UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS DAVYSON XAVIER TARGINO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES E O MÉTODO DO SALTO DE VIÈTE

FORTALEZA
2018

CARLOS DAVYSON XAVIER TARGINO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES E O MÉTODO DO SALTO DE VIÈTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática. Área da concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B531g Targino, Carlos Davyson Xavier.
Equações Diofantinas não Lineares e o Método do Salto de Viète / Carlos Davyson Xavier Targino.
37 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. José Alberto Duarte Maia.

1. Equações diofantinas não lineares. 2. Equações de Markov. 3. Método de Viète. I. Título

CDD 510

CARLOS DAVYSON XAVIER TARGINO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES E O MÉTODO DO SALTO DE VIÈTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática. Área da concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado em: 31/10/18

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS por todas as bênçãos, e não foram poucas, a mim concedidas.

A minha avó Alice (*in memorian*), a maior entusiasta e incentivadora de meus estudos e participações nas olimpíadas de Matemática em época de ensino básico.

A minha esposa Nadja, que com sua inteligência e sabedoria sempre foi uma força a me apoiar e encorajar nos momentos de desânimo dos estudos da graduação e do mestrado, sem ela esse trabalho não existiria.

Ao meu filho Carlos Victor, por entender a distância que o trabalho e os estudos nos impuseram nesses anos. Aos meus pais, Adjane e Targino, e a minha irmã Bárbara, suportes importantes nessa caminhada que souberam compreender o pouco tempo dedicado a eles.

Aos colegas do curso, que a cada dia de aula, a cada semana de avaliação, demonstravam humildade e paciência para apoiar, auxiliar, aconselhar e compartilhar conhecimentos nos estudos em grupo. As aulas, os estudos compartilhados, os almoços e cafés serviram para nos tornar um grupo forte e unido. Orgulho de tê-los como amigos.

A todos os meus professores de Matemática do ensino básico que contribuíram para minha formação, fomentando o interesse e a paixão pela Matemática. Em especial ao meu orientador, professor Alberto, amigo com o qual tive o prazer de ingressar na Universidade Federal do Ceará compartilhando os primeiros semestres do curso de Matemática, que muito contribuiu com suas ideias e orientações em cada trecho desse trabalho.

RESUMO

O trabalho apresenta o método do salto de Viète como ferramenta para o estudo de algumas equações diofantinas não lineares. O relato da história que envolveu o problema 6 da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) 1988 e sua solução mostra como o método do salto de Viète tornou-se tema recorrente na preparação de equipes e alunos que participam de competições matemáticas internacionais. Já a Equação de Markov surge, nesse trabalho, como representante de problemas clássicos da matemática cuja solução se dá por meio do método. A pesquisa ainda apresenta a aplicação do salto de Viète como opção eficiente na discussão de uma outra equação diofantina quadrática, foco de alguns artigos recentes que se utilizam de meios mais complexos.

Palavras-chave: equações diofantinas; equação de Markov; método de Viète.

ABSTRACT

This work presents the Viète's jump method as a tool for the study of some nonlinear Diophantine equations. The report of the history that involved Problem 6 of the International Mathematical Olympiad (IMO) 1988 and its solution shows how the Viète jumping method became a recurring theme in the preparation of teams and students participating in international mathematical competitions. The Markov equation, in this work, appears as a representative of classical problems of mathematics whose solution is given through method. The dissertation also presents the application of the Viète jump as an efficient option in the discussion of another Diophantine quadratic equation, the focus of some recent articles which use more complex means.

Keywords: diophantine equations; Vieta jumping; Markov, IMO.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O trabalho é resultado da junção de três temas da Matemática que surgiram em momentos distintos de meus estudos: as equações diofantinas, com as quais tive os primeiros contatos ainda no ensino médio nas aulas de Olimpíadas de Matemática e aprofundadas no decorrer do ensino superior; a descida infinita de Fermat, muito utilizada na solução de problemas de Olimpíadas de Matemática e também estudada na disciplina de Resolução de Problemas no PROFMAT; e o Salto de Viète, apresentada por meu orientador nos encontros nos quais debatíamos sobre o tema deste trabalho.

As equações diofantinas recebem esse nome em homenagem a Diofanto de Alexandria, matemático grego, cuja história pouco se sabe. É reconhecido pelo livro Arithmethica, trabalho dedicado à solução de equações algébricas e teoria dos números, composto por 13 volumes dos quais se conhece apenas o VI. O pouco que se conhece sobre a vida de Diofanto vem de uma coleção de enigmas escritos por Metrodorus cuja veracidade não é comprovada. Um dos mais conhecidos desses enigmas diz: "Sua infância durou 1/6 de sua vida; sua barba cresceu depois de 1/12 a mais. Ele se casou depois de mais 1/7; e seu filho nasceu cinco anos depois; o filho morreu com a metade da idade do pai e o pai morreu quatro anos depois do filho".

Essas equações são descritas como $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, onde $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ é um polinômio n variáveis, com coeficientes inteiros, e pretendemos estudar soluções inteiras.

Equações diofantinas foram motivo de estudos de grandes matemáticos ao longo dos séculos, entre eles, chineses e árabes e, mais recentemente, nos séculos XVII, XVIII e XIX, aprofundados por matemáticos como Fermat, Euler e Gauss. Fermat que, por sinal, propôs, talvez, o mais desafiador problema da Matemática da história, o Santo Graal do mundo matemático, conhecido como o Último Teorema de Fermat, que se trata de uma equação diofantina. Fermat propõe que não existem soluções inteiras para a equação, para a qual grandes matemáticos dedicaram tempo e, por que não dizer, suas vidas à resolução do problema que só foi plenamente desvendado no ano de 1994, pelo professor da Universidade de Princeton, Andrew Wiles, 358 anos depois de proposto.

Andrew Wiles foi o matemático que solucionou plenamente o problema, mas, como dito, antes dele grandes matemáticos investiram tempo conseguindo alguns progressos; o caso, por exemplo, foi solucionado por Euler e, em particular, o caso cuja solução é atribuída ao próprio Fermat nos chama atenção pelo método utilizado. A demonstração baseia-se em um modelo de indução conhecida como “Descenso de Fermat” no qual utiliza-se a demonstração por absurdo. A ideia do “Descenso de Fermat” é simples e genial, a partir de uma suposta solução inteira positiva mostramos que existe uma solução inteira positiva menor que a inicialmente observada; o processo pode ser repetido e a cada passo é descoberta uma nova solução inteira positiva menor que a imediatamente anterior. Ora, mas em algum momento, após um número finito de passos, esse processo será contraditório, afinal, pelo Princípio da Boa Ordenação, todo subconjunto não vazio de números naturais possui necessariamente um elemento mínimo. Desse modo, o Descenso de Fermat nos coloca diante de uma contradição que resulta da hipótese do problema possuir uma suposta solução e assim, por absurdo, o problema não possuirá solução.

Uma ramificação do Descenso de Fermat é uma via conhecida como Salto de Viète, muito utilizado na resolução de problemas de divisibilidade entre inteiros e também em determinadas equações diofantinas. O método do Salto de Viète também busca chegar a um absurdo, ou seja, a um resultado que entre em contradição com uma hipótese inicialmente proposta. Essa hipótese baseia-se na escolha de uma suposta solução mínima sob algum tipo de caracterização para uma equação diofantina representada na forma de um polinômio e, após o estudo das raízes, demonstrar a existência de uma solução menor que a inicialmente proposta sob a mesma característica.

O capítulo 2 do presente trabalho ressaltará a importância de um problema da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) que tornou mais conhecido o método do Salto de Viète. O problema 6 da IMO de 1988, realizada na cidade de Camberra, Austrália, foi considerado um dos mais difíceis, até então, de todas as edições da competição. O matemático Arthur Engel, em seu livro Problem-Solving (1997) afirma que:

> Nenhum dos seis membros da comissão australiana de problemas conseguiu resolvê-lo. Dois dos integrantes, Georges Szekeres e sua esposa, ambos famosos resolvedores e criadores de problemas. Como se tratava de um problema de Teoria dos Números, foi enviado para os quatro mais renomados matemáticos australianos no campo. Nenhum deles conseguiu resolver em seis horas de trabalho. O problema foi submetido ao julgamento do júri da XXIX IMO, sendo marcado com asterisco duplo, o que significava um problema difícil demais, inclusive de inserir na prova. Após uma longa discussão, o júri finalmente teve a coragem de escolhê-lo como último problema da competição. Onze estudantes deram soluções perfeitas.

Neste capítulo, além de apresentar o problema e resolvê-lo, apresentaremos um pouco da história das olimpíadas de Matemática com foco na IMO, as participações brasileiras e cearenses na competição e como ocorre o processo de elaboração da prova.

No capítulo 3, apresentaremos a denominada equação de Markov $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Apesar de seu conhecimento se dar principalmente por seus avanços na teoria dos processos estocásticos, Markov tem nos seus trabalhos importantes contribuições para outras áreas da Matemática como em teoria dos números, no estudo de frações contínuas, no estudo de formas quadráticas e equações diofantinas. Na solução da equação que recebe seu nome, Markov utiliza, com brilhantismo, conceitos matemáticos básicos, tendo como principal o Salto de Viète aplicado. Esse é mais um problema clássico quando se apresenta o método do Salto de Viète.

Concluímos o trabalho, no capítulo 4, tendo como propósito o estudo da equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x =$ com $k \in \mathbb{N}$. Tomando como ideia central estudar para quais valores de k a referida equação possui infinitas soluções. Alguns autores já investigaram essa equação e chegaram a algumas conclusões sobre o problema. Para isso, utilizaram teoria das equações de Pell, desenvolvimentos de um número irracional em frações contínuas e resultado sobre anéis inteiros quadráticos. Aqui trataremos o problema por meio do Método do Salto de Viète.

2 O MÉTODO DO SALTO DE VIÈTE

Em linhas gerais, o método consiste em produzir novas soluções para uma dada equação diofantina a partir de uma solução inicialmente conhecida. De fato, trata-se de um método de descida que, como veremos, pode ser aplicado em vários casos interessantes.

Para entender o mecanismo pelo qual se produzem essas novas soluções, consideremos uma equação diofantina $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, onde o primeiro membro dessa igualdade é um polinômio com coeficientes inteiros, não linear, em n variáveis. Nesses termos, se uma n–upla de números inteiros $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ for solução dessa equação, então segue que a_1 é raiz da equação polinomial (que chamaremos de equação auxiliar) $F(x_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Daí, se essa última equação possuir alguma outra raiz inteira, digamos a'_1, então a n–upla $(a'_1, a_2, \ldots, a_n)$ também é solução da equação diofantina original.

Note que, por esse raciocínio, teremos tantas novas soluções quantas forem as raízes inteiras de $F(x_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, distintas de a_1. Além disso, podemos aplicar essas considerações com respeito a qualquer das coordenadas de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, obtendo eventualmente diversas novas soluções, cada uma das quais é dita uma solução adjacente à solução $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

É claro que o método encontra a dificuldade da existência de uma segunda raiz inteira para a equação auxiliar e, por isso, só funciona bem em casos bem específicos, por exemplo, quando alguma das equações auxiliares é uma equação quadrática.

Com vistas nos argumentos de descida, é importante estabelecer uma ordem no conjunto solução da equação. (Nos casos aqui discutidos), diremos que uma solução é menor do que outra se sua maior coordenada for menor que a maior coordenada da outra solução. Nesse caso, também diremos que a segunda solução é maior que a primeira. Com essa ordem, diremos que uma solução é *fundamental* se não for maior que qualquer de suas adjacentes. Nesse contexto, diremos que uma solução é descendente de uma solução fundamental se a mesma pode ser obtida a partir dessa solução fundamental por meio do processo recursivo de tomar soluções adjacentes.

2.1 Vida e obra de Françóis Viète

Denominamos como o "Pai da Álgebra" o advogado francês Françóis Viète (1540 – 1603). Formado aos 20 anos pela Universidade de Poitier, viu-se envolvido pela matemática quando aos 24 anos, ainda exercendo a advocacia, encarregou-se dos assuntos legais da família Soubise; entre suas responsabilidades estava a educação da filha da família. Com o interesse de sua pupila pela Astrologia, Viète resolveu fundamentar cientificamente o conhecimento sobre a mesma e para tal teve de se aprofundar na Astronomia e nos conceitos matemáticos a ela entrelaçados como trigonometria e aritmética, tendo desenvolvido muitos resultados nesses campos. Esse é considerado o primeiro período de grandes produções de Viète, como o tratado sobre astronomia Harmonicon Coelestena, no qual era abordada a geometria planetária de Ptolomeu e Copérnico, e o tratado Canon Mathematicus, em que foram obtidos resultados nos campos matemáticos da trigonometria e aritmética bem como na astronomia.

Viète viveu em um momento bem conturbado da história francesa com grande instabilidade política e religiosa; para se ter uma ideia, a França nesse período teve seis reis: Francisco I, Henrique II, Francisco II, Carlos IX, Henrique III e Henrique IV. A depender da governança, devido à instabilidade já comentada, Viète ocupou alguns cargos oficiais importantes na corte francesa como Conselheiro do Parlamento e membro do Conselho Privado do Rei. Nesses tempos de trabalho oficial, a matemática era sua companheira nos tempos livres.

Entre essas idas e vindas de trabalhos oficiais, Viète foi demitido do Conselho Privado do Rei Henrique III e, por cinco anos, pôde dedicar todo o seu tempo à matemática, esse é considerado o segundo período de grandes produções de Viète; posteriormente, ele voltaria a ocupar sua função de membro do Conselho Privado do Rei no reinado de Henrique IV. Nesse período desenvolveu diversos tratados nos campos da geometria e da álgebra, sendo sua obra mais famosa *In Artem Anluyticam Isagoge* (Rudimentos da Arte Analítica), em que introduz o uso de vogais para apresentar incógnitas e de consoantes para as constantes, além de utilizar as mesmas letras para representar potências de uma quantidade, por exemplo, A, A *quadratum* (A^2) e *Acubum* (A^3).

François Viète é considerado o precursor da geometria analítica, em sua obra *Suplementum Geometriae* (Suplemento de Geometria) introduz a álgebra nos estudos da geometria e da trigonometria, sendo fundamental na solução de três problemas clássicos da matemática grega, comprovando que a trissecção de um ângulo e a duplicação de um cubo dependem de uma cúbica e ainda apresentando a construção da tangente em qualquer ponto da espiral de Arquimedes. Viète apresentou ainda trabalhos nos quais discutia processos sobre aproximações sucessivas para resolução de equações de segundo, terceiro e quarto graus, relações trigonométricas e calendários.

2.2 O Salto de Viète e a IMO de 1988

Nesta seção, relataremos um fato histórico ocorrido com o problema de número 6 da Olimpíada Internacional de Matemática no ano de 1988, cuja solução utiliza o processo do Salto de Viète. No capítulo seguinte, iniciaremos a apresentando aos leitores a IMO, narrando um pouco de sua história a partir da primeira edição e descrevendo o seu objetivo e as participações e conquistas brasileiras e cearenses. A seção 3.2 é destinada a explicar como ocorre o processo de elaboração da prova que será aplicada na competição. Finalizaremos o capítulo com a seção 3.3, no qual apresentaremos o problema 6 da IMO de 1988 e sua solução utilizando o Salto de Viète como meio.

Competições matemáticas ocorrem no mundo inteiro e são a porta de entrada de muitos jovens estudantes no universo lúdico, único e encantador da Matemática. A partir do ano de 1894, a Hungria começou a organizar as primeiras olimpíadas de matemática no formato de competição; nos anos seguintes, a ideia difundiu-se pelo Leste Europeu culminando com a realização em 1959, na Romênia, da I Olimpíada Internacional de Matemática - IMO, sigla em inglês para *International Mathematical Olympiad*).

No Brasil, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou, no ano de 1979, a I Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), estimulando nos alunos o estudo da Matemática, a descoberta de jovens talentos matemáticos brasileiros e o desenvolvimento da Matemática no país. Tais competições existem desde os núcleos mais simples, como olimpíadas internas escolares, passando por competições estaduais e nacionais. Em 2018, a SBM realiza a XL OBM.

No estado do Ceará, a Universidade Federal do Ceará (UFC) organiza, desde o ano de 1981, a Olimpíada Cearense de Matemática, evento que reúne estudantes dos níveis Fundamental e Médio das escolas do estado.

No ano de 1988, de 9 a 21 de julho, a cidade de Camberra, na Austrália, sediou a XXIX Olimpíada Internacional de Matemática, evento que contou com a participação, até então recorde, de 49 países e 268 estudantes. Nessa competição, como de praxe, cada país participante propôs a uma comissão de matemáticos escolhidos pelo país-sede uma lista de problemas, esse processo será detalhado no tópico 4.2. A comissão de matemáticos australianos era composta por seis membros, entre eles, o casal húngaro-australiano Szekeres György (1911 – 2005), químico e matemático, e sua esposa, a matemática Esther Klein (1910 – 2005), reconhecidos no universo das competições matemáticas como grandes solucionadores de problemas. Na lista de problemas propostos pela Alemanha Ocidental, estava aquele que se tornaria o famoso problema 6 da prova, tal problema não foi resolvido por nenhum dos membros da comissão, sendo ainda encaminhado a quatro grandes especialistas australianos em Teoria dos Números que, por sua vez, mesmo após horas de estudos, não conseguiram resolvê-lo.

Mesmo sabendo da dificuldade e da grande possibilidade de nenhum estudante conseguir resolver, o comitê de problemas da XXIX IMO decidiu que essa questão faria parte da competição daquele ano como o problema de número 6, ou seja, a questão mais difícil da prova. Finalmente, onze estudantes acertaram e conquistaram pontuação máxima no problema 6, os búlgaros Emanouil Atanassov (medalha de Prata) e Zvezdelina Stankova (medalha de Prata), o austríaco Wolfgang Stöcher (medalha de Ouro), o canadense Ravi Vakil (medalha de Ouro), os chineses Hongyu He (medalha de Ouro) e Xi Chen (medalha de Ouro), os romenos Nicusor Dan (medalha de Ouro) e Adrian Vasiu (medalha de Ouro), os russos Nicolai Filonov (medalha de Ouro) e Sergei Ivanov (medalha de Ouro) e o vietnamita Ngô Bào Châu (medalha de Ouro). Nesse ano, o Brasil participou pela nona vez da competição e conquistou duas menções honrosas com os estudantes Lenilson Barreira de Morais e Jun Takakura; completaram a equipe brasileira os alunos Alberto Adami, Song San Woei, Maria Célia Paiva de Freitas e Walfredo da Costa Cirne Filho; nenhum dos brasileiros conseguiu pontuar no problema 6.

2.2.1 A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) foi o ápice de um movimento de competições matemáticas interescolares iniciado no Império Austro-Húngaro no fim do século XIX, sendo a maior, a mais antiga e a mais prestigiada olimpíada científica do mundo. A primeira edição da IMO foi realizada na cidade de Brasov, Romênia, no ano de 1959, contando com a participação de sete países (Romênia, Hungria, Bulgária, Polônia, Alemanha e as antigas Checoslováquia e União Soviética). Desde então, a IMO é realizada anualmente (com exceção de 1980), no mês de julho, em algum país previamente escolhido. A competição cresceu nesse período, já passou pelos cinco continentes e esse ano a LIX IMO, em Club-Najoca, Romênia, teve a participação de 107 países e 594 estudantes; se incluirmos, nessa lista, os líderes e os vice-líderes de cada país participante, o número de participantes em cada IMO ultrapassa o número de 800 pessoas. Em 2019, a LX edição da IMO ocorrerá em Bath, Inglaterra.

A IMO tem o objetivo de congregar jovens talentosos matemáticos de todo o mundo em torno de uma competição amigável, na qual terão contato com grandes desafios matemáticos, estimulando, dessa forma, o desenvolvimento da ciência em cada um dos países participantes, contando que milhões de jovens espalhados pelo mundo se empenham na preparação em busca de fazer parte do seleto grupo de seis integrantes que compõe a seleção de cada país. Muito embora a IMO em seu cerne seja uma competição, o mais valioso para os participantes são os encontros com competidores do mundo inteiro, as descobertas, o aprendizado cultural e as amizades que se criam e se desenvolvem a partir dali.

A história do Brasil na IMO teve como ponto de partida o ano de 1979, na XXI IMO realizada em Londres, na Inglaterra, nesse ano, o país não conquistou nenhuma premiação, ficando apenas na 22ª posição dos 23 países participantes.

Em 1981, na XXII IMO, Washington, Estados Unidos, o Brasil conquistou sua primeira medalha de ouro com o estudante Nicolau Corção Saldanha. Desde 1979, o Brasil participou de todas as edições da IMO, sendo 39 participações, que resultaram nas conquistas de 10 medalhas de ouro, 43 de prata, 77 de bronze e 33 menções honrosas. Uma das medalhas de ouro foi conquistada em 1995, na XXXVI IMO, Toronto, Canadá, pelo estudante Artur Ávila Cordeiro de Melo, hoje reconhecido por ser o único brasileiro, latino-americano e lusófono a conquistar a Medalha Fields. Com exceção da primeira edição, o Brasil teve integrantes de sua seleção premiados em todas as edições da IMO que participou. A melhor participação brasileira ocorreu na LVII IMO em Hong Kong, 2016, conquistando a 15ª colocação, com 5 medalhas de prata e 1 medalha de bronze, ficando à frente de forças tradicionais como Alemanha, Bulgária e Romênia. Além das participações, o Brasil foi país sede da LVIII IMO em 2017, na cidade do Rio de Janeiro.

O Ceará também tem sua história para contar nessa competição, iniciando com Luciano Irineu de Castro Filho, primeiro cearense a integrar um time brasileiro, participando em 1990 da XXXI IMO em Beijing, China; de lá pra cá, foram 52 convocações cearenses de um total de 231 estudantes brasileiros, trazendo para nosso estado 10 medalhas de prata, 23 medalhas de bronze e 12 menções honrosas. De 1990 até hoje, foram 29 participações brasileiras na IMO e o Ceará esteve presente em 25 destas.

2.2.2 Processo de elaboração da prova da IMO

A prova da IMO é composta por 6 problemas, cada um valendo 7 pontos. Os problemas devem ser originais e desafiadores, exigindo dos competidores grande inteligência e habilidade com a matemática elementar, desse modo, não devem necessitar de conhecimento matemático avançado com conteúdo de nível universitário. A prova é realizada em dois dias consecutivos, a cada dia são disponibilizados aos competidores três problemas e quatro horas e meia para resolução. Em cada um dos dias, os problemas são apresentados aos estudantes teoricamente em ordem de dificuldade, sendo os problemas 1 e 4 os mais fáceis, os de número 2 e 5 os de dificuldade intermediária e, finalmente, os problemas 3 e 6 os mais difíceis. Explicado o formato da prova, é normal surgir uma dúvida: “Mas como e quem elabora a prova da IMO?" O processo de elaboração de uma prova dessa importância é bem complexo.

Inicialmente, para cada IMO, é eleito um Comitê Seletor de Problemas, esse comitê é indicado pela própria IMO em conjunto com o país-sede e deve ser composto por matemáticos excelentes em soluções de problemas de competição; muitos deles são ex-olímpicos que se tornaram especialistas e sempre são convidados a integrarem esse comitê.

É estabelecido um período no qual cada país participante tem o direito de enviar de forma segura e sigilosa para um representante da IMO uma lista de problemas a serem examinados, dessas várias listas de problemas propostos serão escolhidos os seis que irão compor a prova. Nem sempre os países participantes enviam suas listas e alguns membros da comunidade da IMO estão comprometidos a enviar listas próprias de problemas inéditos no intuito de manter o elevado nível da competição. Os países participantes se comprometem a não divulgar sua lista de problemas propostos, mantendo-a em completo sigilo.

Um representante de IMO, responsável pelo recebimento das listas enviadas pelos países e por membros da comunidade matemática, encaminha-as aos integrantes do Comitê Seletor de Problemas. O comitê, por sua vez, tem a responsabilidade de verificar se os problemas são adequados à competição, dividi-los de acordo com as áreas (álgebra, análise combinatória, geometria e teoria dos números) e classificá-los por nível de dificuldade. Finalmente, o Comitê compila uma lista curta, normalmente com oito problemas de cada uma das áreas.

O último passo para escolha dos seis problemas é dado poucos dias antes da competição. Cada país participante envia ao país-sede um líder que irá compor o Júri Internacional da IMO daquele ano; esse júri recebe a lista curta definida pelo Comitê Seletor e tem o dever de examinar as questões, resolver, observar possíveis soluções diferentes das propostas e, finalmente, em uma reunião, definir por votação (podem ser várias) os problemas que irão compor a prova.

2.2.3 O Problema 6 da IMO da Austrália 1988

Essa seção destina-se a apresentar o problema 6 da prova da IMO 1998 e a sua resolução utilizando o Salto de Viète. O problema se apresenta na seguinte forma:

Sejam a e b inteiros positivos tais que $(ab + 1)$ divide $(a^2 + b^2)$. Prove que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ é o quadrado perfeito de um inteiro.

Como a e b são inteiros positivos e $ab + 1$ divide $a^2 + b^2$, então podemos admitir que $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$, com $k \in \mathbb{N}^*$. Dessa forma, teremos $a^2 + b^2 = k \cdot (ab + 1)$ e, portanto, o par (a, b) é solução da equação diofantina quadrática.

$$X^2 + Y^2 - kXY - k = 0 \qquad (2.1)$$

Tomemos, então, um par (a, b) que uma solução da equação 2.1 com $(a + b)$ mínimo dentre todas as possíveis, escolha essa garantida pelo Princípio da Boa Ordenação. Veja que, pela simetria da equação, o par (b, a) também é solução. Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a \geq b$. A seguir, analisaremos separadamente as duas situações: $a = b$ e $a > b$.

Caso 1: $a = b$

O fato de (a, b) ser solução da equação 3.2 nos permite concluir que $(2 - k) \cdot a^2 = k$. Isso implica que $2 - k \neq 0$. Logo $\frac{k}{2-k} = a^2$. Daí, lembrando que k é inteiro positivo, vemos que $1 \leq k < 2$. Assim, chegamos a $k = 1$, que é quadrado perfeito, e $a = b = 1$.

Caso 2: $a > b$

Note que se $b = 0$, então $k = a^2$ e não há mais nada que provar. Desse modo, podemos supor $b \neq 0$. Aqui aplicaremos a pulo de Viète. De fato, a é raiz da equação quadrática $X^2 - kbX + b^2 - k = 0$. Assim, denotando por a' a outra raiz dessa equação, segue que $a + a' = kb$ e $a \cdot a' = b^2 - k$. Com isso, vemos que a' é inteiro positivo, pois caso tivéssemos $a' < 0$, seguiria $a > kb$ e, portanto, $a - kb - 1 \leq 0.$ Com isso, poderíamos escrever:

$$k = a^2 - kab + b^2 = a^2 - kab - a + a + b^2 =$$
$$a \cdot (a - kb - 1) + a + b^2 \leq a + b^2 > a > kb \leq b \Rightarrow b < 1.$$

Temos um absurdo, pois b é inteiro positivo não nulo.

Agora analisemos o que ocorre quando $a' \geq 0.$ Nessas circunstâncias, $0 \leq a' = \frac{b^2 - k}{a} < \frac{a^2 - k}{a} < \frac{a^2}{a} = a.$ Isso nos diz que o par (a', b) é uma solução da equação 2.1 com $a' + b < a + b$. Isso contradiz a minimalidade da solução (a, b).

A contradição constatada acima significa que toda solução (a,b) com $a > b$, que minimiza a soma $(a + b)$ necessariamente só ocorre quando $b = 0$. Portanto, também nesse caso concluímos que k é um quadrado perfeito.

3 O MÉTODO DO SALTO DE VIÈTE E A EQUAÇÃO DE MARKOV

Em 1829, o jovem Andrei Andreevich Markov (1856 – 1922) defendeu sua tese de mestrado acadêmico intitulada "*On Binary Quadratic Forms of Positive Definition*", na Saint Petersburg University.

Neste capítulo, estudaremos uma equação diofantina que desempenhou papel auxiliar na construção do trabalho de Markov. A saber, a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \tag{3.1}$$

hoje denominada Equação de Markov.

Acreditamos que, o brilhantismo de Markov consiste em descrever todas as soluções da equação 3.1 através de conceitos matemáticos básicos, entre os quais, o Salto de Viète em polinômios quadráticos.

3.1 A Solução da Equação de Markov

O objetivo deste capítulo é determinar todas as ternas de números inteiros (a, b, c) que são soluções da equação de Markov. Inicialmente, devemos observar que a equação 3.1 é simétrica com relação às variáveis x, y e z, ou seja, se a terna ordenada (a, b, c) é solução, então qualquer permutação das coordenadas também será solução. A solução trivial $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ é a única solução para a qual temos $a \cdot b \cdot c = 0$. Para todas as soluções (a, b, c), distintas ou trivial, vale $abc > 0$. Portanto, nesses casos, ou temos as três coordenadas a, b, c positivas ou duas delas são negativas e a terceira é positiva. Por outro lado, é fácil ver que se (a, b, c) é uma solução, então as ternas $(-a, -b, c)$; $(-a, b, -c)$; $(a, -b, -c)$ também satisfazem à equação. Isso nos permite concluir que, se (a, b, c) é uma solução da equação de Markov, então $([a], [b], [c])$; $(-[a], -[b], [c])$; $(-[a], [b], -[c])$ e $([a], -[b], -[c])$. Essa discussão nos diz que é suficiente conhecermos as soluções inteiras positivas. Além disso, sempre que for conveniente, podemos supor, sem perda de generalidade, que $c \leq b \leq a$. Nessas condições, dizemos que a é um número de Markov.

Uma outra observação importante é que *(1, 1, 1)* e *(1, 1, 2)* são as únicas soluções da equação de Markov que possuem duas ou mais coordenadas iguais. Essas duas soluções são ditas soluções singulares.

De fato, se *(a, b, c)* é uma solução inteira e positiva, então devido à simetria, para determinar as soluções que possuem pelo menos duas coordenadas iguais, é suficiente considerar o caso em que $a = b$. Com essa hipótese, obtemos:

$$2a^2 + c^2 = 3a^2c \Rightarrow a^2 \cdot (3c - 2) = c^2 \Rightarrow a^2 | c^2 \Rightarrow a | c.$$

Dessa forma, temos $c = \lambda a$ para algum $\lambda \in \mathbb{N}$ e substituindo na primeira das equações acima, ficamos com;

$$2a^2 + \lambda^2 a^2 = 3a^3\lambda \Rightarrow \lambda \cdot (3a - \lambda) = 2 \Rightarrow \lambda | 2.$$

Daí, $\lambda = 1$ fornece a solução $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ e $\lambda = 2$ nos dá a solução $(a, b, c) = (1, 1, 2)$.

Agora, para usar o salto de Viète, seja *(a, b, c)* solução inteira positiva não singular da equação de Markov. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $c < b < a$. Então o número a é a raiz da equação quadrática.

$$X^2 - 3bcX + b^2 + c^2 = 0.$$

Dessa forma, se denotarmos por a’ a outra raiz dessa equação, temos que $a' = 3bc - a$ e $a \cdot a' = b^2 + c^2 > 0$. Com isso, vemos que $(3bc - a, b, c)$ também é solução inteira positiva. Do mesmo modo, temos que *b* e *c* são raízes das equações quadráticas.

$$X^2 - 3bcY + a^2 + c^2 = 0 \text{ e } Z^2 - 3abZ + a^2 + b^2 = 0,$$

respectivamente. Logo, vemos que $(a, 3ac - b, c)$ e $(a, b, 3ab - c)$ também são soluções inteiras positivas da equação de Markov.

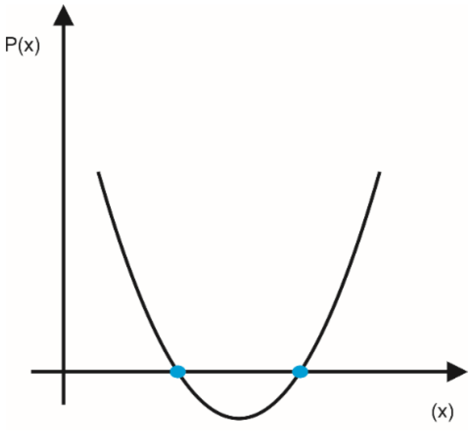
A hipótese $a > b > c > 0$ permite concluir que:

$$3abc - c^2 > 3abc - b^2 = a^2 + c^2 > a^2 > ab > ac \Rightarrow b' = 3ac - b > a \text{ e } c' = 3ab - c > a$$

Isso nos diz que as soluções $(a, 3ac - b, c)$ e $(a, b, 3ab - c)$ são maiores que a solução (a, b, c).

Por outro lado, no que diz respeito à solução (a', b, c), lembremos que a e a' são as raízes do polinômio quadrático $P_a(X) = X^2 - 3bcX + b^2 + c^2$, cujo gráfico é a parábola indicada na figura abaixo.

Figura 1



Fonte: elaborada pelo autor

Observe pelo gráfico que os pontos azuis representam as raízes distintas a e a', cujo ordenamento ainda não está definido. Note que $x \in \mathbb{R}$ está no intervalo delimitado pelas raízes a e a' se somente se $P_a(x) < 0$.

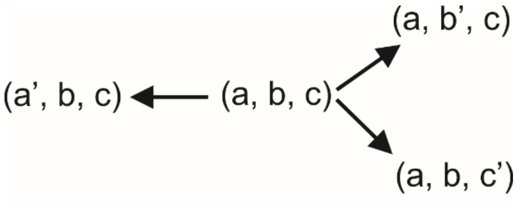
Para concluir, vamos verificar que $P_a(b) < 0$. Com efeito,

$$P_a(b) = b^2 - 3 \cdot b \cdot c \cdot b + b^2 + c^2 = 2b^2 + c^2 - 3b^2c < 3b^2 - 3b^2c = 3b^2 \cdot (1 - c) \leq 0.$$

Portanto, $P_a(b) < 0$ e, pelo que vimos acima, isso é suficiente para concluirmos que b está no intervalo delimitado pelas raízes a e a'. Porém, como $b < a$ só temos uma possibilidade, qual seja: $a' < b < a$. Logo, a solução (a', b, c) é menor que a solução (a, b, c).

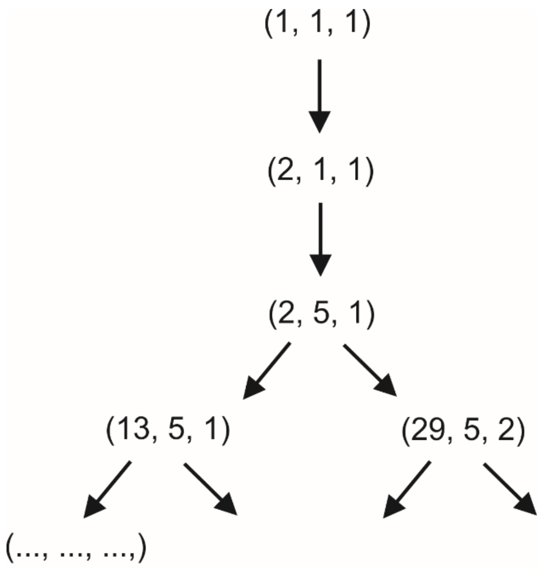
Dessa forma, cada solução não singular possui duas soluções adjacentes maiores e apenas uma menor. Podemos representar essa informação conforme os diagramas a seguir:

Figura 2



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 3



Fonte: elaborada pelo autor

Lembramos que uma solução fundamental é uma solução que não é maior que nenhuma de suas soluções adjacentes. Pelo que vimos acima, nenhuma solução não singular pode ser fundamental, pois soluções não singulares sempre possuem uma solução adjacente menor. Por outro lado, considerando as duas soluções singulares, vemos que *(2, 1, 1)* é a única (respeitada a condição $a \geq b \geq c$) solução adjacente de *(1, 1, 1)*. Portanto, a equação de Markov possui uma única solução fundamental, a partir da qual todas as outras soluções são descendentes. O método do salto de Viète nos permite construir árvores de soluções da equação de Markov como apresentada anteriormente.

Observe que essa árvore possui dois ramos que partem da solução *(1, 1, 2)*. Um desses ramos pode ser descrito por meio dos números de Finonnaci e o outro por meio dos números de Pell.

3.1.1 Outras considerações sobre a Equação de Markov

Uma generalização natural para a equação de Markov é considerar a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz, \qquad (3.2)$$

com $k \in \mathbb{N}$.

Nesse contexto, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.1.1 Se $k > 3$, então a equação 3.2 não possui solução.

Prova: Inicialmente, observamos que se (a, b, c) for uma solução inteira positiva de 3.2, então as coordenadas a, b, c são duas a duas distintas. De fato, do contrário, pela simetria, poderíamos supor $a = b$. Nesse caso, seguiria que

$$c^2 = (kc - 2) \cdot a^2.$$

Com isso, teríamos que $a|c$. Logo $c = a \cdot d$, para algum $d \in \mathbb{N}$. Portanto, chegaríamos a $d^2 = kad - 2$, ou ainda, $d \cdot (ka - d) = 2$. Desse modo, obtemos $d = 1$ ou $d = 2$ e, em ambos os casos, $k \cdot a = 3 < k$. Isto é, $a < 1$, o que contradiz o fato de a ser um inteiro positivo.

Assim podemos admitir, sem perda de generalidade, que $a > b > c \leq 1$. Além disso, podemos assumir que dentre todas as possíveis soluções, a solução (a, b, c) foi escolhida de modo que a seja o menor possível. Nesse contexto, o pulo de Viète nos fornece uma outra solução (a', b, c) tal que a' e a são as raízes do polinômio $P_a(x) = X^2 - kbcX + b^2 + c^2$.

Portanto, $a + a' = kbc$ e $a \cdot a' = b^2 + c^2$, o que nos diz que (a', b, c) também é uma solução inteira positiva. Por outro lado, como $k > 3$, temos.

$$P_a(b) = 2b^2 + c^2 - kcb^2 < 3b^2 - kcb^2 = (3 - kc) \cdot b^2 < 0.$$

Dessa forma, b é o ponto interior do intervalo delimitado pelas raízes $(a$ e $a')$ do polinômio quadrático $P_a(X)$. Como $b < a$, podemos concluir que $a' < b < a$. Portanto, produzimos uma solução (b, a', c) ou (b, c, a') cuja maior coordenada é menor que a maior coordenada da solução (a, b, c) o que contradiz a escolha dessa solução. Isso termina a demonstração.

Proposição 3.1.2 A equação 3.2 possui solução se e somente se $k = 1$ ou $k = 3$.

Prova: pelo que já vimos, falta analisarmos apenas os casos $k = 1$ e $k = 2$.

Se (a, b, c) for uma solução inteira positiva de 3.2, com $k = 1$, então lembrando que para todo $a \in \mathbb{N}$, temos que $a^2 \cong 0 \ (mod\ 3)$ ou $a^2 \cong 1 \ (mod\ 3)$, segue que se (a, b, c) for uma solução de 3.2, isto é, $a^2 + b^2 + c^2 = abc$, vemos que $3|abc$. De fato, se $3 \nmid abc$, então $3 \nmid a$, $3 \nmid b$ e $3 \nmid c$. Logo $a^2 \cong 1 \ (mod\ 3)$, $b^2 \cong 1 \ (mod\ 3)$ e $a^2 \cong 1 \ (mod\ 3)$, de onde seguiria que $3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = abc$, que é uma contradição. Assim $3|abc$, o que implica novamente por conta da igualdade $a^2 + b^2 + c^2 = abc$, que $3|a$, $3|b$ e $3|c$. Portanto, $a = 3a_1$, $b = 3b_1$ e $c = 3c_1$, o que nos permite concluir que (a_1, b_1, c_1) é solução da equação de Markov 3.1. Também é claro que se (x, y, z) é solução de 3.1, então $(3x, 3y, 3z)$ é solução de 3.2, com $k = 1$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \Rightarrow (3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2) = 27xyz = (3x) \cdot (3y) \cdot (3z).$$

Logo, o conjunto da solução de 3.2, com $k = 1$, é obtido do conjunto solução de 3.1 multiplicando cada solução pelo escalar 3.

Se (a, b, c) é uma solução inteira positiva de 3.2, com k = 2, vemos que a $2|\ (a^2 + b^2 + c^2) = 2abc$. Portanto, pelo menos uma das coordenadas a, b, c é par e como consequência segue que $4 \mid 2abc = a^2 + b^2 + c^2$. Agora, lembrando que para todo $a \in \mathbb{N}$ temos que $a^2 \cong 0 \ (mod\ 4)$ ou $a^2 \cong 1 \ (mod\ 4)$, segue que para que ocorra $4|(\ a^2 + b^2 + c^2)$ é necessário que cada uma das coordenadas a, b, c seja par. Assim $a = 2a_1$, $b = 2b_1$ e $c = 2c_1$, o que nos permite concluir que (a_1, b_1, c_1) é solução da equação 3.2, com $k = 4$, mas já provamos que para $k > 3$ tal equação não possui solução. Portanto, para $k = 2$ também não há solução.

4 A EQUAÇÃO $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$

Fixando um inteiro positivo $\ell \in \mathbb{N}$, o autor *Li Feng* (2013) se propôs a estudar para quais valores $k \in \mathbb{N}$ a equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ possui infinitas positivas. Como resultado, obteve que para cada ℓ existente apenas uma quantidade finita de valores de k satisfazendo tal condição. Em, *"On the Diophantine Equation* $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$*" Hu; Lee* (2013), os autores introduziram a notação $K(\ell)$ para denotar o subconjunto de $\mathbb{N}$ constituído por tais valores de k e estabeleceram condições para que $k \in K(\ell)$. Em *Solutions of some quadric Diophantine Equations, Keskin* (2010)*,* foi provado que para $\ell < 0$ vale que $K(\ell) = \mathbb{N}$. Para chegar a essas conclusões, foram usados da teoria das equações de Pell, desenvolvimentos de número irracional em frações contínuas e resultado sobre unidades em anéis de inteiros quadráticos. No que segue, mostraremos como obter esses e outros resultados mais gerais usando o método do salto de Viète.

4.1 O caso > 0

Observe inicialmente que se (a, b) for uma solução inteira positiva da equação em tela, temos que a é raiz de $x^2 - (kb - \ell)\cdot x + b^2 = 0$. Portanto, a outra raiz a' satisfaz as condições $a' = kb - \ell$ e $a \cdot a' = b^2$. Em particular, temos que a' é inteiro positivo e $\ell < kb - a$. Do mesmo modo, b é raiz de $y^2 - kay + a^2 + a\ell = 0$. Daí, a outra raiz b' satisfaz as condições $b' = ka - b$ e $b \cdot b' = a\cdot(a + \ell)$. Assim, (a', b) e (a, b') também são soluções inteiras positivas da equação em análise.

Destacamos, que se Δ_a indica o discriminante da equação auxiliar $y^2 - kay + a^2 + a\ell = 0$, então

$$(ka - 2b)^2 = (b' - b)^2 = \Delta_a = (ka)^2 - 4\cdot(a^2 + a\ell) = (k^2 - 4)\cdot a^2 - 4a\ell \geq 0,$$

Isso já nos diz que $k \geq 3$ e $\ell \leq \frac{k^2-4}{4}a$. Além disso, temos:

$$\ell \leq \frac{k^2-4}{4}a \Leftrightarrow b' = b \Leftrightarrow ka = 2b \qquad (3.1)$$

Do modo análogo, se Δ_a indica o discriminante $x^2 - (kb - \ell)\, x + b^2 = 0$, então vale que

$$(kb - \ell - 2a)^2 = (a' - a)^2 = \Delta_b = (kb - \ell)^2 - (2b)^2.$$

$$\ell = (k-2)\cdot b \Leftrightarrow a' = a \Leftrightarrow \ell = kb - 2a \Leftrightarrow b = a.$$

O seguinte resultado nos dá informações sobre as soluções inteiras positivas e caracteriza as soluções fundamentais.

Proposição 4.1.1 Se $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ possui uma solução inteira positiva, então possui infinitas. Além disso, se (a, b) é uma solução fundamental da equação, então $a \leq b$ e $a\cdot(a + \ell) \geq b^2$.

Prova: Analisaremos separadamente os três casos $a = b$; $a > b$ e $a < b$.

Para $a = b$, substituindo na equação os três casos, obtemos $(k - 2).a = \ell$. Em particular, temos $(k - 2)$ é um divisor de ℓ e temos uma quantidade finita de possibilidades para k.

Reciprocamente, se $(k - 2)$ for um divisor de ℓ, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\ell = (k - 2)\cdot q$ e, nesse caso, $(a, b) = (q, q)$ é uma solução da nossa equação diofantina. As construções acima aplicadas a esta solução fornecem:

$$(a', b) = (q, q) \text{ e } (a, b') = (q, (k-1)\cdot q).$$

Note que a solução *(a, b')* é maior que a solução *(a,b)*, pois $k \geq 3$. Além disso, *(q, q)* é solução fundamental.

No caso $a > b$, temos

$$a' = \frac{b}{a} \cdot b < b \text{ e } b' = \frac{a}{b} \cdot (a + \ell) > a$$

Portanto, as novas soluções tais que *(a', b)* é menor que *(a, b)* enquanto que *(a, b')* é maior que *(a, b)*. Em particular, nenhuma solução *(a, b)* com $a > b$ é fundamental.

Por fim, se ocorrer $a < b$, teremos

$$a' = \frac{b}{a} \cdot b > b \text{ e } b' = a \cdot \left(\frac{a + \ell}{b} \right).$$

Nesse caso, temos *(a', b)* é uma solução maior que *(a, b)*. Por outro lado, a solução *(a, b')* será menor que *(a, b)* se somente se $a \cdot (a + \ell) < b^2$. Em outras palavras, para que uma solução *(a, b)* com $a < b$ seja fundamental, é necessário e suficiente que $a \cdot (a + \ell) \geq b^2$.

Resumidamente, a discussão acima nos permite concluir que cada solução sempre admite uma solução maior e, portanto, a existência de uma solução implica na existência de infinitas. Além disso, uma solução *(a, b)*, com $a > b$, sempre admite uma solução menor e caso tenhamos $a < b$, tal solução menor existirá desde que ocorra $a \cdot (a + \ell) < b^2$. Em outas palavras, temos dois tipos de soluções fundamentais: as que são do tipo *"a = b"*, que diremos fundamental trivial (só ocorre quando $(k - 2)$ divide ℓ) e as soluções do tipo *"$a < b \leq b'$"*, ditas não triviais.

Observação ***4.1.1*** Uma solução fundamental não trivial pode ter duas ou somente uma solução adjacente, conforme tenhamos $b' > b$ ou $b' = b$. Na proposição *4.1.2*, veremos que soluções fundamentais com $b' = b$ só ocorrem em casos muito específicos. Assim, em geral, uma solução fundamental não trivial possui duas soluções adjacentes.

4.1.1 A Finitude do Conjunto $K(\ell)$

Já sabemos que a presença de uma solução fundamental trivial implica na finitude do conjunto de valores possíveis para o parâmetro k, pois nesse caso $(k - 2)$ é divisor de ℓ. Em particular, $k \leq \ell + 2$. Verifiquemos o que ocorre quando existe solução fundamental não trivial.

Com efeito, sendo (a, b) uma solução fundamental não trivial, temos que $b > a \geq 1$ e $b^2 - a^2 \leq a\ell$. Daí, seguem as desigualdades

$$(k - 2)\cdot ab = (b - a)^2 + a\ell = a\ell + b^2 - a^2 - 2a\cdot(b - a) \leq 2a\ell - 2a\cdot(b - a)$$

$$\Rightarrow (k - 2)\cdot 2 \leq (k - 2)\cdot b \leq 2\cdot(\ell - (b - a)) \leq 2\cdot(\ell - 1) \Rightarrow k \leq \ell + 1 \qquad (3.2)$$

Assim, nos casos em que a nossa equação diofantina possui alguma solução fundamental não trivial, obtemos:

$$3 \leq k \leq \ell + 1.$$

Essa cota superior que obtivemos é muito melhor que aquelas obtidas por Li Feng (2013) e por Hu; Lee (2013). Além disso, tal cota é a melhor possível. De fato, a referida cota é atingida se e somente se $\ell = 3$. Com efeito, $\ell = 3$ temos que a equação $x^2 - 4xy + y^2 + 3x = 0$ admite a solução $(a, b) = (1, 2)$, que satisfaz a condição $a^2 < b^2 \leq a\cdot(a + \ell)$ e, nesse caso, $k = 4 = \ell + 1$. Reciprocamente, para que tenhamos $k = \ell + 1$ devem valer as igualdades em (4.2), o que equivale à $b = 2$, $b - a = 1$ e $\ell = b^2 - a^2$. Portanto, $\ell = 3$. Em particular, vemos que, para $\ell > 3$, a equação $x^2 - (\ell + 1)\cdot xy + y^2 + \ell x = 0$ não possui soluções inteiras positivas, pois, pelo que acabamos de mostrar, essa equação não possui solução fundamental não trivial e certamente também não possui solução fundamental de primeira espécie já que, em tal hipótese, $\ell - 1$ seria divisor de ℓ, o que só ocorre para $\ell = 2$.

O caso $\ell = 1$

Como a existência de solução fundamental não trivial impõe a limitação "$k \leq \ell + 1$", concluímos que, caso $\ell = 1$, a equação $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$ não possui soluções minimais de referida natureza. De fato, como vimos, se existir solução, temos $k \geq 3$ e, por outro lado, a existência de solução fundamental não trivial imporia a condição $k \leq 2$. Desse modo, se existir solução, então teremos solução fundamental de primeira espécie e, assim, $(k - 2)$ deve ser divisor de $\ell = 1$. Logo $k = 3$. Portanto, para $\ell = 1$, nossa equação possui solução se e somente se $k = 3$. Além disso, todas as soluções são descendentes da única solução fundamental $(1, 1)$.

4.1.2 Sobre a Finitude do Número de Soluções Fundamentais

Como vimos, toda solução da equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ é obtida como descendente, via o salto de Viète, de uma solução fundamental. Esse fato motiva o estudo do conjunto de soluções fundamentais da referida equação. Nesse contexto, consideraremos inicialmente as indagações sobre a finitude e a não vacuidade dessa família de soluções.

No que diz respeito às soluções fundamentais triviais (aquelas em que $x = y$), já sabemos que só ocorrem quando $(k - 2)$ divide ℓ e, nesse caso, temos uma única solução da referida natureza, a saber, $\left(\frac{\ell}{k-2}, \frac{\ell}{k-2}\right)$.

Por outro lado, quanto às soluções fundamentais não triviais, ainda não sabemos muito. Para caminhar nessa direção, introduzimos o conceito de solução própria, conforme a definição a seguir. Diremos que uma solução inteira positiva (a, b) da equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ é uma solução própria, se mdc $(a, b, \ell) = 1$. Caso contrário, diremos que $(a \cdot b)$ é uma solução imprópria.

Dada uma solução (a, b), como mdc (a, b, ℓ), podemos escrever $a = d \cdot a_1$; $b = d \cdot b_1$ e $\ell = d \cdot \lambda$, onde a_1, b_1 e λ são inteiros positivos. Com isso, vemos facilmente que (a_1, b_1) é solução imprópria para a equação $x^2 - kxy + y^2 + \lambda x = 0$. Em outros termos, cada solução imprópria corresponde a uma solução própria da equação associada a algum divisor λ de ℓ. Reciprocamente, cada solução dessa última equação produz uma solução imprópria da equação original. Essa correspondência preserva ordem. Desse modo, as soluções fundamentais impróprias da equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ são obtidas a partir das soluções próprias fundamentais das equações $x^2 - kxy + y^2 + \lambda x = 0$, como λ variando no conjunto dos divisores de ℓ.

Observamos que, na presença da relação $a_1^2 - ka_1b_1 + b_1^2 - \lambda a_1 = 0$, temos a condição $mdc\ (a_1, b_1, \lambda) = 1$ equivalente à $mdc\ (a_1, \lambda) = 1$ e também equivalente à $mdc\ (b_1, \lambda) = 1$. Por outro lado, tomando $\alpha = mdc\ (a_1, b_1)$ e escrevendo $a_1 = \alpha\gamma$ e $b_1 = \alpha\beta$, segue que $mdc\ (\gamma, \beta) = 1$ e, portanto, $mdc\ (\gamma, \beta^2) = 1$. Além disso, substituindo na equação, obtemos:

$$\gamma^2\alpha^2 - k\alpha^2\gamma^2\beta + \alpha^2\beta^2 + \lambda\gamma\alpha = 0.$$

Logo, $\alpha | \lambda\gamma$ e como $\alpha | a_1$ e a_1 é relativamente primo com λ, segue que α divide γ. Daí, fazendo $\gamma = \alpha\gamma_1$, vemos que

$$\gamma^2 - k\gamma\beta + \beta^2 + \lambda\gamma_1 = 0,$$

de onde segue γ_1 divide β^2 e, então, γ_1 divide $mdc\ (\gamma, \beta^2) = 1$. Dessa forma, concluímos que $\gamma_1 = 1$ e, consequentemente, $\gamma = \alpha$ e $(a, b) = (d \cdot a_1, d \cdot b_1) = (d \cdot \alpha^2, d \cdot \alpha\beta)$, onde α e β são tais que

$$\alpha^2\beta - k\alpha\beta + \beta^2 + \lambda = 0.$$

Portanto, as soluções de $x^2 - kxy + y^2 + \lambda x = 0$ estão em correspondência biunívoca com as soluções (α, β), com $\alpha < \beta$, de $x^2 - kxy + y^2 + \lambda = 0$.

Agora, supondo que (a, b) seja uma solução fundamental não trivial da equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$, segue que $(a_1, b_1) = (\alpha^2, \alpha\beta)$ é uma solução própria fundamental não trivial de $x^2 - kxy + y^2 + \lambda x = 0$. Assim, temos que $0 < b_1^2 - a_1^2 \geq a_1\lambda$, *ou seja*, $0 < \beta^2 - \alpha^2 \leq \lambda$. E as desigualdades (4.2) se reescrevem na forma:

$$(k-2)\cdot\alpha\beta \leq 2\cdot(\lambda - 1).$$

De onde obtemos:

$$\alpha \leq \frac{\lambda - 1}{k-2} \text{ e } \beta \leq 2\cdot\left(\frac{\lambda-1}{k-2}\right).$$

Isso mostra que, para cada divisor próprio λ de ℓ, o número de soluções próprias fundamentais não triviais da equação $x^2 - kxy + y^2 + \lambda x = 0$ é finito. Portanto, para ℓ fixado o número de soluções fundamentais de $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ também é finito.

Proposição 4.1.2 A equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ possui solução fundamental não trivial (a, b) com apenas uma solução adjacente (isto é, $b' = b$) se e somente se k é ímpar e $k^2 - 4$ divide ℓ ou k é par e $\frac{k^2-4}{4}$ divide ℓ.

Prova: (a, b) é uma solução fundamental não trivial de $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$, com $mdc\ (a, b, \ell) = d$, então vimos $(a, b) = (d\alpha^2, d\alpha\beta)$, onde α, β são inteiros relativamente primos. Dessa forma, por (4.1), segue $b = b'$ se e somente se $k\alpha = 2\beta$. Daí, como $mdc\ (\alpha, \beta) = 1$, vemos que $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$. Além disso, também por (4.1), temos que $b = b'$ se e somente se $\ell = \frac{k^2-4}{4}\cdot a$. Assim, se $\alpha = 1$ é par e $\ell = \frac{k^2-4}{4}\cdot d$ e se $\alpha = 2$, k é ímpar e $\ell = (k^2 - 4)\cdot d$.

Reciprocamente, se k é ímpar e $(k^2 - 4)$ divide ℓ, então tomando $d \in \mathbb{N}$ tal que $\ell = (k^2 - 4)\cdot d$, vemos que $(4d, 2kd)$ é solução fundamental não trivial. Do mesmo modo, se k é par e $\left(\frac{k^2-4}{4}\right)$ divide ℓ, então $d \in \mathbb{N}$ tal que $\ell = \left(\frac{k^2-4}{4}\right)\cdot d$, vemos que $\left(d, \frac{k}{2}\cdot d\right)$ é solução fundamental não trivial. Em ambos os casos, $b' = b$. A equação $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$ possui solução própria fundamental (a, b) com apenas uma solução adjacente (isto é, $b' = b$) se e somente se $\ell \in \left\{k + 2, k^2 - 4, \frac{k^2-4}{4}\right\}$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da álgebra mostrou aos matemáticos não apenas um novo campo de estudos formal na manipulação de equações, operações, polinômios e estruturas algébricas mas também para a humanidade um motor, uma espécie de enzima, capaz de acelerar o processo de sua evolução. Nesse contexto, o francês François Viète elevou a álgebra a uma maior importância quando iniciou a utilização de cartas para representar quantidades, sendo essas conhecidas ou não, conseguindo, dessa forma, facilitar manipulação, entendimento e consequente desenvolvimento de fórmulas e equações. Para Viète, a matemática não se resume a números, e sim envolve letras e toda capacidade que o ser humano conseguir expressar. Iniciando pela Álgebra de François Viète, passando pelas Equações Diofantinas e ainda pela utilização dos métodos de resolução de problemas conhecidos como “descida infinita de Fermat” e “Pulo de Viète”, o presente trabalho tem o intuito especial de mostrar a professores de Ensino Médio, aos estudantes olímpicos, bem como aos futuros professores, hoje alunos da licenciatura em matemática, o quão importante é o estudo da álgebra e o quanto não se trata apenas de equações, polinômios, produtos notáveis e fórmulas decoradas. O estudo diverge um pouco da forma com a qual é abordado o tratamento da álgebra nas séries de ensino básico (ensino fundamental e médio), dando ao leitor a oportunidade de visualizar a álgebra como um tema encantador, envolvendo muita inspiração, ideias e métodos surpreendentes. De modo muito subliminar, incita professores e alunos à busca de mais leituras no campo da história da matemática, deixando ainda aberta a porta para o fantástico mundo das competições matemáticas.

O trabalho se caracteriza por apresentar um método denominado Pulo de Viète como ferramenta para o estudo de algumas equações diofantinas não lineares, tendo sido necessária uma breve retrospectiva entre os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra e também uma inserção no mundo das olimpíadas de matemática por meio do problema 6 da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) 1988. A equação de Markov e o estudo de outras equações diofantinas quadráticas mostram outras aplicações do método.

Espero ter contribuído para que professores do ensino básico insiram no trabalho com a álgebra, em seus diferentes níveis, problemas intrigantes, de forma lúdica, evitando que esse tema seja visto pelos alunos apenas como uma espécie de fôrma na qual substituímos valores em fórmulas ou resultados notáveis previamente trabalhados. É claro que, em muitos casos, a repetição e a continuidade na aplicação de exercícios tornará os alunos mais íntimos dessas regras, porém o trabalho não pode resumir-se a apenas esse fator; a ludicidade na introdução e a inclusão de ideias como “descida infinita de Fermat” e “Salto de Viète” durante o processo de ensino e aprendizagem podem e devem ser utilizadas respeitando as diferenças entre os níveis. Busco, dessa forma, atingir um dos grandes, senão o maior, dos objetivos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, a excelência no ensino da matemática no Brasil.

A trajetória até a conclusão do trabalho trouxe enriquecimento a minha formação acadêmica e uma melhor compreensão da importância da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem. Dar vida aos matemáticos e suas obras tornou os momentos das aulas mais ricos e alunos mais atentos, curiosos em conhecer mais sobre os processos criativos dos matemáticos, da construção de fórmulas e de histórias olímpicas. Espera-se que esse trabalho sirva como fonte de apoio ou pesquisa a futuros profissionais da educação. Concluo na certeza de que entrego um material para pessoas que pretendem conhecer e se encantar pela álgebra e pelo Pulo de Viète.

REFERÊNCIAS

AIGNER, Martin. **Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture**: A Mathematical Journey from Irrational Numbers to Perfect Matchings. New York: Springer, 2013.

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin; CUCUREZEANU, Ion. **An introduction to diophantine equations:** A problem-Based Approach. New York: Springer, 2010.

CIPU, Mihai. Quadratic diofantine equation with infinitely many solutions in positive integers. **Intergers-eletronic journal of combinatorics number theory**, A47, 2015. 1-7.

ENGEL, Arthur. **Problem-solving strategies**. New York: Springer, 1997.

FENG, Li *et al,* "On the diophantine equation $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$", **Intergers-eletronic journal of combinatories number theory**, A8, 2013.

FRANÇOIS Viète (1540 - 1603). *In*: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO. **E-cálculo**. São Paulo, 2018. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/viete.htm. Acesso em: 01 jul. 2018.

GIL, Paulo Duarte Bastos. François Viète: **O despertar da álgebra simbólica**. 2001. 211 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade do Porto, Porto, 2001.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD FOUNDATION. Australia: International Mathematical Olympiad Foundation, 2015. Disponível em https://www.imo-official.org/team_r.aspx?code=BRA&year=1988. Acesso em: 20 mai. 2018.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD FOUNDATION. **Activities**. Australia: International Mathematical Olympiad Foundation, 2015. Disponível em: https://imof.co/about-imo/activities/. Acesso em: 20 mai. 2018.

KESKIN, R. Solutions of some quadratic diophantine equations. **Comput. Math. Appl.**, v. 60, n. 8, p. 2225 – 2230, 2010,.

MARLEWSKI, A.; ZARZYCKI, P. Infinitely many positive solutions of the diophantine equation $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$. **Computers and Mathematics with Applications**, n. 47, n. 1, p. 115–121, 2004.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013.

MOREIRA, Carlos Gustavo. **Descenso infinito de fermat**. Polos Olímpicos de Treinamento, POT 2012. Teoria dos Números. Nível 3 – aula 12.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Disponível em https://www.obm.org.br/quem-somos/premiados-da-obm/. Acesso em: 21 mai. 2018.

TABACHNIKOV, Serge. **Kvant selecta:** algebra and analysis, I. Providence: American Mathematical Society, 1999.

YONGZHONG, Hu. ; MAOHUA, Lee. On the diophantine equation $x^2 - kxy + y^2 + \ell x = 0$, **Chinese Annals of Mathematics**, Series B, p. 715-718, 2013.