

JOSEGIL JORGE PEREIRA DE ARAÚJO

SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO USANDO
MODELO *Black-Oil* COM FORMULAÇÃO EM FRAÇÕES MÁSSICAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Química, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Marcondes.

FORTALEZA
2005

JOSEGIL JORGE PEREIRA DE ARAÚJO

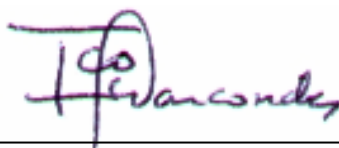
SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO USANDO
MODELO *Black-Oil* COM FORMULAÇÃO EM FRAÇÕES MÁSSICAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Química, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Química.

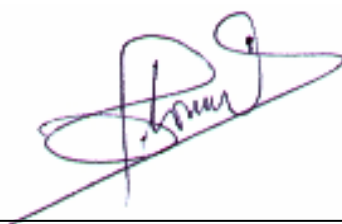
Orientador: Prof. Dr. Francisco Marcondes.

Aprovada em: 03/11/2005

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Francisco Marcondes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará



Prof. Ph.D. Clovis Raimundo Maliska
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC



Prof. Dr. Hosiberto Batista de Sant'Ana
Universidade Federal do Ceará - UFC

À minha mãe, mulher de fibra, Tereza Pereira de Araújo por tudo que me ofereceu, amor, carinho, compreensão e educação que é o meu maior tesouro.

À minha esposa Maria de Fátima Mesquita de Araújo, pelo amor, companhia e, sobretudo, paciência, que foi o meu combustível extra para superar os momentos difíceis ao longo dessa jornada.

Aos meus filhos Isabelle Mesquita de Araújo e Tiago Mesquita de Araújo, pelo amor, carinho e, principalmente, compreensão para suportar a minha ausência, apesar da constante presença.

AGRADECIMENTOS

À ANP – Agência Nacional de Petróleo / PRH – 31, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de estudos.

Aos professores do PPGEQ, pelos conhecimentos passados.

Ao Professor Dr. Francisco Marcondes, pela orientação e ensinamentos passados ao longo desse trabalho.

À minha esposa e filhos, pela força, compreensão e apoio ao longo deste trabalho.

À Professora Dra. Sônia Maria Araújo Castelo Branco, pelo apoio oferecido para a realização deste estudo.

À minha irmã Tereza Denyse Pereira de Araújo, pelo apoio moral oferecido tornando a jornada mais amena.

Ao Professor André Luiz Araújo, pela valiosa ajuda no desenvolvimento do código computacional.

Aos colegas da turma de mestrado, pelo apoio oferecido.

A todos aqueles que direta e indiretamente contribuíram para a finalização desse trabalho.

RESUMO

O presente trabalho analisará o escoamento bifásico (água e óleo) em uma geometria 3D, empregando um modelo *black-oil* simplificado na formulação em frações mássicas. As equações resultantes serão resolvidas empregando o método dos volumes finitos, em conjunto com coordenadas generalizadas e uma metodologia totalmente implícita. As funções de interpolação UDS (*Upstream differencing Scheme*) e CDS (*Central Differencing Scheme*) com correção atrasada foram implementadas para calcular as propriedades nas interfaces dos volumes de controle. Um processo de inicialização das variáveis do simulador (saturação da água, pressão do óleo e pressão capilar), baseado nas condições de equilíbrio, também foi implementado. O simulador será validado com o IMEX, o simulador comercial da CMG (*Computer Modelling Group*), e com casos retirados da literatura usando coordenadas cartesianas e generalizadas. As funções de interpolação UDS e CDS atrasado serão estudadas usando os escoamentos tipo pistão e não pistão.

Palavras-chave: Simulação de reservatório de petróleo, Método dos Volumes finitos, Coordenadas generalizadas, modelo *black-oil*, Funções interpolação UDS e CDS atrasado.

ABSTRACT

The present work presents a solution of a two-phase flow (water and oil) for three-dimensional geometries using a simplified black-oil model in terms of mass fractions. The resulting equations were solved by the finite-volume method in conjunction with boundary fitted coordinates and a fully implicit formulation. The interpolation functions UDS (Upstream Differencing Scheme) and CDS (Central Differencing Scheme) with deferred correction were implemented to evaluate the properties in the control volume interfaces. An automatic process for initialization of the variables of the simulator (water saturation, pressure of oil, and capillary pressure) based on an equilibrium condition was also implemented. The simulator was validated using the IMEX, a commercial simulator from CMG (Computer Modelling Group), and cases from the literature using Cartesian and boundary fitted coordinates. The interpolation functions, UDS and deferred CDS, were studied using piston-type and no-piston type flows.

Keywords: Petroleum reservoir simulation, finite-volume method, boundary fitted coordinates, black-oil model, UDS and deferred CDS interpolation function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	– Reservatório de petróleo	15
Figura 1.2	– a) Microporos na rocha. b) Microporos conectados	15
Figura 1.3	– a) Malhas ortogonais com alturas constantes. b) Malhas ortogonais com alturas variadas	19
Figura 1.4	– Exemplo de malha generalizada	19
Figura 1.5	– a) Exemplo de malha radial. b) Exemplo de malhas não-estruturadas	20
Figura 3.1	– Modelo composicional	25
Figura 3.2	– Modelo <i>black-oil</i> generalizado	31
Figura 3.3	– Volumes do óleo e gás	32
Figura 3.4	– Modelo <i>black-oil</i> padrão	36
Figura 3.5	– Modelo <i>black-oil</i> simplificado	38
Figura 4.1	– Exemplos dos domínios: a) Físico. b) Transformado	44
Figura 4.2	– Volume para integração	46
Figura 4.3	– a) Volume elementar central. b) Vizinhos diretos de P	47
Figura 4.4	– Vizinhos do volume elementar P . a) Plano inferior com os vizinhos do volume elementar B . b) Plano intermediário com os vizinhos diretos e cruzados do volume elementar P . c) Plano superior com os vizinhos do volume elementar T	47
Figura 4.5	– Todos os vizinhos do volume elementar P	48
Figura 4.6	– Vizinhos diretos e cruzados do volume elementar P	48
Figura 4.7	– Escoamento na face e , no sentido do volume P para E	50
Figura 4.8	– Comprimento das métricas para um volume elementar no plano $\eta\xi$	52
Figura 4.9	– Fluxograma do processo iterativo para a metodologia totalmente implícita	61
Figura 5.1	– Corte transversal do reservatório mostrando o poço vertical, Cunha (1996)	71
Figura 5.2	– Escoamento radial para um poço	71
Figura 5.3	– Distância do centro do volume elementar P para os seus vizinhos ..	72
Figura 5.4	– Exemplo de um poço perfurado em três volumes elementares	74
Figura 6.1	– Distâncias empregadas no processo de inicialização	77
Figura 7.1	– Topo da malha $5 \times 5 \times 3$ cartesiana para o reservatório areal retangular	83
Figura 7.2	– Perspectiva do reservatório areal retangular	83
Figura 7.3	– Posicionamento do poço injetor	84
Figura 7.4	– Posicionamento do poço produtor	84
Figura 7.5	– Curvas de corte de água obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha $5 \times 5 \times 3$ cartesiana	85

Figura 7.6	– Curvas de vazão de água e de óleo obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 5x5x3 cartesiana	86
Figura 7.7	– Curvas de pressão no bloco produtor obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 5x5x3 cartesiana	86
Figura 7.8	– Topo do reservatório areal com malha 16x16x3 generalizada	87
Figura 7.9	– Curvas de corte de água obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada	88
Figura 7.10	– Curvas de vazão de água e de óleo obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada	88
Figura 7.11	– Curvas de pressão no bloco produtor obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada	89
Figura 7.12	– Curvas de corte de água obtidas com o SIM3D, com e sem termos cruzados, e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada	90
Figura 7.13	– Perspectiva do reservatório para um quarto de <i>five-spot</i>	92
Figura 7.14	– Vista superior para um quarto de <i>five-spot</i>	92
Figura 7.15	– Volumes com permeabilidade vertical distintas	93
Figura 7.16	– Curvas de VPI x VPOR para o Exemplo 9.2 de Palagi (1992)	95
Figura 7.17	– Vista superior para a malha 5x5x5 com refino próximo do poço produtor de 10x10	96
Figura 7.18	– Curvas de VPI x VPOR para as malhas cartesianas igualmente espaçadas para o caso Palagi (1992)	96
Figura 7.19	– Curvas de corte de água para um malha 5x5x3 cartesiana obtidas com processos de inicializações atribuída e calculada	98
Figura 7.20	– Curvas de vazões de água e óleo para um malha 5x5x3 cartesiana obtidas com processos de inicializações atribuída e calculada	99
Figura 7.21	– Curvas de pressão no bloco produtor para um malha 5x5x3 cartesiana obtidas com processos de inicializações atribuída e calculada	99
Figura 7.22	– Curvas de vazões de água e óleo. Malha 5x5x3 cartesiana	100
Figura 7.23	– Curvas de pressão no bloco produtor. Malha 5x5x3 cartesiana	100
Figura 7.24	– Curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo	102
Figura 7.25	– Função de interpolação CDS atrasado com pesos: 0 e 0,5 para uma malha 5x5x3 cartesiana	103
Figura 7.26	– Detalhe da curva do corte de água com diferentes pesos aplicados na função de interpolação CDS atrasado	104
Figura 7.27	– Influência do peso aplicado no CDS atrasado para um escoamento tipo pistão	104
Figura 7.28	– Curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo	105
Figura 7.29	– Função de interpolação CDS atrasado com pesos: 0, 0,5 e 0,8 para uma malha 10x10x3 cartesiana	106
Figura 7.30	– Detalhe da curva do corte de água com diferentes pesos aplicados na função de interpolação CDS atrasado	107
Figura 7.31	– Influência do peso aplicado no CDS atrasado para um escoamento tipo não pistão	107
Figura 7.32	– Escoamento nas três camadas do reservatório areal 5x5x3 (Caso 1)	109

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1	– Dados físicos do reservatório areal retangular (Caso 1)	82
Tabela 7.2	– Condições iniciais obtidas com IMEX e atribuídas ao SIM3D	82
Tabela 7.3	– Permeabilidades relativas da água e do óleo (Caso 1)	83
Tabela 7.4	– Dados do reservatório e propriedades físicas para um quarto de <i>five-spot</i>	91
Tabela 7.5	– Propriedades das camadas para um quarto de <i>five-spot</i>	92
Tabela 7.6	– Permeabilidades relativas da água e do óleo (Caso 3)	93
Tabela 7.7	– Condições iniciais calculadas com o procedimento de inicialização (Palagi, 1992)	94
Tabela 7.8	– Comparação das condições iniciais calculadas pelo IMEX e SIM3D	97
Tabela 7.9	– Dados físicos do reservatório areal retangular (Caso 5).....	103

LISTA DE SÍMBOLOS

A	– matriz jacobiana	
A_{ij}	– área transversal de um volume elementar	$[m^2]$
B^p	– fator volume de formação da fase p	
B^p_{ref}	– fator volume de formação da fase p na pressão de referência	
B^p_{stc}	– fator volume de formação da fase óleo nas condições de superfície	
B^p	– derivada de do volume de formação de p	
c^p	– compressibilidade da fase p	$[Pa^{-1}]$
c_r	– compressibilidade da rocha	$[Pa^{-1}]$
C^w	– corte de água	
d_D	– distância do poço aos centro dos volumes vizinhos a P	$[m]$
D	– medida do topo para o fundo do reservatório	$[m]$
D_{cow}	– profundidade do contato óleo e água	$[m]$
F	– vetor resíduo	
F^p_P	– resíduo do da fase p para um volume P	
F_i	– fator que guarda as informações da malha	
L_n	– comprimento das métricas	$[m]$
G^p_i	– termo geométrico	
g	– aceleração da gravidade	$[m.s^{-2}]$
h	– altura do poço ou profundidade do reservatório	$[m]$
h_{ij}	– distância	$[m]$
J	– jacobiano da transformação de coordenadas	
k	– número de camadas do poço	
k	– tensor permeabilidade absoluta	$[m^2]$
k^p	– permeabilidade relativa da fase p	$[m^2]$
k_i, k_j	– permeabilidade vertical	$[m^2]$
k_{ij}	– permeabilidade entre os volume i e j	$[m^2]$
M	– razão entre as viscosidades do óleo e da água	
\dot{m}^p	– fluxo mássico da fase p	$[kg.m^{-3}]$
\tilde{m}^p	– fluxo mássico por unidade de volume do reservatório	$[kg.s^{-1}.m^{-3}]$
N	– número de camadas de um poço	
n_c	– número de componentes	
P^p	– pressão da fase p	$[Pa]$
P^{p*}	– pressão da fase contínua da fase p	$[Pa]$
P^p_P	– pressão da fase no volume elementar P	$[Pa]$
P_P	– pressão do bloco em que o poço está	$[Pa]$
P_c	– pressão capilar	$[Pa]$
P^*_c	– pressão capilar da fase contínua	$[Pa]$
P^{corr}_c	– pressão capilar correção	$[Pa]$
P_{cow}	– pressão capilar do contato óleo e água	$[Pa]$
P_{cog}	– pressão do contato óleo e gás	$[Pa]$
P^{wf}	– pressão do fundo do poço	$[Pa]$
q^p	– vazão volumétrica da fase p nas condições de reservatório por unidade de volume do reservatório	$[m^3.s^{-1}.m^{-3}]$
q^p_i	– vazão em cada camada do poço	$[m^3.s^{-1}]$

Q_{stc}^T	– vazão de líquido prescrita nas condições de superfície	$[m^3.s^{-1}]$
Q_{total}^w	– vazão de total de água no poço injetor	$[m^3.s^{-1}]$
R^{cp}	– solubilidade do componente c na fase p	
\hat{R}^p	– termos convectivos	
\mathbf{r}	– resistividade	
r	– raio medido do centro do poço a um volume vizinho ao poço	$[m]$
r^w	– raio do poço	$[m]$
r^o	– raio equivalente do poço	$[m]$
S_r^o	– saturação do óleo residual	
S^p	– saturação da fase p	
T_{ij}	– transmissibilidade entre os blocos	
TOL_P	– tolerância imposta a P	
TOL_Z	– tolerância imposta a Z	
t	– tempo	$[s]$
V_R	– volume do reservatório	
V_I	– volume de uma camada do poço	$[m^3]$
V_{TP}	– volume total dos volumes elementares que formam o poço	$[m^3]$
V^p	– volume da fase p nas condições de P e T de reservatório	$[m^3]$
V^{cp}	– volume do componente c que é liberado da fase p nas condições padrões	$[m^3]$
V^{pp}	– volume do componente p na fase p nas condições padrões	$[m^3]$
WI	– índice do poço	
x	– coordenada cartesiana	
X	– vetor incógnita de P^o ou Z^o	
X^{cp}	– fração mássica do componente c na fase p	
y	– Coordenada cartesiana	
Y	– fração de volume para a camada k	
Z^c	– fração mássica global do componente c	
Z^{cp}	– fração mássica do componente c na fase p	
z	– coordenada cartesiana	$[m]$
z_i	– cota do centro do volume da primeira camada do poço	$[m]$
z_p	– cota do centro do volume para as várias camadas do poço	$[m]$
\vec{u}^p	– velocidade da fase p	$[m.s^{-1}]$
u_i	– Velocidade na interface de um volume elementar P	$[m.s^{-1}]$

Gregos

ϕ	– porosidade do meio	
ϕ_{ref}	– porosidade de referência	
β	– termo usado no cálculo do raio equivalente	
$\Delta\xi$	– dimensão do volume de controle na ξ	
$\Delta\eta$	– dimensão do volume de controle na η	
$\Delta\gamma$	– dimensão do volume de controle na γ	
Δt	– passo de tempo	$[s]$
ρ^p	– massa específica da fase p	$[kg.m^{-3}]$

ρ^m	– densidade da mistura	[kg.m ⁻³]
ρ^c_{STC}	– densidade do componente c nas condições de superfície	[kg.m ⁻³]
ρ^p_{STC}	– densidade da fase p nas condições de superfície	[kg.m ⁻³]
$\bar{\rho}$	– densidade média dos volumes no quais o poço é completado	[kg.m ⁻³]
λ^L	– mobilidade total de líquido	
λ^p	– mobilidade da fase p	
Φ^p	– potencial da fase	
μ^p	– viscosidade da fase	[Pa.s]
ξ	– coordenada no plano transformado	
η	– coordenada no plano transformado	
γ	– coordenada no plano transformado	
γ^p	– gradiente da fase p	[Pa.m ⁻¹]
Γ^p	– termo fonte	
φ	– peso entre os esquemas CDS e UDS	
θ	– medida de implicitude	
Ω	– parâmetro que será avaliado numericamente	

Sobrescritos

g	– gás
i	– indicação de interfaces de um volume ou volume elementar
j	– indicação de interfaces de um volume ou volume elementar
k	– nível iterativo do ciclo de Newton
o	– óleo
p	– fase
w	– água

Subscritos

e, w, n, s, t, b	– interfaces do volume elementar P
$E, W, N, S, T,$ $B, NE, NW,$ $SE, SW, TE,$ $TW, TN, TS,$ $BE, BW, BN,$	
BS	– pontos centrais dos volumes vizinhos ao volume P
CZ	– termos cruzados
CZD	– termos diretos nos cruzados
c	– componente
D	– termos diretos do volume P
NB	– vizinhos do volume P
np	– número de fases
STC	– condições de superfície
wf	– fundo do poço

SUMÁRIO

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
LISTAS DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	x
SUMÁRIO	xiii
1 INTRODUÇÃO	15
2 REVISÃO DA LITERATURA	22
2.1 Modelo matemático	22
2.2 Geometria da malha e discretização do domínio	22
2.3 Soluções das equações	23
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	25
3.1 Modelo composicional	25
3.2 Modelo <i>black-oil</i>	30
3.3 Modelo <i>black-oil</i> generalizado	31
3.4 Modelo <i>black-oil</i> padrão	34
3.5 Modelo <i>black-oil</i> padrão baseado em frações mássicas	36
3.6 Modelo <i>black-oil</i> simplificado para os componentes óleo e água	37
3.7 Rotina “ <i>pseudo-flash</i> ” para o modelo <i>black-oil</i> simplificado	39
4 SOLUÇÃO NUMÉRICA	43
4.1 Transformação das equações para o plano computacional	43
4.2 Integração das equações diferenciais no plano transformado	46
4.3 Função de interpolação	49
4.4 Função de interpolação <i>upwind</i> (UDS)	50
4.5 Cálculo da direção do escoamento	51
4.6 Função de interpolação CDS	51
4.7 Função de interpolação CDS atrasado	53
4.8 Derivadas dos potenciais nas faces de um volume elementar	54
4.9 Metodologia totalmente implícita: linearização das equações	56
4.10 Derivadas dos resíduos	60
4.11 Derivadas numéricas	66
4.12 Solução do sistema linear	67
4.13 Critérios de convergência para o método de Newton	67
4.14 Controle do passo de tempo	68
5 MODELO DE POÇO	70
5.1 Modelo de poço em malha generalizada	70
5.2 Condição de contorno para os poços	73
5.3 Condições de contorno baseadas nas mobilidades	75
6 INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS	76
6.1 Condições de equilíbrio	76
6.2 Análise das fases	78
6.3 Determinação da saturação da água inicial	79

6.4 Determinação da pressão do óleo inicial	80
7 RESULTADOS E DISCUSSÕES	81
7.1 Comparação do SIM3D com o IMEX	81
7.2 Processo de inicialização dos campos de saturação da água e potencial do óleo ..	90
7.3 Função de interpolação CDS atrasado	101
7.4 Visualização do escoamento da água injetada	108
8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	110
8.1 Conclusões	110
8.2 Sugestões para os futuros trabalhos	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112

1 INTRODUÇÃO

Com a simulação de reservatórios de petróleo busca-se o entendimento do escoamento dos fluidos no reservatório com a finalidade de melhorar a recuperação de hidrocarbonetos e também prever a performance dos poços de petróleo.

Um reservatório de petróleo está localizado no subsolo, posicionado a centenas de metros abaixo da superfície. Possui uma forma irregular, geralmente, com pequena espessura e grande extensão. No interior dele existem, em geral, três fases: óleo, água e gás, e diversos componentes hidrocarbonetos presentes nas fases óleo e gás, conforme mostrado na Figura 1.1. Estes estão armazenados nos microporos das rochas sedimentares, Figura 1.2-a. O escoamento multifásico e multicomponente ocorre através dos poros conectados da rocha, Figura 1.2-b.

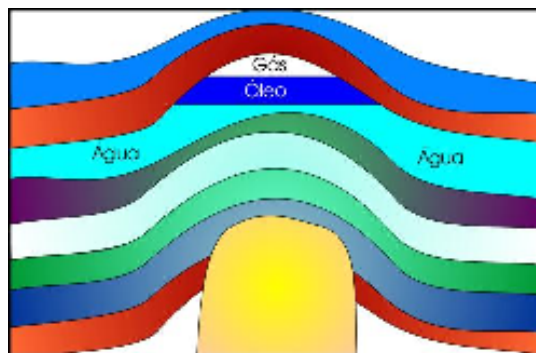


Figura 1.1 – Reservatório de petróleo

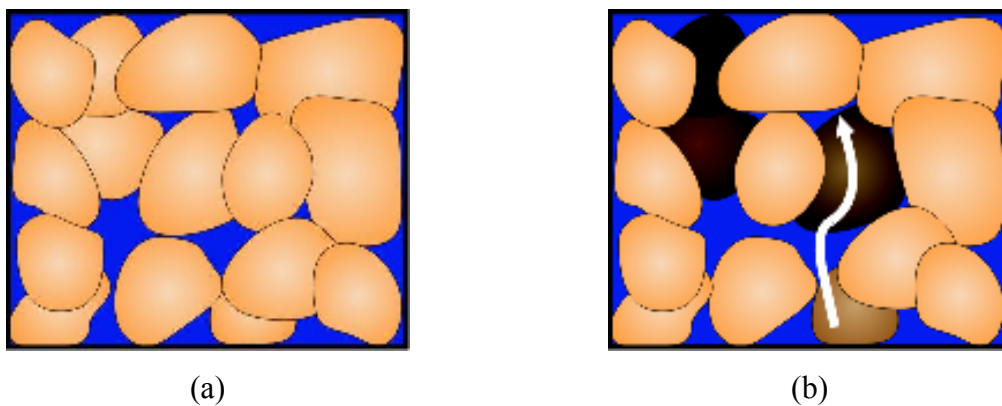


Figura 1.2 – a) Microporos na rocha. b) Microporos conectados

O escoamento através da rocha só ocorre devido às grandes diferenças de pressão, sob forte influência de propriedades como porosidade, compressibilidade, condutibilidade térmica, calor específico, densidade, permeabilidade absoluta, pressão capilar etc. Essas propriedades são obtidas por amostragem nos reservatórios através dos poços exploratórios, sendo, desta forma, suscetíveis de grandes incertezas, dificultando assim a avaliação da representatividade desses dados.

O processo de exploração de petróleo se dá através de três métodos de recuperação: primário, secundário e terciário. O método primário de recuperação é caracterizado pelo fato da extração ocorrer devido ao estado inicial de pressão existente no interior do reservatório. Este método é aplicado por um curto período, podendo deixar de 70 a 80% do óleo disponível no reservatório, Ewing (1983).

O método secundário de recuperação é caracterizado pela injeção de um fluido, água ou gás, para o interior do reservatório através dos poços de injeção, elevando assim a pressão interna. Com isso, obtém-se a movimentação dos hidrocarbonetos em direção aos poços produtores. Com esse processo mais de 50% do óleo disponível ainda permanece no reservatório, Ewing (1983). Como o óleo presente no reservatório apresenta uma viscosidade elevada, quando comparado com a viscosidade da água ou do gás injetado, pode ocorrer a formação dos chamados “dedos”. Conforme relatado por Ewing (1983), Yanosik e McCracken (1978) e Mota (1994). Esses “dedos” são causados fundamentalmente pela diferença de mobilidade entre as fases do fluido injetado e o óleo. O aparecimento desses caminhos preferenciais tem como consequência o aparecimento prematuro de água nos poços de produção, significando uma redução na produção de hidrocarbonetos.

Uma evolução dos métodos secundários são os chamados métodos químicos. Esses métodos consistem na adição de substâncias químicas na água injetada, como por exemplo polímeros, aumentando assim a viscosidade desta e, com isso, reduzindo a razão de mobilidade entre a água e o óleo. Essa redução da mobilidade faz com que ocorra a redução na formação dos “dedos”. Soluções alcalinas podem também ser adicionadas com o objetivo de reduzir a tensão interfacial entre a água e o óleo. Detergentes podem ser adicionados com a finalidade de se obter a redução da tensão superficial e permitir o escoamento do óleo pelos microporos. Pode-se ainda fazer uso dos chamados métodos miscíveis que consistem, por exemplo, na injeção de gás natural, gás carbônico ou nitrogênio.

Os métodos terciários de recuperação, também conhecidos como métodos especiais de recuperação (MER), são aqueles que envolvem processos químicos ou térmicos, sendo estes últimos os mais difundidos. Os processos térmicos mais conhecidos são: injeção de água quente ou vapor d'água, combustão *in situ* e a passagem de corrente elétrica. O objetivo desses processos é reduzir a viscosidade do óleo e, com isso, aumentar a mobilidade, diminuindo a formação dos caminhos preferenciais. A combustão *in situ* é utilizada em reservatórios que contêm hidrocarbonetos na forma de carvão, piche ou óleo pastoso. Esse método consiste na combustão parcial *in situ* do óleo através da injeção de ar com pré-ignição. Com esse processo, os hidrocarbonetos são levados para um estado no qual possam ser recuperados através dos poços produtores. Nestes métodos de recuperação, aproximadamente, 70% do óleo presente no reservatório fica retido no interior da rocha, Ewing (1983). A introdução de espuma e bactérias também são utilizados nos métodos de recuperação terciários.

Uma ferramenta imprescindível para o engenheiro de produção de petróleo, nos métodos de recuperação secundária e terciária, são os simuladores de reservatório de petróleo. Um exemplo do uso destes simuladores é a estimativa da produção futura de uma nova bacia a partir de dados geológicos iniciais. Os simuladores também são utilizados para o gerenciamento diário de reservatórios em produção.

Vários simuladores comerciais, voltados para a simulação de processos de recuperação de petróleo, estão disponíveis, dentre os quais podem ser citados: o *Advanced Oil-Gás Reservoir Simulator* (IMEX - *IMplicit EXplicit Black Oil Simulator*) e o *Advanced Process and Thermal Reservoir Simulator* (STARS), ambos desenvolvidos pela *Computer Modelling Grupo Ltd* (CMG); ECLIPSE da *Schlumberger Technology Corporation*; o *Petroleum Reservoir Simulation Software* (SURE) da *Simulation Software Technology GmbH* (SST)). Cada um destes softwares apresenta aplicabilidades específicas, seja para um dado tipo de fluido, malhas e condições de armazenamento no reservatório. Estes softwares são utilizados por diversas companhias de petróleo para o tratamento de diferentes tipos de reservatórios, porém, apresentam uma certa limitação quando os reservatórios apresentam falhas geológicas e fraturas, logo, estas merecem ser melhor estudadas. Outra questão importante a ser destacada com relação a estes é o alto custo de sua utilização tanto para o meio acadêmico como para a indústria. O software que possui o menor valor de uma licença acadêmica anual custa em torno de 5 mil dólares (US\$ 5.000,00) (CMG).

Para que se faça a simulação numérica de um determinado problema físico é preciso que se defina um conjunto de equações que o represente. Vários fatores influenciam na definição do modelo, como por exemplo: os tipos de hidrocarbonetos presentes no reservatório, as propriedades do reservatório e as leis básicas de escoamento de fluido. Se no reservatório estiverem presentes hidrocarbonetos com alta volatilidade, modelos de múltiplos componentes e multifases serão necessários. Caso os hidrocarbonetos presentes no reservatório possuam baixa volatilidade, pode ser utilizado o modelo *black-oil* simplificado, que consiste em um modelo de dois componentes, óleo e água, e duas fases, óleo e água, onde é admitido que não há transferência de massa entre as fases. A conservação da massa, equação de Darcy e as equações de estado, governam o escoamento dos fluidos no interior do reservatório. Por fim, para completar o modelo, condições iniciais e de contorno devem ser definidas para que se tenha o fechamento do problema.

Independentemente do método de recuperação, o sistema de equações diferenciais obtido, em geral, não pode ser resolvido analiticamente devido às não-linearidades envolvidas. Portanto, o conjunto de equações do modelo é resolvido numericamente substituindo as equações diferenciais por equações aproximadas. Para a solução numérica, o reservatório é dividido em diversas partes (volumes ou elementos), nos quais as equações de balanço serão aplicadas em intervalos de tempo discretos. Da discretização das equações governantes obtém-se um sistema de equações não-lineares, que devem ser linearizadas antes da obtenção da solução final do problema. A exatidão da solução do sistema de equações vai depender da forma como o reservatório foi discretizado e de como cada equação é formulada.

Para a discretização do reservatório, a maioria dos pacotes comerciais utiliza malhas cartesianas. Essas malhas são mais utilizadas devido à simplicidade de construção, facilidade na aplicação dos balanços e solução dos sistemas lineares resultantes. Contudo, as malhas cartesianas apresentam dificuldades em modelar reservatórios com geometrias complexas, bem como, com falhas geológicas. As malhas cartesianas podem apresentar diversos tipos de configurações, como por exemplo, as malhas ortogonais com altura dos blocos constantes, Figura 1.3-a, ou malhas ortogonais com alturas dos blocos variados, Figura 1.3-b. Esta última representação tem a finalidade de buscar uma melhor discretização do reservatório com geometria mais complexa. Coordenadas generalizadas permitem uma melhor representação do reservatório e de falhas geológicas, ver Figura 1.4. Estes tipos de malhas são denominadas de malhas estruturadas. Outros tipos de malhas podem ser utilizados,

como as malhas radiais e malhas não-estruturadas, conforme pode ser visto nas Figuras. 1.5-a e 1.5-b.

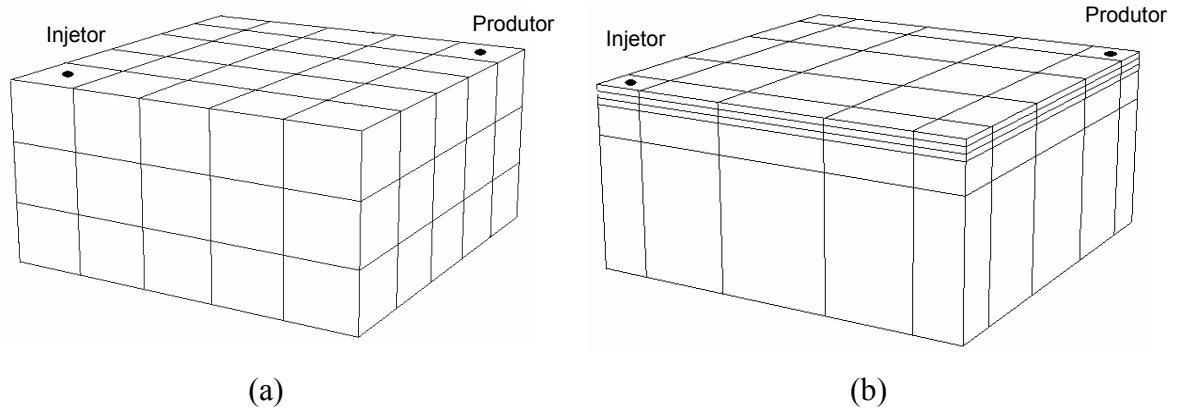


Figura 1.3 – a) Malhas ortogonais com alturas constantes. b) Malhas ortogonais com alturas variadas

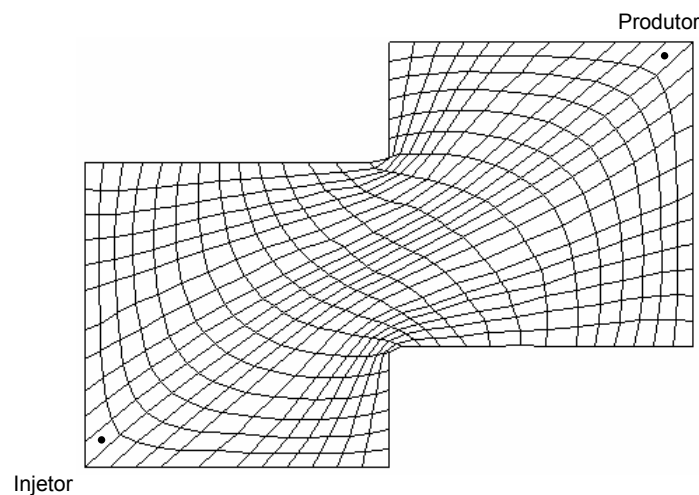


Figura 1.4 – Exemplo de malha generalizada

Para avaliar os parâmetros físicos nas interfaces dos volumes de controles serão utilizados esquemas de primeira ordem, como o UDS (*Upstream Differencing Scheme*) e esquema de ordem superior como o CDS (*Central Difference Scheme*) com correção atrasada.

O modelo matemático que prevê o escoamento de múltiplos componentes em múltiplas fases no meio poroso é o modelo composicional, Peaceman (1977). Todos os modelos simplificados podem ser obtidos deste modelo. Um modelo bastante empregado para modelagem de componentes poucos voláteis é o modelo *black-oil* generalizado. Este modelo prevê a existência de três componentes (óleo, água e gás) e de três fases (óleo, água e

gás), onde o componente gás pode estar miscível na fase óleo. Neste modelo não é considerada a miscibilidade dos componentes óleo e água nas suas respectivas fases. O modelo *black-oil* pode estar baseado em uma formulação volumétrica (formulação em termos de saturações) ou em uma formulação mássica (formulação em termos de frações mássicas).

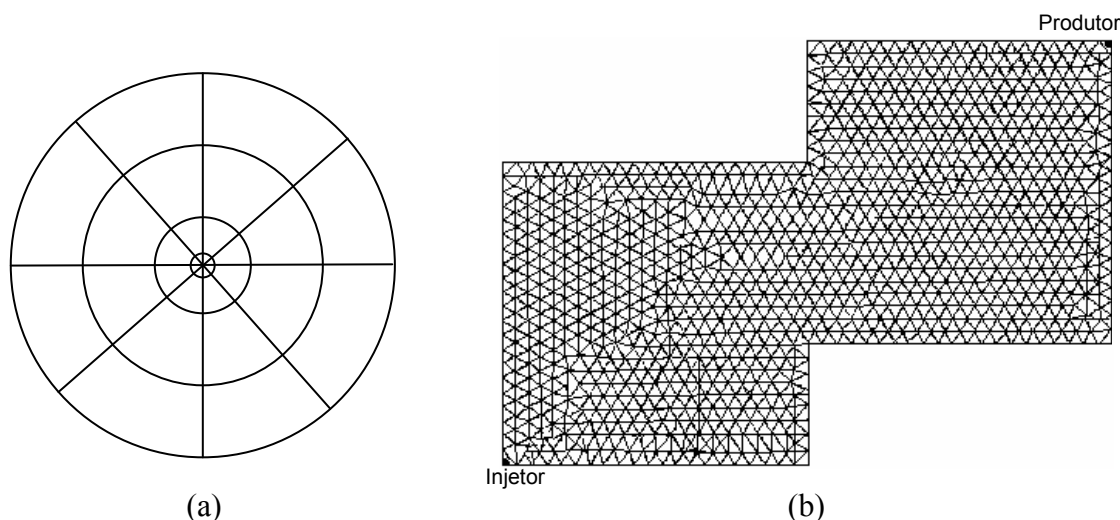


Figura 1.5 – a) Exemplo de malha radial. b) Exemplo de malhas não-estruturadas

Através do emprego de uma ferramenta numérica (volumes finitos, elementos finitos etc) são obtidas equações aproximadas as quais devem ser linearizadas. Para a linearização do conjunto de equação algébricas, pode-se fazer uso de duas metodologias: IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) e o TI (Totalmente Implícito). No método IMPES as mobilidades são avaliadas com o valor das variáveis do intervalo de tempo anterior, obtendo-se uma equação implícita para pressão. No método TI, as mobilidades são avaliadas no instante de tempo atual, requerendo que ambas pressões e saturações sejam avaliadas simultaneamente. O custo computacional por passo de tempo do método IMPES é menor, visto que, somente a pressão faz parte do sistema linear. No entanto, devido a natureza explícita do cálculo da saturação o passo de tempo por iteração é limitado por razões de instabilidades numéricas, Peaceman (1977). Por sua vez, a formulação TI apresenta um custo computacional, por passo de tempo, superior a formulação IMPES, mas consegue trabalhar com elevados passos de tempo, permitindo a obtenção mais rápida da solução.

No presente trabalho o modelo *black-oil* simplificado para dois componentes (óleo e água) será utilizado, para se obter as equações do balanço de massa para esses componentes, usando a formulação em fração mássica. Uma discretização tridimensional usando coordenadas generalizadas será utilizada para representar o domínio em estudo. O

sistema de equações obtido será resolvido aplicando-se a metodologia totalmente implícita, utilizando o Método de Newton para a linearização das equações.

Simular um reservatório de petróleo é uma tarefa árdua, em que é preciso reunir conhecimentos de diversas áreas, ordená-los e agrupá-los em um código computacional, com o objetivo de obter resultados os mais próximos possíveis dos dados experimentais.

O restante do presente trabalho será organizado na ordem mostrada a seguir. No Capítulo 2, os trabalhos mais relevantes com relação ao conteúdo dessa dissertação serão apresentados. No Capítulo 3, serão apresentados os modelos composicional e o modelo simplificado para dois componentes (óleo e água). Será mostrada a formulação em fração mássica para ambos os modelos, como também, as equações de restrição, as equações para as pressões capilares e, por fim, as equações necessárias para o fechamento do sistema de equações. No Capítulo 4, apresentam-se as equações diferenciais do modelo simplificado para o escoamento óleo e água, empregando coordenadas generalizadas. As equações resultantes serão discretizadas empregando o método dos volumes finitos e uma metodologia totalmente implícita. Apresentam-se as funções de interpolação UDS (*Upstream differencing Scheme*) e CDS (*Central Differencing Scheme*) com correção atrasada. No Capítulo 5, apresenta-se o modelo de poço, bem como, as condições de contorno empregadas na simulação. No Capítulo 6, descreve-se o processo de inicialização das variáveis descrito em Palagi (1992). No Capítulo 7, faz-se a validação do modelo, comparando os seus resultados obtidos com o Simulador Acadêmico 3D (SIM3D), com os resultados obtidos com o IMEX. Apresenta-se também um estudo da função de interpolação CDS atrasado. No Capítulo 8, as conclusões sobre este trabalho são apresentadas e, por último, são apresentadas sugestões para futuros trabalhos.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, os trabalhos mais relevantes com relação ao conteúdo dessa dissertação serão apresentados. Qualquer aspecto que mereça um melhor entendimento será apresentado no capítulo onde o referido tópico for estudado.

2.1 Modelo matemático

A escolha do modelo matemático, que analise de forma apropriada o reservatório de petróleo, dependerá do tipo de hidrocarboneto presente no reservatório. O modelo *black-oil* é empregado para óleos pesados e que possuem baixa volatilidade. Para este modelo, se as equações tomarem a pressão e a saturação como variáveis primárias, tem-se a chamada formulação em saturação. Este tipo de formulação apresenta problemas para lidar com aparecimento e desaparecimento da fase gás. Por exemplo, para reservatórios sobresaturados (pressão no reservatório superior a pressão de bolha), existem apenas as fases óleo e água presentes no reservatório. No entanto, durante a fase de recuperação, quando a pressão atinge a pressão do ponto de bolha, surgem as primeiras bolhas de gás, sendo portanto, a saturação do gás diferente de zero, nesta região. A formulação do modelo *black-oil* em termos de formulação em frações mássicas, conforme proposta por Prais e Campagnolo (1991), consegue lidar com o surgimento e desaparecimento da fase gás.

2.2 Geometria da malha e discretização do domínio

As malhas cartesianas têm sido usadas em simulação de reservatório de petróleo devido à facilidade na construção e realização dos balanços dos componentes e dos sistemas lineares em questão (Brand *et al.*, 1991; Yanosik e McCracken, 1978; Rubin e Blunt, 1991; Pinto, 1991). Uma grande dificuldade no uso de malhas cartesianas é a dificuldade de representar dados geológicos importantes dos reservatórios como fronteiras irregulares e falhas geológicas. Para melhorar a representação do reservatório, foram utilizadas por Hirasaki e O'Dell (1970), Fleming (1987), Sharpe e Anderson (1991), Sharpe (1993), coordenadas curvilíneas ortogonais. Este tipo de malha, embora sendo mais flexível do que as malhas cartesianas, apresentam algumas limitações. A primeira, e talvez a mais restritiva, seja a geração da mesma levando em conta as diversas heterogeneidades do reservatório, tais como falhas geológicas e campo de permeabilidades absolutas heterogêneo. Maliska et al.

(1994), Cunha et al. (1994), Mota (1994), Mota e Maliska (1994) utilizaram coordenadas curvilíneas não-ortogonais, com a finalidade de eliminar a restrição da ortogonalidade das linhas. Com o intuito de melhor representar o reservatório, malhas formadas por volumes de controle triangulares, foram utilizadas no final década de 70 e início da década de 80 por Baliga e Patankar (1980), sendo esta metodologia denominada de *Control Volume Finite Element Method* – CVFEM (Baliga e Patankar, 1988). Schneider e Ray (1987) propuseram uma malha formada por quadriláteros (*Finite Element Differential Scheme* – FIELDS), obtendo volume de controle semelhante ao proposto por Baliga e Patankar (1980). Outra malha composta por elementos triangulares são as malhas de Voronoi, que se destacam pela sua versatilidade de discretização e baixa complexidade computacional, isso quando comparado com outros métodos que utilização malhas não-estruturadas (Taniguchi e Kobayashi, 1991; Palagi, 1992; Marcondes, 1996; Maliska e Vasconcellos, 2000). As malhas não-estruturadas continuam se desenvolvendo até hoje, devido à necessidade de discretização de domínios cada vez mais irregulares. Maliska (2004) propôs o uso de uma metodologia de volumes finitos que emprega o conceito de elementos e as funções de forma tipicamente usadas no método dos elementos finitos (MEF), ou seja, é o método dos volumes finitos baseado em elementos (*Element-based Finite Volume Method* – EbFVM). Cardoso (2004) aplica o método EbFVM em problemas de simulação de reservatório de petróleo. Cardoso (2004) faz uma comparação entre os resultados obtidos pelo método dos volumes finitos baseado em elemento (*Control Volume Finite Element Method - CVFEM*), adotando duas formulações: a primeira formulada de acordo com a literatura de simulação de reservatório de petróleo (CVFEM-S) e a segunda, formulada de acordo com a mecânica de fluidos e transferência de calor (CVFEM-M).

2.3 Soluções das equações

Peaceman (1977), afirma que as equações da conservação dos componentes óleo e água podem ser consideradas hiperbólicas para a saturação e elíptica para a pressão. Com isso, os fluxos de massa dos termos que dependem da saturação podem ser avaliados, num determinado instante de tempo, com a saturação do instante de tempo anterior e os termos que dependem da pressão podem ser avaliados no instante de tempo mais atual. Destas possibilidades, surgiu o método IMPES – *Implicit Pressure Explicit Saturation*. Essas condições ao serem aplicadas acarretam o desacoplamento da pressão na equação da saturação. Isto se deve ao fato da pressão depender da saturação do instante de tempo anterior.

Neste método, uma equação para a pressão é obtida a partir das equações de fluxos, sendo então resolvida implicitamente. Com o conhecimento da pressão, o campo de saturação é calculado explicitamente.

Devido à limitação do passo de tempo do método IMPES, Blair e Weinaug (1969) propuseram um método totalmente implícito - TI. Neste método, pressão e saturação são avaliados em um instante de tempo mais atual. Coast et al. (1974) implementaram, pela primeira vez, o método totalmente implícito para o modelo *black-oil*. Marcondes et al. (1996) faz uma comparação entre as metodologias IMPES, TI e AIM (*Adaptative Implicit Method*), mostrando que o método IMPES possui uma implementação mais simples e exigindo um esforço computacional menor do que o TI, pois apenas uma incógnita é calculada implicitamente. Porém, passos de tempo elevados causam instabilidades nas soluções, limitando o máximo passo de tempo possível de ser empregado e aumentando o número de iterações para se obter a solução transiente do problema. A metodologia TI apresenta um esforço computacional maior por passo de tempo, devido ao fato de todas as incógnitas fazerem parte do sistema de equações. Porém, pode-se utilizar intervalos de tempo maiores sem o aparecimento de instabilidades, o que termina resultando em tempos menores para a obtenção de soluções transientes.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, serão apresentados os modelos composicional e o modelo *black-oil* simplificado para dois componentes (óleo e água) que será utilizado no presente trabalho. Será mostrada a formulação em fração mássica para ambos os modelos, como também, as equações de restrições, as equações para as pressões capilares e, por fim, as equações necessárias para o fechamento do sistema de equações.

3.1 Modelo composicional

Neste modelo, o escoamento no meio poroso ocorre com n_p fases: óleo, água e gás. Cada fase é composta por n_c componentes. As fases óleo e gás podem conter hidrocarbonetos e componente aquoso. Uma vez que existe transferência de massa, principalmente, entre as fases óleo e gás, não existe conservação de massa em termos de fase e sim em termos de componentes. Devendo-se, portanto, escrever as leis de conservação de massa para cada componente. A Figura 3.1 mostra um desenho esquemático desse modelo.

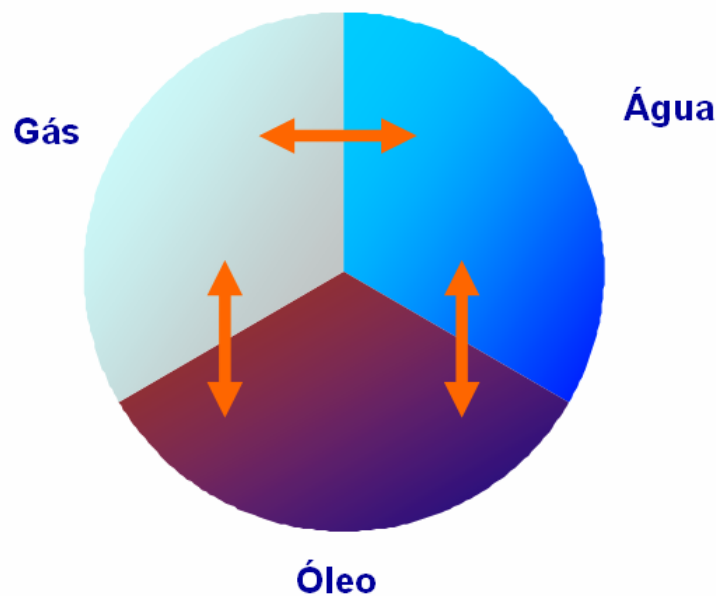


Figura 3.1 – Modelo composicional

Segundo Cunha (1996), a conservação de massa de cada componente c pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\sum_{np} X^{cp} \rho^p S^p \right) \right] = -\nabla \cdot \left[\sum_{np} X^{cp} \rho^p \vec{u}^p \right] - \sum_{np} X^{cp} \tilde{m}^p, \quad (3.1)$$

onde ϕ é a porosidade que representa a fração de volume disponível para o escoamento das fases, sendo geralmente função da pressão do meio poroso; ρ^p é a densidade da fase p ; S^p é a saturação da fase p que representa a fração do volume poroso ocupado; X^{cp} é a fração mássica do componente c presente na fase p e \tilde{m}^p é o produto de ρ^p pela vazão volumétrica da fase p (q^p) nas condições de reservatório por unidade de volume do reservatório. De acordo com o sinal da Eq. (3.1), q^p será negativo para os poços injetores e positivo para os poços produtores. Da esquerda para a direita, os três termos da Eq. (3.1) significam a variação de massa pontual (termos de acumulação), a advecção e o termo fonte.

A Eq. (3.1) está formulada em termo da saturação da fase p . Para reescreve-la em termo da fração mássica da fase p , deve-se colocar o termo de acumulação em função da fração mássica. Na Eq. (3.2) termos destacado o termo de acumulação.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\sum_{np} X^{cp} \rho^p S^p \right) \right] \quad (3.2)$$

Sabe-se que a saturação da fase p (S^p) é a razão entre o volume da fase p (V^p) e o volume do meio poroso (V_ϕ):

$$S^p = \frac{V^p}{V_\phi}. \quad (3.3)$$

A densidade da fase p (ρ^p) é dada pela razão entre a massa da fase p (M^p) e o volume da fase p (V^p):

$$\rho^p = \frac{M^p}{V^p}. \quad (3.4)$$

A fração mássica do componente c na fase p é definida como a razão entra a massa do componente c presente na fase p (M^{cp}) pela massa total da fase p (M^p):

$$X^{cp} = \frac{M^{cp}}{M^p} . \quad (3.5)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.3), (3.4) e (3.5) na Eq. (3.2) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\sum_{np} \frac{M^{cp}}{M^p} \frac{M^p}{V^p} \frac{V^p}{V_\phi} \right) \right] , \quad (3.6)$$

simplificando a Eq. (3.6) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi}{V_\phi} \left(\sum_{np} M^{cp} \right) \right] . \quad (3.7)$$

O somatório da massa do componente c em todas as fases é igual à massa total do componente c , logo, a Eq. (3.7) tomará a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi}{V_\phi} M^c \right] . \quad (3.8)$$

Sabe-se que a fração mássica do componente c (Z^c) é dada pela razão entre a massa do componente c (M^c) e a massa total (M), assim, M^c será:

$$Z^c = \frac{M^c}{M} \Rightarrow M^c = Z^c M . \quad (3.9)$$

Substituindo-se a Eq. (3.9) na Eq. (3.8) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{M}{V_\phi} Z^c \right] . \quad (3.10)$$

A densidade da mistura (ρ^m) é dada pela razão entre a massa total (M) e o volume total, que corresponde ao volume poroso (V_ϕ):

$$\rho^m = \frac{M}{V_\phi} . \quad (3.11)$$

Substituindo-se a Eq. (3.11) na Eq. (3.10) o termo de acumulação tomará a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^c] . \quad (3.12)$$

Substituindo o termo de acumulação da Eq. (3.1) pelo termo de acumulação da Eq. (3.12), obtém-se a equação da conservação de massa do componente c para uma formulação em fração mássica:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^c] = -\nabla \cdot \left[\sum_{np} X^{cp} \rho^p \vec{u}^p \right] - \sum_{np} X^{cp} \tilde{m}^p . \quad (3.13)$$

Como o escoamento em meio poroso ocorre em baixa velocidade, a velocidade da fase p , \vec{u}^p , é dada pela Lei de Darcy:

$$\vec{u}^p = -\lambda^p [\nabla \Phi^p] , \quad (3.14)$$

onde λ^p é a mobilidade da fase p e o Φ^p é o potencial da fase. A mobilidade da fase apresenta-se como uma “constante” de proporcionalidade entre a velocidade da fase \vec{u}^p e o potencial da fase. A mobilidade é dada por:

$$\lambda^p = \frac{\mathbf{k} k^{rp}}{\mu^p} , \quad (3.15)$$

onde \mathbf{k} é o tensor permeabilidade absoluta; k^{rp} é a permeabilidade relativa da fase p e μ^p é a viscosidade da fase p . O potencial da fase p é dado por:

$$\Phi^p = P^p + \rho^p g z , \quad (3.16)$$

onde P^p é a pressão da fase; g é a aceleração da gravidade e z é a coordenada vertical, sendo positivo da base para o topo do reservatório.

A permeabilidade é uma propriedade do meio, sendo assim, as características do meio (porosidade, tamanho, distribuição, forma e arranjo das partículas) e as propriedades do fluido (viscosidade e peso específico) influenciam diretamente nessa propriedade. A permeabilidade relativa é a relação entre a permeabilidade efetiva de um fluido, numa determinada fase do escoamento, e a permeabilidade intrínseca do meio poroso. A permeabilidade efetiva consiste na permeabilidade de um meio poroso a um fluido que ocupa apenas parte do espaço poroso, estando o resto ocupado por outros fluidos. A permeabilidade intrínseca do meio poroso é a permeabilidade do meio independente do fluido que está ocupando os espaços vazios. Essa propriedade depende apenas do material poroso, da granulometria e a disposição estrutural. A permeabilidade da fase é dada por:

$$k^p = \mathbf{k}k^{rp} \quad (3.17)$$

A permeabilidade é uma propriedade tensorial que é função da posição e da pressão no meio. Para um meio anisotrópico, ou seja, um meio no qual as propriedades físicas e químicas variam com a direção, o tensor permeabilidade absoluta é dado por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

onde k_{xx} , k_{xy} e etc, são as permeabilidades nas diferentes direções.

O modelo em questão considera o reservatório como um meio homogêneo e isotrópico. Um meio homogêneo é aquele no qual as propriedades físicas ou químicas não variam de um ponto a outro do reservatório. Um meio isotrópico é aquele em que as propriedades físicas e químicas não variam com a direção. Para um meio isotrópico temos que

$$k_{xy} = k_{xz} = k_{yx} = k_{yz} = k_{zx} = k_{zy} = 0 \quad (3.19)$$

e

$$k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k \quad , \quad (3.20)$$

com isso, o tensor permeabilidade absoluta toma a seguinte forma:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} . \quad (3.21)$$

Substituindo a lei de Darcy, Eq. (3.14), na Eq. (3.13), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^c] = \nabla \cdot \left[\sum_{np} X^{cp} \rho^p \lambda^p [\nabla \Phi^p] \right] - \sum_{np} X^{cp} \tilde{m}^p . \quad (3.22)$$

Fazendo $\rho^p \lambda^p$ igual a $\tilde{\lambda}^p$, a Eq. (3.22) tomará a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^c] = \nabla \cdot \left[\sum_{np} X^{cp} \tilde{\lambda}^p [\nabla \Phi^p] \right] - \sum_{np} X^{cp} \tilde{m}^p . \quad (3.23)$$

Somando as equações de conservação para todos os componentes obtém-se a equação da conservação de massa global:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m] = \sum_{np} \nabla \cdot [\tilde{\lambda}^p \nabla \Phi^p] - \sum_{np} \tilde{m}^p . \quad (3.24)$$

3.2 Modelo *black-oil*

Este modelo é uma simplificação do modelo composicional e tem sua aplicação em reservatórios que contém óleos pesados ou de baixa volatilidade. Tem a característica de ser um modelo isotérmico cujo comportamento das fases é regido pelas relações PVT (pressão, volume e temperatura). O modelo *black-oil* pode ser formulado de duas maneiras: o modelo generalizado e o modelo padrão.

3.3 Modelo *black-oil* generalizado

No modelo *black-oil* generalizado (Figura 3.2), os componentes e as fases são em número de três: óleo, água e gás. As fases água e óleo não se misturam e nem trocam massa. Os componentes óleo e água não vaporizam na fase gás. O componente gás pode ser encontrado dissolvido nas fases óleo e água.

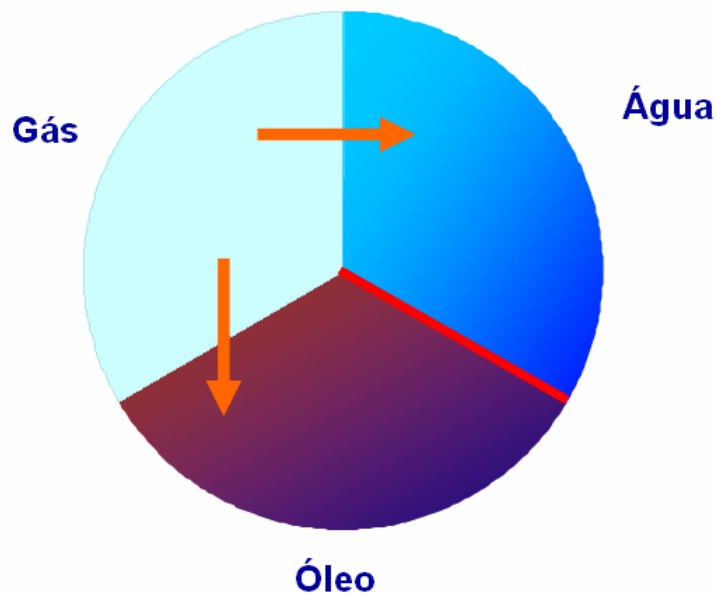


Figura 3.2 – Modelo *black-oil* generalizado

Para se chegar na equação da conservação da massa do componente c para o modelo *black-oil* generalizado na formulação em saturações, é necessário considerar duas grandezas: fator volume de formação volumétrica da fase p (B^p) e solubilidade do componente c na fase p (R^{cp}). O fator volume de formação relaciona o volume de óleo (V^o) que se tem inicialmente no reservatório, sob influência da alta pressão, e o volume de óleo (V^{oo}) que se obtém quando este se encontra nas condições de superfície (baixa pressão). Desta forma, na superfície, a fase óleo dá origem a mais um componente, o gás, que se encontrava dissolvido no óleo (V^{go}). Esse fenômeno pode ser visto na Figura 3.3.

O fator volume de formação volumétrica e a solubilidade do componente c na fase p são dados pelas Eqs. (3.25) e (3.26):

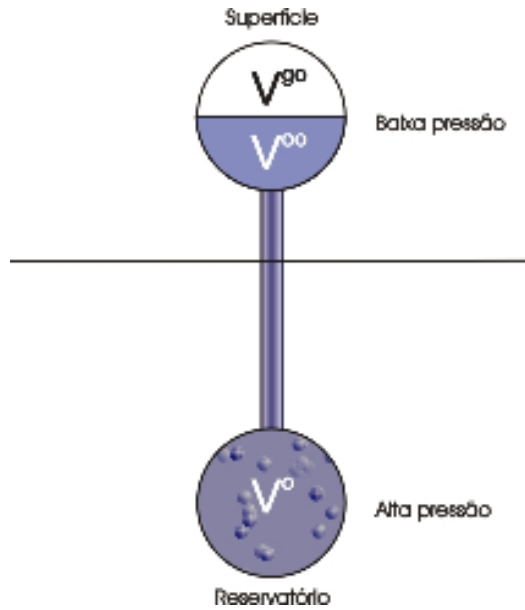


Figura 3.3 – Volumes do óleo e gás

$$B^p = \frac{V^p}{V^{pp}} ; \quad (3.25)$$

$$R^{cp} = \frac{V^{cp}}{V^{pp}} . \quad (3.26)$$

Utilizando as grandezas apresentadas e fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se a uma equação para a solubilidade do componente c na fase p em função da fração mássica do componente c na fase p , densidade da fase p , volume formação da fase p e da densidade do componente c nas condições de superfície (Eq. 3.34). Para se chegar nessa equação, calcula-se V^{pp} na Eq. (3.25):

$$B^p = \frac{V^p}{V^{pp}} \Rightarrow V^{pp} = \frac{V^p}{B^p} ; \quad (3.27)$$

Substituindo-se a Eq. (3.27) na Eq. (3.26), obtém-se:

$$R^{cp} = \frac{V^{cp}}{\frac{V^p}{B^p}} \Rightarrow R^{cp} = V^{cp} \frac{B^p}{V^p} . \quad (3.28)$$

Sabe-se que a densidade do componente c nas condições padrão de superfície (ρ_{STC}^c) é dada pela razão entre a massa do componente c na fase p (M^{cp}) e o volume do componente c na fase p (V^{cp}),

$$\rho_{STC}^c = \frac{M^{cp}}{V^{cp}} \quad . \quad (3.29)$$

Calculando-se o V^{cp} na Eq. (3.29):

$$V^{cp} = \frac{M^{cp}}{\rho_{STC}^c} \quad . \quad (3.30)$$

Substituindo essa equação na Eq. (3.28), obtém-se:

$$R^{cp} = \frac{M^{cp}}{\rho_{STC}^c} \frac{B^p}{V^p} \quad . \quad (3.31)$$

A densidade da fase p (ρ^p) é dada por:

$$\rho^p = \frac{M^p}{V^p} \Rightarrow V^p = \frac{M^p}{\rho^p} \quad . \quad (3.32)$$

Substituindo a Eq. (3.32) na Eq. (3.31), obtém-se:

$$R^{cp} = \frac{M^{cp}}{\rho_{STC}^c} \frac{B^p}{\frac{M^p}{\rho^p}} \Rightarrow R^{cp} = \frac{M^{cp}}{M^p} \rho^p \frac{B^p}{\rho_{STC}^c} \quad . \quad (3.33)$$

A razão entre M^{cp} e M^p corresponde a fração mássica do componente c na fase p , X^{cp} , (Eq. 3.5). Substituindo essa equação na Eq. (3.33), obtém-se:

$$R^{cp} = X^{cp} \rho^p \frac{B^p}{\rho_{STC}^c} \quad (3.34)$$

ou

$$X^{cp} \rho^p = \frac{R^{cp} \rho_{STC}^c}{B^p} \quad (3.35)$$

Substituindo-se a Eq. (3.35) na Eq. (3.1), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p} \rho_{STD}^c S^p \right) \right] = -\nabla \cdot \left[\sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p} \rho_{STD}^c \bar{u}^p \right] - \sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p \rho^p} \rho_{STD}^c \tilde{m}^p \quad (3.36)$$

Simplificando-se a Eq. (3.36), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p} S^p \right) \right] = -\nabla \cdot \left[\sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p} \bar{u}^p \right] - \sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p \rho^p} \tilde{m}^p \quad (3.37)$$

Substituindo-se a equação da velocidade da fase p , Eq. (3.14), na Eq. (3.37), obtém-se a equação da conservação de massa do componente c para o modelo *black-oil* generalizado na formulação em saturações:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p} S^p \right) \right] = \nabla \cdot \left[\sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p} \lambda^p \nabla \Phi^p \right] - \sum_{np} \frac{R^{cp}}{B^p \rho^p} \tilde{m}^p \quad (3.38)$$

onde p pode substituído por o para o componente óleo e por w para o componente água.

3.4 Modelo *black-oil* padrão

O modelo *black-oil* padrão é uma simplificação do modelo *black-oil* generalizado, tendo como característica principal o fato de que o componente gás não pode ser encontrado na fase água. Outra característica desse modelo é que o componente óleo não pode se vaporizar na fase gás.

Após algumas simplificações no modelo *black-oil* generalizado, obtém-se o modelo *black-oil* padrão (Figura 3.4). Esse modelo tem como característica principal a inexistência do componente gás nas fases água e óleo. Dessa simplificação, as solubilidades e as frações mássicas de cada componente são dadas pelas Eqs. (3.39) e (3.40), respectivamente.

Solubilidades:

$$\begin{aligned}
 R^{ww} &= 1 & R^{ow} &= 0 & R^{gw} &= 0 \\
 R^{oo} &= 1 & R^{wo} &= 0 & R^{go} &= R^{go}(P) \\
 R^{gg} &= 1 & R^{wg} &= 0 & R^{og} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Frações mássicas:

$$\begin{aligned}
 X^{ww} &= 1 & X^{ow} &= 0 & X^{gw} &= 0 \\
 X^{oo} &= 1 - X^{go} & X^{wo} &= 0 & X^{go} &= 0 \\
 X^{gg} &= 1 & X^{wg} &= 0 & X^{og} &= \rho_{STC}^g R^{go} / \rho^o B^o
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

As equações para o modelo *black-oil* padrão na formulação em saturação para os componentes: água, óleo e gás, são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S^w}{B^w} \right] = \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^w \nabla \Phi^w}{B^w} \right] - \frac{\tilde{m}^w}{B^w \rho^w} \quad , \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S^o}{B^o} \right] = \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^o \nabla \Phi^o}{B^o} \right] - \frac{\tilde{m}^o}{B^o \rho^o} \quad , \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S^g}{B^g} + R^{go} \frac{S^o}{B^o} \right) \right] = \nabla \cdot \left[\frac{\lambda^g \nabla \Phi^g}{B^g} + R^{go} \frac{\lambda^o \nabla \Phi^o}{B^o} \right] - \left(\frac{\tilde{m}^g}{B^g \rho^g} + \frac{\tilde{m}^o}{B^o \rho^o} \right) \quad . \tag{3.43}$$

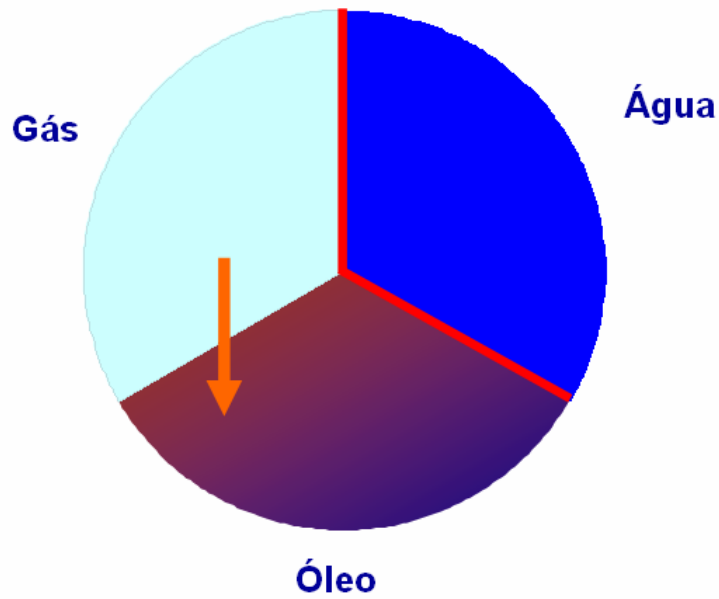


Figura 3.4 – Modelo *black-oil* padrão

3.5 Modelo *black-oil* padrão baseado em frações mássicas

Substituindo na Eq. (3.23), as frações mássicas definidas pela Eq. (3.40), obtém-se as equações do modelo *black-oil* padrão para os componentes: água, óleo e gás.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^w] = \nabla \cdot [\tilde{\lambda}^w \nabla \Phi^w] - \tilde{m}^w \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^o] = \nabla \cdot [X^{oo} \tilde{\lambda}^o \nabla \Phi^o] - X^{oo} \tilde{m}^o \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^g] = \nabla \cdot [(1 - X^{oo}) \tilde{\lambda}^o \nabla \Phi^o + \tilde{\lambda}^g \nabla \Phi^g] - (1 - X^{oo}) \tilde{m}^o - \tilde{m}^g \quad (3.46)$$

Somando-se essas três equações, obtém-se a equação de balanço de massa global:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m] = \nabla \cdot [\tilde{\lambda}^w \nabla \Phi^w + \tilde{\lambda}^o \nabla \Phi^o + \tilde{\lambda}^g \nabla \Phi^g] - \tilde{m}^w - \tilde{m}^o - \tilde{m}^g \quad (3.47)$$

Estas são as equações de conservação de massa dos componentes nas condições de superfície. A pressão capilar do contato óleo e água e a pressão capilar do contato óleo e gás são dadas, respectivamente, por:

$$P_{cow} = P^o - P^w \quad , \quad (3.48)$$

$$P_{cog} = P^g - P^o \quad . \quad (3.49)$$

Os potenciais de cada fase são dados pela Eq. (3.16). Levando em consideração as Eq. (3.48) e (3.49), os potenciais das fases óleo, água e gás são determinados, respectivamente, por:

$$\Phi^o = P^o + \rho g z \quad , \quad (3.50)$$

$$\Phi^w = P^o - P_{cow} + \rho g z \quad , \quad (3.51)$$

$$\Phi^g = P^o + P_{cog} + \rho g z \quad . \quad (3.52)$$

Observa-se do sistema de equações obtido com as Eqs. (3.44), (3.45) e (3.46), que existem quatro incógnitas (Z^o , Z^w , Z^g e P^o) para apenas três equações. Desta forma, é necessária mais uma equação para que o sistema de equações possa ser resolvido. A quarta equação vem da restrição volumétrica, que adota a hipótese de que todo o volume poroso é ocupado pelos fluidos: óleo, água e gás, que consiste na soma das saturações dos componentes: óleo, água e gás:

$$S^o + S^w + S^g = 1 \quad . \quad (3.53)$$

3.6 Modelo *black-oil* simplificado para os componentes água e óleo

O modelo *black-oil* simplificado (Figura 3.5) resulta de uma simplificação do modelo *black-oil* padrão. Nesse modelo, apenas dois componentes são considerados, óleo e água.

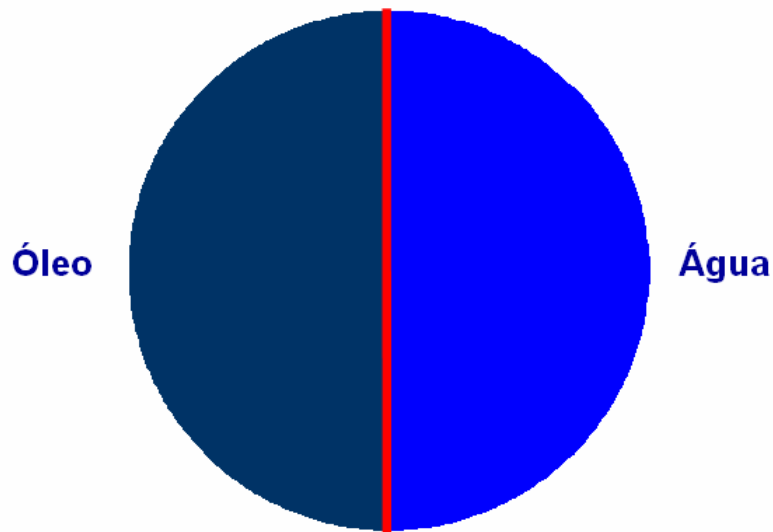


Figura 3.5 – Modelo *black-oil* simplificado

Para esse modelo, as solubilidades e as frações mássicas de cada componente são dadas pelas Eqs. (3.54) e (3.55), respectivamente.

Solubilidades:

$$\begin{aligned} R^{ww} &= 1 & R^{ow} &= 0 \\ R^{oo} &= 1 & R^{wo} &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Frações mássicas:

$$\begin{aligned} X^{ww} &= 1 & X^{ow} &= 0 \\ X^{oo} &= 1 & X^{wo} &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Considerando o escoamento de um óleo subsaturado, processo de recuperação secundária e sem transferência de massa entre as fases óleo e água, o modelo padrão reduz-se às seguintes equações para os componentes óleo e água (Eqs. (3.56) e (3.57)).

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^o] = \nabla \cdot [\tilde{\lambda}^o \nabla \Phi^o] - \tilde{m}^o \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^w] = \nabla \cdot [\tilde{\lambda}^w \nabla \Phi^w] - \tilde{m}^w \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m] = \nabla \cdot [\tilde{\lambda}^w \nabla \Phi^w + \tilde{\lambda}^o \nabla \Phi^o] - \tilde{m}^w - \tilde{m}^o \quad (3.58)$$

Para a solução do problema as Eqs. (3.56) e (3.57) são utilizadas. Destaca-se que qualquer combinação envolvendo as Eqs. (3.56) a (3.58) é possível. A Eq. (3.58) resulta de uma combinação linear das Eqs. (3.56) e (3.57). Os potenciais das fases óleo e água são calculados utilizando-se as Eqs. (3.50) e (3.51), respectivamente. Com isso, tem-se três incógnitas: Z^o , Z^w e P^o para apenas duas equações. Para viabilizar a solução do sistema de equações é necessário mais uma equação. Para isso, faz-se uso da equação de restrição mássica para dois componentes, óleo e água:

$$Z^w + Z^o = 1 \quad (3.59)$$

A pressão da fase água é calculada pela equação:

$$P^w = P^o - P_{cow} \quad (3.60)$$

3.7 Rotina “pseudo-flash” para o modelo *black-oil* simplificado

A rotina “pseudo-flash” tem como objetivo calcular algumas propriedades importantes para a simulação. A partir das variáveis primárias: pressão, fração mássica ou saturação, calculam-se diversos parâmetros físicos como: pressões capilares, permeabilidades relativas, mobilidades e etc. As saturações dos componentes também participam dos cálculos de certos parâmetros. Grandezas importantes como mobilidades, potenciais das fases e as frações mássicas, são calculadas pela rotina flash. Cunha (1996) utilizou essa rotina para um caso bifásico conforme será mostrado a seguir.

Os cálculos das propriedades seguem uma seqüência de cálculo, conforme mostrado abaixo.

- Frações mássicas das fases ($p = \text{óleo (o)}$ ou $p = \text{água (w)}$):

$$\alpha^p = Z^p \quad . \quad (3.61)$$

- Fatores volume de formação:

$$B^p = B^p(P) \quad . \quad (3.62)$$

O fator volume de formação pode ser obtido através de tabelas de pontos experimentais ou definido em termos de compressibilidade. A equação para a determinação dessa propriedade pode variar de um modelo para outro. O fator volume de formação utilizado por Coutinho (2002) é mostrado na Eq. (3.63). O utilizado pelo IMEX é mostrado na Eq. (3.64) e o utilizado no exemplo do Palagi (1992), que foi objeto de estudo neste trabalho, é mostrado na Eq. (3.65).

$$B^p = \frac{B_{ref}^p}{1 + c^p (P_p - P_{ref})} \quad (3.63)$$

$$B^p = B_{ref}^p (1 + c^p (P_p - P_{ref})) \quad (3.64)$$

$$B^p = B_{stc}^p + B'^p (P_p - P_{cow}) \quad (3.65)$$

Nas Eqs. (3.63) e (3.64) B_{ref}^p é o fator volume de formação da fase p na pressão de referência, c^p é a compressibilidade da fase, P_p é a pressão no bloco e P_{ref} é a pressão de referência. Na Eq. (3.65) B_{stc}^p é fator volume de formação da fase p nas condições de superfície e B'^p é a derivada de do volume de formação de p , B_p , avaliado na pressão de referência. fator volume de formação da fase óleo para a fase contínua.

- Porosidade:

$$\phi = \phi(P) . \quad (3.66)$$

A porosidade é muitas vezes função da pressão, e sua equação é caracterizada por uma função linear da pressão, sendo definida por:

$$\phi = \phi_{ref} [1 + c^r (P_p - P_{ref})] , \quad (3.67)$$

onde ϕ_{ref} é a porosidade de referência.

- Densidades das fases:

$$\rho^p = \frac{\rho_{STC}^p}{B^p} , \quad (3.68)$$

onde ρ_{STC}^p é a densidade da fase p nas condições de superfície.

- Saturações das fases:

$$S^p = \frac{\alpha^p}{\sum_{np} \frac{\alpha^{p'}}{\rho^{p'}}} . \quad (3.69)$$

- Densidade média da mistura:

$$\rho^m = \sum_{np} \rho^p S^p . \quad (3.70)$$

A seguir são mostrados os parâmetros que são obtidos através de funções experimentais ou modelos algébricos:

- Viscosidade das fases:

$$\mu^p = \mu^p(P) . \quad (3.71)$$

- Pressão capilar do contato óleo e água:

$$P_{cow} = P_{cow}(S^w) . \quad (3.72)$$

- Permeabilidades relativas das fases:

$$k^{rp} = k^{rp}(S^p) . \quad (3.73)$$

- Mobilidades das fases:

$$\tilde{\lambda}^p = \frac{\mathbf{k}\rho^p k^{rp}}{\mu^p} . \quad (3.74)$$

4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

O presente capítulo apresenta as equações diferenciais do modelo simplificado para o escoamento água e óleo, empregando coordenadas generalizadas. As equações resultantes serão discretizadas empregando o método dos volumes finitos e uma metodologia totalmente implícita.

4.1 Transformação das equações para o plano computacional

Para reservatórios com pequena espessura pode-se desconsiderar as variações do escoamento ao longo da espessura do reservatório e desta forma desconsiderar os efeitos gravitacionais, devido ao fato de que o escoamento se dá no plano. Para casos mais gerais, deve-se considerar o escoamento ao longo das três direções e desta forma o termo gravitacional passa a ser de importância fundamental. Sendo assim, a discretização das equações governantes será feita considerando os efeitos gravitacionais e capilares.

Para um caso tridimensional, as Eqs. (3.56) e (3.57) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho^m \phi Z^p] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{\lambda}^p \frac{\partial}{\partial x} \Phi^p \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{\lambda}^p \frac{\partial}{\partial y} \Phi^p \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tilde{\lambda}^p \frac{\partial}{\partial z} \Phi^p \right] - \tilde{m}^p. \quad (4.1)$$

Na equação acima, p representa as fases óleo e água. Como essa equação visa à solução do escoamento em reservatórios de geometrias irregulares, deve-se convertê-la para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas empregando a seguinte transformação (Maliska, 1995):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \gamma &= \gamma(x, y, z). \end{aligned} \quad (4.2)$$

As equações resultantes se aplicam a um domínio hexaedro regular (Figura 4.1b).

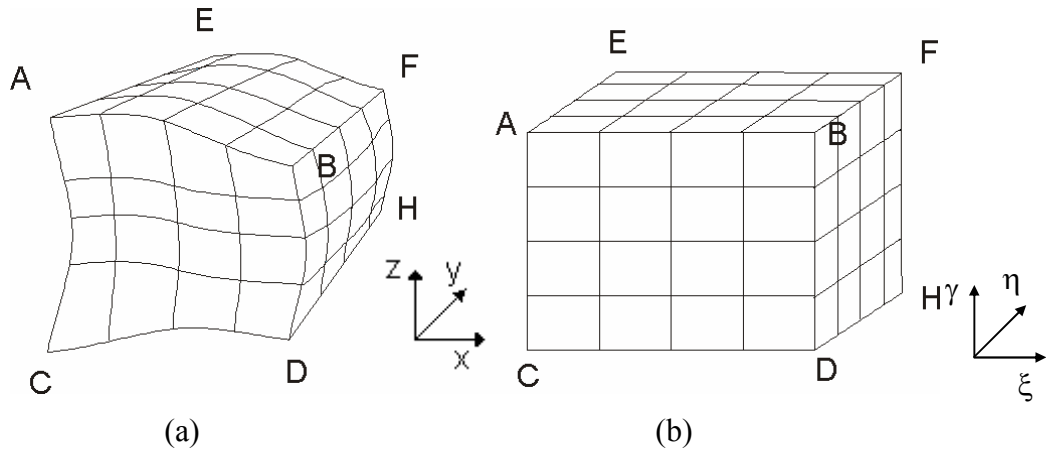


Figura 4.1 – Exemplos dos domínios: a) Físico. b) Transformado

Aplicando a regra da cadeia na Eq. (4.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho^m \phi Z^p}{J} \right) + \frac{\tilde{m}^p}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(G_1^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_2^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_3^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G_4^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_5^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_6^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(G_7^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_8^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_9^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

O primeiro e o segundo termo do lado esquerdo da Eq. (4.3), são os termos de acumulação e fonte, respectivamente, e aqueles do lado direito representam a advecção em cada uma das direções.

Partindo da Eq. (4.3), depois de fazer algumas manipulações algébricas obtém-se as equações para a pressão (Eq. (4.4)), óleo, (Eq. (4.5)) e água (Eq. (4.6)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi \rho^m}{J} \right) + \frac{\tilde{m}^w + \tilde{m}^o}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(G_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + G_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + G_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + G_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + G_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(G_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + G_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + G_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(G_1^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + G_2^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + G_3^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G_4^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + G_5^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + G_6^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(G_7^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + G_8^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + G_9^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho^m \phi Z^o}{J} \right) + \frac{\tilde{m}^o}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(G_1^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + G_2^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + G_3^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G_4^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + G_5^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + G_6^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(G_7^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + G_8^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + G_9^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho^m \phi Z^w}{J} \right) + \frac{\tilde{m}^w}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(G_1^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + G_2^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + G_3^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G_4^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + G_5^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + G_6^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(G_7^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + G_8^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + G_9^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

O tensor G envolve propriedades do fluido, reservatório e as métricas inversas. As expressões para os nove tensores são dadas por:

$$G_1^p = J \tilde{\lambda}^p \left[(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta)^2 + (x_\eta z_\gamma - x_\gamma z_\eta)^2 + (x_\eta y_\gamma - x_\gamma y_\eta)^2 \right]; \quad (4.7)$$

$$G_2^p = -J \tilde{\lambda}^p \left[(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta)(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) + (x_\eta z_\gamma - x_\gamma z_\eta)(x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi) + \right. \\ \left. (x_\eta y_\gamma - x_\gamma y_\eta)(x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi) \right]; \quad (4.8)$$

$$G_3^p = J \tilde{\lambda}^p \left[(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta)(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) + (x_\eta z_\gamma - x_\gamma z_\eta)(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) + \right. \\ \left. (x_\eta y_\gamma - x_\gamma y_\eta)(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \right]; \quad (4.9)$$

$$G_4^p = J \tilde{\lambda}^p \left[(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta)(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) + (x_\eta z_\gamma - x_\gamma z_\eta)(x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi) + \right. \\ \left. (x_\eta y_\gamma - x_\gamma y_\eta)(x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi) \right]; \quad (4.10)$$

$$G_5^p = J \tilde{\lambda}^p \left[(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi)^2 + (x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi)^2 + (x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi)^2 \right]; \quad (4.11)$$

$$G_6^p = -J \tilde{\lambda}^p \left[(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi)(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) + (x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi)(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) + \right. \\ \left. (x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi)(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \right]; \quad (4.12)$$

$$G_7^p = J \tilde{\lambda}^p \left[(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta)(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) + (x_\eta z_\gamma - x_\gamma z_\eta)(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) + \right. \\ \left. (x_\eta y_\gamma - x_\gamma y_\eta)(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \right]; \quad (4.13)$$

$$G_8^p = -J\tilde{\lambda}^p \left[\begin{array}{l} (y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi)(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) + (x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi)(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) + \\ (x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi)(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \end{array} \right]; \quad (4.14)$$

$$G_9^p = J\tilde{\lambda}^p \left[(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)^2 + (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi)^2 + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \right]. \quad (4.15)$$

Nas equações acima, J é o jacobiano. x_ξ, y_ξ , etc, representam as métricas inversas. Para um volume elementar P , conforme é mostrado na Figura 4.3-a, o jacobiano nesse volume será dado por:

$$J = \{x_\xi(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) + x_\gamma(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)\}^{-1}. \quad (4.16)$$

Detalhes da dedução das métricas inversas podem ser obtidas em Maliska (1995).

4.2 Integração das equações diferenciais no plano transformado

A Eq. (4.3), para as duas fases, será integrada no tempo e no espaço levando em consideração o volume elementar da Figura 4.2.

Na Figura 4.3-a mostra-se o volume elementar central P em que as propriedades serão calculadas, levando em consideração as propriedades dos volumes que estão vizinhos a ele (Fig 4.3-b).

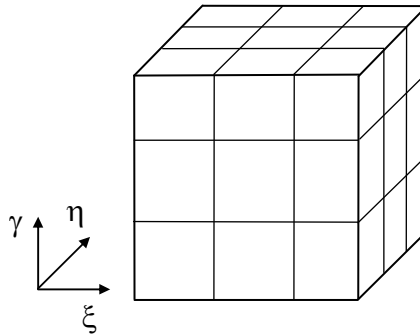


Figura 4.2 – Volume para integração

Conforme pode ser visto nas Figuras 4.3 e 4.4, os vizinhos do volume elementar P são divididos em vizinhos diretos e vizinhos cruzados. Os vizinhos diretos são os localizados

a oeste (W), a leste (E), a norte (N), a sul (S), no topo (T) e a baixo (B) do volume que está sendo considerado (Figura 4.3-b). Os vizinhos cruzados (Figura 4.4) do volume elementar P são os localizados a noroeste (NW); a nordeste (NE); sudoeste (SW); sudeste (SE), no plano intermediário, os localizados a oeste de B (BW); a leste de B (BE); a norte de B (BN) e a sul de B (BS), no plano inferior, e os localizados a oeste de T (TW); a leste de T (TE), a norte de T (TN) e os a sul de T (TS). Conclui-se que o esquema numérico envolve 18 vizinhos ao volume de controle P . Na Figura 4.5, pode-se visualizar parte desses volumes.

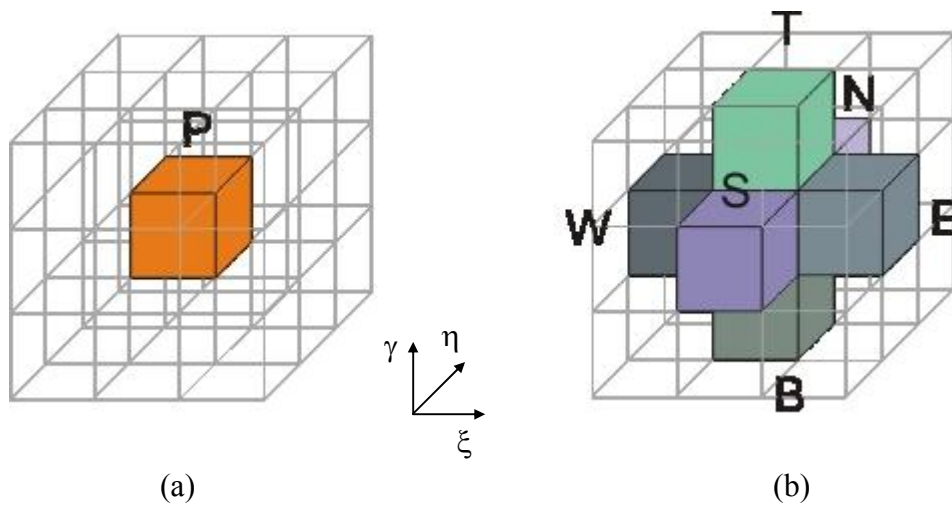


Figura 4.3 – a) Volume elementar central. b) Vizinhos diretos de P

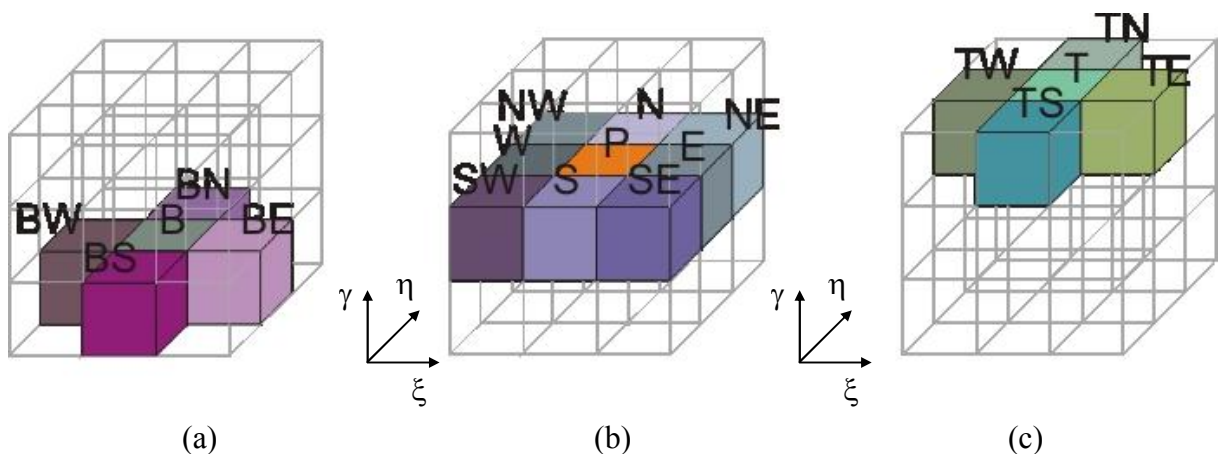


Figura 4.4 – Vizinhos do volume elementar P . a) Plano inferior com os vizinhos do volume elementar B . b) Plano intermediário com os vizinhos diretos e cruzados do volume elementar P . c) Plano superior com os vizinhos do volume elementar T

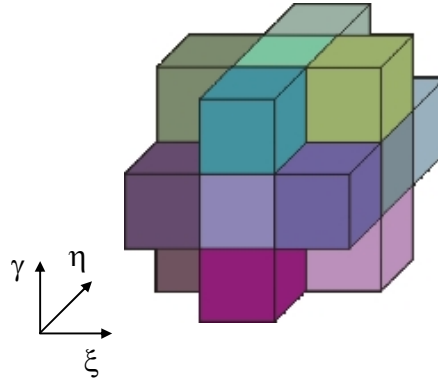


Figura 4.5 – Todos os vizinhos do volume elementar P

A Figura 4.6 apresenta todos os volumes vizinho para o volume P .

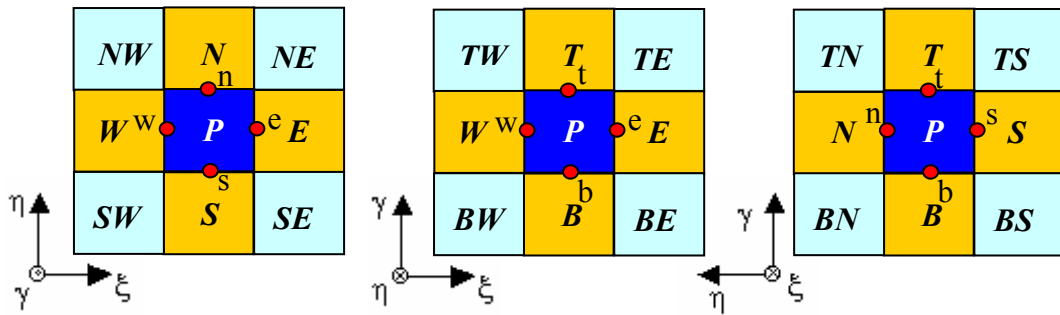


Figura 4.6 – Vizinhos diretos e cruzados do volume elementar P

Efetuada as integrais dos termos de acumulação, advectivos e fonte da Eq. (4.3) e avaliando-se os termos advectivos e fonte através de uma formulação totalmente implícita e dividindo cada um dos termos resultantes por Δt obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J} \left[(\rho^m \phi Z^p)_p^{t+\Delta t} - (\rho^m \phi Z^p)_p^t \right] \frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta t} + \left(\frac{\tilde{m}^p}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma = \\
 & \left[\left(G_1^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_2^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_3^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_e - \left(G_1^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_2^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_3^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_w \right] \Delta \eta \Delta \gamma + \\
 & \left[\left(G_4^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_5^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_6^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_n - \left(G_4^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_5^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_6^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_s \right] \Delta \xi \Delta \gamma + \quad (4.17) \\
 & \left[\left(G_7^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_8^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_9^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_t - \left(G_7^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_8^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_9^p \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_b \right] \Delta \xi \Delta \eta .
 \end{aligned}$$

4.3 Função de interpolação

Apresenta-se neste item as funções de interpolação UDS (*Upstream Differencing Scheme*) e CDS (*Central Differencing Scheme*) com correção atrasada.

O esquema UDS é uma função de interpolação de primeira ordem, que para uma correta captura da frente de saturação é necessário o uso de malhas extremamente refinadas. Neste esquema, quando uma malha grosseira é utilizada, observa-se o aparecimento do efeito de difusão numérica. O esquema CDS é uma função de interpolação de ordem dois, que tem a característica de não introduzir difusão numérica. Este esquema, por ser não limitado, pode introduzir oscilações (Maliska, 1995).

Segundo Maliska (1995), a função de interpolação tem a função de aproximar os valores das propriedades e fluxos nas interfaces dos volumes de controle em função dos valores armazenados nos centros dos volumes de controle. Essas funções são responsáveis pelos erros de truncamento advindo da aproximação. As aproximações dos termos advectivos podem ser classificadas como dissipativas e não-dissipativas. Os erros dissipativos aparecem quando são usados os esquemas de primeira ordem tal como o *upwind* (UDS). Esses esquemas produzem soluções fisicamente coerentes, mas suavizam os gradientes, produzindo difusões não-físicas as quais são denominadas na literatura de difusão numérica. Os erros não-dissipativos aparecem quando os esquemas de ordem superior são usados, como é o caso das diferenças centrais (CDS). Esses esquemas por serem não limitados produzem em geral oscilações numéricas quando o escoamento é predominante advectivo. Outra característica importante do UDS é o fato dos sistemas lineares oriundos do emprego dessa função de interpolação serem diagonalmente dominantes, Maliska (1995).

Com a finalidade de amenizar a difusão e manter a característica da diagonal dominante do UDS, será empregada neste trabalho a função de interpolação CDS com correção atrasada. Esse esquema aplica um peso entre os esquemas CDS e UDS fornecendo, em geral, resultados superiores em relação às suas formulações tradicionais.

4.4 Função de interpolação *upwind* (UDS)

Com a utilização da função de interpolação UDS, o valor da propriedade na interface do volume de controle depende da direção do escoamento. O valor da função na interface é igual ao valor da função no volume a montante, sendo que o volume a montante muda de acordo com o sentido da velocidade. Fazendo uso da Figura 4.7, pode-se concluir que para um escoamento de P para E a mobilidade em e será:

$$\lambda_e = \lambda_p \quad ; \quad u_e > 0 \quad (4.18)$$

e de E para P :

$$\lambda_e = \lambda_E \quad ; \quad u_e < 0 \quad (4.19)$$

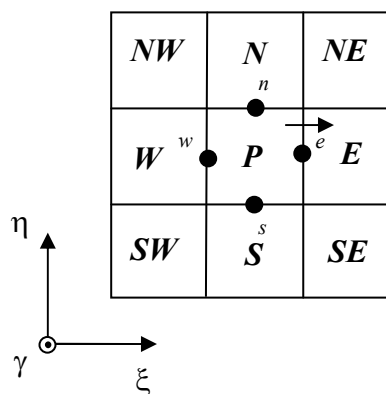


Figura 4.7 – Escoamento na face e , no sentido do volume P para E

A avaliação da velocidade nas interfaces de um volume elementar P (Figura 4.6) é feita de acordo com as Eqs. (4.20) a (4.25).

$$u_w = - \left[G_{1w} \left(\frac{\Phi_P - \Phi_W}{d\xi} \right) + G_{2w} \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}}{4d\eta} \right) + G_{3w} \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TW} - \Phi_B - \Phi_{BW}}{4d\gamma} \right) \right] \quad (4.20)$$

$$u_e = - \left[G_{1e} \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{d\xi} \right) + G_{2e} \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4d\eta} \right) + G_{3e} \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4d\gamma} \right) \right] \quad (4.21)$$

$$u_n = - \left[G_{5n} \left(\frac{\Phi_N - \Phi_P}{d\eta} \right) + G_{4n} \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}}{4d\xi} \right) + G_{6n} \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TN} - \Phi_B - \Phi_{BN}}{4d\gamma} \right) \right] \quad (4.22)$$

$$u_s = - \left[G_{5s} \left(\frac{\Phi_P - \Phi_S}{d\eta} \right) + G_{4s} \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}}{4d\xi} \right) + G_{6s} \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TS} - \Phi_B - \Phi_{BS}}{4d\gamma} \right) \right] \quad (4.23)$$

$$u_t = - \left[G_{9t} \left(\frac{\Phi_T - \Phi_P}{d\gamma} \right) + G_{7t} \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{TE} - \Phi_W - \Phi_{TW}}{4d\xi} \right) + G_{8t} \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{TN} - \Phi_S - \Phi_{TS}}{4d\eta} \right) \right] \quad (4.24)$$

$$u_b = - \left[G_{9b} \left(\frac{\Phi_B - \Phi_P}{d\gamma} \right) + G_{7b} \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{BE} - \Phi_W - \Phi_{BW}}{4d\xi} \right) + G_{8b} \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{BN} - \Phi_S - \Phi_{BS}}{4d\eta} \right) \right] \quad (4.25)$$

4.5 Cálculo da direção do escoamento

Para se obter a velocidade no meio poroso utiliza-se a Lei de Darcy (Eq. (3.14)). As propriedades em cada interface do volume de controle serão determinadas segundo os esquemas UDS e CDS atrasados. Nestes dois esquemas, é preciso determinar a direção do escoamento em cada interface. A velocidade na interface leste (e), por exemplo, e dada por:

$$\bar{u}_e^p = -\tilde{\lambda}_e^p \left[G_{1e} \frac{(\Phi_E^p - \Phi_P^p)}{\Delta\xi} + G_{2e} \frac{(\Phi_N^p + \Phi_{NE}^p - \Phi_S^p - \Phi_{SE}^p)}{4\Delta\eta} + G_{3e} \frac{(\Phi_T^p + \Phi_{TE}^p - \Phi_B^p - \Phi_{BE}^p)}{4\Delta\gamma} \right] \quad (4.26)$$

Portanto, se o termo $\left[G_{1e} \frac{(\Phi_E^p - \Phi_P^p)}{\Delta\xi} + G_{2e} \frac{(\Phi_N^p + \Phi_{NE}^p - \Phi_S^p - \Phi_{SE}^p)}{4\Delta\eta} + G_{3e} \frac{(\Phi_T^p + \Phi_{TE}^p - \Phi_B^p - \Phi_{BE}^p)}{4\Delta\gamma} \right]$ for maior do que zero, a mobilidade na face e será igual a propriedade em P , caso contrário, a mobilidade em e será igual a mobilidade em E , desde que seja utilizada a função de interpolação UDS. Esse procedimento deverá ser aplicado nas demais interfaces do volume de controle.

4.6 Função de interpolação CDS

O esquema de interpolação CDS é uma interpolação linear. Tomando como base a Figura 4.8, o valor da mobilidade na interface e do volume elementar é dado da seguinte maneira:

$$\lambda_e = \frac{\lambda_E + \lambda_P}{2} . \quad (4.27)$$

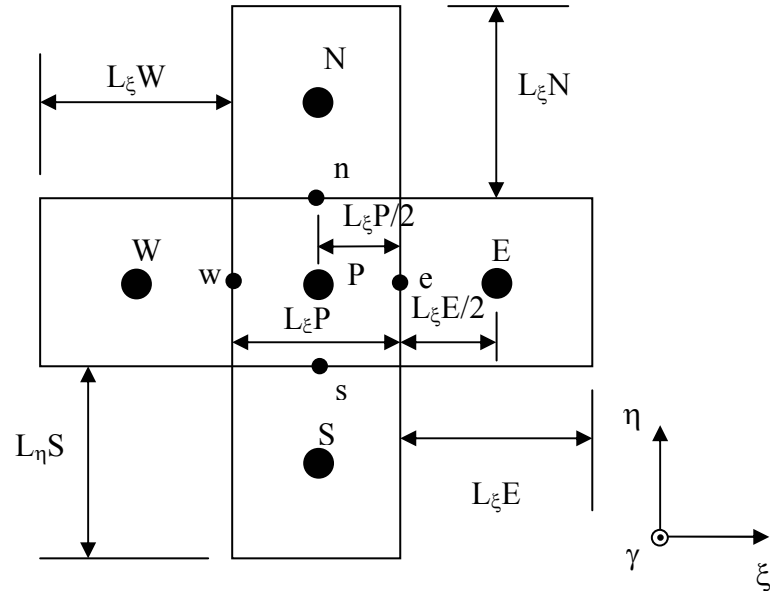


Figura 4.8 – Comprimento das métricas para um volume elementar no plano $\eta\xi$

A Eq. (4.27) mostra um caso típico de uma malha igualmente espaçada, porém, quando se utilizam malhas com espaçamentos diferentes, como é o caso de malhas com coordenadas generalizadas, o cálculo da propriedade na interface do volume passa a ser regida por:

$$\lambda_e = \lambda_E F_e + (1 - F_e) \lambda_P , \quad (4.28)$$

onde F_e é um fator que guarda as informações da malha. Para o volume elementar P da Figura 4.8, os fatores para os vizinhos diretos de P , apresentam-se como:

$$F_w = \frac{L_{\xi W}}{L_{\xi W} + L_{\xi P}} , \quad (4.29)$$

$$F_e = \frac{L_{\xi P}}{L_{\xi P} + L_{\xi E}} , \quad (4.30)$$

$$F_n = \frac{L_{\eta P}}{L_{\eta P} + L_{\eta N}} , \quad (4.31)$$

$$F_s = \frac{L_{\eta S}}{L_{\eta S} + L_{\eta P}} , \quad (4.32)$$

onde os $L_{\xi W}$, $L_{\xi E}$, etc, são os comprimentos das métricas cujas deduções podem ser vistas em Maliska (1995).

Observe que a Eq. (4.27) é um caso particular da Eq. (4.28). Se a malha for igualmente espaçada, os F 's terão seus valores iguais a 0,5 e a Eq. (4.28) ficará igual a Eq. (4.27).

A utilização do esquema CDS, conforme apresentado na Eq. (4.27), implicaria na alteração da estrutura da matriz jacobiana tornando a solução do sistema linear mais difícil de ser obtida, visto que, o mesmo perde a característica de ser diagonalmente dominante. Uma alternativa, portanto, é a aplicação do esquema CDS atrasado, onde as contribuições de segunda ordem são adicionadas à função resíduo.

4.7 Função de interpolação CDS atrasado

O uso da função de interpolação CDS torna a solução do sistema linear mais difícil, devido à perda da dominância diagonal na matriz jacobiana. Quando a função de interpolação UDS é utilizada, a dominância diagonal é mantida, facilitando a solução do sistema linear. O uso da função de interpolação CDS atrasado mantém a dominância diagonal do sistema linear, pois, a contribuição de alta ordem é adicionada apenas no lado direito da Eq. (4.55), desta forma, a matriz jacobiana é a mesma quando da utilização da função de interpolação UDS.

A função de interpolação CDS atrasado aplica um peso entre os esquemas CDS e UDS fornecendo um resultado que ameniza os efeitos da dispersão numérica (UDS) e da oscilação numérica (CDS). O CDS atrasado é definido da seguinte maneira:

$$\tilde{\lambda}^P = \tilde{\lambda}^{P^{UDS}(\theta+\Delta t)} + \varphi \left(\tilde{\lambda}^{P^{CDS}} - \tilde{\lambda}^{P^{UDS}} \right)^\theta \quad (4.33)$$

onde φ é o peso entre os esquemas CDS e UDS. A correção de segunda ordem pode ser avaliada no instante de tempo anterior (t) ou na iteração anterior. No presente trabalho, foram testadas as duas opções e foram conseguidos melhores resultados considerando teta igual t .

O valor de φ pode variar de 0 a 1, sendo que, se φ for igual a zero, tem-se uma função de interpolação puramente UDS. Quanto mais próximo de 1 for o valor do φ , mais a função se aproxima de uma função de interpolação CDS de segunda ordem.

4.8 Derivadas dos potenciais nas faces de um volume elementar

As derivadas do potencial na Eq. (4.17) em cada interface serão avaliadas empregando o esquema de Diferenças centrais (CDS).

As derivadas diretas dos potenciais em cada face são dadas por:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_e = \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta\xi}\right]; \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_w = \left[\frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta\xi}\right]; \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_n = \left[\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta\eta}\right]; \quad (4.36)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_s = \left[\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta\eta}\right]; \quad (4.37)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_t = \left[\frac{\Phi_T - \Phi_P}{\Delta\gamma}\right]; \quad (4.38)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_b = \left[\frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta\gamma}\right]. \quad (4.39)$$

As derivadas cruzadas são dadas por:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_n = \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}}{4\Delta\xi}\right]; \quad (4.40)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_s = \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}}{4\Delta\xi}\right]; \quad (4.41)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_t = \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{TE} - \Phi_W - \Phi_{TW}}{4\Delta\xi}\right]; \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_b = \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{BE} - \Phi_W - \Phi_{BW}}{4\Delta\xi}\right]; \quad (4.43)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_e = \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4\Delta\eta}\right]; \quad (4.44)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_w = \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}}{4\Delta\eta}\right]; \quad (4.45)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_t = \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{TN} - \Phi_S - \Phi_{TS}}{4\Delta\eta}\right]; \quad (4.46)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_b = \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{BN} - \Phi_S - \Phi_{BS}}{4\Delta\eta}\right]; \quad (4.47)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_e = \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4\Delta\gamma}\right]; \quad (4.48)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_w = \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TW} - \Phi_B - \Phi_{BW}}{4\Delta\gamma}\right]; \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)_n = \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TN} - \Phi_B - \Phi_{BN}}{4\Delta\gamma}\right]; \quad (4.50)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right)_s = \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TS} - \Phi_B - \Phi_{BS}}{4\Delta\gamma} \right]. \quad (4.51)$$

Substituindo as derivadas mostradas nas Eqs. (4.34) a (4.51) e as mobilidades calculadas nas interfaces (conforme descrito anteriormente para os esquemas UDS e CDS atrasado) na Eq. (4.17), obtém-se a equação aproximada para o ponto P, mostrada na Eq. (4.52).

4.9 Metodologia totalmente implícita: linearização das equações

Na utilização da metodologia totalmente implícita, todas as incógnitas são avaliadas no mesmo instante de tempo que se deseja obter a solução.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \left[(\rho^m \phi Z^P)_p^{t+\Delta t} - (\rho^m \phi Z^P)_p^t \right] \frac{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\gamma}{\Delta t} + \left(\frac{\tilde{m}^P}{J} \right) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\gamma = \\ & \left[\left(G_1^P \left[\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta\xi} \right] + G_2^P \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4\Delta\eta} \right] + G_3^P \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4\Delta\gamma} \right] \right)_e - \right. \\ & \left. \left(G_1^P \left[\frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta\xi} \right] + G_2^P \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}}{4\Delta\eta} \right] + G_3^P \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TW} - \Phi_B - \Phi_{BW}}{4\Delta\gamma} \right] \right)_w \right] \Delta\eta \Delta\gamma + \\ & \left[\left(G_4^P \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}}{4\Delta\xi} \right] + G_5^P \left[\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta\eta} \right] + G_6^P \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TN} - \Phi_B - \Phi_{BN}}{4\Delta\gamma} \right] \right)_n - \right. \\ & \left. \left(G_4^P \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}}{4\Delta\xi} \right] + G_5^P \left[\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta\eta} \right] + G_6^P \left[\frac{\Phi_T + \Phi_{TS} - \Phi_B - \Phi_{BS}}{4\Delta\gamma} \right] \right)_s \right] \Delta\xi \Delta\gamma + \quad (4.52) \\ & \left[\left(G_7^P \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{TE} - \Phi_W - \Phi_{TW}}{4\Delta\xi} \right] + G_8^P \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{TN} - \Phi_S - \Phi_{TS}}{4\Delta\eta} \right] + G_9^P \left[\frac{\Phi_T - \Phi_P}{\Delta\gamma} \right] \right)_t - \right. \\ & \left. \left(G_7^P \left[\frac{\Phi_E + \Phi_{BE} - \Phi_W - \Phi_{BW}}{4\Delta\xi} \right] + G_8^P \left[\frac{\Phi_N + \Phi_{BN} - \Phi_S - \Phi_{BS}}{4\Delta\eta} \right] + G_9^P \left[\frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta\gamma} \right] \right)_b \right] \Delta\xi \Delta\eta \end{aligned}$$

O conjunto de equações não-lineares é linearizada via método de Newton. Nesse método, as equações discretizadas são escritas na forma residual. Para se obter a equação residual, todos os termos da Eq. (4.52) são escritos em apenas um lado da equação. Desta forma, a equação residual da Eq. (4.52) é dada por:

$$F_P^P = \frac{1}{J} \rho^m \phi \left[(Z^P)_p^{t+\Delta t} - (Z^P)_p^t \right] \frac{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\gamma}{\Delta t} + \left(\frac{\tilde{m}^P}{J} \right) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\gamma -$$

$$\begin{aligned}
& G_{1e} \tilde{\lambda}_e^p \left(\frac{\Phi_E^p - \Phi_P^p}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta \Delta \gamma - G_{2e} \tilde{\lambda}_e^p \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4} \right) \Delta \gamma - \\
& G_{3e} \tilde{\lambda}_e^p \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4} \right) \Delta \eta + \\
& G_{1w} \tilde{\lambda}_w^p \left(\frac{\Phi_P^p - \Phi_W^p}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta \Delta \gamma + G_{2w} \tilde{\lambda}_w^p \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}}{4} \right) \Delta \gamma + \\
& G_{3w} \tilde{\lambda}_w^p \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TW} - \Phi_B - \Phi_{BW}}{4} \right) \Delta \eta - \\
& G_{5n} \tilde{\lambda}_n^p \left(\frac{\Phi_N^p - \Phi_P^p}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi \Delta \gamma - G_{4n} \tilde{\lambda}_n^p \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}}{4} \right) \Delta \gamma - \\
& G_{6n} \tilde{\lambda}_n^p \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TN} - \Phi_B - \Phi_{BN}}{4} \right) \Delta \xi + \\
& G_{5s} \tilde{\lambda}_s^p \left(\frac{\Phi_P^p - \Phi_S^p}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi \Delta \gamma + G_{4s} \tilde{\lambda}_s^p \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}}{4} \right) \Delta \gamma + \\
& G_{6s} \tilde{\lambda}_s^p \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TS} - \Phi_B - \Phi_{BS}}{4} \right) \Delta \xi - \\
& G_{9t} \tilde{\lambda}_t^p \left(\frac{\Phi_T^p - \Phi_P^p}{\Delta \gamma} \right) \Delta \xi \Delta \eta - G_{7t} \tilde{\lambda}_t^p \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{TE} - \Phi_W - \Phi_{TW}}{4} \right) \Delta \eta - \\
& G_{8t} \tilde{\lambda}_t^p \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{TN} - \Phi_S - \Phi_{TS}}{4} \right) \Delta \xi + \\
& G_{9b} \tilde{\lambda}_b^p \left(\frac{\Phi_P^p - \Phi_B^p}{\Delta \gamma} \right) \Delta \xi \Delta \eta + G_{7b} \tilde{\lambda}_b^p \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{BE} - \Phi_W - \Phi_{BW}}{4} \right) \Delta \eta + \\
& G_{8b} \tilde{\lambda}_b^p \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{BN} - \Phi_S - \Phi_{BS}}{4} \right) \Delta \xi .
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Expandindo o resíduo em serie de Taylor e desprezando os termos de ordem maior do que um, obtém-se:

$$F^{k+1} = F^k + \sum_{\forall X} \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^k \Delta X , \tag{4.54}$$

onde k é o nível iterativo e X representa, no presente trabalho, o vetor incógnita, (P^o e Z^o). A equação do resíduo deve ser derivada em relação às varáveis, pressão e fração mássica, no

ponto P e nos seus vizinhos diretos e cruzados. Assumindo que o resíduo na iteração $(k + 1)$ seja nulo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 F^{k+1} &= F^k + \sum_{\forall X} \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^k \Delta X = 0 \Rightarrow \\
 F^k + \sum_{\forall X} \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^k \Delta X &= 0 \Rightarrow \\
 \sum_{\forall X} \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^k \Delta X &= -F^{k+1} .
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

A Eq. (4.55) pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{X} = -\mathbf{F} , \tag{4.56}$$

onde \mathbf{A} é a matriz jacobiana e \mathbf{F} é o vetor resíduo.

A matriz jacobiana é uma matriz de blocos, em que cada bloco é composto por uma matriz 2x2 (Eq. (4.57)), enquanto os vetores $\Delta \mathbf{X}$ (Eq. (4.58)) e \mathbf{F} (Eq. (4.59)) são matrizes 2x1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1j} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \dots & \mathbf{A}_{ij} \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

Cada bloco da matriz jacobiana, matriz 2x2, é formada pelas derivadas dos resíduos com relação à pressão e à fração mássica de cada fase. Na Eq. (4.60), pode-se ver como é formado cada bloco da matriz \mathbf{A} .

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{X}_i \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{F}_i \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i^w}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^w}{\partial Z_j^w} \\ \frac{\partial F_i^o}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^o}{\partial Z_j^o} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

A matriz do $\Delta \mathbf{X}_i$ é formada segundo a Eq. (4.61):

$$\Delta \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} P_i^{k+1} - P^k \\ Z_i^{w(k+1)} - Z_i^{w(k)} \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

onde k denota valores da iteração k . A matriz dos resíduos é formada de acordo com a Eq. (4.62):

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} F_i^w \\ F_i^o \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

A matriz \mathbf{A} é uma matriz esparsa, sendo composta de elementos não-nulos ao longo de dezenove diagonais.

A solução do sistema linear, segundo a Eq. (4.54), permite que se obtenha os valores de P^o e Z^o até que seja obtida a conservação de massa em cada instante de tempo.

A metodologia totalmente implícita implementada segue o processo iterativo mostrado no fluxograma mostrado na Figura 4.9.

4.10 Derivadas dos resíduos

Apresenta-se nesta seção a derivadas de cada termo da função resíduo. Para facilitar a apresentação, a função resíduo será dividida segundo cada termo físico da Eq. (4.53):

- Termos acumulativos e fonte:

$$\Gamma^p = \frac{1}{J} \left[\left(\rho^m \phi Z^p \right)_p^{t+\Delta t} - \left(\rho^m \phi Z^p \right)_p^t \right] \frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta t} + \left(\frac{\tilde{m}^p}{J} \right) \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma . \quad (4.63)$$

- Termos advectivos diretos e cruzados:

$$\begin{aligned} \hat{R}^p = & -G_{1e} \tilde{\lambda}_e^p \left(\frac{\Phi_E^p - \Phi_P^p}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta \Delta \gamma - G_{2e} \tilde{\lambda}_e^p \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4} \right) \Delta \gamma - \\ & G_{3e} \tilde{\lambda}_e^p \left(\frac{\Phi_T^p + \Phi_{TE}^p - \Phi_B^p - \Phi_{BE}^p}{4} \right) \Delta \eta + \\ & G_{1w} \tilde{\lambda}_w^p \left(\frac{\Phi_P^p - \Phi_W^p}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta \Delta \gamma + G_{2w} \tilde{\lambda}_w^p \left(\frac{\Phi_N^p + \Phi_{NW}^p - \Phi_S^p - \Phi_{SW}^p}{4} \right) \Delta \gamma + \\ & G_{3w} \tilde{\lambda}_w^p \left(\frac{\Phi_T^p + \Phi_{TW}^p - \Phi_B^p - \Phi_{BW}^p}{4} \right) \Delta \eta - \\ & G_{5n} \tilde{\lambda}_n^p \left(\frac{\Phi_N^p - \Phi_P^p}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi \Delta \gamma - G_{4n} \tilde{\lambda}_n^p \left(\frac{\Phi_E^p + \Phi_{NE}^p - \Phi_W^p - \Phi_{NW}^p}{4} \right) \Delta \gamma - \\ & G_{6n} \tilde{\lambda}_n^p \left(\frac{\Phi_T^p + \Phi_{TN}^p - \Phi_B^p - \Phi_{BN}^p}{4} \right) \Delta \xi + \\ & G_{5s} \tilde{\lambda}_s^p \left(\frac{\Phi_P^p - \Phi_S^p}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi \Delta \gamma + G_{4s} \tilde{\lambda}_s^p \left(\frac{\Phi_E^p + \Phi_{SE}^p - \Phi_W^p - \Phi_{SW}^p}{4} \right) \Delta \gamma + \\ & G_{6s} \tilde{\lambda}_s^p \left(\frac{\Phi_T^p + \Phi_{TS}^p - \Phi_B^p - \Phi_{BS}^p}{4} \right) \Delta \xi - \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
& G_{9t} \tilde{\lambda}_t^p \left(\frac{\Phi_T^p - \Phi_P^p}{\Delta\gamma} \right) \Delta\xi \Delta\eta - G_{7t} \tilde{\lambda}_t^p \left(\frac{\Phi_E^p + \Phi_{TE}^p - \Phi_W^p - \Phi_{TW}^p}{4} \right) \Delta\eta - \\
& G_{8t} \tilde{\lambda}_t^p \left(\frac{\Phi_N^p + \Phi_{TN}^p - \Phi_S^p - \Phi_{TS}^p}{4} \right) \Delta\xi + \\
& G_{9b} \tilde{\lambda}_b^p \left(\frac{\Phi_P^p - \Phi_B^p}{\Delta\gamma} \right) \Delta\xi \Delta\eta + G_{7b} \tilde{\lambda}_b^p \left(\frac{\Phi_E^p + \Phi_{BE}^p - \Phi_W^p - \Phi_{BW}^p}{4} \right) \Delta\eta + \\
& G_{8b} \tilde{\lambda}_b^p \left(\frac{\Phi_N^p + \Phi_{BN}^p - \Phi_S^p - \Phi_{BS}^p}{4} \right) \Delta\xi .
\end{aligned}$$

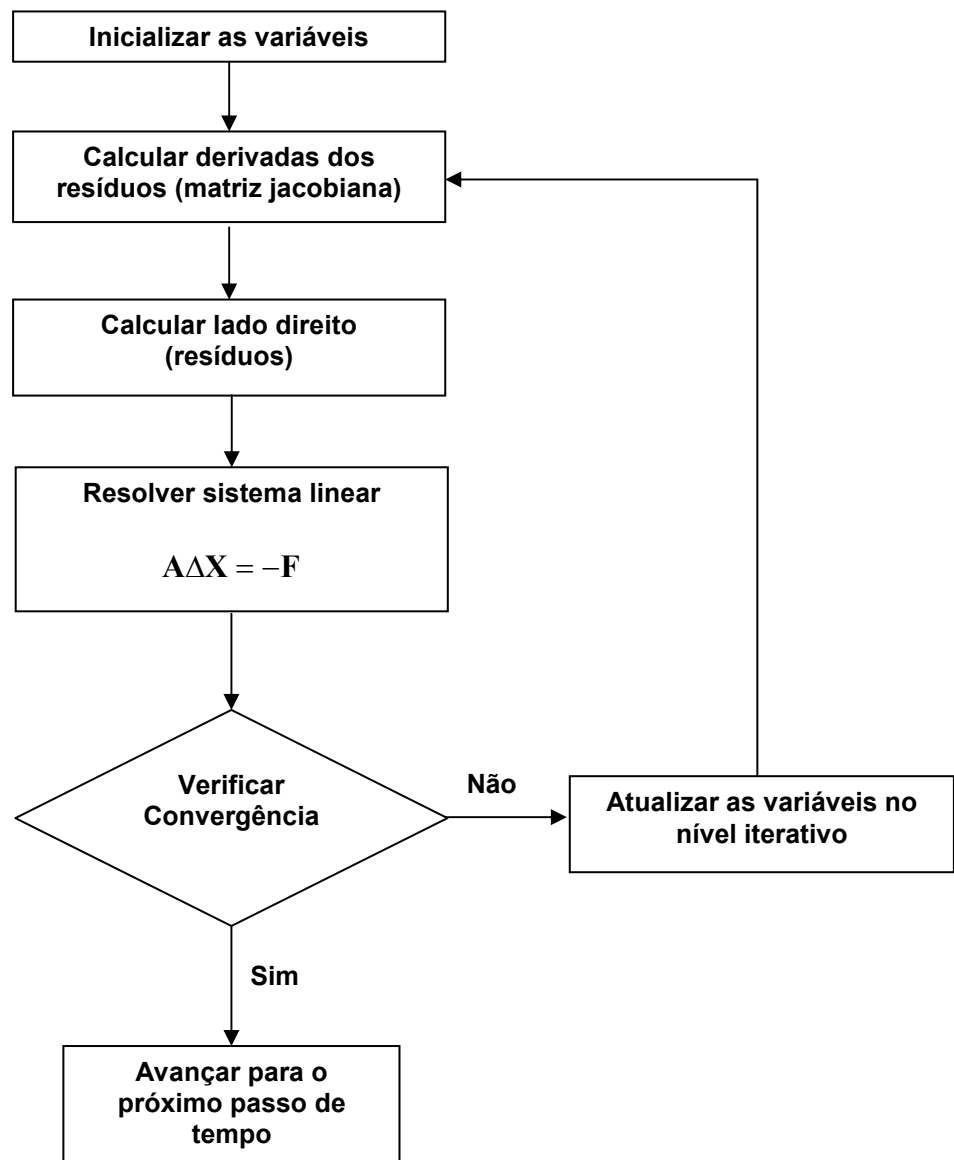


Figura 4.9 – Fluxograma do processo iterativo para a metodologia totalmente implícita

Os termos advectivos diretos são aqueles os quais são multiplicados por G_{1e} , G_{1w} , G_{5n} , G_{5s} , G_{9t} , G_{9b} . Os demais correspondem aos termos advectivos cruzados, sendo assim, a Eq. (4.53) pode ser representada como

$$F_p^p = \Gamma^p + \hat{R}^p . \quad (4.65)$$

A derivação de F_p^p com relação a P_p^o e Z_p^o é composta pela derivação dos termos acumulativo e fonte (Γ^p) e dos termos advectivos (\hat{R}^p), ou seja:

$$\frac{\partial F_p^p}{\partial X_p^o} = \frac{\partial \Gamma^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}^p}{\partial X_p^o} , \quad (4.66)$$

onde X pode representar P ou Z .

Na derivação dos termos acumulativo e fonte, as variáveis de $\phi \rho^m Z^p$ e $\left(\frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J} \right) \frac{\partial(\tilde{m}^p)}{\partial P_p^o} = \rho^p q^p$ são avaliadas apenas no ponto P , então, as suas derivadas são calculadas somente neste ponto, sendo nulas nos outros pontos. Derivando-se a Eq. (4.63) em relação a P_p^o e Z_p^o , obtém-se:

$$\frac{\partial \Gamma^p}{\partial P_p^o} = -\frac{1}{J} \frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma Z^p}{\Delta t} \frac{\partial(\phi \rho^m)}{\partial P_p^o} + \left(\frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J} \right) \frac{\partial(\tilde{m}^p)}{\partial P_p^o} ; \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \Gamma^p}{\partial Z_p^o} = -\frac{1}{J} \frac{\phi \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta t} \frac{\partial(\rho^m Z^p)}{\partial Z_p^o} + \left(\frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J} \right) \frac{\partial(\tilde{m}^p)}{\partial Z_p^o} . \quad (4.68)$$

A derivação dos termos advectivos é composta pelas contribuições do escoamento em cada face do volume de controle (e , w , n , s , t e b (Figura 4.6)). Nesta derivação considera-se a contribuição dos termos diretos e cruzados, ficando $\frac{\partial \hat{R}^p}{\partial X_p^o}$ com a seguinte forma:

$$\frac{\partial \hat{R}^p}{\partial X_p^o} = \frac{\partial \hat{R}_D^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZD}^p}{\partial X_p^o}, \quad (4.69)$$

onde $\frac{\partial \hat{R}_D^p}{\partial X_p^o}$ é a derivada dos termos advectivos diretos; $\frac{\partial \hat{R}_{CZ}^p}{\partial X_p^o}$ é a derivada dos termos

advectivos cruzados e $\frac{\partial \hat{R}_{CZD}^p}{\partial X_p^o}$ é a derivada dos termos advectivos diretos que compõem os

termos advectivos cruzados. Essas derivadas, conforme mostram as Eqs. (4.70) a (4.72), são formadas por:

$$\frac{\partial \hat{R}_D^p}{\partial X_p^o} = \frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{Dw}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{Dn}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{Ds}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{Dt}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{Db}^p}{\partial X_p^o}; \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{R}_{CZ}^p}{\partial X_p^o} = & \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{NW}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{NE}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{SW}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{SE}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TN}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TS}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TW}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TE}}^p}{\partial X_p^o} + \\ & \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BW}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BE}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BS}}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BN}}^p}{\partial X_p^o}; \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZD}^p}{\partial X_p^o} = \frac{\partial \hat{R}_{CZD_w}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZD_e}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZD_n}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZD_s}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZD_t}^p}{\partial X_p^o} + \frac{\partial \hat{R}_{CZD_b}^p}{\partial X_p^o}. \quad (4.72)$$

A derivada dos termos advectivos depende da direção do escoamento e do tipo de esquema utilizado para avaliar as mobilidades nas faces dos volumes de controle. As mobilidades serão avaliadas segundo o esquema de interpolação de primeira ordem UDS.

Para exemplificar a determinação da derivada dos termos advectivos, toma-se como exemplo um escoamento de P para E conforme pode ser visto na Figura 4.7. Levando em consideração o esquema de interpolação UDS, tem-se que $\tilde{\lambda}_e^p = \tilde{\lambda}_p^p$. Desta forma, a

derivada $\frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_p^o}$ ficará conforme mostra a Eq. (4.73).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_p^o} = & -G_{1e}^p \frac{\partial \tilde{\lambda}_e^p}{\partial X_p^o} \left(\frac{\Phi_E^p - \Phi_P^p}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta \Delta \gamma + G_{1e}^p \frac{\tilde{\lambda}_e^p}{\Delta \xi} \frac{\partial \Phi_P^p}{\partial X_p^o} \Delta \eta \Delta \gamma - \\ & G_{2e} \frac{\partial \tilde{\lambda}_e^p}{\partial X_p^o} \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4} \right) \Delta \gamma - G_{3e} \frac{\partial \tilde{\lambda}_e^p}{\partial X_p^o} \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4} \right) \Delta \eta \end{aligned} \quad (4.73)$$

A derivada do termo advectivo direto com relação à interface e no ponto E será:

$$\frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_E^o} = -G_{1e}^p \frac{\tilde{\lambda}_e^p}{\Delta \xi} \frac{\partial \Phi_E^p}{\partial P_E^o} \Delta \eta \Delta \gamma . \quad (4.74)$$

Caso o escoamento se dê de E para P , as derivadas de $\frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_p^o}$ e $\frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_E^o}$ serão:

$$\frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_p^o} = G_{1e}^p \frac{\tilde{\lambda}_e^p}{\Delta \xi} \frac{\partial (\Phi_P^p)}{\partial P_p^o} , \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{R}_{De}^p}{\partial X_E^o} = & -G_{1e}^p \frac{\partial \tilde{\lambda}_e^p}{\partial P_E^o} \left(\frac{\Phi_E^p - \Phi_P^p}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta \Delta \gamma - G_{1e}^p \frac{\tilde{\lambda}_e^p}{\Delta \xi} \frac{\partial \Phi_E^p}{\partial P_E^o} \Delta \eta \Delta \gamma - \\ & G_{2e} \frac{\partial \tilde{\lambda}_e^p}{\partial P_E^o} \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4} \right) \Delta \gamma - G_{3e} \frac{\partial \tilde{\lambda}_e^p}{\partial P_E^o} \left(\frac{\Phi_T + \Phi_{TE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4} \right) \Delta \eta . \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para a obtenção das derivadas quando o escoamento for de P para N , W , S , T ou B , deve-se fazer procedimento semelhante ao apresentado para o escoamento de P para E , e de E para P .

As derivadas dos vizinhos cruzados (NE , NW , SW , SE , TE , TW , TN , TS , BW , BE , BN e BS) são mostradas nas Eqs. (4.77) a (4.88).

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZNE}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{2e} \tilde{\lambda}_e^p}{4} - \frac{G_{4n} \tilde{\lambda}_n^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{NE}}{\partial X_p^o} \Delta \gamma \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZNW}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{2w} \tilde{\lambda}_w^p}{4} + \frac{G_{4n} \tilde{\lambda}_n^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{NW}}{\partial X_p^o} \Delta \gamma \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{SW}}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{2w} \tilde{\lambda}_w^p}{4} - \frac{G_{4s} \tilde{\lambda}_s^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{SW}}{\partial X_p^o} \Delta \gamma \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{SE}}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{2e} \tilde{\lambda}_e^p}{4} + \frac{G_{4s} \tilde{\lambda}_s^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{SE}}{\partial X_p^o} \Delta \gamma \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TE}}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{3e} \tilde{\lambda}_e^p}{4} - \frac{G_{7t} \tilde{\lambda}_t^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{TE}}{\partial X_p^o} \Delta \eta \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TW}}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{3w} \tilde{\lambda}_w^p}{4} + \frac{G_{7t} \tilde{\lambda}_t^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{TW}}{\partial X_p^o} \Delta \eta \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TN}}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{6n} \tilde{\lambda}_n^p}{4} - \frac{G_{8t} \tilde{\lambda}_t^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{TN}}{\partial X_p^o} \Delta \xi \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{TS}}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{6s} \tilde{\lambda}_s^p}{4} + \frac{G_{8t} \tilde{\lambda}_t^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{TS}}{\partial X_p^o} \Delta \xi \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BW}}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{3w} \tilde{\lambda}_w^p}{4} - \frac{G_{7b} \tilde{\lambda}_b^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{BW}}{\partial X_p^o} \Delta \eta \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BE}}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{3e} \tilde{\lambda}_e^p}{4} + \frac{G_{7b} \tilde{\lambda}_b^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{BE}}{\partial X_p^o} \Delta \eta \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BN}}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{6n} \tilde{\lambda}_n^p}{4} + \frac{G_{8b} \tilde{\lambda}_b^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{BN}}{\partial X_p^o} \Delta \xi \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZ_{BS}}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{6s} \tilde{\lambda}_s^p}{4} - \frac{G_{8b} \tilde{\lambda}_b^p}{4} \right) \frac{\partial \Phi_{BS}}{\partial X_p^o} \Delta \xi \quad (4.88)$$

As derivadas dos vizinhos diretos presentes nos cruzados são mostradas nas Eqs. (4.89) a (4.94).

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZD_W}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{4n} \tilde{\lambda}_n^p \Delta \gamma}{4} - \frac{G_{4s} \tilde{\lambda}_s^p \Delta \gamma}{4} + \frac{G_{7t} \tilde{\lambda}_t^p \Delta \eta}{4} - \frac{G_{7b} \tilde{\lambda}_b^p \Delta \eta}{4} \right) \frac{\partial \Phi_W}{\partial X_p^o} \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZD_E}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{4n} \tilde{\lambda}_n^p \Delta \gamma}{4} + \frac{G_{4s} \tilde{\lambda}_s^p \Delta \gamma}{4} - \frac{G_{7t} \tilde{\lambda}_t^p \Delta \eta}{4} + \frac{G_{7b} \tilde{\lambda}_b^p \Delta \eta}{4} \right) \frac{\partial \Phi_E}{\partial X_p^o} \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZD_N}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{2e} \tilde{\lambda}_e^p \Delta \gamma}{4} + \frac{G_{2w} \tilde{\lambda}_w^p \Delta \gamma}{4} - \frac{G_{8t} \tilde{\lambda}_t^p \Delta \xi}{4} + \frac{G_{8b} \tilde{\lambda}_b^p \Delta \xi}{4} \right) \frac{\partial \Phi_N}{\partial X_p^o} \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZD_S}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{2e} \tilde{\lambda}_e^p \Delta \gamma}{4} - \frac{G_{2w} \tilde{\lambda}_w^p \Delta \gamma}{4} + \frac{G_{8t} \tilde{\lambda}_t^p \Delta \xi}{4} - \frac{G_{8b} \tilde{\lambda}_b^p \Delta \xi}{4} \right) \frac{\partial \Phi_S}{\partial X_p^o} \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZD_T}^p}{\partial X_p^o} = \left(-\frac{G_{3e} \tilde{\lambda}_e^p \Delta \eta}{4} + \frac{G_{3w} \tilde{\lambda}_w^p \Delta \eta}{4} - \frac{G_{6n} \tilde{\lambda}_n^p \Delta \xi}{4} + \frac{G_{6s} \tilde{\lambda}_s^p \Delta \xi}{4} \right) \frac{\partial \Phi_T}{\partial X_p^o} \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{CZD_B}^p}{\partial X_p^o} = \left(\frac{G_{3e} \tilde{\lambda}_e^p \Delta \eta}{4} - \frac{G_{3w} \tilde{\lambda}_w^p \Delta \eta}{4} + \frac{G_{6n} \tilde{\lambda}_n^p \Delta \xi}{4} - \frac{G_{6s} \tilde{\lambda}_s^p \Delta \xi}{4} \right) \frac{\partial \Phi_B}{\partial X_p^o} \quad (4.94)$$

4.11 Derivadas numéricas

A obtenção das derivadas, que aparecem na função residual, analiticamente é bastante complicado, pois envolve a aplicação da regra da cadeia diversas vezes, como é o caso da derivada do potencial da fase (Φ^p). Este potencial possui dependência da pressão, das pressões capilares e que por sua vez são funções da saturação. Uma maneira mais simples e direta e a obtenção destas derivadas numericamente. O procedimento numérico usado por Cunha (1996) será adotado no presente trabalho. Desta forma, cada uma das derivadas da função residual será dada por:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\Omega(X + \Delta X) - \Omega(X)}{\Delta X}, \quad (4.95)$$

onde ΔX pode ser ΔP^o ou ΔZ^o . Para o caso bifásico, cada parâmetro é avaliado em três condições: (P^o, Z^o) , $(P^o + \Delta P^o, Z^o)$ e $(P^o, Z^o + \Delta Z^o)$. Sob essas condições as demais variáveis do reservatório são mantidas constantes. Como exemplo mostra-se a derivada da porosidade ϕ com relação a Z^o e P^o , cujas respectivas derivadas serão as seguintes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z^o} = 0 \quad , \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial P^o} = \frac{\phi(P^o + \Delta P^o) - \phi(P^o)}{\Delta P^o} \quad . \quad (4.97)$$

4.12 Solução do sistema linear

O método utilizado para a solução do sistema linear foi o *Bi-Conjugate Gradiente Stabilized Method* (BICGSTAB) proposto por Van der Vorst (1992) usando com uma fatoração incompleta ILU, Marcondes et al. (1996).

4.13 Critérios de convergência para o método de Newton

Segundo Cunha (1996), a convergência para o método de Newton deve ser considerada obtida quando a variação das variáveis P^o e Z^o está abaixo de um determinado valor. Para a pressão, o critério de convergência deve obedecer a seguinte desigualdade:

$$\max \left(\frac{|P_P^{o(k+1)} - P_P^{o(k)}|}{P_{MAX}^{o(k+1)} - P_{MIN}^{o(k+1)}} \right) \leq TOL_P \quad , \quad (4.98)$$

onde k é o nível iterativo. Os subscritos MAX e MIN determinam a máxima e mínima pressão na iteração mais atual, ou seja, $k+1$. TOL_P é a tolerância para a convergência de P_P^o , cujo intervalo varia de 10^{-3} a 10^{-2} . Para a fração mássica o critério de convergência deve obedecer a inequação a seguir:

$$\max\left(\left|Z_P^{o(k+1)} - Z_P^{o(k)}\right|\right) \leq TOL_Z, \quad (4.99)$$

onde TOL_Z é a tolerância imposta para a convergência de Z_P^o , cujo valor varia de 10^{-5} a 10^{-4} .

4.14 Controle do passo de tempo

O controle do passo de tempo é um fator importante na simulação numérica. De um lado procura-se uma maior rapidez na solução do problema, mas não perdendo de vista os erros de truncamentos que devem ser mantidos dentro de valores aceitáveis para não comprometer os resultados obtidos.

A determinação do Δt é um fator importante neste processo, já que ele influencia diretamente no tempo total de simulação do problema.

O esquema de passo de tempo proposto por Lucianetti et al. (1998), propõe que, em cada nova iteração no tempo, o Δt seja calculado pela seguinte relação:

$$\Delta t^{k+1} = \min\left\{\Delta t_{\max}, \max\left\{\Delta t_{\min}, \frac{\Delta t^k}{2}, \min\{\Delta t_Z, \Delta t_P, 2\Delta t^k\}\right\}\right\} \quad (4.100)$$

Os valores de Δt_Z e Δt_P são dados por:

$$\Delta t_Z = \frac{\Delta t^k \Delta Z_{\lim}^o}{\Delta Z_{\max}^o}, \quad (4.101)$$

$$\Delta t_P = \frac{\Delta t^k \Delta P_{\lim}}{\Delta P_{\max}}. \quad (4.102)$$

Nas Eqs (4.99) a (4.101), temos que Δt^{k+1} é o intervalo de tempo da iteração atual; Δt^k é o intervalo de tempo da iteração anterior; Δt_{\max} é o máximo intervalo de tempo permitido; Δt_{\min} é o mínimo intervalo de tempo estipulado; ΔZ_{\lim}^o é a máxima variação da

fração mássica do óleo permitida; ΔZ_{\max}^o é a máxima variação da fração mássica do óleo permitida com relação ao tempo mais atual. Na Eq. (4.102), ΔP_{\lim} é a máxima variação de pressão permitida e ΔP_{\max} é a máxima variação de pressão permitida com relação ao tempo mais atual.

5 MODELO DE POÇO

Um dos pontos importantes na simulação de reservatório de petróleo é o modelo de poço. Devido às dimensões do poço serem muitos menores do que as dimensões dos blocos que contém os poços, é preciso relacionar a pressão de fundo de poço com a pressão do volume que contém o poço, para que se obtenha a vazão mássica fornecida pelo mesmo poço.

Apresenta-se neste capítulo o modelo de poço, bem como, as condições de contorno empregadas na simulação.

5.1 Modelo de poço em malha generalizada

O modelo de poço mais simples é aquele que consiste apenas no modelo hidrostático dentro do poço, considerando um escoamento monofásico radial em regime permanente, nas proximidades do poço. Este é o modelo adotado no presente trabalho.

Segundo Peaceman (1977), a vazão entrando ou saindo de um volume elementar específico, através de um determinado poço é dada por:

$$q^p = WI\lambda_p^p [P_p^p - P^{wf} + \bar{\rho}g(z_p - z_1)] \quad (5.1)$$

onde WI é o índice do poço; λ_p^p é a mobilidade da fase; P_p^p é a pressão no volume elementar; P^{wf} é a pressão do fundo do poço; $\bar{\rho}$ é a densidade média dos fluidos que estão nos volumes elementares na qual o poço está perfurado; g é a aceleração da gravidade; z_p é a cota do centro do volume P e z_1 é a cota do centro do volume da primeira camada do poço (Figura 5.1).

O índice do poço, WI , faz a conexão entre a pressão de poço e a pressão do bloco. Essa conexão é feita por meio de um modelo de escoamento no interior do poço. O WI é dado pela seguinte equação:

$$WI = \frac{2\pi h}{\ln\left(\frac{r^o}{r^w}\right)}, \quad (5.2)$$

onde h é a altura do poço, r^o é o raio equivalente do poço e r^w é o raio do poço (Figura 5.2).

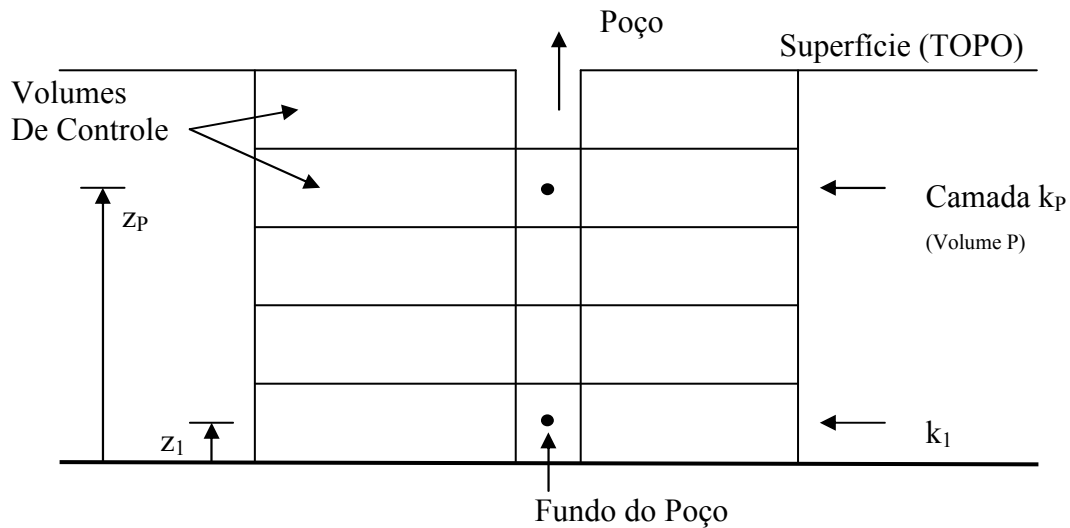


Figura 5.1 – Corte transversal do reservatório mostrando o poço vertical, Cunha (1996)

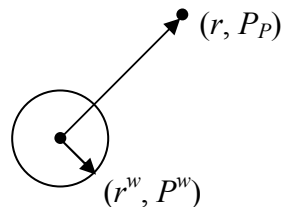


Figura 5.2 – Escoamento radial para um poço

O raio equivalente do poço é definido para uma condição em que a pressão em r^w é igual à pressão no bloco em que o poço está ($P(r^w) = P_p$). Na Figura 5.2 P^w é a pressão no poço. Desconsiderando os termos não-ortogonais, o raio equivalente é dado pela seguinte equação, Cunha (1996):

$$r^o = \left[e^{-2\pi h} d_E^{G_{1e}} d_W^{G_{1w}} d_N^{G_{5n}} d_S^{G_{5s}} \right]^\beta, \quad (5.3)$$

Onde d_E , d_W , d_N e d_S são as distâncias do centro do volume P para os seus vizinhos E , W , N e S , respectivamente, conforme pode ser visto na Figura 5.3. O expoente β é dado por:

$$\beta = (G_{1e} + G_{1w} + G_{5n} + G_{5s})^{-1} . \quad (5.4)$$

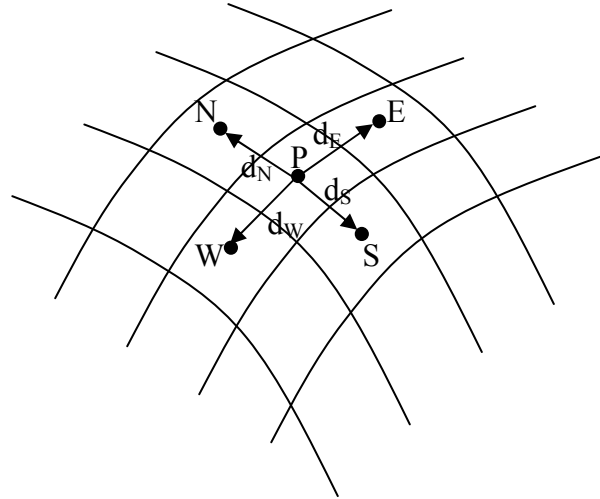


Figura 5.3 – Distância do centro do volume elementar P para os seus vizinhos

Para o caso 3D, o procedimento para conectar o poço com o volume de controle se dá pela aplicação do modelo bidimensional para cada camada.

A mobilidade, λ_p^p , tem uma equação específica para cada tipo de poço. Para o poço produtor, a mobilidade é definida como:

$$\lambda_p^p = \frac{\mathbf{k}k^{rp}}{\mu^p} . \quad (5.5)$$

Para o poço injetor, a mobilidade é definida por:

$$\lambda_p^p = \frac{\mathbf{k}}{\mu^p} . \quad (5.6)$$

Nos poços injetores, não é considerada a permeabilidade relativa, pois no interior desse poço tem-se um escoamento de apenas um componente.

A densidade média também possui definição diferente dependendo do tipo de poço. Para o poço de injeção, ela é a densidade do componente que está sendo injetado. Para o poço produtor, ela é definida como:

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_p (\rho^p q_i^p)}{\sum_{i=1}^k \sum_p (q_i^p)} , \quad (5.7)$$

onde k representa o número de camadas na qual o poço está perfurado. q_i^p corresponde à vazão em cada camada. Da mesma forma, ρ^p é a densidade de cada camada. Um fato importante a ser mencionado é que para o cálculo da densidade média foram considerados valores do passo de tempo anterior, uma vez que poderia ter sido usado uma outra aproximação, como por exemplo, os valores da iteração anterior.

5.2 Condição de contorno para os poços

A condição de contorno adotada para o poço injetor foi de vazão prescrita. Desta forma, a vazão de água injetada no poço deve ser distribuída pelo número de camadas na qual o poço passa. A vazão em cada camada é dada por:

$$q_i^p = Y Q_{poço} , \quad (5.8)$$

onde Y é a fração de volume para a camada k e $Q_{poço}$ é a vazão de água total injetada. O Y é definido como a razão entre o volume do volume elementar em que está o poço (V_P) e o volume total dos volumes elementares que formam o poço (V_{TP}) (Figura 5.4):

$$Y = \frac{V_P}{V_{TP}} \quad (5.9)$$

e o V_{TP} é dado pelo seguinte somatório:

$$V_{TP} = \sum_{I=1}^N V_I \quad , \quad (5.10)$$

onde N é o número de camadas em que o poço está perfurado e V_I é o volume da camada.

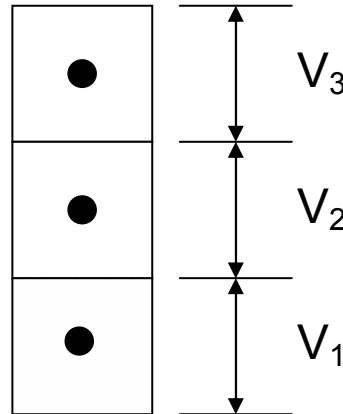


Figura 5.4 – Exemplo de um poço perfurado em três volumes elementares

Para o poço produtor, as condições de contorno utilizadas foram: pressão de fundo de poço prescrita e vazão de líquido prescrita.

Para o cálculo da vazão de óleo e água em determinado poço, considerando a pressão de fundo de poço prescrita, deve-se substituir a pressão prescrita diretamente na Eq. (5.1). Com isso, as vazões dos componentes em cada camada serão determinadas. A vazão total no poço produtor será a soma das vazões dos componentes que estão sendo considerados.

Para o cálculo da vazão dos componentes quando a condição de contorno for a de vazão de líquido prescrita, deve-se determinar primeiramente a pressão do fundo do poço usando a equação:

$$P^{wf} = \frac{-Q_{stc}^T \bar{\rho} + \sum_{k=1}^{NK} \sum_{i=1}^n W I_k \lambda_k^p P_k^p \bar{\rho} g (z_k - z_1)}{\sum_{k=1}^{NK} \sum_{i=1}^n W I_k \lambda_k^p} \quad , \quad (5.11)$$

onde Q_{stc}^T é a vazão de líquido prescrita nas condições de superfície.

O cálculo da vazão de cada componente é dado pela equação Eq. (5.1). Segundo Palagi (1992), o seguinte limite deve ser imposto para os poços produtores:

$$\text{se } [P^p - P^{wf}] < 0, \text{ então } [P^p - P^{wf} + \bar{\rho}g(z_p - z_1)] = 0 . \quad (5.12)$$

Com essa condição a vazão na camada será igual a zero.

5.3 Condições de contorno baseadas nas mobilidades

Uma outra opção de condições de contorno, para o caso de vazão de líquido prescrita, é o emprego das condições de contorno baseadas nas mobilidades. No emprego destas, admite-se que a vazão de cada fase é proporcional às mobilidades:

$$\frac{q^w}{\lambda^w} = \frac{q^o}{\lambda^o} = \frac{q^L}{\lambda^L} , \quad (5.13)$$

onde q^L é a vazão de líquido prescrita, que é composta pela vazão de água e de óleo. λ^L é soma das mobilidades da água e do óleo:

$$q^L = q^w + q^o , \quad (5.14)$$

$$\lambda^L = \lambda^w + \lambda^o . \quad (5.15)$$

A vazão para cada camada é obtida de acordo com a Eq. (5.8). A vazão de cada componente é dada por uma fração da vazão de líquido prescrita, que depende da razão entre a mobilidade do componente e a mobilidade total da mistura.

$$q^p = \frac{\lambda^p}{\lambda^L} q^L \quad (5.16)$$

6 INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS

A etapa de inicialização das variáveis como pressão e saturação em um reservatório de petróleo é importante para posicionar os fluidos de interesse em cada volume elementar. Isso deve ser feito de forma a respeitar as propriedades da rocha, dos fluidos e também as leis físicas que governam a distribuição dos fluidos no reservatório.

Descreve-se neste capítulo o processo de inicialização das variáveis reportado em Palagi (1992).

6.1 Condições de equilíbrio

Para que um reservatório esteja em equilíbrio as velocidades ou fluxos de todas as fases devem ser nulos, em todas as interfaces dos volumes de controle. A Eq. (6.1) representa o fluxo da fase p através de uma interface j do volume elementar i (Heinemann e Brand, 1989):

$$q^p = T_{ij} \left(\frac{k^{rp}}{\mu^p} \right) (\Phi_j^p - \Phi_i^p), \quad (6.1)$$

onde T_{ij} é a transmissibilidade entre os blocos e envolve informações geométricas e do reservatório na interface ij . A transmissibilidade é dada por:

$$T_{ij} = \frac{A_{ij}}{h_{ij}}, \quad (6.2)$$

onde A_{ij} e h_{ij} são, respectivamente, uma área e uma distância de interesse para a passagem de fluxo. No presente trabalho, T_{ij} é dado por:

$$T_{ij} = G_i^p \frac{\mu^p}{k^{rp}}. \quad (6.3)$$

O inverso da transmissibilidade é a chamada resistividade \mathbf{r} , sendo dada por:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{T_{ij}} \quad (6.4)$$

A transmissibilidade entre volumes de controle em contato depende da forma geométrica dos volumes e das permeabilidades, logo, uma transmissibilidade pode ser definida para cada volume. Para o cálculo da transmissibilidade total pode-se fazer uso da Lei de Ohm, pois a Eq. (6.1) é uma expressão de uma diferença de potencial genérica, assim, conexões em série e em paralelo podem ser consideradas para totalizar as transmissibilidades. Para o caso de conexões em paralelo a média harmônica deve ser utilizada.

Para que o fluxo do componente p seja zero, uma das três condições a seguir deve ser satisfeita: $T_{ij} = 0$; $k^p = 0$ e $(\Phi_j^p - \Phi_i^p) = 0$. Assim, o processo de inicialização deve garantir que uma dessas condições seja satisfeita, em cada conexão dos volumes elementares que formam a malha. Outros pontos que não devem deixar de ser considerados são o empuxo e as forças capilares.

Conforme definido anteriormente no Capítulo 6, a coordenada z é positiva no sentido contrário ao vetor gravidade, sendo zero no contato óleo e água. Será ainda definida a coordenada D , que é a medida do topo para o fundo do reservatório e a D_{cow} que é a profundidade do contato óleo e água (Figura 6.1). Destaca-se que z é medido a partir do contato óleo e água.

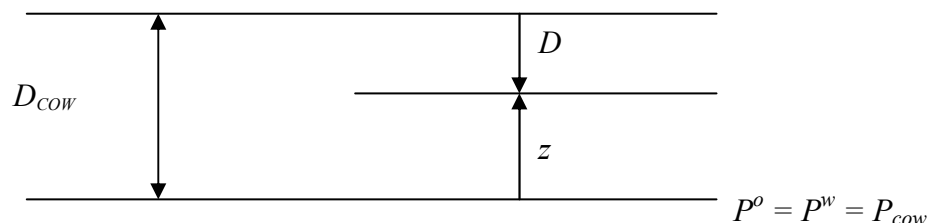


Figura 6.1 – Distâncias empregadas no processo de inicialização

Pode-se verificar também que no contato óleo e água, a pressão da água (P^w) é igual a pressão do óleo (P^o), fazendo com que a pressão capilar do contato óleo e água seja zero.

6.2 Análise das fases

A diferença de potencial em cada fase é dada pela seguinte equação:

$$\Phi_j^p - \Phi_i^p = P_j^p - P_i^p + (z_j - z_i) \gamma_{ij}^p . \quad (6.5)$$

Para uma condição em que a permeabilidade relativa seja diferente de zero em todas as interfaces e não exista uma falha geológica, é necessário que:

$$P_j^p - P_i^p + (z_j - z_i) \gamma_{ij}^p = 0 , \quad (6.6)$$

que representa a forma discretizada da condição de equilíbrio hidrostático que é melhor representada pela equação integral a seguir:

$$P^{p*}(z) = P_{cow} - \int_0^z \gamma^p dz , \quad (6.7)$$

onde P_{cow} é um parâmetro atribuído e denota a pressão capilar no contato óleo e água e o * sobrescrito se refere a fase contínua. O γ^p é função da região PVT para o óleo. Apesar disso, o uso de diferentes regiões PVT deve ser consistente para a mesma região de contato óleo e água (COW). O γ^p é dado por:

$$\gamma^p = \frac{\rho^p g}{B^p} , \quad (6.8)$$

onde B^p é o fator volume de formação do componente em questão (óleo ou água).

A pressão capilar de equilíbrio para a fase contínua é dada por:

$$P_c^*(z) = P^{o*}(z) - P^{w*}(z) . \quad (6.9)$$

6.3 Determinação da saturação da água inicial

A saturação da água inicial (S_{ini}^w) para uma localização z será determinada como uma função de $P_c^*(z)$ na correspondente região da rocha.

Deve ser observado que o gradiente de pressão inicial, e daí, a pressão capilar inicial, não são funções das características da rocha. No entanto, a saturação da água inicial depende destas características.

Uma vez que as Eqs. (6.7) e (6.9) foram deduzidas assumindo fases contínuas, as seguintes condições devem ser incluídas no cálculo da saturação inicial da água:

- se $P_c^*(z) > P_{c,max}^*$ então $S_w(z) = S_{wc}$; (6.10)

- se $P_c^*(z) < 0$ então $S_w(z) = 1$. (6.11)

Como a saturação da água é expressa em função de z , deve-se calcular a integral da saturação da água sobre a altura. Essa integral será dada por:

$$ZS(z) = \int_0^z S_w dz , \quad (6.12)$$

onde $ZS(z)$ é função da região PVT e das propriedades da rocha.

A saturação da água inicial em um volume elementar é dada por:

$$S_{i,ini}^w = \frac{1}{h_i} [ZS(z_{i,top}) - ZS(z_{i,bottom})] , \quad (6.13)$$

onde $z_{i,top}$ é a coordenada do topo do volume elementar e $z_{i,bottom}$ é a coordenada do fundo do mesmo volume elementar e h_i é a altura do bloco.

6.4 Determinação da pressão do óleo inicial

A pressão do óleo inicial e a pressão capilar inicial são calculadas a partir das Eqs. (6.7) e (6.9):

$$P_{i,ini}^o = P^{o*}(z_i) , \quad (6.14)$$

$$P_{c,ini} = P_c^*(z) , \quad (6.15)$$

onde z_i é a coordenada do volume elementar em estudo.

Devem ser incluídas as seguintes restrições para considerar o cálculo contínuo de cada fase:

- se $z_{i,top} > 0$ então $P_{i,ini}^o = P^{w*}(z)$, e $P_{c,i,ini} = 0$; (6.16)

- se $z_{i,bottom} > z_{max}$ então $P_{c,i,ini} = P_{c,max}$. (6.17)

Deve ser observado que $P_{c,ini}$ e a S_{ini}^w não mantêm uma relação direta na respectiva região da rocha. Portanto, deve-se incluir uma correção na pressão capilar para que esta atenda a condição de equilíbrio inicial e satisfaça o balanço de massa. Essa correção será dada por:

$$P_c^{corr} = P_{c,ini} - P_{c,tab}(S_{ini}^w) ; \quad (6.18)$$

onde $P_{c,tab}$ é um valor obtido da curva da rocha.

A pressão capilar, durante o processo de simulação, é calculada de acordo com a equação abaixo:

$$P_{c,ini}(S^w) = P_c^{corr} + P_{c,tab}(S^w) . \quad (6.19)$$

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem como objetivo mostrar os resultados obtidos com o simulador SIM3D, que foi desenvolvido ao longo deste trabalho, tomando como base o simulador 2D (Coutinho, 2002). A formulação matemática e a metodologia numérica apresentada nos capítulos anteriores foram amplamente utilizadas no desenvolvimento deste programa computacional acadêmico.

O SIM3D consiste de duas etapas: a primeira é composta pelo processo de inicialização descrito por Palagi (1992) e a segunda tem por objeto a obtenção da solução final. A validação da solução obtida será feita confrontando os resultados obtidos com o SIM3D com os resultados fornecidos pelo simulador comercial IMEX. A validação do sistema de inicialização será feita através do cálculo dos valores iniciais para a saturação da água e o potencial do óleo para os diversos volumes do domínio, tomando como base o exemplo de inicialização descrito por Palagi (1992). Será feita uma comparação entre o sistema de inicialização implementado no SIM3D e o sistema de inicialização do simulador comercial IMEX.

Um estudo da função de interpolação CDS atrasado será feito, através de uma comparação com a função de interpolação UDS. Neste estudo, busca-se comprovar se a aplicação da função CDS atrasado em malhas grosseiras resulta em soluções sem difusão e oscilação numérica.

7.1 Comparação do SIM3D com o IMEX

Com o intuito de validar a solução obtida com simulador SIM3D, foi feita uma comparação com o simulador comercial IMEX. Para confrontar os dados obtidos com o SIM3D e com o IMEX, o procedimento de inicialização do SIM3D foi por atribuição, ou seja, os valores das condições iniciais de saturação, pressão do óleo, potencial do óleo e pressão capilar foram calculadas com o IMEX e aplicados ao SIM3D. Este procedimento foi feito para não utilizar o processo de inicialização que será estudado no item 7.2. Para a validação foram simulados dois casos:

- **Caso 1**

Foi utilizado o reservatório areal retangular, cujas propriedades constam na Tabela 7.1. A discretização do domínio foi feita utilizando uma malha cartesiana 5x5x3. A Figura 7.1 mostra uma vista superior do reservatório com malha 5x5x3 cartesiana e na Figura 7.2 pode-se ver uma perspectiva desta malha. O poço de injeção é perfurado da camada 1 até 3 e o de produção foi perfurado apenas na camada 3. As Figuras 7.3 e 7.4 mostram o posicionamento dos poços.

Tabela 7.1 – Dados físicos do reservatório areal retangular

Dados do Reservatório		
Comprimento	1463,0	m
Largura	1463,0	m
Altura	15,0	m
Porosidade – ϕ	0,2	
Raio do poço – r_w	0,122	m
Permeabilidade absoluta do meio – K	$1,0 \times 10^{-12}$	m^2
Propriedades Físicas		
Vazão de injeção	$1,1574 \times 10^{-3}$	m^3/dia
Fator volume de formação da água – B_{ref}^w (para P_{ref})	1,0	
Fator volume de formação do óleo – B_{ref}^o (para P_{ref})	1,0	
Pressão de referência – P_{ref}	207,33	kPa
Compressibilidade da água – c^w	$-1,0 \times 10^{-13}$	Pa^{-1}
Compressibilidade do óleo – c^o	$-1,0 \times 10^{-13}$	Pa^{-1}
Compressibilidade da rocha – c_r	0,0	Pa^{-1}
Densidade da água – ρ^w	1000,0	kg/m^3
Densidade do óleo – ρ^o	800,0	kg/m^3
Viscosidade da água – μ^w	0,0008	Pa.s
Viscosidade do óleo – μ^o	0,005	Pa.s
Saturação do óleo residual – S_r^o	0,2	

Tabela 7.2 – Condições iniciais obtidas com IMEX e atribuídas ao SIM3D

Camadas	Saturação da água	Pressão do óleo (kPa)	Potencial do óleo (kPa)	Pressão capilar (kPa)
3	0,2	226,9	226,9	0,0
2	0,2	266,2	226,9	0,0
1	0,2	305,4	226,9	0,0

Tabela 7.3 – Permeabilidades relativas da água e do óleo (Caso 1)

Saturação de água (S_w)	Permeabilidade relativa da água (k^{rw})	Permeabilidade relativa da água (k^{ro})
0,20	0,0	0,8
0,30	0,012	0,4096
0,40	0,048	0,1728
0,50	0,108	0,0512
0,60	0,192	0,0064
0,70	0,3	0,0
1,00	1,0	0,0

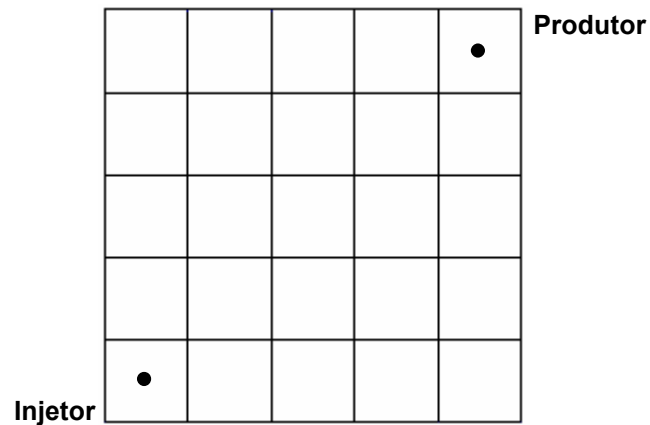


Figura 7.1 – Topo da malha 5x5x3 cartesiana para o reservatório areal retangular

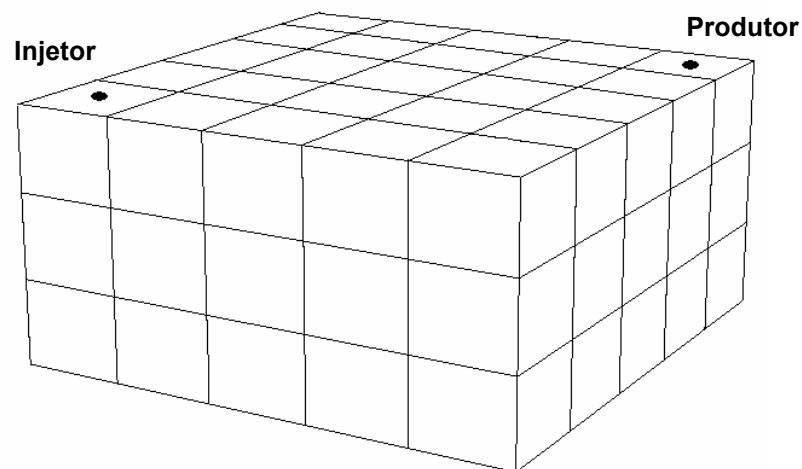


Figura 7.2 – Perspectiva do reservatório areal retangular



Figura 7.3 – Posicionamento do poço injetor

Para padronizar os parâmetros de entrada, foi atribuído para o índice do poço um valor igual a 10^{-9} m^2 . Os valores iniciais atribuídos para a saturação da água, pressão do óleo e potencial do óleo são mostrados na Tabela 7.2. A função de interpolação utilizada foi a UDS.

Na Tabela 7.3, têm-se os valores para a permeabilidade relativa da água e do óleo usada neste exemplo.

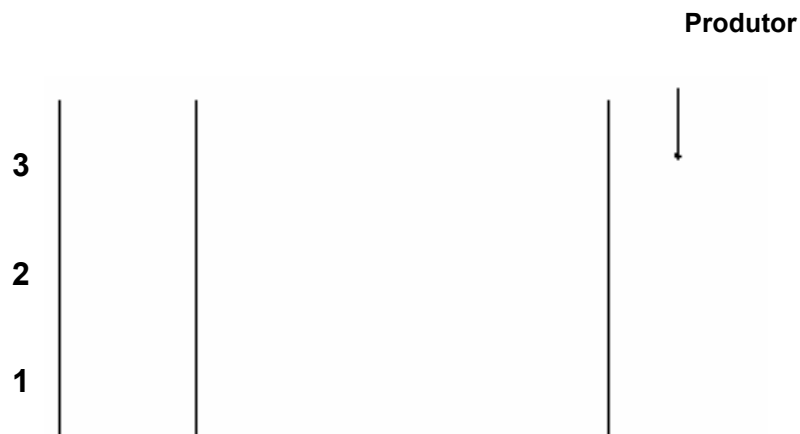


Figura 7.4 – Posicionamento do poço produtor

Na Figura 7.5, têm-se as duas curvas de corte de água para o SIM3D e IMEX. O corte de água é dado pela Eq. (7.1):

$$C^w = \frac{q^w}{q^w + q^o} , \quad (7.1)$$

onde q^w é a vazão de água e q^o é a vazão de óleo no poço produtor. Observa-se que os resultados obtidos com o SIM3D, são bastante similares aos obtidos com o IMEX. A mesma similaridade pode ser observada nas curvas de vazões de óleo e de água, que é mostrada na Figura 7.6. Foi observado na curva de vazão de óleo obtida com o SIM3D, um pico de vazão no início da simulação. Após o pico inicial, a vazão de óleo retorna para a vazão de óleo esperada, ou seja, $100 \text{ m}^3/\text{dia}$, que é a vazão de água injetada no poço injetor.

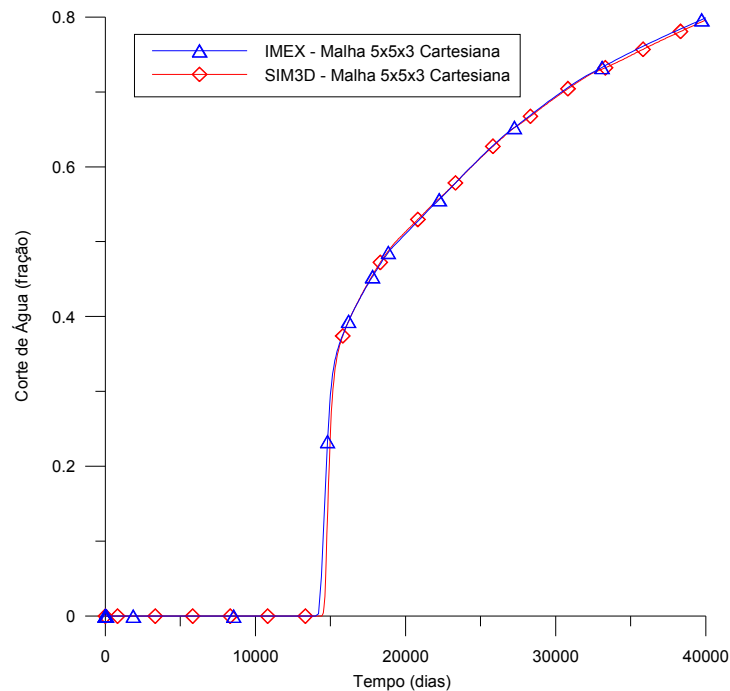


Figura 7.5 – Curvas de corte de água obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 5x5x3 cartesiana

A Figura 7.7 mostra a curva de pressão no bloco em que se encontra o poço produtor. Pode-se observar a concordância de resultados entre as duas curvas. Da mesma forma que na curva de vazão de óleo do SIM3D, a curva de pressão no bloco produtor apresenta um pico de pressão inicial. Após o pico, a pressão retornou para valores próximos aos obtidos com o IMEX.

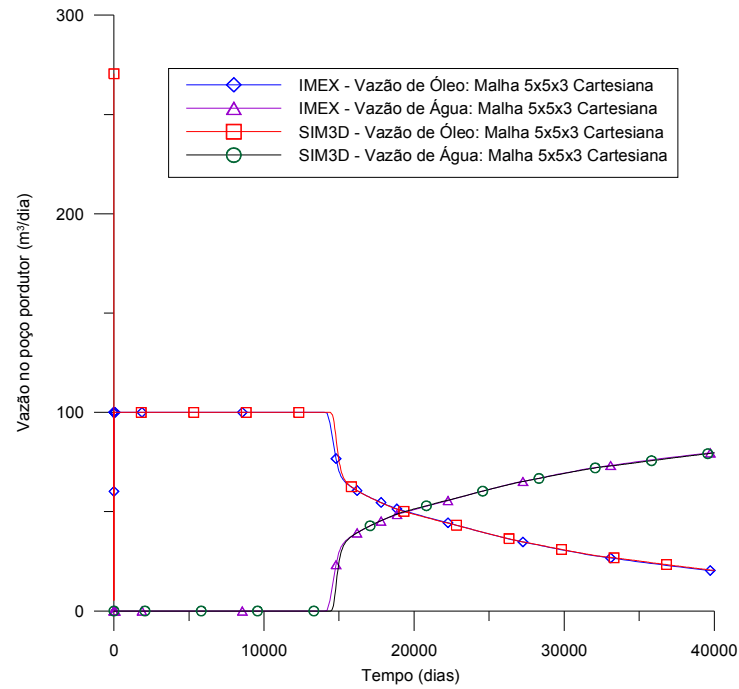


Figura 7.6 – Curvas de vazão de água e de óleo obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 5x5x3 cartesiana

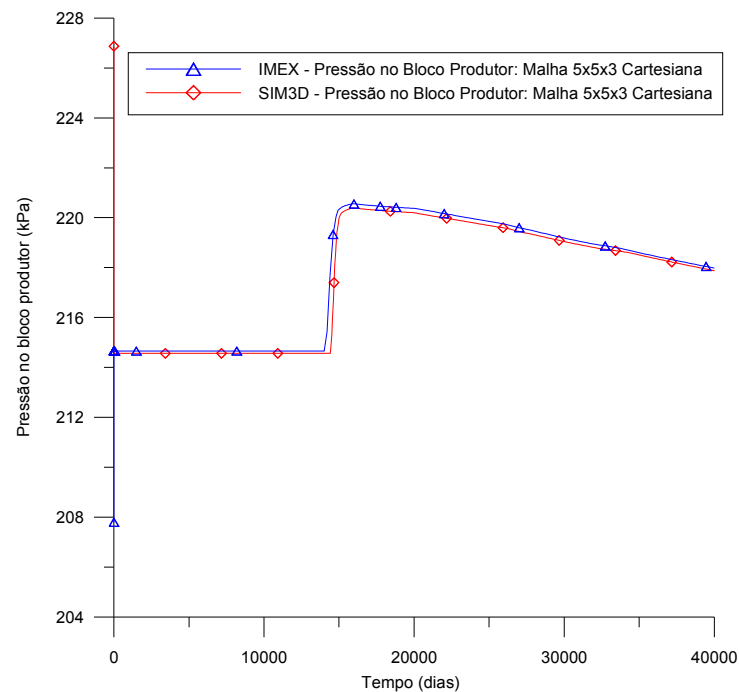


Figura 7.7 – Curvas de pressão no bloco produtor obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 5x5x3 cartesiana

- **Caso 2**

Neste caso foi utilizado o mesmo reservatório do Exemplo 1. A Figura 7.8 mostra a vista superior do reservatório areal com uma malha 16x16x3 generalizada. Nesse exemplo, os dados do reservatório e físicos, bem como o posicionamento dos poços é o mesmo usado para a malha 5x5x3.

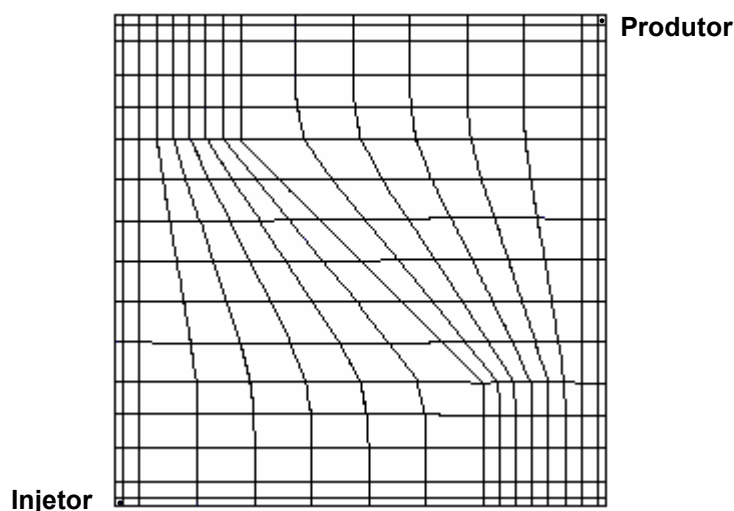


Figura 7.8 – Topo do reservatório areal com malha 16x16x3 generalizada

Na Figura 7.9, tem-se a curva de corte de água para a malha 16x16x3 generalizada. Constata-se que a chegada da água no SIM3D ocorre primeiro do que no IMEX. Observa-se que os resultados evoluem para uma concordância mais aceitável, por volta dos 20.000 dias. O erro no momento em que a água chega ao poço é da ordem de 16,40%. O valor do erro para o corte de água ao final dos 40.000 dias é da ordem de 0,58%. O mesmo comportamento é observado nas curvas de vazão de óleo e de água (Figura 7.10), como também, nas curvas de pressão no bloco onde se encontra o poço produtor (Figura 7.11). Na curva de pressão no bloco produtor obtida com o SIM3D observa-se um pico de pressão inicial de 223,29 kPa, em seguida esse valor cai para 214,56 kPa, que é um valor bem próximo ao obtido pelo IMEX, 214,56 kPa.

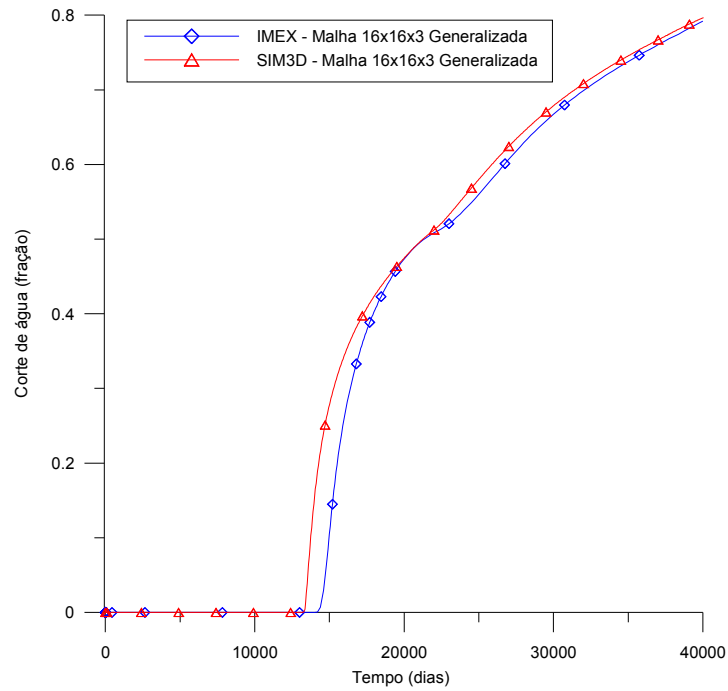


Figura 7.9 – Curvas de corte de água obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada

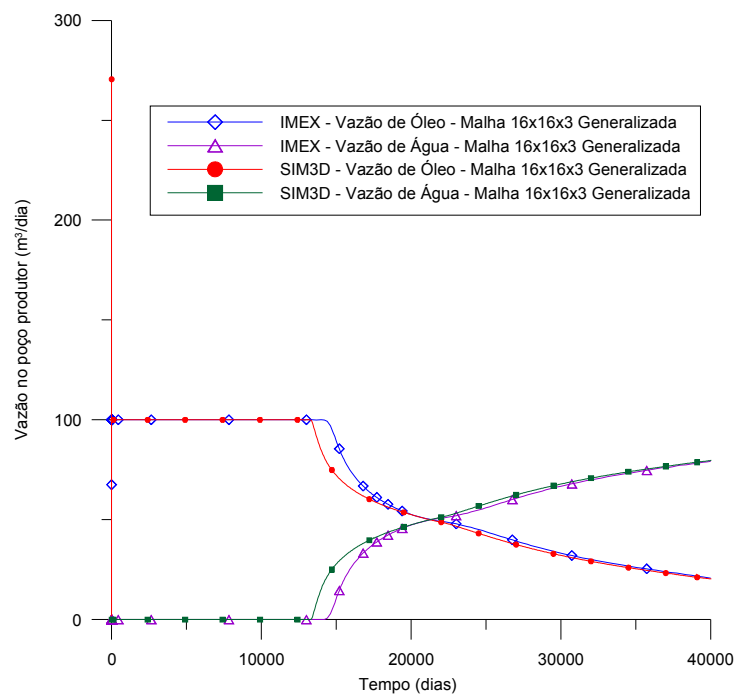


Figura 7.10 – Curvas de vazão de água e de óleo obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada

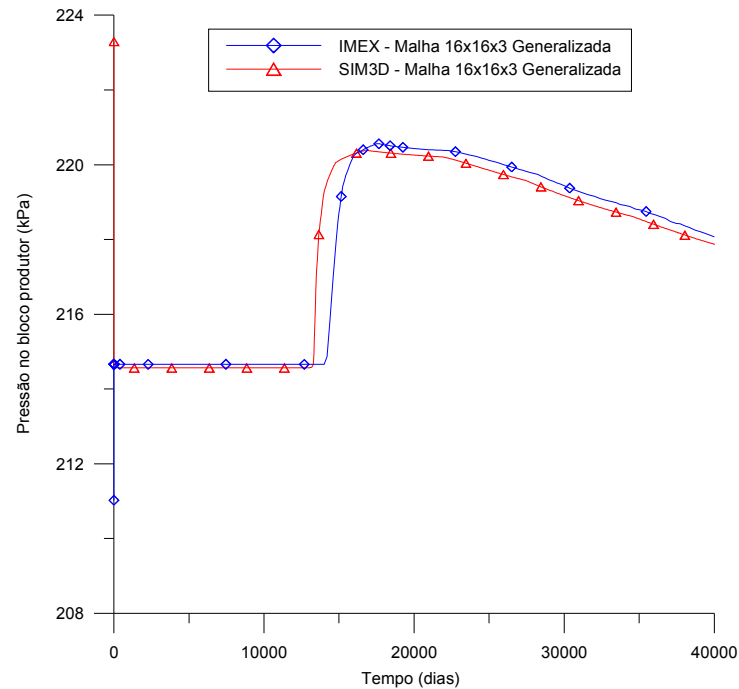


Figura 7.11 – Curvas de pressão no bloco produtor obtidas com o SIM3D e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada

Marcondes et al. (2005) mostra que uma possível explicação para esse erro (Figuras 7.9 – 7.11) é o não emprego dos termos cruzados no modelo usado pelo IMEX. Com o objetivo de investigar a influência dos termos cruzados, o caso 2 foi simulado retirando do modelo do SIM3D esses termos. A Figura 7.12 apresenta o resultado dessa simulação. Observa-se que a curva de corte de água se aproxima da curva de corte de água obtida com o IMEX, apresentando uma melhor coincidência dos resultados, isso por quê, as equações empregadas nos dois modelos, SIM3D e IMEX, são agora bastante similares. A não utilização dos termos cruzados no IMEX desconsidera uma parte importante do fluxo de massa, além disso, não se pode esperar que as equações aproximadas representem o conjunto de equações diferenciais parciais do problema.

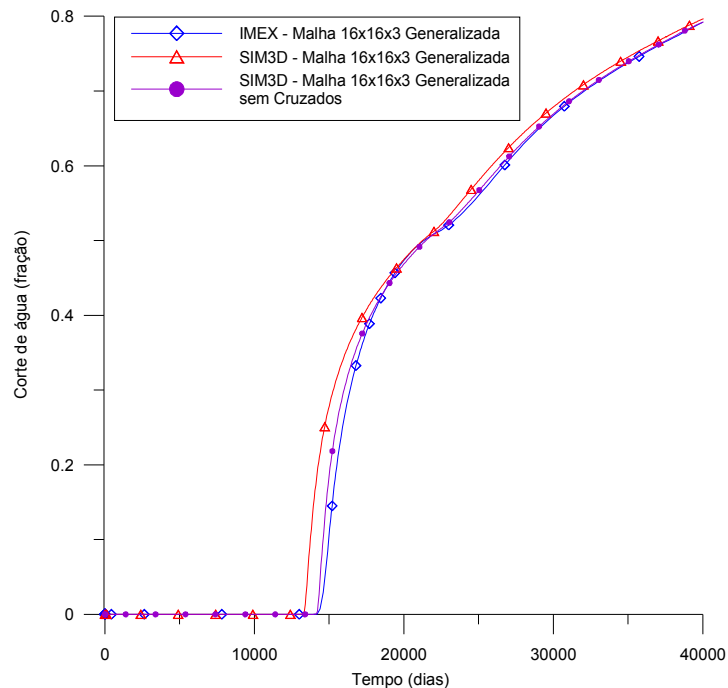


Figura 7.12 – Curvas de corte de água obtidas com o SIM3D, com e sem termos cruzados, e IMEX para uma malha 16x16x3 generalizada

7.2 Processo de inicialização dos campos de saturação da água e potencial do óleo

Para analisar o processo de inicialização descrito por Palagi (1992) e implementado no SIM3D, foram analisados dois casos:

- **Caso 3**

Este caso consiste em simular o exemplo 9.2 (Palagi, 1992) no SIM3D. Os dados do reservatório e as propriedades físicas são mostrados na Tabela 7.4. O reservatório foi dividido em 5 camadas (Tabela 7.5), apresentando cada uma variações de espessuras, permeabilidades e porosidades, sendo que, o contato óleo e água está posicionado no fundo da terceira camada. A Figura 7.13 mostra a perspectiva do reservatório e a Figura 7.14 mostra a vista superior do reservatório com o posicionamento dos poços injetor e produtor. No SIM3D, a camada 1 é a camada inferior, ao contrário de Palagi (1992), em que a camada 1 é a camada superior do reservatório. O poço de injeção é completado nas camadas de 3 a 5 e o poço de

produção é perfurado apenas na camada 5. A pressão capilar é considerada nula, com saturação da água máxima igual a 0,22. Desta forma, utilizando o procedimento delineado no Capítulo 6, obtém-se uma saturação da água de 0,22 nas camadas acima do contato óleo e água (camadas 3, 4 e 5) e saturação da água igual a 1,0 nas camadas abaixo do contato óleo e água (camadas 1 e 2).

Como a permeabilidade varia ao longo do reservatório, deve-se calcular o valor da permeabilidade vertical na interface entre os volumes elementares. O valor da permeabilidade entre os volumes i e j (Figura 7.15) é calculado utilizando a média harmônica, fazendo uso do conceito de associação de resistores em paralelo. A equação a seguir mostra como a permeabilidade entre esses volumes é calculada:

$$k_{ij} = \frac{2k_i k_j \Delta z_i}{k_j \Delta z_i + k_i \Delta z_j}, \quad (7.2)$$

onde k_i e k_j são as permeabilidades verticais das camadas. Δz_i e Δz_j são as espessuras das camadas.

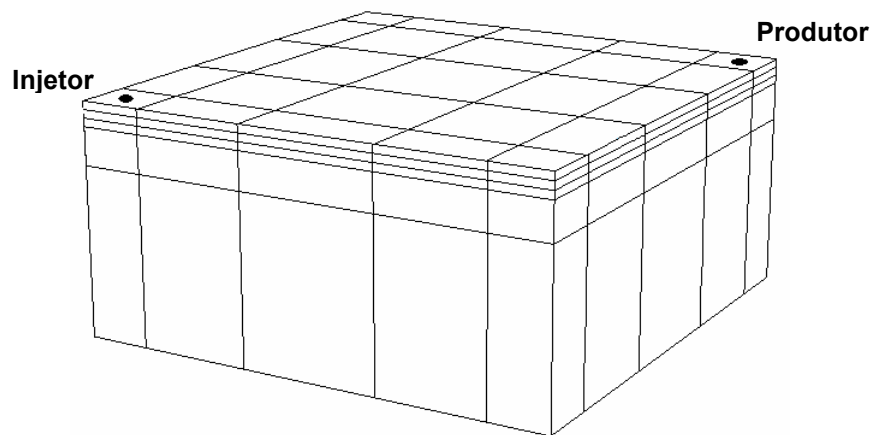
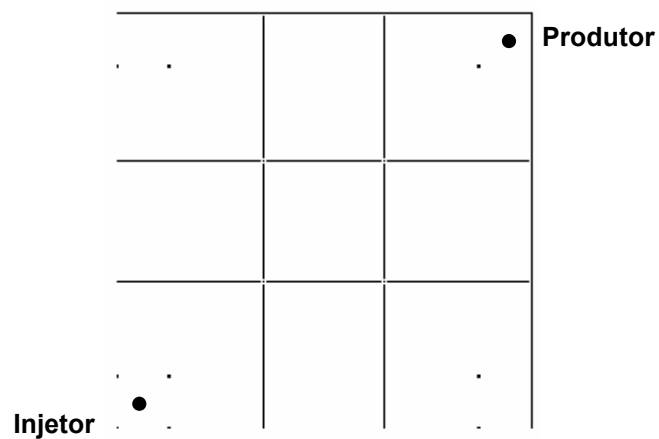
Tabela 7.4 – Dados do reservatório e propriedades físicas para um quarto de *five-spot*

Dados do Reservatório		
Comprimento	182,88	m
Largura	182,88	m
Altura	9,15	m
Propriedades Físicas		
Vazão de injeção e produção	31,7952	m ³ /dia
Fator volume de formação da água – B_{ref}^w (para P_{ref})	1,0108	
Fator volume de formação do óleo – B_{ref}^o (para P_{ref})	1,318	
Pressão de referência – P_{ref}	24821,13	kPa
Compressibilidade da água – c^w	$-4,5 \times 10^{-10}$	Pa ⁻¹
Compressibilidade do óleo – c^o	$-7,25 \times 10^{-10}$	Pa ⁻¹
Compressibilidade da rocha – c_r	$5,8 \times 10^{-10}$	Pa ⁻¹
Densidade da água – ρ^w	1005,9618	kg/m ³
Densidade do óleo – ρ^o	900,2397	kg/m ³
Viscosidade da água – μ^w	0,0005	Pa.s
Viscosidade do óleo – μ^o	0,002	Pa.s
Pressão do contato água e óleo – P_{COW}	24821,13	kPa

Tabela 7.5 – Propriedades das camadas para um quarto de *five-spot*

Camadas	Espessura (m)	Perm. Horizontal (m ²)	Perm. Vertical (m ²)	Porosidade
5	3,05	$4,95 \times 10^{14}$	$2,47 \times 10^{14}$	0,129
4	3,05	$9,90 \times 10^{-14}$	$4,95 \times 10^{14}$	0,149
3	3,05	$9,90 \times 10^{-14}$	$4,95 \times 10^{14}$	0,149
COW				
2	14,02	$1,98 \times 10^{-13}$	$9,90 \times 10^{-14}$	0,132
1	63,09	$1,98 \times 10^{-13}$	$9,90 \times 10^{-14}$	0,136

Fonte: Palagi (1992).

Figura 7.13 – Perspectiva do reservatório para um quarto de *five-spot*Figura 7.14 – Vista superior para um quarto de *five-spot*

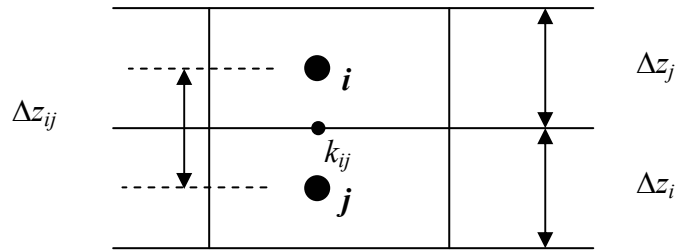


Figura 7.15 – Volumes com permeabilidade vertical distintas

Os valores das permeabilidades relativas do óleo e da água podem ser vistos na Tabela 7.6.

Tabela 7.6 – Permeabilidades relativas da água e do óleo

Saturação da água (S^w)	Permeabilidade relativa da água (k_{rw})	Permeabilidade relativa do óleo (k_{ro})
0,22	0,0	1,0
0,30	0,07	0,4
0,40	0,15	0,125
0,50	0,24	0,0649
0,60	0,33	0,0048
0,80	0,65	0,0
0,90	0,83	0,0
1,00	1,0	0,0

Na Tabela 7.7, pode-se verificar os valores iniciais para a saturação da água, pressão, potencial do óleo e pressão capilar para as 5 camadas. Observa-se que a saturação da água nas camadas 1 e 2 é igual a 1, ou seja, todo os volumes de controle dessas camadas estão inundados de água; nas camadas 3 a 5, acima do contato água e óleo, o valor para a saturação da água é igual a 0,22 em cada camada; e acima do contato óleo e água tem-se os mesmos valores para o potencial do óleo, 24821,10 kPa, a pressão do óleo cresce da camada superior para inferior.

A Figura 7.16 mostra o gráfico de Volume Poroso Injetado (VPI) versus o Volume Poroso de Óleo Recuperado (VPOR). As Eqs. (7.3) e (7.4) mostram como é calculado cada termo, respectivamente.

Tabela 7.7 – Condições iniciais calculadas com o procedimento de inicialização (Palagi 1992)

Camadas	Saturação da água	Pressão do óleo (kPa)	Potencial do óleo (kPa)	Pressão capilar (kPa)
5	0,22	24769,4	24821,1	0,0
4	0,22	24790,1	24821,1	0,0
3	0,22	24810,8	24821,1	0,0
COW				
2	1,0	24891,2	24842,7	0,0
1	1,0	25271,7	24961,4	0,0

$$VPI = \frac{Q_{total}^w t}{\phi V_R (1 - S_{ini}^w - S_r^o)} \quad (7.3)$$

$$VPOR = \int_0^t \frac{q^o(t) dt}{\phi V_R (1 - S_{ini}^w - S_r^o)} \quad (7.4)$$

Observa-se que as curvas obtidas com o SIM3D (Figura 7.16) apresentam uma boa coincidência até um VPI igual a 0,5, acima disso, as curvas começam a se distanciar. Essa divergência de resultado pode ser causada pela diferenças de modelos empregados para o cálculo da vazão no poço. Palagi (1992) utiliza, nesse exemplo, o modelo analítico, fato esse, explicitado no enunciado do problema 9.2. No Capítulo 6 de Palagi (1992), são apresentados 4 modelos de poços: Modelo de Van Poolen (van Poolen et al., 1968); Modelo de Peaceam (Peaceam, 1978); Modelo Analítico e o Modelo de Babu et al (Babu et al, 1991). Palagi (1992) afirma que o modelo do poço analítico não oferece bons resultados para malhas grosseiras, fato esse observado na Figura 7.16, onde a curva para a malha 5x5x5 é bem distante da malha 17x17x5 mais um refino de 5x4, considerada, por Palagi, como uma solução de referência para esse exemplo. O modelo de poço utilizado no SIM3D é um modelo baseado no Modelo de Peaceam, logo, é de se esperar resultados diferentes.

Devido às diferenças apresentadas nos resultados, foi simulado o mesmo caso somente alterando o formato da malha cartesiana. Esta passou de uma malha cartesiana de espaçamento variável para uma malha cartesiana de espaçamento uniforme. Simularam-se quatro malhas: 5x5x5, 10x10x5, 15x15x5 e 5x5x5 com um refino, próximo ao poço produtor, com uma malha de 10x10. Esse refino, conforme demonstrado por Palagi (1992), melhora

consideravelmente a solução, aproximando o resultado da solução correta. A vista superior dessa malha 5x5x5 com refino 10x10 pode ser visto na Figura 7.17. Aqui, procurou-se observar o comportamento da curva VPI x VPOR, no sentido de averiguar se com o refinamento da malha os resultados tornam-se independentes desta, o que se pode observar na Figura 7.18. Observa-se, portanto, que a curva das malha 10x10x5 e 15x15x5 se distanciam dos resultados da malha 5x5x5, porém, os resultados obtidos com a malha 5x5x5 com refino 10x10, estão mais próximos dos resultados da malha 15x15x5, o que demonstra uma tendência de independência dos resultados com o refino da malha.

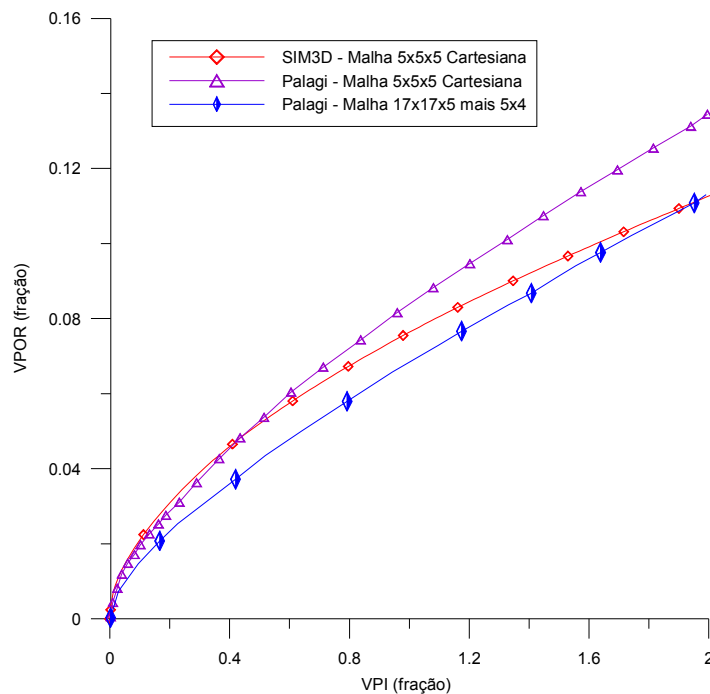


Figura 7.16 – Curvas de VPI x VPOR para o Exemplo 9.2 de Palagi (1992)

Constata-se também, que o refino da malha na região do poço, melhora consideravelmente o resultado obtido. Esse fato é constatado, quando se comparam os resultados obtidos com a malha 15x15x5 com a malha 5x5x5 com refino próximo ao poço produtor. Basicamente essas duas malhas possuem o mesmo número de volumes elementares (1125 volumes) sendo que a segunda possui um refinamento próximo ao poço produtor.

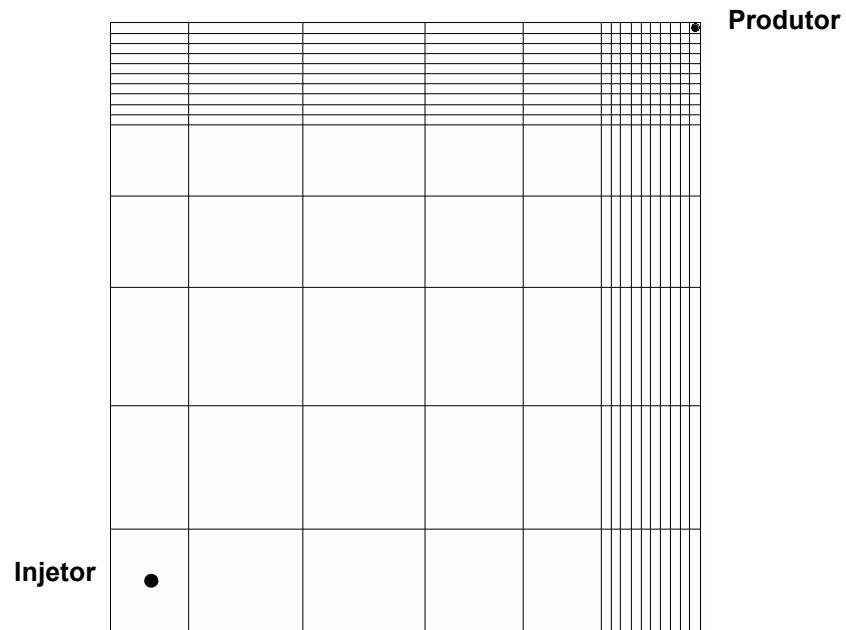


Figura 7.17 – Vista superior para a malha 5x5x5 com refino próximo do poço produtor de 10x10

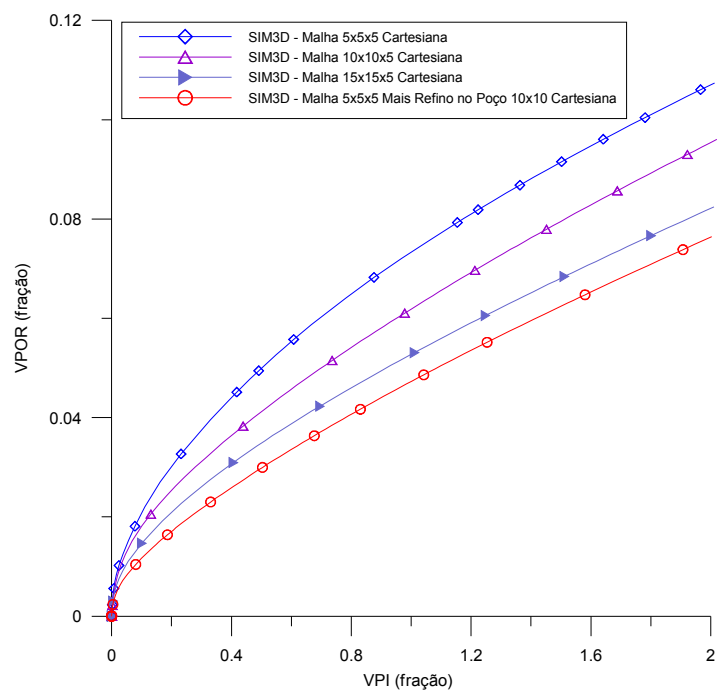


Figura 7.18 – Curvas de VPI x VPOR para as malhas cartesianas igualmente espaçadas para o caso Palagi (1992)

- **Caso 4**

Para avaliar a diferença existente entre os processos de inicialização do SIM3D e do IMEX, foi simulado novamente, no SIM3D, o Caso 1, com as condições iniciais calculadas pelo processo de inicialização implementado. Os dados do reservatório e físicos são mostrados na Tabela 7.1 e as permeabilidades relativas da água e do óleo são as mesmas da Tabela 7.3, A pressão do contato óleo e água (P_{cow}) considerada foi de 207,33 kPa e a pressão capilar foi assumida ser zero.

Os valores das condições iniciais obtidas com o IMEX e com o SIM3D são mostrados na Tabela 7.8. A saturação da água para todas as camadas, obtidas pelo IMEX e SIM3D, foi de 0,20.

Pela Tabela 7.8, verifica-se que a pressão e o potencial do óleo obtidos com o processo de inicialização do SIM3D é menor do que os obtidos com o IMEX. Os erros para a pressão do óleo crescem da camada inferior para a superior. O potencial do óleo possui um erro de 8,60 % para todas as camadas.

Tabela 7.8 – Comparação das condições iniciais calculadas pelo IMEX e SIM3D

Camadas	Pressão do óleo(kPa)			Potencial do óleo (kPa)		
	IMEX	SIM3D	Erro (%)	IMEX	SIM3D	Erro (%)
3	226,9	109,2	51,87	226,9	207,33	8,6
2	266,2	148,5	44,21	226,9	207,33	8,6
1	305,4	187,7	38,53	226,9	207,333	8,6

Na Figura 7.19, tem-se uma comparação das curvas de corte de água obtidas pelos dois processos de inicialização, ou seja, condições iniciais atribuídas com os valores obtidos no IMEX (Caso 1) e condições iniciais calculadas pelo processo de inicialização implementado no SIM3D.

Verifica-se que apesar dos valores das condições iniciais serem diferentes (Tabela 7.8), as duas curvas apresentaram uma excelente coincidência de resultados.

Na Figura 7.20, tem-se as curvas de vazões de água e óleo. Observa-se também uma concordância das curvas. A Figura 7.21 mostra as curvas de pressão no bloco produtor apresentado uma similaridade de resultados.

Dá análise das Figuras 7.19, 7.20 e 7.21, conclui-se que apesar dos valores das condições iniciais serem diferentes (Tabela 7.8) os resultados obtidos para o corte de água, vazão de água e óleo e pressão no bloco produtor apresentaram resultados semelhantes.

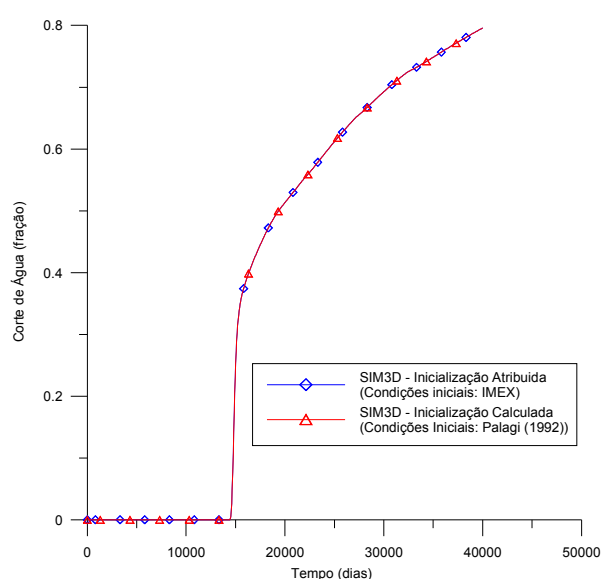


Figura 7.19 –Curvas de corte de água para um malha 5x5x3 cartesiana obtidas com processos de inicializações atribuída e calculada

A Figura 7.22 mostra uma comparação das vazões de água e óleo entre os resultados obtidos com o SIM3D simulado com condições iniciais calculadas e com os resultados obtidos com o IMEX. Observa-se que na curva de vazão de óleo do SIM3D, o pico de vazão de óleo que foi observado na Figura 7.6 não é apresentado, resultando em uma melhor coincidência com a curva de vazão de óleo do IMEX. O mesmo comportamento foi constatado na curva de pressão do bloco produtor (Figura 7.23), onde o pico de pressão observado na curva do SIM3D com simulação atribuída (Figura 7.7) não foi detectado. O desaparecimento do pico se deve as baixas condições iniciais impostas pela inicialização implementada (Tabela 7.8), resultando em baixas vazões de óleo e pressões no bloco.

Conclui-se então, que o processo de inicialização do Palagi (1992), resulta soluções mais próximas das obtidas com o simulador comercial IMEX.

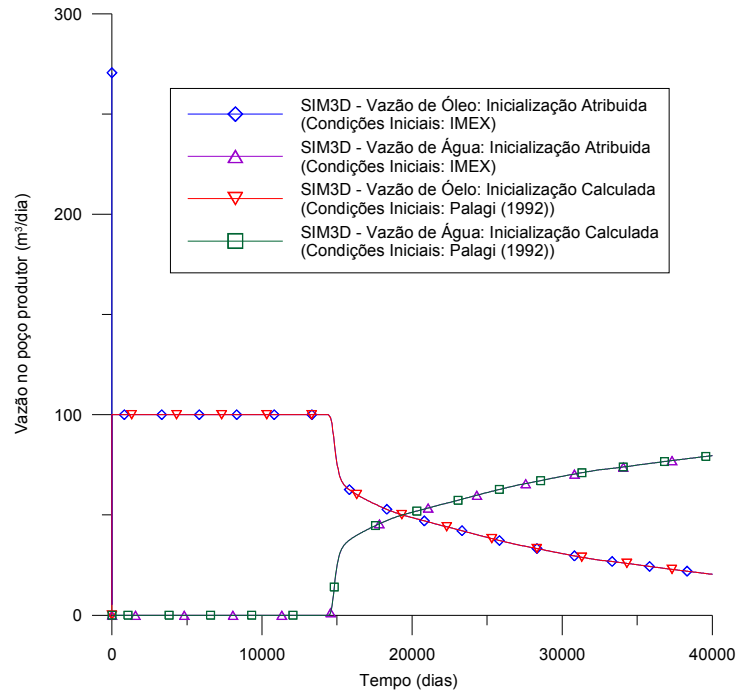


Figura 7.20 –Curvas de vazões de água e óleo para um malha 5x5x3 cartesiana obtidas com processos de inicializações atribuída e calculada

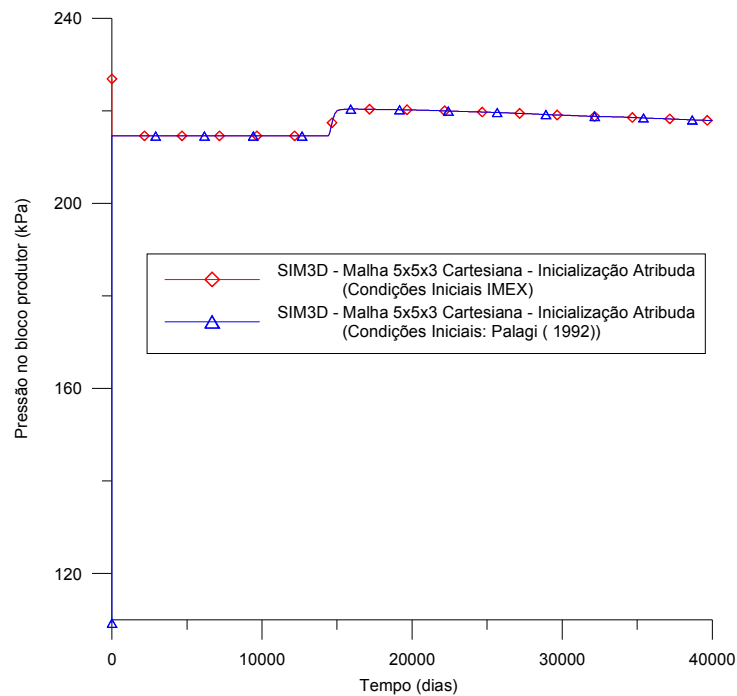


Figura 7.21 – Curvas de pressão no bloco produtor para um malha 5x5x3 cartesiana obtidas com processos de inicializações atribuída e calculada

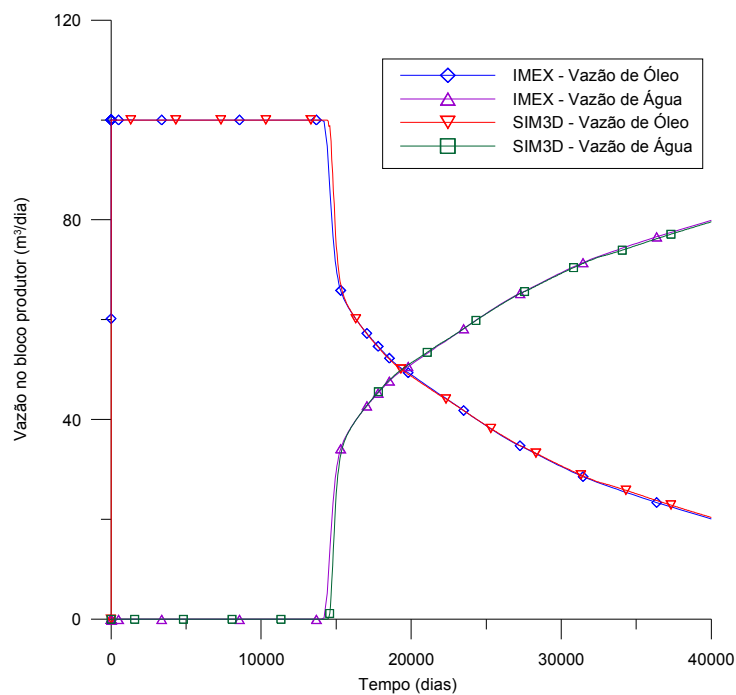


Figura 7.22 – Curvas de vazões de água e óleo. Malha 5x5x3 cartesiana

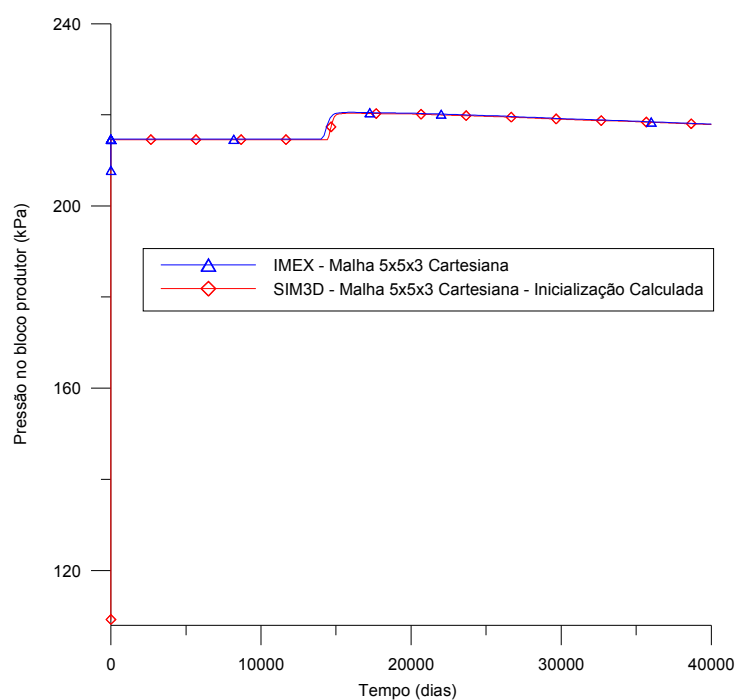


Figura 7.23 – Curvas de pressão no bloco produtor. Malha 5x5x3 cartesiana.

7.3 Função de interpolação CDS atrasado

Para o estudo da função de interpolação CDS atrasado, será feita uma comparação dessa função, com a função de interpolação UDS. No CDS atrasado serão aplicados diferentes pesos, com o intuito de observar o comportamento da curva de corte de água do poço de produção frente à curva obtida com o UDS. Dois tipos de escoamento serão utilizados, o escoamento tipo pistão (Caso 5) e o escoamento não pistão (Caso 6).

- **Caso 5**

Neste caso foi utilizado um escoamento tipo pistão. Esse não é um escoamento típico de reservatório, no entanto, devido ao surgimento de choques, este escoamento torna-se ideal para investigar o surgimento da difusão e oscilação numérica. As curvas de permeabilidades relativas e razão de viscosidades são dadas pelas Eqs. (7.5) a (7.7):

$$k^{rw} = \frac{(S^w)^2}{M(1 - (S^w)^2) + (S^w)^2}, \quad (7.5)$$

$$k^{ro} = 1 - k^{rw}, \quad (7.6)$$

$$M = \frac{\mu_o}{\mu_w}, \quad (7.7)$$

onde M é a razão entre as viscosidades do óleo e da água. O valor de M será igual a 10. A Figura 7.24 mostra as curvas de permeabilidades relativas para a água e óleo para esse escoamento. Os dados do reservatório e físicos são mostrados na Tabela 7.9.

A função de interpolação CDS atrasado, conforme descrita no Capítulo 4, foi testada com valores de φ iguais a: 0; 0,5; 0,8 e 1,0. Destaca-se que, para um valor de φ igual a zero, a função é puramente UDS e, quanto mais próximo de 1, esta função de interpolação se aproxima do CDS.

Para comparar a solução obtida com o SIM3D para os diferentes valores de φ , utilizou-se uma malha 5x5x3 cartesiana igualmente espaçada. O processo de inicialização utilizado foi o calculado, segundo o processo de inicialização descrito por Palagi (1992). O poço de injeção foi completado até a terceira camada e o poço de produção foi completado apenas na terceira camada.

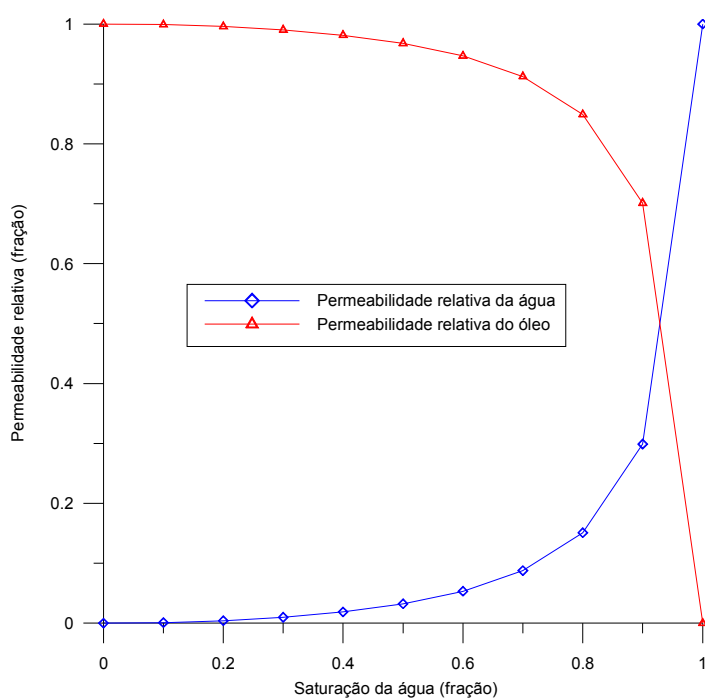


Figura 7.24 – Curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo

Os poços são posicionados em cantos opostos da malha (Figura 7.1). Na Figura 7.25, tem-se as curvas de corte para valores de φ iguais a 0 e 0,5.

Observa-se da Figura 7.25 que a aplicação do peso na função CDS atrasado, em uma malha grosseira, reduz a difusão numérica, porém, uma pequena oscilação é observada na curva da malha 5x5x3 com peso igual a 0,5. Na Figura 7.26, tem-se uma ampliação que mostra o corte de água no instante em que a água chega no poço produtor. A curva de corte de água para a malha 20x20x3, que é mais refinada que a malha 5x5x3, mostra que a água chega no poço mais tarde do que quando se utiliza uma malha mais grosseira como é o caso da malha 5x5x3 com peso igual a zero. Com a aplicação do peso igual a 0,5, o momento de chegada da água no poço de produção se aproxima da malha mais refinada.

Tabela 7.9 – Dados físicos do reservatório areal retangular

Dados do Reservatório		
Comprimento	400,0	m
Largura	400,0	m
Altura	6,09	m
Porosidade – ϕ	0,08	
Raio do poço – r_w	0,0914	m
Permeabilidade absoluta do meio – K	$1,25 \times 10^{-14}$	m^2
Propriedades Físicas		
Vazão de injeção e produção	$1,10 \times 10^{-4}$	m^3/dia
Fator volume de formação da água – B_{ref}^w (para P_{ref})	1,0	
Fator volume de formação da óleo – B_{ref}^o (para P_{ref})	1,0	
Pressão de referência – P_{ref}	$6,893 \times 10^5$	Pa
Compressibilidade da água – c^w	$-1,45 \times 10^{-9}$	Pa^{-1}
Compressibilidade do óleo – c^o	$-1,45 \times 10^{-9}$	Pa^{-1}
Pressão capilar – P_c	0,0	Pa
Densidade da água – ρ^w	1000,0	kg/m^3
Densidade do óleo – ρ^o	1000,0	kg/m^3
Viscosidade da água – μ^w	$1/M \times 10^{-3}$	Pa.s
Viscosidade do óleo – μ^o	$1,0 \times 10^{-3}$	Pa.s
Saturação do óleo residual – S_r^o	0,0	
Saturação da água inicial – S_{ini}^w	0,0	

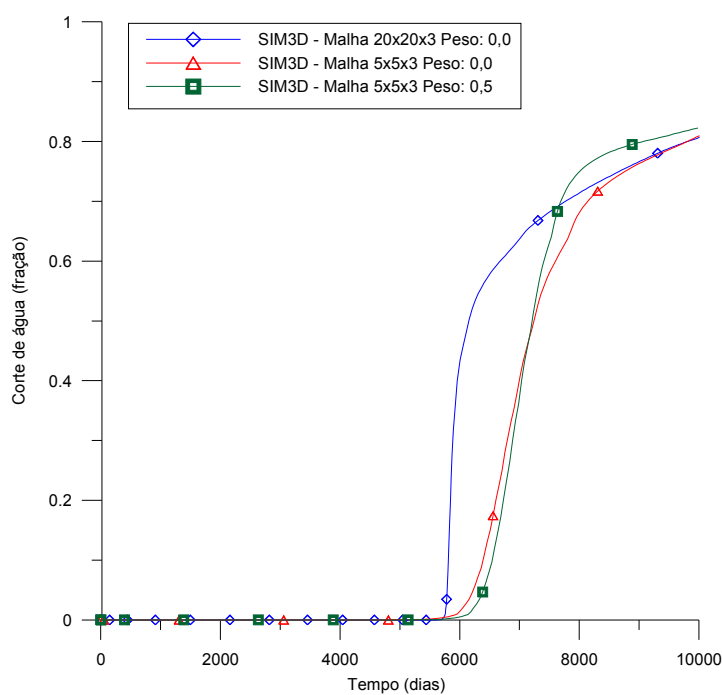


Figura 7.25 – Função de interpolação CDS atrasado com pesos: 0 e 0,5 para uma malha 5x5x3 cartesiana

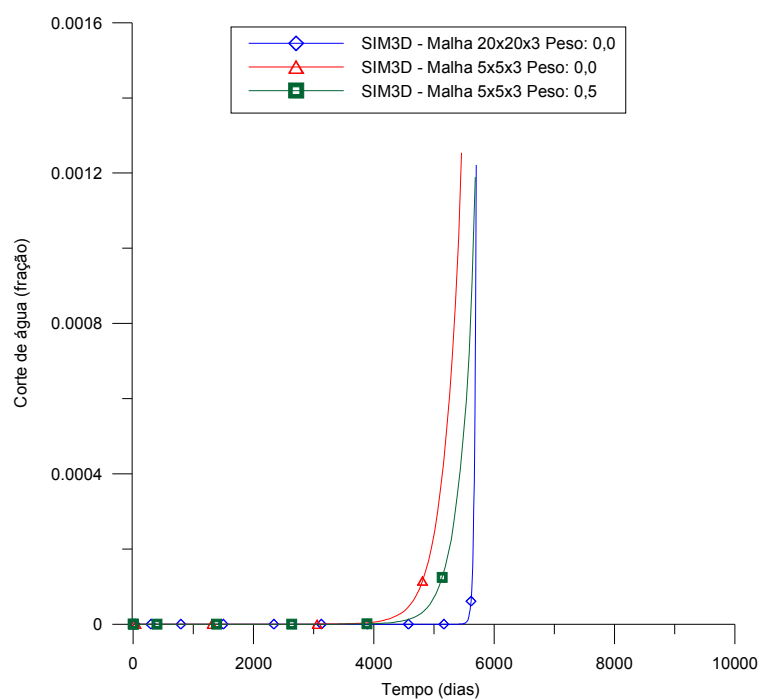


Figura 7.26 – Detalhe da curva do corte de água com diferentes pesos aplicados na função de interpolação CDS atrasado

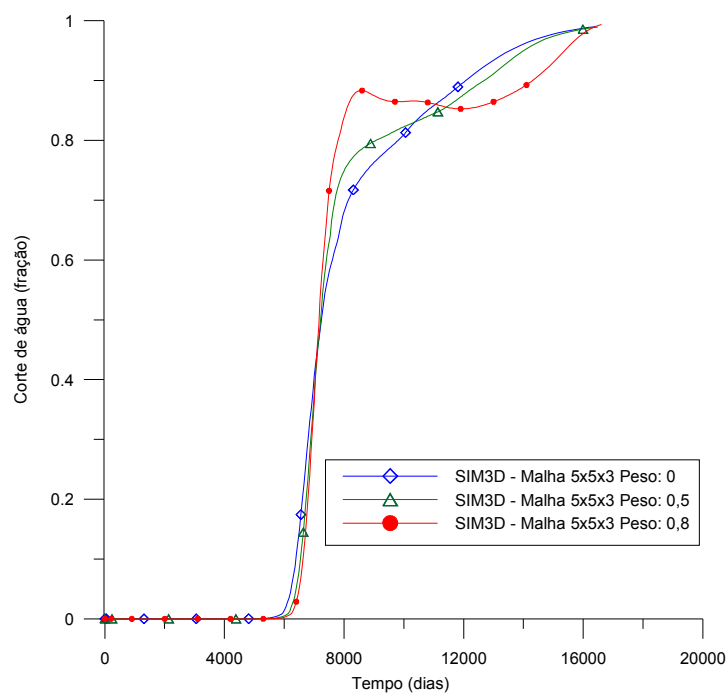


Figura 7.27 – Influência do peso aplicado no CDS atrasado para um escoamento tipo pistão

Com o aumento do peso aplicado na função CDS atrasado é possível o aparecimento da oscilação numérica, conforme mostra a Figura 7.27. Observa-se que com um peso igual a 0,5, já se nota uma pequena oscilação na parte superior da curva. Essa oscilação é bastante acentuada na curva com peso igual a 0,8.

- **Caso 6**

O segundo tipo de escoamento estudado foi o não pistão, cujo escoamento se aproxima bastante das curvas de permeabilidades mais empregadas em reservatório de petróleo. As curvas de permeabilidades são dadas pelas Eqs. (7.8) e (7.9):

$$k^{rw} = (S^w)^2 \quad , \quad (7.8)$$

$$k^{ro} = (1 - S^w)^2 \quad . \quad (7.9)$$

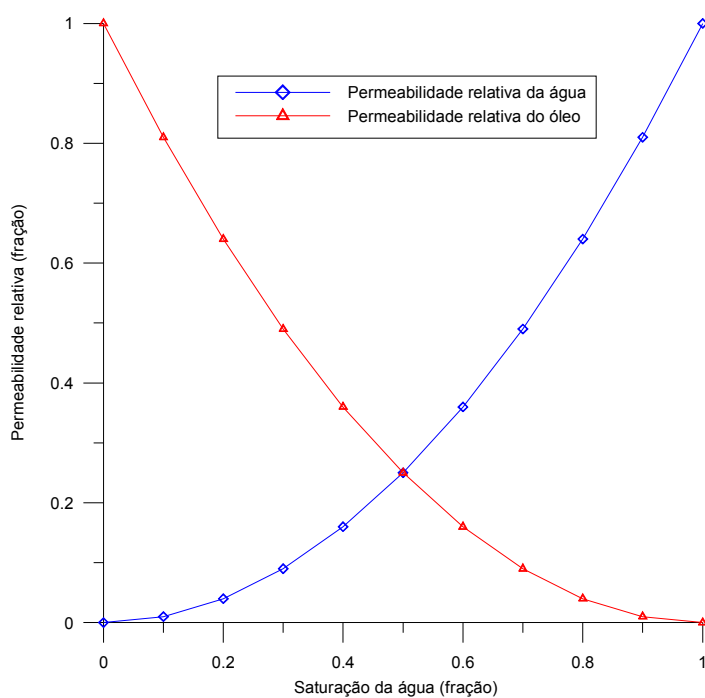


Figura 7.28 – Curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo

A Figura 7.28 mostra as curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo para esse tipo de escoamento.

Neste caso, o reservatório utilizado será o mesmo empregado para o escoamento tipo pistão, cujos dados encontram-se na Tabela 7.9. A malha utilizada foi uma malha 10x10x3 cartesiana e seus resultados terão como referência uma malha 20x20x3 cartesiana. Os poços de injeção e produção são posicionados em cantos opostos, sendo que o poço de injeção é completado até a camada 3 e o de produção é completado apenas na terceira camada. Na Figura 7.29 tem-se a curva de corte de água que mostra a influência do peso aplicado na função de interpolação CDS atrasado.

Observa-se da Figura 7.29 que para o escoamento não pistão, conseguem-se maiores valores para os pesos, fazendo com que a função de interpolação se aproxime mais da função de interpolação CDS pura. O mesmo comportamento apresentado no caso tipo pistão foi observado para o caso não pistão.

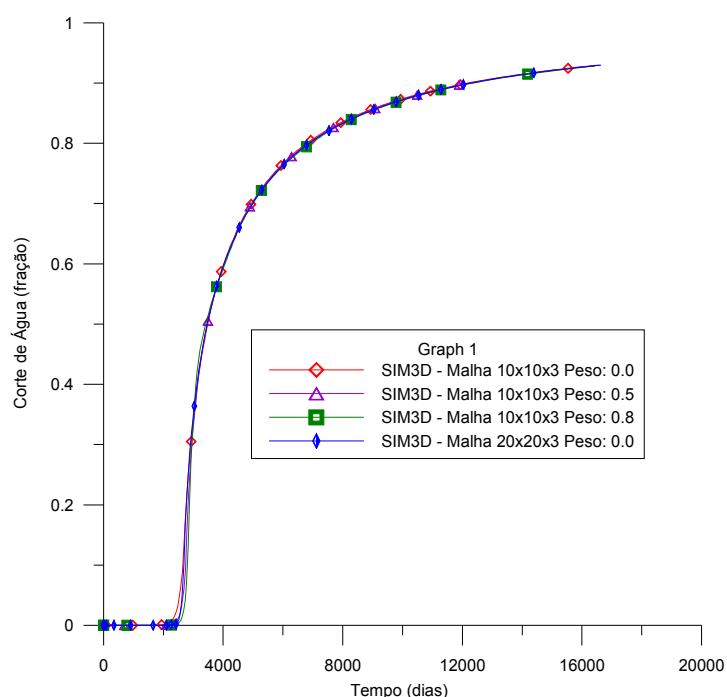


Figura 7.29 – Função de interpolação CDS – atrasado com pesos: 0, 0,5 e 0,8 para uma malha 10x10x3 cartesiana

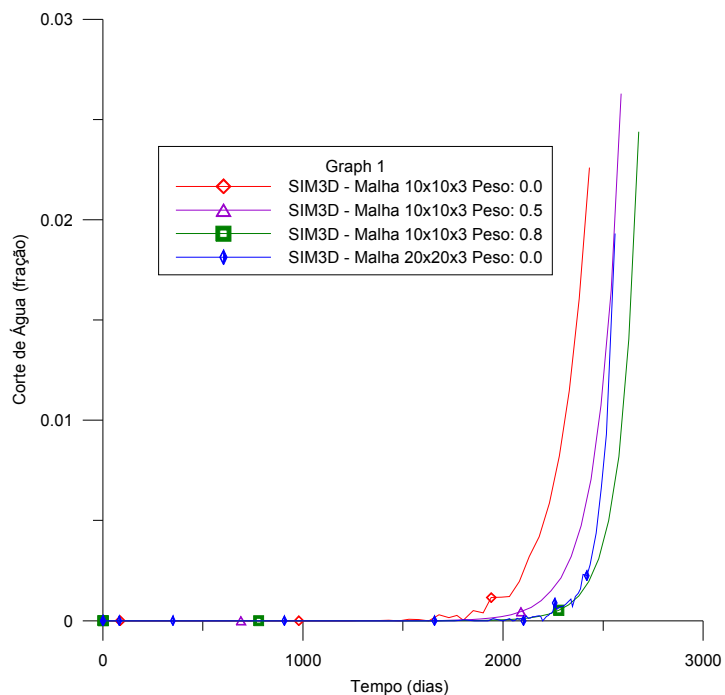


Figura 7.30 – Detalhe da curva do corte de água com diferentes pesos aplicados na função de interpolação CDS atrasado

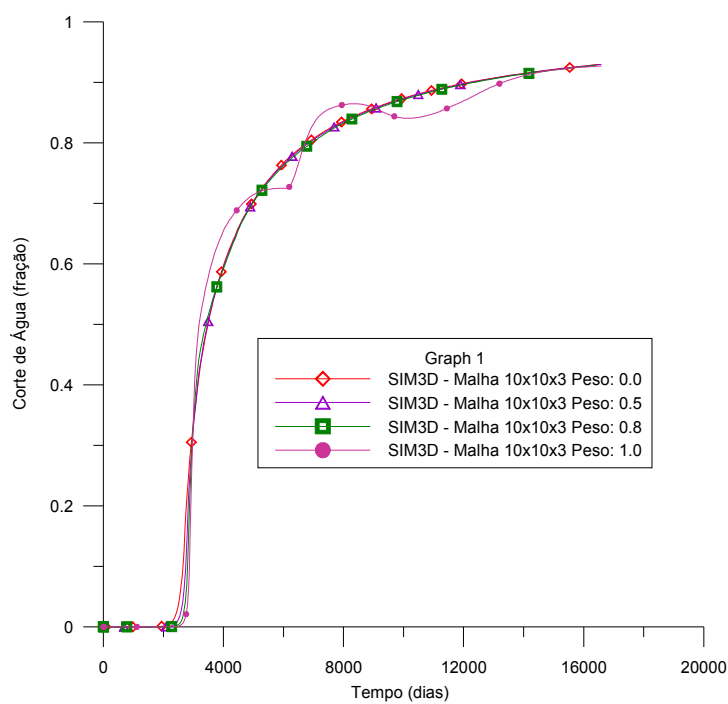


Figura 7.31 – Influência do peso aplicado no CDS atrasado para um escoamento tipo não pistão

A Figura 7.30 mostra com maior detalhe a influência do peso nos resultados obtidos. A curva para a malha 20x20x3 com peso igual a zero é a referência de uma melhor solução neste estudo. Observa-se que a malha 10x10x3, com peso igual a zero, tem solução muito distante da solução da malha 20x20x3. À medida que o peso aumenta o resultado se aproxima da melhor solução. A curva com peso igual a 0,8 mostrou uma coincidência de resultado na chegada da água no poço de produção, com a obtida com a malha 20x20x3. A oscilação numérica foi observada quando foi utilizado um peso igual a 1, conforme pode ser visto na Figura 7.31.

7.4 Visualização do escoamento da água injetada

Para visualizar o escoamento nas diferentes camadas do reservatório, foram utilizados os resultados obtidos no Caso 1.

O reservatório estudado no Caso 1 foi discretizado com uma malha cartesiana 5x5x3. Este possui uma altura de 15 metros (Tabela 7.1), sendo que, cada camada ficou com uma altura de 5 metros. Como foi dito no item 7.1, o poço injetor foi completado da camada 1 até a 3 e o poço produtor foi completado apenas na camada 3 (camada superior). A Figura 32 mostra os escoamento nas três camadas do reservatório, através das curvas de isosaturações, para 6.000 dias de simulação. Observa-se que na camada 1, a saturação de água é de 0,69 para o volume onde se encontra a base do poço. Nota-se que a frente de água já se encontra nos volumes próximos ao centro da camada 1. Na camada 2, a saturação de água no volume onde se encontra o poço é igual a 0,68, sendo que, a frente de água está um pouco atrasada em relação a camada 1. Na camada 3, a saturação de água no volume onde se encontra o poço é igual a 0,42, mas a frente de água está muito atrasada em relação as outras duas camadas.

Da análise da Figura 7.32, constata-se que o posicionamento do poço produtor é um fator fundamental para a vida útil do reservatório. Caso o poço produtor fosse completado da camada 1 até a 3, a chegada de água no poço seria antecipada, reduzindo assim a vazão de óleo recuperado.

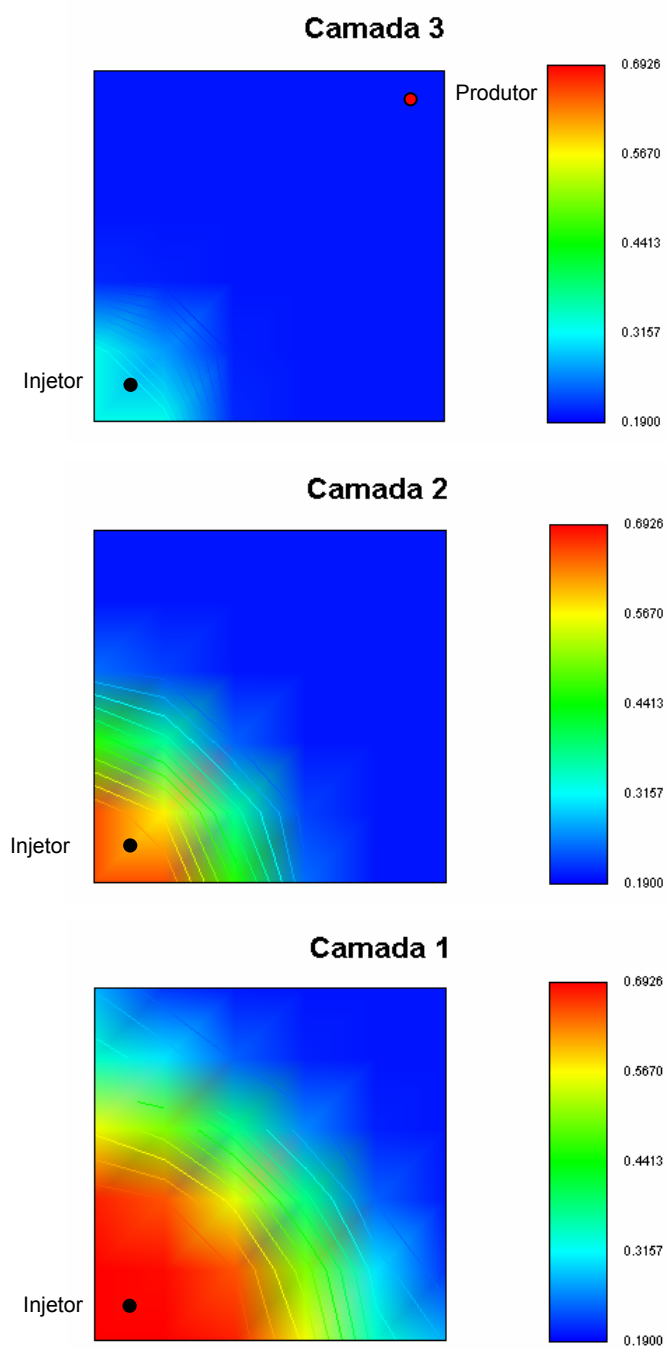


Figura 7.32 – Escoamento nas três camadas do reservatório areal 5x5x3 (Caso 1)

8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo serão apresentadas algumas conclusões obtidas do presente trabalho e também serão feitas sugestões para trabalhos futuros nessa linha de pesquisa.

8.1 Conclusões

Ao longo desse trabalho foi apresentada uma metodologia para simulação de reservatório de petróleo, que teve como base o modelo simplificado de dois componentes (óleo e água). As equações do modelo foram discretizadas segundo o método dos volumes finitos usando coordenadas generalizadas. As funções de interpolação UDS e CDS atrasado foram implementadas. Um processo de inicialização das variáveis foi implementado conforme o método descrito por Palagi (1992), tornando automática a determinação dos valores iniciais para a saturação da água, pressão do óleo, potencial do óleo e pressão capilar. O objetivo desse trabalho foi obter um simulador acadêmico, SIM3D, que possibilite estudar reservatórios de petróleo.

Com a finalidade de testar o SIM3D foram simulados casos com malhas cartesianas e malhas generalizadas, empregando funções de interpolação UDS e CDS atrasado. Os resultados obtidos apresentaram-se bastante semelhantes aos resultados obtidos com o simulador comercial IMEX da CMG.

Como conclusões obtidas com este trabalho, podem-se citar:

- os resultados obtidos com o uso de malhas cartesianas apresentaram-se bem próximos dos resultados obtidos com o IMEX;
- os resultados obtidos com o IMEX apresentaram discordância com aqueles apresentados pelo SIM3D quando a malha generalizada foi utilizada. Estas diferenças não são reduzidas com o refino da malha. A causa para esta discrepância é a não consideração dos termos cruzados no IMEX;
- o processo de inicialização aplicado por Palagi (1992) apresentaram valores, para as condições iniciais, inferiores do que as obtidas com a inicialização do IMEX, mas os resultados obtidos ao final da simulação são coincidentes com os obtidos com o IMEX;

- a aplicação da função de interpolação CDS atrasado para casos com escoamento tipo pistão, mostrou-se pouco eficiente já que para um peso igual a 0,5 apareceu uma pequena oscilação na parte superior da curva. Constatou-se que o uso de malha grosseira com um determinado peso consegue diminuir a difusão numérica, sem com isso, inserir oscilações numéricas na solução;
- a aplicação da função de interpolação CDS atrasado para casos do tipo não pistão mostrou-se menos sensível ao aumento do peso, já que para peso igual a 0,8 não foi observado nenhuma oscilação numérica, com o resultado se aproximando da solução de referência;
- nenhum dos casos testados (tipo pistão e não pistão) forneceu resultados sem oscilação numérica quando utilizado um peso igual a 1 para a função de interpolação CDS atrasado.

8.2 Sugestões para os futuros trabalhos

Para dar prosseguimento ao desenvolvimento do simulador acadêmico SIM3D, pode-se sugerir os seguintes trabalhos:

- otimização do código computacional para que este se torne multi-plataforma;
- aprofundar o estudo de casos no SIM3D para certificar que os resultados obtidos estão independentes da malha;
- buscar reduzir o custo computacional para simulação de malhas refinadas;
- implementação do tratamento das falhas geológicas;
- implementar o modelo *black-oil* contendo as três fases: água, óleo e gás;
- desenvolver uma interface amigável com o usuário para facilitar a utilização e o estudo de reservatórios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BABU, D. K., ODEH, A. S., AL-KHALIFA, A. J., McCANN, R. C., **The Relation between wellblock and wellbore pressures in numerical simulation of horizontal well**, SPERE, 324-28, Agosto, 1991.

BALIGA, B. R. e PATANKAR, S. V., **A new finite element formulation for convection diffusion problems**, numerical heat transfer, Vol. 3, pp. 393-409, 1980.

BALIGA, B. R. e PATANKAR, S. V., **Elliptic systems: finite element method II**, Handbook of numerical heat transfer, pp. 421-455, John Wiley & Sons, 1988.

BLAIR, P. M. e WEINAUG, C. F., **Solution of two-phases flow problems using implicit difference equations**, AIME: SPEJ, *Transaction*, 1969.

BRAND, C. M. e HAINEMANN, J. E. e AZIZ, K., **The grid orientation effect in reservoir simulation**, Anaheim: paper SPE 21228, Eleven SPE Symposium on Reservoir Simulation, 1991.

CADOZZO, J., **An element based conservative scheme using unstructured grids for reservoir simulation**, SPE International Student Paper Contest, Texas, 2004.

CADOZZO, J., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C. e HURTADO, F. S. V., **The negative transmissibility issue when using cvfem in petroleum reservoir simulation – 1. theory**, 10o Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Rio de Janeiro, 2004.

CADOZZO, J., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C. e HURTADO, F. S. V., **The negative transmissibility issue when using cvfem in petroleum reservoir simulation – 2. Results**, 10o Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Rio de Janeiro, 2004.

COAST, K. H., GEORGE, W. D., CHU, C. e MARCUM, B. E., **Three-dimensional simulation of steamflooding**, SPEJ, 1974.

COUTINHO, B. G., **Solução numérica de problemas de reservatório de petróleo utilizando coordenadas generalizadas**, Campina Grande: Dissertação de mestrado, UFPB, 2002.

CUNHA, A. R., **Uma metodologia para simulação numérica tridimensional de reservatórios de petróleo utilizando modelo *black-oil* e formulação em frações mássicas**, Florianópolis: Dissertação de mestrado, UFSC, 1996.

CUNHA, A. R., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C. e LIVRAMENTO, M. A., **Two-dimensional two-phases petroleum reservoir simulation using boundary-fitted grids**, São Paulo, V ENCIT, 1994.

EWING, R., **The mathematics of reservoir simulation**. Philadelphia: editado por R. E. EWING, SIAM, 1983.

FLEMING, G. C., **Modeling the performance of fractured well in pattern floods using orthogonal curvilinear grids**, Dalas: artigo SPE 16973, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 1987.

HEINEMANN, Z.E. e BRAND, C. W., **Gridding techniques in reservoir simulation**. Alpbach: 1st/2nd Stanford Univ. & Leoben Mining Univ. Reservoir Simulation Inf. Forum, Austria, Sept/1998-Sept/1989.

HIRASAKI, G. J. e O'DELL, P. M., **Representation of reservoir geometry for numerical simulation**, *Soc. Pet. Eng. J.*, 1970.

LUCIANETTI, R. M., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., CZESNAT, A., **Efeitos da não-ortogonalidade da malha na taxa de convergência do método de Newton utilizando coordenadas generalizadas**, Rio de Janeiro: VI ENCIT, 1998.

MALISKA, C. R., **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**, Rio de Janeiro: LTC, 1995.

MALISKA, C. R., **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**, 2^a. Edição revista e ampliada, Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MALISKA, C. R., CUNHA, A. R., LIVRAMENTO, M. A. e SILVA, A. F. C., **Tridimensional petroleum reservoir simulation using generalized curvilinear grids**, São Paulo: V ENCIT, 1994.

MALISKA, C. R. e VASCONCELLOS, J. F. V., **An unstructured finite volume procedure for simulating flows with moving fronts**, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier Science S. A., vol. 182, pp. 401-420, 2000.

MARCONDES, F., **Simulação numérica usando método adaptativos-implícitos e malha de voronoi de problemas de reservatório de petróleo**, Santa Catarina: Tese de doutorado em Engenharia Mecânica – UFSC, 1996.

MARCONDES, F., MALISKA, C. R. e ZAMBALDI, M. C., **Solução de problemas de reservatório de petróleo: comparação entre metodologias TI, IMPES E AIM**, Santa Catarina: ENCIT – VI LATCYM, 1996.

MARCONDES, F., CORDAZZ, j., CEMIN, A., BEVILÁQUA, A. L. S., SILVA, A. F. C. e MALISKA, C. R., **Analysis of several software used in petroleum reservoir simulation**, 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto, 2005.

MOTA, M. A. A., **Simulação numérica de reservatório de petróleo utilizando coordenadas generalizadas e esquema de interpolação TVD**, Florianópolis: Dissertação de Mestrado – UFSC, 1994.

MOTA, M. A. A. e MALISKA, C. R., **Simulação numérica de reservatórios de petróleo utilizando coordenadas generalizadas e interpolação TVD**, São Paulo: V ENCIT, 1994.

PALAGI, L. C., **Generation and application of voronoi grid to model flow in heterogeneous reservoirs**, Stanford: PhD dissertation, Stanford University, 1992.

PEACEMAN, D. W., **Fundamentals of numerical reservoir simulation**, New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1977.

PEACEMAN, D. W., **Interpretation of well-block pressure in numerical reservoir simulation**, SPEJ, 183-194, Junho, 1978.

PINTO, A. C. C., **Esquemas de alta resolução para controle de dispersão numérica em simulação de reservatório**, Campinas: Dissertação de Mestrado – UNICAMP, 1991.

PRAIS, F. e CAMPAGNOLO, E. A., **Modelagem do escoamento multifásico em simulação de reservatório**, São Paulo: XI COBEM, 1991.

RUBIN, B. e BLUNT, M. J., **High-order implicit flux limiting schemes for black-oil simulating**, Anaheim: paper SPE 21222, Eleven SPE Symposium on Reservoir Simulation, 1991.

SHARPE, H. N., **Validation of an adaptive, orthogonal, curvilinear gridding procedure for reservoir simulation**, New Orleans: artigo SPE 25262, Twelfth SPE Symposium on Reservoir Simulation, 1993.

SHARPE, H. N. *and* ANDERSON, D. A., **Orthogonal curvilinear grid generation with present internal boundaries for reservoir simulation**, Anaheim: artigo SPE 21235, Eleventh SPE Symposium on Reservoir Simulation, 1991.

SCHNEIDER, G. E. e RAY, M. J., **Control volume finite element method for heat transfer and fluid flow using co-located variables – 2: application and validation**, Numerical heat transfer, vol. 11, pp. 391-400, 1987.

TANIGUCHI, N. e KOBAYASHI, T., **Finite volume method on the unstructured grid system**, Computer & fluids, vol. 9, n^o. 34, pp. 287-295, 1991.

VAN DER VORST, H. A. BI-CGSTAB, **A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the simulation of nonsymmetric linear systems**, SIAM J. SCI. STAT COMPUT, March, 1992.

VAN POOLEN, H. K., BREITENBACK, E. A. e THURNAU, D. H., **Treatment of individual well and grids in reservoir modeling**, SPEJ, 341-46, Dezembro, 1968.

YANOSIK, J. L. e McCracken, T. A. **A nine-point finite difference reservoir simulator for realistic prediction of unfavorable mobility ratio displacements**, Los Angeles: paper SPE, apresentado no fourth Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance, 1976.

_____, IMEX, **Version 2002 User's Guide**, Computer Modelling Group Ltd, Canada: Calgary Alberta, 2002.