UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

DAVI LUSTOSA DA SILVA

HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM ESPAÇOS PRODUTO DO TIPO WARPED

FORTALEZA

2010

DAVI LUSTOSA DA SILVA

HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM ESPAÇOS PRODUTO DO TIPO WARPED

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares

FORTALEZA

2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S579h Silva, Davi Lustosa da.
Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante em Espaços Produto do Tipo Warped / Davi Lustosa da Silva. – 2010.
60 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2010.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.

1. curvatura média. 2. espaços produto warped. 3. folheação totalmente umbílica. 4. princípio do máximo. I. Título.

CDD 510

DAVI LUSTOSA DA SILVA

HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM ESPAÇOS PRODUTO DO TIPO WARPED

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 28/ 07/ 2010

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sua infinita graça e misericórdia e ao professor Antonio Gervasio Colares pela competente orientação, pelos ensinamentos de natureza matemática e por seus valiosos conselhos desde os tempos de graduação.

Aos meus pais, Orlando Benício da Silva e Maria de Fátima Lustosa da Silva por todo esforço que fizeram para que eu chegasse até aqui.

Gostaria também de externar meus sinceros agradecimentos aos colegas (amigos) Shirley, Valéria, Cristiane, Kiara,Priscila, Fernando Neres, Tiago e Antonia Jocivania por toda ajuda e pelos momentos de alegria que me proporcionaram.

Aos professores Gregório Pacelli Feitosa Bessa e Fernando Enrique Echaiz Epinoza, por terem aceitado o convite de participação da banca.

À Andrea Costa, pela eficiência e presteza na secretaria do departamento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

RESUMO

Neste trabalho estudaremos hipersuperfícies de curvatura média constante imersas em espaços produto do tipo warped da forma $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$, onde $\mathbb{P}^n$ é uma variedade Riemanniana completa. Em particular, nosso estudo inclui o de hipersuperfícies de curvatura média constante em espaços ambiente produto. Nosso estudo também inclui hipersuperfícies de curvatura média constante nos chamados espaços *pseudo-hiperbólicos*.Vamos apresentar condições que nos permitam concluir quando tal hipersuperfície é uma folha $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ da folheação $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}_t$ totalmente umbílica de $\overline{M}$ por meio de hipersuperfícies completas. Se a hipersuperfície for compacta, mostraremos que a imersão deve ser uma folha $\mathbb{P}_t$, o que generaliza alguns resultados devidos a Montiel em (MONTIEL, 1999). Também estenderemos um resultado devido a Guan e Spruck em (GUAN; SPRUCK, 2000) do espaço ambiente hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ à situação geral de produtos warped. Essa estensão nos permite dar uma versão um pouco mais geral de um resultado de Montiel em (MONTIEL, 1999), e obter estimativas de altura para hipersuperfícies compactas de curvatura média constante com fronteira em uma folha.

Palavras-chave: curvatura média; espaços produto warped; folheação totalmente umbílica; princípio do máximo.

ABSTRACT

In this work we will study hypersurfaces of constant mean curvature immersed in warped product spaces of the form $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$, where $\mathbb{P}^n$ is a complete Riemannian manifold. In particulary, our study includes that of constant mean curvature hypersurfaces in product ambient spaces.It also includes constant mean curvature hypersurfaces in the so called *pseudo-hiperbolic* spaces. We will present conditions that allow us to conclude when such a hypersurface is a leaf $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ of the foliation $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}_t$ fully umbilic of $\overline{M}$ through complete hypersurfaces. If the hypersurface is compact, we show that the immersion must be a leaf $\mathbb{P}_t$, which generalizes some results due to Montiel in (MONTIEL, 1999). We will also extend a result due to Guan and Spruck in (GUAN; SPRUCK, 2000) from the hyperbolic ambient space $\mathbb{H}^{n+1}$ to the general situation of warped products. This extension allows us to give a slightly more general version of a result by Montiel in (MONTIEL, 1999), and to derive height estimates for compact constant mean curvature hypersurfaces with boundary in a leaf.

Keywords: mean curvature; warped product spaces; totally umbilical foliation; maximum principle.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É um resultado clássico que uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano com curvatura média constante deve ser uma esfera. Alexandrov em (ALEXANDROV, 1962) deu uma prova deste fato fazendo um uso inteligente do princípio do máximo para equações diferenciais parciais elípticas. O agora chamado método da reflexão de Alexandrov funciona também para hipersuperfícies na esfera euclidiana e espaço hiperbólico, uma vez que seu principal requisito de ter um grande número de reflexões isométricas é satisfeito em tais espaços ambiente. Uma tentativa de estender o resultado acima de varidades de curvatura seccional constante para uma classe maior de espaços Riemannianos deve considerar variedades com muitas hipersuperfícies de curvatura média constante mergulhadas. Tais hipersuperfícies desempenham o papel das umbílicas em espaços de curvatura seccional constante. Em seguida, procura-se condições geométricas em uma hipersuperfície de curvatura média constante completa imersa que a obrigue a ser uma das já classificadas. Em formas espaciais, comprova-se tais resultados de classificação usando a abundância de isometrias do espaço. Como aqui consideramos variedades ambientes mais gerais, é necessário desenvolver um método de prova adequado. Montiel em (MONTIEL, 1999) observou que uma classe natural de variedades a considerar é a de produtos warped $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ onde $\mathbb{P}^n$ é uma variedade Riemanniana completa n-dimensional, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função suave e a variedade produto $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ está munida com a métrica warped que definiremos a seguir. O objetivo geral deste trabalho consiste na procura de condições que nos permitam concluir quando uma hipersuperfície imersa num produto warped do tipo $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ é uma folha $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ da folheação $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}_t$ de $\overline{M}^{n+1}$ por meio de hipersuperfícies completas de curvatura média constante dada por $\mathscr{H}(t) = -(\log f)'(t)$. Seguiremos, de acordo com (ALÍAS; DAJCZER, 2007), o artigo intitulado “Constant Mean Curvature Hypersurfaces in Warped Product Spaces". Aqui $\mathbb{P}^n$ denota uma variedade Riemanniana completa e $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ é uma função positiva. Ademais, a variedade produto $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ está munida com a métrica warped

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2) + (f \circ \pi_{\mathbb{R}})^2 \pi_{\mathbb{P}}^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}})$$

onde $\pi_{\mathbb{R}}$ e $\pi_{\mathbb{P}}$ denotam as projeções sobre os fatores correspondentes e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}$ é a métrica Riemanniana em $\mathbb{P}$.

Dada uma variedade Riemanniana $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, um campo de vetores $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é dito conforme se a derivada de Lie com respeito a K satisfaz

$$\mathscr{L}_K\langle V,W\rangle = 2\varphi\langle V,W\rangle, \forall V,W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$$

onde $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$. Diremos que K é fechado se $\overline{\nabla}_V K = \varphi V$ para todo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, ou equivalentemente, quando sua 1-forma dual ω_K for fechada.

Aqui e em toda parte $\overline{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita em $\overline{M}^{n+1}$ e, por abuso de notação, denotamos da mesma maneira funções em $\mathbb{R}$ e seus levantamentos a $\overline{M}^{n+1}$. Em (MONTIEL, 1999) é cuidadosamente mostrado que qualquer variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ com um campo vetorial conforme fechado é localmente isométrica a uma variedade produto warped com fator unidimensional. Além disto, a isometria é global se $\overline{M}^{n+1}$ é completa e simplesmente conexa. Estendendo a bem conhecida projeção de Mercator, usada em cartografia para projetar conformemente a esfera 2-dimensional no plano euclidiano [(STRUIK, 1961), pag 173] (ver (REYNOLDS, 1993)) para o caso hiperbólico), transformamos conformemente o produto warped $\mathbb{R}\times_f \mathbb{P}^n$ em um espaço produto com fator $\mathbb{P}^n$. De fato, seja $\tau : \mathbb{R}\times\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{J}\times\mathbb{P}^n$ dada por $\tau(t,x) = (s(t),x)$ onde $\mathbb{J} = s(\mathbb{R})$ e

$$s(t) = s_0 - \int_0^t \frac{1}{f(u)}du$$

Então τ é uma isometria que reverte orientação entre $\overline{M}^{n+1}$ e $\mathbb{J}\times\mathbb{P}^n$ (munido com a métrica conforme)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \lambda^2(s)(ds^2 + \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{P}})$$

onde o fator conforme é $\lambda(s) = f(t(s))$. Suponha que $f(t)$ satisfaz $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f} < +\infty$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{f} = +\infty$, e tome $s_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f}$. Então, temos que $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ e, portanto, $\mathbb{P}^n$ age como uma *fronteira no infinito* de $\mathbb{R}\times_f\mathbb{P}^n$, assim como $\{0\}\times\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{H}^{n+1}$ e as folhas $\mathbb{P}_t$ podem ser pensadas como horoesferas em uma direção fixada de $\mathbb{H}^{n+1}$. Denotemos a curvatura média das folhas por $\mathscr{H}(t)$. Existem dois casos (após normalização) nos quais todas as folhas tem a mesma curvatura média constante $\mathscr{H}$. O primeiro é quando $\mathscr{H}(t) = 0$ ($f(t) = 1$), e o espaço ambiente é exatamente um produto Riemanniano $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}\times\mathbb{P}^n$. O segundo caso é quando $\mathscr{H}(t) = 1$ ($f(t) = e^t$ ou $f(t) = \cosh t$), e $\overline{M}^{n+1}$ pertence a classe das variedades pseudo-hiperbólicas definidas em (TASHIRO, 1965). Quando $f(t) = e^t$, o fator conforme na métrica de $\mathbb{J}\times\mathbb{P}^n$ é $\lambda(s) = \frac{1}{s}$ e as condições $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f} < +\infty$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{f} = +\infty$ são satisfeitas. Além disso, se $\mathbb{P}^n$ é Ricci flat então $\overline{M}^{n+1}$ é Einstein com curvatura de Ricci negativa, e se $\mathbb{P}^n$ é flat, então $\overline{M}^{n+1}$ é um espaço forma negativamente curvado. Assim, para $f(t) = e^t$ lidamos com espaços ambiente que tem muitas semelhanças com o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional Σ^n. Definiremos sua função altura $h \in C^\infty(\Sigma)$ como a restrição $\pi_{\mathbb{R}}|_{\psi(\Sigma)}$ de $\pi_{\mathbb{R}}$ à hipersuperfície $\psi(\Sigma)$. Analisaremos inicialmente o caso das hipersuperfícies compactas sem bordo. Como ponto de partida, enunciaremos e provaremos a seguinte proposição:

Proposição. Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$. Se

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} f(r)dr$$

então

$$\Delta(\sigma \circ h) = nf(h)\left((\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t \rangle\right)$$

Usando a proposição acima e assumindo que $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície compacta orientável e sem bordo, obteremos condições sobre a curvatura média H. A saber que $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant (\log f)'(h)$ ou $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant -(\log f)'(h)$ ao longo de Σ^n. Em outras palavras, se em todo ponto $p \in \Sigma^n$, a curvatura média da hipersuperfície não superar a curvatura média da folha na altura correspondente, então tal hipersuperfície é uma folha e o fator $\mathbb{P}^n$ é compacto. Além disso, se a curvatura média das folhas for não negativa, isto é, $(\log f)'(t) \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$ e tivermos $\mathscr{H}_0 = \inf_{\mathbb{R}}\{(\log f)'(t)\}$, então para que uma hipersuperfície compacta seja uma folha, sua curvatura média deverá satisfazer $0 \leqslant H \leqslant \mathscr{H}_0$. Uma subvariedade $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ é dita ser orientável se o seu fibrado normal é trivial, ou seja, existe um campo normal unitário globalmente definido. Por exemplo, qualquer hipersuperfície com curvatura média constante não nula é orientável. Fica então bem definida a função ângulo suave $\Theta : \Sigma^n \to [-1, 1]$ dada por $\Theta(p) = \langle N(p), \partial_t \rangle$. Se ψ for localmente um gráfico sobre $\mathbb{P}^n$, ou seja, transversal a ∂_t, temos em particular que $\Theta < 0$ ou $\Theta > 0$ ao longo de Σ^n. Assim, a hipótese de que Θ não muda de sinal é mais frágil do que se supusermos que ψ seja um gráfico local. Escolheremos a orientação N de modo que $\Theta \leqslant 0$ e então a função curvatura média é $H = \langle \overrightarrow{H}, N \rangle$.

Montiel em (MONTIEL, 1999) provou que as únicas hipersuperfícies com curvatura média constante mergulhadas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ como um gráfico sobre uma variedade Riemanniana compacta $\mathbb{P}^n$ são as folhas $\{t\} \times \mathbb{P}^n$, desde que $\log f$ seja uma função convexa. Na prova deste resultado, ele comparou a hipersuperfície com folhas e então invocou o Princípio do Máximo. A seguir enunciaremos o teorema que generaliza tal resultado bem como o corolário 8 em (MONTIEL, 1999).

Teorema. Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície compacta orientável de curvatura média constante H. Assuma que $(\log f)''(t) \geqslant 0$ e que a função ângulo Θ não muda de sinal. Então $\mathbb{P}^n$ é compacta e $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha.

Para a análise das hipersuperfícies completas usaremos o bem conhecido Princípio do Máximo de Omori-Yau enunciado a seguir:

Lema. Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Se $u \in C^\infty(M)$ é limitada inferiormente, então existe uma sequência de pontos $(p_j) \subset M$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} u(p_j) = \inf_M u,\ \|\nabla u(p_j)\| < \frac{1}{j} \text{ e } \Delta u(p_j) > \frac{-1}{j}$$

Se u for limitada superiormente, teremos:

$$\lim_{j\to\infty} u(p_j) = \sup_M u,\ \|\nabla u(p_j)\| < \frac{1}{j} \text{ e } \Delta u(p_j) < \frac{1}{j}$$

Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície completa orientável de curvatura média constante H com curvatura de Ricci limitada inferiormente e contida num bloco de $\mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$, isto é, num subconjunto do tipo $[t_1, t_2] \times \mathbb{P}^n$. Se a curvatura média das folhas $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ for não decrescente a menos de um conjunto de medida nula e a função ângulo Θ não mudar de sinal, então podemos concluir através do Princípio do Máximo de Omori-Yau que $\psi(\Sigma)$ é uma folha.

Dada uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ orientável de curvatura média constante H e fixada uma orientação N, provaremos que a aplicação $\phi \in C^\infty(\Sigma^n)$ definida por

$$\phi = \sigma(h)H + f(h)\Theta$$

é subharmônica. Para tanto, assumiremos que a função ângulo Θ não muda de sinal e que o tensor de Ricci de $\mathbb{P}^n$ satisfaz

$$Ric_{\mathbb{P}}(X,X) \geqslant (n-1)\sup_{\mathbb{R}}((f')^2 - ff'')\langle X, X\rangle_{\mathbb{P}}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{P})$, onde $Ric_{\mathbb{P}}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{P}}$ são, respectivamente, o tensor de Ricci e a métrica da variedade Riemanniana completa $\mathbb{P}^n$. Como consequência, obteremos uma generalização para o seguinte teorema devido a Guan e Spruck em (GUAN; SPRUCK, 2000).

Teorema. Seja Σ uma hipersuperfície suave de curvatura média hiperbólica constante em $\mathbb{H}^{n+1}$. Suponha que Σ pode ser escrita como um gráfico vertical $x_{n+1} = u(x)$ sobre $\mathbb{R}^n$. Então a curvatura média Euclidiana H_E de Σ é uma função subharmônica em Σ.

Em seguida obteremos o seguinte teorema:

Teorema. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície compacta orientável de curvatura média constante tal que

$$Ric_{\mathbb{P}}(X,X) \geqslant (n-1)\sup_{\mathbb{R}}((f)'^2 - ff'')\langle X,X\rangle_{\mathbb{P}}$$

Suponha que a função ângulo Θ não muda de sinal. Então $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha sobre um compacto $\mathbb{P}^n$ ou $\overline{M}^{n+1}$ possui curvatura seccional constante e Σ^n é uma hiperesfera geodésica. O último caso não pode ocorrer se assumirmos que a desigualdade para $Ric_{\mathbb{P}}$ for estrita.

Tal teorema nos fornece generalizações para dois resultados devidos a Montiel, a saber, os corolários 7 e 8 em (MONTIEL, 1999). A estensão do resultado de Guan e Spruck em (GUAN; SPRUCK, 2000) no espaço ambiente hiperbólico nos permitirá fornecer estimativas de altura para hipersuperfícies compactas de curvatura média constante com fronteira contida em uma folha de um produto ou um espaço ambiente pseudo-hiperbólico, assim estendendo resultados em (GUAN; SPRUCK, 2000) e (HOFFMAN *et al.*, 2006).Outras aplicações para gráficos com fronteira são dados em (ALIAS; DAJCZER, 2007).

2 PRELIMINARES

No presente capítulo serão apresentados os resultados cruciais e os conceitos básicos que faremos uso nos capítulos posteriores.

2.1 Gradiente, Divergência e Laplaciano

Definição 2.1.1. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. O gradiente de uma função $f \in C^{\infty}(M)$ é o campo vetorial $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ definido pelas igualdades*

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f), \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Se $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e $f, g \in C^{\infty}(M)$, o gradiente admite as seguintes propriedades:

i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

ii) $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$;

iii) $\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f$

Em particular, para cada $p \in M$, temos $\nabla f(p) \in T_pM$ e $\langle \nabla f(p), v \rangle = v(f) = df_p(v)$ para todo $v \in T_pM$. Logo, $\nabla f(p) = 0, \forall p \in M$ se, e somente se, f é uma função constante em M. Vamos provar somente a propriedade (**iii**). As demais propriedades são de simples verificação. Usando a definição de gradiente e a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(\phi \circ f), X \rangle &= d(\phi \circ f)(X) \\
&= d\phi(f)df(X) \\
&= \phi'(f)\langle \nabla f, X \rangle \\
&= \langle \phi'(f)\nabla f, X \rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(M)
\end{aligned}$$

daí, $\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f$ como queríamos.

O hessiano de $f \in C^{\infty}(M)$ é a aplicação bilinear simétrica

$$\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M)$$

definida por

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. É usual denotarmos $\nabla^2 f$ por $Hess(f)$.

Definição 2.1.2. *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ uma base ortonormal local de campos em M. A divergência de X é a função $div(X) \in C^\infty(M)$ definida localmente por*

$$div(X(p)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X(p), E_i \rangle$$

A divergência satisfaz as seguintes propriedades:

i) $div(X+Y) = div(X) + div(Y)$;

ii) $div(fX) = X(f) + f div(X) = \langle \nabla f, X \rangle + f div(X)$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Em particular, quando $X = \nabla f$ é o gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$, definimos o *laplaciano* de f denotado por Δf, onde $\Delta f \in C^\infty(M)$ pondo

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla f(p)), E_i \rangle$$

Assim, o laplaciano define um operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\Delta(f + \lambda g) = \Delta f + \lambda \Delta g$;

ii) $\Delta(\phi \circ f) = (\phi' \circ f)\Delta f + (\phi'' \circ f)\|\nabla f\|^2$;

iii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstraremos **(ii)**. Usando a propriedade **(iii)** do gradiente e a propriedade **(ii)** da divergência, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ f) &= div(\nabla(\phi \circ f)) \\
&= div((\phi' \circ f)\nabla f) \\
&= \langle \nabla(\phi' \circ f), \nabla f \rangle + (\phi' \circ f) div(\nabla f) \\
&= \langle (\phi'' \circ f)\nabla f, \nabla f \rangle + (\phi' \circ f)\Delta f \\
&= (\phi' \circ f)\Delta f + (\phi'' \circ f)\|\nabla f\|^2
\end{aligned}$$

com queríamos.

Definição 2.1.3. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Diremos que uma função $u \in C^\infty(M)$ é harmônica (respectivamente subharmônica, superharmônica), se $\Delta u = 0$ (respectivamente $\Delta u \geqslant 0$, $\Delta u \leqslant 0$) em M.*

Teorema 2.1.1. *(Teorema da Divergência) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, orientável e sem bordo. Se $u \in C^\infty(M)$, então*

$$\int_M \Delta u = 0$$

Teorema 2.1.2. *Seja (M,g) uma variedade compacta, orientável e sem bordo. Se $u \in C^\infty(M)$ é tal que $\Delta u \leqslant 0$ ou $\Delta u = 0$ ou $\Delta u \geqslant 0$, então u é constante.*

Demonstração. Faremos a prova no caso em que $\Delta u \geqslant 0$. Os demais casos são análogos. Pelo Teorema 2.1.1, temos que $\int_M \Delta u = 0$ e, como $\Delta u \geqslant 0$, segue que $\Delta u = 0$. Então, pela propriedade **(iii)** do laplaciano mencionada acima, obtemos:

$$\Delta u^2 = 2u\Delta u + 2\|\nabla u\|^2 = 2\|\nabla u\|^2 \geqslant 0$$

Repetindo o raciocínio anterior, concluímos que $\Delta u^2 = 0$. Portanto, $\nabla u = 0$ e, desse modo, u é constante. □

2.2 Campos Conformes

Definição 2.2.1. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$. Diremos que um campo de vetores $K \in \mathfrak{X}(M)$ é conforme se:*

$$\mathscr{L}_K\langle\cdot,\cdot\rangle = 2\varphi\langle\cdot,\cdot\rangle$$

para alguma função $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$, onde $\mathscr{L}_K$ é a derivada de Lie com respeito a K.

Pela derivação de tensores e sabendo que $\mathscr{L}_K(V) = [K,V]$, temos para todos $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_K\langle V,W\rangle &= K\langle V,W\rangle - \langle\mathscr{L}_K(V),W\rangle - \langle V,\mathscr{L}_K(W)\rangle \\
&= \langle\overline{\nabla}_K V,W\rangle + \langle V,\overline{\nabla}_K W\rangle - \langle\overline{\nabla}_K V - \overline{\nabla}_V K,W\rangle - \langle V,\overline{\nabla}_K W - \overline{\nabla}_W K\rangle \\
&= \langle\overline{\nabla}_V K,W\rangle + \langle V,\overline{\nabla}_W K\rangle
\end{aligned}$$

Assim, $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ será conforme se, e somente se,

$$\langle\overline{\nabla}_V K,W\rangle + \langle V,\overline{\nabla}_W K\rangle = 2\varphi\langle V,W\rangle, \forall V,W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $(\overline{M},\overline{g})$.

Definição 2.2.2. *Um campo de vetores conforme $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é dito fechado se, para qualquer $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, $\overline{\nabla}_V K = \varphi V$, onde $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$.*

A motivação para tal definição vem do fato de que dado $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, temos $\overline{\nabla}_V K = \varphi V$, para todo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$ se, e somente se, K é conforme e sua 1-forma dual $\omega_K : \mathfrak{X}(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M})$ dada por $\omega_K(V) = \langle V, K\rangle$ é fechada. De fato, mostremos inicialmente que $d\omega_K : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M})$ é dada por:

$$d\omega_K(V,W) = V(\omega_K(W)) - W(\omega_K(V)) - \omega_K([V,W])$$

Observe que a 2-forma $\overline{\omega} : \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M})$ dada por:

$$\overline{\omega}(V,W) = V(\omega_K(W)) - W(\omega_K(V)) - \omega_K([V,W])$$

é C^∞-bilinear e antisimétrica. Além disso, se $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ é um sistema de coordenadas em $\overline{M}$, podemos assumir sem perda de generalidade que ω_K é da forma $\omega_K = a dx_1$, onde $a \in C^\infty(\overline{M})$. Assim,

$$d\omega_K = da \wedge dx_1 = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_1 \wedge dx_i$$

Então, se $l < j$,

$$d\omega_K\left(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \begin{cases} 0, \text{ se } l \neq 1 \\ -\frac{\partial a}{\partial x_j}, \text{ se } l = 1 \end{cases}$$

Por outro lado, sendo $1 \leqslant l < j$, temos que $dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$ e, como $\left[\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_l}\left(a dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\right) - a dx_1\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\right) \\ &= \begin{cases} 0, \text{ se } l \neq 1 \\ -\frac{\partial a}{\partial x_j}, \text{ se } l = 1 \end{cases} \\ &= d\omega_K\left(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \end{aligned}$$

Portanto, como o sistema de coordenadas tomado em $\overline{M}$ é qualquer, segue-se que $d\omega_K = \overline{\omega}$. Agora, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$,

$$\begin{aligned} d\omega_K(V,W) &= V\langle W,K\rangle - W\langle V,K\rangle - \langle [V,W],K\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_V W, K\rangle + \langle W, \overline{\nabla}_V K\rangle - \langle \overline{\nabla}_W V, K\rangle - \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle - \langle \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V, K\rangle \\ &= \langle W, \overline{\nabla}_V K\rangle - \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle \end{aligned}$$

Portanto, K é conforme e ω_K é fechada se, e somente se, para todos $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, temos

$$\mathscr{L}_K\langle , \rangle = 2\varphi\langle , \rangle,\ \varphi \in C^\infty(M) \,\mathrm{e}\, d\omega_K = 0 \Leftrightarrow$$
$$\langle \overline{\nabla}_V K, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle = 2\varphi\langle V, W\rangle \,\mathrm{e}\, \langle \overline{\nabla}_V K, W\rangle = \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle \Leftrightarrow$$
$$\langle \overline{\nabla}_V K, W\rangle = \langle \varphi V, W\rangle \Leftrightarrow$$
$$\overline{\nabla}_V K = \varphi V,\ \forall V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$$

2.3 Teorema de Frobenius

Definição 2.3.1. *Uma distribuição k-dimensional em uma variedade M de dimensão n é uma função $\mathscr{D}$ que associa a cada $p \in M$ um subespaço de dimensão k em T_pM.*

Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ pertence a distribuição $\mathscr{D}$ se $X(p) \in \mathscr{D}(p)$, para todo $p \in M$. Diremos que $\mathscr{D}$ é C^∞ se para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e k campos de vetores $X_1, \ldots, X_k$ de classe C^∞ que formam uma base de $\mathscr{D}(q)$ para todo $q \in U$.

Definição 2.3.2. *Diremos que uma distribuição $\mathscr{D}$ de classe C^∞ é involutiva, quando ela é fechada para o operador colchete, isto é, se X e Y são campos C^∞ em D então $[X,Y] \in \mathscr{D}$.*

Definição 2.3.3. *Uma subvariedade $N \subset M$ é uma subvariedade integrável de $\mathscr{D}$ se N está contida no domínio de definição de $\mathscr{D}$ e $T_pN = \mathscr{D}(p)$ para todo $p \in N$.*

Lema 2.3.1. *Se X é um campo de vetores C^∞ em M, $p \in M$ e $X(p) \neq 0$, então existe um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ numa vizinhança U de p com $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ em U.*

Teorema 2.3.2. *(Frobenius-Local) Seja $\mathscr{D}$ uma distribuição k-dimensional, C^∞ e involutiva em M. Então, para cada $p \in M$, existe uma subvariedade integrável de $\mathscr{D}$ passando por p.*

Definição 2.3.4. *Uma folheação $\mathscr{F}$ de dimensão k em uma variedade M de dimensão n é uma coleção de subvariedades de M, k-dimensionais, disjuntas, conexas e imersas em M (chamadas as folhas da folheação) cuja união é M e tal que em uma vizinhança de cada $p \in M$ existe uma carta suave (U, φ) com a propriedade que $\varphi(U)$ é um produto de conjuntos conexos abertos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e cada folha da folheação não intersecta U ou intersecta U numa união enumerável de folhas k-dimensionais da forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$, onde $c^{k+1}, \ldots, c^n$ são constantes. (Uma tal carta é chamada uma carta flat para a folheação).*

Lema 2.3.3. *Sejam $X_1,\dots,X_k$ campos de vetores definidos em M tais que $[X_i,X_j]=0$ para quaisquer $i,j\in\{1,\dots,k\}$. Suponha que para todo $q\in M$, $X_1(q),\dots,X_k(q)$ formem uma base de $\mathscr{D}(q)$. Então existe uma folheação $\mathscr{F}$ de dimensão k em M tal que $T_q\mathscr{F}=\mathscr{D}(q)$.*

Teorema 2.3.4. *(Frobenius) Seja $\mathscr{D}$ uma distribuição k-dimensional de classe C^∞ e involutiva em M. Então existe uma folheação $\mathscr{F}$ de dimensão k e classe C^∞ em M tal que $T_q\mathscr{F}=\mathscr{D}(q)$, para todo $q\in M$.*

2.4 Hipersuperfícies

Seja $\psi:\Sigma\to\overline{M}$ uma imersão de uma variedade Σ de dimensão n numa variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+1$.

Se ∇ e $\overline{\nabla}$ são as conexões de Levi-Civita de Σ e $\overline{M}$, respectivamente, então

$$(\overline{\nabla}_V W)^\top=\nabla_V W \text{ e } \overline{\nabla}_V W=\nabla_V W+\alpha(V,W)$$

onde $\alpha: T\overline{M}\times T\overline{M}\to T\overline{M}^\perp$ dada por $\alpha(V,W)=(\overline{\nabla}_V W)^\perp$ é a 2ª forma fundamental de ψ. Associamos a α o operador linear autoadjunto $A:\mathfrak{X}(\Sigma)\to\mathfrak{X}(\Sigma)$ dado por

$$\langle A(V),W\rangle=\langle\alpha(V,W),N\rangle=\langle\overline{\nabla}_V W,N\rangle$$

onde $N\in\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$. Chamamos A de operador de forma de Σ associado a N.

Para quaisquer $V,W\in\mathfrak{X}(\Sigma)$, obtemos:

$$0=V\langle N,W\rangle=\langle\overline{\nabla}_V N,W\rangle+\langle N,\overline{\nabla}_V W\rangle$$

e

$$0=V\langle N,N\rangle=2\langle\overline{\nabla}_V N,N\rangle\Rightarrow\overline{\nabla}_V N=(\overline{\nabla}_V N)^\top$$

Logo, $A(V)=-\overline{\nabla}_V N, \forall V\in\mathfrak{X}(\Sigma)$.

Lema 2.4.1. *Sejam R_Σ e $\overline{R}$ os operadores curvatura de Σ e $\overline{M}$, respectivamente. Então, para quaisquer campos de vetores X,Y,Z e $W\in\mathfrak{X}(\Sigma)$ temos:*

a) *(Equação de Gauss)*

$$\langle R_\Sigma(X,Y)Z,W\rangle=\langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle+\langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle-\langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle$$

b) *(Equação de Codazzi)*

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,N\rangle=\langle(\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X,Z\rangle$$

ou equivalentemente,

$$(\overline{R}(X,Y)N)^{\top} = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y$$

Definição 2.4.1. *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \to T\Sigma^n$ um 1-tensor. A derivada covariante de A é a aplicação $\nabla A : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \to T\Sigma^n$ dada por*

$$\nabla A(X,Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)$$

Proposição 2.4.2. *Sejam $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \to T\Sigma^n$ um 1-tensor. Então, a derivada covariante ∇A é bilinear.*

Proposição 2.4.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \to T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. Então, ∇A é simétrica.*

Definição 2.4.2. *Dado um tensor simétrico $T : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \to T\Sigma^n$, definimos o traço de T como sendo o campo trT dado por*

$$trT = \sum_{i=1}^{n} T(E_i, E_i)$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em $T\Sigma^n$.

Proposição 2.4.4. *Dada uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, seja $A : T\Sigma^n \to T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. Então*

$$tr(\nabla A) = grad(trA)$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal tal que A em $p \in \Sigma$ é diagonalizada, e sejam $c_1(p), \ldots, c_n(p)$ os autovalores associados a $E_1(p), \ldots, E_n(p)$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
\langle grad(trA), X\rangle &= X(trA) \\
&= X\left(\sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X AE_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, \nabla_X E_i\rangle \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

para todo $X \in T\Sigma$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla A(X,Y),Z\rangle &= \langle \nabla_Y(AX)-A(\nabla_Y X),Z\rangle \\
&= \langle \nabla_Y(AX),Z\rangle - \langle A(\nabla_Y X),Z\rangle \\
&= Y\langle AX,Z\rangle - \langle AX,\nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_Y X,AZ\rangle \\
&= Y\langle X,AZ\rangle - \langle X,A(\nabla_Y Z)\rangle - \langle \nabla_Y X,AZ\rangle \\
&= Y\langle X,AZ\rangle - \langle X,A(\nabla_Y Z)\rangle - \{Y\langle X,AZ\rangle - \langle X,\nabla_Y AZ\rangle\} \\
&= \langle X,\nabla_Y AZ\rangle - \langle X,A(\nabla_Y Z)\rangle \\
&= \langle \nabla A(Y,Z),X\rangle
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Usando (2.2) temos

$$\begin{aligned}
\langle tr(\nabla A),X\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \nabla A(E_i,E_i),X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla A(E_i,E_i),X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla A(E_i,X),E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(AE_i)-A(\nabla_X E_i),E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_X(AE_i),E_i\rangle - \langle A(\nabla_X E_i),E_i\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_X(AE_i),E_i\rangle - \langle AE_i,\nabla_X E_i\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(AE_i),E_i\rangle
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde a última igualdade segue do seguinte fato:

$$\begin{aligned}
\langle AE_i,\nabla_X E_i\rangle(p) &= \langle c_iE_i,\nabla_X E_i\rangle(p) \\
&= c_i(p)\langle E_i,\nabla_X E_i\rangle(p) \\
&= \frac{c_i(p)}{2} X\langle E_i,E_i\rangle(p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, segue de (2.1) e (2.2) que

$$tr(\nabla A) = grad(trA)$$

□

2.5 Campos Conformes Fechados, Folheações Umbílicas e Warped Products

O teorema a seguir afirma que se $\overline{M}$ for uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ então K determina uma folheção $\mathscr{F}(K)$ de $\overline{M}$ por hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante.

Teorema 2.5.1. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$, $n \geqslant 1$, munida de um campo não nulo K conforme e fechado. Então temos que*

a) *O conjunto $\mathscr{Z}(K) = \{p \in \overline{M} : K(p) = 0\}$ é discreto.*

b) *O campo unitário $\nu = \dfrac{K}{|K|}$ definido no aberto denso $\overline{M}' = \overline{M} - \mathscr{Z}(K)$ satisfaz*

$$\overline{\nabla}_\nu \nu = 0 \text{ e } \overline{\nabla}_V \nu = \frac{\varphi}{|K|} V \text{ se } \langle V, \nu \rangle = 0$$

Em particular, o fluxo de ν é um fluxo geodésico normalizado.

c) *A distribuição n-dimensional $\mathscr{D}$ definida em $\overline{M}'$ por*

$$p \in \overline{M}' \longmapsto \mathscr{D}(p) = \{V \in T_p\overline{M}; \langle K(p), V \rangle = 0\}$$

determina uma folheação Riemanniana umbílica de codimensão 1 orientada por ν. Além disso, as funções $|K|$, $divK$ e $K(\varphi)$ são constantes nas folhas conexas de $\mathscr{F}(K)$ e cada folha tem curvatura média constante $H_{\mathscr{F}} = -\frac{divK}{(n+1)|K|}$.

Demonstração. **Prova de a)** Seja $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ um referencial local ortonormal em $\overline{M}$. Pelo fato de K ser conforme e fechado, caracterizamos a função φ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} divK &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{E_i} K, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \varphi \langle E_i, E_i \rangle \\ &= \varphi \sum_{i=1}^{n+1} \langle E_i, E_i \rangle \\ &= (n+1)\varphi \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi = \frac{1}{(n+1)} divK \tag{2.4}$$

Além disso, para todo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \langle K,K \rangle, V \rangle &= V(\langle K,K \rangle) \\
&= 2\langle \nabla_V K, K \rangle \\
&= 2\langle \varphi V, K \rangle \\
&= \langle 2\varphi K, V \rangle
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\nabla |K|^2 &= 2\varphi K \\
&= \frac{2}{n+1}(divK)K
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sejam $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Calculando o hessiano da função $|K|^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
Hess\langle K,K \rangle (V,W) &= \langle \overline{\nabla}_V \nabla \langle K,K \rangle, W \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_V (2\varphi K), W \rangle \\
&= \langle 2\varphi \overline{\nabla}_V K + 2V(\varphi)K, W \rangle \\
&= 2\varphi^2 \langle V,W \rangle + 2V(\varphi)\langle K,W \rangle
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando a simetria de $Hess\langle K,K \rangle$ e da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos

$$V(\varphi)\langle K,W \rangle = W(\varphi)\langle K,V \rangle, \forall V,W \in \mathfrak{X}(\overline{M}) \tag{2.7}$$

ou ainda,

$$\langle \nabla \varphi, V \rangle \langle K,W \rangle = \langle \nabla \varphi, W \rangle \langle K,V \rangle$$

Fazendo $W = K$, obtemos:

$$\langle \nabla \varphi, V \rangle \langle K,K \rangle = \langle \nabla \varphi, K \rangle \langle K,V \rangle$$

ou seja,

$$\langle \langle K,K \rangle \nabla \varphi, V \rangle = \langle K(\varphi)K, V \rangle \tag{2.8}$$

portanto,

$$\langle K,K \rangle grad\, \varphi = K(\varphi)K$$

Por (OBATA, 1970), segue que K, $\overline{\nabla}_V K$, φ e $\nabla\varphi$ formam uma solução de um sistema integrável de primeira ordem. A unicidade da solução desse sistema implica que se todos eles se anulam em um mesmo ponto, então o campo K é identicamente nulo. Em nosso caso, como o campo K é fechado e de acordo com as equações obtidas, temos que φ não pode se anular nos zeros de K. Seja $p \in \mathscr{Z}(K)$. Então,

$$\nabla\langle K,K\rangle(p) = 2\varphi(p)K(p) = 0 \text{ e } Hess\langle K,K\rangle(p) \neq 0$$

Portanto p é um ponto crítico isolado.

Prova de b) Considere o campo unitário $\nu = \frac{K}{|K|}$ definido em $\overline{M}' = \overline{M} - \mathscr{Z}(K)$. Como $\langle \nu, \nu\rangle = 1$, temos que

$$0 = \nu\langle \nu,\nu\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, \nu\rangle = \tfrac{2}{|K|}\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, K\rangle$$

donde $\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, K\rangle = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_\nu \nu &= \overline{\nabla}_\nu \left(\frac{K}{|K|}\right)\\
&= \nu\left(\frac{1}{|K|}\right)K + \frac{1}{|K|}\overline{\nabla}_\nu K\\
&= \nu\left(\frac{1}{|K|}\right)K + \frac{1}{|K|}\varphi\nu\\
&= \left(\nu\left(\frac{1}{|K|}\right) + \frac{\varphi}{|K|^2}\right)K
\end{aligned}$$

Logo, $\overline{\nabla}_\nu \nu = 0$ e o fluxo de ν é um fluxo geodésico normalizado. Além disso, se $\langle V, \nu\rangle = 0$ então

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V \nu &= \overline{\nabla}_V \left(\frac{K}{|K|}\right)\\
&= V\left(\frac{1}{|K|}\right)K + \frac{1}{|K|}\overline{\nabla}_V K\\
&= V\left(\frac{1}{|K|}\right)|K|\nu + \frac{\varphi}{|K|}V\\
&= \frac{\varphi}{|K|}V \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

pois, $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ implica que $\langle \overline{\nabla}_V \nu, \nu\rangle = \frac{1}{2}V\langle \nu,\nu\rangle = 0$.

Prova de c) Sejam $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Como K é fechado, temos

$$\begin{aligned}
\langle K, [V,W] \rangle &= \langle K, \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V \rangle \\
&= \langle K, \overline{\nabla}_V W \rangle - \langle K, \overline{\nabla}_W V \rangle \\
&= V\langle K, W \rangle - \langle \overline{\nabla}_V K, W \rangle - W\langle K, V \rangle + \langle \overline{\nabla}_W K, V \rangle \\
&= V\langle K, W \rangle - \varphi \langle V, W \rangle - W\langle K, V \rangle + \varphi \langle W, V \rangle \\
&= V\langle K, W \rangle - W\langle K, V \rangle
\end{aligned}$$

Portanto, se $V, W \in \mathscr{D}$ então $[V,W] \in \mathscr{D}$. Logo, $\mathscr{D}$ é involutiva e, pelo Teorema de Frobenius, existe uma folheação $\mathscr{F}(K)$ de dimensão n e de classe C^∞ em $\overline{M}$ tal que $T_q\mathscr{F}(K) = \mathscr{D}(q)$, para todo $q \in \overline{M}$, a qual é orientável por ν pela própria definição de $\mathscr{D}$.

Em particular, se $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é tangente a uma folha, então por (2.2), temos que $\langle \nabla |K|^2, V \rangle = 0$. Logo, $|K|$ é constante em cada folha conexa de $\mathscr{F}(K)$.

Também, se $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é tangente a uma folha, então por (2.5), temos que $\langle \nabla \varphi, V \rangle = 0$. Logo, φ é constante em cada folha conexa de $\mathscr{F}(K)$. Agora, mostremos que $K(\varphi)$ é constante em cada folha. Derivando covariantemente a equação (2.4), temos por um lado

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y \left(\langle \nabla \varphi, V \rangle \langle K, W \rangle \right) &= \Big(\langle \overline{\nabla}_Y \nabla \varphi, V \rangle + \langle \nabla \varphi, \overline{\nabla}_Y V \rangle \Big) \langle K, W \rangle + \\
&+ \Big(\langle \overline{\nabla}_Y K, W \rangle + \langle K, \overline{\nabla}_Y W \rangle \Big) V(\varphi) \\
&= Hess\, \varphi(Y,V) \langle K, W \rangle + \frac{K(\varphi)}{|K|^2} \langle K, \overline{\nabla}_Y V \rangle \langle K, W \rangle + \\
&+ \varphi V(\varphi) \langle Y, W \rangle + \frac{K(\varphi)}{|K|^2} \langle K, V \rangle \langle K, \overline{\nabla}_Y W \rangle
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y \left(\langle \nabla \varphi, W \rangle \langle K, V \rangle \right) &= Hess \varphi(Y,W) \langle K, V \rangle + \\
&+ \frac{K(\varphi)}{|K|^2} \langle K, \overline{\nabla}_Y W \rangle \langle K, V \rangle + \varphi W(\varphi) \langle Y, V \rangle + \\
&+ \frac{K(\varphi)}{|K|^2} \langle K, W \rangle \langle K, \overline{\nabla}_Y V \rangle
\end{aligned}$$

Igualando as duas expressões obtidas ficamos com

$$Hess \varphi(Y,V) \langle K, W \rangle + \varphi V(\varphi) \langle Y, W \rangle = Hess \varphi(Y,W) \langle K, V \rangle + \varphi W(\varphi) \langle Y, V \rangle$$

Fazendo $W = Y = K$ e tomando V ortogonal a K, obtemos

$$Hess \varphi(K,V) = 0$$

Portanto, como o campo K é fechado, temos

$$\begin{aligned} V(K(\varphi)) &= V\langle \nabla\varphi, K\rangle \\ &= Hess\varphi(V,K) + (\overline{\nabla}_V K)\varphi \\ &= \varphi V(\varphi) \\ &= \varphi\langle \nabla\varphi, V\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $K(\varphi)$ é constante em cada folha conexa de $\mathscr{F}(K)$. Seja $\mathscr{F}_p$ uma folha conexa de $\mathscr{F}(K)$ passando pelo ponto $p \in \overline{M}$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial local ortonormal de $\mathscr{F}_p$, então as curvaturas principais de $\mathscr{F}_p$ são dadas por:

$$k_i = \langle -\overline{\nabla}_{E_i}\nu, E_i\rangle = -\tfrac{\varphi}{|K|}$$

Portanto cada folha $\mathscr{F}_p$ de $\mathscr{F}(K)$ é totalmente umbílica com curvatura média constante $H_{\mathscr{F}} = -\frac{\varphi}{|K|}$. □

Sejam B e F variedades diferenciáveis e considere a variedade produto $B \times F$. Usando sistemas de coordenadas em $B \times F$ verificamos que (ver (O'NEILL, 1983)):

i) As projeções

$$\pi_B : B \times F \to B,\ \pi_B(p,q) = p$$
$$\pi_F : B \times F \to F,\ \pi_F(p,q) = q$$

são aplicações C^∞.

ii) Uma aplicação $\phi : P \to B \times F$ é C^∞ se, e somente se, $\pi_B \circ \phi$ e $\pi_F \circ \phi$ são C^∞. Aqui P é uma variedade diferenciável.

iii) Para cada $(p,q) \in B \times F$, os subconjuntos

$$B \times \{q\} = \{(r,q) \in B \times F : r \in B\}$$
$$\{p\} \times F = \{(p,r) \in B \times F : r \in F\}$$

são subvariedades de $B \times F$.

iv) Para cada $(p,q) \in B \times F$,

$$\pi_{B|_{B\times\{q\}}} \text{ é um difeomorfismo de } B \times \{q\} \text{ em } B$$
$$\pi_{F|_{\{p\}\times F}} \text{ é um difeomorfismo de } \{p\} \times F \text{ em } F$$

v) Os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}(B\times\{q\}) \text{ e } T_{(p,q)}(\{p\}\times F)$$

são subespaços do espaço tangente $T_{(p,q)}(B\times F)$.

Além disso, $T_{(p,q)}(B\times F)=T_{(p,q)}(B\times\{q\})\oplus T_{(p,q)}(\{p\}\times F)$, ou seja, cada $v\in T_{(p,q)}(B\times F)$ é escrito de maneira única como $v=x+y$, onde $x\in T_{(p,q)}(B\times\{q\})$ e $y\in T_{(p,q)}(\{p\}\times F)$.

Para relacionarmos a geometria da variedade produto $B\times F$ com a geometria das variedades B e F, é crucial a noção de levantamento para $B\times F$ de funções e de vetores tangentes de B e de F, como se segue:

a) Se $f\in C^\infty(B)$, o levantamento de f para $B\times F$ é $\tilde{f}=f\circ\pi_B\in C^\infty(B\times F)$.

b) Se $x\in T_pB$ e $q\in F$, o levantamento $\tilde{x}$ de x para $B\times F$ é o único vetor em $T_{(p,q)}(B\times\{q\})$ tal que $d\pi_B(\tilde{x})=x$.

c) Se $X\in\mathfrak{X}(B)$, o levantamento de X para $B\times F$ é o campo de vetores $\tilde{X}$ que em cada (p,q) é o levantamento de $X(p)$ para $B\times F$. Equivalentemente, o levantamento $\tilde{X}$ de X para $B\times F$ é o único campo $\tilde{X}\in\mathfrak{X}(B\times F)$ tal que $d\pi_B(\tilde{X})=X$ e $d\pi_F(\tilde{X})=0$. Neste caso, $\tilde{X}$ é dito um levantamento horizontal.

O conjunto dos levantamentos horizontais é denotado por $\mathscr{H}(B)$. Funções, vetores tangentes e campos de vetores em F são levantados para $B\times F$ de maneira análoga, usando a projeção π_F. Deste modo, obtemos o conjunto $\mathscr{V}(F)$ dos levantamentos verticais. Notemos que $\mathscr{H}(B)$ e $\mathscr{V}(F)$ são subespaços vetoriais de $\mathfrak{X}(B\times F)$.

Temos os seguintes resultados:

i) Se $\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathscr{H}(B)$ então $[\tilde{X},\tilde{Y}]\in\mathscr{H}(B)$ (o mesmo ocorre em $\mathscr{V}(F)$).

ii) Se $\tilde{X}\in\mathscr{H}(B)$ e $\tilde{V}\in\mathscr{V}(F)$ então $[\tilde{X},\tilde{V}]=0$.

Para provar **(i)** e **(ii)**, basta observar que $d\pi_B[\tilde{X},\tilde{Y}]=[d\pi_B(\tilde{X}),d\pi_B(\tilde{Y})]$ (o mesmo ocorre com π_F).

Definição 2.5.1. *Sejam (B,g_B) e (F,g_F) duas variedades Riemannianas e seja $f\in C^\infty(B\times F)$ uma função positiva. Chama-se warped product de B e F com warped function f a variedade produto $\overline{M}=B\times_f F$ munida da métrica*

$$g=\pi_B^*(g_B)+(f\circ\pi_B)^2\pi_F^*(g_F)$$

Como no caso da variedade produto Riemanniana, temos que as folhas $\{p\}\times F=\pi_B^{-1}(p)$ e as fibras $B\times\{q\}=\pi_F^{-1}(q)$ são subvariedades Riemannianas de $\overline{M}$, e a métrica warped é caracterizada por:

i) Para cada $q\in F$, a aplicação $\pi_B|_{B\times\{q\}}$ é uma isometria sobre B.

ii) Para cada $p \in B$, a aplicação $\pi_F|_{\{p\}\times F}$ é uma homotetia positiva sobre F, com fator de homotetia $\dfrac{1}{f(p)}$.

iii) Para cada $(p,q) \in \overline{M}$, a fibra $B \times \{q\}$ e a folha $\{p\} \times F$ são ortogonais em (p,q).

Proposição 2.5.2. *Seja o warped product $\overline{M} = B \times_f F$. Se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathscr{H}(B)$ e $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathscr{V}(F)$, são os levantamentos de X, Y, V e W, respectivamente. Então:*

i) *$\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \in \mathscr{H}(B)$ é o levantamento de $\nabla_X Y$ em B.*

ii) $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V} = \overline{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{X} = \dfrac{\tilde{X}(f)}{f}\tilde{V}$

Demonstração. **i)** Como $[\tilde{X}, \tilde{V}] = [\tilde{Y}, \tilde{V}] = 0$, a fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{V}\rangle &= \tilde{X}\langle \tilde{Y}, \tilde{V}\rangle + \tilde{Y}\langle \tilde{V}, \tilde{X}\rangle - \tilde{V}\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle - \langle \tilde{X}, [\tilde{Y}, \tilde{V}]\rangle + \\ &+ \langle \tilde{Y}, [\tilde{V}, \tilde{X}]\rangle + \langle \tilde{V}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\rangle \end{aligned}$$

se reduz a $2\langle \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{V}\rangle = -\tilde{V}\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle + \langle \tilde{V}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\rangle$. Sendo $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ levantamentos de B, tem-se que $\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle$ é constante nas folhas e, como $\tilde{V}$ é vertical, obtém-se $\tilde{V}\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle = 0$. Mas $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ é tangente às fibras assim, $\langle \tilde{V}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\rangle = 0$. Logo, $\langle \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{V}\rangle = 0$ para todo $\tilde{V} \in \mathscr{V}(F)$, ou seja, $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ é horizontal. Portanto, como $\pi_B|_{B\times\{q\}}$ é uma isometria sobre B, segue que $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \in \mathscr{H}(B)$ é o levantamento de $\nabla_X Y$ em B.

ii) Como $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$, temos que $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V} = \overline{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{X}$ e estes campos de vetores são verticais, pois (por **(i)**), $\langle \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V}, \tilde{Y}\rangle = -\langle \tilde{V}, \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\rangle$. Assim, todos os termos na fórmula de Koszul para $2\langle \overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V}, \tilde{W}\rangle$ se anulam, exceto $\tilde{X}\langle \tilde{V}, \tilde{W}\rangle$. Pela definição da métrica warped,

$$\langle \tilde{V}, \tilde{W}\rangle_{(p,q)} = f^2(p) g_F(V(q), W(q))$$

onde estamos identificando f com $f \circ \pi_B$.

Assim, temos $\langle \tilde{V}, \tilde{W}\rangle = f^2(g_F(V,W) \circ \pi_F)$, onde o termo dentro do parênteses é constante nas fibras, as quais $\tilde{X}$ é tangente. Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{X}\langle \tilde{V}, \tilde{W}\rangle &= \tilde{X}[f^2(g_F(V,W) \circ \pi_F)] \\ &= 2f\tilde{X}(f)(g_F(V,W) \circ \pi_F) \\ &= 2\frac{\tilde{X}(f)}{f}\langle V, W\rangle \end{aligned}$$

donde $\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{V} = \frac{\tilde{X}(f)}{f}V$.

□

Consideremos um warped product do tipo $I \times_f F$ com a métrica warped

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \pi_I^*(ds^2) + (f\circ\pi_I)\pi_F^*\langle\cdot,\cdot\rangle_F$$

onde I é uma variedade de dimensão 1 e F é uma variedade Riemanniana de dimensão n. O campo de vetores $K(t,q) = (f\circ\pi_I)\partial_t \in \mathfrak{X}(I\times_f F)$ é fechado e não possui singularidades. Com efeito, identifiquemos f com $f\circ\pi_I$. Visto que $\langle\partial_t,\partial_t\rangle = 1$, temos $0 = \partial_t\langle\partial_t,\partial_t\rangle = 2\langle\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t,\partial t\rangle$. Pelo item **(i)** da proposição anterior, $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$. Logo, para todo $V\in\mathfrak{X}(I\times_f F)$, temos $V = v_0\partial_t + V_F$, onde $v_0\in C^\infty(I\times_f F)$. Agora, pelo item **(ii)** da proposição anterior,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V K &= v_0\overline{\nabla}_{\partial_t} + f\partial_t\overline{\nabla}_{V_F} f\partial_t \\
&= v_0 f'\partial_t + f'V_F \\
&= f'(v_0\partial_t + V_F) \\
&= f'V
\end{aligned}$$

Logo, K é um campo conforme fechado em $I\times_f F$, onde $f' = \frac{1}{n+1}divK$ e as folhas $\{t\}\times F$ tem curvatura média dada por $H_F = -\frac{f'}{f}$.

Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com um campo conforme fechado K. Afirmamos que $\overline{M}$ é um warped product. Com efeito, seja $p\in\overline{M}'$ e $\mathscr{F}_p$ uma folha de $\mathscr{F}(K)$ passando por p. Pelo Teorema de existência e unicidade das equações diferenciais, existe uma vizinhança V de p em $\mathscr{F}_p$ e um intervalo aberto I contendo a origem tal que o fluxo do campo ν, que denotaremos por F_t, está definido em V, $\forall t\in I$. Podemos então definir a aplicação

$$\psi : I\times V \to M \text{ por } \psi(t,q) = F_t(q)$$

então

$$(d\psi)_{(t,q)}(1,0) = \nu_{\psi(t,q)}$$
$$(d\psi)_{(t,q)}(0,u) = (dF_t)_q(u) \text{ onde } u\in T_q\mathscr{F}_p$$

Como F_t é um fluxo homotético sobre as folhas de $\mathscr{F}(K)$, temos

$$|d\psi_{(t,q)}(1,0)| = 1$$
$$\langle(d\psi)_{(t,q)}(1,0),(d\psi)_{(t,q)}(0,u)\rangle = 0$$
$$|(d\psi)_{(t,q)}(0,u)| = |(dF_t)_q(u)| = \mu(t,q)|u|$$

onde $\mu(t,q) = \frac{|K_{\psi(t,q)}|}{|K_q|}$ não depende de q, pois $|K|$ é constante em $\mathscr{F}_p$. Se considerarmos o produto $I\times V$ com a métrica

$$g = \pi_I^*(ds^2) + |K_\psi|^2\pi_V^*\left(\frac{1}{|K_p|^2}g_p\right)$$

onde g_p é a métrica induzida sobre $\mathscr{F}_p$, ψ será uma isometria local. De fato, dado $w \in \mathbb{R} \times T_q\mathscr{F}_p$, temos que $W = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in \mathbb{R}$ e $w_2 \in T_q\mathscr{F}_p$.Daí,

$$d\psi(W) = w_1\nu + dF_t w_2 \Rightarrow |d\psi(W)|^2 = |w_1|^2 + \left(\frac{|K_{\psi(t,q)}|}{|K_p|}\right)^2 |w_2|^2 = |W|^2$$

Assim achamos uma vizinhança de p em $\overline{M}$ que é isométrica a um produto do tipo $I \times_f V$ com $f = |K_{F_t(p)}|, t \in I$. Nesta representação o campo K é dado por $K(t,q) = f(t)\partial_t$ e as folhas são conjuntos do tipo $\{t\} \times V$.

Suponha que a variedade $\overline{M}$ é completa e que K não possui zeros. Então a aplicação ψ está definida em $\mathbb{R} \times \mathscr{F}_p$ e as folhas de $\mathscr{F}(K)$ são também subvariedades completas. Logo, ψ é um recobrimento Riemanniano de $\overline{M}$.

Para o leitor interessado em detalhes computacionais sobre warped products, recomendamos (JÚNIOR, 2011).

3 CONDIÇÕES SOBRE A CURVATURA MÉDIA H E A FUNÇÃO ÂNGULO Θ

Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional Σ^n. Definimos sua função altura $h \in C^\infty(\Sigma)$ como a restrição da projeção $\pi_\mathbb{R}$ a $\psi(\Sigma)$, ou seja, $h = \pi_\mathbb{R}|_{\psi(\Sigma)}$. Iniciaremos este capítulo apresentando uma proposição que fornece o laplaciano de $\sigma \circ h \in C^\infty(\Sigma)$, onde $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $\sigma'(t) = f(t)$. Usando tal proposição e outras hipóteses adicionais sobre a hipersuperfície ψ tais como orientabilidade, compacidade e ausência de bordo, concluiremos que $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ da folheação $t \in \mathbb{R} \longmapsto \{t\} \times \mathbb{P}^n$ de $\mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ por meio de hipersuperfícies completas. Examinaremos também o caso das hipersuperfícies completas via o Princípio do Máximo de Omori-Yau.

Proposição 3.0.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$. Se*

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} f(r)dr$$

então

$$\Delta \circ \sigma(h) = nf(h)\left((\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t \rangle\right) \tag{3.1}$$

onde $\partial_t \in T\overline{M}$.

Demonstração. O gradiente de $\pi_\mathbb{R} \in C^\infty(\overline{M})$ é o campo $\overline{\nabla}\pi_\mathbb{R}$ definido pelas igualdades:

$$\langle \overline{\nabla}\pi_\mathbb{R}, X \rangle = d\pi_\mathbb{R}(X) = X(\pi_\mathbb{R})$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Seja $\{\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n\}$ um referencial ortonormal local em $\overline{M}$. Então, $\partial_i(\pi_\mathbb{R}) = d\pi_\mathbb{R}(\partial_i) = 0 = \langle \partial_t, \partial_i \rangle$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $\partial_t(\pi_\mathbb{R}) = d\pi_\mathbb{R}(\partial_t) = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1$. Podemos escrever cada $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ como

$$X = a\partial_t + \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i$$

onde $a, x_i \in C^\infty(\overline{M})$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}}, X \rangle &= X(\pi_{\mathbb{R}}) \\
&= a\partial_t(\pi_{\mathbb{R}}) + \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i(\pi_{\mathbb{R}}) \\
&= a\langle \partial_t, \partial_t \rangle + \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \partial_i, \partial_t \rangle \\
&= \langle a\partial_t, \partial_t \rangle + \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i, \partial_t \rangle \\
&= \langle \partial_t, a\partial_t + \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i \rangle \\
&= \langle \partial_t, X \rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(\overline{M})
\end{aligned}
$$

Logo, $\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}} = \partial_t$. Por outro lado, como

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}} &= (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\top + (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\perp \\
&= \overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}}|_{\psi(\Sigma)} + (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\perp \\
&= \nabla(\pi_{\mathbb{R}} \circ \psi) + (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\perp \\
&= \nabla h + (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\perp
\end{aligned}
$$

segue que $\nabla h = (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\top = \partial_t^\top$, onde $(\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\top$ denota a componente tangencial de $\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}}$ ao longo de Σ. Se N é um campo normal unitário definido localmente, então

$$
\nabla h = \partial_t^\top = \partial_t - \langle \partial_t, N \rangle N \tag{3.2}
$$

Por outro lado, podemos escrever cada $V \in T\overline{M}$ como $V = V_{\mathbb{R}} + V_{\mathbb{P}}$, onde $V_{\mathbb{R}} = v\partial_t$ e $V_{\mathbb{P}}$ são as projeções sobre a base $\mathbb{R}$ e a fibra $\mathbb{P}$, respectivamente e $v \in C^\infty(\overline{M})$. Desse modo, tendo em vista que $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0$, e que folhas e fibras são ortogonais, obtemos

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_V \partial_t &= \overline{\nabla}_{v\partial_t + V_{\mathbb{P}}} \partial_t \\
&= v\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + \overline{\nabla}_{V_{\mathbb{P}}} \partial_t \\
&= \overline{\nabla}_{V_{\mathbb{P}}} \partial_t \\
&= \overline{\nabla}_{\partial_t} V_{\mathbb{P}} \\
&= \frac{\partial_t(f)}{f} V_{\mathbb{P}} \\
&= (\log f)'(V - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t)
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

para qualquer $V \in T\overline{M}$.

Segue-se de (3.2) e (3.3) que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \nabla h &= \overline{\nabla}_X(\partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N) \\
&= \overline{\nabla}_X \partial_t - \overline{\nabla}_X(\langle \partial_t, N\rangle N) \\
&= (\log f)'(h)(X - \langle X, \partial_t\rangle \partial_t) - \langle \partial_t, N\rangle \overline{\nabla}_X N - X\langle \partial_t, N\rangle N \\
&= (\log f)'(h)(X - \langle X, \partial_t\rangle \partial_t) + \langle \partial_t, N\rangle AX - X\langle \partial_t, N\rangle N \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

para qualquer $X \in T\Sigma$. Aqui $AX = -\overline{\nabla}_X N$ denota a 2ª forma fundamental de ψ com respeito a N. Daí, tomando a componente tangencial, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla h &= (\overline{\nabla}_X \nabla h)^\top \\
&= (\log f)'(h)(X - \langle X, \partial_t\rangle \partial_t^\top) + \langle \partial_t, N\rangle AX \\
&= (\log f)'(h)(X - \langle X, \nabla h\rangle \nabla h) + \langle \partial_t, N\rangle AX \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita em Σ.

Fixemos $p \in \Sigma$ e tomemos um referencial local ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em $T_p\Sigma$. Daí, usando (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta h &= div(\nabla h) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla h, E_i\rangle \\
&= \sum \left(\langle (\log f)'(h)\left(E_i - \langle E_i, \nabla h\rangle \nabla h\right) + \langle N, \partial_t\rangle AE_i, E_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\log f)'(h)\left(E_i - \langle E_i, \nabla h\rangle\right), E_i\rangle + \langle \partial_t, N\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle \\
&= (\log f)'(h) \left(\sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, \nabla h\rangle^2\right) + \langle \partial_t, N\rangle tr(A) \\
&= (\log f)'(h)\left(n - \|\nabla h\|^2\right) + \langle \partial_t, N\rangle nH \\
&= (\log f)'(h)\left(n - \|\nabla h\|^2\right) + n\langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Visto que $\nabla\sigma(h) = f(h)\nabla h$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma(h) &= div(\nabla\sigma(h))\\
&= div(f(h)\nabla h)\\
&= f(h)div\nabla h + \langle \nabla f(h), \nabla h\rangle\\
&= f(h)\Delta h + \langle f'(h)\nabla h, \nabla h\rangle\\
&= f(h)\Delta h + f(h)\|\nabla h\|^2\\
&= f(h)\left((\log f)'(h)(n-\|\nabla h\|^2) + n\langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle\right) + f'(h)\|\nabla h\|^2\\
&= nf(h)(\log f)'(h) - f(h)\|\nabla h\|^2(\log f)'(h) + nf(h)\langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle + f'(h)\|\nabla h\|^2\\
&= nf(h)\left((\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle\right)
\end{aligned}$$

o que conclui a prova.

□

Analisaremos inicialmente o caso das hipersuperfícies compactas sem bordo.

Proposição 3.0.2. *Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}\times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície compacta e $\overrightarrow{H}$ o seu vetor curvatura média. Se tivermos*

$$\|\overrightarrow{H}\| \leqslant (\log f)'(h)\, ou\, \|\overrightarrow{H}\| \leqslant -(\log f)'(h) \tag{3.7}$$

ao longo de Σ^n, então $\mathbb{P}^n$ é compacta e $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha.

Demonstração. Suponhamos que $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant (\log f)'(h)$ ao longo de Σ^n.O caso em que $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant -(\log f)'(h)$ é tratado de maneira similar. Assim, num ponto qualquer $p \in \Sigma^n$, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\left|\langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle\right| \leqslant \|\overrightarrow{H}\|\cdot\|\partial_t\| = \|\overrightarrow{H}\|$$

uma vez que $\langle \partial_t, \partial_t\rangle = 1$. Daí,

$$0 \leqslant (\log f)'(h) - \|\overrightarrow{H}\| \leqslant (\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle \leqslant (\log f)'(h) + \|\overrightarrow{H}\|$$

Assim a função $(\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle$ não muda de sinal. Logo,

$$\Delta\sigma(h) = nf(h)\left((\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle\right) \geqslant 0$$

Pelo Teorema de Hopf, $\sigma\circ h$ é constante. Em consequência, $d(\sigma\circ h) = \sigma'(h)dh = f(h)dh = 0$ e, visto que $f(t) > 0$, segue que $dh = 0$ e $\nabla h = 0$. Desse modo, h é constante, ou seja, $h(p) = t_0$, para todo $p \in \Sigma^n$ e para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Portanto, $\psi(\Sigma^n) \subset \{t_0\}\times\mathbb{P}^n$. Por conseguinte, como

$\psi(\Sigma^n)$ é compacta e sem bordo, $\{t_0\} \times \mathbb{P}^n$ é completa e ambas as variedades tem a mesma dimensão, segue que $\psi(\Sigma^n) = \{t_0\} \times \mathbb{P}^n$. Agora, sendo $\{t_0\} \times \mathbb{P}^n$ compacta e difeomorfa a $\mathbb{P}^n$, segue que $\mathbb{P}^n$ também é compacta. Isto conclui a prova.

□

Observe que (3.7) implica que a função $(\log f)'(h) \in C^\infty(\Sigma^n)$ não muda de sinal com excessão do caso onde todas as folhas da folheação $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ são hipersuperfícies mínimas. Neste caso, o espaço ambiente em questão se reduz ao produto Riemanniano $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$. É então natural e conveniente assumirmos que $(\log f)'(h) \in C^\infty(\mathbb{R})$ não muda de sinal ao invés de envolvermos a imersão ψ na hipótese. Com efeito, em termos geométricos, o fato de $(\log f)'$ não mudar de sinal não depende da imersão mas do fato de que os vetores curvatura média de todas as folhas $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ apontem para a mesma direção.

Exibiremos a seguir dois corolários da Proposição 3.0.1, sendo que no segundo, provamos a não existência de hipersuperfícies compactas que são mínimas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ ou com função curvatura média $0 \leqslant H \leqslant 1$ em $\mathbb{H}^{n+1}$. No primeiro corolário, o caso quando $(\log f)'(t) \leqslant 0$ pode ser reduzido ao caso onde $(\log f)'(t) \geqslant 0$ através da mudança de orientação no fator $\mathbb{R}$.

Corolário 3.0.2.1. *Suponhamos que* $(\log f)'(t) \geqslant 0$ *e seja* $\mathscr{H}_0 = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{(\log f)'(t)\}$. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície compacta com função curvatura média* $0 \leqslant H \leqslant \mathscr{H}_0$, *então* $\mathbb{P}^n$ *é compacta e* $\psi(\Sigma^n)$ *é uma folha* $\mathbb{P}_{t_0}$ *na qual* $(\log f)'(t_0) = \mathscr{H}_0$

Demonstração. É claro que o vetor curvatura média da imersão ψ satisfaz $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant (\log f)'(h)$ ao longo de Σ^n, onde h é a função altura de ψ. Logo, pela Proposição 3.0.2, $\mathbb{P}^n$ é compacta e $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha. Daí, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(\Sigma^n) = \mathbb{P}_{t_0}$, onde $(\log f)'(t_0) = H \leqslant \mathscr{H}_0$ pela suposição feita. Por outro lado, como $\mathscr{H}_0 = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{(\log f)'(t)\}$, temos que $\mathscr{H}_0 \leqslant (\log f)'(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, $\mathscr{H}_0 \leqslant (\log f)'(t_0)$. Desse modo, $(\log f)'(t_0) = \mathscr{H}_0$, como queríamos. □

Corolário 3.0.2.2. *Não existem hipersuperfícies compactas mínimas em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ *ou com função curvatura média* $0 \leqslant H \leqslant 1$ *em* $\mathbb{H}^{n+1}$.

Demonstração. É uma consequência imediata do corolário anterior. Com efeito, basta observarmos que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são variedades completas e não compactas e, além disso, que $\mathbb{H}^{n+1}$ é isométrico ao produto warped $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. □

Definição 3.0.1. *Uma subvariedade* $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ *é dita ser orientável se o seu fibrado normal é trivial, ou seja, existe um campo vetorial unitário globalmente definido.*

Por exemplo, qualquer hipersuperfície com curvatura média constante não-nula é trivialmente orientável. Para subvariedades deste tipo, podemos definir a função ângulo suave $\Theta : \Sigma^n \to [-1,1]$, pondo

$$\Theta(p) = \langle N(p), \partial_t \rangle$$

onde N denota o campo vetorial normal unitário global. Se ψ é localmente um gráfico sobre $\mathbb{P}^n$, ou seja, transversal a ∂_t, então $\Theta < 0$ ou $\Theta > 0$ ao longo de Σ^n. Assim, requerermos que Θ não muda de sinal é uma suposição mais frágil do que admitirmos que ψ seja um gráfico local. Observe que $\Theta^2 = 1$ se, e somente se, $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha. Com efeito, basta observarmos que $\|\nabla h\|^2 = 1 - \Theta^2$. Logo,

$$\Theta^2 = 1 \Leftrightarrow \|\nabla h\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla h = 0$$

onde h é constante e $\psi(\Sigma^n)$ deve ser uma folha.

De agora em diante, assumiremos que a função ângulo de uma hipersuperfície não muda de sinal. A orientação N será escolhida de modo que $\Theta \leqslant 0$ e, então a função curvatura média é $H = \langle \overrightarrow{H}, N \rangle$. Montiel observou que se $\mathbb{P}^n$ é compacta e se a curvatura média das folhas é não-decrescente, isto é, $(\log f)''(t) \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$, então qualquer gráfico compacto sobre $\mathbb{P}^n$ de curvatura média constante deve ser uma folha (ver (MONTIEL, 1999)). Para ver isto, ele comparou a hipersuperfície com folhas e então invocou o Princípio do Máximo. O seguinte teorema generaliza tais resultados, bem como o corolário 8 em (MONTIEL, 1999).

Teorema 3.0.3. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície compacta orientável de curvatura média constante* H*. Assuma que* $(\log f)''(t) \geqslant 0$ *e que a função ângulo não muda de sinal. Então* $\mathbb{P}^n$ *é compacta e* $\psi(\Sigma^n)$ *é uma folha.*

Demonstração. Sendo Σ^n compacta, existem pontos $p_{\min}, p_{\max} \in \Sigma^n$ tais que a função altura h assume seus valores máximo e mínimo. Ou seja,

$$h(p_{min}) = \min_{\Sigma} h = h_{\min} \leqslant h_{\max} = \max_{\Sigma} h = h(p_{\max})$$

Em particular, $p_{\min}$ e $p_{\max}$ são pontos críticos de h. Por conseguinte, $\nabla h(p_{\min}) = 0$ e $\nabla h(p_{\max}) = 0$. De (3.2), temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla h\|^2 &= \|\partial_t^T\|^2 \\
&= \langle \partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N, \partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N\rangle \\
&= \langle \partial_t, \partial_t\rangle - \langle \partial_t, N\rangle^2 \\
&= 1 - \Theta^2 \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Theta(p_{\min}) = \pm 1 \text{ e } \Theta(p_{\max}) = \pm 1 \qquad (3.9)$$

Além disso, (3.6) fornece

$$\Delta h(p_{\min}) = n\left((\log f)'(h_{\min}) + \langle \overrightarrow{H}(p_{\min}), \partial_t\rangle\right) \geqslant 0$$

e

$$\Delta h(p_{\max}) = n\left((\log f)'(h_{\max}) + \langle \overrightarrow{H}(p_{\max}), \partial_t\rangle\right) \leqslant 0$$

donde,

$$-\langle \overrightarrow{H}(p_{\min}), \partial_t\rangle \leqslant (\log f)'(h_{\min}) \text{ e } (\log f)'(h_{\max}) \leqslant -\langle \overrightarrow{H}(p_{\max}), \partial_t\rangle \qquad (3.10)$$

De (3.9) e (3.10) e do fato de $(\log f)''(t) \geqslant 0$, obtemos:

$$-\Theta(p_{\min})H(p_{\min}) \leqslant (\log f)'(h_{\min}) \leqslant (\log f)'(h_{\max}) \leqslant -\Theta(p_{\max})H(p_{\max}) \qquad (3.11)$$

Com efeito, sendo $(\log f)''(t) \geqslant 0$, $\forall t$, segue que $(\log f)'$ é não-decrescente. Daí,

$$h_{\min} \leqslant h_{\max} \Rightarrow (\log f)'(h_{\min}) \leqslant (\log f)'(h_{\max})$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
-\langle \overrightarrow{H}(p_{\min}), \partial_t\rangle \leqslant (\log f)'(h_{\min}) &\Rightarrow -\langle H(p_{\min})N(p_{\min}), \partial_t\rangle \leqslant (\log f)'(h_{\min}) \\
&\Rightarrow -\langle N(p_{\min}), \partial_t\rangle H(p_{\min}) \leqslant (\log f)'(h_{\min})
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$(\log f)'(h_{\max}) \leqslant -\langle \overrightarrow{H}(p_{\max}), \partial_t\rangle \Rightarrow (\log f)'(h_{\max}) \leqslant -\Theta(p_{\max})H(p_{\min})$$

Temos que $\Theta(p_{\min}) = \Theta(p_{\max}) = sgn\Theta$ e, além disso, H é constante. Logo, (3.11) nos dá

$$-Hsgn\Theta \leqslant (\log f)'(h_{\min}) \leqslant (\log f)'(h) \leqslant (\log f)'(h_{\max}) \leqslant -Hsgn\Theta$$

Segue-se que $(\log f)'(h) = -Hsgn\Theta$. Portanto, de (3.1) obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma \circ h) &= nf(h)\left((\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t \rangle\right) \\
&= nf(h)(-Hsgn\Theta + H\Theta) \\
&= nf(h)H(\Theta - sgn\Theta)
\end{aligned}$$

Ora, como estamos assumindo que $\Theta \leqslant 0$, segue que $sgn\Theta = -1$. Ademais, sendo $-1 \leqslant \Theta \leqslant 0$, obtemos que $0 \leqslant \Theta - sgn\Theta \leqslant 1$. Logo, $\Delta(\sigma \circ h)$ não muda de sinal. Daí, como Σ é compacta, $\sigma \circ h$ e h devem ser constantes e o resultado segue.

$\square$

Temos dois úteis corolários da prova do Teorema 3.0.3. Por exemplo, abandonando a suposição de que $(\log f)'' \geqslant 0$, temos ainda o seguinte resultado.

Corolário 3.0.3.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície orientável tal que Θ não muda de sinal. Então temos*

$$\min_\Sigma H \leqslant (\log f)'\left(\min_\Sigma h\right) \text{ e } \max_\Sigma H \geqslant (\log f)'\left(\max_\Sigma h\right)$$

Demonstração. Como estamos sempre supondo que $\Theta \leqslant 0$, segue que $\Theta(p_{\min}) = \Theta(p_{\max}) = -1$. Logo, de (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\min_\Sigma H &\leqslant H(p_{\min}) \\
&= -H(p_{\min})\Theta(p_{\min}) \\
&= -\langle \overrightarrow{H}(p_{\min}), \partial_t \rangle \\
&\leqslant (\log f)'(h_{\min})
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\max_\Sigma H &\geqslant H(p_{\max}) \\
&= -H(p_{\max})\Theta(p_{\max}) \\
&= -\langle \overrightarrow{H}(p_{\max}), \partial_t \rangle \\
&\geqslant (\log f)'(h_{\max})
\end{aligned}$$

o que conclui a prova.

$\square$

Nosso segundo corolário diz respeito a imersões mínimas.

Corolário 3.0.3.2. *Assuma que $f''(t) \geqslant 0$. Se existir uma hipersuperfície mínima compacta em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$, então $\mathbb{P}^n$ é compacta e tal hipersuperfície é qualquer folha $\mathbb{P}_{t_0}$ na qual $(\log f)'(t_0) = 0$.*

Demonstração. Como $H \equiv 0$, segue de (3.10) que $(\log f)'(h_{\min}) \geqslant 0$ e $(\log f)'(h_{\max}) \leqslant 0$. Ou seja, $f'(h_{\max}) \leqslant 0 \leqslant f'(h_{\min})$. Por outro lado, sendo $f''(t) \geqslant 0$, segue que f' é não-decrescente. Daí,

$$h_{\min} \leqslant h \leqslant h_{\max} \Rightarrow f'(h_{\min}) \leqslant f'(h) \leqslant f'(h_{\max})$$

Logo, $f'(h_{\min}) = f'(h_{\max}) = f'(h) = 0$, isto é, $(\log f)'(h) = 0$. E o resultado segue da Proposição 3.0.2.

$\square$

A fim de estabelecer os resultados precedentes de subvariedades compactas para completas, usaremos o seguinte bem conhecido Princípio do Máximo de Omori-Yau.

Lema 3.0.4. *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Se $u \in C^\infty(\overline{M})$ é limitada inferiormente, então existe uma sequência de pontos $(p_j) \subset \overline{M}$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} u(p_j) = \inf_{\overline{M}} u,\ \|\nabla u(p_j)\| < \frac{1}{j} \ e \ \Delta u(p_j) > \frac{-1}{j}$$

Se u for limtada superiormente, teremos

$$\lim_{j\to\infty} u(p_j) = \sup_{\overline{M}} u,\ \|\nabla u(p_j)\| < \frac{1}{j} \ e \ \Delta u(p_j) < \frac{1}{j}$$

Observação. *O Princípio do Máximo de Omori-Yau (e, portanto, nosso próximo resultado) ocorre sob a frágil suposição (ver (CHEN; XIN, 1992)):*

$$Ric_{\overline{M}} \geqslant -C\left(1 + r^2 \log^2(r+2)\right)$$

onde r é a função distância em $\overline{M}$ a um ponto e C é uma constante positiva.

O próximo teorema é o análogo do Teorema 3.0.3 para hipersuperfícies completas contidas num bloco. Um bloco em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ é um subconjunto do tipo $[t_1, t_2] \times \mathbb{P}^n$, onde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.0.5. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície completa orientável de curvatura média constante H, com curvatura de Ricci limitada inferiormente e suponha que*

$$\psi(\Sigma^n) \subset [t_1, t_2] \times \mathbb{P}^n$$

onde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *são finitos. Assuma que* $(\log f)''(t) > 0$ *quase em todo ponto de* $\mathbb{R}$ *e que a função ângulo* Θ *não muda de sinal. Então* $\psi(\Sigma^n)$ *é uma folha.*

Demonstração. Como $h \in C^\infty(\Sigma^n)$ é limitada inferiormente, assim como a curvatura de Ricci de Σ, segue pelo Lema 2.1 que existe uma sequência de pontos $(p_j) \subset \Sigma^n$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} h(p_j) = \inf_{\Sigma} h = h > -\infty \tag{3.12}$$

$$\|\nabla h(p_j)\| < \frac{1}{j} \tag{3.13}$$

$$\Delta h(p_j) > \frac{-1}{j} \tag{3.14}$$

Mas usando (3.6) e (3.8), obtemos:

$$\|\nabla h(p_j)\|^2 = 1 - \Theta^2(p_j) < \left(\frac{1}{j}\right)^2 \tag{3.15}$$

$$\Delta h(p_j) = (\log f)'(h(p_j))(n - \|\nabla h(p_j)\|^2) + nH(p_j)\Theta(p_j) > \frac{-1}{j} \tag{3.16}$$

Por (3.16) tem-se:

$$-nH(p_j)\Theta(p_j) < \frac{1}{j} + (\log f)'(h(p_j))\left(n - \|\nabla h(p_j)\|^2\right) \tag{3.17}$$

Note que por (3.15), temos $\lim_{j\to\infty} \Theta(p_j) = sgn\Theta$. Portanto de (3.17), segue que

$$-sgn\Theta \lim_{j\to\infty} H(p_j) \leqslant (\log f)'(\inf_{\Sigma} h) \tag{3.18}$$

Do mesmo modo, se aplicarmos o Lema 3.0.4 à função $-h$, existirá uma sequência de pontos $(q_j) \subset \Sigma^n$ tal que

$$(\log f)'(\sup_{\Sigma} h) \leqslant -sgn\Theta \lim_{j\to\infty} H(q_j) \tag{3.19}$$

Daí, segue de (3.18) e (3.19) que

$$-sgn\Theta H \leqslant (\log f)'(\inf h) \leqslant (\log f)'(\sup h) \leqslant -sgn\Theta H$$

uma vez que H é constante. Daí, obtemos

$$(\log f)'(\inf h) = (\log f)'(\sup h) = -sgn\Theta H$$

Agora como $(\log f)'(t) > 0$ a menos de um conjunto de medida nula, podemos admitir que $(\log f)'$ é crescente e, em particular, injetiva. Logo, $(\log f)'(\inf h) = (\log f)'(\sup h)$ nos dá $\inf h = \sup h$. Daí, segue imediatamente que $\psi(\Sigma^n) \subset \{t_0\} \times \mathbb{P}^n$, onde $t_0 = \inf h = \sup h$. Sendo $\psi(\Sigma^n)$ orientável, segue que tal hipersuperfície é uma folha como queríamos.

$\square$

Para hipersuperfícies completas, temos a seguinte versão do Corolário 3.0.3.1.

Corolário 3.0.5.1. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície completa orientável com curvatura de Ricci limitada inferiormente e contida num bloco* $[t_1, t_2] \times \mathbb{P}^n$ *como no Teorema* 2.2. *Se a função ângulo* Θ *não muda de sinal, então*

$$\inf_\Sigma H \leqslant (\log f)'(\inf_\Sigma h) \text{ e } \sup_\Sigma H \geqslant (\log f)'(\sup_\Sigma h)$$

Demonstração. Como $sgn\Theta = -1$ e H é constante, segue de (3.18) e (3.19) que

$$\inf_\Sigma H \leqslant \lim_{j\to\infty} H(p_j) \leqslant (\log f)'(\inf_\Sigma h)$$

e

$$(\log f)'(\sup_\Sigma h) \leqslant \lim_{j\to\infty} H(q_j) \leqslant \sup_\Sigma H$$

o que conclui a prova.

$\square$

Qualquer função $u \in C^\infty(\mathbb{P})$ determina um gráfico inteiro $\Gamma(u)$ sobre $\mathbb{P}^n$ por meio da aplicação $\psi_u : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ definida como $\psi_u(q) = (u(q), q)$. Afirmamos que a equação para a função curvatura média H de $\Gamma(u)$ é dada por:

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}\right) = -nH \tag{3.20}$$

onde ∇u denota o gradiente de $u \in C^\infty(\mathbb{P})$ e 'div' é o divergente em $\mathbb{P}^n$.

Com efeito, fixemos $p \in \mathbb{P}$ e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal definido sobre uma vizinhança V de $\mathbb{P}$. Considerando a aplicação $\psi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ definida por $\psi(q) = (u(q), q)$, vemos que

$$\left\{(d\psi)_q(e_1), \ldots, (d\psi)_q(e_n)\right\}$$

é uma base de $T_q\Gamma(u), \forall q \in V$, onde

$$(d\psi)_q(e_i) = e_i(u)\partial_t + e_i,$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Além disso, observe que

$$N = -\partial_t + e_1(u)e_1 + \ldots + e_n(u)e_n = -\partial_t + \nabla u$$

é normal a cada vetor $(d\psi)_q(e_i)$ e

$$\begin{aligned} N &= 1+e_1(u)^2+\ldots+e_n(u)^2 \\ &= 1+\|\nabla u\|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}(\nabla u - \partial_t) \tag{3.21}$$

é um vetor normal e unitário ao gráfico $\Gamma(u)$. Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões Riemannianas de $M = \mathbb{R}\times\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}$, respectivamente. Sabemos que

$$\overline{\nabla}^{\partial_t}_{\partial_t} = 0, \overline{\nabla}^{e_i}_{e_i} = \nabla^{e_i}_{e_i} \text{ e } \overline{\nabla}^{e_i}_{\partial_t} = \overline{\nabla}^{\partial_t}_{e_i} = 0.$$

Daí, a segunda forma fundamental de $\Gamma(u)$ é dada por $A(e_i) = -\overline{\nabla}_{e_i}\eta$. Pondo $W = \sqrt{1+\|\nabla u\|^2}$, temos que $\dfrac{\nabla u}{W} = \dfrac{\partial_t}{W} + \eta$. Por outro lado, como

$$\overline{\nabla}_{e_i}\frac{\partial_t}{W} = e_i\left(\frac{1}{W}\right)\partial_t + \underbrace{\frac{1}{W}\overline{\nabla}_{e_i}\partial_t}_{=0}$$

para cada $1 \leq i \leq n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{\mathbb{P}}\left(\frac{\nabla u}{W}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\left(\frac{\partial_t}{W}+\eta\right), e_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\frac{\partial_t}{W}, e_i\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\eta, e_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle e_i\left(\frac{1}{W}\right)\partial_t, e_i\right\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), e_i\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), e_i\rangle \\ &= -nH, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. Se $\mathbb{P}^n$ é compacta, segue facilmente de (3.20) que qualquer gráfico inteiro em $\mathbb{R}\times\mathbb{P}^n$ cuja curvatura média H não muda de sinal deve ser mínimo. Com efeito, como estamos considerando o caso das hipersuperfícies compactas e sem bordo, se supusermos por exemplo, $H \geqslant 0$ em $\psi_u(\mathbb{P}^n)$, segue do Teorema da Divergência que

$$-n\int_{\mathbb{P}} H d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{P}} div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\right) d\mathbb{P} = \int_{\partial\mathbb{P}} \frac{\langle \nabla u, \eta\rangle}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} ds = 0$$

onde η é o campo unitário normal a $\partial\mathbb{P}$ apontando para fora de $\mathbb{P}$.

Ora, sendo $\int_{\mathbb{P}} Hd\mathbb{P} = 0$, $\mathbb{P}$ compacta e $H \geqslant 0$, segue que $H \equiv 0$ o que prova a afirmação. Note que $u \in C^{\infty}(\mathbb{P}^n)$ pode ser escrita como $u = \pi_{\mathbb{R}} \circ \psi_u$. Logo, u é a função altura da imersão isométrica $\psi_u : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$. Como, neste caso, a função warped é constante e igual a 1, segue que $(\log f)'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Além disso, sendo $H \equiv 0$, segue de (3.6) que $\Delta u = 0$ no compacto $\Gamma(u)$. Portanto u é constante e $\Gamma(u)$ é uma folha.

Observe que acabamos de estender um resultado devido a Heinz (ver (HEINZ, 1955)) (no caso $n = 2$), que foi provado independentemente por Chern em (CHERN, 1965) e Flanders em (FLANDERS, 1966). Tal resultado afirma que qualquer gráfico inteiro no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante deve ser mínimo. Um belo argumento devido a Salavessa em (SALAVESSA, 1989) mostra que para uma variedade Riemanniana não-compacta e completa $\mathbb{P}^n$, um gráfico inteiro em $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ com curvatura média constante H é mínimo desde que a constante de Cheeger $\mathfrak{h}(\mathbb{P})$ de $\mathbb{P}^n$ se anule. Para tanto, definimos tal constante pondo

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}) = \inf_D \left(\frac{\text{area}(\partial D)}{\text{area}(D)} \right)$$

onde $D \subset \mathbb{P}^n$ é qualquer domínio compacto com bordo suave. Integrando (3.20) sobre D e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} n\,\text{area}(D) \min_D H &\leqslant n \int_D H dA_{\mathbb{P}} \\ &= \int_D -div \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) ds \\ &= \int_{\partial D} \frac{-\langle \nabla u, \eta \rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} ds \\ &\leqslant \int_{\partial D} \frac{|\langle \nabla u, \eta \rangle|}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} ds \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que

$$|\langle \nabla u, \eta \rangle| \leqslant \|\nabla u\| \cdot \|\eta\| = \|\nabla u\| \leqslant \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}$$

ou seja,

$$\frac{|\langle \nabla u, \eta \rangle|}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \leqslant 1$$

donde,

$$n\,\text{area}\,(D) \min_D H \leqslant \text{area}(\partial D)$$

Similarmente, usando que $-\langle \nabla u, \eta \rangle \leqslant \sqrt{1+\|\nabla u\|^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
n\,\text{area}(D)\max_D H &\geqslant n\int_D H dA_{\mathbb{P}} \\
&= \int_D -div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\right) ds \\
&= \int_{\partial D} \frac{-\langle \nabla u, \eta \rangle}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} ds \\
&\geqslant -\int_{\partial D} ds \\
&= -\text{area}(\partial D)
\end{aligned}$$

Por conseguinte, como $\min_D H = \inf_D H$ e $\max_D H = \sup_D H$, obtemos

$$\inf_D H \leqslant \frac{1}{n}\frac{\text{area}(\partial D)}{\text{área} D} \text{ e } \sup_D H \geqslant -\frac{1}{n}\frac{\text{area}(\partial D)}{\text{area} D}$$

Pelas propriedades de ínfimo e supremo de um conjunto, temos $\inf_{\mathbb{P}} H \leqslant \inf_D H$ e $\sup_{\mathbb{P}} H \geqslant \sup_D H$. Logo,

$$\inf_{\mathbb{P}} H \leqslant \frac{1}{n}\frac{\text{area}(\partial D)}{\text{area} D} \text{ e } \sup_{\mathbb{P}} H \geqslant -\frac{1}{n}\frac{\text{area}(\partial D)}{\text{area} D}$$

Afirmamos que $\inf_{\mathbb{P}} H \leqslant \frac{1}{n}\mathfrak{h}(\mathbb{P})$ e $\sup_{\mathbb{P}} H \geqslant -\frac{1}{n}\mathfrak{h}(\mathbb{P})$. Com efeito, supondo $n\inf_{\mathbb{P}} H > \mathfrak{h}(\mathbb{P})$, segue que existe um domínio compacto $\tilde{D} \subset \mathbb{P}^n$ tal que $n\inf_{\mathbb{P}} H > \dfrac{\text{area}(\partial\tilde{D})}{\text{area}(\tilde{D})}$ o que é uma contradição. Assim, supondo $\mathfrak{h}(\mathbb{P}) = 0$, obtemos

$$\inf_{\mathbb{P}} H \leqslant 0 \leqslant \sup_{\mathbb{P}} H$$

Então se H for constante, devemos ter $H \equiv 0$. Como uma consequência do Corolário 3.0.5.1, temos o seguinte resultado para gráficos em produtos Riemannianos.

Corolário 3.0.5.2. *Seja $\Gamma(u)$ um gráfico inteiro sobre $\mathbb{P}^n$ determinado por $u \in C^\infty(\mathbb{P})$. Se u é limitada e se a curvatura de Ricci de $\Gamma(u)$ é limitada inferiormente, então a função curvatura média do gráfico satisfaz*

$$\inf_{\Gamma} H \leqslant 0 \leqslant \sup_{\Gamma} H$$

Em particular, se H é constante, então o gráfico deve ser mínimo.

Demonstração. Temos, por hipótese, que $\psi_u : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{P}^n$ definida por $\psi_u(q) = (u(q), q)$ é uma hipersuperfície completa orientável com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Sendo u limitada, existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $t_1 \leqslant u(q) \leqslant t_2$, $\forall q \in \mathbb{P}$. Logo,

$$\psi_u(\mathbb{P}^n) \subset [t_1, t_2] \times \mathbb{P}^n$$

Ademais, como $\Theta \leqslant 0$ ao longo de $\mathbb{P}$ e a função warped é constante e igual a 1, obtemos $(\log f)'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, $(\log f)'(\inf_\Gamma u) = (\log f)'(\sup_\Gamma u) = 0$. Logo, segue que do Corolário 3.0.5.1 que

$$\inf_\Gamma H \leqslant 0 \leqslant \sup_\Gamma H$$

Além disso, se H for constante segue que $H \equiv 0$ e então, $\Gamma(u)$ é mínimo, como queríamos.

□

Para outros resultados deste tipo ver o Corolário em [(RIGOLI *et al.*, 2000), página 15] e [(HASANIS; VLACHOS, 2004), teorema 2]. Exemplos de gráficos inteiros no espaço produto $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ de curvatura média constante $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ com u limitada somente superiormente ou inferiormente são dadas em (NELLI; ROSENBERG, 2006).

Para concluir este capítulo, consideraremos o caso das subvariedades parabólicas, onde por parabólica, entendemos que qualquer função subharmônica em uma subvariedade, limitada superiormente, deve ser constante.

Proposição 3.0.6. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma imersão isométrica. Assuma que Σ^n é parabólica e que*
i) $h \leqslant \overline{h} < +\infty$ *e* $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant (\log f)'(h)$ *ou*
ii) $h \geqslant \underline{h} > -\infty$ *e* $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant -(\log f)'(h)$
então $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha.

Demonstração. Para o caso (**i**), usando (3.1), segue que $\Delta\sigma(h) \geqslant 0$, pois $\|\overrightarrow{H}\| \leqslant (\log f)'(h)$ implica que $(\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t \rangle \geqslant 0$ (usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz). Daí, $\sigma \circ h$ é subharmônica. Por outro lado, como $\sigma'(t) = f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, segue que σ é crescente. Em particular, o mesmo ocorre com $\sigma \circ h$. Logo, $h \leqslant \overline{h} < +\infty$ implica $\sigma(h) \leqslant \sigma(\overline{h})$. Portanto, $\sigma \circ h$ é subharmônica e limitada superiormente. Como Σ^n é parabólica, segue que $\sigma \circ h$ é constante, donde h também é constante. Assim, $\psi(\Sigma^n)$ deve ser uma folha. O caso (**ii**) é tratado de maneira similar usando $-\sigma$. □

No que segue estenderemos o Teorema 1.2 em (GUAN; SPRUCK, 2000), o qual foi provado para hipersuperfícies no espaço hiperbólico.Dada uma hipersuperfície orientável $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$, fixemos uma orientação N e definamos $\phi \in C^\infty(\Sigma^n)$ pondo

$$\phi = \sigma(h)H + f(h)\Theta \tag{3.22}$$

Ao longo da demonstração do próximo teorema, usaremos as expressões do tensor de curvatura e do tensor de Ricci de um produto torcido. Para maiores detalhes computacionais envolvendo a curvatura de um produto torcido, recomendamos ((JÚNIOR, 2011)).

Teorema 3.0.7. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de curvatura média constante H. Se a função ângulo Θ não muda de sinal e a curvatura de Ricci de $\mathbb{P}^n$ satisfaz*

$$Ric_{\mathbb{P}}(X,X) \geqslant (n-1)\sup_{\mathbb{R}}\left((f')^2 - ff''\right)\langle X,X\rangle_{\mathbb{P}} \tag{3.23}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{P})$, onde $Ric_{\mathbb{P}}$ e $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{P}}$ são, respectivamente, o tensor de Ricci e métrica da variedade Riemanniana completa $\mathbb{P}^n$, então ϕ é subharmônica.

Demonstração. A equação de Codazzi de $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$ é dada por

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,N\rangle = \langle (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, Z\rangle$$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, ou equivalentemente,

$$(\overline{R}(X,Y)N)^{\top} = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \tag{3.24}$$

uma vez que $\langle \overline{R}(X,Y)Z,N\rangle = -\langle \overline{R}(X,Y)N,Z\rangle$. Aqui $\overline{R}$ denota o tensor curvatura de $\mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$. Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ arbitrário. Então,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\langle N,K\rangle, X\rangle &= X\langle N,K\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X N, K\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X K\rangle \\
&= \langle -A(X), K\rangle + \langle N, f'(h)X\rangle \\
&= \langle -A(X), K^{\top}\rangle + \langle N, f'(h)X\rangle \\
&= \langle -A\left(K^{\top}\right), X\rangle
\end{aligned}$$

ou seja, $\nabla\langle N,K\rangle = -A\left(K^{\top}\right)$, onde $K = f\partial_t$. Por outro lado, como

$$-A\left(K^{\top}\right) = -A\left(f(h)\partial_t\right) = -A(f(h)\nabla h) = -f(h)A(\nabla h)$$

segue que

$$\nabla\langle N,K\rangle = -A\left(K^{\top}\right) = -f(h)A(\nabla h) \tag{3.25}$$

Lembremos que a derivada covariante de A é dada por

$$(\nabla_Y A)(X) = \nabla A(X,Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X), \forall X,Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$$

Por conseguinte usando (3.5) e (3.24), concluímos de (3.25) que

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla\langle N,K\rangle) &= -\nabla_X\left(A\left(K^\top\right)\right)\\
&= -(\nabla_X A)\left(K^\top\right) - A\left(\nabla_X\left(K^\top\right)\right)\\
&= \left(\overline{R}\left(X,K^\top\right)N\right)^\top - (\nabla_{X^\top}A)(X) - A\left(\nabla_X K^\top\right)\\
&= \left(\overline{R}\left(X,K^\top\right)N\right)^\top - (\nabla_{X^\top}A)(X) - A(f'(h)X + f(h)\langle\partial_t,N\rangle AX)\\
&= -f(h)(\nabla_{\nabla h}A)(X) - f(h)(\overline{R}(\nabla h,X)N)^\top - f'(h)A(X) - \langle N,K\rangle A^2X
\end{aligned}$$

Seja $\overline{Ric}$ o tensor de Ricci de $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}\times_f \mathbb{P}^n$ e considere $\{E_1,\ldots,E_n\}$ uma base ortonormal local de campos em $\mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Então, usando a igualdade $tr(\nabla ZA) = \langle\nabla trA,Z\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N,K\rangle &= div(\nabla\langle N,K\rangle)\\
&= \sum_{i=1}^n\langle\nabla_{E_i}\nabla\langle N,K\rangle,E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n\langle -f(h)q_1 - f(h)q_2 - f'(h)A(E_i) - \langle N,K\rangle A^2(E_i),E_i\rangle\\
&= -f(h)\sum_{i=1}^n\langle q_1,E_i\rangle - q_3 - f'(h)\sum_{i=1}^n\langle A(E_i),E_i\rangle - q_4\\
&= -f(h)tr(\nabla_{\nabla h}A) - q_3 - f'(h)nH - \langle N,K\rangle tr(A^2)\\
&= -f(h)\langle\nabla trA,\nabla h\rangle - q_3 - f'(h)nH - \langle N,K\rangle\|A\|^2\\
&= q_5 - q_3 + q_6\\
&= q_5 - f(h)\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(\nabla h,E_i)N,E_i\rangle + q_6\\
&= q_5 + f(h)\sum\langle\overline{R}(E_i,N)\nabla h,E_i\rangle + q_6\\
&= q_5 + f(h)\overline{Ric}(N,\nabla h) + q_6 \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

onde

$q_1 = (\nabla_{\nabla h}A)(E_i)$;

$q_2 = (\overline{R}(\nabla h,E_i)N)^\top$;

$q_3 = f(h)\sum\langle q_2,E_i\rangle$;

$q_4 = \langle N,K\rangle\sum\langle A^2(E_i),E_i\rangle$;

$q_5 = -nf(h)\langle\nabla H,\nabla h\rangle$;

$q_6 = -nf'(h)H - \langle N,K\rangle\|A\|^2$.

O tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$ expresso em termos do tensor curvatura de $\mathbb{P}^n$ é:

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U,V)W &= R_{\mathbb{P}}(U^*,V^*)W^* - ((\log f)')^2(\langle V,W\rangle U - \langle U,W\rangle V) + \\
&+ (\log f)''\langle W,\partial_t\rangle(\langle U,\partial_t\rangle V - \langle V,\partial_t\rangle U) - \\
&- (\log f)''\langle V,W\rangle\langle U,\partial_t\rangle - \langle U,W\rangle\langle V,\partial_t\rangle)\partial_t
\end{aligned}$$

onde $U^* = (\pi_{\mathbb{P}})_*U$. Então, o tensor de Ricci de $\overline{M}$ pode ser dado em termos do tensor de Ricci de $\mathbb{P}^n$, a saber

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(V,W) &= Ric_{\mathbb{P}}(V^*,W^*) - \left(n((\log f)')^2 + (\log f)''\right)\langle V,W\rangle - \\
&- (n-1)(\log f)''\langle V,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(N,X) &= Ric_{\mathbb{P}}(N^*,X^*) - \left(n((\log f)')^2 + (\log f)''\right)\underbrace{\langle N,X\rangle}_{=0} - \\
&- (n-1)(\log f)''(h)\langle N,\partial_t\rangle\langle X,\partial_t\rangle \\
&= Ric_{\mathbb{P}}(N^*,X^*) - (n-1)(\log f)''(h)\Theta\langle X,\nabla h\rangle
\end{aligned}$$

para todo $X \in T\Sigma$. Visto que $\partial_t = \nabla h + \Theta N$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\nabla h)^* &= (\pi_{\mathbb{P}})_*(\nabla h) \\
&= (\pi_{\mathbb{P}})_*(\partial_t - \Theta N) \\
&= \underbrace{(\pi_{\mathbb{P}})_*(\partial_t)}_{=0} - (\pi_{\mathbb{P}})_*(\Theta N) \\
&= -\Theta(\pi_{\mathbb{P}})_*(N) \\
&= -\Theta N^*
\end{aligned}$$

onde $(\cdot)^*$ denota a projeção sobre a fibra $\mathbb{P}^n$ de um campo vetorial definido em $T\overline{M}$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(N,\nabla h) &= Ric_{\mathbb{P}}(N^*,\nabla h^*) - (n-1)(\log f)''(h)\Theta\|\nabla h\|^2 \\
&= -\Theta Ric_{\mathbb{P}}(N^*,N^*) - (n-1)(\log f)''(h)\Theta\|\nabla h\|^2 \\
&= -\Theta(n-1)Ric_{\mathbb{P}}(N^*) - (n-1)(\log f)''(h)\Theta\|\nabla h\|^2 \\
&= -(n-1)\Theta\left(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\Theta\|\nabla h\|^2\right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde, como usual, $(n-1)Ric_{\mathbb{P}}(\cdot) = Ric_{\mathbb{P}}(\cdot,\cdot)$. Visto que H é constante, ou seja, $\nabla H = 0$, concluímos de (3.1), (3.26), (3.28) e $f(h)\Theta = \langle N,K\rangle$ que

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \Delta(\sigma(h)H + f(h)\Theta) \\
&= \Delta(\sigma(h)H) + \Delta(f(h)\Theta) \\
&= H\Delta\sigma(h) + \Delta\langle N, K\rangle \\
&= nHf(h)\left((\log f)'(h) + \langle \overrightarrow{H}, \partial_t\rangle\right) - nf(h)\underbrace{\langle \nabla H, \nabla h\rangle}_{=0} + \\
&+ \; f(h)\overline{Ric}(N, \nabla h) - nf'(h)H - f(h)\Theta\|A\|^2 \\
&= nHf(h)((\log f)'(h) + \Theta H) - f(h)\Theta(n-1)\cdot \\
&\cdot \; \left(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2\right) - nf'(h)H - f(h)\Theta\|A\|^2 \\
&= nHf'(h) + nH^2 f(h)\Theta - f(h)\Theta(n-1)\cdot \\
&\cdot \; \left(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2\right) - nHf'(h) - f(h)\Theta\|A\|^2 \\
&= f(h)\Theta\left(nH^2 - \|A\|^2\right) - f(h)\Theta(n-1)\left(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2\right) \\
&= -f(h)\Theta\left\{\|A\|^2 - nH^2 + (n-1)\left(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2\right)\right\} \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Por outro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\|N^*\|^2_{\mathbb{P}} &= \langle N^*, N^*\rangle_{\mathbb{P}} \\
&= \frac{1}{f^2(h)}\left(\langle N, N\rangle - \langle(\pi_{\mathbb{R}})_*(N), (\pi_{\mathbb{R}})_*(N)\rangle_{\mathbb{R}}\right) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}\left(1 - \langle\frac{\langle N,\partial_t\rangle}{\langle\partial_t,\partial_t\rangle}\partial_t, \frac{\langle N,\partial_t\rangle}{\langle\partial_t,\partial_t\rangle}\partial_t\rangle_{\mathbb{R}}\right) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}\left(1 - \langle N,\partial_t\rangle^2\langle\partial_t,\partial_t\rangle_{\mathbb{R}}\right) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}\left(1 - \langle N,\partial_t\rangle^2\right) \\
&= \frac{1}{f^2(h)}\left(1 - \Theta^2\right) \\
&= f^{-2}(h)\|\nabla h\|^2
\end{aligned}$$

Assim de (3.23) e $\|N^*\|^2_{\mathbb{P}} = f^{-2}(h)\|\nabla h\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
Ric_{\mathbb{P}}(N^*, N^*) &\geqslant (n-1)\sup_{\mathbb{R}}\left((f')^2 - ff''\right)\langle N^*, N^*\rangle_{\mathbb{P}} \\
&= (n-1)\sup_{\mathbb{R}}\left((f')^2 - ff''\right)\frac{\|\nabla h\|^2}{f^2(h)} \\
&\geqslant (n-1)\frac{(f')^2(h) - (ff'')(h)}{f^2(h)}\|\nabla h\|^2 \\
&= -(n-1)(\log f)''(h)\|\nabla h\|^2
\end{aligned}$$

Daí, como $Ric_{\mathbb{P}}(N^*,N^*) = (n-1)Ric_{\mathbb{P}}(N^*)$, segue que

$$(n-1)\left(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2\right) \geqslant 0 \tag{3.30}$$

Agora como $-f(h)\Theta \geqslant 0$, pois $f > 0$ e $\Theta \leqslant 0$ e, além disso, $\|A\|^2 \geqslant nH^2$, concluímos que $\Delta\phi \geqslant 0$ e, portanto ϕ é subharmônica como queríamos. □

Observação. *Segue de (3.27) que (3.23) é equivalente a* $\overline{Ric}(X) \geqslant \overline{Ric}(\partial_t)$ *para todo* $X \in T\overline{M}$.

Noutras palavras, a direção de ∂_t deve ser a de menor curvatura de Ricci. Com efeito, suponhamos que (3.23) ocorra. Temos, por hipótese, que (3.27) vale $\forall V, W \in T\overline{M}$. Vamos provar que

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X) \geq \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t), \quad \forall X \in T\overline{M}.$$

Ou equivalentemente que

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X,X) \geq \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t,\partial_t), \quad \forall X \in T\overline{M}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(X,X) \quad &\geq \quad \underbrace{\mathrm{Ric}_{\mathbb{P}}(\partial_t^*,\partial_t^*)}_{=0} - \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right) \cdot \underbrace{\langle \partial_t, \partial_t \rangle}_{=1} - \\
&\quad -(n-1)(\log f)'' \underbrace{\langle \partial_t, \partial_t \rangle^2}_{=1} \\
&= \quad -\left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right) - (n-1)(\log f)''
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(X,X) &= \overline{\mathrm{Ric}}(X^*,X^*) - \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right)\langle X,X\rangle - (n-1)(\log f)''\langle X,\partial_t\rangle^2 \\
&\geq (n-1)\sup_{\mathbb{R}}\left((f')^2 - f\cdot f''\right)\langle X^*,X^*\rangle_{\mathbb{P}} - \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right)\langle X,X\rangle - \\
&\quad -(n-1)(\log f)''\langle X,\partial_t\rangle^2 \\
&\geq (n-1)\frac{(f')^2 - f\cdot f''}{f^2}\left(\langle X,X\rangle - \langle X,\partial_t\rangle\right) - \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right)\langle X,X\rangle - \\
&\quad -(n-1)(\log f)''\langle X,\partial_t\rangle^2 \\
&= -(n-1)(\log f)''\left(\langle X,X\rangle - \langle X,\partial_t\rangle^2\right) - \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right)\langle X,X\rangle - \\
&\quad -(n-1)(\log f)''\langle X,\partial_t\rangle^2 \\
&= \left[-\left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right) - (n-1)(\log f)''\right]\langle X,X\rangle \\
&= \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t,\partial_t)\langle X,X\rangle \\
&\geq \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t,\partial_t), \quad \forall X \in T\overline{M}.
\end{aligned}$$

Agora basta considerarmos todo X unitário e concluímos o afirmado. Reciprocamente, suponhamos que

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X) \geq \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t), \quad \forall X \in T\overline{M}.$$

Ou seja,

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X,X) \geq \overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t,\partial_t), \quad \forall X \in T\overline{M}.$$

Daí,

$$\mathrm{Ric}_{\mathbb{P}}(X^*,X^*) - \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right) - (n-1)(\log f)''\langle X,X\rangle - (n-1)(\log f)''\langle X,\partial_t\rangle^2 \geq$$

$$\geq -\left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right) - (n-1)(\log f)''.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{\mathbb{P}}(X^*,X^*) &\geq \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right)\left(\|X\|^2 - 1\right) + (n-1)(\log f)''\left(\langle X,\partial_t\rangle^2 - 1\right) \\
&= \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right)\left(\|X\|^2 - 1\right) - (n-1)(\log f)''\cdot f^2\langle X^*,X^*\rangle_{\mathbb{P}} \\
&= \left(n\left((\log f)'\right)^2 + (\log f)''\right)\left(\|X\|^2 - 1\right) - (n-1)\frac{f'\cdot f - (f')^2}{f^2}\cdot f^2\langle X^*,X^*\rangle_{\mathbb{P}} \\
&\geq (n-1)\left((f')^2 - f\cdot f''\right)\langle X^*,X^*\rangle_{\mathbb{P}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{Ric}_{\mathbb{P}}(X,X) \geq (n-1)\sup_{\mathbb{R}}\left((f')^2 - f\cdot f''\right)\langle X,X\rangle_{\mathbb{P}}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{P}),$$

como queríamos.

Observação. *Dado um gráfico vertical sobre $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura média constante, o Teorema 1.2 em (GUAN; SPRUCK, 2000) afirma que a função curvatura média constante calculada com respeito à métrica euclidiana usual é subharmônica. Para ver que o resultado anterior estende o único em (GUAN; SPRUCK, 2000), consideramos o caso dos espaços ambiente pseudohiperbólicos $\mathbb{R}\times_{e^t}\mathbb{P}^n$. Então (3.23) se reduz a $Ric_{\mathbb{P}} \geqslant 0$ (isto ocorre para $\mathbb{H}^{n+1}$ visto que $\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^n$) e a função subharmônica ϕ assume a simples forma*

$$\phi = e^h(H+\Theta) \tag{3.31}$$

Além disso, ϕ é também a curvatura média da hipersuperfície quando a calculamos na métrica produto de $\mathbb{R}_+\times\mathbb{P}^n$. De fato, um cálculo bastante simples fornece que a função curvatura média H de $\tilde{\psi} = \tau\circ\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{J}\times\mathbb{P}^n$ é

$$\tilde{H} = f(h)H + f'(h)\Theta$$

Então observe que $\tilde{H} = \phi$ se, e somente se, $f(t) = e^t$.

Para detalhes computacionais recomendamos (MIRANDOLA, 2009). O primeiro resultado de Montiel em [(MONTIEL, 1999), corolário 7] em nosso caso, é uma simples consequência do Teorema 3.0.7.

Teorema 3.0.8. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}\times_f\mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície compacta orientável de curvatura média constante. Assuma que (3.23) ocorre e que a função ângulo Θ não muda de sinal. Então uma das seguintes possibilidades deve ocorrer: ou $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha sobre um compacto $\mathbb{P}^n$, ou $\overline{M}^{n+1}$ possui curvatura seccional constante e Σ^n é uma hiperesfera geodésica. O último caso não pode ocorrer se assumirmos que a desigualdade em (3.23) é estrita.*

Demonstração. Sabemos, pelo Teorema 3.0.7, que ϕ é uma função subharmônica em Σ^n, mas sendo Σ^n compacta, orientável e sem bordo, segue do Teorema da Divergência que

$$\int_\Sigma \Delta\phi = 0$$

logo, como $\Delta\phi \geqslant 0$, segue que $\Delta\phi = 0$. Daí, ϕ deve ser constante. Então, (3.29) fornece

$$\Theta\left(\|A\|^2 - nH^2 + (n-1)(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2\right) = 0 \tag{3.32}$$

Afirmamos que o conjunto

$$\mathscr{U} = \{p \in \Sigma^n; \Theta(p) = 0\}$$

admite interior vazio. Para ver isto, assuma o contrário, ou seja, que $\mathscr{U}$ contém um subconjunto aberto não-vazio V de Σ^n. Em V, temos que a função $\sigma(h)H = \phi$ é constante e, se $H \neq 0$, então $\sigma(h)$ e h são constantes. Com efeito, note que

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \nabla(\sigma(h)H) \\
&= H\nabla\sigma(h) \\
&= H\sigma'(h)\nabla h
\end{aligned}$$

Agora sendo ϕ constante, segue que $\nabla\phi = 0$. Logo, como $H \neq 0$ e $\sigma'(h) = f(h) > 0$ em todo $p \in \Sigma$, concluímos que $\nabla h = 0$ e, portanto, h é constante em V o que é uma contradição, uma vez que $\|\nabla h\|^2 = 1 - \Theta^2 = 1$ em V. Por conseguinte, devemos ter $H = 0$ e, então, $f(h)\Theta = \phi$ é constante em Σ^n. Visto que $\phi = f(h)\Theta$ se anula em V, ela deve se anular em todos os pontos de Σ. Portanto, $\mathscr{U} = \Sigma^n$. Mas isto é impossível, visto que $\Theta^2 = 1$ no mínimo, onde h alcança seus extremos. Resumindo, temos $Int\,\mathscr{U} = \emptyset$. Logo $\Theta(p) < 0$ para todo $p \in \Sigma^n$. Então (3.32) implica que

$$\|A\|^2 - nH^2 + (n-1)\left(Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2\right) = 0$$

ou seja

$$\|A\|^2 - nH^2 = 0 \tag{3.33}$$

e

$$Ric_{\mathbb{P}}(N^*) + (\log f)''(h)\|\nabla h\|^2 = 0 \tag{3.34}$$

A igualdade (3.33) significa que ψ é totalmente umbílica. Além disso, observemos que a argumentação de Montiel na prova do Corolário 7 em (MONTIEL, 1999) também se aplica aqui, e permite concluirmos que o caso no qual ψ é totalmente umbílica (mas não uma folha) pode ocorrer somente se $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante e, portanto, Σ^n é uma hiperesfera geodésica.

Finalmente, quando a desigualdade em (3.23) é estrita, (3.34) é equivalente a $N^*(p) = 0$, para todo $p \in \Sigma^n$. Visto que $\|N^*\|^2_{\mathbb{P}} = f^{-2}(h)\|\nabla h\|^2$, obtemos $\|\nabla h\|^2 = 0$, ou seja, $\nabla h = 0$ em Σ^n. Desse modo, $\psi(\Sigma^n)$ é uma folha sobre um compacto $\mathbb{P}^n$. $\square$

4 ESTIMATIVAS DE ALTURA PARA GRÁFICOS VERTICAIS EM $\mathbb{R}\times_f \mathbb{P}^n$

Podemos usar o Teorema 3.0.7 , para obtermos estimativas de altura para hipersuperfícies de curvatura média constante com bordo não vazio contidas numa folha. O próximo resultado é uma generalização das estimativas de altura para gráficos verticais em $\mathbb{R}\times\mathbb{P}^2$ apresentadas em (HOFFMAN *et al.*, 2006).

Teorema 4.0.1. *Seja* $\psi:\Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante* $H>0$ *e com bordo não vazio* $\partial\Sigma^n\subset\mathbb{P}_0$. *Assuma que*

$$Ric_{\mathbb{P}}(X,X)\geqslant n\alpha\langle X,X\rangle_{\mathbb{P}}$$

para algum $\alpha\leqslant 0$, $\Theta\leqslant 0$ *e* $H^2\geqslant|\alpha|$. *Então temos*

$$\psi(\Sigma^n)\subset\left[0,\tfrac{H}{H^2-|\alpha|}\right]\times\mathbb{P}^n$$

Demonstração. Por hipótese, $(n-1)Ric_{\mathbb{P}}(N^*)\geqslant n\alpha\|N^*\|^2_{\mathbb{P}}\geqslant n\alpha$, visto que $\alpha\leqslant 0$ e $\|N^*\|^2_{\mathbb{P}}=\|\nabla h\|^2=1-\Theta^2\leqslant 1$. Considere $\varphi\in C^\infty(\Sigma^n)$ definida como

$$\begin{aligned}
\varphi &= \phi+\frac{\alpha}{H}h\\
&= \sigma(h)H+f(h)\Theta+\frac{\alpha}{H}h\\
&= Hh+\Theta-\frac{(-\alpha)}{H}h\\
&= Hh-\frac{|\alpha|}{H}h+\Theta\\
&= \left(\frac{H^2-|\alpha|}{H}\right)h+\Theta
\end{aligned}$$

Usando (3.6) e (3.29), temos

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \Delta\left(\phi+\frac{\alpha}{H}h\right)\\
&= \Delta\phi+\frac{\alpha}{H}\Delta h\\
&= -\Theta\left(\|A\|^2-nH^2+(n-1)Ric(N^*)\right)+\left(\frac{\alpha}{H}\right)n\langle\overrightarrow{H},\partial t\rangle\\
&= -\Theta\left(\|A\|^2-nH^2+(n-1)Ric(N^*)\right)+n\alpha\Theta\\
&= -\Theta\left(\|A\|^2-nH^2+(n-1)Ric(N^*)-n\alpha\right)\\
&\geqslant -\Theta\left((n-1)Ric(N^*)-n\alpha\right)\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

pois, por hipótese $\Theta\leqslant 0$ e $(n-1)Ric(N^*)-n\alpha\geqslant 0$. Assim, ψ é subharmônica em Σ^n. O Princípio do Máximo fornece

$$\left(\frac{H^2-|\alpha|}{H}\right)h-1\leqslant\left(\frac{H^2-|\alpha|}{H}\right)h+\Theta=\psi\leqslant\max_{\partial\Sigma}\psi=\max_{\partial\Sigma}\Theta\leqslant 0$$

e, portanto, $0\leqslant h\leqslant\frac{H}{H^2-|\alpha|}$. Isto prova o teorema. □

Para o nosso próximo resultado é conveniente recordarmos um bem conhecido princípio de tangência. Sejam Σ_1^n e Σ_2^n duas hipersuperfícies em uma variedade Riemanniana arbitrária N^{n+1} que são tangentes em um ponto comum p_0 e parametrize localmente ambas as hipersuperfícies em uma vizinhança U de zero em $T_{p_0}\Sigma_2$ por meio da aplicação exponencial de N^{n+1} como segue:

$$\varphi_j(x)=\exp_{p_0}(x+\mu_j(x)\eta_0),\ j=1,2$$

onde $\mu_j\in C^\infty(U)$ são funções bem determinadas satisfazendo $\mu_j=0$. Diremos que Σ_1^n está acima de Σ_2^n em uma vizinhança de p_0 se $\mu_1(x)\geqslant\mu_2(x)$ em uma vizinhança de zero. Isto é equivalente a exigir que as geodésicas de N^{n+1} normais à hipersuperfície $\exp_{p_0}(U)$ numa vizinhança de p_0 na orientação determinada por η_0 intersectam Σ_2^n antes de Σ_1^n. O seguinte fato é bastante conhecido (ver (FONTENELE; SILVA, 2001)).

Teorema 4.0.2. *Sejam Σ_1^n e Σ_2^n hipersuperfícies como acima com curvatura média constante satisfazendo*

$$H_{\Sigma_1}\leqslant H_{\Sigma_2}$$

com respeito a η_0. Então Σ_1^n e Σ_2^n coincidem em uma vizinhança de p_0.

O seguinte resultado geral não envolve a suposição sobre a curvatura de $\mathbb{P}^n$ e é de interesse independente (veja proposição 18 em (ALIAS; DAJCZER, 2007)).

Proposição 4.0.3. *(**Proposição 18** em (ALIAS; DAJCZER, 2007)) Seja $\psi:\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{R}\times_f\mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante orientável com bordo não vazio $\psi(\Sigma^n)\subset\mathbb{P}_\tau$ e tal que sua função ângulo Θ não muda de sinal. Nestas condições*

i) *Se $H\leqslant\inf\limits_{t\in[\tau,+\infty)}(\log f)'(t)$, então $\psi(\Sigma^n)\subset(-\infty,\tau]\times\mathbb{P}^n$;*

ii) *Se $H\geqslant\sup\limits_{t\in(-\infty,\tau]}(\log f)'(t)$, então $\psi(\Sigma^n)\subset[\tau,+\infty)\times\mathbb{P}^n$.*

Em particular, se $(\log f)''(t)\geqslant 0$ e $H=(\log f)'(\tau)$ então $\psi(\Sigma^n)\subset\mathbb{P}_\tau$.

Demonstração. Suponhamos que $H\leqslant\inf\limits_{t\in[\tau,+\infty)}(\log f)'(t)$ mas que $h\leqslant\tau$ não ocorra. Portanto, obtemos

$$\max_{\Sigma}h=h(p_0)=\tau_0>\tau$$

em algum ponto interior p_0 de Σ^n. Tomemos $\Sigma_1 = \Sigma^n$ e $\Sigma_2 = \mathbb{P}_{\tau_0}$ e, portanto, $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Observe Σ_1 e Σ_2 são tangentes no ponto comum p_0, e que Σ_1 está acima de Σ_2 com respeito ao normal comum $\eta_0 = -\partial_t$ em p_0. Visto que

$$H_{\Sigma_1} = H \leqslant \inf_{t\in[\tau,+\infty)} (\log f)'(t) \leqslant (\log f)'(\tau_0) = H_{\Sigma_2}$$

e, assim, pelo Princípio de Tangência, podemos concluir que Σ_1 e Σ_2 coincidem em alguma vizinhança aberta de p_0. Isto está em contradição com $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. A prova para o caso em que $H \geqslant \sup_{t\in(-\infty,\tau]} (\log f)'(t)$ é similar. □

A seguinte consequência da Proposição 4.0.3 estende a proposição (2.3) em ((LÓPEZ; MONTIEL, 1999)).

Corolário 4.0.3.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante orientável com bordo não vazio $\psi(\partial\Sigma) \subset \mathbb{P}_\tau$ e cuja função ângulo Θ não muda de sinal. Então temos*

i) *$H \leqslant 1$ se, e somente se, $h \leqslant \tau$;*

ii) *$H \geqslant 1$ se, e somente se, $h \geqslant \tau$ em Σ^n.*

Em particular, $H = 1$ se, e somente se, $\psi(\Sigma^n) \subset \mathbb{P}_\tau$.

Demonstração. Vamos provar somente **(i)**, uma vez que a prova de **(ii)** é análoga. Para tanto, suponhamos que $H \leqslant 1$ mas que $h \leqslant \tau$ não ocorra. Assim $h(p) > \tau$ para algum $p \in \Sigma$. Como Σ é compacta, temos

$$\max_{\Sigma} h = h(p_0) = \tau_0 \geqslant h(p) > \tau$$

para algum ponto p_0 interior a Σ^n. Basta agora tomarmos $\Sigma_1 = \Sigma^n$ e $\Sigma_2 = \mathbb{P}_{\tau_0}$ e aplicarmos o Princípio de Tangência. Reciprocamente, suponhamos que $h \leqslant \tau$ mas que tenhamos $H > 1$. Como, por hipótese, $f(t) = e^t$, segue que $(\log f)'(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, temos que pelo item **(ii)** da Proposição 4.0.3 que $\psi(\Sigma^n) \subset [\tau, +\infty) \times \mathbb{P}^n$. Logo, $h \geqslant \tau$. Daí, $h = \tau$, ou seja, a função altura h é constante. Portanto $\psi(\Sigma^n)$ deve coincidir com a folha $\mathbb{P}_\tau$ cuja curvatura média é $H = (\log f)'(\tau) = 1$ o que nos dá uma contradição. Logo, $H \leqslant 1$. A parte final do corolário segue facilmente dos itens **(i)** e **(ii)**.

□

Para concluirmos estendemos o teorema 3.3 em ((LÓPEZ; MONTIEL, 1999)) que ocorre para gráficos no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ aos seguintes resultados, que ocorrem para gráficos em variedades pseudo-hiperbólicas. Para o caso do referido espaço com $f(t) = e^t$, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.0.4. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante* $H \notin [0,1)$ *e bordo não vazio* $\psi(\partial\Sigma^n) \subset \mathbb{P}_\tau$*. Assuma que* $Ric_{\mathbb{P}} \geqslant 0$ *e que a função ângulo* Θ *não muda de sinal. Seja* $C = \log\left(\frac{H}{H-1}\right)$*, então:*

i) *Se* $H < 0$ *então* $\psi(\Sigma^n) \subset [\tau + C, \tau] \times \mathbb{P}^n$*;*

ii) *Se* $H > 1$ *então* $\psi(\Sigma^n) \subset [\tau, \tau + C] \times \mathbb{P}^n$*;*

iii) *Se* $H = 1$ *então* $\psi(\Sigma^n) \subset \mathbb{P}_\tau$*.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.0.3.1, segue que $\psi(\Sigma^n) \subset (-\infty, \tau] \times \mathbb{P}^n$ se $H < 0$; $\psi(\Sigma^n) \subset [\tau, +\infty) \times \mathbb{P}^n$ se $H > 1$ e que $\psi(\Sigma^n) \subset \mathbb{P}_\tau$ se $H = 1$. Pelo Princípio do Máximo aplicado à função subharmônica ϕ dada por (3.22), obtemos:

$$e^h(H-1) \leqslant e^h(H+\Theta) \leqslant \max_{\partial\Sigma} e^h(H+\Theta) = e^\tau \left(H + \max_{\partial\Sigma}\Theta\right) \leqslant e^\tau H$$

e, assim, o teorema segue facilmente.

$\square$

Finalmente, para o caso do espaço pseudo-hiperbólico com $f(t) = \cosh t$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.0.5. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante H e bordo não vazio* $\psi(\partial\Sigma^n) \subset \mathbb{P}_0$*. Assuma que* $Ric_{\mathbb{P}} \geqslant -1$ *e que a função ângulo* Θ *não muda de sinal. Seja* $\tanh C = \frac{1}{H}$*, então nestas condições:*

i) *Se* $H < -1$ *então* $\psi(\Sigma^n) \subset [C, 0] \times \mathbb{P}^n$*;*

ii) *Se* $H > 1$ *então* $\psi(\Sigma^n) \subset [0, C] \times \mathbb{P}^n$*;*

iii) *Se* $H = 0$ *então* $\psi(\Sigma^n) \subset \mathbb{P}_0$*.*

Demonstração. Pela Proposição 4.0.3, observamos que $\psi(\Sigma^n) \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{P}^n$ se $H < 0$, $\psi(\Sigma^n) \subset [0, +\infty) \times \mathbb{P}^n$ se $H > 0$ e que $\psi(\Sigma^n) \subset \mathbb{P}_0$ se $H = 0$. Na última alternativa, observe que $H = (\log f)'(0) = \tanh(0)$ e, além disso, $(\log f)''(t) = \frac{1}{\cosh t} \geqslant 0$.Visto que $\sigma(t) = \mathrm{senh}(t)$, segue do Princípio do Máximo aplicado à função subharmônica ϕ dada por (3.22) que

$$H\mathrm{senh}(h) - \cosh(h) \leqslant 0 \leqslant \phi \leqslant \max_{\partial_t\Sigma}\phi = \max_{\partial\Sigma}\Theta \leqslant 0$$

daí, $H\tanh(h) \leqslant 1$. Então, quando $H < -1$, isto fornece $\tanh(h) \geqslant \frac{1}{H}$ e, quando $H > 1$, fornece $\tanh(h) \leqslant \frac{1}{H}$. Isto prova o teorema. $\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudadas hipersuperfícies de curvatura média constante imersas em espaços produto warped da forma $\mathbb{R} \times_f \mathbb{P}^n$, onde $\mathbb{P}^n$ é uma variedade Riemanniana completa. Em particular, nosso estudo incluiu as hipersuperfícies de curvatura média constante em espaços ambiente produto. Também estudamos hipersuperfícies de curvatura média constante nos chamados espaços ambiente *pseudo-hiperbólicos*. Se a hipersuperfície é compacta, mostramos que a imersão deve ser uma folha $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^n$ da folheação trivial totalmente umbílica $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}_t$, generalizando resultados prévios de Montiel (MONTIEL, 1999). Também estendemos um resultado de Guan e Spruck em (GUAN; SPRUCK, 2000) do espaço ambiente hiperbólico para a situação geral de produtos warped. Esta estensão nos permitiu dar uma versão ligeiramente mais geral para um resultado de Montiel em (MONTIEL, 1999), e obter estimativas de altura para hipersuperfícies compactas de curvatura média constante com fronteira em uma folha.

REFERÊNCIAS

ALEXANDROV, A. D. A characteristic property of spheres. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, v. 58, n. 1, p. 303–315, 1962.

ALÍAS, L. J.; DAJCZER, M. Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, v. 50, n. 3, p. 511–526, 2007.

ALIAS, L. J.; DAJCZER, M. Normal geodesic graphs of constant mean curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 75, n. 3, p. 387–401, 2007.

CHEN, Q.; XIN, Y. A generalized maximum principle and its applications in geometry. **American Journal of Mathematics**, v. 114, n. 2, p. 355–366, 1992.

CHERN, S.-S. On the curvatures of a piece of hypersurface in euclidean space. **Abhandlungen aus dem mathematischen seminar der universität hamburg**, v. 29, n. 1, p. 77–91, 1965.

FLANDERS, H. Remark on mean curvature. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 1, n. 1, p. 364–366, 1966.

FONTENELE, F.; SILVA, S. L. A tangency principle and applications. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 45, n. 1, p. 213–228, 2001.

GUAN, B.; SPRUCK, J. Hypersurfaces of constant mean curvature in hyperbolic space with prescribed asymptotic boundary at infinity. **American Journal of Mathematics**, v. 122, n. 5, p. 1039–1060, 2000.

HASANIS, T.; VLACHOS, T. Curvature properties of hypersurfaces. **Archiv der Mathematik**, v. 82, n. 6, p. 570–576, 2004.

HEINZ, E. Über flächen mit eineindeutiger projektion auf eine ebene, deren krümmungen durch ungleichungen eingeschränkt sind. **Mathematische Annalen**, v. 129, n. 1, p. 451–454, 1955.

HOFFMAN, D.; LIRA, J. H. S.; ROSENBERG, H. Constant mean curvature surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 358, n. 2, p. 491–507, 2006.

JÚNIOR, J. Imersões em produtos torcidos. **Universidade Federal do Piauí-Centro de Ciências da Natureza (Dissertação de Mestrado)**, 2011.

LÓPEZ, R.; MONTIEL, S. Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 8, n. 2, p. 177–190, 1999.

MIRANDOLA, H. Half-space type theorems in warped product spaces with one-dimensional factor. **Geometriae Dedicata**, v. 138, n. 1, p. 117–127, 2009.

MONTIEL, S. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some riemannian manifolds. **Indiana University mathematics journal**, p. 711–748, 1999.

NELLI, B.; ROSENBERG, H. Global properties of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$. **Pacific journal of mathematics**, v. 226, n. 1, p. 137–152, 2006.

OBATA, M. Conformal transformations of riemannian manifolds. **Journal of Differential Geometry**, v. 4, n. 3, p. 311–333, 1970.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. *[S. l.]*: Academic Press, 1983.

REYNOLDS, W. F. Hyperbolic geometry on a hyperboloid. **The American mathematical monthly**, v. 100, n. 5, p. 442–455, 1993.

RIGOLI, M.; SALVATORI, M.; VIGNATI, M. A liouville type theorem for a general class of operators on complete manifolds. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 194, n. 2, p. 439–453, 2000.

SALAVESSA, I. M. d. C. Graphs with parallel mean curvature. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 107, n. 2, p. 449–458, 1989.

STRUIK, D. J. **Lectures on classical differential geometry**. *[S. l.]*: Courier Corporation, 1961.

TASHIRO, Y. Complete riemannian manifolds and some vector fields. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 117, p. 251–275, 1965.