. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Sejam N um campo normal unitário a Σ em $\overline{M}$, tal que o operador A é não negativo, onde A é o operador de Weingarten de φ na direção de N e $K^\top(H) \leq 0$ em Σ. Assim, temos duas situações:*

(a) Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K \rangle^\perp$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

(b) Se Σ tem crescimento de volume exponencial, $|K^\top|$ tende a zero no infinito e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K \rangle^\perp$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Aplicando o colorário anterior ao espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ com métrica $-dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{n+1}^2$, onde o campo de Killing em questão é o campo coordenado $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (que é paralelo), obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.3. *Seja $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço de Lorentz-Minkowski com métrica $-dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{n+1}^2$ com campo paralelo tipo-tempo $K = \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Sejam N um campo normal unitário a Σ em $\mathbb{L}^{n+1}$, tal que o operador de Weingarten A de φ na direção de N seja não negativo e $K^\top(H) \leq 0$ em Σ. Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é um hiperplano cujo vetor normal é $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.*

O exemplo a seguir foi extraído do trabalho de Montiel (veja [24]), que mostra duas hipersuperfícies tipo-espaço imersas em conjuntos abertos do espaço de De Sitter.

Exemplo 5.4 (Hipersuperfícies tipo-espaço imersas no De Sitter)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{L}^{n+2}$ vetores tais que a é um vetor tipo-luz e b é um vetor unitário tipo-espaço. Sabemos que o espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma hipersupefície de $\mathbb{L}^{n+2}$ dada por*

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p\rangle = 1\}.$$

Dessa forma, as regiões abertas do espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dadas por

$$\mathcal{H}_a^{n+1} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle > 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_b^{n+1} = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, b\rangle > 1\}.$$

Agora, considere os campos vetoriais a seguir

$$K_a(p) = a - \langle p, a\rangle p \quad \text{e} \quad K_b(p) = b - \langle p, b\rangle p.$$

Assim, observamos que os campos K_a e K_b são campos tipo-tempo nos espaços $\mathcal{H}_a^{n+1}$ e $\mathcal{H}_b^{n+1}$, respectivamente, uma vez que

$$\langle K_a(p), K_a(p)\rangle = \langle a, a\rangle - 2\langle p, a\rangle^2 + \langle p, a\rangle^2 \cdot \langle p, p\rangle = -\langle p, a\rangle^2 < 0$$

e

$$\langle K_b(p), K_b(p)\rangle = \langle b, b\rangle - 2\langle p, b\rangle^2 + \langle p, b\rangle^2 \cdot \langle p, p\rangle = 1 - \langle p, b\rangle^2 < 0.$$

Ademais, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}_a^{n+1})$ quaisquer e usando o fato de a ser um campo paralelo e o campo posição p ser conforme fechado com fator conforme igual a 1, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_X K(p), Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X a - \overline{\nabla}_X \langle p, a\rangle p, Y\rangle \\ &= \langle -X\langle p, a\rangle p - \langle p, a\rangle \overline{\nabla}_X p, Y\rangle \\ &= \langle -\langle p, a\rangle X, Y\rangle. \end{aligned}$$

Isso mostra que K_a é um campo conforme fechado em $\mathcal{H}_a^{n+1}$ cujo fator conforme é $-\langle a, p\rangle$. Analogamente, uma vez que o campo induzido por b também é paralelo, temos que K_b é um campo conforme fechado em $\mathcal{H}_b^{n+1}$ cujo fator conforme é $-\langle b, p\rangle$. Dessa forma, conforme mostramos no início da seção, temos que as distribuições n-dimensionais $\mathcal{D}_a$ e $\mathcal{D}_b$ definidas, respectivamente, em $\mathcal{H}_a^{n+1}$ e $\mathcal{H}_b^{n+1}$ por

$$p \in \mathcal{H}_a^{n+1} \mapsto \mathcal{D}_a(p) = \{v \in T_p\mathcal{H}_a^{n+1}; \langle K_a(p), v\rangle = 0\}$$

e

$$p \in \mathcal{H}_b^{n+1} \mapsto \mathcal{D}_b(p) = \{v \in T_p\mathcal{H}_b^{n+1}; \langle K_b(p), v\rangle = 0\}$$

determinam folheações tipo-espaço $\mathcal{F}(\mathcal{D}_a)$ *e* $\mathcal{F}(\mathcal{D}_b)$ *de codimensão* 1*, as quais são orientadas, respectivamente, por* K_a *e* K_b*. Além disso, consoante ao Exemplo 1 de [24], sabemos que as folhas de* $\mathcal{F}(\mathcal{D}_a)$ *são hipersuperfícies umbílicas em* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *determinadas por*

$$\mathcal{E}_\tau^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\},$$

para cada $\tau \in (0, +\infty)$*, têm como campo normal o vetor*

$$N_a(p) = \frac{K_a(p)}{\sqrt{-|K_a(p)|^2}} = \frac{a}{\tau} - p,$$

o operador de Weingarten na direção de N_a *é dado por*

$$A = Id$$

e são isométricas ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$*. Da mesma forma, sabemos que as folhas de* $\mathcal{F}(\mathcal{D}_b)$ *são hipersuperfícies umbílicas em* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *determinadas por*

$$\mathcal{M}_\tau^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, b\rangle = \tau\},$$

para cada $\tau \in (1, +\infty)$*, têm como campo normal o vetor*

$$N_b(p) = \frac{K_b(p)}{\sqrt{-|K_b(p)|^2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - 1}}b - \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}}p,$$

o operador de Weingarten na direção de N_a *é dado por*

$$A = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}}Id$$

e cada uma de suas folhas é isométrica a um espaço hiperbólico n-dimensional. Dessa forma, $\mathcal{E}_\tau$ *tem crescimento de volume polinomial e* $\mathcal{M}_\tau$ *tem crescimento de volume exponencial.*

Observação 5.5. *Na literatura matemática, a região aberta* $\mathcal{H}_a^{n+1}$ *é um modelo do espaço conhecido como Steady State Space. Na próxima seção, veremos outro modelo para esse espaço dado como um produto warped.*

Aplicando o Teorema 5.1 quando o espaço ambiente é $\mathcal{H}_a^{n+1}$ ou $\mathcal{H}_b^{n+1}$, onde o campo conforme fechado tipo-tempo é, respectivamente, K_a e K_b, definidos no exemplo anterior, obtemos os seguintes corolários.

Corolário 5.6. *Sejam $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor tipo-luz fixado e $\mathcal{H}_a^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ a variedade lorentziana conformemente estácionária orientada definida no Exemplo 5.4 munida com campo conforme fechado $K_a(p) = a - \langle a, p\rangle p$ tipo-tempo cujo fator conforme é $-\langle a, p\rangle$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathcal{H}_a^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathcal{H}_a^{n+1}$. Sejam N um campo normal unitário a Σ em $\mathcal{H}_a^{n+1}$, tal que o operador $A_I := A - I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten de φ na direção de N e I o operador identidade, $K_a^{\top}(\mathrm{tr}(A_I)) \geq 0$ em Σ, K_a é limitado e livre de zeros em Σ e*

$$-n\langle a, p\rangle + \langle a, p\rangle \mathrm{tr}(A_I) - n\eta \geq 0, \tag{45}$$

onde $\eta = \langle N, K_a\rangle$. Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K_a e N, então existe $\tau \in (0, 1]$ tal que $\Sigma^n = \mathcal{E}_\tau^n$, com $A = I$.

Observação 5.7. *O valor de τ deve pertencer ao intervalo $(0, 1]$, pois como $A_I \equiv 0$ e $\langle a, p\rangle > 0$, então $\tau > 0$ e a condição (45) nos fornece a seguinte desigualdade $-n\tau + n \geq 0$, o que implica $\tau \leq 1$.*

Corolário 5.8. *Sejam $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor unitário tipo-espaço fixado e $\mathcal{H}_b^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ a variedade lorentziana conformemente estácionária orientada definida no Exemplo 5.4 munida com campo conforme fechado $K_b(p) = b - \langle b, p\rangle p$ tipo-tempo cujo fator conforme é $-\langle b, p\rangle$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathcal{H}_b^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathcal{H}_a^{n+1}$. Sejam N um campo normal unitário a Σ em $\mathcal{H}_b^{n+1}$, tal que o operador $A_b := A - \langle b, p\rangle \cdot (\langle b, p\rangle^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} I$ é não negativo, onde A é o operador de Weingarten de φ na direção de N e I o operador identidade, $K_b^{\top}(\mathrm{tr}(A_b)) \geq 0$ em Σ, K_b é limitado e livre de zeros em Σ e*

$$-n\langle b, p\rangle + \mathrm{tr}(A_b)\sqrt{\langle b, p\rangle^2 - 1} - \frac{n\eta\langle b, p\rangle}{\sqrt{\langle b, p\rangle^2 - 1}} \geq 0, \tag{46}$$

onde $\eta = \langle N, K_b\rangle$. Se Σ tem crescimento de volume exponencial, $|K_b^{\top}|$ tende a zero no infinito e e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K_b e N, então existe $\tau \in (1, \sqrt{2}]$ tal que $\Sigma^n = \mathcal{M}_\tau^n$, com $A = \tau \cdot (\tau^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} I$.

Observação 5.9. *O valor de τ deve pertencer ao intervalo $(1, \sqrt{2}]$, pois como $A_b \equiv 0$ e $\langle b, p\rangle > 1$, então $\tau > 1$ e a condição (46) nos fornece a seguinte desigualdade*

$$-n\tau + n\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \geq 0,$$

o que implica que

$$\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \geq \tau$$

nos garantindo $1 \geq \tau^2 - 1$*. Logo,* $\sqrt{2} \geq \tau$*.*

Exemplo 5.10 (Hipersuperfícies tipo-espaço imersas no anti-De Sitter)**.** *Conforme definimos no Exemplo 2.10, o espaço anti-De Sitter é dado por*

$$\mathbb{H}_1^{n+1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}_2^{n+2}; -x_1^2 - x_2^2 + \sum_{j=2}^{n+2} x_j^2 = -1 \right\}$$

cuja métrica é induzida de $\mathbb{R}_2^{n+2}$*, que é dada por*

$$-dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 + \cdots + dx_{n+2}^2,$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}_2^{n+2}$*. Com isso,* $\mathbb{H}_1^{n+1}$ *é uma variedade lorentziana cujo campo normal unitário é o campo posição* $P(x) = x$*, com* $x \in \mathbb{H}_1^{n+1}$*, e* $T_x\mathbb{H}_1^{n+1} = P^{\perp}(x)$*.*

O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-(1-k^2)^{-1})$ *também pode ser visto como uma hipersuperfície de* $\mathbb{H}_1^{n+1}$*, basta tomar, para* $k \in (-1,1)$*, a seguinte hipersuperfície*

$$\mathbb{H}^n\left(-\frac{1}{1-k^2}\right) = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+2}; -x_1^2 - x_2^2 + x_3 + \cdots + x_{n+2}^2 = -1, x_2 > 0 \text{ e } x_1 = k\}.$$

Por simplificação, escreveremos $\lambda = -(1-k^2)^{-1}$*. Nesse caso, tanto* P *quanto* $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ *são campos normais a* $\mathbb{H}^n(\lambda)$*, visto como subvariedade de* $\mathbb{R}_2^{n+2}$*. Visto como hipersuperfície de* $\mathbb{H}_1^{n+1}$*, o campo* $K = \partial_1 + x_1 P$ *é um campo normal não nulo em relação a* $\mathbb{H}^n(\lambda)$*, uma vez que* $K \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$ *(pois* $\langle K, P\rangle = -x_1 - x_1\langle P, P\rangle = 0$*) e* $\langle X, K\rangle = 0$ *para todos* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n(\lambda))$*. Vale salientar que* K *é um campo tipo-tempo, uma vez que*

$$\begin{aligned}\langle K, K\rangle &= \langle \partial_1, \partial_1\rangle - 2x_1\langle \partial_1, P\rangle + x_1^2\langle P, P\rangle \\ &= -1 + x_1^2 < 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Ademais, tomando ∇*,* $\overline{\nabla}$ *e* D *as conexões de Levi-Civita de* $\mathbb{H}^n(\lambda)$*,* $\mathbb{H}_1^{n+1}$ *e* $\mathbb{R}_2^{n+2}$*, respectivamente, e* $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$ *quaisquer, temos*

$$\langle \overline{\nabla}_X K, Y\rangle = \langle D_X(\partial_1 + x_1 P), Y\rangle = \langle X(x_1)P + x_1 X, Y\rangle = \langle x_1 X, Y\rangle.$$

Com isso, K *é um campo conforme fechado de* $\mathbb{H}_1^{n+1}$ *cujo fator conforme é* x_1*. Por (47),* $(1-x_1^2)^{-\frac{1}{2}}K$ *é um campo normal unitário a* $\mathbb{H}^n(\lambda)$ *cujo operador de Weingarten nessa* *direção é dado por*

$$A = -\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} I,$$

onde $I : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n(\lambda)) \to \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n(\lambda))$ *é o operador identidade. Portanto, a imersão* $\imath : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}_1^{n+1}$ *é umbílica e será totalmente geodésica se, e somente se,* $k = 0$.

Corolário 5.11. *Seja* $\mathbb{H}_1^{n+1}$ *o espaço anti-De Sitter, nas notações do exemplo anterior, munido com campo conforme fechado* $K = \partial_1 + x_1 P$, *onde* $\partial_1 = \partial/\partial x_1$ *e* P *o campo posição, tipo-tempo cujo fator conforme é* x_1. *Considere* $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{H}_1^{n+1}$, *uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em* $\mathbb{H}_1^{n+1}$. *Sejam* N *um campo normal unitário a* Σ *em* $\mathbb{H}_1^{n+1}$, *tal que o operador* $A_1 := A + x_1 \cdot (1 - x_1^2)^{-\frac{1}{2}} I$ *é não negativo, onde* A *é o operador de Weingarten de* φ *na direção de* N *e* I *o operador identidade,* $K^\top(\mathrm{tr}(A_1)) \geq 0$ *em* Σ, K *é limitado e livre de zeros em* Σ *e*

$$nx_1 + \mathrm{tr}(A_1)\sqrt{1 - x_1^2} + \frac{nx_i\eta}{\sqrt{1 - x_1^2}} \geq 0, \tag{48}$$

onde $\eta = \langle N, K \rangle$. *Se* Σ *tem crescimento de volume exponencial,* $|K^\top|$ *tende a zero no infinito e e existe* $p \in \Sigma$ *tal que* $\theta(p) = 0$, *onde* θ *é a função ângulo hiperbólico entre* K *e* N, *então existe* $k \in (-1, 0]$ *tal que* $\Sigma^n = \mathbb{H}^n(-(1 - k^2)^{-\frac{1}{2}})$, *com* $A = -k \cdot (1 - k^2)^{-\frac{1}{2}} I$.

Observação 5.12. *O valor de* k *deve pertencer ao intervalo* $(-1, 0]$, *pois como* $A_1 \equiv 0$, *então* $k = 0$ *satisfaz a condição (48), além dessa desigualdade nos fornecer*

$$nk - n\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \geq 0,$$

nos garantindo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \leq k.$$

Assim, para $k > 0$ *a desigualde anterior nos conduz a* $k = 0$, *enquanto para* $k < 0$ *a desegualdade anterior nos mostra que* $k^2 > 0$, *logo, como* $x_1 \in (-1, 1)$, *segue que* $k \in (-1, 0]$.

Para o próximo resultado, continuaremos investigando hipersuperfície tipo-espaço não compactas Σ^n em espaços conformemente estacionário no espaço-tempo $\overline{M}^{n+1}$ munidas de um campo conforme fechado K cujo seu fator conforme é ϕ, dessa vez, focando em hipóteses para k-ésima transformação de Newton P_k.

Considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal local de Σ^n e geodésico em $p \in \Sigma$.

Usando o Lema 2.12, calculamos o divergente de $P_kK^\top$ em Σ no ponto p, onde P_k é a k-ésima transformação de Newton, dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(P_kK^\top) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}(P_kK^\top), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{e_i}P_k)K^\top + P_k(\nabla_{e_i}K^\top), e_i\rangle \\ &= \langle \mathrm{div}P_k, K^\top\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{e_i}(K+\eta N), P_k(e_i)\rangle \\ &= \langle \mathrm{div}P_k, K^\top\rangle + \sum_{i=1}^{n}(\langle\overline{\nabla}_{e_i}K, P_k(e_i)\rangle + \eta\langle\overline{\nabla}_{e_i}N, P_k(e_i)\rangle) \\ &= \langle \mathrm{div}P_k, K^\top\rangle + \sum_{i=1}^{n}(\phi\langle e_i, P_k(e_i)\rangle - \eta\langle A(e_i), P_k(e_i)\rangle) \\ &= \langle \mathrm{div}P_k, K^\top\rangle + \phi\cdot\mathrm{tr}(P_k) - \eta\cdot\mathrm{tr}(AP_k),\end{aligned}$$

onde $\eta = \langle K, N\rangle$. Além disso, no caso em que $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, pelo Corolário 2.13, então $\mathrm{div}P_k = 0$ e obtemos

$$\mathrm{div}(P_kK^\top) = \phi\cdot\mathrm{tr}(P_k) - \eta\cdot\mathrm{tr}(AP_k). \tag{49}$$

Com isso, se a variedade ambiente $\overline{M}$ tiver curvatura seccional constante, usando (49), podemos estender o Teorema 5.1 para k-ésima transformações de Newton.

Teorema 5.13. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade lorentziana conexa, orientada, conformemente estácionária munida com campo conforme fechado K tipo-tempo cujo fator conforme é ϕ e com curvatura seccional constante. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Oriente Σ pelo campo normal unitário N, globalmente definido. Suponha que Σ tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, P_k seja positiva definida (respectivamente, negativa definida), que o operador $A_\phi := A + \phi/|K|I$ seja não negativo (respectivamente, não positivo), que K seja limitado, livre de zeros e $K^\top(\mathrm{tr}(A_\phi P_k)) \geq 0$ (respectivamente, $K^\top(\mathrm{tr}(A_\phi P_k)) \leq 0$) em Σ e que valha a seguinte condição:*

$$\phi\mathrm{tr}(P_k) + \mathrm{tr}(A_\phi P_k)|K| + \frac{\eta\phi\mathrm{tr}(P_k)}{|K|} \geq 0, \tag{50}$$

(respectivamente,

$$\phi\mathrm{tr}(P_k) + \mathrm{tr}(A_\phi P_k)|K| + \frac{\eta\phi\mathrm{tr}(P_k)}{|K|} \leq 0\Big) \tag{51}$$

onde $\eta = \langle N, K\rangle$. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K \rangle^{\perp}$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\phi/|K|I$.

(b) Se Σ tem crescimento de volume exponencial, $|K^{\top}|$ tende a zero no infinito e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K \rangle^{\perp}$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A = -\phi/|K|I$.

Observação 5.14. *Podemos perceber que, de fato, esse resultado é uma extensão do Teorema 5.1 quando o ambiente é uma variedade com curvatura seccional constante, uma vez que, para $k = 0$, $P_0 = I$ é positiva definida e $\mathrm{tr}(P_0) = n$, logo, nesse caso, a estimativa (50) conduz a desigualdade (42).*

Demonstração. Primeiramente, devemos observar que se $\theta \equiv 0$ em Σ, então $N \parallel K$ e Σ está contida em uma folha de $\langle K \rangle^{\perp}$. Além disso, pela observação acima, então $A = -(\phi/|K|)I$. Com isso, $P_j = \frac{c_j \phi^j}{n|K|^j} I$ para $0 \leq j \leq n-1$ e $c_j = (j+1)\binom{n}{j+1}$. Logo, se $\phi \neq 0$, então P_j é positiva ou negativa definida e, caso contrário, somente P_0 seria positiva definida.

Suponha, inicialmente, que P_k é positivo definido, que A_ϕ é não negativo, que $K^{\top}(\mathrm{tr}(A_\phi P_k))$ é não negativo em Σ e a desigualdade (50). Como K é livre de zeros em Σ e tomando $X = P_k K^{\top}$, então, por (44), temos

$$\langle \nabla f, P_k K^{\top} \rangle = \langle A_\phi K^{\top}, P_k K^{\top} \rangle = \langle A_\phi P_k K^{\top}, K^{\top} \rangle.$$

Como $A_\phi P_k$ é não negativo e autoadjunto, então existe um operador $Q_k : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ tal que $A_\phi P_k = Q_k^2$. Uma vez que Q_k é autoadjunto, segue que

$$\langle \nabla f, P_k K^{\top} \rangle = \langle (Q_k)^2 K^{\top}, K^{\top} \rangle = |Q_k K^{\top}|^2 \geq 0.$$

Conforme mostramos anteriormente, sabemos que $\mathrm{div}(P_k K^{\top}) = \phi \cdot \mathrm{tr}(P_k) - \eta \cdot \mathrm{tr}(A P_k)$ quando $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante. Além disso, da desigualdade (50), segue que

$$\phi \mathrm{tr}(P_k) \geq -\mathrm{tr}(A_\phi P_k)|K| - \frac{\eta \phi \mathrm{tr}(P_k)}{|K|}.$$

Como $\mathrm{tr}(A_\phi P_k) = \mathrm{tr}(A P_k) + \phi \mathrm{tr}(P_k)/|K|$, então, aplicando a desigualdade anterior na expressão do divergente de $P_k K^{\top}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(P_kK^\top) &= \phi\cdot\operatorname{tr}(P_k)-\eta\cdot\operatorname{tr}(AP_k)\\
&\geq -\operatorname{tr}(A_\phi P_k)|K|-\frac{\eta\phi\operatorname{tr}(P_k)}{|K|}-\eta\cdot\operatorname{tr}(AP_k)\\
&= -|K|\operatorname{tr}(A_\phi P_k)-\eta\left(\frac{\phi\operatorname{tr}(P_k)}{|K|}+\operatorname{tr}(AP_k)\right)\\
&= (-|K|-\eta)\operatorname{tr}(A_\phi P_k)=\operatorname{tr}(A_\phi P_k)f.
\end{aligned}$$

Como $A_\phi P_k$ é um operador não negativo, então $\operatorname{tr}(A_\phi P_k)\geq 0$. Afirmamos que, se mostrarmos que $\operatorname{tr}(A_\phi P_k)\equiv 0$ em Σ^n, nosso problema estará resolvido. Para isso, observe que para cada $x\in\Sigma$ e cada $V\in(P_k(T_x\Sigma))^\perp$ vale que $\langle P_kV,V\rangle=0$. Como P_k é positivo definido, então $V=0$, o que mostra que $(P_k(T_x\Sigma))^\perp=\{0\}$. Logo, P_k é isomorfismo para cada $x\in\Sigma$. Com isso, se $\operatorname{tr}(A_\phi P_k)\equiv 0$ em Σ^n, então $A_\phi P_k\equiv 0$ e, sabendo que P_k é um isomorfismo, isso nos conduz ao fato de $A_\phi\equiv 0$. Uma vez que $\nabla f=A_\phi K^\top\equiv 0$, segue que f seria constante e, como $f(p)=0$, então $f\equiv 0$ em Σ.

Para mostrarmos que $\operatorname{tr}(A_\phi P_k)\equiv 0$ em Σ^n, considere

$$F=\{x\in\Sigma^n;\operatorname{tr}(A_\phi P_k)(x)=0\}.$$

Assim, se $x\in\Sigma\setminus F$, então $\operatorname{tr}(A_\phi P_k)(x)>0$. Além disso, se ψ_t é o fluxo de $K^\top$, afirmamos que $\Sigma\setminus F$ é estável sob o fluxo de $K^\top$, ou seja, $\psi_t(\Sigma\setminus F)\subset\Sigma\setminus F$ para $t\geq 0$. De fato, sabemos que

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(A_\phi P_k)(\psi_t(x))=\langle\nabla\operatorname{tr}(A_\phi P_k),K^\top\rangle=K^\top(\operatorname{tr}(A_\phi P_k))\geq 0.$$

Logo, para todo $t\geq 0$ e $x\in\Sigma\setminus F$, segue que

$$\operatorname{tr}(A_\phi P_k)(\psi_t(x))\geq\operatorname{tr}(A_\phi P_k)(\psi_0(x))=\operatorname{tr}(A_\phi P_k)(x)>0.$$

Dessa forma, $\psi_t(x)\in\Sigma\setminus F$, o que mostra que $\Sigma\setminus F$ é estável sob o fluxo de $K^\top$.

À vista disso, sabemos que $P_kK^\top$ é limitado, $\langle\nabla f,P_kK^\top\rangle\geq 0$, $\operatorname{div}(P_kK^\top)\geq\operatorname{tr}(A_\phi P_k)f$ em Σ, com $\operatorname{tr}(A_\phi P_k)$ positivo em $\Sigma\setminus F$ e tal que $\langle\nabla\operatorname{tr}(A_\phi P_k),K^\top\rangle\geq 0$. Se Σ tem crescimento de volume polinomial, então, pelo Teorema 3.1, temos que $f\leq 0$. Para o caso exponencial, temos as mesmas hipóteses com $P_kK^\top$ tendendo a zero no infinito, logo, pelo Teorema 3.4, temos também que $f\leq 0$. Dessa maneira, $f\equiv 0$ em $\Sigma\setminus F$, tanto no caso em que Σ tem crescimento de volume polinomial quanto exponencial, com isso, N seria paralelo a K e $A_\phi\equiv 0$ em $\Sigma\setminus F$. Logo, $\Sigma\setminus F=\emptyset$, mostrando que $F=\Sigma$. Portanto, Σ é uma folha da distribuição $\langle K\rangle^\perp$ e é umbílica em $\overline{M}$, com $A=-\phi/|K|I$.

No caso em que P_k é negativo definido, que A_ϕ é não positivo, que $K^\top(\operatorname{tr}(A_\phi P_k))$ é não positivo em Σ e que vale a desigualdade (51), basta fazer a mesma demonstração com $f = -|K| - \eta$ e $X = -P_k K^\top$.

$\square$

No caso em que K é um campo de Killing unitário tipo-tempo, temos que $\operatorname{div}(P_k K^\top) = -\langle N, K\rangle \cdot \operatorname{tr}(AP_k)$, semelhante ao que fizemos em (49) e no item (c) do Lema 3.14. Com isso, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.15. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade lorentziana com curvatura seccional constante, orientada estácionária munida com campo de Killing K tipo-tempo. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Oriente Σ pelo campo normal unitário N, globalmente definido. Suponha que Σ tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, P_k seja positivo definido (respectivamente, negativo definido), que A seja não negativo (respectivamente, não positivo) e $K^\top(\operatorname{tr}(AP_k)) \geq 0$ (respectivamente, $K^\top(\operatorname{tr}(AP_k)) \leq 0$) em Σ. Assim, temos duas situações:*

(a) Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K\rangle^\perp$, $k = 0$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

(b) Se Σ tem crescimento de volume exponencial, $|K^\top|$ tende a zero no infinito e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é uma folha da distribuição $\langle K\rangle^\perp$, $k = 0$ e é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Aplicando o Corolário 5.15 quando o espaço ambiente é o espaço de Lorentz-Minkowski, que é uma variedade semi-riemanniana com curvatura seccional constante, onde o campo de Killing em questão é o campo coordenado $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (que é paralelo), obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.16. *Seja $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço de Lorentz-Minkowski com métrica $-dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{n+1}^2$ com campo paralelo tipo-tempo $K = \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$. Oriente Σ pelo campo normal unitário N, globalmente definido. Suponha que Σ tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, P_k seja positivo definido (respectivamente, negativo definido), que A seja não negativo (respectivamente, não positivo) e $K^\top(\operatorname{tr}(AP_k)) \geq 0$ (respectivamente, $K^\top(\operatorname{tr}(AP_k)) \leq 0$) em Σ. Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K e N, então Σ é um hiperplano cujo vetor normal é $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.*

Conforme mencionamos anteriormente no Exemplo 2.10, sabemos que os espaços de De Sitter e anti-De Sitter têm curvatura seccional constante. Dessa forma, usando os campos conforme fechados construídos nos Exemplos 5.4 e 5.10, obtemos os seguintes corolários.

Corolário 5.17. *Sejam $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor tipo-luz fixado e $\mathcal{H}_a^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ a variedade lorentziana conformemente estácionária orientada definida no Exemplo 5.4 munida com campo conforme fechado $K_a(p) = a - \langle a, p\rangle p$ tipo-tempo cujo fator conforme é $-\langle a, p\rangle$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathcal{H}_a^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathcal{H}_a^{n+1}$. Oriente Σ pelo campo normal unitário N, globalmente definido. Suponha que Σ tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, P_k seja positivo definido (respectivamente, negativo definido), que $A_I := A - I$ seja não negativo (respectivamente, não positivo), que K_a seja limitado, livre de zeros e $K_a^\top(\mathrm{tr}(A_I P_k)) \geq 0$ (respectivamente, $K_a^\top(\mathrm{tr}(A_I P_k)) \leq 0$) em Σ e que valha a seguinte condição:*

$$-\langle a, p\rangle \mathrm{tr}(P_k) + \mathrm{tr}(A_I P_k)\langle a, p\rangle - \eta \mathrm{tr}(P_k) \geq 0, \tag{52}$$

(respectivamente,

$$-\langle a, p\rangle \mathrm{tr}(P_k) + \mathrm{tr}(A_I P_k)\langle a, p\rangle - \eta \mathrm{tr}(P_k) \leq 0) \tag{53}$$

onde $\eta = \langle N, K_a\rangle$. Se Σ tem crescimento de volume polinomial e existe $p \in \Sigma$ tal que $\theta(p) = 0$, onde θ é a função ângulo hiperbólico entre K_a e N, então existe $\tau \in (0, 1]$ tal que $\Sigma^n = \mathcal{E}_\tau^n$, com $A = I$.

Observação 5.18. *O valor de τ deve pertencer ao intervalo $(0, 1]$, pois como $A_I \equiv 0$ e $\langle a, p\rangle > 0$, então $\tau > 0$ e a condição (52) nos fornece a seguinte desigualdade*

$$-\mathrm{tr}(P_k)\tau + \mathrm{tr}(P_k) \geq 0,$$

logo, $\tau \leq 1$. O mesmo se obtém a partir das hipóteses que envolvem a condição (53).

Corolário 5.19. *Sejam $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor unitário tipo-espaço fixado e $\mathcal{H}_b^{n+1} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ a variedade lorentziana conformemente estácionária orientada definida no Exemplo 5.4 munida com campo conforme fechado $K_b(p) = b - \langle b, p\rangle p$ tipo-tempo cujo fator conforme é $-\langle b, p\rangle$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathcal{H}_b^{n+1}$, uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathcal{H}_a^{n+1}$. Oriente Σ pelo campo normal unitário N, globalmente definido. Suponha que Σ tenha segunda forma fundamental A limitada, que, para algum $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, P_k seja positivo definido (respectivamente, negativo definido), que $A_b := A - \langle b, p\rangle \cdot (\langle b, p\rangle^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} I$ seja não negativo (respectivamente, não positivo), que K_b seja limitado, livre de zeros e $K_b^\top(\mathrm{tr}(A_b P_k)) \geq 0$ (respectivamente, $K_b^\top(\mathrm{tr}(A_b P_k)) \leq 0$) em Σ e que valha a seguinte condição:*

$$-\langle b, p\rangle \mathrm{tr}(P_k) + \mathrm{tr}(A_b P_k)\sqrt{\langle b, p\rangle^2 - 1} - \frac{\eta \mathrm{tr}(P_k)\langle b, p\rangle}{\sqrt{\langle b, p\rangle^2 - 1}} \geq 0, \tag{54}$$

(respectivamente,

$$-\langle b,p\rangle \mathrm{tr}(P_k)+\mathrm{tr}(A_bP_k)\sqrt{\langle b,p\rangle^2-1}-\frac{\eta\,\mathrm{tr}(P_k)\langle b,p\rangle}{\sqrt{\langle b,p\rangle^2-1}}\leq 0\Bigg) \tag{55}$$

onde $\eta=\langle N,K_b\rangle$. *Se* Σ *tem crescimento de volume exponencial,* $|K_b^\top|$ *tende a zero no infinito e e existe* $p\in\Sigma$ *tal que* $\theta(p)=0$, *onde* θ *é a função ângulo hiperbólico entre* K_b *e* N, *então existe* $\tau\in(1,\sqrt{2}]$ *tal que* $\Sigma^n=\mathcal{M}^n_\tau$, *com* $A=\tau\cdot(\tau^2+1)^{-\frac{1}{2}}I$.

Observação 5.20. *O valor de* τ *deve pertencer ao intervalo* $(1,\sqrt{2}]$, *pois como* $A_b\equiv 0$ *e* $\langle b,p\rangle>1$, *então* $\tau>1$ *e a condição (54) nos fornece a seguinte desigualdade*

$$-\tau+\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\geq 0,$$

o que implica

$$\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\geq\tau,$$

nos garantindo $1\geq\tau^2-1$, *ou seja,* $\sqrt{2}\geq\tau$. *O mesmo se obtém a partir das hipóteses que envolvem a condição (55).*

Corolário 5.21. *Seja* $\mathbb{H}^{n+1}_1$ *o espaço anti-De Sitter, nas notações do exemplo anterior, munido com campo conforme fechado* $K=\partial_1+x_1P$, *onde* $\partial_1=\partial/\partial x_1$ *e* P *o campo posição, tipo-tempo cujo fator conforme é* x_1. *Considere* $\varphi:\Sigma^n\to\mathbb{H}^{n+1}_1$, *uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço conexa, orientável, completa e não compacta em* $\mathbb{H}^{n+1}_1$. *Oriente* Σ *pelo campo normal unitário* N, *globalmente definido. Suponha que* Σ *tenha segunda forma fundamental* A *limitada, que, para algum* $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, P_k *seja positivo definido (respectivamente, negativo definido), que* $A_1:=A+x_1\cdot(1-x_1^2)^{-\frac{1}{2}}I$ *seja não negativo (respectivamente, não positivo), que* K *seja limitado, livre de zeros e* $K^\top(\mathrm{tr}(A_1P_k))\geq 0$ *(respectivamente,* $K^\top(\mathrm{tr}(A_1P_k))\leq 0$*) em* Σ *e que valha a seguinte condição:*

$$x_1\mathrm{tr}(P_k)+\mathrm{tr}(A_1P_k)\sqrt{1-x_1^2}+\frac{\eta x_1\mathrm{tr}(P_k)}{\sqrt{1-x_1^2}}\geq 0, \tag{56}$$

(respectivamente,

$$x_1\mathrm{tr}(P_k)+\mathrm{tr}(A_1P_k)\sqrt{1-x_1^2}+\frac{\eta x_1\mathrm{tr}(P_k)}{\sqrt{1-x_1^2}}\leq 0\Bigg) \tag{57}$$

onde $\eta=\langle N,K\rangle$. *Se* Σ *tem crescimento de volume exponencial,* $|K^\top|$ *tende a zero no infinito e e existe* $p\in\Sigma$ *tal que* $\theta(p)=0$, *onde* θ *é a função ângulo hiperbólico entre* K *e*

N, então existe $\tau \in (-1, 0]$ tal que $\Sigma^n = \mathbb{H}^n(-(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}})$, com $A = -\tau \cdot (1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}} I$.

Observação 5.22. *O valor de τ deve pertencer ao intervalo $(-1, 0]$, pois como $A_1 \equiv 0$, então $\tau = 0$ satisfaz a condição (56), além dessa desigualdade nos fornecer*

$$\tau - \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \geq 0,$$

nos garantindo

$$\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \leq \tau.$$

Assim, para $\tau > 0$ a desigualde anterior nos conduz a $\tau = 0$, enquanto para $\tau < 0$ a desegualdade anterior nos mostra que $\tau^2 > 0$, logo, como $x_1 \in (-1, 1)$, segue que $\tau \in (-1, 0]$. O mesmo se obtém a partir das hipóteses que envolvem a condição (57).

5.2 Hipersuperfícies em espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados

Nessa seção, estudaremos o comportamento de hipersuperfícies em espaços-tempo Robertson-Walker generalizados (GRW) usando, novamente, os princípios do máximo para variedades com volume estimado. Os teoremas obtidos nessa parte estão diretamente ligados a resultados presentes nos artigo [14].

Seja M^n uma variedade riemanniana n-dimensional, orientada, completa e convexa, $I \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\varrho : I \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Considere a variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$. Munimos essa variedade com uma métrica lorentziana dada por:

$$\langle v, w \rangle_p = -\langle (\pi_I)_*(v), (\pi_I)_*(w) \rangle_{(\pi_I)(p)} + \varrho^2(t) g_0((\pi_M)_*(v), (\pi_M)_*(w))_{\pi_M(p)},$$

onde $p \in \overline{M}^{n+1}$, $v, w \in T_p\overline{M}$, $\pi_I : \overline{M}^{n+1} \to I$ e $\pi_M : \overline{M}^{n+1} \to M$ são as projeções de $\overline{M}^{n+1}$ em I e M, respectivamente, e g_0 é a métrica em M. Em geral, dizemos que essa variedade é um *produto warped* e, nesse caso, a escrevemos por

$$\overline{M}^{n+1} = -I \times_\varrho M^n. \tag{58}$$

Para fins de nomeclatura, nos referimos ao intervalo I como *fibra*, a variedade M^n como *base* e a função ϱ como *função warping*[2].

Quando M^n tem curvatura seccional constante, o produto warped (58) é conhecido como um espaço-tempo Robertson-Walker (RW). Depois de [7], o produto warped

[2]Uma nomeclatura alternativa para esse tipo de variedade é dizer que a variedade $\overline{M}^{n+1}$ é um *produto torcido* enquanto ϱ é chamada de *função torção*

(58) é conhecido como o espaço-tempo Robertson-Walker generalizado (GRW)[3] e tal nomeclatura será utilizada ao longo dessa seção.

Para o que segue, consideramos $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade tipo-espaço orientada n-dimensional Σ^n no espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1}$, onde N é o campo unitário normal apontando para o futuro. Considerando $h = (\pi_I)|_\Sigma$ a função altura de Σ e denotando por $\overline{\nabla}$ e ∇ os gradientes com respeito as métricas de $\overline{M}^{n+1}$ e M^n. Assim, obtemos

$$\overline{\nabla}\pi_I = -\partial_t \quad \text{e} \quad \nabla h = (\overline{\nabla}\pi)^\top = -\partial_t - \eta N,$$

onde $\eta = \langle \partial_t, N \rangle$.

Seja $-I \times_\varrho M^n$ um espaço-tempo GRW munido com uma função peso σ. De acordo com Gromov [20], a σ-curvatura média H_σ de Σ^n é definida por

$$nH_\sigma = nH - \langle \overline{\nabla}\sigma, N \rangle.$$

Pelo Teorema 1.2 de [13], sabemos que se o espaço-tempo GRW $-I \times_\varrho M^n$ com peso σ, o qual é limitado, e $\overline{\mathrm{Ric}}_\sigma(V, V) \geq 0$, para todo campo vetorial V tipo-tempo, então σ deve ser constante ao longo de I. Motivado por esse resultado, ao longo dessa seção consideraremos espaços-tempo GRW $-I \times_\varrho M^n$ com função peso σ que não dependem do parâmetro $t \in I$, ou seja, $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t \rangle = 0$. Por simplicidade, denotaremos essa variedade lorentziana por $-I \times_\varrho M^n_\sigma$.

Tomando $\xi = \varrho\partial_t$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ quaisquer. Assim, existem funções $x, y : I \to \mathbb{R}$ e campos $X_M, Y_M \in \mathfrak{X}(M^n)$ tais que $X = x(t)\partial_t + X_M$ e $Y = y(t)\partial_t + Y_M$. Com isso, fazendo $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ e sabendo que $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$ e $X_M(\varrho(t)) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle &= x(t)y(t)\langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\varrho(t)\partial_t, \partial_t \rangle + x(t)\langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\varrho(t)\partial_t, Y_M \rangle \\
&\quad + y(t)\langle \overline{\nabla}_{X_M}\varrho(t)\partial_t, \partial_t \rangle + \langle \overline{\nabla}_{X_M}\varrho(t)\partial_t, Y_M \rangle \\
&= -\varrho'(t)x(t)y(t) + \langle \overline{\nabla}_{X_M}\varrho(t)\partial_t, Y_M \rangle,
\end{aligned}$$

onde $\varrho'(t) = \frac{d\varrho}{dt}(t)$ e usando que $\langle \overline{\nabla}_{X_M}\partial_t, \partial_t \rangle = 0$ por ∂_t ser um campo vetorial unitário. Usando o fato de $[X_M, Y_M] \in \mathfrak{X}(M^n)$, $[\partial_t, X_M] = [\partial_t, Y_M] = 0$ e a fórmula de Koszul, obtemos

[3]A sigla GRW vem do inglês generalized Robertson-Walker.

$$\begin{aligned}2\langle\overline{\nabla}_{X_M}\varrho(t)\partial_t, Y_M\rangle &= X_M\langle\varrho(t)\partial_t, Y_M\rangle + \varrho(t)\partial_t\langle X_M, Y_M\rangle - Y_M\langle\varrho(t)\partial_t, X_M\rangle \\ &\quad -\langle X_M, [\varrho(t)\partial_t, Y_M]\rangle - \langle\varrho(t)\partial_t, [Y_M, X_M]\rangle - \langle Y_M, [\varrho(t)\partial_t, X_M]\rangle \\ &= \varrho(t)\partial_t(\varrho^2(t)g_M(X_M, Y_M)) \\ &= 2\varrho'(t)\varrho^2(t)g_M(X_M, Y_M).\end{aligned}$$

onde g_M é a métrica de M. Usando esse resultado na expressão de $\langle\overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle$, temos

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle &= -\varrho'(t)x(t)y(t) + \varrho'(t)\varrho^2(t)g_M(X_M, Y_M) \\ &= \varrho'(t)\langle X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Como $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ foram tomados arbitrariamente, isso mostra que o campo vetorial ξ é conforme fechado, cujo fator conforme é $\varrho'(t)$.

Para cada $t_0 \in I$, a fatia $\{t_0\}\times M^n$ é uma variedade riemanniana orientável e ∂_t é um campo normal unitário. Observe que cada uma dessas hipersuperfícies é isométrica a M^n, pois sua métrica é dada por $\langle\cdot,\cdot\rangle(t_0, x) = \varrho^2(t_0)g_0(x)$, onde g_0 é a métrica de M. Denotaremos $\{t_0\}\times M^n = M(t_0)$. Além disso, dado $X, Y \in \mathfrak{X}(M(t_0))$, obtemos:

$$\langle\nabla_X\partial_t, Y\rangle = \left\langle\nabla_X\frac{\xi}{\varrho(t)}, Y\right\rangle = \left\langle X(\varrho^{-1}(t))\xi + \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}X, Y\right\rangle = \left\langle\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}X, Y\right\rangle.$$

Com isso, o operador de Weingarten $A = -\nabla_{(\cdot)}\partial_t$ é igual ao operador $-\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}Id$, mostrando que essas hipersuperfícies são umbílicas.

Vale salientar, que no caso em que $\varrho\equiv 1$, ou seja, que o produto warped em questão é uma variedade produto, então ∂_t é paralela e as fatias $\{t\}\times M^n$ são variedades totalmente geodésicas em $\overline{M}^{n+1}$.

O próximo Lema é provado no Lema 1 de [14] e será importante para provar dois resultados de rigidez que serão apresentados posteriormente.

Lema 5.23. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa no produto warped com peso $-I\times_\varrho M^n_\sigma$ com função altura h. Então, temos:*
(i) $\Delta_\sigma h = -(\ln\varrho)'(h)(n + |\nabla h|^2) - n\eta H_\sigma$;
(ii) $\Delta_\sigma\zeta = -n(\varrho'(h) + \varrho(h)\eta H_\sigma)$,
onde $\zeta(t) = \int_{t_0}^t \varrho(s)ds$ e $\eta = \langle N, \partial_t\rangle$.

Ademais, a σ-curvatura média de $M(t_0)$ em $\overline{M}^{n+1} = -I\times_\varrho M^n_\sigma$ tem a seguinte igualdade:

$$nH_\sigma = nH - \langle\overline{\sigma}, \partial_t\rangle = nH = -\mathrm{tr}(A) = n\frac{\varrho'(t_0)}{\varrho(t_0)}.$$

Nesse caso, a função $(\ln \varrho)'(h) + \langle \partial_t, \partial_t \rangle H_\sigma$ é identicamente nula. Os Teoremas 5.24 e 5.27 nos darão condições necessárias para que uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n de $-I \times_\varrho M^n_\sigma$ seja uma fatia. Uma dessas condições envolve a estimativa da função $\eta H_\sigma + (\ln \varrho)'(h)$ em Σ, onde se essa função tiver seu sinal dependendo da função altura h ou de ζ, teremos o resultado desejado.

O próximo teorema nos traz uma rigidez a partir de uma estimativa da função altura. Para isso, devemos lembrar que uma *faixa* no produto warped $I \times_\varrho M^n_\sigma$ é uma região do tipo

$$[t_1, t_2] \times M^n = \{(t, q) \in I \times_\varrho M^n_\sigma; t_1 \geq t \geq t_2\},$$

onde $t_1, t_2 \in I$.

Teorema 5.24. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_\varrho M^n_\sigma$ um espaço-tempo GRW não compacto e com função peso $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ tal que $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t \rangle = 0$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to -I \times_\varrho M^n_\sigma$, uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada, com campo normal unitário N tipo-tempo e situada no interior de uma faixa do produto warped com peso $-I \times_\varrho M^n_\sigma$. Suponha que exista uma constante real positiva λ satisfazendo a seguinte condição:*

$$h \geq \sup_\Sigma h - \lambda(\eta H_\sigma + (\ln \varrho)'(h)) \tag{59}$$

onde $h = \pi_I \circ \varphi$ é a função altura e $\eta = \langle \partial_t, N \rangle$ é limitada. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume polinomial, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

(b) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume exponencial e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

Observação 5.25. *A condição (59) já usa, implicitamente, o fato de Σ estar no interior de uma faixa quando expressa o $\sup_\Sigma h$ como um número real. Além disso, essa condição também supõe que $\eta H_\sigma + (\ln \varrho)'(h) \geq 0$ uma vez que o caso contrário não pode ocorrer pela propriedade do supremo.*

Demonstração. Para provar esse resultado, é nécessário mostrar que a função altura h é constante. Nesse caso, existiria $t \in I$ tal que $\pi_I \circ \varphi(\Sigma) = \{t\}$ e, pela completude de Σ^n, o teorema estaria provado. Para isso, façamos $f = \sup_\Sigma h - h$. Com isso, $f \geq 0$ em Σ. Além disso, temos:

$$|\nabla f|^2 = |-\nabla h|^2 = |\partial_t^\top|^2 = \langle \partial_t + \eta N, \partial_t + \eta N \rangle = -1 + 2\eta^2 - \eta^2 = -1 + \eta^2, \tag{60}$$

que é limitada, pois η é limitada.

Dessa forma, por (i) do Lema 5.23 e (60), obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta_\sigma f &= -\Delta_\sigma h = (\ln \varrho)'(h)(n + |\nabla h|^2) + n\eta H_\sigma \geq n((\ln \varrho)'(h) + \eta H_\sigma) \\ &= \frac{n\lambda}{\lambda}((\ln \varrho)'(h) + \eta H_\sigma) \geq \frac{n}{\lambda}(\sup_\Sigma h - h) = \frac{n}{\lambda} f,\end{aligned}$$

onde usamos a condição (59) para obter $\lambda((\ln \varrho)'(h) + \eta H_\sigma) \geq \sup_\Sigma h - h$.

Assim, para o item (a), basta usar o Corolário 4.11, em sua versão com crescimento de σ-volume polinomial, para mostrar que $f \leq 0$, logo, $f \equiv 0$ e h é constante. Para o item (b), basta notar, por (60), $|\nabla f|^2 = |\partial_t^\top|^2$ tende a zero no infinito e usando o Corolário 4.11, em sua versão com crescimento de σ-volume exponencial, para mostrar que $f \leq 0$, logo, $f \equiv 0$ e h é constante, como queríamos mostrar.

□

Para essa seção, considere o modelo do *Steady State Space* dado como espaço-tempo GRW:

$$\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n.$$

Na cosmologia, esse modelo corresponde ao modelo steady state do universo proposto por Bondi, Gold e Hoyle (veja [18], Capítulo 5). Fazendo $\sigma = \frac{\alpha|\pi_{\mathbb{R}^n}(p)|^2}{2}$, podemos tomar esse modelo de Steady State space com peso σ. Dessa forma, as fatia desse espaço terão crescimento de σ-volume polinomial se $\alpha \geq 0$ ou crescimento de σ-volume exponencial se $\alpha < 0$. Além disso, sabemos que $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t \rangle = 0$ e que, como a função warping é $\varrho(t) = e^t$, temos $(\ln \varrho)'(h) = 1$. Aplicando o Teorema 5.24 nesse espaço ambiente, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.26. *Seja $\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n_\sigma$ o Steady State space no modelo espaço-tempo GRW com função peso $\sigma = \frac{\alpha|\pi_{\mathbb{R}^n}(p)|^2}{2}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$, uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada com campo normal unitário N tipo-tempo e situada no interior de uma faixa do produto warped com peso $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n_\sigma$. Suponha que exista uma constante real positiva λ satisfazendo a seguinte condição:*

$$h \geq \sup_\Sigma h - \lambda(\eta H_\sigma + 1)$$

onde $h = \pi_I \circ \varphi$ é a função altura e $\eta = \langle \partial_t, N \rangle$ é limitada. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ tem crescimento de σ-volume polinomial e $\alpha \geq 0$, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times \mathbb{R}^n$.

(b) Se Σ tem crescimento de σ-volume exponencial, $\alpha < 0$ e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times \mathbb{R}^n$.

Podemos substituir a função altura na condição (59) do teorema anterior pela função ζ, conforme o resultado a seguir.

Teorema 5.27. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times_\varrho M^n_\sigma$ um espaço-tempo GRW não compacto com função peso $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ tal que $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t \rangle = 0$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to -I \times_\varrho M^n_\sigma$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada com campo normal unitário N tipo-tempo e situada no interior de uma faixa do produto warped com peso $-I \times_\varrho M^n_\sigma$. Suponha que exista uma constante real positiva λ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\zeta \geq \sup_\Sigma \zeta - \lambda(\eta H_\sigma + (\ln \varrho)'(h)) \tag{61}$$

onde $\hat{\zeta}(t) = \int_{t_0}^t \varrho(s)ds$, $h = \pi_I \circ \varphi$ é a função altura, $\zeta(p) = \hat{\zeta}(h(p))$, para todo $p \in \Sigma$, e $\eta = \langle \partial_t, N \rangle$ é limitada. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume polinomial, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

(b) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume exponencial e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times M^n$.

Observação 5.28. *A condição (61) já usa, implicitamente, o fato de Σ estar em uma faixa quando expressa o $\sup_\Sigma \zeta$ como um número real. Além disso, essa condição também supõe que $\eta H_\sigma + (\ln \varrho)'(h) \geq 0$ uma vez que o caso contrário não pode ocorrer pela propriedade do supremo.*

Demonstração. Para provar esse resultado, basta mostrar que a função ζ é constante, já que $\hat{\zeta}$ é estritamente positiva, logo, $\zeta = \hat{\zeta} \circ h$ é constante se, e somente se, h é constante. Nesse contexto, existiria $t \in I$ tal que $\pi_I \circ \varphi(\Sigma) = \{t\}$ e, pela completude de Σ^n, o teorema estaria provado. Para isso, façamos $f = \sup_\Sigma \zeta - \zeta$. Com isso, $f \geq 0$ em Σ. Além disso, temos:

$$|\nabla f|^2 = |\varrho(h)\nabla h|^2 \leq \sup_\Sigma \varrho^2(h)|\partial_t^\top|^2 \leq C_1|\partial_t^\top|^2 \leq C_1(\eta^2 - 1), \tag{62}$$

onde $C_1 = \sup_\Sigma \varrho^2(h)$, logo $|\nabla f|$ é limitada uma vez que η é limitada.

Dessa forma, por (ii) do Lema 5.23 e (62), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma f &= -\Delta_\sigma \zeta = n(\varrho'(h) + \varrho(h)\eta H_\sigma) = n\varrho(h)((\ln \varrho)'(h) + \eta H_\sigma) \\ &\geq \frac{n\lambda \inf_\Sigma \varrho(h)}{\lambda}((\ln \varrho)'(h) + \eta H_\sigma) \geq \frac{nC_2}{\lambda}(\sup_\Sigma \zeta - \zeta) \\ &= \frac{nC_2}{\lambda} f, \end{aligned}$$

onde $C_2 = \inf_\Sigma \varrho(h) > 0$.

Assim, para o item (a), basta usar o Corolário 4.11, em sua versão com crescimento de σ-volume polinomial, para mostrar que $f \leq 0$, logo, $f \equiv 0$ e ζ é constante.

Para o item (b), basta notar, por (62), $|\nabla f|^2 \leq C_1|\partial_t^\top|^2$ tende a zero no infinito e usando o Corolário 4.11, em sua versão com crescimento de σ-volume exponencial, para mostrar que $f \leq 0$, logo, $f \equiv 0$ e ζ é constante, como queríamos mostrar.

$\square$

Aplicando o Teorema 5.27 no Steady State Space no modelo espaço-tempo GRW, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.29. *Seja $\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n_\sigma$ o Steady State Space no modelo espaço-tempo GRW com função peso $\sigma = \frac{\alpha|\pi_{\mathbb{R}^n}(p)|^2}{2}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada com campo normal unitário N tipo-tempo e situada no interior de uma faixa do produto warped com peso $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n_\sigma$. Suponha que exista uma constante real positiva λ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\zeta \geq \sup_\Sigma \zeta - \lambda(\eta H_\sigma + 1)$$

onde $\hat{\zeta}(t) = \int_{t_0}^t e^s ds$, $h = \pi_I \circ \varphi$ é a função altura, $\zeta(p) = \hat{\zeta}(h(p))$, para todo $p \in \Sigma$, e $\eta = \langle \partial_t, N\rangle$ é limitada. Assim, temos duas situações:

(a) Se Σ tem crescimento de σ-volume polinomial e $\alpha \geq 0$, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times \mathbb{R}^n$.

(b) Se Σ tem crescimento de σ-volume exponencial, $\alpha < 0$ e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é uma fatia $\{t\} \times \mathbb{R}^n$.

Quando a função warping é constante, o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ é conhecido como espaço-tempo GRW *estático*. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\varrho \equiv 1$. Com isso, enunciamos o Lema 3 de [14], que será importante para provar outro resultado de rigidez no ambiente mencionado anteriormente.

Lema 5.30. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço orientada imersa no espaço-tempo GRW estático com peso $-I \times M^n_\sigma$ tal que $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t\rangle = 0$. Dada a função suporte $\eta = \langle N, \partial_t\rangle$, temos:*

$$\Delta_\sigma \eta = n\langle \nabla H_\sigma, \partial_t\rangle + (|A|^2 + \widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma(N^*, N^*))\eta$$

onde A denota o operador de Weingarten de Σ^n, $\widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma$ representa o tensor de Bakry-Émery-Ricci da fibra de M^n e $N^* = N + \eta\partial_t$ é a projeção ortonormal de N em M.

Em posse do lema anterior, podemos obter um resultado semelhante ao Teorema 3 de [14] mudando a hipótese de $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1_\sigma(\Sigma)$ para hipóteses envolvendo o crescimento de σ-volume de $|\nabla h|$.

Teorema 5.31. *Seja $\overline{M}^{n+1} = -I \times M^n_\sigma$ um espaço-tempo GRW estático não compacto com função peso $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ tal que $\langle \overline{\nabla}\sigma, \partial_t \rangle = 0$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to -I \times_\varrho M^n_\sigma$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa e orientada. Suponha que exista um número real positivo λ tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma(N^*, N^*) \geq \lambda |N^*|^2$, onde a segunda forma fundamental A é limitada, $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ é limitada, $N^* = N + \eta\partial_t$ e $\partial_t(H_\sigma) \leq 0$. Assim, temos duas situações:*

(a) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume polinomial, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times M^n$.

(b) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume exponencial e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times M^n$.

Demonstração. Fazendo $f = -1-\eta = \cosh\theta - 1 \geq 0$, então usando o Lema 5.30, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma f &= -\Delta_\sigma \eta = -n\langle \nabla H_\sigma, \partial_t \rangle - (|A|^2 + \tilde{\mathrm{Ric}}_\sigma(N^*, N^*))\eta \\ &= -n\partial_t(H_\sigma) - |A|^2\eta - \tilde{\mathrm{Ric}}_\sigma(N^*, N^*)\eta \\ &\geq \lambda\alpha |N^*|^2, \end{aligned} \tag{63}$$

onde $\alpha = \inf_\Sigma(-\eta)$. Além disso, usamos que $\partial_t(H_\sigma) \leq 0$ e $\eta \leq 0$. Como $N^* = N + \eta\partial_t$, temos:

$$\begin{aligned} |N^*|^2 &= \langle N + \eta\partial_t, N + \eta\partial_t \rangle = -1 + 2\eta\langle N, \partial_t \rangle - \eta^2 \\ &= -1 + 2\eta^2 - \eta^2 = \eta^2 - 1 = (-1-\eta)(1-\eta) \\ &\geq f, \end{aligned}$$

uma vez que $-\eta \geq 0$. Aplicando esse resultado em (63), temos:

$$\Delta_\sigma f \geq \lambda\alpha f. \tag{64}$$

Vale salientar que no Lema 3 de [14] é mostrado que $\nabla\eta = -A(\partial_t^\top)$. Assim, obtemos:

$$|\nabla f|^2 = |\nabla \eta|^2 \leq |A|^2 |\partial_t^\top|^2 = |A|^2 \langle \partial_t + \eta N, \partial_t + \eta N \rangle = |A|^2(\eta^2 - 1). \tag{65}$$

Dessa forma, usando o fato de $f \geq 0$, (64), (65) e que η é limitado, temos que $|\nabla f|$ é limitado no caso polinomial e $|\nabla f|$ tende a zero no infinito no caso exponencial. Com isso, usando o Corolário 4.11, temos que $f \equiv 0$ nos dois casos. Dessa maneira, usando que f é constante, temos que $\Delta_\sigma f \equiv 0$, assim, como cada parcela em (63) é não negativa, então cada parcela é nula, logo, $A \equiv 0$ e $|N^*|^2 = (1-\eta)f = 0$ o que prova que Σ^n é uma fatia do tipo $\{t\} \times M^n$.

□

Quando existe um número real λ tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma \geq \lambda > 0$, então pelo Corolário 4.1 de [34] sabemos que M^n tem crescimento de σ-volume polinomial. Aplicando esse fato no Teorema 5.31, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.32. *Seja $\varphi : \Sigma^n \to -I \times_\varrho M^n_\sigma$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada no produto warped com peso $-I \times_\varrho M^n_\sigma$. Se existe um número real λ tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma \geq \lambda > 0$, a segunda forma fundamental A é limitada, $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ é limitada e $\partial_t(H_\sigma) \leq 0$ em Σ. Se Σ^n tem crescimento de σ-volume polinomial, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times M^n$.*

Quando a Σ^n tem σ-curvatura média constante, então $\partial_t(H_\sigma) = 0$. Aplicando esse fato no Teorema 5.31, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.33. *Seja $\varphi : \Sigma^n \to -I \times_\varrho M^n_\sigma$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada no produto warped com peso $-I \times_\varrho M^n_\sigma$. Suponha que exista um número real positivo λ tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma(N^*, N^*) \geq \lambda |N^*|^2$, a segunda forma fundamental A é limitada, $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ é limitada e Σ^n tenha σ-curvatura média constante. Assim, temos duas situações:*

(a) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume polinomial, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times M^n$.

(b) Se Σ e M têm crescimento de σ-volume exponencial e $\partial_t^\top$ tende a zero no infinito, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times M^n$.

No caso em que o espaço ambiente é o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1} = -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_\sigma$ com peso $\sigma(p) = \frac{\alpha |\pi_{\mathbb{R}^n}(p)|}{2}$, sabemos que as fatias desse espaço terão crescimento de σ-volume polinomial se $\alpha \geq 0$ ou crescimento de σ-volume exponencial se $\alpha < 0$. Além disso, podemos perceber que $\langle \overline{\nabla} \sigma, \partial_t \rangle = 0$ e $\widetilde{\mathrm{Ric}}_\sigma = \alpha$.

Corolário 5.34. *Seja $\mathbb{L}^{n+1} = -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_\sigma$ o espaço de Lorentz-Minkowski com função peso $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{L}^{n+1})$ dada por $\sigma(p) = \frac{\alpha |\pi_{\mathbb{R}^n}(p)|}{2}$ com $\alpha > 0$. Considere $\varphi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_\sigma$ uma variedade tipo-espaço não compacta, completa, orientada no espaço-tempo GRW estático com peso $-\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_\sigma$. Suponha que a segunda forma fundamental A seja limitada, $\eta = \langle N, \partial_t \rangle$ seja limitada, $N^* = N + \eta \partial_t$ e $\partial_t(H_\sigma) \leq 0$ em Σ. Assim, se Σ tem crescimento de σ-volume polinomial, então Σ^n é totalmente geodésica e uma fatia $\{t\} \times \mathbb{R}^n$.*

5.3 Hipersuperfícies em variedades espaços-tempo pp-wave

Nessa seção, estudaremos o comportamento de hipersuperfícies em variedades espaços-tempo pp-wave usando, novamente, os princípios do máximo para variedades com volume estimado. Os teoremas obtidos nessa parte são inspirados nos resultados presentes nos artigos [23] e [30].

Ao longo dessa seção, consideraremos $\overline{M}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ uma variedade lorentziana de dimensão $n+1$ munida de um campo vetorial paralelo tipo-luz, ou seja, existe $\xi \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ tal que

$$\langle \xi, \xi \rangle = 0, \xi \neq 0 \text{ e } \overline{\nabla}\xi = 0,$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}^{n+1}$. Nesse caso, dizemos que $\overline{M}$ é uma variedade *espaço-tempo pp-wave*.

Além disso, considere $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, uma hipersuperfície tipo-espaço, isto é, Σ^n é uma variedade riemanniana de dimensão n e φ uma imersão isométrica. Podemos ainda decompor o campo vetorial paralelo tipo-luz $\xi \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ ao longo de $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ na parte tangente e parte normal, dado por $\xi = \xi^\top + \xi^\perp$. Uma vez que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço em $\overline{M}^{n+1}$, então $\xi^\perp$ é um campo tipo-tempo ao longo de Σ^n que nunca se anula nessa hipersuperfície, pois $\xi \neq 0$ e ξ é tipo-luz. Escolhendo N um campo tipo-tempo normal unitário globalmente definido em Σ^n na mesma direção de $\xi^\perp$, então, obtemos:

$$N = \frac{\xi^\perp}{\sqrt{-\langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\langle \xi^\top, \xi^\top \rangle}}\xi^\perp,$$

uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \xi, \xi \rangle = \langle \xi^\top + \xi^\perp, \xi^\top + \xi^\perp \rangle = \langle \xi^\top, \xi^\top \rangle + 2\langle \xi^\top, \xi^\perp \rangle + \langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle \\ &= \langle \xi^\top, \xi^\top \rangle + \langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, $\langle N, \xi \rangle < 0$.

Seja A o operador de Weingarten da imersão $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ com respeito ao campo normal N, ou seja, para cada $p \in \Sigma^n$, A é restrito ao operador linear autoadjunto:

$$\begin{aligned} A_p : T_p\Sigma &\to T_p\Sigma \\ v &\mapsto -\overline{\nabla}_v N. \end{aligned}$$

Uma vez que A_p é um operador linear autoadjunto, o Teorema Espectral nos permite escolher uma base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de $T_p\Sigma$ que são autovetores de A_p com auto valores $\kappa_1(p), \cdots, \kappa_n(p)$, respectivamente. Os próximos teoremas usarão resultados enolvendo as duas primeiras curvaturas médias de $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, dadas por

$$H = -\frac{1}{n}\sum_{n}^{i=1} \kappa_i = -\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)$$

e

$$H_2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j.$$

Uma importante relação entre o quadrado da norma do operador de Weingarten A e as curvaturas médias H e H_2 é dada por

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2,$$

onde $|A|^2 = \mathrm{tr}(A^2)$.

Seja $\eta : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ a função suave dada por $\eta = \langle N, \xi \rangle < 0$. Assim, $\xi = \xi^\top - \eta N$ e $|\xi^\top| : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ é dado por

$$|\xi^\top| = \sqrt{-\langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle} = \sqrt{-\langle \eta N, \eta N \rangle} = \sqrt{\eta^2} = |\eta| = -\eta.$$

As fórmulas da proposição a seguir são provadas em [30] e sistematizadas na Proposição 1 do artigo [23].

Proposição 5.35. *Com as notações anteriores, obtemos as seguintes fórmulas:*
(a) $\overline{\nabla}_X \xi^\top = X(\eta)N - \eta AX$, *para todos* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$*;*
(b) $\mathrm{div}(\xi^\top) = nH\eta$*;*
(c) $\nabla \eta = -A(\xi^\top)$, *onde* ∇, *nesse contexto, representa o gradiente em* Σ^n*;*
(d) $\Delta\eta = n\xi^\top(H) + \left\{\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right\}\eta$, *onde* $\overline{\mathrm{Ric}}$ *representa o tensor de Ricci em* $\overline{M}$.

Para os resultados principais dessa subseção, lembremos que a variedade lorentziana $\overline{M}^{n+1}$ obedece a **condição de convergência no espaço-tempo**, doravante chamada de TCC[4], se o tensor de Ricci satisfaz a condição:

$$\overline{\mathrm{Ric}}(Z, Z) \geq 0$$

para todo campo vetorial tipo-tempo $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

O próximo resultado foi inspirado no Teorema 1 de [23], contudo alteramos as hipóteses na função η, onde era pedido que $\eta \in \mathcal{L}^q(\Sigma)$ para algum $q \in (1, +\infty)$ e pedimos que η seja somente limitada. Em contrapartida, é necessário que a imersão $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ tenha o operador de Weingarten limitado, que Σ tenha crescimento de volume polinomial e uma condição sobre a função $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 : \Sigma \to \mathbb{R}$.

[4]Abreviação do termo em inglês *Timelike Convergence Condition.*

Teorema 5.36. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}$ *um espaço-tempo pp-wave com um campo vetorial paralelo tipo-luz* ξ *e satisfazendo a condição TCC, e* $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$*, uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta, com crescimento de volume polinomial e segunda forma fundamental limitada. Escolha um campo vetorial normal unitário* N *tipo-tempo ao longo de* Σ*. Suponha que a curvatura média* H *satisfaz a condição* $\xi^{\top}(H) \leq 0$ *em* Σ*, que a função suporte* $\eta = \langle N, \xi \rangle$ *seja limitada e que* $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 \notin (0, \varepsilon)$*, para algum* $\varepsilon > 0$*. Então,* Σ *é totalmente geodésica em* $\overline{M}^{n+1}$ *e a curvatura de Ricci de* $\overline{M}^{n+1}$ *na direção de* N *é identicamente nula.*

Demonstração. Como $\eta < 0$, então $\sup_\Sigma \eta \leq 0$. Fazendo $f = \sup_\Sigma \eta - \eta$, temos $f \geq 0$. Pelo item (d) da Proposição 5.35, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta(-\eta) = -n\xi^{\top}(H) + \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 \right\} (-\eta) \\ &\geq \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 \right\} (-\eta), \end{aligned} \tag{66}$$

usando o fato de $\xi^{\top}(H) \leq 0$. Como $\overline{M}$ satisfaz a TCC, então $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq 0$, logo, $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 \geq 0$. Como $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)(p) + |A_p|^2 \notin (0,\varepsilon)$ para todo $p \in \Sigma$ e algum $\varepsilon > 0$, então ou $(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2)(\Sigma) \subset \{0\}$ ou $(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2)(\Sigma) \subset [\varepsilon, +\infty)$, pois Σ é conexa. Se o primeiro caso ocorre, então $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \equiv |A|^2 \equiv 0$ e o teorema estaria provado. Suponhamos, por absurdo, que o segundo caso ocorre, então

$$(\varepsilon - \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) - |A|^2)\eta \geq 0 \geq \varepsilon \sup_\Sigma \eta.$$

Dessa forma, teríamos $(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2)(-\eta) \geq \varepsilon(\sup_\Sigma \eta - \eta) = \varepsilon f$. Aplicando esse resultado em (66), obteríamos:

$$\Delta f \geq (\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2)(-\eta) \geq \varepsilon f. \tag{67}$$

Pelo item (c) da Proposição 5.35, temos $|\nabla f| = |\nabla(-\eta)| \leq |A||\xi^{\top}|$ e, como $|\xi^{\top}|$ é limitado, então $|\nabla f|$ é limitada. Dessa maneira, como Σ tem crescimento de volume polinomial, $|\nabla f|$ é limitada e (67), então, pelo Teorema 3.4, temos $f \leq 0$, ou seja, $f \equiv 0$ e $\eta \equiv \sup_\Sigma \eta$ é constante, logo, por (67) e $\eta \neq 0$ em todo ponto de Σ, segue que $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \equiv |A|^2 \equiv 0$, assim, o segundo caso não poderia ocorrer, como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 5.37. *Apesar da condição do crescimento de volume polinomial de* Σ *restringuir a classe de hipersurfícies de* $\overline{M}$ *para as quais valem o teorema anterior, essa classe representa uma extensão em relação as hipersuperfícies nas hipóteses do Teorema 1 de [23], pois para que* $\eta \in \mathcal{L}^q(\Sigma)$*, para algum* $q \in [1, +\infty)$*, é necessário que* $\mathrm{vol}(\Sigma)$ *seja finito, uma vez que* η *será constante.*

Observação 5.38. *A condição de* $\xi^\top(H) \leq 0$ *nos mostra que o Teorema 5.36 vale para o caso onde* $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é uma hipersuperfície com curvatura média constante.*

Em particular, o Teorema 5.36 nos fornece um resultado de não existência.

Corolário 5.39. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *um espaço-tempo pp-wave munido com um campo vetorial tipo-luz paralelo* ξ *e satisfazendo a TCC. Então, não existe uma hipersuperfície* $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *completa, não compacta, tipo-espaço e com a curvatura média constante não nula satisfazendo a condição de* Σ *ter crescimento de volume polinomial,* A *ser limitado,* $\eta = \langle N, \xi\rangle$ *ser limitada e* $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)(p) + |A_p|^2 \notin (0, \varepsilon)$ *para todo* $p \in \Sigma$ *e algum* $\varepsilon > 0$.

Observe que o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, com coordenadas euclidianas $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ e métrica induzida por

$$-dx_1^2 + dx_2 + \cdots + dx_{n+1}^2,$$

é um espaço-tempo pp-wave, uma vez que basta tomar $\xi = \partial_1 + \partial_i$, onde $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, com $2 \leq i \leq n+1$, uma vez que ξ é tipo-luz e paralelo. Além disso, como o tensor de Ricci nesse espaço é identicamente nulo, esse espaço obedece a condição TCC. Como as hipersuperfícies totalmente geodésicas tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$ são os hiperplanos cujos campos normais são indizidos pelo vetor $(1, 0, \dots, 0)$ e têm crescimento de volume polinomial, usando o Teorema 5.36, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.40. *Sejam* $\mathbb{L}^{n+1}$ *o espaço de Lorentz-Minkowski com campo vetorial paralelo tipo-luz* $\xi = \partial_1 + \partial_i$, *para* $2 \leq i \leq n+1$ *e* $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta com crescimento de volume polinomial e com segunda forma fundamental limitada. Escolha um campo vetorial normal unitário* N *tipo-tempo ao longo de* Σ. *Suponha que a curvatura média* H *satisfaz a condição* $\xi^\top(H) \leq 0$ *em* Σ, *que a função suporte* $\eta = \langle N, \xi\rangle$ *seja limitada e que* $|A|^2 \notin (0, \varepsilon)$, *para algum* $\varepsilon > 0$. *Então,* Σ *é um hiperplano cujo vetor normal é* $(1, 0, \dots, 0)$.

Com a intenção de construir uma classe de exemplos de variedade lorentzianas pp-wave satisfazendo a condição TCC e com crescimento de volume polinomial, devemos lembrar do Teorema de Bishop presente em [10] e enunciado a seguir.

Teorema 5.41 (Bishop). *Seja* M *uma variedade riemanniana completa* n*-dimensional com curvatura de Ricci não negativa. Se* α_{n-1} *é a área da esfera unitária* $(n-1)$*-dimensional, então, o crescimento de volume de* M *deve satisfazer a desigualdade*

$$\mathrm{Vol}_M(B(p, \rho)) \leq \frac{\alpha_{n-1}}{n}\rho^n,$$

para todo $p \in M$ *e* $\rho \geq 0$.

Exemplo 5.42. *Sejam* I *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, P^n *uma variedade riemanniana n-dimensional conexa, completa, com tensor de Ricci não negativo (podendo, inclusive, ser compacta) munida de campo paralelo unitário*[5] χ *e* M^m *uma variedade riemanniana m-dimensional conexa, completa, não compacta com tensor de Ricci não negativo. Assim, pelo Teorema de Bishop (5.41), as variedades* P^n *e* M^m *têm crescimento de volume polinomial.*

Considere $\overline{M}^{n+m+1} = -I \times P^n \times M^m$ *uma variedade lorentziana GRW estática com métrica:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -dt^2 + g_P + g_M,$$

onde dt^2, g_P *e* g_M *são as métricas de* I, P *e* M, *respectivamente. Dessa forma, o campo* $\xi = \partial_t + \chi$ *é um campo vetorial tipo-luz e paralelo de* $\overline{M}^{n+m+1} = -I \times P^n \times M^m$. *Considere também* $\widetilde{M}^{n+m} = P^n \times M^m$ *a variedade riemanniana com métrica produto e* $\overline{\nabla}$ *e* $\widetilde{\nabla}$ *as conexões de Levi-Civita de* $\overline{M}$ *e* $\widetilde{M}$, *respectivamente. Dessa forma, conforme provamos na seção anterior, temos que para cada* $t_0 \in I$, *a variedade*

$$(\widetilde{M})_{t_0} = \{(t_0, p, q) \in -I \times P^n \times M^m; p \in P, q \in M\}$$

é uma hipersuperfície tipo-espaço, uma vez que $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ *é um campo tipo-tempo em* $\overline{M}$, *totalmente geodésica de* $-I \times P^n \times M^m$. *Além disso, como as variedades* P^n *e* M^m *têm tensor de Ricci não negativo, então o tensor de Ricci de* $\widetilde{M}^{n+m} = P^n \times M^m$ *também é não negativo. Assim, para todos* $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+m+1})$ *tangente à subvariedade* $\widetilde{M}^{n+m}$, *temos:*

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)X &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y X - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X X - \overline{\nabla}_{[X,Y]}X \\ &= \overline{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y X - \overline{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X X - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}X \\ &= \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y X - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X X - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}X \\ &= \widetilde{R}(X,Y)X,\end{aligned}$$

pois $\widetilde{M}^{n+m}$ *é uma subvariedade totalmente geodésica de* $\overline{M}^{n+1}$. *Ademais, uma vez que* ∂_t *é paralelo, obtemos* $\overline{R}(X,\partial_t)X \equiv 0$. *Dessa forma, denotando* $\overline{\mathrm{Ric}}$ *e* $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ *como o tensor de Ricci em* $\overline{M^{n+1}}$ *e* $\widetilde{M}^{n+m}$, *respectivamente, obtemos:*

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}}(X,X) &= \widetilde{\mathrm{Ric}}(X,X), \forall X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M}^{n+m}) \\ \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t,\partial_t) &= 0.\end{aligned} \tag{68}$$

[5]Essa variedade P^n pode ser, por exemplo, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{R}^n$. No caso de $\mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{T}^n$, podemos tomar o campo gerado pela função ângulo, que é paralelo, enquanto no caso do espaço euclidiano, podemos tormar um campo vetorial coordenado $\frac{\partial}{\partial x_i}$, para $1 \leq i \leq n$, que também é paralelo.

Com isso, por (68) temos que $\overline{M}^{n+m+1} = -I \times \widetilde{M}^{n+m}$ *satisfaz a condição TCC quando os tensores de Ricci de* P^n *e* M^m *são não negativos.*

Aplicando o Teorema 5.36 no exemplo dado anteriormente, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.43. *Sejam* I *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, P^n *uma variedade riemanniana n-dimensional conexa, completa, com tensor de Ricci não negativo, munida de um campo paralelo unitário* χ *e* M^m *uma variedade riemanniana m-dimensional conexa, completa, não compacta com tensor de Ricci não negativo. Considere o espaço-tempo pp-wave* $\overline{M}^{n+m+1} = -I \times P^n \times M^m$ *com o campo vetorial paralelo tipo-luz* $\xi = \partial_t + \chi$ *e* $\varphi : \Sigma^{n+m} \to \overline{M}^{n+m+1}$, *uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta com crescimento de volume polinomial e com segunda forma fundamental limitada. Escolha um campo vetorial normal unitário* N *tipo-tempo ao longo de* Σ. *Suponha que a curvatura média* H *satisfaz a condição* $\xi^\top(H) \leq 0$ *em* Σ, *que a função suporte* $\eta = \langle N, \xi\rangle$ *seja limitada e que* $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 \notin (0, \varepsilon)$, *para algum* $\varepsilon > 0$. *Então,* Σ *é totalmente geodésica em* $\overline{M}^{n+m+1}$ *e a curvatura de Ricci de* $\overline{M}^{n+m+1}$ *na direção de* N *é identicamente nula. Em particular, se existe* $p \in \Sigma$ *tal que* $\langle N, \partial_t\rangle_p = -1$, *então* Σ *é isométrica a* $\widetilde{M}^{n+m} = P^n \times M^m$.

Demonstração. Pelo exemplo 5.42, temos que $\overline{M}^{n+m+1} = -I \times P^n \times M^m$ é um espaço-tempo pp-wave que satisfaz a condição TCC. Dessa forma, pelo Teorema 5.36, temos que Σ é totalmente geodésica e a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ na direção de N é identicamente nula. Suponhamos, em particular, que existe $p \in \Sigma$ tal que $\langle N, \partial_t\rangle_p = -1$. Com isso, dado um $q \in \Sigma$ arbitrário, então para todo $X_q \in T_q\Sigma$ temos

$$X_q\langle \partial_t, N\rangle_q = \langle \nabla_{X_q}\partial_t, N\rangle_q + \langle \partial_t, \nabla_{X_q} N\rangle_q = -\langle \partial_t, A_q X_q\rangle_q = 0,$$

uma vez que Σ é totalmente geodésica em $\overline{M}^{n+m+1}$. Dessa forma, $\langle \partial_t, N\rangle$ é constante e $\langle \partial_t, N\rangle \equiv -1$, já que $\langle N, \partial_t\rangle_p = -1$. Portanto, $N = \partial_t$, logo, existe $t_o \in I$ tal que $\Sigma^{n+m} = (\widetilde{M})_{t_0}$. □

Para obter a mesma conclusão do Teorema 5.36 sem a hipótese que $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 \notin (0, \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$, pedimos hipóteses sobre o operador de Weingarten e a curvatura média, conforme o resultado a seguir.

Teorema 5.44. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}$ *um espaço-tempo pp-wave com um campo vetorial paralelo tipo-luz* ξ *e satisfazendo a condição TCC, e* $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta e com crescimento de volume polinomial. Escolha um campo vetorial normal unitário* N *tipo-tempo ao longo de* Σ. *Suponha que o operador de Weingarten* A *de* φ *seja não positivo (respectivamente, não negativo) e que a curvatura* *média H satisfaz $\xi^\top(H) \leq 0$ em Σ. Se, em Σ, as funções H, $|\nabla H|$ e $\eta = \langle N, \xi\rangle$ forem limitadas, então, $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é totalmente geodésica, η é constante e a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ é identicamente nula na direção de N.*

Demonstração. Suponha que o operador de Weingarten seja não positivo, ou seja, a desigualdade $\langle AX, X\rangle \leq 0$ é válida para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Dessa forma, $H = -n^{-1}\mathrm{tr}(A) \geq 0$. Fazendo $f = H\eta^2$, temos, pela Proposição 5.35, que

$$|\nabla f| = |\nabla(H\eta^2)| = \eta^2|\nabla H| - 2\eta H|\nabla\eta| \leq \eta^2|\nabla H| + 2\eta^2 H|A|,$$

onde usamos que $|\xi^\top| = -\eta$. Como $|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2 \geq 0$, então $n^2H^2 \geq n(n-1)H_2 \geq 0$, pois os autovalores de A são não negativos, logo, $H_2 = \sum_{i<j}\kappa_i\kappa_j \geq 0$. Com isso, $|\nabla f|$ é limitado, uma vez que $\eta, H, |\nabla H|$ e $|A|$ o são. Além disso, tomando $X = \eta\xi^\top$, obtemos:

$$\langle\nabla f, X\rangle = \langle\eta^2\nabla H - 2H\eta A\xi^\top, \eta\xi^\top\rangle = \eta^3\xi^\top(H) - 2H\eta^2\langle A\xi^\top, \xi^\top\rangle \geq 0 \tag{69}$$

e

$$\mathrm{div}(\eta\xi^\top) = \langle\nabla\eta, \xi^\top\rangle + \eta\,\mathrm{div}(\xi^\top) = -\langle A(\xi^\top), \xi^\top\rangle + nH\eta^2 \geq nf. \tag{70}$$

Dessa maneira, como Σ tem crescimento de volume polinomial, $|\nabla f|$ é limitada e por (69) e (70), então, pelo Teorema 3.4, temos $f \leq 0$, ou seja, $f \equiv 0$ e $H\eta^2 \equiv 0$. Como $\eta^2 > 0$, então $H \equiv 0$ e $|A| \equiv 0$, pois $|A|^2 = -n(n-1)H_2 \geq 0$, e como $H_2 \geq 0$, segue que $H_2 \equiv 0$. Com isso, $\nabla\eta = -A(\xi^\top) = 0$, logo, η é constante e $0 \equiv \Delta\eta = \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\eta$, logo, como $\eta \neq 0$, segue que $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \equiv 0$, como queríamos mostrar. Por fim, caso o operador de Weingarten seja não negativo, então H é não positivo e basta repetir a demonstração anterior tomando $f = -H\eta^2$ e $X = -\eta\xi^\top$.

$\square$

Em particular, o Teorema 5.44 também nos fornece um resultado de não existência.

Corolário 5.45. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave munido com um campo vetorial tipo-luz paralelo ξ e satisfazendo a TCC. Então, não existe uma hipersuperfície $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ completa, conexa, não compacta, tipo-espaço e com a curvatura média contante não nula satisfazendo a condição de Σ ter crescimento de volume polinomial, A ser não positivo (respectivamente, não negativo) e as funções H, $|\nabla H|$ e $\eta = \langle N, \xi\rangle$ serem limitados.*

Aplicando o Teorema 5.44 no caso em que o ambiente é o espaço de Lorentz-Minkowski ou um espaço-tempo GRW estático com as condições mostradas no Exemplo 5.42, obtemos os seguintes corolários.

Corolário 5.46. *Sejam $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço de Lorentz-Minkowski com campo vetorial paralelo tipo-luz $\xi = \partial_1 + \partial_i$, para $2 \leq i \leq n+1$ e $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta e com crescimento de volume polinomial. Escolha um campo vetorial normal unitário N tipo-tempo ao longo de Σ. Suponha que o operador de Weingarten seja não positivo (respectivamente, não negativo) e que a curvatura média H satisfaz a condição $\xi^\top(H) \leq 0$ em Σ. Se, em Σ, as funções H, $|\nabla H|$ e $\eta = \langle N, \xi \rangle$ forem limitadas, então, Σ é um hiperplano cujo vetor normal é $(1, 0, \dots, 0)$.*

Corolário 5.47. *Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, P^n uma variedade riemanniana n-dimensional conexa, completa, com tensor de Ricci não negativo, munida de campo paralelo unitário χ e M^m uma variedade riemanniana m-dimensional conexa, completa, não compacta com tensor de Ricci não negativo. Considere o espaço-tempo pp-wave $\overline{M}^{n+m+1} = -I \times P^n \times M^m$ com campo vetorial paralelo tipo-luz $\xi = \partial_t + \chi$ e $\varphi : \Sigma^{n+m} \to \overline{M}^{n+m+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta com crescimento de volume polinomial. Escolha um campo vetorial normal unitário N tipo-tempo ao longo de Σ. Suponha que o operador de Weingarten seja não positivo (respectivamente, não negativo) e que a curvatura média H satisfaz a condição $\xi^\top(H) \leq 0$ em Σ. Se, em Σ, as funções H, $|\nabla H|$ e $\eta = \langle N, \xi \rangle$ forem limitadas, então, Σ é totalmente geodésica em $\overline{M}^{n+m+1}$ e a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+m+1}$ na direção de N é identicamente nula. Em particular, se existe $p \in \Sigma$ tal que $\langle N, \partial_t \rangle_p = -1$, então Σ é isométrica a $\widetilde{M}^{n+m} = P^n \times M^m$.*

O próximo resultado foi inspirado no Teorema 4 de [30]. Contudo, naquele trabalho, Σ tinha dimensão 2, enquanto aqui Σ tem dimensão n qualquer. Além disso, precisamos pedir mais algumas hipóteses para conseguir essa generalização, conforme é mostrado a seguir.

Teorema 5.48. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp wave com um campo vetorial paralelo tipo-luz ξ e satisfazendo a condição TCC, e $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ seja uma hipersuperfície conexa, completa, não compacta, tipo-espaço e com crescimento de volume polinomial. Escolha um campo vetorial normal unitário N ao longo de Σ e suponha que φ tenha curvatura média H satisfazendo $\xi^\top(H) \leq 0$ em Σ e o operador de Weingarten seja limitado em relação a N. Assuma, ainda, que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) $\eta = \langle N, \xi \rangle$ *é tal que* $-\infty < \inf_\Sigma \eta \leq \eta \leq \sup_\Sigma \eta < 0$.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ *tal que* $C \cdot \overline{\mathrm{Ric}}(N, N) \geq \left(\frac{\eta}{\sup_\Sigma \eta} - 1 \right)$.

(iii) $2|A\xi^\top|^2 \leq |A|^2 |\xi^\top|^2$.

Então, φ é totalmente geodésica e a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ na direção de N é identicamente nula.

Demonstração. Tomando $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por

$$f = \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\sup_\Sigma \eta}.$$

Assim, $f \geq 0$ e, pela Proposição 5.35, temos:

$$\nabla f = \nabla \left(\frac{1}{\eta} \right) = -\frac{1}{\eta^2} \nabla \eta = \frac{1}{\eta^2} A\xi^\top.$$

Dessa forma, $|\nabla f| \leq -\eta^{-1}|A|$ é limitado, pois η e A são limitados. Além disso, usando novamente a Proposição 5.35, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta \left(\frac{1}{\eta} \right) = \operatorname{div} \left(\nabla \left(\frac{1}{\eta} \right) \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\eta^2} \nabla \eta \right) = -\frac{1}{\eta^2} \Delta \eta + \frac{2}{\eta^3} |\nabla \eta|^2 \\ &= -\frac{n\xi^\top(H)}{\eta^2} - \frac{1}{\eta}(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2) + \frac{2}{\eta^3}|A\xi^\top|^2 \\ &\geq -\frac{1}{\eta}(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2) + \frac{2}{\eta^3}|A\xi^\top|^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, graças a condição (iii), temos que $2\eta^{-3}|A\xi^\top|^2 \geq \eta^{-3}|A|^2|\xi^\top|^2 = \eta^{-1}|A|^2$, o que nos conduz a desigualdade

$$\Delta f \geq -\frac{1}{\eta}(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2) + \frac{1}{\eta}|A|^2 = -\frac{1}{\eta}\overline{\mathrm{Ric}}(N,N).$$

Ademais, pela condição (ii), obtemos

$$C \cdot \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq \left(\frac{-\eta}{-\sup_\Sigma \eta} - 1 \right),$$

o que nos garante

$$-\frac{1}{\eta} \cdot \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\sup_\Sigma \eta} \right) = \frac{1}{C} f.$$

Combinando esse resultado com a desigualdade anterior, temos

$$\Delta f \geq \frac{1}{C} f$$

Uma vez que Σ tem crescimento de volume polinomial e $|\nabla f|$ é limitada, então, pelo Corolário 3.7, temos $f \leq 0$, ou seja, $f \equiv 0$ e η é constante. Como $\eta < 0$, então

$0 \equiv \Delta(-\eta) = -\xi^\top(H) + \{\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\}\eta$, logo, como $\eta \neq 0$, segue que

$$\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \equiv |A|^2 \equiv 0.$$

$\square$

Observação 5.49. *A condição (ii) do enunciado, de certa forma, nos exige que a variação da função η esteja vinculada a variação de $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)$. Além disso, a condição (iii) usada na hipótese do último Teorema é naturalmente satisfeita quando a dimensão de Σ é 2 e $H \equiv 0$, conforme foi mostrado no Teorema 4 de [30]. Com isso, a intenção foi de generalizar esse teorema assumindo o mínimo de hipótese possível.*

Do Teorema 5.48 também obtemos um resultado de não existência, conforme mostrado a seguir.

Corolário 5.50. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave munido com um campo vetorial tipo-luz paralelo ξ e satisfazendo a TCC. Então, não existe uma hipersuperfície $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ completa, conexa, não compacta, tipo-espaço e com a curvatura média contante não nula tal que Σ tenha crescimento de volume polinomial, A seja limitado e satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\eta = \langle N, \xi \rangle$ *é tal que* $-\infty < \inf_\Sigma \eta \leq \eta \leq \sup_\Sigma \eta < 0$.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ *tal que* $C \cdot \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq \left(\frac{\eta}{\sup_\Sigma \eta} - 1\right)$.

(iii) $2|A\xi^\top|^2 \leq |A|^2|\xi^\top|^2$.

Por fim, aplicando o Teorema 5.48 no caso em que o ambiente é um espaço-tempo GRW estático com as condições mostradas no Exemplo 5.42, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.51. *Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, P^n uma variedade riemanniana n-dimensional conexa, completa, com tensor de Ricci não negativo, munida de um campo paralelo unitário χ e M^m uma variedade riemanniana m-dimensional conexa, completa, não compacta e com tensor de Ricci não negativo. Considere o espaço-tempo pp-wave $\overline{M}^{n+m+1} = -I \times P^n \times M^m$ com campo vetorial paralelo tipo-luz $\xi = \partial_t + \chi$ e $\varphi : \Sigma^{n+m} \to \overline{M}^{n+m+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, completa, não compacta com crescimento de volume polinomial. Escolha um campo vetorial normal unitário N ao longo de Σ. Suponha que φ tenha curvatura média H satisfazendo $\xi^\top(H) \leq 0$ em Σ e que o operador de Weingarten seja limitado em relação a N. Assuma, ainda, que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) $\eta = \langle N, \xi \rangle$ *é tal que* $-\infty < \inf_\Sigma \eta \leq \eta \leq \sup_\Sigma \eta < 0$.

(ii) Existe uma constante $C > 0$ *tal que* $C \cdot \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq \left(\frac{\eta}{\sup_\Sigma \eta} - 1\right)$.

(iii) $2|A\xi^{\top}|^2 \leq |A|^2|\xi^{\top}|^2$.

Então, Σ *é totalmente geodésica em* $\overline{M}^{n+m+1}$ *e a curvatura de Ricci de* $\overline{M}^{n+m+1}$ *na direção de* N *é identicamente nula. Em particular, se existe* $p \in \Sigma$ *tal que* $\langle N, \partial_t \rangle_p = -1$*, então* Σ *é isométrica a* $\widetilde{M}^{n+m} = P^n \times M^m$*.*

6 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, foi possível notar a importância do princípio do máximo envolvendo o crescimento de volume prescrito para entender a geometria das hipersuperfícies não compactas e completas em um ambiente riemanniano munido de um campo conforme fechado.

No Capítulo 3, provamos princípios do máximo para funções suaves f em variedades riemannianas M completas e não compactas com crescimento de volume polinomial ou exponencial, tal que existe um campo vetorial X que tem seu comprimento limitado por um múltiplo da função distância elevada a k, para $k \in [0,1]$, com $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ em M e div $X \geq af$ fora um subconjunto fechado de M, para alguma função positiva $a \in \mathcal{C}^1(M)$ com a condição de que $\langle \nabla a, X \rangle \geq 0$. Quando $k \in [0,1)$ no caso polinomial e quando o comprimento de X tender a zero no infinito no caso exponencial, obtemos $f \leq 0$ como conclusão. Esse fato nos fez obter diversas aplicações do tipo-Bernstein para hipersuperfícies orientadas imersas em uma variedade riemanniana munida de um campo conforme fechado.

No Capítulo 4, estudamos as implicações que o princípio do máximo explicado anteriormente poderia ter ao estendê-lo para variedades com peso. Em geral, observamos que as conclusões obtidas são semelhantes àquelas com o elemento de volume padrão. Contudo, alguns resultados sobre rigidez no caso de volume usual exponencial podem ser reobtidos retirando a condição do comprimento de X tender a zero no infinito e acrescentando estimativas envolvendo uma função peso específica. Além disso, o estudo de variedades riemannianas com peso é o ambiente ideal para entender a geometria de hipersuperfícies em sólitons de Ricci gradiente.

O último capítulo foi dedicado a estudar aplicações do princípio do máximo em hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempo munidos de campo conforme fechado. Nas duas primeiras seções, tais campos conformes fechados eram tipo-tempo, com isso, os resultados de rigidez mostraram que as hipersuperfícies, sob certas condições, eram folhas do campo conforme em questão. Tal fato não pôde ser obtido na última seção, pois o campo paralelo (que é um campo conforme fechado de fator conforme identicamente nulo) considerado era do tipo-luz, logo, não poderia ser um campo normal a uma hipersuperfície tipo-espaço. Apesar disso, conseguimos resultados a respeito da segunda forma fundamental da hipersuperfície.

Para finalizar, observamos que os objetivos principais desse trabalho eram obter extensões do princípio do máximo para variedades não compactas com crescimento de volume prescrito, bem como aplicações para tais princípios. Podemos concluir que nosso objetivo foi cumprido, mas sem a pretensão de afirmar que todos os resultados possíveis foram explorados. Este trabalho mostrou técnicas para obtenção de resultados de rigidez envolvendo apenas campos conformes fechados em ambientes específicos. Acreditamos que tais princípios possam ser aplicados em outros ambientes e para outros tipos de folheações.

REFERÊNCIAS

[1] ABE, Naoto; KOIKE, Naoyuki; YAMAGUCHI, Seiichi. Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form. **Yokohama Mathematical Journal**, v. 35, p. 123-136, 1987.

[2] ALÍAS, Luis José; BRASIL, Aldir; COLARES, Antonio Gervásio. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. **Proc. Edinb. Math. Soc.**, v. 46, n. 2, p. 465–488, 2003.

[3] ALÍAS, Luis José; CAMINHA, Antonio; NASCIMENTO, Francisco Yure do. A maximum principle at infinity with applications to geometric vector fields. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 474, p. 242–247, 2019.

[4] ALÍAS, Luis José; CAMINHA, Antonio; NASCIMENTO, Francisco Yure do. A maximum principle for vector Fields related to volume growth and applications. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, v. 200, p. 1637–1650, 2021.

[5] ALÍAS, Luis José; CAMINHA, Antonio; NASCIMENTO, Francisco Yure do. Spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes. *In*: GALLEGO, Francisco Ortegón; GARCÍA, Juan Ignacio García (ed.). **Recent Advances in Pure and Applied Mathematics.** Cham [Switzerland]: Springer, 2018. (RSME Springer Series, v. 4). p. 161-174.

[6] ALÍAS, Luis J.; MASTROLIA, Paolo; ROGOLI, Marco. **Maximum Principles and Geometric Applications**. Cham [Switzerland]: Springer, 2016.

[7] ALÍAS, Luis José; ROMERO, Alfonso; SÁNCHEZ, Miguel. Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson–Walker spacetimes. **Gen. Relat. Grav.**, v. 27, p. 71–84, 1995.

[8] ARONSZAJN, Nachman. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. **J. Math. Pures Appl.**, v. 36, p. 235–249, 1957.

[9] BAYLE, Vincent. **Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications**. 2003. 262 f. Tese (Doutorado) - Universitié Joseph-Fourier, Grenoble I, 2003.

[10] BISHOP, Richard L.; CRITTENDEN, Richard J. **Geometry of Manifolds**. New York: Academic Press, 1964.

[11] BRINKMANN, H. W. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. **Math. Ann.**, v. 18, p. 119–145, 1925.

[12] CAMINHA, Antonio. The geometry of closed conformal vector fields on riemannian spaces. **Bull Braz Math Soc**, New Series, v. 42, n. 2, p. 277–300, 2011.

[13] CASE, Jeffrey S. Singularity theorems and the Lorentzian Splitting theorem for the Bakry–Emery Ricci tensor. **J. Geom. Phys.**, v. 60, p. 477–490, 2010.

[14] CAVALCANTE, Marcos Petrúcio de A.; LIMA, Henrique F. de; SANTOS, Márcio Silva. New Calabi-Bernstein's type results in weighted generalized Roberson-Walker spacetimes. **Acta Mathematica Hungarica**, v. 145, p. 440–454, 2015.

[15] CHENG, Shiu-Yuen; YAU, Shing-Tung. Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space. **Annals of Mathematics**, v. 104, p. 407–419, 1976.

[16] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI, William P. Generic mean curvature flow I; generic singularities. **Annals of Mathematics**, v. 175, n. 2, p. 755–833, 2012.

[17] DO CARMO, Manfredo P.; LAWSON, H. Blaine, On the Alexandrov-Bernstein Theorems in Hyperbolic Space. **Duke Math Journal**, v. 50, n. 4, p. 995-1003, 1983.

[18] ELLIS, George Francis R.; HAWKING, Stephen W. **The Large Scale Structure of Spacetime**. Cambridge: Univ. Press, 1973.

[19] FISCHER-COLBRIE, Doris; SCHOEN, Richard. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 33, p. 199–211, 1980.

[20] GROMOV, Mikhail. Isoperimetry of waists and concentration of maps. **Geom. Funct. Anal.**, v. 13, n. 1, p. 178–215, 2003.

[21] HERLT, Eduard; HOENSELAERSAND, Cornelius; KRAMER, Dietrich; MACCALLUM, Malcolm; STEPHANI, Hans. **Exact Solutions of Einstein's Field Equations**. Cambridge: University Press, 2003.

[22] LIMA, Barnabé Pessoa. **O Princípio de Omori-Yau para os operadores Lr e aplicações**. 2000. 34 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2000.

[23] LIMA, Henrique F. de; VELÁSQUEZ, Marco A. L. Complete spacelike hypersurfaces immersed in pp-wave spacetimes. **General Relativity and Gravitation**, v. 52, n. 41, 2020.

[24] MONTIEL, Sebastián. An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 37, p. 909–917, 1988.

[25] MORGAN, Frank. Manifolds with Density. **Notices of the Amer. Math. Soc.**, v. 52, n. 8, p. 853–858, 2005.

[26] MYERS, S. B. Riemannian manifolds with positive mean curvature. **Duke Math.**

J., v. 8, n. 2, p. 401–404, 1941.

[27] NASCIMENTO, Francisco Yure do; XAVIER, Valricélio Menezes. **Yet another form of Maximum Principle**. Em fase de elaboração.

[28] O'NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity**. London: Academic Press, 1983.

[29] OMORI, Hideki. Isometric immersions of Riemannian manifolds. **J. Math. Soc. Japan**, v. 19, p. 205–214, 1967.

[30] PELEGRÍN, José A. S.; ROMERO, Alfonso; RUBIO, Rafael M. On maximal hypersurfaces in Lorentz manifolds admitting a parallel lightlike vector field. **Classical and Quantum Gravity**, v. 33, 2016.

[31] PIGOLA, Stefano; RIGOLI, Marco; SETTI, Alberto Giulio. **Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications**. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 2005. (Memoirs of the American Mathematical Society, v. 822).

[32] PIGOLA, Stefano; RIMOLDI, Michele; SETTI, SETTI. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. **Mathematische Zeitschrift**, v. 268, p. 777-790, 2011.

[33] ROS, Antonio; URBANO, Francisco. Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}^n$ with conformal Maslov form and the Whitney sphere. **J. Math. Soc. Japan**, v. 50, n. 1, p. 203-224, 1998.

[34] WEI, Guofang; WYLIE, Will. Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor. **Journal of Differential Geometry**, v. 83, n. 2, p. 337-405, 2009.

[35] YAU, Shing-Tung. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 28, p. 201–228, 1975.