



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ROGER OLIVEIRA SOUSA

**EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA FORTE E FRACA DE GERMES DE FUNÇÕES
SEMI-ALGÉBRICAS CONTÍNUAS NA ORIGEM E NO INFINITO**

FORTALEZA

2022

ROGER OLIVEIRA SOUSA

EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA FORTE E FRACA DE GERMES DE FUNÇÕES
SEMI-ALGÉBRICAS CONTÍNUAS NA ORIGEM E NO INFINITO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Vincent Jean Henri Grandjean.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S698e Sousa, Roger Oliveira.

Equivalência assintótica forte e fraca de germes de funções semi-algébricas contínuas na origem e no infinito / Roger Oliveira Sousa. – 2022.
68 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Vicent Jean Henri Grandjean.

1. Funções Semi-algébricas. 2. Pizzas minimais. 3. Equivalências Assintóticas. 4. Homeomorfismo Bi-Lipschitz. 5. Teorema de Preparação. I. Título.

CDD 510

ROGER OLIVEIRA SOUSA

EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA FORTE E FRACA DE GERMES DE FUNÇÕES
SEMI-ALGÉBRICAS CONTÍNUAS NA ORIGEM E NO INFINITO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Singularidades.

Aprovada em: 20 / 07 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vincent Jean Henri
Grandjean. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Lev Birbrair
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes
Universidade Estadual de Maringá(UEM)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, pelo conhecimento e força durante essa complexa caminhada.

À minha mãe, que durante toda a minha vida me proporcionou todas as condições para ter uma educação de qualidade e durante toda minha carreira acadêmica me apoiou desde cedo, me incentivando a continuar estudando e me dedicando.

À minha companheira Aline, que compreendeu e apoiou cada etapa do meu trabalho, que se mostrou, como sempre, fiel e presente em cada momento que precisei de uma palavra de ânimo e sugestões para lidar com determinadas escolhas. Obrigado pelo amor, diálogo e compreensão, te amo.

Ao meu orientador Vincent Jean Henri Grandjean, pela orientação, conversas e discussões frutíferas que foram essenciais para a construção desse trabalho.

Aos professores Lev Birbrair, Alexandre César Gurgel Fernandes, Rodrigo Mendes Pereira e Marcelo Escudeiro Hernandes por terem aceitado participar da banca.

Aos meus colegas de pós-graduação que estiveram presentes em discussões matemáticas, debates, aulas e seminários: Davi Ribeiro, Diego Sousa, Diego Eloí, Eddygledson, Emanuel, Edson Sampaio, Léo Ivo, Renato Targino, Nicolás e Zé Eduardo.

Ao corpo docente da pós-graduação em matemática da UFC pelos conhecimentos repassados e dedicação na pesquisa e no ensino da matemática.

À Andrea e a Jessyca pela competência e agilidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“O sonho é que leva a gente para frente. Se a gente for seguir a razão, fica aquietado, acomodado.” (SUASSUNA)

RESUMO

Este trabalho apresenta noções de equivalências assintóticas fraca e forte na origem e no infinito para germes de funções contínuas e semi-algébricas no plano real furado. Mostramos que tais equivalências são completamente determinadas e caracterizadas por um objeto combinatorial finito adaptado, chamado pizza minimal associada ao germe correspondente da função considerada.

Palavras-chave: funções semi-algébricas; teorema de preparação; complexo de Holder; pizzas e pizzas minimais; equivalências assintóticas; homeomorfismo bi-Lipschitz.

ABSTRACT

In this work we present the notions of weak and strong asymptotic equivalences at the origin and at infinity for germs of semi-algebraic and continuous functions in the real punctured plane. We show that such equivalences are completely determined and characterized by an adapted finite combinatorial object, called minimal pizza associated with the corresponding germ of considered function.

Keywords: semi-algebraic functions; preparation theorem; pizzas and minimal pizzas; asymptotic equivalence; bi-Lipschitz homeomorphisms; Hölder complex.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conjuntos do tipo B e do tipo G	13
Figura 2 – Pontos no infinito de $y^2 = x^3$	16
Figura 3 – Pontos no infinito de $y^2 = x$	16
Figura 4 – Pizzas no infinito	25
Figura 5 – Casos $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ e $(\gamma_1, \gamma_2) > 1$	28
Figura 6 – Casos de ordem de contato de dois arcos	41
Figura 7 – $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_2$	50
Figura 8 – $v_1 = u_1$ e $v_2 \neq u_2$	51
Figura 9 – Caso complementar para $v_1 \neq v_2$	52
Figura 10 – Caso $v_1 = v_2 = v$ e $u \neq v$	52
Figura 11 – Caso $v_1 = v_2 = v$ e $u = v$	53
Figura 12 – Ilustração do caso.	53
Figura 13 – Pizzas no infinito	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	11
2.1	Conjuntos semi-algébricos	11
2.2	Compatificação do plano	14
2.3	Teorema de Puiseux	16
2.4	Pares de Puiseux	18
2.5	Puiseux e germes reais	19
2.5.1	$\dim (X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) = 1$	19
2.5.2	$(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$	22
3	TEOREMA DE PREPARAÇÃO	24
4	EQUIVALÊNCIA DE CONTATO E PIZZAS	27
4.1	Definições	27
4.2	Simplificação de pizzas e resultado principal	31
5	EQUIVALÊNCIAS ASSINTÓTICAS FRACA E FORTE NA ORIGEM	33
5.1	Comportamento de funções sobre o plano furado	33
5.2	Equivalências assintóticas	34
5.3	Primeiro resultado principal	37
6	GEOMETRIA SEMI-ALGÉBRICA NO INFINITO	40
6.1	Arcos no Infinito	40
6.2	Ordem e largura no infinito	41
7	LEMA DE COLAGEM	43
7.1	Setores	43
7.2	Triângulo de Hölder no infinito	45
7.3	Lema de colagem	48
8	PIZZAS NO INFINITO	55
8.1	Definições	55
8.2	Propriedades	58
9	EQUIVALÊNCIAS ASSINTÓTICAS NO INFINITO E SEGUNDO RE- SULTADO PRINCIPAL	62
9.1	Equivalência assintótica no infinito	62

9.2	Equivalência de contato Lipschitz no infinito	64
10	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

O comportamento assintótico de funções na vizinhança de um ponto ou do infinito nos dão informações muito interessantes que, em alguns casos, nos permitem resolver problemas de classificação. Quando consideramos problemas de classificação é importante saber se temos uma quantidade finita, infinita enumerável ou não enumerável de classes e quem são seus invariantes.

Em 2006, L. Birbrair, J.F.C Costa, A. Fernandes e M.A.S Ruas provaram que se dois germes em um ponto de funções Lipschitz f e g tem o mesmo comportamento assintótico, isto é, o mesmo contato (f e g tem o mesmo contato quando $\frac{f \circ \phi}{g}$ é positivo e limitado onde ϕ é um germe de um homeomorfismo bi-Lipschitz) são K-Bi-Lipschitz equivalentes.

Em 2012, L. Birbrair, A. Fernandes, V. Grandjean e A. Gabrielov apresentaram uma classificação dos germes de funções contínuas definidos num germe da origem de \mathbb{R}^2 definíveis em uma estrutura o-minimal polinomialmente limitada, por exemplo, funções semi-algébricas ou funções subanalíticas, usando um objeto combinatorial finito (pizzas minimais).

Neste trabalho introduzimos as noções de fracamente assintoticamente equivalente e fortemente assintoticamente equivalente para germes de funções semi-algébricas e contínuas no plano furado e no infinito, apresentaremos uma classificação para tais funções e, para isso, usaremos invariantes e a técnica de construção semelhante às das pizzas apresentadas em [5].

2 PRELIMINARES

2.1 Conjuntos semi-algébricos

Definição 2.1.1. Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é dito semi-algébrico se admitir representação da seguinte forma:

$$V = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n; P_{ij}(x) s_{ij} 0\},$$

onde, para cada $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, r_i$,

1. $s_{ij} \in \{>, =, <\}$;
2. $P_{ij}(X) \in \mathbb{R}[X]$, $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Observação 1. 1. Os conjuntos semi-algébricos de \mathbb{R}^n formam a menor família de subconjuntos de \mathbb{R}^n tal que:

- a) Contém todos os conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n; P(x) \geq 0\}, P(X) \in \mathbb{R}[X].$$

- b) É fechada para as operações de teoria dos conjuntos como: uniões finitas, interseções finitas, tomar o complementar e tomar o produto.

2. Em particular, todo conjunto semi-algébrico V em \mathbb{R}^n tem uma representação tal que cada $s_{ij} \in \{=, >\}$.

Exemplo 1. Todo conjunto algébrico de \mathbb{R}^2 é um conjunto semi-algébrico. Logo, $\bar{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ é semi-algébrico.

Exemplo 2. $V := \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 1\}$ é um conjunto semi-algébrico que não é algébrico. Observe que $V = \pi(\bar{V})$, onde $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$.

Os exemplos acima nos mostram uma das principais motivações para se introduzir os conjuntos semi-algébricos. Eles são fechados para projeções lineares. Isto é, se \bar{V} é semi-algébrico, então $\pi(\bar{V})$ também é semi-algébrico. Esta propriedade não é válida para os conjuntos algébricos, como vimos no exemplo 2.

Definição 2.1.2. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos semi-algébricos. Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é chamada semi-algébrica se o gráfico de f é um conjunto semi-algébrico em \mathbb{R}^{n+m} .

Teorema 2.1.3 (Tariski - Seidenberg). *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação semi-algébrica, então a imagem $F(X) \subseteq Y$ é um conjunto semi-algébrico.*

Demonstração. Veja [1]. □

Corolário 2.1.4. *$f = (f_1, \dots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é semi-algébrica se, e somente se, cada $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-algébrica.*

Demonstração. Veja [1]. □

Proposição 2.1.5. *Composição de aplicações semi-algébricas é uma aplicação semi-algébrica.*

Demonstração. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ funções semi-algébricas com $f(A) \subset B$. Vamos provar que $\text{graf}(g \circ f)$ é um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Considere a projeção ortogonal $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Como $\text{graf}(f) \times \mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^n \times \text{graf}(g)$ são semi-algébricos, temos, pela afirmação acima, que $\pi(\text{graf}(f) \times \mathbb{R}^p \cap \mathbb{R}^n \times \text{graf}(g))$ é um conjunto semi-algébrico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Basta então provar que

$$\text{graf}(g \circ f) = \pi(\text{graf}(f) \times \mathbb{R}^p \cap \mathbb{R}^n \times \text{graf}(g)).$$

Tome $(x, y) \in \text{graf}(g \circ f) \Rightarrow y = g \circ f(x)$. Logo, $((x, f(x)), y) \in \text{graf}(f) \times \mathbb{R}^p \cap \mathbb{R}^n \times \text{graf}(g)$ e $(x, y) = \pi(x, f(x), y)$.

Seja agora $(u, v) \in \pi(\text{graf}(f) \times \mathbb{R}^p \cap \mathbb{R}^n \times \text{graf}(g))$, então existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, tal que $(u, v) = \pi(x, y, z) \Rightarrow u = x$ e $v = z$, além disso, $(u, y, v) \in \text{graf}(f) \times \mathbb{R}^p \Rightarrow y = f(x)$ e $(u, y, v) \in \mathbb{R}^n \times \text{graf}(g) \Rightarrow v = g(y)$. Portanto, $v = g(f(u)) \Rightarrow (u, v) \in \text{graf}(g \circ f)$. □

Observação 2. Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto semi-algébrico, considere o espaço $S_1(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é semi-algébrica}\}$. $S_1(X)$ munido com a soma e produto de funções e com produto por um escalar se torna uma \mathbb{R} -álgebra. Já o espaço $S_n(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ é semi-algébrica}\}$ munido com a soma e o produto por funções em $S_1(X)$, se torna um $S_1(X)$ -módulo.

Teorema 2.1.6 (Teorema da monotonicidade). *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrica. Então existe uma partição finita $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tal que, em cada intervalo (a_i, a_{i+1}) , f é contínua e, além disso, é constante ou estritamente monótona.*

Demonstração. (Ver [7], Teorema 2.1) □

Teorema 2.1.7 (Decomposição cilíndrica). *Seja X um conjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^n . Vamos considerar \mathbb{R}^n como $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, t)$. Então:*

- (i) X possui um número finito de componentes conexas e cada componente é semi-algébrica.
(ii) Existe uma partição finita I de \mathbb{R}^{n-1} de conjuntos semi-algébricos conexos tais que, para cada $A \in I$, podemos definir funções:

$$f_k^A : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad (\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$$

para $k = 0, 1, \dots, s_A, s_A + 1$, tal que

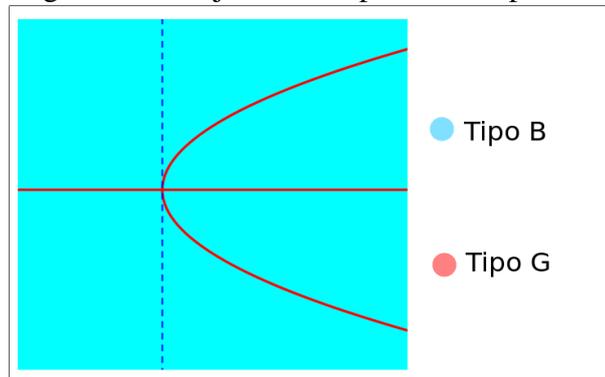
- a) $f_0^A \equiv -\infty$, $f_{s_A+1}^A \equiv +\infty$;
b) $f_k^A : A \rightarrow \mathbb{R}$, para $k = 1, \dots, s_A$, é uma função contínua e semi-algébrica tal que, para cada $x \in A$, $f_k^A(x) < f_{k+1}^A(x)$.
(iii) Todos os conjuntos da forma B (tipo faixa), dado por $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n; x \in A, f_k^A(x) < t < f_{k+1}^A(x)\}$, $k = 0, 1, \dots, s_A$, ou G (tipo gráfico), dado por $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n; x \in A, t = f_k^A(x)\}$, $k = 1, \dots, s_A$, são semi-algébricos.
(iv) A coleção dos conjuntos definidos em (iii) foram uma partição de \mathbb{R}^n ; a subcoleção destes conjuntos contidos em X formam uma partição para X .

Demonstração. (Ver [1], Teorema 2.2.1) □

Exemplo 3. Faça $n = 2$, tome $X = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x(t^2 - x) = 0\}$. Neste caso, a partição I de \mathbb{R} (com coordenada x) é dada por

$$\{x < 0\}, \{x = 0\}, \{x > 0\}.$$

Figura 1 – Conjuntos do tipo B e do tipo G



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

A partição de \mathbb{R}^2 para conjuntos do tipo B é

$$\{x < 0, 0 < t < \infty\}, \{x < 0, -\infty < t < 0\}, \{x = 0, -\infty < t < \infty\}, \{x > 0, -\sqrt{x} < t < 0\}, \\ \{x > 0, 0 < t < \sqrt{x}\}, \{x > 0, \sqrt{x} < t < \infty\}, \{x > 0, -\infty < t < -\sqrt{x}\}.$$

E os conjuntos do tipo G são

$$\{x < 0, t = 0\}, \{x > 0, t = 0\}, \{x > 0, t = \sqrt{x}\}, \{x > 0, t = -\sqrt{x}\}.$$

Para cada n , existe um algoritmo de separação e estratificação para $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Definição 2.1.8. Seja X um conjunto semi-algébrico. Então

$$\dim X = \{\dim S, S \text{ célula de } \mathcal{C}\},$$

onde \mathcal{C} é uma decomposição cilíndrica de X .

Definição 2.1.9. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. Diremos que α é uma curva semi-algébrica se seu traço for um conjunto semi-algébrico de dimensão 1. Isto é, $\dim \alpha(I) = 1$.

Exemplo 4. $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, \sin t)$ não é uma curva semi-algébrica pois $\alpha(\mathbb{R})$ não é um conjunto semi-algébrico.

Teorema 2.1.10 (Lema de Seleção de Curva). *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semi-algébrico e $p \in \overline{X} \setminus X$. Então, existe uma curva contínua e semi-algébrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma((0, 1]) \subset X$.*

Demonstração. (Ver [8], teorema 3.13.) □

2.2 Compatificação do plano

Definição 2.2.1. Uma compatificação de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) é um mergulho de X como um subespaço aberto e denso de um espaço topológico compacto. Isto é, existe um espaço topológico compacto (Y, \mathcal{U}) e um mapa $f : X \rightarrow Y$ tal que $f : X \rightarrow f(X)$ é um homeomorfismo, e $\overline{f(X)} = Y$.

Exemplo 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow B[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\}$, definida por

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Observe que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ é um homeomorfismo, com inversa $g : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, y) = \left(\frac{x}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

e que $\overline{f(X)} = \overline{B(0,1)} = \overline{B[0,1]} = Y$. Portanto, temos uma compactificação de \mathbb{R}^2 .

S^1 corresponde aos “pontos no infinito de \mathbb{R}^2 ”, isto é, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \mathbb{R}^2 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = +\infty$ então $\tilde{x}_n = f \circ x_n$ é uma sequência em $B[0,1]$ tal que $\lim \tilde{x}_n = s \in S^1$.

Queremos agora responder a seguinte questão: *Dada uma curva semi-algébrica em \mathbb{R}^2 , $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\lim \|\gamma\| = +\infty$, como encontrar os “pontos de γ no infinito?”*

Definição 2.2.2. O plano projetivo real \mathbb{P}^2 é o conjunto de classes de equivalências

$$\mathbb{P}^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}, (x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)\} / \sim,$$

onde a relação “ \sim ” é definida em $\mathbb{R}^3 - \{0, 0, 0\}$ por:

$$(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$$

tal que $(x_0, x_1, x_2) = \lambda(y_0, y_1, y_2)$.

Vamos denotar as classes de equivalências de (x_0, x_1, x_2) por $[x_0 : x_1 : x_2]$. Cada ponto $[x_0 : x_1 : x_2]$ de \mathbb{P}^2 representa uma reta em \mathbb{R}^3 que passa pela origem.

Sejam $\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\varphi([x : y : z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right)$$

e $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ dada por:

$$\psi(x, y) = [x : y : 1].$$

φ é uma bijeção contínua entre $\mathbb{P}^2 \setminus \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2; z = 0\}$ e \mathbb{R}^2 .

O conjunto $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2; z = 0\}$ é chamado de reta no infinito de \mathbb{P}^2 . Denotaremos este conjunto por L_∞ . Como \mathbb{P}^2 munido com a topologia quociente é um espaço topológico compacto, temos outra compactificação de \mathbb{R}^2 .

Definição 2.2.3. Sejam C uma curva semi-algébrica dada por $f(x, y) = 0$ e $\tilde{C} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2; \tilde{f}(x, y, z) = 0\}$ a curva projetiva obtida da homogenização \tilde{f} de f . Os pontos no infinito de C são os elementos do conjunto $\tilde{C} \cap L_\infty$.

A definição acima responde nosso questionamento. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6. Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^3 = 0\}$. Vamos encontrar os pontos no infinito de C . A homogenização de $y^2 - x^3$ é o polinômio $y^2z - x^3$. Basta agora encontrar os pontos da reta L_∞

que são raízes de $y^2z - x^3$.

$[x : y : 0] \in L_\infty \Rightarrow y^2 \cdot 0 = x^3 \Rightarrow x^3 = 0$. Logo, $y \neq 0 \Rightarrow y^2 \neq 0$. Daí, $\tilde{C} \cap L_\infty = \{[0 : y : 0]\}$.

O ponto $[0 : y : 0]$ corresponde aos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$ de S^1 . Estes são, portanto, os pontos no infinito de C (Figura 2).

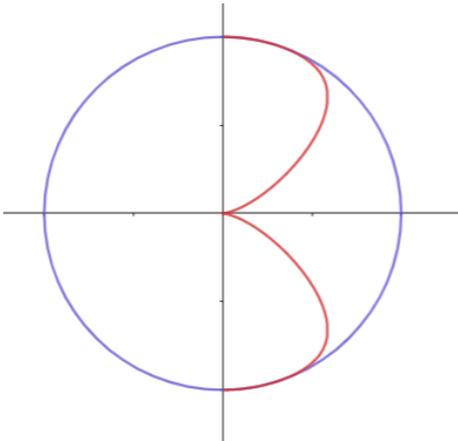
Exemplo 7. Seja $C = \{(x, y); y^2 = x\}$. Procedendo como no exemplo anterior, podemos encontrar seus pontos no infinito.

$$\tilde{C} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2; y^2 = xz\}.$$

$y^2 = x \cdot 0 \Rightarrow y^2 = 0$. Logo, $x \neq 0, \tilde{C} \cap L_\infty = \{[x : 0 : 0]\}$.

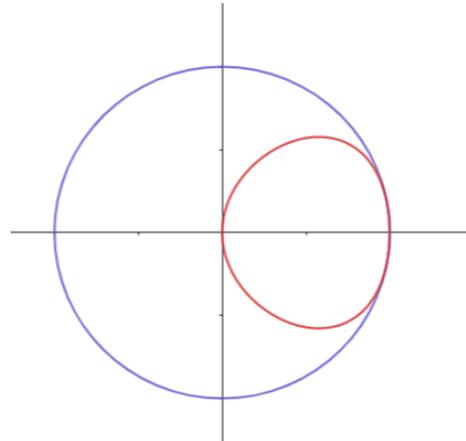
O ponto $[x : 0 : 0]$ corresponde aos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ de S^1 . Porém, apenas $(1, 0)$ é o ponto no infinito de C , pois $x \geq 0$ (Figura 3).

Figura 2 – Pontos no infinito de $y^2 = x^3$.



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Figura 3 – Pontos no infinito de $y^2 = x$.



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

2.3 Teorema de Puiseux

Segue agora a apresentação de uma ferramenta muito importante para este trabalho: expansão de Puiseux, que vai nos permitir parametrizar os germes de curvas semi-algébricas.

Definição 2.3.1. Seja $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$, dizemos que f é regular de ordem s em y quando:

$$f(0, y) = \delta y^s + \text{termos de ordem superior}, \quad \delta \neq 0$$

onde $\mathbb{C}\{x, y\} := \left\{ f(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j, \text{ funções analíticas em } \mathbb{C}^2 \right\}$.

Observação 3. A menos de uma mudança de coordenadas linear, sempre podemos supor que f não identicamente nula é regular com alguma ordem finita em x ou em y .

Teorema 2.3.2 (Teorema de Puiseux). *Seja $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ regular de ordem $m > 0$ em y e irredutível. Então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe um $\delta > 0$ com as seguintes propriedades:*

Se $X := \{(x, y) \in \mathcal{U}_{\varepsilon, \delta} \mid f(x, y) = 0\}$ é o conjunto de zeros de f , então existe uma série de potências convergentes $y(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ para a qual a aplicação $\pi : B \rightarrow \mathbb{C}^2$ do disco $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta^{1/m}\}$ para \mathbb{C}^2 dada por $\pi(z) = (z^m, y(z))$ é holomorfa sobre X , isto é, $\pi : B \rightarrow X$.

A restrição $\pi : B \setminus \{0\} \rightarrow X \setminus \{0\}$ é bi-holomorfa e $\pi^{-1}(0) = \{0\}$.

Demonstração. (Ver [6], Teorema 1, página 386) □

Em geral, f possui uma decomposição em fatores irredutíveis, $f_1^{r_1}, \dots, f_n^{r_n}$. A série de Puiseux então satisfaz uma das equações $f_i(x, y) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Nós sabemos que cada curva irredutível com equação $f(x, y) = 0$ não tangente ao eixo y admite solução $y = y(x)$, que pode ser descrita como uma série de potências de $x^{1/m}$, determinada unicamente a menos de escolha do ramo de $x^{1/m}$, onde m é o grau do polinômio de Weierstrass de f . Equivalentemente a esta descrição da solução é a parametrização $z \mapsto (z^m, y(z))$ de um disco sobre o eixo z no plano (x, y) . Reciprocamente, cada parametrização $z \mapsto (z^m, y(z))$ gera uma curva.

Teorema 2.3.3. *Seja m um número natural e $y(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ uma série de potências convergente. A imagem X da aplicação $z \mapsto (z^m, y(z))$ é o conjunto de zeros da função analítica*

$$f(x, y) = \prod_{i=0}^{m-1} (y - y(\varepsilon_i x^{1/m})),$$

onde $\varepsilon_i^m = 1$ em uma vizinhança do $0 \in \mathbb{C}^2$.

Demonstração. (Ver [6], Teorema 2, página 389). □

2.4 Pares de Puiseux

Seja $f \in \mathbb{C}\{u\}[v]$ polinômio de Weierstrass irreduzível

$$f(u, v) = v^m + a_1(u)v^{m-1} + \dots + a_m(u)$$

onde $a_j(u) \in (u)^{j+1}\mathbb{C}\{u\}$ para cada $1 \leq j \leq m$.

Seja $(X, \mathbf{0})$ o germe na origem da curva irreduzível $f^{-1}(0) = \mathbf{0}$. Pelas hipóteses, a curva é tangente ao eixo $\mathbb{C}u$ em $\mathbf{0}$ e admite uma parametrização de Puiseux como segue

$$u \rightarrow (u^m, \Psi_0(u)), \text{ com } \Psi_0(u) = u^{q_0 m} \varphi_0(u^m) + u^{\beta_1} \varphi_1(u^{e_1}) + \dots + u^{\beta_s} \varphi_s(u^{e_s}), \quad (2.1)$$

onde cada função $\varphi_i \in \mathbb{C}\{u\}$, para $i \geq 1$, é uma unidade em $\mathbf{0}$, temos

$$q_0 m < \beta_1 < \dots < \beta_s, \text{ e } e_s < e_{s-1} < \dots < e_0 := m.$$

Se a função $u^{q_0 m} \varphi_0(u^m)$ não for identicamente nula, φ_0 é, também, uma unidade analítica de $\mathbb{C}\{u\}$ e $q_0 \geq 2$. Os pares $(\beta_1, e_1), \dots, (\beta_s, e_s)$ são os pares de Puiseux de f . Obtemos

$$f(u^m, v) = \prod_{j=0}^{m-1} (v - \Psi_j(u)), \quad (2.2)$$

onde $\Psi_j(u) = \Psi_0(\omega^j \cdot u)$, com $\omega = e^{i\frac{2\pi}{m}}$.

As relações seguintes determinam os pares de Puiseux de f . Seja

$$\Psi_0(x) = \sum_{j>m} \psi_j x^j,$$

$e_0 := m$ e $\beta_{s+1} := +\infty$. Lembramos que

$$\beta_{i+1} = \min\{j : \psi_j \neq 0 \text{ e } e_i \nmid j\}, \quad e_{i+1} := \text{mdc}(e_i, \beta_{i+1})$$

para $i \in \{0, \dots, s-1\}$. Deduzimos a existência de inteiros positivos m_1, \dots, m_s , tais que, para cada $k = 1, \dots, s$, obtemos

$$m = e_1 m_1 = e_2 m_2 m_1 = \dots = e_k (m_k \cdots m_1). \quad (2.3)$$

A irreduzibilidade da função f implica que $e_s = 1$.

Os pares de Puiseux são invariantes analíticos, definimos para cada $k \in \{0, \dots, s\}$, o germe de função $A_k \in \mathbb{C}[u]$ como segue

$$A_0(u) := u^{q_0 e_0} \varphi_0(u^{e_0}),$$

$$A_k(u) := u^{q_0 e_0} \varphi_0(u^{e_0}) + u^{\beta_1} \varphi_1(u^{e_1}) + \dots + u^{\beta_k} \varphi_k(u^{e_k}) \text{ quando } k \geq 1.$$

Observe que $A_k(u) = \theta_k(u^{e_k})$ para $\theta_k \in \mathbb{C}[u]$.

2.5 Puiseux e germes reais

Seja $f \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ polinômio de Weirstrass irreduzível

$$f(x, y) = y^m + f_1(x)y^{m-1} + \cdots + f_m(x),$$

onde $f_j(x) \in (x)^{j+1}\mathbb{R}\{x\}$ para cada $1 \leq j \leq m$.

Sejam $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0})$ o germe de $f^{-1}(0)$ em $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Seja F a função complexa induzida pela f . Seja $(X_{\mathbb{C}}, \mathbf{0})$ o germe em $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$ de $F^{-1}(0)$. Mergulhando \mathbb{R}^2 em $\mathbb{C}^2 = (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R} + i\mathbb{R})$, considerando $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} + i0) \times (\mathbb{R} + i0)$, observe que $X_{\mathbb{R}} = X_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$.

Seja $G(u, v) = \sum_{k,l} g_{k,l} u^k v^l \in \mathbb{C}\{u, v\}$. Definimos $\bar{G} \in \mathbb{C}\{u, v\}$ como segue

$$\bar{G}(u, v) = \sum_{k,l} \overline{g_{k,l}} u^k v^l.$$

2.5.1 $\dim(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) = 1$

Começamos com o seguinte fato:

Fato 2.5.1. F é irreduzível.

Demonstração. Seja $F = G_1 \cdots G_r$ a decomposição em fatores irreduzível de F em $\mathbb{C}\{u\}[v]$.

Como $F = \bar{F}$, deduzimos

$$\{\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_r\} = \{G_1, \dots, G_r\}.$$

Para r ímpar, temos $G_1 = \bar{G}_1$ (por exemplo) e, assim $\prod_{j \geq 2} G_j$ também está em $\mathbb{R}\{u\}[v]$, que contradiz a natureza de f . Assim $r = 2q$ e, após renomear os termos, obtemos

$$F = \prod_{j=1}^q |G_j|^2.$$

Logo $f \geq 0$ em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$. Assim a multiplicidade de f ao longo de $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0})$ é maior ou igual a 2. Que contradiz o fato de f ser irreduzível. \square

Seja a parametrização de Puiseux de F :

$$F(u^m, v) = \prod_{j=1}^q (v - \Psi_j(u)).$$

Existe uma sequência $((x_k, y_k))_k$ de $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0})$ que converge para $\mathbf{0}$, tal que $x_k > 0$ para todo k , ou $x_k < 0$ para todo k . Suponha que $x_k > 0$. Assim, existe $0 \leq j_k \leq m - 1$ tal que

$$y_k = \Psi_{j_k}(x_k^{\frac{1}{m}}).$$

Como $0 \leq j_k \leq m - 1$, podemos assumir, considerando uma subsequência e após renomear os termos, que

$$y_k = \Psi_0(x_k^{\frac{1}{m}}).$$

Como existe $p_0 \geq m + 1$ tal que

$$\Psi_0(u) = u^{p_0} \cdot \sum_{l \geq 0} \psi_l u^l,$$

e $x_k \rightarrow 0$, deduzimos (com uma indução) que cada coeficiente $\psi_l \in \mathbb{R}$, assim

$$\Psi_0(x) \in \mathbb{R}\{x\}.$$

Lema 2.5.2. 1. Se m for ímpar, $\Psi_j(x) \in \mathbb{R}\{x\}$ implica $j = 0$.

2. Se m for par, $\Psi_j(x) \in \mathbb{R}\{x\}$ implica $2j \in m\mathbb{Z}$.

Demonstração. Se $\Psi_0 = \psi_{p_0} \cdot x^{p_0}$, o resultado é óbvio. Suponha que existe $\psi_l \neq 0$ com $l \geq p_0 + 1$.

Como $e_s = 1$, temos

$$\text{mdc}\{k : \psi_k \neq 0\} = 1.$$

Seja $l_i = p_0 + k_i$ com $\alpha_{j_i} \neq 0$ e $i = 1, \dots, q$ tais que

$$\text{mdc}(l_1, \dots, l_q) = 1.$$

O Teorema de Bézout implica que existe $b_1, \dots, b_t \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\sum_{i=1}^q b_i \cdot l_i = 1.$$

Seja $0 \leq j \leq m - 1$ tal que $\Psi_j(x) \in \mathbb{R}\{x\}$. Isso significa que para cada k com $\psi_k \neq 0$ temos

$$\omega^{j \cdot k} = \pm 1.$$

Deduzimos que para cada $i = 1, \dots, q$ temos

$$2 \cdot j \cdot l_i = m \cdot j_i \in m\mathbb{Z},$$

e assim obtemos que

$$2j = 2j \left(\sum_{i=1}^q b_i \cdot l_i \right) \in m\mathbb{Z},$$

Que conclui a demonstração do lema. \square

Uma consequência do Lema é o seguinte:

Corolário 2.5.3. 1. Se m for ímpar, $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0})$ é o grafo sobre $(\mathbb{R}, 0)$ de $x \mapsto \Psi_0 \left(x^{\frac{1}{m}} \right)$.

2. Se $m = 2m_0$ e $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) \cap \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \neq \mathbf{0}$ obtemos

$$(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) = \left(\left\{ \left(x, \Psi_0 \left(x^{\frac{1}{m}} \right) \right), x \geq 0 \right\}, \mathbf{0} \right) \cup \left(\left\{ \left(x, \Psi_{m_0} \left(x^{\frac{1}{m}} \right) \right), x \geq 0 \right\}, \mathbf{0} \right)$$

3. Se $m = 2m_0$ e $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) \cap \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R} \neq \mathbf{0}$ obtemos

$$(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) = \left(\left\{ \left(x, \Psi_0 \left(-|x|^{\frac{1}{m}} \right) \right), x \leq 0 \right\}, \mathbf{0} \right) \cup \left(\left\{ \left(x, \Psi_{m_0} \left(-|x|^{\frac{1}{m}} \right) \right), x \leq 0 \right\}, \mathbf{0} \right)$$

Demonstração. No caso 1, $x \mapsto x^{\frac{1}{m}}$ é um homeomorfismo de \mathbb{R} .

Os casos 2 e 3, seguem do fato que $x \mapsto x^{\frac{1}{m}}$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ e $x \mapsto -|x|^{\frac{1}{m}}$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}_{\leq 0}$. \square

A importância do corolário anterior fica evidente no próximo corolário.

Corolário 2.5.4. Seja Z um conjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^2 . Suponha que $(Z, \mathbf{0})$ tem dimensão 1 e seja S uma componente conexa de $(Z \setminus \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Existem $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ e $x, y \in \mathbb{R}\{t\}$ tais que o germe em 0 da aplicação $(\mathbb{R}_{>0}, 0) \mapsto (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ definida como

$$t \rightarrow (x(t^{\frac{1}{n}}), y(t^{\frac{1}{n}}))$$

parametriza $(S, \mathbf{0})$. Podemos encontrar uma tal parametrização de maneira que $x(t) = t$ ou $y(t) = t$.

Demonstração. Seja Y o fecho algébrico de $(S, \mathbf{0})$. Seu gerador local em $\mathbf{0}$ pode ser escolhido na forma de Weirstrass e é irredutível. Após uma rotação, obtemos a forma como no corolário 2.5.3. Assim, $(S, \mathbf{0})$ é um dos semi-ramos de $(Y_{\mathbb{R}}, \mathbf{0})$, parametrizado na forma desejada. Retornamos às coordenadas iniciais aplicando uma rotação inversa à realizada anteriormente. E uma das coordenadas é da forma $t \cdot U(t^{\frac{1}{m}}) \in \mathbb{R}\{t^{\frac{1}{m}}\}$ com $U(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, assim, podemos inverter em $\mathbb{R}\{t^{\frac{1}{m}}\}$, $t \geq 0$ e obter a propriedade adicional desejada. \square

Corolário 2.5.5. Dada $\phi : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrica com $\phi(0) = 0$. Então existem $n, p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\delta > 0$ e $\alpha(x) \in \mathbb{R}\{x\}$ tais que:

1. $\phi(t) = t^{\frac{p}{n}} \cdot \alpha(t)$ se $t \in]0, \delta]$.
2. Se $\phi : (\mathbb{R}_{>0}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\phi \neq 0$, então $\alpha(0) \neq 0$.

Demonstração. 1. Se ϕ for identicamente nula, podemos tomar qualquer $p, n \in \mathbb{N}$ e $\alpha = 0$.

Supondo $\phi \neq 0$, como ϕ é semi-algébrica, seu gráfico é um conjunto semi-algébrico de dimensão 1 no \mathbb{R}^2 e a menos de diminuir o ε , podemos supor que o gráfico de ϕ é conexo.

Portanto, pelo corolário 2.5.4 existem $n \in \mathbb{N}$ e β tal que o germe do gráfico de ϕ na origem é parametrizado por $(t, \beta(t^{\frac{1}{n}}))$. com $\beta(0) = 0$, logo, podemos escrever $\beta(t^{\frac{1}{n}}) = t^{\frac{p}{n}} \cdot \alpha(t)$ com $\alpha(0) \neq 0$ e $p \geq 1$. Então, para algum $\delta > 0$ tem que $\phi(t) = \beta(t^{\frac{1}{n}}) = t^{\frac{p}{n}} \cdot \alpha(t)$ para todo $t \in]0, \delta]$.

2. Como ϕ é semi-algébrica podemos supor que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\phi \neq 0$ e contínua em $[0, \varepsilon[$. Portanto pelo item anterior α tal que $\alpha(0) \neq 0$.

□

2.5.2 $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$

Podemos assumir que $f > 0$ em $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e, necessariamente, $m = 2\mu$. Temos o seguinte resultado:

Lema 2.5.6. Existe $G \in \mathbb{C}\{u\}[v]$ irredutível, tal que, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = G(x, y) \cdot \overline{G(x, y)}.$$

Demonstração. Temos que $(X_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{0}, \mathbf{0}) \mapsto \mathbb{C} \setminus \mathbf{0}$, $(u, v) \mapsto u$ é um recobrimento analítico com 2μ -folhas. Em particular, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{0}$, $f(x, _)$ admite 2μ raízes complexas simples, e exatamente μ pares dessas raízes são conjugadas, corresponde a um par de números complexos conjugados.

Suponha que a função complexa F é irredutível. Assim, cada raiz de $F(u^m, _)$ é da forma $\Psi_j(u)$. Lembramos que $\Psi_0(u) = \sum_{k \geq p_0} \psi_k u^k$.

Seja $((x_k))_k$ uma seqüência real tal que $x_k \rightarrow 0$ e $x_k > 0$. Seja $t_k > 0$ tal que $x_k = t_k^m$ e $y_k = \Psi_0(t_k)$, assim

$$\overline{\Psi_0(t_k)} = \overline{\Psi_0}(t_k).$$

Como $\overline{\Psi}_0(t_k) \in \{\Psi_1(t_k), \dots, \Psi_{m-1}(t_k)\}$, deduzimos como no Fato 2.5.1, que existe $1 \leq j_0 \leq m-1$ tal que

$$\Psi_{j_0} = \overline{\Psi}_0.$$

Assim, para cada k tal que $\psi_k \neq 0$, temos

$$\omega^{j_0 k} \psi_k = \overline{\psi_k}.$$

Seja $\psi_k = r_k e^{i2\pi\eta_k}$, logo

$$\frac{j_0 k}{m} + 2\eta_k \in \mathbb{Z}.$$

Concluimos que $\psi_k = r_k \cdot \omega^{-\frac{j_0 k}{2}}$, seja

$$\Psi_0(x) = \Psi(\omega^{-\frac{j_0}{2}} x), \text{ e } \Psi(x) \in \mathbb{R}\{x\}.$$

Se j_0 fosse par, $F(x^{2m}, _)$ admitiria soluções reais, logo $(X_{\mathbb{R}}, \mathbf{0})$ teria dimensão 1, o que é absurdo.

Portanto, j_0 é ímpar. Como a escolha do índice 0 de Ψ_0 é arbitrário, podemos assumir

$$\Psi_0(x) = \Psi(e^{i\frac{\pi}{m}}).$$

Sejam $x \in \mathbb{R}_{<0}$ e $t = |x|^{\frac{1}{m}}$, assim $(e^{-i\frac{\pi}{m}} t)^m = x$. Deduzimos que

$$\Psi_0(e^{-i\frac{\pi}{m}} t) = \Psi(t) \in \mathbb{R}\{t\},$$

que é impossível, pois F não tem raiz real para $(0, 0)$.

Podemos decompor F em um produto de fatores irredutíveis $G_j \in \mathbb{C}\{u\}[v]$

$$F := \prod_{j=1}^r G_j(u, v) = \prod_{j=1}^r \overline{G}_j(u, v).$$

Como visto na demonstração do Fato 2.5.1, temos $r = 2q$, e após renomear os índices

$$F := \prod_{j=1}^q |G_j|^2(u, v).$$

Entretanto, cada $|G_j|^2(x, y) \in \mathbb{R}\{x\}[y]$. Como f é irredutível, $q = 1$. □

3 TEOREMA DE PREPARAÇÃO

Neste capítulo enunciaremos o teorema de preparação em \mathbb{R}^2 . Este resultado nos permite particionar o germe de \mathbb{R}^2 no infinito (ou na origem) em zonas onde nossa função se escreve de uma maneira mais simples.

Definição 3.0.1. Seja $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde cada S_n é um conjunto de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Dizemos que \mathcal{S} é uma estrutura o-minimal sobre \mathbb{R} se satisfaz os seguintes axiomas:

- 1) Todos os subconjuntos algébricos de \mathbb{R}^n estão em S_n .
- 2) Para todo n , S_n é uma subálgebra Booleana do conjunto das partes de \mathbb{R}^n , denotado por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
- 3) Se $A \in S_m$ e $B \in S_n$, então $A \times B \in S_{m+n}$.
- 4) Se $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma projeção ortogonal sobre \mathbb{R}^n e $A \in S_{n+1}$, então $\pi(A) \in S_n$.
- 5) Os elementos de S_1 são precisamente uniões finitas de pontos e intervalos.

Observação 4. Os conjuntos semi-algébricos formam uma estrutura o-minimal.

Uma estrutura \mathcal{S} em \mathbb{R} é polinomialmente limitada, se para cada função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em \mathcal{S} , existir $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $|f(x)| \leq x^n$ para todo $x > a$.

O sistema dos conjuntos semi-algébricos forma uma estrutura o-minimal polinomialmente limitada. Este fato é consequência do corolário 2.5.4.

Teorema 3.0.2 (Teorema de Preparação de Van den Dries e Speissegger). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está contido em \mathcal{S} . Então existe uma cobertura finita \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 por conjuntos em \mathcal{S} e para cada $S \in \mathcal{C}$ existe $\lambda \in \mathbb{Q}$, funções $a, \theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, todas em \mathcal{S} , tais que para todo $(x, y) \in S$, temos:*

$$f(x, y) = (y - \theta(x))^\lambda a(x) \cdot u(x, y),$$

com $|u(x, y) - 1| < 1/2$.

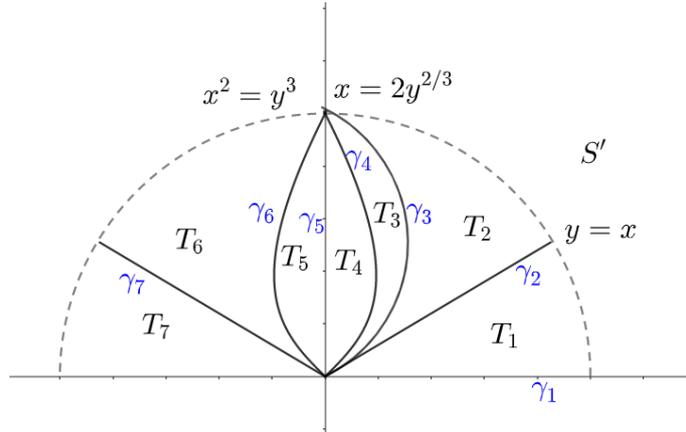
Demonstração. Ver ([9], 2002) □

Exemplo 8. Vamos aplicar o teorema da preparação na função $f(x, y) = y^2 - x^3$. Por simetria, basta preparar a função no semi-plano $y \geq 0$.

Vamos encontrar a preparação de f .

- $T_1 = \{x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$, $f(x, y) = y^2 - x^3 = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1 \right)$.

Figura 4 – Pizzas no infinito



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Em T_1 , temos que $x^3 > x^2 > y^2$ daí, $0 \leq \frac{y^2}{x^3} \leq \frac{1}{x} < \lambda$, onde $0 < \lambda \leq 1$. Vamos tomar $\lambda < \frac{1}{2}$, pois $x \gg 1$. Assim, temos que:

$$f(x, y) \leq x^3(\lambda - 1)\lambda < -\frac{1}{2}.$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right) > -1.$$

Portanto, $\left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right)$ é uma unidade.

- $T_2 = \{0 \leq x \leq y \text{ e } x \geq 2y^{2/3}\}$. Neste caso, os lados de T_2 são γ_2 e γ_3 , onde $\gamma_2 : y = x$ e $\gamma_3 : x = 2y^{2/3}$, $f(x, y) = -x^3 + y^2 = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right)$.

$$x \geq 2y^{2/3} \Rightarrow x^3 \geq 8y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^2}{x^3} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right) < -\frac{7}{8}.$$

Novamente temos uma limitação para $\left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right)$.

- $T_3 = \{0 \leq x; y^{2/3} \leq x \leq 2y^{2/3}\}$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -(x^3 - y^2) = -(x - y^{2/3})(x^2 + xy^{2/3} + y^{4/3}) \\ &= -(x - y^{2/3})y^{4/3} \left[\left(\frac{x}{y^{2/3}}\right)^2 + xy^{-2/3} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Como $3 \leq \left(\frac{x}{y^{2/3}}\right)^2 + \frac{x}{y^{2/3}} + 1 \leq 7$, a função está preparada em T_3

- $T_4 = \{0 \leq x \leq y^{2/3}\}$.

$$f(x, y) \Big|_{T_4} = -x^3 + y^2 = -(x - y^{2/3})(x^2 + xy + y^{4/3}) = -(x - y^{2/3})y^{4/3} \cdot \text{unidade}.$$

- $T_5 = \{0 \geq x \geq -y^{2/3}; y \geq 0\}$. $f(x,y)|_{T_5} = y^2 \left(1 - \frac{x^3}{y^2}\right)$ unidade.

- $T_6 = \{-y \leq x \leq -y^{2/3}\}$, $f(x,y)|_{T_6} = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right)|_{T_6}$.

Como $\frac{y^2}{x^3} - 1 \in [-2, 1)$, temos que $f|_{T_6}$ está preparada.

- $T_7 = \{x \leq 0; y \leq -x\}$, $f(x,y)|_{T_7} = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right)$, logo $f|_{T_7}$ está preparada pois $\frac{y^2}{x^3} - 1|_{T_7} \in [-2, -1)$.

4 EQUIVALÊNCIA DE CONTATO E PIZZAS

4.1 Definições

Definição 4.1.1. Dois germes de aplicações contínuas $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ são Lipschitz contact equivalente (LCE) se existirem dois germes de homeomorfismos bi-Lipschitz $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ tais que $H(\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}) = \mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$ e os diagramas seguintes são comutativos:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) & \xrightarrow{(id, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbf{0}) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) & \xrightarrow{(id, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbf{0}) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \end{array}$$

onde $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade e $\pi_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção canônica.

Teorema 4.1.2. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, dois germes de funções LCE. Então existe um germe de um homeomorfismo bi-Lipschitz na origem $\Phi : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e constantes reais a e b ambas positivas e um sinal σ tais que*

$$a|f| \leq |g \circ \Phi| \leq b|f| \quad e \quad \sigma \cdot f(g \circ \Phi) \geq 0. \quad (4.1)$$

Se f e g são Lipschitz e satisfazem (4.1), então elas são LCE.

Demonstração. (Veja [3], 2007, Teorema 4.2). □

Definição 4.1.3. Um arco γ é uma aplicação contínua e semi-algébrica $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(0) = \mathbf{0}$ e $\|\gamma(t)\| = t$. Sempre vamos considerar neste capítulo, a imagem de γ como um germe de conjunto na origem do \mathbb{R}^2 .

Definição 4.1.4. A ordem de tangência de dois arcos distintos γ_1 e γ_2 é o expoente $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta \geq 1$, definido pela seguinte equação:

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = bt^\beta + o(t^\beta), \quad b \neq 0.$$

Denotaremos a ordem de tangência de dois arcos por $\beta = (\gamma_1, \gamma_2)$. A existência do número racional β é garantida pelo corolário 2.5.5.

Observação 5. Quando $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, então $\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = bt + o(t)$, daí

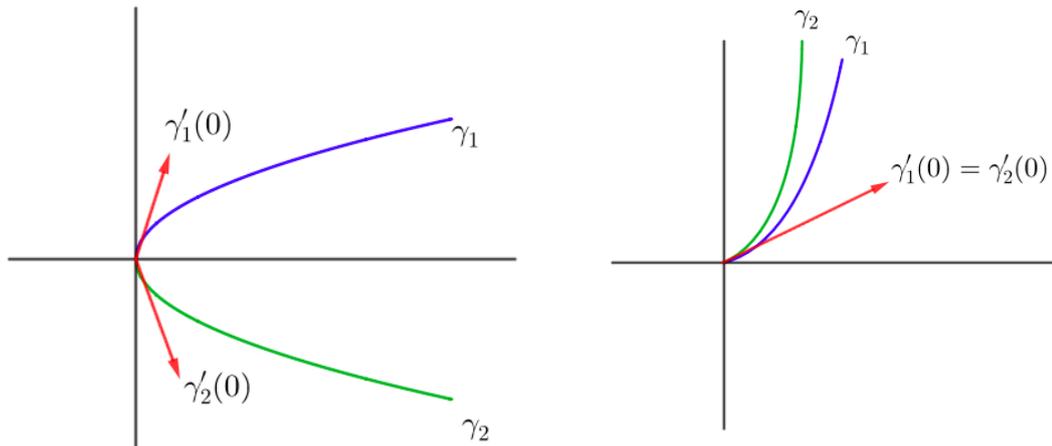
$$\left\| \frac{\gamma_1(t)}{t} - \frac{\gamma_2(t)}{t} \right\| = b + \frac{o(t)}{t}.$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\|\gamma_1'(0) - \gamma_2'(0)\| = b \neq 0 \Rightarrow \gamma_1'(0) \neq \gamma_2'(0).$$

Se $(\gamma_1, \gamma_2) > 1$, então $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$.

Figura 5 – Casos $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ e $(\gamma_1, \gamma_2) > 1$.



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Definição 4.1.5. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua e semi-algébrica e γ um arco em \mathbb{R}^2 . Se $f|_{\gamma} \not\equiv 0$, a ordem de f ao longo de γ , denotado por $\text{ord}_{\gamma}(f)$, é definida como o expoente $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ em

$$f(\gamma(t)) = at^{\alpha} + o(t^{\alpha}), \quad a \neq 0.$$

Se $f|_{\gamma} \equiv 0$, diremos que $\text{ord}_{\gamma}(f) = +\infty$.

Exemplo 9. Considere $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x + y^2$, $\gamma_1 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (0, t)$. Então, $\text{ord}_{\gamma_1}(f) = 1$ e $\text{ord}_{\gamma_2}(f) = 2$.

Definição 4.1.6. Dois arcos distintos γ_1 e γ_2 dividem o germe $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ em duas componentes. Se $\beta = (\gamma_1, \gamma_2) > 1$, então o fecho da menor componente (aquela que não contém o germe de um semiplano) é chamada de triângulo Hölder com expoente β . Se $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, então o fecho de qualquer uma das duas componentes é chamado de triângulo Hölder com expoente 1. O número $\beta \in \mathbb{Q}$ é o expoente do triângulo de Hölder. Os arcos γ_1 e γ_2 são os lados do triângulo de Hölder. Por convenção o germe do plano na origem é considerado um triângulo de Hölder de expoente 1.

A noção de triângulo de Hölder foi introduzida em BIRBRAIR, vamos denotar o triângulo de Hölder com bordos γ_1 e γ_2 por $T(\gamma_1, \gamma_2)$ e $\beta = \exp(T)$ ou $\beta = \exp(T(\gamma_1, \gamma_2))$.

Fixados os lados de um triângulo podemos admitir duas orientações, o sentido anti-horário ($T(\gamma_1, \gamma_2)$) e o sentido horário ($T(\gamma_2, \gamma_1)$).

Seja $T \subset (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ um triângulo de Hölder e $f : T \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$ uma função contínua.

Defina

$$Q_f(T) = \bigcup_{\gamma \subset T} \text{ord}_\gamma(f).$$

Proposição 4.1.7. Para um triângulo de Hölder T , $Q_f(T)$ é um segmento em $\mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$.

Demonstração. (Veja [4], 2014, Proposição 2.6) □

Definição 4.1.8. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e semi-algébrica.

- 1) Para cada arco γ , a largura de γ com respeito à f é o ínfimo $\mu^*(\gamma, f)$ dos expoentes dos triângulos de Hölder \tilde{T} contendo γ , tais que $Q_f(\tilde{T})$ é um ponto.
- 2) Seja T um triângulo Hölder. A largura relativa de um arco $\gamma \subset T$, com respeito à f e T , é o ínfimo $\mu_T^*(\gamma, f)$ dos expoentes dos triângulos Hölder \tilde{T} tais que $\gamma \subset \tilde{T} \subset T$ e $Q_f(\tilde{T})$ é um ponto.
- 3) Um triângulo é elementar se dados arcos γ_1, γ_2 em T tais que $\text{ord}_{\gamma_1}(f) = \text{ord}_{\gamma_2}(f) = q$ tivermos que $\text{ord}_\gamma(f) = q$ para todo arco γ em $T(\gamma_1, \gamma_2)$.

Definição 4.1.9. A função largura multivalorada $\mu_{T,f} : Q_f(T) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ é definida da seguinte maneira: Para $q \in Q_f(T)$, definimos $\mu_{T,f}(q)$ como o conjunto de expoentes $\mu_T^*(\gamma, f)$, onde γ é qualquer arco em T tal que $\text{ord}_\gamma(f) = q$.

Definição 4.1.10. 1) Um complexo de Hölder em \mathbb{R}^2 é uma triangulação semi-algébrica do germe de \mathbb{R}^2 na origem.

2) Dois complexos de Hölder são combinatorialmente equivalentes quando existe uma bijeção entre seus conjuntos de triângulos que preserve ou inverta a ordem cíclica (ou seja, que preserve ou inverta a orientação escolhida para os lados dos triângulos) e preserve os expoentes de Hölder.

3) Um complexo de Hölder abstrato em \mathbb{R}^2 na origem é uma sequência finita $\{\beta_i\}_{i \in I}$ de expoentes $\beta_i \in \mathbb{Q}; \beta_1 \geq 1$, considerada uma ordem cíclica. Ao menos um dos β_i tem que ser igual a 1. A sequência $\{\beta_i\}_{i \in I}$. Um complexo de Hölder $\{T_i\}_{i \in I}$ corresponde a um complexo de Hölder abstrato $\{\beta_i\}_{i \in I}$ se o expoente de T_i é igual a β_i para todo $i \in I$.

Observação 6. Se dois complexos de Hölder $\{T_i\}_{i \in I}$ e $\{T'_i\}_{i \in I}$ possuem o mesmo complexo de Hölder abstrato $\{\beta_i\}_{i \in I}$, então existe

$$\Phi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$$

homeomorfismo semi-algébrico bi-Lipschitz tal que $\Phi(T_i) = T'_i \forall i$.

Daremos uma demonstração formal para a versão no infinito deste fato no capítulo 7, que se aplica também ao caso na origem com as adaptações óbvias.

Definição 4.1.11. Uma pizza abstrata é uma coleção finita $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i \in I}$, onde $I = \{1, \dots, k\} \pmod{k}$ é considerado com ordem cíclica, e

1. $\{\beta_i\}_{i \in I}$ é um complexo de Hölder abstrato em \mathbb{R}^2 na origem.
2. Cada Q_i é um segmento direto de $\mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$, onde “direto” significa que $Q_i = [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$ ou $a_i > b_i$ (ou $a_i = b_i$ quando Q_i é apenas um ponto) satisfazendo a condição de continuidade $a_{i+1} = b_i$ para todo i .
3. Cada s_i é o sinal $+$, $-$ ou 0 , com $s_i = s_{i+1}$, a menos que $b_i = a_{i+1} = \infty$.
4. $\mu_i : Q_i \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ é uma função afim, tal que $\min\{\mu_i(a_i), \mu_i(b_i)\} = \beta_i$ para todo i .

Definição 4.1.12. Uma pizza \mathcal{H} é associada a um germe de função contínua $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$ se existir um complexo de Hölder $\{T_i\}_{i \in I}$ em \mathbb{R}^2 e uma pizza abstrata $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i \in I}$ onde cada $T_i = T(\gamma_i, \gamma_{i+1})$ é um β_i -Hölder triângulo elementar com respeito à f e os arcos γ_i são orientados no sentido horário ou anti-horário com respeito a ordem cíclica de I , tal que

1. $Q_i = Q(T_i)$;
2. Para cada arco $\gamma \subset T_i$, $\mu_{T_i}^*(\gamma) = \mu_i(\text{ord}_\gamma(f))$;
3. O sinal de f no interior de T_i é s_i .

Notação: denotaremos a pizza associada a um germe f com pizza abstrata adjacente \mathcal{A} por $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$.

Teorema 4.1.13. Para qualquer germe de função semi-algébrica contínua $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$ existe uma pizza associada à f .

Demonstração. Ver o Teorema 3,1 de [5] □

Definição 4.1.14. Duas pizzas $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ onde temos que $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$ e $\mathcal{H}'(\mathcal{A}')$ onde $\mathcal{A}' = \{\beta'_i, Q'_i, s'_i, \mu'_i\}_{i=1}^{k'}$ são combinatorialmente equivalentes se $k = k'$ e existir uma equivalência combinatorial $i \mapsto j(i)$ que faz corresponder $T'_{j(i)}$, com T_i tal que:

1. $s'_j(i) = s_i$ ou $s'_{j(i)} = -s_i$, para todo i .
2. $Q'_{j(i)} = Q_i$ para todo i com $i \mapsto j(i)$ preservando a ordem cíclica, ou $Q'_{j(i)} = -Q_i$ para todo i (onde $-Q_i$ significa Q_i , com direção oposta) se a ordem for revertida.
3. $\mu'_{j(i)} = \mu_i$ para todo i .

Teorema 4.1.15. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ germes de funções contínuas e semi-algébricas. Se f é LCE à g , então cada pizza $\mathcal{H}_f(\mathcal{A}) := \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i \in I}$ associada à f , existe uma pizza $\mathcal{H}'_g(A')$ associada à g , e equivalente à $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.5 de [4]. □

4.2 Simplificação de pizzas e resultado principal

Uma pizza $\mathcal{H}(A)$ onde $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$, pode ser simplificada se existirem dois triângulos consecutivos T_i e T_{i+1} tais que:

1. $Q_i = [a_i, b_i]$ e $Q_{i+1} = [a_{i+1}, b_{i+1}]$ onde $a_i \leq b_i = a_{i+1} \leq b_{i+1}$ ou $a_i \geq b_i = a_{i+1} \geq b_{i+1}$
2. exista uma função afim $\varphi : Q_i \cup Q_{i+1} \rightarrow \mathbb{Q}$
3. $\varphi|_{Q_i} = \mu_i$ e $\varphi|_{Q_{i+1}} = \mu_{i+1}$ e $s_i = s_{i+1}$.

Podemos assim definir $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\beta}_j, \tilde{Q}_j, \tilde{s}_j, \tilde{\mu}_j\}_{j=1}^{k-1}$, onde

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_i = \beta_j \text{ se } j < i \\ \tilde{\beta}_i = \min\{\beta_i, \beta_{i+1}\} \\ \tilde{\beta}_j = \beta_{i-1} \text{ se } j > i+1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{Q}_i = Q_j \text{ se } j < i \\ \tilde{Q}_i = Q_i \cup Q_{i+1} \\ \tilde{Q}_j = Q_{j+1} \text{ se } j > i+1 \end{cases}, \\ \begin{cases} \tilde{s}_i = s_j \text{ se } j < i \\ \tilde{s}_i = s_i = s_{i+1} \\ \tilde{s}_j = s_{j+1} \text{ se } j > i+1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \tilde{\mu}_i = \mu_j \text{ se } j < i \\ \tilde{\mu}_i = \varphi \\ \tilde{\mu}_j = \mu_{j+1} \text{ se } j > i+1 \end{cases}.$$

Seja $\{\tilde{T}_i\}_{i \in I}$ o complexo de Holder obtido de $\{T_i\}_{i \in I}$ pela simplificação, logo $\tilde{T}_j = T_j$ se $j < i$, $\tilde{T}_i = T_i \cup T_{i+1}$ e $\tilde{T}_j = T_{j+1}$ se $j > i$. Assim, temos que $\mathcal{H}(\tilde{\mathcal{A}})$ é uma simplificação de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$

Lema 4.2.1. *Seja \mathcal{H} uma pizza associada à função f . Se $\tilde{\mathcal{H}}$ é uma simplificação de \mathcal{H} , então $\tilde{\mathcal{H}}$ é uma pizza associada à f .*

Demonstração. Ver o Lema 4.3 de [4]. □

Definição 4.2.2. Uma pizza associada a uma função contínua e semi-algébrica $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ é minimal quando esta pizza não pode ser simplificada.

Teorema 4.2.3. *Uma pizza minimal associada a um germe de função semi-algébrica contínua é única a menos de equivalência combinatorial.*

Demonstração. Ver o Teorema 4.8 de [4]. □

Teorema 4.2.4. *Dois germes de funções Lipschitz e semi-algébricas $f, g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ são LCE se, e somente se, suas pizzas minimais são combinatorialmente equivalentes.*

Demonstração. Ver o Teorema 4.9 de [4]. □

5 EQUIVALÊNCIAS ASSINTÓTICAS FRACA E FORTE NA ORIGEM

Neste capítulo analisaremos o comportamento assintótico dos germes em 0 de funções semi-algébricas contínuas definidas no germe em 0 do plano furado $\mathbf{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$. Todas as definições apresentadas no capítulo anterior se estendem de maneira análoga para o caso analisado neste capítulo.

5.1 Comportamento de funções sobre o plano furado

Seja $\mathbf{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ o plano real furado. Consideramos os germes de funções $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébricas e contínuas.

Desejamos entender todos os comportamentos assintóticos em $\mathbf{0}$ de uma tal função e encontrar um objeto o mais simples possível para decodificá-los integralmente.

Sejam (x, y) coordenadas em \mathbb{R}^2 centradas em $\mathbf{0}$ e seja $r = |(x, y)|$. Começamos com o seguinte resultado:

Lema 5.1.1. *Seja uma função $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e semi-algébrica. Se f não for a função nula, existe um expoente $\rho_f \in \mathbb{Q}$ minimal, tal que para cada $\rho > \rho_f$ a função $r^\rho \cdot f$ estende-se continuamente em $\mathbf{0}$ com valor 0 em $\mathbf{0}$.*

Demonstração. Seja \mathbf{S}_r a circunferência de raio $r > 0$ centrada em $\mathbf{0}$. Definimos

$$M(r) := \max_{\mathbf{S}_r} |f|.$$

A função $r \rightarrow M(r)$ é semi-algébrica sobre $(\mathbb{R}_{>0}, 0)$, logo existe um par $(A, a) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{Q}$ tal que

$$M(r) = r^a [A + o(1)].$$

Tomando $\rho_f := -a$, na vizinhança de $\mathbf{0}$ obtemos a seguinte estimativa:

$$r^{\rho_f} |f| \leq 2A.$$

□

Observe que, dado $\delta \in \mathbb{Q}_{>0}$, a (extensão contínua em $\mathbf{0}$ da) função $r^{\delta + \rho_f} f$ é semi-algébrica.

Exemplo 10. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ $\rho_f := 0$, $g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^4}$ $\rho_g = 4$, $h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4}$ $\rho_h = 1$

Seja o germe de função $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrica e contínua. Se f estende-se continuamente em $\mathbf{0}$, denotamos essa extensão ainda por f . Se f não admite uma extensão contínua (logo $\rho_f \geq 0$), dado $\rho > \rho_f$, seja $f_\rho : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ a extensão contínua em $\mathbf{0}$ da função $r^\rho f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Convenção: Se $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ for identicamente nula, definimos $\rho_f := \infty$.

5.2 Equivalências assintóticas

Definição 5.2.1. Sejam os germes de funções $f, g : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébricas e contínuas.

- (i) As funções f e g são fracamente assintoticamente equivalentes (WAE) se existirem um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz semi-algébrico $\Phi : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{U}, \mathbf{0})$ e constantes positivas A, B tais que as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$A|f| \leq |g \circ \Phi| \leq B|f|.$$

- (ii) As funções f e g são fortemente assintoticamente equivalente (SAE) se são fracamente assintoticamente equivalentes e a função $f \cdot (g \circ \Phi)$ toma somente valores não-negativos, onde Φ é o homeomorfismo da WAE.

Observação 5.2.1. 1. As funções f, g são WAE se, e somente se, as funções $|f|, |g|$ são SAE.

2. Se duas funções $f, g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, contínuas, Lipschitz e semi-algébricas são SAE f, g são LCE.

3. Sejam duas funções $f, g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, semi-algébricas e LCE. Seja Φ o homeomorfismo da propriedade LCE. Como o produto $f \cdot (g \circ \Phi)$ toma somente valores não negativos ou somente valores não positivos, então f, g são SAE ou $f, -g$ são SAE.

Definição 5.2.2. Seja $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e semi-algébrica e γ um arco em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$. Se $f|_\gamma \not\equiv 0$, a ordem de f ao longo de γ , denotado por $\text{ord}_\gamma(f)$, é definida como o expoente $\alpha \in \mathbb{Q}$ em

$$f(\gamma(t)) = at^\alpha + o(t^\alpha), \quad a \neq 0.$$

Se $f|_\gamma \equiv 0$, diremos que $\text{ord}_\gamma(f) = +\infty$.

Seja T um triângulo de Hölder e $f : T - \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina

$$Q_f(T) = \bigcup_{\gamma \subset T} \text{ord}_\gamma(f).$$

Definição 5.2.3. Seja $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e semi-algébrica. Para cada arco γ , a largura de γ com respeito à f é o ínfimo $\mu^*(\gamma, f)$ dos expoentes dos triângulos Hölder \tilde{T} contendo γ , tais que $Q_f(\tilde{T})$ é um ponto.

Seja T um triângulo Hölder. A largura relativa de um arco $\gamma \subset T$, com respeito à f e T , é o ínfimo $\mu_T^*(\gamma, f)$ dos expoentes dos triângulos Hölder \tilde{T} tais que $\gamma \subset \tilde{T} \subset T$ e $Q_f(\tilde{T})$ é um ponto.

Lema 5.2.1. *Sejam $f, g : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ germes de funções semi-algébricas e contínuas que são WAE. Então $\rho_f = \rho_g$.*

Demonstração. Como f e g são WAE, então existem $\Phi : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{U}, \mathbf{0})$ homeomorfismo bi-Lipschitz semi-algébrico e constantes positivas A e B tais que

$$A|f| < |g \circ \Phi| \leq B|f|.$$

Vamos verificar que numa vizinhança da origem vale a desigualdade

$$|\Phi|^{\rho_g} |g \circ \Phi| < K,$$

com $K \in \mathbb{R}^+$.

Sabemos que existem constantes reais positivas s, C, D e E tais que:

$$|x| < s \Rightarrow |x|^{\rho_g} |g(x)| < E,$$

$$C|x| \leq |\Phi(x)| < D|x|.$$

Daí, segue que

$$|x| < s/D \Rightarrow |\Phi(x)|^{\rho_g} |g \circ \Phi(x)| < E,$$

pois $|\Phi(x)| \leq D|x| < s$. Portanto,

$$|f| \leq \frac{1}{A} |g \circ \Phi| \Rightarrow r^{\rho_g} |f(x)| \leq \frac{r^{\rho_g}}{A} |g \circ \Phi(x)|,$$

onde $r := |x| < s/D$.

$$r^{\rho_g} |f(x)| \leq \frac{D|\Phi(x)|^{\rho_g}}{A} \cdot |g \circ \Phi(x)| \leq \frac{D}{A} \cdot E = \bar{K}.$$

Absurdo, pois ρ_f é o menor número ρ tal que $r^\rho |f| < \bar{K}$ numa vizinhança da origem, para algum $\bar{K} \in]0, +\infty[$. Concluimos assim que $\rho_f \leq \rho_g$. A desigualdade $\rho_g \leq \rho_f$ segue de maneira análoga. \square

Combinando o Lema 5.2.1 e a Observação 5.2.1 obtemos o seguinte corolário:

Corolário 5.2.1. *Sejam germes de funções $f, g : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébricas e contínuas. As propriedades seguintes são equivalentes:*

- (i) *as funções f, g são SAE;*
- (ii) *para todo $\rho > \rho_f$ as funções f_ρ, g_ρ são SAE;*
- (iii) *existe $\rho > \rho_f$ tal que as funções f_ρ, g_ρ são SAE.*

Demonstração. Seja $\Phi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ um homeomorfismo semi-algébrico bi-Lipschitz. Logo existe $C > 1$ tal que para todo (x, y)

$$\frac{r}{C} \leq |\Phi(x, y)| \leq Cr.$$

Seja (i). Logo temos $f \cdot (g \circ \Phi) \geq 0$, onde Φ é o homeomorfismo da WAE. Dado $\rho > \rho_f$ deduzimos que

$$\frac{A}{C^\rho} |f_\rho| \leq |g_\rho \circ \Phi| \leq BC^\rho |f_\rho|.$$

Como $f_\rho \cdot (g_\rho \circ \Phi) \geq 0$ deduzimos que f_ρ, g_ρ são SAE. Logo (i) implica (ii)

(ii) implica trivialmente (iii).

Considerando o caso (iii). Seja $\rho > \rho_f$ tal que f_ρ e g_ρ sejam SAE. Então existe $\Phi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ homeomorfismo bi-Lipschitz semi-algébrico e constantes A e B positivas tais que

$$(1) \quad A |f_\rho| \leq |g_\rho \circ \Phi| \leq B |f_\rho|.$$

$$(2) \quad f_\rho \cdot (g_\rho \circ \Phi) \geq 0.$$

Seja $r = |x|$, por (1), temos

$$Ar^\rho |f| \leq |\Phi(x, y)|^\rho |g \circ \Phi| \leq Br^\rho |f| \Rightarrow \frac{A}{C^\rho} |f| \leq |g \circ \Phi| \leq BC^\rho |f|.$$

Por (2), concluímos que

$$r^\rho f \cdot |\Phi(x, y)|^\rho (g \circ \Phi) \geq 0 \Rightarrow f \cdot g \circ \Phi \geq 0.$$

Portanto, f e g são SAE.

□

5.3 Primeiro resultado principal

Definição 5.3.1. Uma pizza \mathcal{H} é associada a um germe de função contínua $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ se existir um complexo de Hölder $\{T_i\}$ em \mathbb{R}^2 e uma pizza abstrata $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}$ onde cada $T_i = T(\gamma_i, \gamma_{i+1})$ é um triângulo de Hölder com expoente β_i elementar com respeito à f e os arcos γ_i são orientados no sentido horário ou anti-horário com respeito a ordem cíclica de I , tal que

1. $Q_i = Q(T_i)$;
2. Para cada arco $\gamma \subset T_i$, $\mu_i^*(\gamma) = \mu_i(\text{ord}_\gamma(f))$;
3. O sinal de f no interior de T_i é s_i .

Observação 5.3.1. A simplificação de pizzas e a definição de pizza minimal seguem as mesmas apresentadas no capítulo anterior.

Seja $h : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrica e contínua. Seja $\eta \in \mathbb{Q}$. Observe que dado um arco semi-algébrico γ temos

$$\text{ord}_\gamma h_\eta = \eta + \text{ord}_\gamma h.$$

Assuma que a função h admite uma pizza $\mathcal{H}_h(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{A} = \{T_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$. Sejam T_i um triângulo de Hölder de expoente β_i da pizza $\mathcal{H}_h(\mathcal{A})$ de h , μ_i e Q_i a largura associada ao triângulo T_i . Existem $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\mu_i(q) = a_i q + b_i.$$

Seja $Q_i = [c_i, d_i] \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Seja $\eta \in \mathbb{Q}$. Definimos

$$Q_{i,\eta} := Q_i + \eta = [c_i + \eta, d_i + \eta], \text{ e } \mu_{i,\eta}(q) := \mu_i(q - \eta) = a_{i,\eta} q + b_{i,\eta}.$$

Assim, $\mathcal{H}_{h_\eta}(\mathcal{A}_{h_\eta})$ é a pizza de h_η , onde $\mathcal{A}_{h_\eta} := \{T_i, Q_{i,\eta}, s_i, \mu_{i,\eta}\}$. Observe que a operação de criar $\mathcal{H}_{h_\eta}(\mathcal{A}_{h_\eta})$ a partir de $\mathcal{H}_h(\mathcal{A})$ é simétrica pois $h = (h_\eta)_{-\eta}$. Desse modo, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 5.3.2. *Seja $f : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrica e contínua.*

1. *A função f admite uma pizza.*
2. *Uma pizza $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ da função f é minimal se, e somente se, $\mathcal{H}_{f_\rho}(\mathcal{A}_{f_\rho})$ é uma pizza minimal de f_ρ , onde $\rho > \rho_f$.*

Demonstração. Se f estende-se continuamente em $\mathbf{0}$, o resultado é claro.

Assumamos que f não admite extensão contínua em $\mathbf{0}$. Assim, $\rho_f \in]0, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Dado $\mathcal{H}_{f_\rho}(\mathcal{A}_{f_\rho})$ pizza de f_ρ , onde $\rho > \rho_f$, a construção acima fornece $\mathcal{H}_f(\mathcal{A}) = (\mathcal{H}_{f_\rho}(\mathcal{A}_{f_\rho}))_{-\rho}$ que é uma pizza de f .

O ponto 2) é óbvio por causa das definições das larguras $\mu_i, \mu_{i,\rho}$, dos intervalos $Q_i, Q_{i,\rho}$ e pelo método de simplificação de pizzas. \square

Definição 5.3.2. Duas pizzas $\mathcal{H}(A)$ e $\mathcal{H}'(A')$ onde $A = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$ e $A' = \{\beta'_i, Q'_i, s'_i, \mu'_i\}_{i=1}^k$ são combinatorialmente equivalentes, se $k = k'$ e existir uma equivalência combinatorial $i \mapsto j(i)$ sobre os Hölder complexos correspondentes, associando $T'_{j(i)}$, com T_i . Diremos que:

(I) \mathcal{H} e \mathcal{H}' são fracamente assintoticamente equivalentes (WAE) se:

- 1) $Q'_{j(i)} = Q_i$ para todo i com $i \mapsto j(i)$ preservando a ordem cíclica, ou $Q'_{j(i)} = -Q_i$ para todo i (onde $-Q_i$ significa Q_i , com direção oposta) se a ordem for revertida.
- 2) $\mu'_{j(i)} = \mu_i$ para todo i .

(II) \mathcal{H} e \mathcal{H}' são fortemente assintoticamente equivalente (SAE) se

- 1) \mathcal{H} e \mathcal{H}' são WAE.
- 2) $s'_{j(i)} = s_i$ para todo i com $i \mapsto j(i)$.

Teorema 5.3.3. *Sejam $f, g : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ germes de funções contínuas e semi-algébricas. Se f é WAE/SAE à g , então para cada pizza $\mathcal{H}_f(A)$ onde $A = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$ associada com f , existe uma pizza $\mathcal{H}_g(A')$ associada com g e WAE/SAE à pizza $\mathcal{H}_f(A)$.*

Demonstração. Seja $\{T_i\}_{i \in I}$ a triangulação semi-algébrica do germe de \mathbb{R}^2 no origem dada por $\mathcal{H}_f(A)$. Como f é assintoticamente equivalente a g na origem, existe ϕ homeomorfismo bi-Lipschitz semi-algébrica e constantes A, B reais, tais que $A|f| \leq |g \circ \phi| \leq B|f|, \forall x; g(x) \neq 0$. Como ϕ é bi-Lipschitz, $T'_i = \phi(T_i)$ é um triângulo de Hölder com $\exp(T'_i) = \exp(T_i) = \beta_i$. O conjunto $\{T'_i\}_{i \in I}$ forma uma triangulação semi-algébrica para o germe de \mathbb{R}^2 na origem. Seja γ um arco em T_i , então $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma$ é um arco em T'_i . Observe que:

$$\begin{aligned} Af(\gamma)(t) &\leq g(\tilde{\gamma}(t)) \leq Bf(\gamma(t)) \\ Aat^\alpha + o(t^\alpha) &\leq bt^\beta + o(t^\beta) \leq Bat^\alpha + o(t^\alpha) \\ Aa + o(t) &\leq bt^{\beta-\alpha} + o(t^{\beta-\alpha}) \leq Ba + o(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0} bt^{\beta-\alpha} = k \in \mathbb{R} &\Rightarrow \boxed{\beta = \alpha.} \end{aligned}$$

Portanto, $\text{ord}_\gamma(f) = \text{ord}_{\tilde{\gamma}}(g)$. Sejam γ_1 e γ_2 dois arcos em T_i , então $\text{ord}_{\gamma_1}(f) = \text{ord}_{\phi \circ \gamma_1}(g)$ e $\text{ord}_{\gamma_2}(f) = \text{ord}_{\phi \circ \gamma_2}(g)$. Assim, $Q_f(T_i) = Q_g(T'_i)$ como segmento direto. Como cada T_i é

elementar, com respeito à f , pois $\mathcal{H}_f(A)$ é associada à f , então cada T'_i é elementar com respeito à g . Seja $\tilde{\gamma}$ um arco em T'_i , $\mu_{T'_i}^*(\tilde{\gamma}) = \mu_{T'_i}^*(\gamma) = \mu_i(\text{ord}_\gamma(f)) = \mu_i(\text{ord}_{\tilde{\gamma}}(g))$ (neste caso, $\gamma = \phi^{-1} \circ \tilde{\gamma}$). Portanto, podemos definir $\mu'_i = \mu_i$ para todo i .

Se f e g são WAE, então o sinal de f e g nos triângulos não é relevante e as equivalências entre $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}_g(\mathcal{A}')$ onde $\mathcal{A}' = \{\beta'_i, Q'_i, s'_i, \mu'_i\}$ com $\beta'_i = \beta_i$, $Q'_i = Q_i$ se a ordem é preservada e $Q'_i = -Q_i$ se a ordem se inverte, $\mu'_i = \mu_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Se f é SAE à g , então ϕ sempre preserva o sinal de f nos triângulos, daí $s'_i = s_i$, para todo i . Isto nos dá que $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ é SAE à $\mathcal{H}_g(\mathcal{A}')$. \square

Teorema 5.3.4. *Dois germes de funções semi-algébricas e contínuas $f, g : (\mathbf{U}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ são WAE/SAE se, e somente se, suas pizzas minimais são WAE/SAE.*

Demonstração. Se f e g são assintoticamente equivalentes (fracamente ou fortemente) então uma pizza minimal de f é equivalente a uma pizza minimal de g . Caso contrário, se a pizza de g obtida como no teorema anterior não for minimal, qualquer simplificação resulta numa pizza minimal para g . Logo, conseguimos uma simplificação para a pizza de f . Absurdo, pois a pizza de f é minimal.

Se a pizza minimal de f é WAE/SAE a uma pizza minimal de g , então pelo observação 6, existe um mapa bi-Lipschitz semi-algébrico $\Phi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ que transforma a triangulação $\{T_i\}$, associada a pizza de f , na triangulação $\{T'_i\}$ associada com a pizza de g . Vamos provar que a função $(x, y) \mapsto \frac{f(x, y)}{g \circ \Phi(x, y)}$ é limitada no conjunto dos pontos onde a função não é zero. Vamos supor que a função $\frac{f}{g \circ \Phi}$ é ilimitada ou tende a zero. Como f e g são semi-algébricas, então existe um arco γ tal que $\frac{f}{g}$ é ilimitada ou tende a zero. Observe que a função largura do arco γ com respeito a função f e a função largura do arco $\Phi \circ \gamma$ com respeito a função g são iguais a (γ, γ_i) , onde γ_i é o bordo do simplexo T_i tal que $\gamma \subset T_i$. Portanto, $\text{ord}_\gamma(f) = \text{ord}_{\Phi \circ \gamma}(g)$, então

$$\left(\frac{f}{g \circ \Phi} \right) (\gamma) = \frac{f(\gamma)}{g(\Phi \circ \gamma)} = \frac{at^\alpha + o(t^\alpha)}{bt^\alpha + o(t^\alpha)} = \frac{a}{b} + o(1).$$

Onde a e b são números não nulos e $\alpha \neq -\infty$. O que contradiz a hipótese que $\frac{f}{g \circ \Phi} \circ \gamma \in \{0, \pm\infty\}$ \square

6 GEOMETRIA SEMI-ALGÉBRICA NO INFINITO

6.1 Arcos no Infinito

Definição 6.1.1. Um arco γ no infinito é o germe no infinito de uma aplicação contínua e semi-algébrica $\gamma: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\|\gamma(t)\| = t$ onde $t \geq A$ onde $A \geq 1$ é uma constante real.

Seja $(\Gamma_\infty, \infty) \subset (\mathbb{R}^2, \infty)$ o germe de uma curva semi-algébrica contínua no infinito. Estamos interessados em encontrar sua parametrização via o teorema de Puiseux.

Lema 6.1.2.

$$\gamma(r)_\infty = r \left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k r^{-k/n} \right) = r u_0 + r^{1-\frac{1}{n}} \tilde{u}(r), \quad u_k \in \mathbb{R}^2 \quad \forall k, \quad u_0 \neq 0$$

onde $\|\tilde{u}(r)\| \leq K < +\infty$ com K constante.

Demonstração. Seja $i: \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ dada por $i(p) = \frac{p}{|p|^2}$, assim, $i(\Gamma_\infty) = \Gamma_0$ é um germe de um arco semi-algébrico na origem.

$$(\Gamma_0, \mathbf{0}) = \text{Im}\{s \mapsto \gamma_0(s); |\gamma(s)| = s\}.$$

Por Puiseux, $\gamma_0(s) = s \left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s^{k/n} u_k \right)$, onde $u_0 \in \mathbb{S}^1$ e $u_k \in \mathbb{R}^2$. Como

$$\gamma_\infty(1/s) = \frac{\gamma_0(s)}{|\gamma_0(s)|^2} = \frac{1}{s^2} \cdot s \left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s^{k/n} u_k \right) = \frac{1}{s} \left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s^{k/n} u_k \right),$$

faça $r = 1/s$.

□

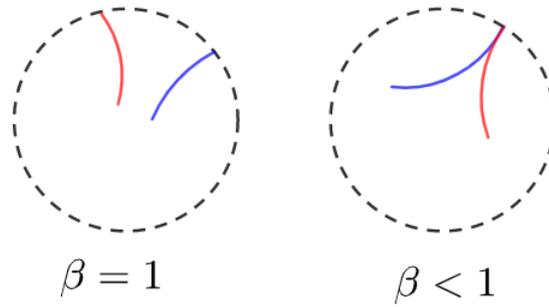
Observe que agora as potências decrescem com expoente máximo igual a 1.

Observação 7. A ordem de contato de dois arcos distintos γ_1 e γ_2 no infinito é definido como na definição 4.1.4. Porém, agora teremos $\beta \leq 1, \beta \in \mathbb{Q}$,

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| = bt^\beta + o(t^\beta), \quad b \neq 0.$$

Se $\beta = 1$, isto implica que existem duas direções tangentes distintas no infinito. Se $\beta < 1$, então existe apenas uma.

Figura 6 – Casos de ordem de contato de dois arcos



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Se γ_1 e γ_2 são arcos semi-algéblicos que representam germes no infinito, então $\tilde{\gamma}_j = i \circ \gamma_j$ representam germes na origem, assim

$$\|\tilde{\gamma}_2(s) - \tilde{\gamma}_1(s)\| = as^\alpha + o(s^\alpha), \quad a \neq 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}_1(s) - \tilde{\gamma}_2(s)\| &= \|\gamma_1(1/s) - \gamma_2(1/s)\| \cdot s^2 \\ &= s^2 \left(b(1/s)^\beta + o(1/s^\beta) \right) \\ &= bs^{2-\beta} + o(s^{-\beta}) \cdot s^2 \\ &= bs^{-\beta+2} + o(s^{-\beta+2}), \end{aligned}$$

logo,

$$\alpha = 2 - \beta. \quad (6.1)$$

A partir de agora usaremos as notações $(\gamma_1, \gamma_2)_0$ e $(\gamma_1, \gamma_2)_\infty$ para denotar a ordem de contato na origem e a ordem de contato no infinito, respectivamente. Com esta notação temos que (6.1) se escreve da seguinte forma

$$(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)_0 = 2 - (\gamma_1, \gamma_2)_\infty, \quad \text{onde } \tilde{\gamma}_i = i \circ \gamma_i.$$

6.2 Ordem e largura no infinito

Definição 6.2.1. Sejam $f : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e γ um arco no infinito. Se $f|_\gamma \not\equiv 0$, a ordem de f ao longo de γ no infinito, denotado por $\text{ord}_\gamma^\infty(f)$, é definido como o expoente $\alpha \in \mathbb{Q}$ em

$$f(\gamma(t)) = at^\alpha + o(t^\alpha), \quad a \neq 0.$$

Se $f|_\gamma \equiv 0$, diremos que $\text{ord}_\gamma^\infty(f) = -\infty$.

Definição 6.2.2. Dois arcos no infinito γ_1 e γ_2 distintos, dividem o germe de \mathbb{R}^2 no infinito em duas componentes conexas. Se $\beta = (\gamma_1, \gamma_2) < 1$, então o fecho da menor componente (que não contém um semiplano) é chamado de um triângulo de Hölder no infinito de expoente β_i . Se $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, então o fecho de qualquer uma das componentes é chamado de triângulo de Hölder no infinito de expoente 1. O número $\beta \in \mathbb{Q}$ é o expoente do triângulo e os arcos γ_1 e γ_2 são seus lados. Notação: $T(\gamma_1, \gamma_2)$.

Seja $T \subset (\mathbb{R}^2, \infty)$ um triângulo de Hölder, e $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua semi-algébrica. Definimos

$$Q_f^\infty(T) = \bigcup_{\gamma \subset T} \text{ord}_\gamma^\infty(f).$$

Proposição 6.2.3. Para um triângulo de Hölder no infinito T , Q_f^∞ é um segmento em $\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$.

Definição 6.2.4. Um triângulo de Hölder no infinito T é dito elementar com respeito a função f se, para quaisquer dois arcos distintos γ_1 e γ_2 em T , tais que $\text{ord}_{\gamma_1}^\infty(f) = \text{ord}_{\gamma_2}^\infty(f) = q$, a ordem de f seja q para qualquer arco $\gamma \subset T(\gamma_1, \gamma_2) \subset T$.

Definição 6.2.5. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e semi-algébrica. 1) Para cada curva γ , a largura de γ com respeito à f é o supremo $\mu_\infty^*(\gamma, f)$ dos expoentes dos triângulos de Hölder no infinito \tilde{T} contendo γ tais que $Q_f^\infty(\tilde{T})$ é um ponto. 2) Seja T um triângulo de Hölder no infinito. A largura relativa a uma curva $\gamma \subset T$, com respeito à f e T , é o supremo $\mu_T^*(\gamma, f)$ dos expoentes dos triângulos de Hölder no infinito $\tilde{T} \subset T$, elementar e tal que $\gamma \subset \tilde{T}$. 3) A função largura no infinito multivalorada $\mu_{T,f}^\infty : Q_f^\infty(T) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ é tal que, $\mu_{T,f} \leq 1$. Sua definição é da seguinte maneira: para $q \in Q_f(T)$, definiremos $\mu_{T,f}(q)$ como o conjunto (finito) de expoentes $\mu_\infty^*(\gamma, f)$, onde γ é um arco qualquer em T tal que $\text{ord}_\gamma^\infty(f) = q$.

Observação 8. Quando o germe de função f é fixo, escrevemos $\mu_\infty^*(\gamma)$ e ${}_\infty\mu_T^*(\gamma)$ em vez de $\mu_\infty^*(\gamma, f)$ e $\mu_T^*(\gamma, f)$, respectivamente. Também escrevemos μ_T^∞ em vez de $\mu_{T,f}^\infty$.

7 LEMA DE COLAGEM

Neste capítulo produzimos germes de homeomorfismos semi-algéblicos bi-Lipschitz entre dois complexos de Hölder no infinito que são combinatorialmente equivalentes. Este passo é essencial para o segundo resultado principal deste trabalho.

7.1 Setores

Uma semi-reta do plano \mathbb{R}^2 é um conjunto da forma

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u} = \{t\mathbf{u}, t \geq 0\}, \text{ onde } \mathbf{u} \in \mathbf{S}^1.$$

Representaremos \mathbf{S}^1 com $[0, 2\pi[$ usando a exponencial complexa.

Sejam $\mathbf{u}_1 = e^{iu_1}, \mathbf{u}_2 = e^{iu_2} \in \mathbf{S}^1$ com $0 \leq u_1 < u_2 < 2\pi$. Seja $L_j = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_j$ a semi-reta na direção \mathbf{u}_j , $j = 1, 2$. As semi-retas L_1, L_2 decompõem o plano em dois setores

$$S(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := \{t\mathbf{v} = te^{iv} : v \in [u_1, u_2], t \geq 0\} \text{ e } S(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) := \{t\mathbf{w} = te^{iw} : w \in [0, u_1] \cup [u_2, 2\pi], t \geq 0\}.$$

Sejam $L_j := \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_j$ para $j = 1, \dots, n$, n semi-retas distintas. Assuma que $\mathbf{u}_i := e^{iu_i}$ com $0 \leq u_1 < \dots < u_n < 2\pi$. Tomamos a convenção que $u_{n+1} = u_1 + 2\pi > u_n$. Assim $L_{n+1} = \mathbb{R}_{\geq 0}e^{iu_{n+1}} = L_1$.

Seja S_j o setor $S(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1})$, $j = 1, \dots, n$.

Sejam $0 \leq u'_1 < \dots < u'_n < 2\pi < u'_{n+1} = u_1 + 2\pi$ e $L'_j := \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_j$ onde $\mathbf{u}_j := e^{iu_j}$, para $j = 1, \dots, n$. Seja o setor $S'_j := S(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1})$ por $j = 1, \dots, n$.

Lema 7.1.1. *Existe um homeomorfismo semi-algéblico bi-Lipschitz $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que aplica L_j sobre L'_j , S_j sobre S'_j e tal que $\|H(x, y)\| = \|(x, y)\|$ para todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Podemos assumir que $u_{j+1} - u_j < \pi$. Se não for o caso, adicionamos a semi-reta $\mathbb{R}_{\geq 0}e^{i\frac{u_{j+1}+u_j}{2}}$ a coleção ordenadas dos $(L_j)_j$, e a semi-reta $\mathbb{R}_{\geq 0}e^{i\frac{u'_{j+1}+u'_j}{2}}$ a coleção $(L'_j)_j$. Usamos o mesmo processo se existe j tal que $u'_{j+1} - u'_j \geq \pi$.

Sejam S_j, S'_j dados. Podemos assumir após duas rotações que temos o seguinte;

$$u_{j+1} + u_j = u'_{j+1} + u'_j = 0.$$

A hipótese diz que $u_{j+1}, u'_{j+1} \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Assim para cada $t \geq 0$ temos que $S_j \cap \mathbf{S}_t^1$ é o gráfico da função algébrica

$$x = \sqrt{t^2 - y^2}, \text{ onde } y \in I_t := [-t \operatorname{sen}(u_{j+1}), t \operatorname{sen}(u_{j+1})] = [-ta_j, ta_j].$$

Observe que $t \mapsto ta_j$ é linear, logo, semi-algébrica e Lipschitz. Analogamente, temos que $S'_j \cap \mathbf{S}_t^1$ é o gráfico da função algébrica

$$x' = \sqrt{t^2 - (y')^2}, \text{ onde } y' \in I'_t := [-t \operatorname{sen}(u'_{j+1}), t \operatorname{sen}(u'_{j+1})] = [-ta'_j, ta'_j].$$

Novamente, $t \mapsto ta'_j$ é semi-algébrica e Lipschitz. Seja

$$\delta_j := \frac{t \operatorname{sen}(u'_{j+1})}{t \operatorname{sen}(u_{j+1})} = \frac{a'_j}{a_j}, \quad t > 0.$$

Seja a aplicação $H_j : S_j \mapsto S'_j$ definida como segue

$$(x, y) \mapsto H_j(x, y) := (\sqrt{t^2 - (y')^2}, y') \text{ com } t := \|(x, y)\| \text{ e } y' := -ta'_j + \delta_j(y + ta_j).$$

Assim H_j é semi-algébrica, contínua, satisfaz $\|(x, y)\| = \|H_j(x, y)\|$ para cada $(x, y) \in S_j$ e admite uma inversa construída do mesmo modo. Logo, é um homeomorfismo semi-algébrico. \square

A função y' é claramente Lipschitz, pois a função $\|(x, y)\| \mapsto t = \|(x, y)\|$ é Lipschitz.

A função

$$x' : (x, y) \mapsto \sqrt{t^2 - (y')^2}$$

é Lipschitz por causa do seguinte lema:

Lema 7.1.2. *Seja $a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. A função $f : \{(t, z) \in \mathbb{R}^2; \frac{z}{t} \in [-a, a] \ t > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(t, z) := \sqrt{t^2 - z^2}$ é Lipschitz.*

Demonstração. Basta provar que suas derivadas parciais são limitadas.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{t}\right)^2}},$$

$$-a < \frac{z}{t} < a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{t}\right)^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial t}$ é limitada.

Logo, H_j é um homeomorfismo semi-algébrico bi-Lipschitz.

Observe que para cada $j = 1, \dots, n$ temos

$$H_j|_{L_j} = H_{j-1}|_{L_j}.$$

Assim, podemos colar as H_j produzindo $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \in S_j \mapsto H_j(x, y),$$

que é claramente um homeomorfismo semi-algébrico. Usando o Lema de colagem da seção 7.3, verificamos que H é Lipschitz e como sua inversa é obtida de maneira semelhante, H satisfaz o enunciado. □

7.2 Triângulo de Hölder no infinito

Seja T um triângulo de Hölder semi-algébrico no infinito não trivial (ou seja, diferente de (\mathbb{R}^2, ∞)) com bordos os arcos γ_1 e γ_2 . Para $i = 1, 2$ e $t \gg 1$ escrevemos

$$\gamma_i(t) = t(\mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i(t)) \text{ onde } \mathbf{u}_i = e^{iu_i} \in \mathbf{S}^1, \lim_{\infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \text{ e } \|\gamma_i(t)\| = t.$$

Assumamos que T é orientado no sentido direto, seja $T = T(\gamma_1, \gamma_2)$. Sejam

$$\mathbf{s}_i(t) := \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i(t) \tag{7.1}$$

Como a aplicação $t \mapsto \mathbf{v}_i(t)$ é semi-algébrica, se não for nula na vizinhança de ∞ deduzimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{v}_i(t)}{\|\mathbf{v}_i(t)\|} = \mathbf{w}_i \in \mathbf{S}^1 \text{ e } \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 0.$$

Observe que para cada $t \gg 1$, o conjunto $T \cap \mathbf{S}_t^1$ é semi-algébrico, e é um arco de \mathbf{S}_t^1 . Seja $\alpha(t) \in]0, 2\pi[$ o ângulo $(\gamma_1(t), \mathbf{0}, \gamma_2(t))$, seja o comprimento de $T \cap \mathbf{S}_t^1$ igual a $t\alpha(t)$.

Se $\lim_{\infty} \alpha(t) \in [\pi, 2\pi[$, o Lema 7.1.1 permite assumir que $\lim_{\infty} \alpha(t) \in [0, \pi[$. Se $\lim_{\infty} \alpha(t) = 2\pi$ cortamos T em três triângulos de Hölder semi-algébricos no infinito de maneira que os ângulos de cada têm o limite $2\pi/3$ no infinito. Se $\alpha(t) < \pi$, encontramos

$$\Delta(t) := \gamma_2(t) - \gamma_1(t) \text{ e } \delta(t) := \|\Delta(t)\| = 2t \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha(t)}{2} \right). \tag{7.2}$$

As duas observações precedentes justificam o seguinte:

Convenção: Na pratica, podemos assumir que cada triângulo de Hölder semi-algébrico no infinito não trivial satisfaz $\lim_{\infty} \alpha(t) \in [0, \frac{2\pi}{3}]$.

Seja β o expoente de Hölder de T , logo, existe um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ tal que para $t \gg 1$ temos as estimações seguintes:

$$\Delta(t) = t^\beta [\mathbf{w} + o(1)] \text{ e } \delta(t) = t^\beta [a + o(1)], \text{ onde } a = \|\mathbf{w}\|.$$

Logo, existe $b \in]0, \infty[$ tal que

$$t\alpha(t) = t^\beta [b + o(1)].$$

Se $\beta < 1$, após uma rotação podemos assumir que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = (1, 0)$.

Se $\beta = 1$, após uma rotação podemos assumir que $\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 = (2 \cos u_2, 0)$, assim $\mathbf{u}_2 = e^{iu_2}$ e $\mathbf{u}_1 = e^{-iu_2}$ com $u_2 \in]0, \frac{\pi}{3}]$.

Após essa rotação, para $t \gg 1$, vemos que $T \cap \mathbf{S}_t^1$ é o gráfico

$$x = \sqrt{t^2 - y^2} \text{ onde } y \in I_t := [a(t), b(t)].$$

a família $(I_t)_{t \gg 1}$ é semi-algébrica e a aplicação $t \mapsto (a(t), b(t))$ é semi-algébrica. Se $\beta = 1$, seja $\alpha := \lim_{\infty} \alpha(t) \in]0, \frac{2\pi}{3}]$. Temos

$$a(t) = -At + o(t) \text{ e } b(t) := At + o(t), \text{ onde } A := \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Se $\beta < 1$, seja $\lim_{\infty} \alpha(t) = 0$, temos as seguintes estimadas

$$\lim_{\infty} \frac{(a(t), b(t))}{t} = \mathbf{0} \text{ e } b(t) - a(t) = t\alpha(t) + o(t^\beta).$$

Seja \tilde{T} um triângulo de Hölder não trivial semi-aglébrico no infinito.

Dado um objeto X associado ao triângulo T acima, denotaremos \tilde{X} o objeto correspondente associado a \tilde{T} .

O próximo resultado, é essencial a esse trabalho.

Lema 7.2.1. *Assuma $\beta = \tilde{\beta}$ e (T, ∞) , $(\tilde{T}, \infty) \subsetneq (\mathbb{R}^2, \infty)$. Logo, existe um homeomorfismo $\Phi : (T, \infty) \rightarrow (\tilde{T}, \infty)$ semi-algébrico bi-Lipschitz tal que $\|\Phi(x, y)\| = \|(x, y)\|$.*

Demonstração. Podemos assumir que $\alpha := \lim_{\infty} \alpha(t)$ e $\tilde{\alpha} := \lim_{\infty} \tilde{\alpha}(t)$ pertencem $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

Podemos assumir também que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_2 = (1, 0)$ se $\beta = \tilde{\beta} < 1$ e $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (2 \cos u_2, 0)$ e $\tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_2 = (2 \cos \tilde{u}_2, 0)$ se $\beta = \tilde{\beta} = 1$, com $u_2, \tilde{u}_2 \in (0, \frac{\pi}{3}]$.

Definição 7.2.1. Um triângulo de Hölder $T(\gamma_1, \gamma_2)$ infinito é simétrico se $\gamma_2(t) = (x(t), y(t))$ e $\gamma_1(t) = (x(t), -y(t))$ para t suficientemente grande.

Começamos a demonstrar o lema quando os triângulos são simétricos.

Desejamos mapear $T \cap \mathbf{S}_t^1$ sobre $\tilde{T} \cap \mathbf{S}_t^1$ para $t \gg 1$. Sejam

$$c(t) := b(t) - a(t) \text{ e } \tilde{c}(t) := \tilde{b}(t) - \tilde{a}(t).$$

A construção é semelhante a da prova do Lema 7.1.1. Definimos $\Phi : (T, \infty) \rightarrow (\tilde{T}, \infty)$ como segue

$$(x, y) \rightarrow \Phi(x, y) = (\sqrt{t^2 - (\tilde{y})^2}, \tilde{y}), \text{ onde } t := |(x, y)| \text{ e } \tilde{y} := \tilde{a}(t) + \frac{\tilde{c}(t)}{c(t)}(y - a(t)).$$

Assim Φ é claramente um homeomorfismo semi-algébrico $(T, \infty) \rightarrow (\tilde{T}, \infty)$. Como $0 \leq \alpha$, $\tilde{\alpha} \leq \frac{\pi}{2}$, a aplicação $t \mapsto (a(t), b(t), \tilde{a}(t), \tilde{b}(t))$ é semi-algébrica e Lipschitz para $t \gg 1$. Como $\beta = \tilde{\beta}$ temos que para $t \gg 1$

$$\frac{\tilde{c}(t)}{c(t)} = C + o(1) \text{ onde } C > 0,$$

Como $t \mapsto \frac{\tilde{c}(t)}{c(t)}$ é semi-algébrica, a estimada acima dá que é Lipschitz. Lembramos que $(x, y) \rightarrow t = |(x, y)|$ é Lipschitz em \mathbb{R}^2 , logo, $(x, y) \rightarrow \tilde{y}(x, y)$ é semi-algébrica e Lipschitz. Assim deduzimos que a função semi-algébrica

$$(x, y) \mapsto \tilde{x}(x, y) := \sqrt{t^2 - \tilde{y}^2}$$

é Lipschitz pois as suas derivadas parciais são limitadas na vizinhança do infinito. Logo, Φ é Lipschitz. A inversa Φ^{-1} é produzida semelhantemente ao método usado por Φ , logo, é Lipschitz.

O lema será demonstrado uma vez que o seguinte resultado for provado;

Lema 7.2.2. *Seja T um triângulo de Hölder no infinito tal que T é diferente de (\mathbb{R}^2, ∞) . Então existe um homeomorfismo semi-algébrico bi-Lipschitz $\psi : (T, \infty) \mapsto (T', \infty)$ onde T' é um triângulo de Hölder no infinito simétrico e $\|\psi(x, y)\| = \|(x, y)\|$.*

Demonstração. Sejam $\gamma_j(t) = ts_j(t)$, $s_j(t) = \mathbf{u}_j + v_j(t)$ e $\|v_j(t)\| = 1$, $\mathbf{u}_j = e^{u_j}$. Em coordenadas temos $\gamma_j(t) = (x_j(t), y_j(t))$ $x_j^2 + y_j^2 = t^2$ para $j = 1, 2$.

Sabemos que $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\|\gamma_1 + \gamma_2\|} \rightarrow (1, 0)$ e $\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\|\gamma_2 - \gamma_1\|} \rightarrow (0, 1)$ quando $t \rightarrow \infty$. Defina $v(t) = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\|\gamma_1 + \gamma_2\|} = (1, 0) + w(t)$ com $w(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Como γ_1 e γ_2 são semi-algébricas, $t \mapsto v(t)$ e $t \mapsto w(t)$ são semi-algébricas. $v(t)$ é C^∞ para $t \gg 1$ pois $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = (0, 0)$ e $v'(t) = w'(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$ logo, $v(t)$ é Lipschitz. Seja $h(t) = e^{-i\frac{\pi}{2}} v(t)$, temos que $h(t)$ é semi-algébrica, C^∞ para $t \gg 1$ e Lipschitz. Definamos agora $P(t) = [h(t)|v(t)]$ matriz 2×2 . Veja que P é invertível, semi-algébrica, C^∞ para $t \gg 1$, ortonormal e Lipschitz. Com esta matriz e sua inversa podemos definir as seguintes isometrias

$$\lambda(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto P(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e

$$\lambda(t)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto P(t)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Assim, $\lambda^{-1}(t)v(t) = (0, 1)$ e $\lambda^{-1}(t)h(t) = (1, 0)$.

Seja $\Lambda_T : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Lambda_T(x, y) = \lambda(\|(x, y)\|)(x, y) = P^{-1}(\|(x, y)\|) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Tome $\tilde{T} = \Lambda_T(T)$. Como $\lambda(t)$ é isometria para $t \gg 1$ temos que $\tilde{T} \cap S_t^1 = \Lambda_T(T \cap S_t^1)$.

Seja $\tilde{\gamma}_j(t) = \Lambda_T(\gamma_j)$ então temos que $\|\tilde{\gamma}_j(t)\| = t$ e $\|\tilde{\gamma}_2(t) - \tilde{\gamma}_1(t)\| = \|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|$ para t suficientemente grande.

Finalmente temos que $\frac{\tilde{\gamma}_2(t) - \tilde{\gamma}_1(t)}{\|\tilde{\gamma}_2(t) - \tilde{\gamma}_1(t)\|} = \Lambda_T\left(\frac{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}{\|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|}\right) = (0, 1)$. Tome $\psi : (T, \infty) \mapsto (\tilde{T} = \Lambda_T(T), \infty)$ dada por $\varphi(x, y) = \Lambda_T(x, y)$. \square

O lema acima nos mostra que a menos de um homeomorfismo semi-algébrico bi-Lipschitz que preserva distância, sempre podemos supor que estamos no caso simétrico que já foi provado. \square

7.3 Lema de colagem

Definição 7.3.1. 1) Um complexo de Hölder no infinito é o germe no infinito de uma triangulação semi-algébrica de \mathbb{R}^2 . 2) Dois complexos de Hölder no infinito são combinatorialmente equivalentes quando existe uma bijeção entre seus conjuntos de triângulos que preserva ou inverte a ordem cíclica, e preserva os expoentes dos triângulos de Hölder no infinito. 3) Um complexo de Hölder no infinito é uma sequência finita $\{\beta_i\}_{i \in I}$ de expoentes $\beta_i \in \mathbb{Q}$ com $\beta_i \leq 1$, considerados com ordem cíclica e ao menos um dos β_i é igual a 1.

Um complexo de Hölder no infinito $\{T_i\}_{i \in I}$ corresponde a um complexo de Hölder abstrato no infinito $\{\beta_i\}_{i \in I}$ se o expoente de T_i é igual a β_i para todo $i \in I$.

Dadas duas triangulações de triângulos de Hölder $\{T_i\}_{i \in I}$ e $\{\tilde{T}_i\}_{i \in I}$ do germe no infinito, tais que $\exp(T_i) = \exp(\tilde{T}_i)_i = \beta_i$. Pela proposição anterior existem $\phi_i : T_i \rightarrow \tilde{T}_i$ homeo-

morfismo semi-algébrico bi-Lipschitz tais que $\phi_i|_{\gamma_{i+1}} = \phi_{i+1}|_{\gamma_{i+1}}$ onde $T_i = T(\gamma_i, \gamma_{i+1})$, para cada i . Assim, podemos definir

$$\phi : U = \bigcup_{i=1}^{i=k} T_i \rightarrow V = \bigcup_{i=1}^{i=k} \tilde{T}_i, \quad x \in T_i \mapsto \phi(x) = \phi_i(x)$$

Observe que ϕ é um homeomorfismo semi-algébrico, $\phi(\partial T_i) = \partial \tilde{T}_i$ e $\phi|_{T_i} = \phi_i$. Basta, então, provar que ϕ é bi-Lipschitz.

Lema 7.3.1. (Lema de colagem) *A aplicação ϕ definida acima é bi-Lipschitz.*

Demonstração. Nas condições acima, sejam $T_i = T(\gamma_i, \gamma_{i+1})$, $\tilde{T}_i = (\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_{i+1})$ onde $\phi_i|_{\gamma_{i+1}} = \phi_{i+1}|_{\gamma_{i+1}}$ e $\phi(\gamma_i) = \tilde{\gamma}_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Vamos supor que ϕ não seja Lipschitz e usaremos indução no número de triângulos que constituem as triangulações.

Caso $n = 2$

Sejam U e V abertos conexos do infinito tais que, $U = T_1 \cup T_2$, onde $T_1 = T(\gamma_1, \gamma_2)$, $T_2 = T(\gamma_2, \gamma_1)$, $\gamma_i(t) = tv_i + t^{1-\frac{1}{n}}u_i(t)$ e $V = \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2$ com $\tilde{T}_1 = T(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ $\tilde{T}_2 = T(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1)$.

Considere $M > 0$ constante real tal que

$$\frac{1}{M} \|x - y\| \leq \|\phi_i(x) - \phi_i(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad i = 1, 2$$

Vamos dividir nossa prova em dois casos:

Caso 1: $v_1 \neq v_2$.

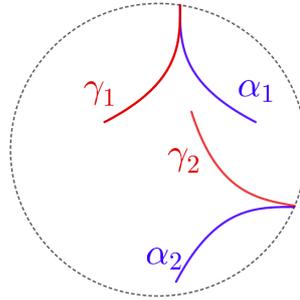
Como ϕ não é Lipschitz, então existem curvas semi-algébricas $\alpha_1, \alpha_2 : (\mathbb{R}, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \infty)$ tais que $\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \rightarrow +\infty$, $\tilde{\alpha}_i = \phi(\alpha_i)$. Podemos supor que $\|\alpha_1\| = t$, logo $\alpha_1(t) = tu_1 + u_1(t)$ e $\alpha_2(t) = \|\alpha_2\|u_2 + u_2(t)$.

Vamos analisar algumas situações :

1.1 $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_2$

Vamos provar que $\frac{\|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\gamma}_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|} \rightarrow +\infty$, o que é um absurdo, pois α_1 e γ_2 estão em T_2 .

$$\|\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\alpha}_1\| \geq \|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\| - \|\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\alpha}_2\| \Rightarrow \frac{\|\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\gamma_2 - \alpha_1\|} \geq \frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \cdot \frac{\|\alpha_2 - \alpha_1\|}{\|\gamma_2 - \alpha_1\|} - M \frac{\|\gamma_2 - \alpha_2\|}{\|\gamma_2 - \alpha_1\|}.$$

Figura 7 – $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_2$ 

Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Devemos provar que $\frac{\|\alpha_2 - \alpha_1\|}{\|\gamma_2 - \alpha_1\|} \not\rightarrow 0$ e que $\frac{\|\gamma_2 - \alpha_2\|}{\|\gamma_2 - \alpha_1\|} \not\rightarrow +\infty$.

Observe que

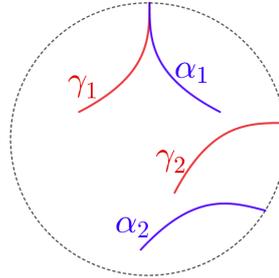
$$\begin{aligned} \frac{\|\alpha_1 - \alpha_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_1\|} &= \frac{\cancel{\|\alpha_1\|} \left\| \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} - \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} \cdot \frac{\|\alpha_2\|}{\|\alpha_1\|} \right\|}{\cancel{\|\alpha_1\|} \left\| \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} - \frac{\gamma_2}{\|\gamma_2\|} \cdot \frac{\|\gamma_2\|}{\|\alpha_1\|} \right\|}} \\ &= \frac{\|v_1 + o(1) - v_2 + o(1)\|}{\|v_1 - v_2 + o(1)\|} \rightarrow \frac{\|v_1 - v_2\|}{\|v_1 - v_2\|} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, não converge para zero.

$$\begin{aligned} \frac{\|\gamma_2 - \alpha_2\|}{\|\gamma_2 - \alpha_1\|} &= \frac{\cancel{\|\gamma_2\|} \left\| \frac{\gamma_2}{\|\gamma_2\|} - \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} \cdot \frac{\|\alpha_2\|}{\|\gamma_2\|} \right\|}{\cancel{\|\gamma_2\|} \left\| \frac{\gamma_2}{\|\gamma_2\|} - \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} \cdot \frac{\|\alpha_1\|}{\|\gamma_2\|} \right\|}} \\ &= \frac{\|v_2 - v_2 + o(1)\|}{\|v_2 - v_1 + o(1)\|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, não converge para $+\infty$. Se $v_1 = u_2$ e $v_2 = u_1$ se resolve de forma análoga, basta provar

que $\frac{\|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\gamma}_1\|}{\|\alpha_1 - \gamma_1\|} \rightarrow +\infty$,

1.2 $v_1 = u_1$ e $v_2 \neq u_2$ Figura 8 – $v_1 = u_1$ e $v_2 \neq u_2$ 

Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Novamente, estamos supondo que ϕ não é Lipschitz, donde, $\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \rightarrow +\infty$. Vamos provar que $\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\gamma}_1\|}{\|\alpha_2 - \gamma_1\|} \rightarrow +\infty$, gerando um absurdo, pois α_2 e γ_1 estão em T_2 . Aqui estamos supondo $u_1 \neq u_2$ (ver figura 8)

$$\frac{\|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\gamma}_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|} \geq \frac{\|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2\|}{\|\alpha_1 - \alpha_2\|} \cdot \frac{\|\alpha_1 - \alpha_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|} - M \frac{\|\alpha_2 - \gamma_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} \frac{\|\alpha_1 - \alpha_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|} &= \frac{\|\alpha_1\|}{\|\alpha_1\|} \cdot \frac{\left\| \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} - \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} \cdot \frac{\|\alpha_2\|}{\|\alpha_1\|} \right\|}{\left\| \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} - \frac{\gamma_2}{\|\gamma_2\|} \cdot \frac{\|\gamma_2\|}{\|\alpha_1\|} \right\|}} \\ &= \frac{\|u_1 - u_2 + o(1)\|}{\|u_2 - v_1 + o(1)\|} \rightarrow \frac{\|u_2 - u_1\|}{\|u_1 - v_2\|} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \cdot \frac{\|\alpha_2 - \gamma_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \rightarrow +\infty.$$

Temos também que

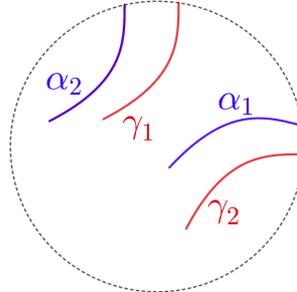
$$\begin{aligned} \frac{\|\alpha_2 - \gamma_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|} &= \frac{\|\gamma_2\|}{\|\gamma_2\|} \cdot \frac{\left\| \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} \cdot \frac{\|\alpha_2\|}{\|\gamma_2\|} - \frac{\gamma_2}{\|\gamma_2\|} \right\|}{\left\| \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} \cdot \frac{\|\alpha_1\|}{\|\gamma_2\|} - \frac{\gamma_2}{\|\gamma_2\|} \right\|}} \\ &= \frac{\|u_2 - v_2 + o(1)\|}{\|u_1 - v_2 + o(1)\|} \rightarrow \left\| \frac{u_2 - v_2}{u_2 - v_2} \right\| \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $-M \frac{\|\alpha_2 - \gamma_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|} \rightarrow \lambda \neq 0$ e, portanto, $\frac{\|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\gamma}_2\|}{\|\alpha_1 - \gamma_2\|} \rightarrow +\infty$. Absurdo!

Por fim, seja agora

1.3 $v_1 \neq u_1$ e $v_2 \neq u_2$

Figura 9 – Caso complementar para $v_1 \neq v_2$.



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

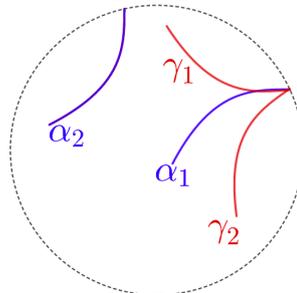
Esta situação se resolve de maneira análoga às duas anteriores. Temos então o primeiro caso $v_1 \neq v_2$ completamente analisado.

Caso 2: $v_1 = v_2$.

Analisaremos primeiramente a seguintes situações:

2.1 $v_1 = u_1 = v_2 = v$ e $u_2 = u \neq u_1$

Figura 10 – Caso $v_1 = v_2 = v$ e $u \neq v$.



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Supondo ϕ não Lipschitz, existem α_1 e α_2 tais que $\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \rightarrow +\infty$.

Vamos provar que $\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\gamma}_2\|}{\|\alpha_2 - \gamma_2\|} \rightarrow +\infty$.

Ora, sabemos que

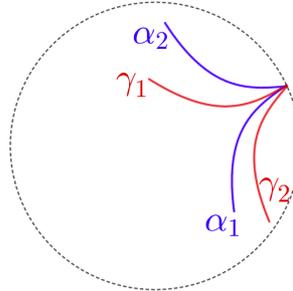
$$\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\gamma}_2\|}{\|\alpha_2 - \gamma_2\|} \geq \frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \cdot \frac{\|\alpha_2 - \alpha_1\|}{\|\alpha_2 - \gamma_2\|} - M \frac{\|\alpha_1 - \gamma_2\|}{\|\alpha_2 - \gamma_2\|}.$$

Veja que $\frac{\|\alpha_2 - \alpha_1\|}{\|\alpha_2 - \gamma_2\|} \rightarrow \frac{\|u - v\|}{\|u - v\|} = 1$ e $\frac{\|\alpha_1 - \gamma_2\|}{\|\alpha_2 - \gamma_2\|} \rightarrow 0$. Portanto, temos uma contradição.

Finalmente temos o cenário em que todas as curvas têm a mesma direção no infinito

2.2 $u_1 = u_2 = u = v = v_1 = v_2$

Figura 11 – Caso $v_1 = v_2 = v$ e $u = v$.



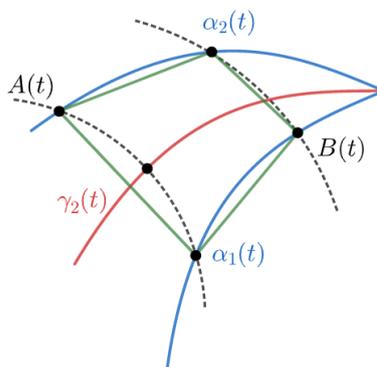
Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Podemos escrever $\alpha_i = \gamma_2 + \beta_i$ para $i = 1, 2$

Como $\frac{\|\beta_1\|}{t} \rightarrow 0$ para $t \gg 1$ temos que $\langle u, \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \rangle \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Logo, o limite ângulo formado entre β_1 e β_2 é maior que $\frac{\pi}{2}$ quando t tende a $+\infty$, ou seja, o triângulo de vértices $\gamma_2(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ tem um ângulo obtuso, a saber, o ângulo de vértice $\gamma_2(t)$. Usando dois pontos auxiliares podemos construir um trapézio isósceles e fazendo o cálculo de sua diagonal, concluir que $\|\alpha_1 - \alpha_2\|$ é comparável com $\|\alpha_1\| + \|\alpha_2\|$; existe uma constante positiva C tal que $\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\| \geq C(\|\alpha_1(t)\| + \|\alpha_2(t)\|)$ para t suficientemente grande. Assim, vemos que $\frac{\|\alpha_2 - \alpha_1\|}{\max\{\|\alpha_1\|, \|\alpha_2\|\}} \rightarrow \delta > 0$ para t suficientemente grande e como nosso homeomorfismo preserva norma, temos também que $\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\max\{\|\tilde{\alpha}_2\|, \|\tilde{\alpha}_1\|\}} \rightarrow \tilde{\delta} > 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Finalmente, concluímos que $\frac{\|\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\|}{\|\alpha_2 - \alpha_1\|} \rightarrow \frac{\tilde{\delta}}{\delta} < +\infty$ e portanto, φ é Lipschitz.

Concluímos assim, que φ é Lipschitz. De modo análogo, verifica-se que φ^{-1} também é Lipschitz.

Figura 12 – Ilustração do caso.



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Suponha agora que seja possível “colar” os homeomorfismos bi-Lipschitz de uma decomposição de um germe do infinito com n triângulos. Seja uma decomposição com $n + 1$ triângulos, $U = T_1 \cup \dots \cup T_{n+1}$. Se $v_i = v$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, onde v_i é a direção assintótica no infinito da curva γ_i , então basta tomar a união de dois triângulos consecutivos tais que o ângulo seja zero e usar o que fizemos no caso $n = 2$. Assim, teremos agora uma decomposição com n triângulos e, pela hipótese de indução, podemos colar os homeomorfismos. Se $v_i \neq v_j$ para algum $i \neq j$, basta tomar a união de dois triângulos consecutivos com ângulo menor que 2π .

8 PIZZAS NO INFINITO

Neste capítulo apresentaremos a noção de pizza no infinito associada a um germe no infinito de funções semi-algébricas e contínuas no plano real. Mostraremos propriedades análogas as exibidas no capítulo 4 e capítulo 5.

8.1 Definições

Definição 8.1.1. Uma pizza abstrata no infinito é uma coleção finita $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i \in I}$, onde $I = \{1, \dots, k\} \bmod k$ é considerado com ordem cíclica, e

1. $\{\beta_i\}_{i \in I}$ é um complexo de Hölder abstrato no infinito.
2. Cada s_i é o sinal $+$, $-$ ou 0 .
3. Cada Q_i é um segmento fechado direto de $\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$, onde “direto” significa que $Q_i = [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$ ou $a_i > b_i$ (ou $a_i = b_i$ quando Q_i é apenas um ponto) satisfazendo a condição de continuidade $a_{i+1} = b_i$ para todo i .
4. $\mu_i : Q_i \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ é uma função afim, $\mu_i \leq \beta_i$ para todo i .

Definição 8.1.2. Uma pizza no infinito $\mathcal{H}(A)$ onde $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$ é associada com um germe de função contínua semi-algébrica $f : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se existir um complexo de Hölder no infinito $\{T_i\}_{i \in I}$ de \mathbb{R}^2 , onde cada $T_i = T(\gamma_i, \gamma_{i+1})$ é um triângulo de Hölder no infinito com expoente β_i elementar com respeito à f e os arcos γ_i são orientados no sentido horário ou anti-horário com respeito a ordem cíclica de I , tal que

1. $Q_i = Q(T_i)$;
2. Para cada arco $\gamma \subset T_i$, $\mu_{T_i}^*(\gamma) = \mu_i(\text{ord}_\gamma^\infty(f))$;
3. O sinal de f no interior de T_i é s_i .

Exemplo 11. Vamos construir uma pizza no infinito associada a função $f(x, y) = y^2 - x^3$. Por simetria, basta construirmos a pizza no semi-plano $y \geq 0$.

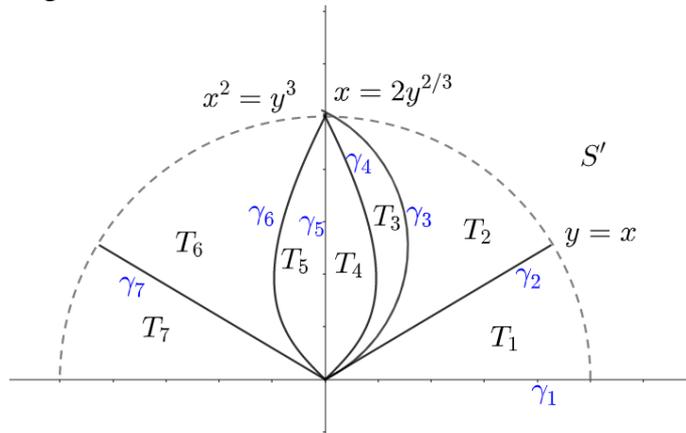
Vamos encontrar a preparação de f em cada “fatia” da pizza.

- $T_1 = \{x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$, $f(x, y) = y^2 - x^3 = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1 \right)$.

Em T_1 , temos que $x^3 > x^2 > y^2$ daí, $0 \leq \frac{y^2}{x^3} \leq \frac{1}{x} < \lambda$, onde $0 < \lambda \leq 1$. Vamos tomar $\lambda < \frac{1}{2}$, pois $x \gg 1$. Assim, temos que

$$f(x, y) \leq x^3(\lambda - 1).$$

Figura 13 – Pizzas no infinito



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Por outro lado, como $\frac{y^2}{x^3} \Big|_{T_1} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, temos $-x^3 \leq f(x, y) \leq x^3(\lambda - 1)$. Os lados de T_1 são $\gamma_1 : y = 0$ e $\text{ord}_{\gamma_1}^\infty(f) = \text{ord}_{\gamma_2}^\infty(f) = 3$. O expoente de T_1 é $\beta_1 = 1$. Portanto, $\mu_1 : [3, 3] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$, $\mu_1(t) = 1$. Assim, temos todas as informações referentes a T_1 . São elas: $\beta_1 = 1$, $Q_1 = [3, 3]$, s_1 é o sinal negativo e μ_1 é a função constante igual a 1.

- $T_2 = \{0 \leq x \leq y \text{ e } x \geq 2y^{2/3}\}$. Neste caso, os lados de T_2 são γ_2 e γ_3 , onde $\gamma_2 : y = x$ e $\gamma_3 : x = 2y^{2/3}$, $f(x, y) = -x^3 + y^2 = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1 \right)$.

$$x \geq 2y^{2/3} \Rightarrow x^3 \geq 8y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^2}{x^3} \leq \frac{1}{8}.$$

Daí, concluímos que

$$-x^3 \leq f(x, y) \leq -\frac{7}{8}x^3.$$

Vamos agora encontrar as informações relativas à T_2 que nos interessam para a definição de pizza. $\beta_2 = 1$, pois γ_2 e γ_3 têm pontos distintos no infinito, $Q_2 = [3, 2]$, s_2 é o sinal negativo e $\mu_2 : [3, 2] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ é dado por $\mu_2(q) = \frac{q}{3}$.

- $T_3 = \{0 \leq x; y^{2/3} \leq x \leq 2y^{2/3}\}$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -(x^3 - y^2) = -(x - y^{2/3})(x^2 + xy^{2/3} + y^{4/3}) \\ &= -(x - y^{2/3})y^{4/3} \left[\left(\frac{x}{y^{2/3}} \right)^2 + xy^{-2/3} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Como $3 \leq \left(\frac{x}{y^{2/3}} \right)^2 + \frac{x}{y^{2/3}} + 1 \leq 7$, segue que

$$3(x - y^{2/3})y^{4/3} \leq f(x, y) \leq 7(x - y^{2/3})y^{4/3}.$$

Portanto, $Q_3 = [2, -\infty]$, s_3 é o sinal negativo, $\beta_3 = \frac{2}{3}$, e $\mu_3 : [2, -\infty] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ dada por $\mu_3(q) = q - \frac{4}{3}$.

- $T_4 = \{0 \leq x \leq y^{2/3}\}$.

$$f(x,y) \Big|_{T_4} = -x^3 + y^2 = -(x - y^{2/3})(x^2 + xy + y^{4/3}) = -(x - y^{2/3})y^{4/3} \cdot \text{unidade}.$$

Daí, temos, $Q_4 = [-\infty, 2]$; s_4 é o sinal positivo, $\beta_4 = \frac{2}{3}$; e $\mu_4 : [-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, com $\mu_4(q) = q - \frac{4}{3}$.

- $T_5 = \{0 \geq x \geq -y^{2/3}; y \geq 0\}$. $f(x,y) \Big|_{T_5} = y^2 \left(1 - \frac{x^3}{y^2}\right)$ unidade. Portanto, $Q_5 = [2, 2]$;

$\beta_5 = \frac{2}{3}$; s_5 é o sinal positivo, $\mu_5 : [2, 2] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ é dada por $\mu_5(q) = \frac{2}{3}$.

- $T_6 = \{-y \leq x \leq -y^{2/3}\}$, $f(x,y) \Big|_{T_6} = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right) \Big|_{T_6}$.

Como $\frac{y^2}{x^3} - 1 \in [-2, 1)$. Temos, $Q_6 = [2, 3]$; s_6 é o sinal negativo, $\beta_6 = 1$ e $\mu_6 : [2, 3] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ é dada por $\mu_6(q) = \frac{q}{3}$.

- $T_7 = \{x \leq 0; y \leq -x\}$, $f(x,y) \Big|_{T_7} = x^3 \left(\frac{y^2}{x^3} - 1\right)$, logo, $\frac{y^2}{x^3} - 1 \Big|_{T_7} \in [-2, -1)$. Finalmente,

temos: $Q_7 = [2, 3]$; s_7 é o sinal negativo, $\beta_7 = 1$ e $\mu_7 : [2, 3] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ é dada por $\frac{q}{3}$.

8.2 Propriedades

Seja $f : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função contínua semi-algébrica. O teorema da preparação nos garante que existe uma triangulação de (\mathbb{R}^2, ∞) (semi-algébrica) \mathcal{C} . Tal que, para todo triângulo $T \in \mathcal{C}$ existem $\lambda \in \mathbb{Q}$, funções semi-algébricas $\theta, a : (\mathbb{R}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $u : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que para todo $(x, y) \in (T, \infty)$. Podemos sempre assumir que a função está preparada em y , isto é, existe $D > 0$ tal que $\|(x, y) \leq D|x|$ em (T, ∞)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (y - \theta(x))^\lambda a(x) u(x, y) \\ |u(x, y) - 1| &< \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

A menos de refinamento, podemos considerar que o conjunto $\beta = \{y = \theta(x)\}$ está fora de T ou em seu bordo.

Seja T o fecho de uma célula ilimitada de \mathcal{C} , e γ um arco ilimitado em T . Então $\gamma = \{y = \theta(x) + bx^{(\gamma, \beta)} + o(x^{(\gamma, \beta)})\}$. Como $a(x) = cx^r + o(x^r)$. A equação (8.1) implica que

$$\text{ord}_\gamma^\infty(f) = \lambda(\gamma, \beta) + r.$$

Seja $\mathcal{R}(T) := [(\gamma_1, \beta), (\gamma_2, \beta)] \cap \{\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}\}$, onde γ_1 e γ_2 são as fronteiras de T . Se $\mathcal{R}(T)$ for apenas um ponto, ou se $\lambda = 0$, então $Q_f^\infty(T)$ é apenas um ponto. Caso contrário, definimos $\rho : \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ por

$$\rho(q) = \frac{q - r}{\lambda}.$$

ρ é uma função afim em $Q_f^\infty(T)$. Note que $\rho(q) = (\gamma, \beta)$ para qualquer arco $\gamma \subset T$ tal que $\text{ord}_\gamma^\infty(f) = q$.

Lema 8.2.1. *A seguinte igualdade é válida:*

$$\rho(q) = \mu_T^\infty(q), \quad \text{para todo } q \in Q_f^\infty(T).$$

Demonstração. Suponha que $\rho(q) > \mu_T^\infty(q)$. Seja γ um arco em T tal que $\text{ord}_\gamma^\infty(f) = q$. e $\mu_{T, \infty}^*(q) < (\gamma, \gamma_1)$, onde γ_1 é o lado mais próximo a β . Então, existe um arco $\tilde{\gamma}$ tal que $(\gamma, \tilde{\gamma}) = \mu_{T, \infty}^*(\gamma)$, $\text{ord}_{\tilde{\gamma}}^\infty(f) = q$ e $(\gamma_1, \tilde{\gamma}) \neq (\gamma_1, \gamma)$. Isto contradiz a boa definição de $\rho(q)$.

Suponha agora que $\rho(q) < \mu_T^\infty(q)$. Seja γ um arco em T tal que $\text{ord}_\gamma^\infty(f) = q$ e $\mu_{T, \infty}^*(q) > (\gamma, \gamma_1)$. então podemos considerar o arco $\tilde{\gamma}$ em T tal que $(\gamma_1, \tilde{\gamma}) = (\gamma_1, \gamma) = (\gamma, \tilde{\gamma})$. Como T é um triângulo elementar, não podemos ter $\text{ord}_\gamma^\infty(f) = \text{ord}_{\tilde{\gamma}}^\infty(f)$. O que novamente contradiz a boa definição de $\rho(q)$. \square

Corolário 8.2.2. *Seja $T' \subset T$ um triângulo de Hölder no infinito com $\partial T' = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Se $\text{ord}_{\gamma_1}^\infty f = \text{ord}_{\gamma_2}^\infty f = q \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Q}$, logo $Q_f^\infty(T') = q$, tal que triângulo T' de Hölder no infinito é chamado elementar.*

Demonstração. Se γ_1 e γ_2 estão em T' tais que $\text{ord}_{\gamma_1}^\infty(f) = q = \text{ord}_{\gamma_2}^\infty(f)$, seja $\gamma \subset T(\gamma_1, \gamma_2)$. Supondo que γ_1 é o lado mais próximo de β .

$$\begin{aligned} \|\gamma_2(x) - \beta(x)\| &\geq \|\gamma(x) - \beta(x)\| \geq \|\gamma_1(x) - \beta(x)\|, \quad \forall t \gg 1. \\ \Rightarrow (\gamma_2, \beta)^\infty &\geq (\gamma, \beta)^\infty \geq (\gamma_1, \beta)^\infty \\ \Rightarrow \frac{q-r}{\lambda} &\geq (\gamma, \beta) \geq \frac{q-r}{\lambda} \\ q \leq \lambda(\gamma, \beta)^\infty + r &\leq q \Rightarrow \text{ord}_\gamma^\infty(f) = q. \end{aligned}$$

□

Teorema 8.2.3. *Para qualquer germe de função semi-algébrica contínua $f : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ existe uma pizza \mathcal{H} associada à f .*

Demonstração. Considere $\{T_i\}_{i=1}^k$ a triangulação dada pelo teorema da preparação, como cada T_i é elementar com respeito à f , podemos definir $\mathcal{H}(A)$ com $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$, onde β_i é o expoente de T_i (fixada uma orientação para os lados de $T_i = T(\gamma_i, \gamma_{i+1})$), $Q_i = Q_f^\infty(f)$, s_i é o sinal de f no interior de T_i , que não muda por conta da continuidade de f e $\mu_i = \rho_i$, onde ρ_i é a função afim definida em $\mathcal{R}(T_i)$.

Seja $\gamma \subset T_i$, então $\mu_i(\text{ord}_\gamma^\infty(f)) = \rho_i(\text{ord}_\gamma^\infty(f)) = \mu_{T_i}(\text{ord}_\gamma^\infty(f)) = \mu_{T_i}^*(\gamma)$. Por fim, se $T_i = T(\gamma_1, \gamma_2)$ com $a_i = \text{ord}_{\gamma_1}^\infty(f)$ e $b_i = \text{ord}_{\gamma_2}^\infty(f)$, $Q_i = [a_i, b_i]$ e temos que a condição de continuidade é satisfeita pela continuidade de f . □

Definição 8.2.4. Uma pizza no infinito $\mathcal{H}(A)$ onde $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$, pode ser simplificada se existirem dois triângulos consecutivos T_i e T_{i+1} tais que:

1. $Q_i = [a_i, b_i]$ e $Q_{i+1} = [a_{i+1}, b_{i+1}]$ onde $a_i \leq b_i = a_{i+1} \leq b_{i+1}$ ou $a_i \geq b_i = a_{i+1} \geq b_{i+1}$;
2. exista uma função afim $\varphi : Q_i \cup Q_{i+1} \rightarrow \mathbb{Q}$;
3. $\varphi|_{Q_i} = \mu_i$ e $\varphi|_{Q_{i+1}} = \mu_{i+1}$ e $s_i = s_{i+1}$.

Podemos assim definir $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\beta}_j, \tilde{Q}_j, \tilde{s}_j, \tilde{\mu}_j\}_{j=1}^{k-1}$, onde

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_i = \beta_j \text{ se } j < i \\ \tilde{\beta}_i = \min\{\beta_i, \beta_{i+1}\} \\ \tilde{\beta}_j = \beta_{i-1} \text{ se } j > i+1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{Q}_i = Q_j \text{ se } j < i \\ \tilde{Q}_i = Q_i \cup Q_{i+1} \\ \tilde{Q}_j = Q_{j+1} \text{ se } j > i+1 \end{cases}, \\ \begin{cases} \tilde{s}_i = s_j \text{ se } j < i \\ \tilde{s}_i = s_i = s_{i+1} \\ \tilde{s}_j = s_{j+1} \text{ se } j > i+1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \tilde{\mu}_i = \mu_j \text{ se } j < i \\ \tilde{\mu}_i = \varphi \\ \tilde{\mu}_j = \mu_{j+1} \text{ se } j > i+1 \end{cases}.$$

Seja $\{\tilde{T}_i\}_{i \in I}$ o complexo de Holde no infinito obtido de $\{T_i\}_{i \in I}$ pela simplificação, logo, $\tilde{T}_j = T_j$ se $j < i$, $\tilde{T}_i = T_i \cup T_{i+1}$ e $\tilde{T}_j = T_{j+1}$ se $j > i$. Assim, temos que $\mathcal{H}(\tilde{\mathcal{A}})$ é uma simplificação de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$

Uma pizza associada a uma função contínua e semi-algébrica $f : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, é minimal quando esta pizza não pode ser simplificada.

Lema 8.2.5. *Seja $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ uma pizza no infinito associada à função f . Se $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\mathcal{A}})$ é uma simplificação de $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$, então $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\mathcal{A}})$ é uma pizza associada à f .*

Proposição 8.2.6. *A classe de equivalência combinatorial resultante de uma pizza simplificada não depende da ordem da simplificação.*

Demonstração. Se aplicarmos o processo de simplificação até que não seja mais possível, quaisquer dois elementos consecutivos indexados por i e $i+1$ só poderão possuir uma das seguintes propriedades:

- (1) As funções afins μ_i e μ_{i+1} são não constantes e elas não são restrições de uma função afim definida em dois seguimentos adjacentes.
- (2) $Q_i = [a, a]$ é um ponto, $Q_{i+1} = [a, b]$ não é um ponto, e $\mu_i(a) > \mu_{i+1}(a)$.
- (3) $Q_i = [a, b]$ não é um ponto, $Q_{i+1} = [b, b]$ é um ponto, e $\mu_i(b) < \mu_{i+1}(b)$.

O segmento maximal correspondente é único. A ordem depende apenas da pizza inicial, e não depende do processo de simplificação. \square

Teorema 8.2.7. *Uma pizza minimal associada à um germe de função contínua e semi-algébrica $f : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é única a menos de equivalência combinatorial.*

Demonstração. Sejam H_1 e H_2 duas pizzas minimais no infinito associadas ao germe de f . Sejam $\{T_{1,i}\}_i$ e $\{T_{2,i}\}_i$ os complexos de Hölder no infinito associados as pizzas H_1 e H_2 respectivamente.

Podemos construir uma nova pizza no infinito H por meio de um refinamento comum $\{T_s\}$ de $\{T_{1,i}\}_i$ e $\{T_{2,i}\}_i$. Portanto, as pizzas H_1 e H_2 são simplificações de uma mesma pizza, logo, são equivalentes. \square

9 EQUIVALÊNCIAS ASSINTÓTICAS NO INFINITO E SEGUNDO RESULTADO PRINCIPAL

Neste último capítulo apresentaremos o segundo resultado principal do trabalho. Inicialmente, como no capítulo 5, introduziremos a noção de equivalências assintóticas no infinito de germes no infinito de funções semi-algébricas e contínuas. Mostraremos que a classe de equivalência assintótica de tal função fica completamente caracterizada pela pizza minimal associada.

9.1 Equivalência assintótica no infinito

Definição 9.1.1. Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ germes de funções semi-algébricas contínuas.

- i) Dizemos que f e g são fracamente assintoticamente equivalentes (WAE) se, e somente se, existem constantes A e B reais e $\phi : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \infty)$ homeomorfismo bi-Lipschitz semi-algébrico tais que

$$A|f| \leq |g \circ \phi| \leq B|f|.$$

- ii) Diremos que f e g são fortemente assintoticamente equivalentes (SAE) se valer (i) e, além disso, a função $f \cdot (g \circ \phi)$ é maior ou igual a zero em uma vizinhança do infinito.

Definição 9.1.2. Duas pizzas no infinito $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}'(\mathcal{A}')$, onde temos que $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$ e $\mathcal{A}' = \{\beta'_i, Q'_i, s'_i, \mu'_i\}_{i=1}^{k'}$ são combinatorialmente equivalentes se $k = k'$ e existir uma equivalência combinatorial $i \mapsto j(i)$ sobre os complexos de Hölder no infinito correspondentes, associando $T'_{j(i)}$, com T_i . Diremos que:

- (I) $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}'(\mathcal{A}')$ são fracamente assintoticamente equivalentes (WAE) se:
- 1) $Q'_{j(i)} = Q_i$ para todo i com $i \mapsto j(i)$ preservando a ordem cíclica, ou $Q'_{j(i)} = -Q_i$ para todo i (onde $-Q_i$ significa Q_i , com direção oposta) se a ordem for revertida.
 - 2) $\mu'_{j(i)} = \mu_i$ para todo i .
- (II) $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}'(\mathcal{A}')$ são fortemente assintoticamente equivalente (SAE) se
- 1) $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}'(\mathcal{A}')$ são WAE.
 - 2) $s'_{j(i)} = s_i$ para todo i com $i \mapsto j(i)$.

Teorema 9.1.3. Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ germes de funções contínuas e semi-algébricas. Se f é WAE/SAE à g , então para cada pizza no infinito $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$ associada com f , existe uma pizza $\mathcal{H}_g(\mathcal{A}')$ associada com g e WAE/SAE à pizza $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$.

Demonstração. Seja $\{T_i\}_{i \in I}$ a triangulação semi-algébrica do germe de \mathbb{R}^2 no infinito dada por $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$. Como f é assintoticamente equivalente a g no infinito, existe um homeomorfismo ϕ bi-Lipschitz semi-algébrica e constantes A, B reais, tais que $A|f| \leq |g \circ \phi| \leq B|f|, \forall x; g(x) \neq 0$. Como ϕ é bi-Lipschitz, $T'_i = \phi(T_i)$ é um triângulo de Hölder no infinito com $\exp(T'_i) = \exp(T_i) = \beta_i$. O conjunto $\{T'_i\}_{i \in I}$ forma uma triangulação semi-algébrica para o germe de \mathbb{R}^2 no infinito. Seja γ um arco em T_i , então $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma$ é um arco em T'_i . Observe que:

$$\begin{aligned} Af(\gamma)(t) &\leq g(\tilde{\gamma}(t)) \leq Bf(\gamma(t)) \\ Aat^\alpha + o(t^\alpha) &\leq bt^\beta + o(t^\beta) \leq Bat^\alpha + o(t^\alpha) \\ Aa + o(1) &\leq bt^{\beta-\alpha} + o(t^{\beta-\alpha}) \leq Ba + o(1) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} bt^{\beta-\alpha} = k \in \mathbb{R} &\Rightarrow \boxed{\beta = \alpha.} \end{aligned}$$

Portanto, $\text{ord}_\gamma^\infty(f) = \text{ord}_{\tilde{\gamma}}^\infty(g)$. Sejam γ_1 e γ_2 dois arcos em T_i , então $\text{ord}_{\gamma_1}^\infty(f) = \text{ord}_{\phi \circ \gamma_1}^\infty(g)$ e $\text{ord}_{\gamma_2}^\infty(f) = \text{ord}_{\phi \circ \gamma_2}^\infty(g)$. Assim, $Q_f^\infty(T_i) = Q_g^\infty(T'_i)$ como segmento direto. Como cada T_i é elementar, com respeito à f , pois $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ é associada à f , então cada T'_i é elementar com respeito à g . Seja $\tilde{\gamma}$ um arco em T'_i , $\mu_{T'_i}^*(\tilde{\gamma}) = \mu_{T_i}^*(\gamma) = \mu_i(\text{ord}_\gamma^\infty(f)) = \mu_i(\text{ord}_{\tilde{\gamma}}^\infty(g))$ (neste caso, $\gamma = \phi^{-1} \circ \tilde{\gamma}$). Portanto, podemos definir $\mu'_i = \mu_i$ para todo i .

Se f e g são WAE, então o sinal de f e g nos triângulos não é relevante e as equivalências entre $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}_g(\mathcal{A}')$ onde $\mathcal{A}' = \{\beta'_i, Q'_i, s'_i, \mu'_i\}$ com $\beta'_i = \beta_i, Q'_i = Q_i$ se a ordem é preservada e $Q'_i = -Q_i$ se a ordem se inverte, $\mu'_i = \mu_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Se f é SAE à g , então ϕ sempre preserva o sinal de f nos triângulos, daí $s'_i = s_i$, para todo i . Isto nos dá que $\mathcal{H}_f(\mathcal{A})$ é SAE à $\mathcal{H}_g(\mathcal{A}')$. \square

Teorema 9.1.4. *Dois germes de funções semi-algébricas e contínuas $f, g : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são WAE/SAE se, e somente se, suas pizzas minimais no infinito são WAE/SAE.*

Demonstração. Se f e g são assintoticamente equivalentes no infinito (fracamente ou fortemente) então pelo Teorema 9.1.3 e pelo lema 8.2.5, uma pizza minimal de f é equivalente a uma pizza minimal de g . Caso contrário, se a pizza de g obtida a partir do teorema 9.1.3 não for minimal, qualquer simplificação resulta numa pizza minimal para g . Logo, conseguimos uma simplificação para a pizza de f . Absurdo, pois a pizza de f é minimal.

Se a pizza minimal de f é WAE/SAE a uma pizza minimal de g , então pelo Lema 7.3.1, existe um mapa bi-Lipschitz semi-algébrico $\Phi : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \infty)$ que transforma a triangulação $\{T_i\}$, associada a pizza de f , na triangulação $\{T'_i\}$ associada com a pizza de g .

Vamos provar que a função $(x, y) \mapsto \frac{f(x, y)}{g \circ \Phi(x, y)}$ é limitada no conjunto dos pontos onde a função não é zero. Vamos supor que a função $\frac{f}{g \circ \Phi} \circ \gamma$ é ilimitada ou tende a zero. Como f e g são semi-algébricas, então existe um arco γ tal que $\frac{f}{g}$ é ilimitada ou tende a zero. Observe que a função largura do arco γ com respeito a função f e a função largura do arco $\Phi \circ \gamma$ com respeito a função g são iguais a (γ, γ_i) , onde γ_i é o bordo do simplexo T_i tal que $\gamma \subset T_i$. Portanto, $\text{ord}_\gamma(f) = \text{ord}_{\Phi \circ \gamma}(g)$, então

$$\left(\frac{f}{g \circ \Phi} \right) (\gamma) = \frac{f(\gamma)}{g(\Phi \circ \gamma)} = \frac{at^\alpha + o(t^\alpha)}{bt^\alpha + o(t^\alpha)} = \frac{a}{b} + o(1).$$

Onde a e b são números reais não nulos e $\alpha \neq -\infty$. O que contradiz a hipótese que $\frac{f}{g \circ \Phi} \circ \gamma \in \{0, \pm\infty\}$ \square

9.2 Equivalência de contato Lipschitz no infinito

Definiremos agora a noção de equivalência de contato Lipschitz no infinito e assim podemos enunciar um resultado análogo ao que foi provado em 4.

Definição 9.2.1. Dois germes de aplicações contínuas $f, g : (\mathbb{R}^n, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \infty)$ são Lipschitz contact equivalentes no infinito (LCE) se existirem dois germes de homeomorfismos bi-Lipschitz $h : (\mathbb{R}^n, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \infty)$ e $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \infty \times \mathbb{R}^p) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \infty \times \mathbb{R}^p)$ tais que $H(\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}) = \mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$ e os diagramas seguintes são comutativos:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, \infty) & \xrightarrow{(id, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \infty \times \mathbb{R}^p) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, \infty) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (\mathbb{R}^n, \infty) & \xrightarrow{(id, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \infty \times \mathbb{R}^p) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, \infty) \end{array}$$

onde $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade e $\pi_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção canônica.

Teorema 9.2.2. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dois germes de funções LCE no infinito. Então existe um germe de um homeomorfismo bi-Lipschitz na origem $\Phi : (\mathbb{R}^n, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \infty)$ e constantes reais a e b ambas positivas e um sinal σ tais que*

$$a|f| \leq |g \circ \Phi| \leq b|f| \quad e \quad \sigma \cdot f(g \circ \Phi) \geq 0 \quad (9.1)$$

Se f e g são Lipschitz e satisfazem (9.1), então elas são LCE no infinito.

Demonstração. A prova é análoga a demonstração feita em [3], 2007, Teorema 4.2. \square

Definição 9.2.3. Duas pizzas no infinito $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ onde temos que $\mathcal{A} = \{\beta_i, Q_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^k$ e $\mathcal{H}'(\mathcal{A}')$ onde $\mathcal{A}' = \{\beta'_i, Q'_i, s'_i, \mu'_i\}_{i=1}^{k'}$ são combinatorialmente equivalentes se $k = k'$ e existir uma equivalência combinatorial $i \mapsto j(i)$ que faz corresponder $T'_{j(i)}$, com T_i tal que:

1. $s'_j(i) = s_i$ ou $s'_{j(i)} = -s_i$, para todo i .
2. $Q'_{j(i)} = Q_i$ para todo i com $i \mapsto j(i)$ preservando a ordem cíclica, ou $Q'_{j(i)} = -Q_i$ para todo i (onde $-Q_i$ significa Q_i , com direção oposta) se a ordem for revertida.
3. $\mu'_{j(i)} = \mu_i$ para todo i .

Teorema 9.2.4. *Dois germes de funções Lipschitz e semi-algébricas $f, g : (\mathbb{R}^2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são LCE no infinito se, e somente se, suas pizzas minimais são combinatorialmente equivalentes.*

Demonstração. O resultado é obtido a partir dos teoremas 9.1.4 e 9.2.2 e das definições 9.2.1 e 9.2.3. □

10 CONCLUSÃO

Na primeira parte dessa tese apresentamos os conceitos de equivalências assintóticas fraca e forte para germes de funções semi-algébricas definidas no germe do plano furado, foi muito importante encontrar uma forma de relacionar as funções que não se estendiam continuamente na origem, com funções que estavam definidas no germe de \mathbb{R}^2 na origem. Desta maneira, conseguimos associar pizzas às nossas funções, assim, podemos demonstrar o primeiro resultado deste trabalho: duas funções semi-algébricas definidas no germe do plano furado são fracamente ou fortemente equivalentes se, e somente se, suas pizzas minimais são fracamente ou fortemente equivalentes.

Na segunda parte, apresentamos o conceito de equivalência assintótica fraca e forte para germes de funções semi-algébricas definidas em um germe de \mathbb{R}^2 no infinito. Demonstramos o lema de colagem que garante que duas pizzas com o mesmo complexo de Holder geométrico e abstrato são semialgebricamente bi-Lipschitz homeomorfas e demonstramos o segundo resultado principal: dois germes de funções semi-algébricas no infinito são fracamente ou fortemente assintoticamente equivalentes se, e somente se, suas pizzas minimais são fracamente ou fortemente equivalentes.

Obtivemos uma maneira de classificar os germes quanto a equivalência assintótica fraca ou forte na origem e no infinito. Uma pergunta que fica para o futuro é verificar se um conjunto de polinômios com grau limitado possui uma quantidade finita de classes de equivalência.

REFERÊNCIAS

- [1] BENEDETTI, R.; RISLER, J. **Real algebraic and semi-algebraic sets**. Paris: Hermann, 1990. ISBN 9782705661441.
- [2] BIRBRAIR, L. Local bi-lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets. **Houston Journal of Mathematics**, v. 25, n. 1, p. 453–472, 1999.
- [3] BIRBRAIR, L.; COSTA, J.; FERNANDES, A.; RUAS, M. \mathcal{K} -bi-lipschitz equivalence of real function-germs. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 135, n. 4, p. 1089–1095, 2007.
- [4] BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A.; GABRIELOV, A.; GRANDJEAN, V. Lipschitz contact equivalence of function germs in \mathbb{R}^2 . **Annali Scuola Normale Superiore - Classe di Scienze**, p. 81–92, 2017.
- [5] BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A.; GRANDJEAN, V. On the bi-lipschitz contact equivalence of plane complex function-germs. **Journal of Singularities**, v. 13, n. 8, p.1–10, 2013.
- [6] BRIESKORN, E. **Plane algebraic curves**. Basel Boston: Birkhäuser Verlag, 1986. ISBN 978-3-0348-5097-1.
- [7] COSTE, M. **An introduction to o-minimal geometry**. Pisa, 2000.
- [8] COSTE, M. **An Introduction to Semialgebraic Geometry**. Pisa, 2002.
- [9] DRIES, L. van den; SPEISSEGGER, P. O-minimal preparation theorems. **Model theory and applications**, Roma, v. 11, p. 87–116, 2002.