UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ GILSON DE SOUZA BENIGNO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO COMO DISCIPLINA ELETIVA

FORTALEZA
2022

JOSÉ GILSON DE SOUZA BENIGNO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO COMO DISCIPLINA ELETIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B415c Benigno, José Gilson de Souza.
Construções geométricas com régua e compasso como Disciplina Eletiva / José Gilson de Souza Benigno. – 2022.
66 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Motivar. 2. Desenho geométrico - estudo e ensino (ensino médio). 3. Aprendizagem ativa. I. Título.

CDD 510

JOSÉ GILSON DE SOUZA BENIGNO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO COMO DISCIPLINA ELETIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Aprovada em: 13 de maio de 2022

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

____

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará - UFC

____

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba - UFDPar

Dedico esse trabalho, primeiramente, a Deus, por me proporcionar sabedoria. As professoras e professores que com dedicação e generosidade me fizerem acreditar que poderia mudar meu destino e concretizar meu projeto de vida.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por compartilharem comigo valores humanos, que me fazem um cidadão de bem.

Ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pelo companheirismo, apoio e excelente orientação.

A todas as professoras e todos os professores que conviveram comigo durante minha vida escolar e que me incentivaram a permanecer e avançar nos estudos.

As companheiras e companheiros da turma de mestrado, pelo compartilhamento de ideias, incentivos e pela generosidade de todas e todos.

“A Geometria existe por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

(KEPLER)

RESUMO

Esse trabalho vem mostrar que “Construções Geométricas com Régua e Compasso como Disciplina Eletiva”, desenvolvido nos anos finais do ensino fundamental, bem como no ensino médio, pode contribuir para motivar o interesse dos docentes com relação ao componente curricular Geometria e consequentemente ampliar o seu conhecimento matemático. Aprender conceitos matemáticos de forma prática e interativa, torna o processo ensino-aprendizagem mais significativo e prazeroso. O estudante que compreende uma generalização de um determinado conhecimento matemático, não apenas como uma mera formalização, mas que se sente seguro para justificar com suas próprias argumentações o porquê dessa síntese, ele se torna mais confiante e seguro para utilizá-la em situações desafiadoras do seu cotidiano. Desenvolver habilidade de efetuar construções geométricas utilizando régua e compasso, demonstrar propriedades em quadriláteros associados aos casos de congruência entre triângulos, conhecer lugares geométricos, bem como suas propriedades, são alguns dos objetivos a serem atingidos com essa proposta de trabalho educacional. A fundamentação teórica desse trabalho se baseia nos níveis de aprendizagem geométrica de Van Hiele. No decorrer da eletiva, o estudante deverá vivenciar os cinco níveis apresentados pelo pesquisador holandês, ou sejam, a visualização, a análise, a dedução informal, a dedução formal e o rigor, responsáveis por toda produção de um pensamento relacionado à geometria. Ao final da eletiva, os estudantes em grupo, deverão enunciar um teorema relacionado ao estudo da geometria, apresentar sua demonstração e sua aplicabilidade numa situação- problema do cotidiano.

Palavras-chave: motivação para aprendizagem; desenho geométrico - estudo e ensino (ensino médio); aprendizagem ativa.

ABSTRACT

This work shows that "Geometric Constructions with Ruler and Compass as Elective Discipline", developed in the final years of elementary school, as well as in high school, can contribute to motivate the interest of teachers in relation to the curricular component Geometry and consequently expand their mathematical knowledge. Learning mathematical concepts in a practical and interactive way makes the teaching-learning process more meaningful and pleasurable. The student which comprises a generalization of a certain mathematical knowledge, not only as a mere formalization, but that feels safe to justify with its own arguments why this synthesis, it become more confident and safe to use it in challenging situations of its daily life. Developing the ability to perform geometric constructions using ruler and compass, demonstrating properties in quads associated with cases of congruence between triangles, knowing geometric places, as well as their properties, are some of the objectives to be achieved with this educational work proposal. The theoretical basis of this work is based on van Hiele's geometric learning levels. In the course of the elective, the student must experience the five levels presented by the Dutch researcher, that is, visualization, analysis, informal deduction, formal deduction and rigor, responsible for all the production of a thought related to geometry. At the end of the elective, the group students should enunciate a theorem related to the study of geometry, present its demonstration and its applicability in a daily problem situation.

Keywords: motivation for learning; geometrical drawing - study and teaching (secondary education); active learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
UFC	Universidade Federal do Ceará
NEM	Novo Ensino Médio

.

LISTA DE SÍMBOLOS

$>$	Desigualdade
α	Letra grega alfa
$\boldsymbol{\beta}$	Letra grega beta
$\boldsymbol{\Gamma}$	Letra grega sigma
$\cap$	Interseção entre conjuntos
$\cong$	Congruência

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa

Sempre tive muita afinidade com o componente curricular Matemática, desde os meus estudosno ensino fundamental até os dias atuais. Com o passar dos anos fui descobrindo que a matemática tem muitas ramificações, tais como: aritmética, matemática discreta, teoria dos conjuntos, álgebra, trigonometria, geometria plana e geometria espacial.

Durante as aulas de matemática sempre fui muito atento as exposições dos meus professores, pois sempre dediquei a eles o meu profundo respeito e admiração.

Em nenhum momento passava pela minha mente a ideia de ser professor, pois me consideravamuito tímido, embora apresentasse excelente habilidade em compartilhar com meus colegas de turma, as soluções que construía ao resolver as atividades propostas pelos professores. Não tive como fugir, acabei sendo escolhido pela profissão de professor de Matemática.

Durante minha graduação em licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Ceará (UFC-CE), tive a oportunidade de ser contratado por uma escola particular, em Fortaleza, paraministrar aulas de matemática. Foi o meu primeiro emprego com todos os direitos trabalhistas na área de Educação. Além das aulas de aritmética, álgebra e geometria, também na minha carga horária havia espaço para lecionar aulas de Desenho Geométrico.

Ministrar aulas de Desenho Geométrico me trouxeram muito aprendizado e satisfação. Lembro-me que no livro de Desenho Geométrico adotado pela escola havia uma referência à letra da música “Aquele abraço”, do cantor Gilberto Gil, que dizia: a Bahia já me deu régua e compasso. No meu entendimento, ela lhe deu o necessário para que ele progredisse na vida, pois com régua e compasso é possível realizar inúmeras construções geométricas.

As construções que eram executadas em cada aula, seguindo um passo-a-passo, prendendo a atenção da turma, a tensão gerada quando o compasso deslizava e a satisfação no semblantede cada estudante que conseguia finalizar sua construção, até hoje me trazem grande contentamento.

Acredito que “Construções Geométricas com Régua e Compasso como Disciplina Eletiva”, possa contribuir com a melhoria do aprendizado dos nossos estudantes, com relação aos conteúdos de matemática, bem como melhorar os indicadores de desempenho nas avaliações internas e externas à escola. Essa disciplina tem como objetivo principal facilitar o aprendizado dos estudantes com relação aos conteúdos de geometria plana abordados no ensino fundamental e no ensino médio.

Quando o estudante é o protagonista do seu aprendizado, atuando de forma prática e interativa, a construção do conhecimento se torna prazerosa e significativa.

1.2 Motivação para escolha do tema

No ano de 2001 passei a compor, de forma efetiva, o quadro de docentes da Prefeitura Municipal de Fortaleza (PMF), no estado do Ceará. Até o ano de 2014, lecionei o componente curricular Matemática nas escolas ditas regulares. A partir de 2014, fiz a adesão para compor a equipe de professores, numa das seis escolas de tempo integral, implantadas no município de Fortaleza – CE.

O currículo das escolas integrais é bastante diversificado, sendo composto por disciplinas do núcleo comum e disciplinas da parte diversificada. Entre as disciplinas da parte diversificada há as disciplinas eletivas.

Desenvolver uma disciplina eletiva é bastante desafiador. Inicialmente, vem a necessidade de você compor uma dupla com um colega de profissão, numa área diferente da sua formação acadêmica.

Após a composição da dupla, vem o desafio de escolher uma temática de ensino a sertrabalhada durante o período de execução da eletiva. É necessário que a temática escolhida seja de interesse dos discentes, e que esteja conectada com a realidade vivenciada pelos estudantes, bem como, motivá-los a permanecer e avançar nos estudos.

Uma das etapas mais importantes durante a organização de uma eletiva e a montagem do projeto de eletiva, pois será composto de alguns itens que necessitam serem bem especificados. A ementa, a justificativa, o objetivo, o conteúdo programático, a metodologia, os recursos didáticos, a proposta de culminância, a avaliação e as referências bibliográficas, são elementos que devem compor esse projeto.

O Feirão das Eletivas é um momento que gera muita apreensão, tanto por parte dos professores quanto dos estudantes. Para os desenvolvedores da eletiva, é o momento de apresentar, de forma bem suscita e criativa, uma visão geral de como a eletiva será processada, ou seja, descrever a ementa da eletiva.

Acredito que já tenha participado de mais de uma dezena de eletivas na escola, que permaneço lotado até hoje. A escolha do título da eletiva é um desavio à criatividade, gostaria de compartilhar alguns títulos que foram atribuídos as eletivas em que fui um dos desenvolvedores, são eles: “Desenho geométrico como arte visual”, “Matemática com arte e sabor”, “Educação financeira na escola”, “Portumática: um programa de diversão e aprendizado”, “Uma viagem virtual pelos estados do nordeste brasileiro”, “Vivenciando ciências e praticando matemática” e “Biomática: a matemática da vida”.

No ano de 2014 consegui ser efetivado na rede estadual de ensino do Ceará. Por faltade disponibilidade de tempo para o ensino diurno, tive que ser lotado no período noturno. Com a implantação do Novo Ensino Médio (NEM), no ano de 2022, nas Escolas Estaduais de Ensino Médio (EEEM) do estado do Ceará, tomei conhecimento que boa parte do currículo escolar será composto por disciplinas eletivas, inclusive tive contato com um cardápio de eletivas a serem ofertadas aos estudantes das escolas estaduais.

A motivação para a produção dessa dissertação, intitulada “Construções Geométricas com Régua e Compasso como Disciplina Eletiva”, além de toda a experiência acumulada no desempenho da minha função como professor de matemática, foi a possibilidade de compartilhar com meus colegas de área, um projeto de disciplina eletiva a ser desenvolvido com suas turmas de escola.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A proposta de disciplina da parte diversificada do currículo "Construções Geométricas com Régua e Compasso Como Disciplina Eletiva", tem seu embasamento teórico na Teoria de Van Hiele, na qual, são enumerados cinco níveis, progressivos, que determinam o desenvolvimento do pensamento geométrico, dos quais apresentam as seguintes denominações: Visualização ou Reconhecimento, Análise, Dedução Informal ou Ordenação, Dedução Formal e o Rigor.

Educadores de nacionalidade holandesa, Dina Van Hiele-Geldof e seu cônjuge Pierre Van Hiele, apresentaram esses níveis responsáveis pela construção do pensamento geométrico, em suas teses de doutorando na Universidade de Utrecht, localizada na Holanda. Essa tese foi construída a partir de observações dos seus estudantes ao resolverem atividades escolares relacionadas ao componente curricular Geometria. Essa Teoria passou a ser estudada em âmbito mundial após Van Hiele divulgar um artigo intitulado "O Pensamento da Criança e a Geometria", no ano de 1957, num Congresso de Educação Matemática, na França. Esse artigo despertou o interesse de pesquisadores de diversas nacionalidades, entre eles, os americanos e os soviéticos.

De acordo com Van Hiele, o primeiro nível, denominado por ele de Visualização ou reconhecimento, é caracterizado pelo fato de que o estudante reconhece visualmente uma determinada figura geométrica, consegue assimilar o vocabulário geométrico, mas não apresenta maturidade suficiente para identificar propriedades contidas nessa figura.

No segundo nível, a Análise, o estudante já desenvolveu a habilidade para identificar uma determinada propriedade aplicável sobre uma figura geométrica, mas ainda não é capaz de estabelecer relações com outros conceitos geométricos.

No terceiro nível, a Dedução Informal ou Ordenação, o estudante já desenvolveu habilidade para estabelecer relação entre conceitos geométricos numa determinada figura, ele já é capaz de compreender uma demonstração formal, mas ainda não adquiriu habilidade para construir sua própria demonstração.

No quarto nível, a Dedução Formal, o estudante já desenvolveu a habilidade para efetuar suas próprias demonstrações formais. Utilizando de premissas, ou seja, axiomas, ele já é capaz de demonstrar suas conclusões.

No quinto e último nível de aprendizagem de Geometria, de acordo com Van Hiele, oestudante já desenvolveu habilidades para compreender além da Geometria Euclidiana.

Com base nos níveis de aprendizagem da Geometria, apresentados por Van Hiele, o professor regente da disciplina Construções Geométricas com Régua e Compasso como Disciplina Eletiva, já dispõe de elementos norteadores para o desenvolvimento dessa disciplina.

3 PROJETO ELETIVA

3.1 Ementa

Os resultados obtidos pelos estudantes da rede pública nas avaliações externas vêm demonstrando que os estudantes não estão conseguindo desenvolver as habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no que diz respeito aos componentes curriculares de Matemática. A disciplina da parte diversificada do currículo, “Construções Geométricas com Régua e Compasso como Disciplina Eletiva”, tem como objetivo fazer com que os estudantes assimilem conceitos geométricos de forma prática e interativa. Durante o desenvolvimento da eletiva os estudantes seguirão o passo-a-passo de cada construção a ser abordado durante esse processo de ensino-aprendizagem. Além do desenvolvimento de habilidades motoras, ao manusear a régua e o compasso, os estudantes terão a oportunidade de efetuar algumas construções geométricas, identificando suas principais propriedades e suas aplicações em resoluções de situações desafiadoras do cotidiano. Pelo fato de ser um projeto multidisciplinar, onde poderá ocorrer parcerias com as disciplinas de História ou Arte, os estudantes terão a oportunidade de conhecer um pouco da cultura grega, pois a origem de construções geométricas com régua e compasso ocorreu na Grécia Antiga. Com relação à disciplina de arte os estudantes terão a oportunidade de conhecer algumas obras de artes que utilizaram formas geométricas no seu processo criativo. Na culminância da eletiva os estudantes, divididos em grupos, deverão apresentar uma construção geométrica, utilizando apenas régua e compasso, com todo o passo-a-passo, bem como, suas propriedades geométricas e sua utilização na resolução de uma situação problema do cotidiano.

3.2 Justificativa

A disciplina da parte diversificada do currículo “Construções Geométricas com Régua e Compasso” visa auxiliar os estudantes a desenvolverem as habilidades necessárias para avançar no aprendizado dos componentes curriculares de matemática e, consequentemente, melhorar os indicadores de aprendizagem. De caráter prático e formativo, essa disciplina fará com que o estudante seja o protagonista do seu aprendizado. Aprender de forma prática e por meios de descobertas, torna o processo mais significativo e prazeroso, facilitando assim, a apropriação de novos aprendizados.

3.3 Objetivo

a) Desenvolver habilidades motoras ao manusear a régua e o compasso na construção deformas geométricas;
b) Transpor segmento de reta utilizando régua e compasso;
c) Traçar ponto o ponto médio de um segmento de reta;
d) Efetuar operações fundamentais entre segmentos utilizando régua e compasso;
e) Traçar retas paralelas e perpendiculares utilizando régua e compasso;
f) Construir triângulos utilizando régua e compasso;
g) Reconhecer a existência de triângulo utilizando régua e compasso;
h) Traçar as cevianas no triângulo e identificar os pontos notáveis utilizando régua e compasso;
i) Construir arco capaz utilizando régua e compasso;
j) Traçar a média aritmética entre dois segmentos de reta utilizando régua e compasso;
k) Traçar a média geométrica entre dois segmentos de reta utilizando régua e compasso;
l) Verificar a validade da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica;

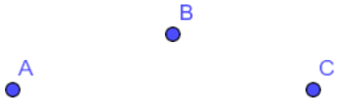
3.4 Conteúdo programático

3.4.1 Conceitos primitivos da Geometria: ponto, reta e plano

O ponto, a reta e o plano, são as bases da Geometria Plana. São considerados conceitos primitivos, pois são de fácil compreensão e não necessitam de uma definição muito elaborada. O ponto não tem dimensão, sendo representado por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Exemplos:

Figura 1 - Representação geométrica de pontos

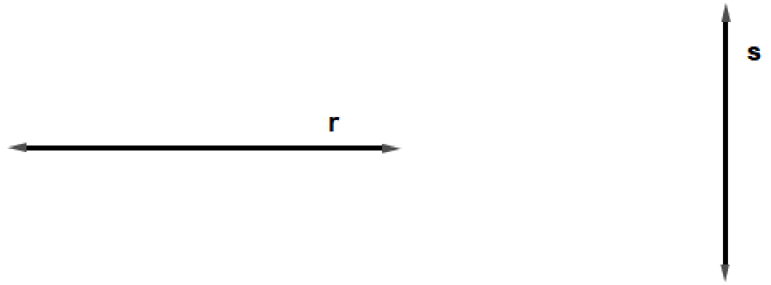


Fonte: Elaborada pelo autor

A reta é um conjunto infinito de pontos, todos alinhados e numa mesma direção. Ela érepresentada por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Exemplos:

Figura 2 - Representação geométrica de retas

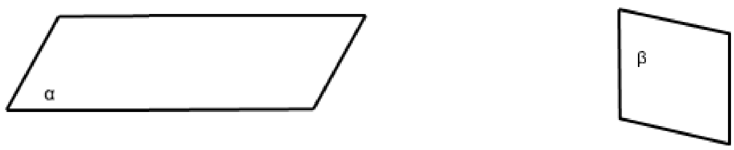


Fonte: Elaborada pelo autor.

O plano é um conjunto infinito de pontos, todos localizados numa mesma superfície que nãose curva. Ele é representado por letras do alfabeto grego.

Exemplos:

Figura 3 - Representação geométrica de planos



Fonte: Elaborada pelo auto

3.4.2 Segmento de reta: ponto médio de um segmento, transporte de segmentos, adição e subtração com segmentos de reta

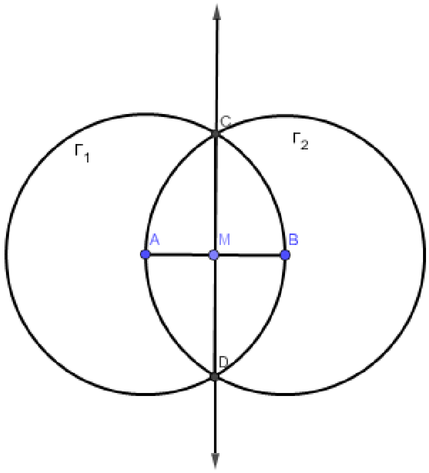
3.4.2.1 Ponto médio de um segmento de reta

Utilizando régua e compasso, trace o ponto médio do segmento AB.

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso em A e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso em B e raio BA, trace a circunferência Γ_2;
3) Passo – 03: identifique por C e D, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_1 e Γ_2;
4) Passo – 04: trace uma reta passando por C e D, ela é a mediatriz do segmento AB;

5) Passo – 05: identifique por M, o ponto de interseção entre o segmento AB e a reta que passapor C e D. Com isso, temos que o ponto M é ponto médio do segmento AB.

Figura 4 - Traçado do ponto médio de um segmento de reta



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.2.2 Transposição de segmento de reta.

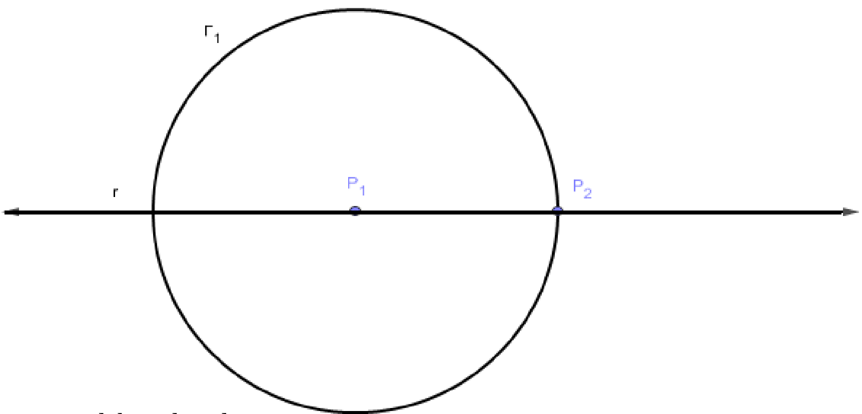
Efetue a transposição do segmento de reta AB para a reta r.

Figura 5 - Representação geométrica de segmento de reta

Fonte: elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: marque o ponto P_1 sobre a reta r;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
4) Passo – 04: veja que, $P_1P_2 \cong AB$. Com isso, concluímos a transposição.

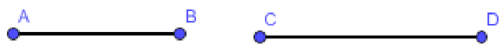
Figura 6 - Representação geométrica da transposição de segmento de reta



Fonte: Elaborada pelo autor.

Efetue a adição dos segmentos.

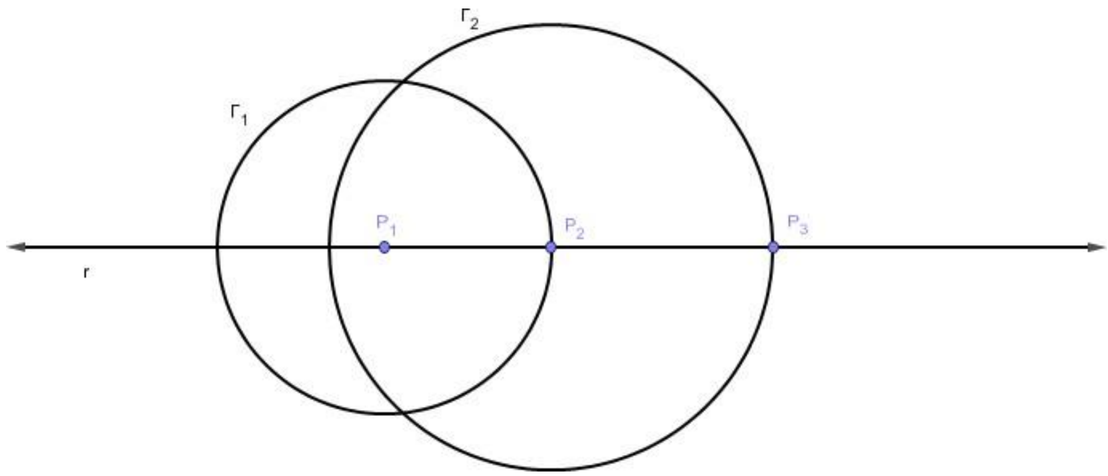
Figura 7 - Representação geométrica de segmentos de reta



Fonte: elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: trace a reta r;
2) Passo – 02: marque o ponto P_1 sobre a reta r;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio CD, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_2, localizado à direita de P_2;
7) Passo – 07: veja que, $P_1P_2 \cong AB$ e $P_2P_3 \cong CD$, com isso, temos que $med(P_1P_3) = med(AB) + med(CD)$.

Figura 8 - Representação geométrica da adição entre segmentos de reta

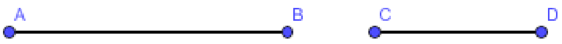


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.2.3 Subtração de segmentos

Subtraia o segmento CD do segmento AB.

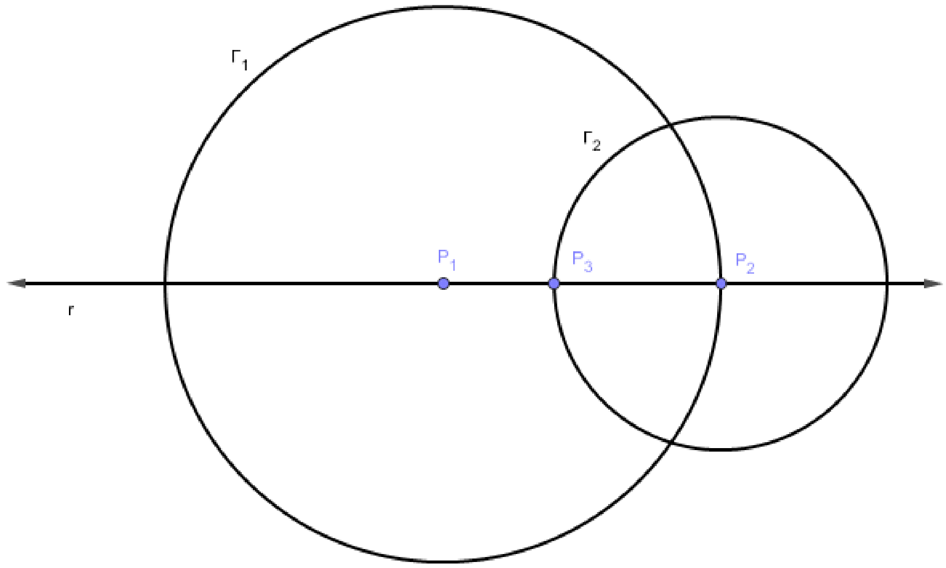
Figura 9 - Representação geométrica de segmentos de reta



Fonte: elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: trace a reta r;
2) Passo – 02: marque sobre a reta r o ponto P_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio CD, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_2, localizado à esquerda de P_2;
7) Passo – 07: veja que, $P_1P_2 \cong AB$ e $P_2P_3 \cong CD$, com isso, temos que med(P_1P_3) = med(AB) – med(CD).

Figura 10 - Representação geométrica da subtração entre segmentos de reta



Fonte: Elaborada pelo autor.

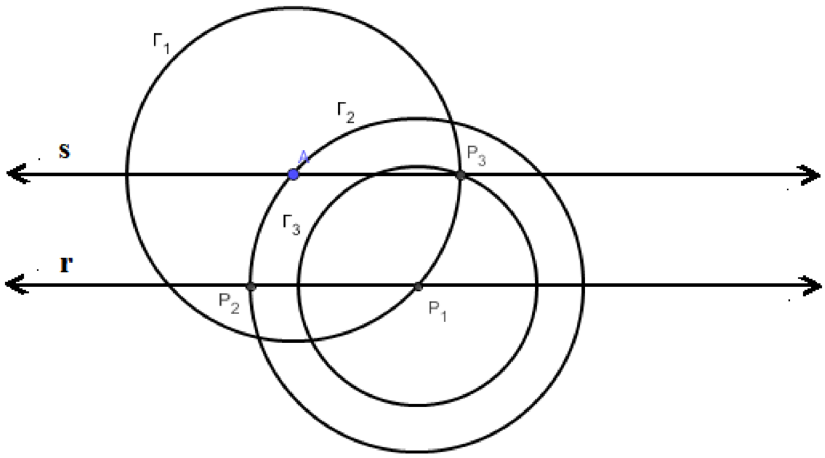
3.4.3 Posições relativas entre duas retas: paralelismo e perpendicularismo

3.4.3.1 Reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto não pertencente a essa reta dada

Utilizando régua e compasso, trace uma reta paralela à reta r, passando pelo ponto A.

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso sobre o ponto A e com uma abertura que ultrapasse a reta r, trace a circunferência Γ_1;
2) Passo – 02: identifique por P_1, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, localizado à direita do ponto A;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_1 e raio P_1A, trace a circunferência Γ_2;
4) Passo – 04: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_2, localizado à esquerda do ponto P_1;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_1 e raio P_2A, trace a circunferência Γ_3;
6) Passo – 06: identifique por P_3, o ponto de interseção entre as circunferências Γ_1 e Γ_3, localizado acima do ponto P_1;
7) Passo – 07: com a régua, trace a reta s passando pelos pontos A e P_3, com isso, temos que r // s e passa por A.

Figura 11 - Traçado de retas paralelas



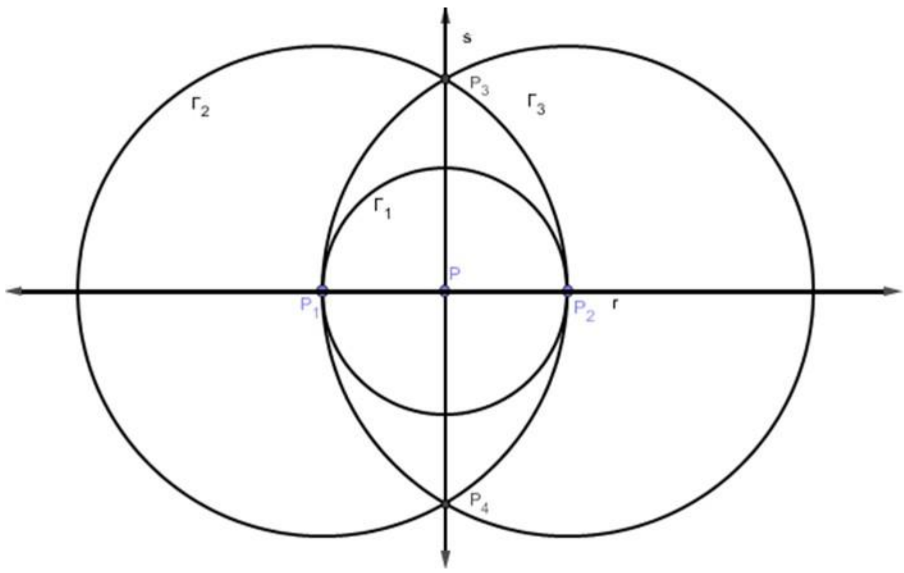
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.3.2 Reta perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto pertencente a essa reta dada

Utilizando régua e compasso, trace uma reta perpendicular à reta r, passando pelo ponto P.

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P e uma abertura qualquer, trace a circunferência Γ_1;
2) Passo – 02: identifique por P_1 e P_2, os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio $P_1 P_2$, trace a circunferência Γ_2;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio $P_2 P_1$, trace a circunferência Γ_3;
5) Passo – 05: identifique por P_3 e P_4, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_2 e Γ_3;
6) Passo – 06: com a régua, trace a reta s passando por P_3 e P_4, ela é perpendicular à reta r e passa pelo ponto P.

Figura 12 - Traçado de retas perpendiculares



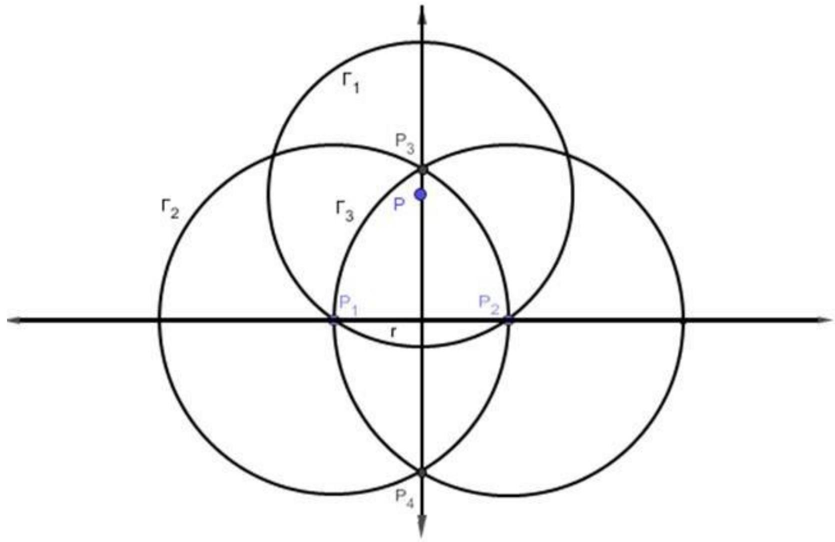
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.3.3 Reta perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto não pertencente a essa reta dada

Utilizando régua e compasso, trace uma reta perpendicular à reta r, passando pelo ponto P.

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P e uma abertura que ultrapasse a reta r, trace a circunferência Γ_1;
2) Passo – 02: identifique por P_1 e P_2, os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio $P_1 P_2$, trace a circunferência Γ_2;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio $P_2 P_1$, trace a circunferência Γ_3;
5) Passo – 05: identifique por P_3 e P_4, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_2 e Γ_3;
6) Passo – 06: com a régua, trace a reta s passando por P_3 e P_4, ela é perpendicular à reta r epassa pelo ponto P.

Figura 13 - Traçado de retas perpendiculares



Fonte: Elaborada pelo autor.

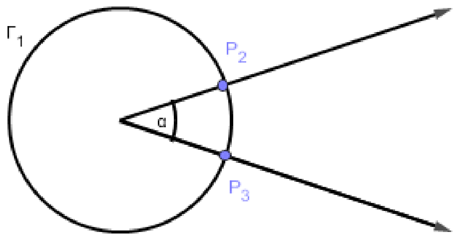
3.4.4 Transporte de ângulo

Utilizando régua e compasso, transporte o ângulo α para a reta r.

1) Passo – 01: marque sobre a reta r o ponto P_1;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso sobre o vértice do ângulo α, em seguida, com uma abertura qualquer, trace a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: identifique por P_2 e P_3, os pontos de interseção entre Γ_1 e os lados do ângulo α;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso sobre P_1 e raio congruente ao raio dacircunferência Γ_1, trace a circunferência Γ_2;
5) Passo – 05: identifique por P_4, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_2, localizado à direita de P_1;
6) Passo – 06: com a ponta seca do compasso em P_4 e raio P_2 e P_3, trace a circunferência Γ_3;
7) Passo – 07: identifique por P_5, o ponto de interseção entre Γ_2 e Γ_3, localizado acima da reta r;
8) Passo – 08: trace a semirreta com origem em P_1 e passando por P_5.

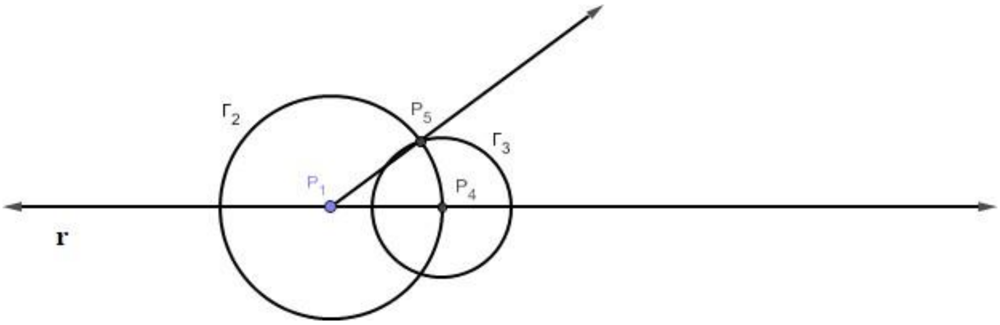
O ângulo $P_4\widehat{P_1}P_5$ representa o transporte do ângulo α sobre a reta r.

Figura 14 - Representação geométrica de ângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 - Representação geométrica do transporte de ângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.5 *Lugares Geométricos: circunferência, bissetriz, mediatriz, retas paralelas e arco capaz*

3.4.5.1 Circunferência

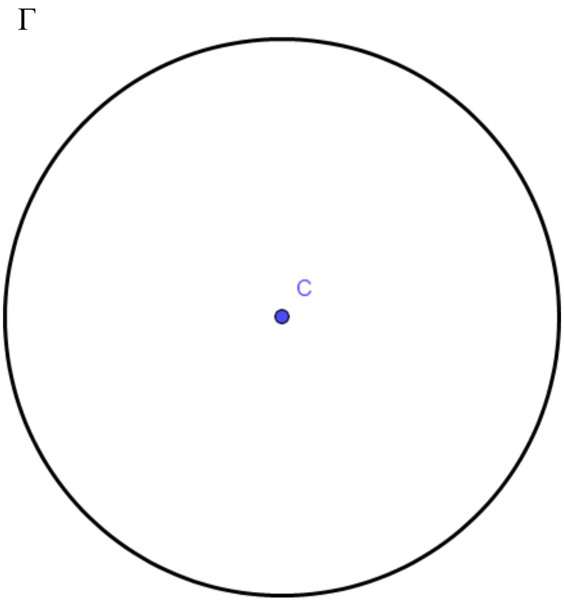
Utilizando régua e compasso, trace uma circunferência com centro no ponto C e raio AB.

Figura 16 - Representação geométrica de segmento de reta

Fonte: Elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: fixe a ponta seca do compasso sobre o ponto C, com raio AB, trace acircunferência Γ.

Figura 17 - Traçado de circunferência



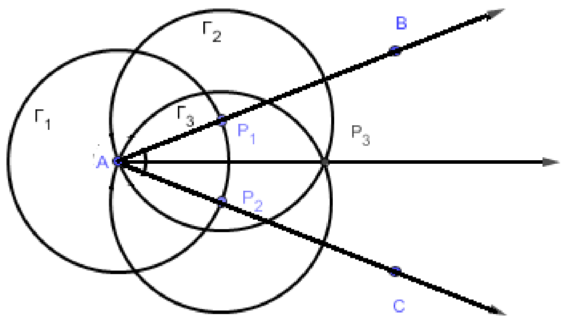
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.5.2 Bissetriz

Utilizando régua e compasso, trace a bissetriz do ângulo BÂC:

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso sobre o vértice do ângulo BÂC, e com uma pequena abertura no compasso, trace a circunferência Γ_1;
2) Passo – 02: identifique por P_1 e P_2, os pontos de interseção entre a circunferência Γ_1 e os ladosdo ângulo BÂC;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio P_1A, trace a circunferência Γ_2;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio P_2A, trace a circunferência Γ_3;
5) Passo – 05: identifique por P_3, o ponto de interseção entre Γ_2 e Γ_3, distinto de A;
6) Passo – 06: trace a semirreta com origem em A passando por P_3, ela é a bissetriz do ângulo BÂC.

Figura 18 - Traçado da bissetriz de um ângulo



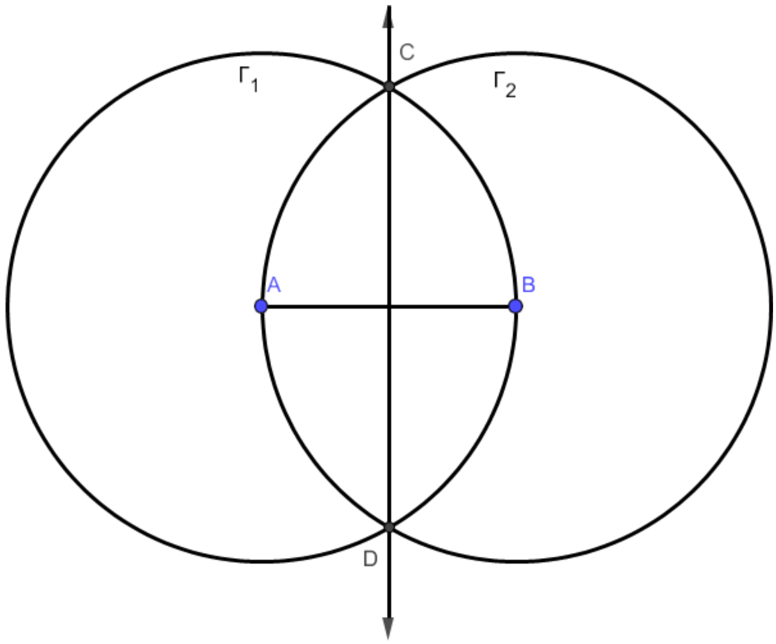
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.5.3 Mediatriz

Utilizando régua e compasso, trace a mediatriz relativa ao segmento AB.

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso sobre o ponto A e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso sobre o ponto B e raio BA, trace a circunferênciaΓ_2;
3) Passo – 03: identifique por C e D, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_1 e Γ_2;
4) Passo – 04: trace uma reta passando por C e D, essa reta será a mediatriz relativa ao segmento AB.

Figura 19 - Traçado da mediatriz relativa a um segmento de reta



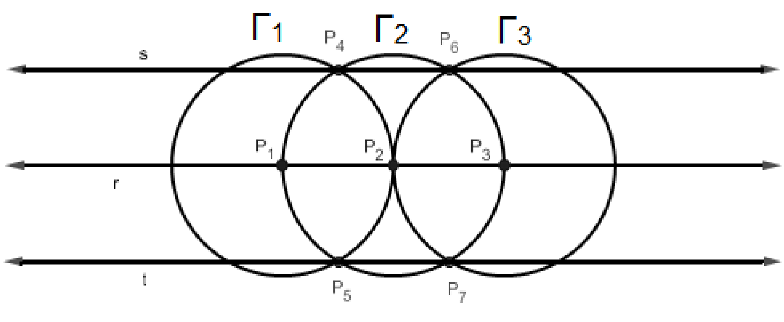
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.5.4 Retas paralelas

Utilizando régua e compasso, trace uma reta paralela à reta r.

1) Passo – 01: marque o ponto P_1 sobre a reta r;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_1 e uma pequena abertura nesse instrumento, trace a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio $P_1 P_2$, trace a circunferência Γ_2;
5) Passo – 05: identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_2, localizado à direita de P_2;
6) Passo – 06: com a ponta seca do compasso em P_3 e raio $P_3 P_2$, trace a circunferência Γ_3;
7) Passo – 07: identifique por P_4 e P_5, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_1 e Γ_2;
8) Passo – 08: identifique por P_6 e P_7, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_2 e Γ_3;
9) Passo – 09: com a régua, trace a reta s passando por P_4 e P_6, temos que r // s;
10) Passo – 10: com a régua, trace a reta t passando por P_5 e P_7, temos que r // t.

Figura 20 - Traçado de retas paralelas

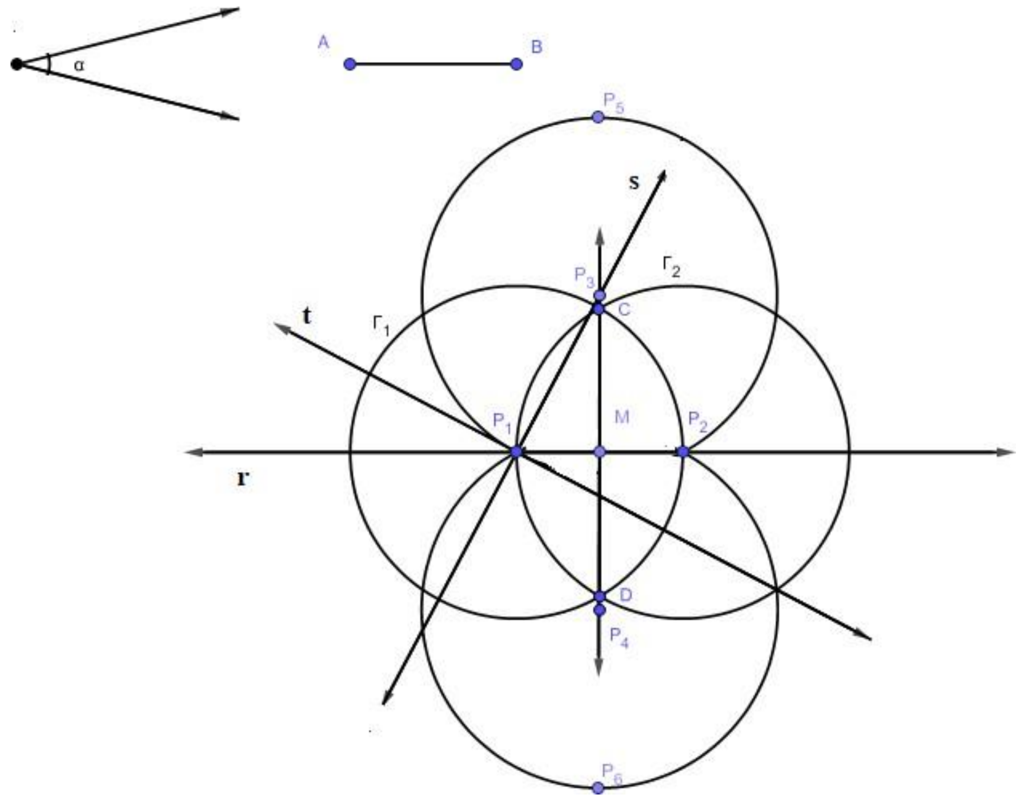


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.5.5 Arco capaz

1) Passo – 01: trace a reta r;
2) Passo – 02: transporte o segmento AB para reta r, por meios de construções anteriores, identificando suas extremidades por P_1 e P_2;
3) Passo – 03: transporte o ângulo α, por meios de construções anteriores, fazendo com que o seu vértice coincida com P_1, um de seus lados esteja sobre a reta r e o outro lado esteja abaixo da reta r;
4) Passo – 04: trace a mediatriz do segmento P_1P_2, em seguida, identifique por M, o seu ponto médio;
5) Passo – 05: trace a reta suporte t do lado do ângulo α transportado, localizado abaixo da reta r;
6) Passo – 06: trace a reta s, perpendicular à reta t e passando pelo ponto P_1;
7) Passo – 07: identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta s e a mediatriz do segmento P_1P_2;
8) Passo – 08: com a ponta seca do compasso sobre o ponto M e abertura M P_3, marque sobre amediatriz do segmento P_1P_2 o ponto P_4, localizado abaixo da reta r;
9) Passo – 09: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_3 e raio P_3P_1, deslizando a ponta chanfrada do compasso no sentido horário, trace o arco capaz $P_1P_5P_2$;
10) Passo – 10: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_4 e raio P_4P_1, deslizando a ponta chanfrada do compasso no sentido anti-horário, trace o arco capaz $P_1P_6P_2$.

Figura 21 - Traçado de arco capaz



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.6 *Triângulos: condições de existência e construção de triângulos*

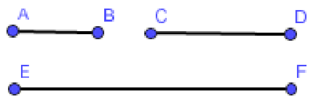
3.4.6.1 Condições de existência de triângulo

Sejam a, b e c, comprimentos de três segmentos de reta. Só será possível construir um triângulo com esses segmentos de reta se, e somente se, ocorrer as desigualdades triangulares:

$$|b - c| < \mathbf{a} < b + c,\ |a - c| < \mathbf{b} < (a + c)\ \mathbf{e}\ |a - b| < \mathbf{c} < (a + b).$$

Verifique, por meios de construções geométricas com régua e compasso, a impossibilidade deconstruir um triângulo, cujos lados são os segmentos AB, CD e EF.

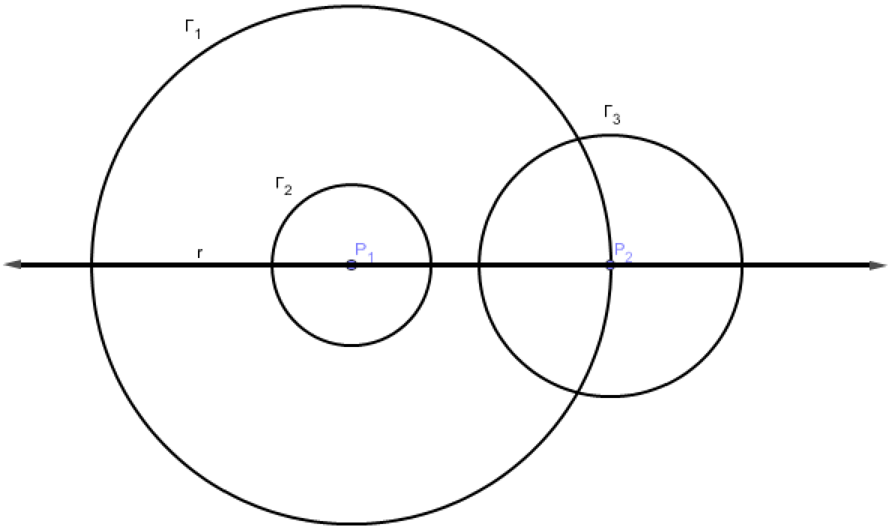
Figura 22 - Representação geométrica de segmentos de reta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: trace a reta, em seguida, marque sobre ela o ponto P_1;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio EF, trace a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1. Veja que $P_1 P_2 \cong EF$;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_2;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio CD, trace a circunferência Γ_3;
6) Passo – 06: veja que $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \varnothing$, com isso, temos que é impossível obter o terceiro vértice do triângulo. É possível observar que med(EF) > med(AB) + med(CD), contrariando a desigualdade triangular.

Figura 23 - Impossibilidade da construção de triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.6.2 Construção de triângulo equilátero

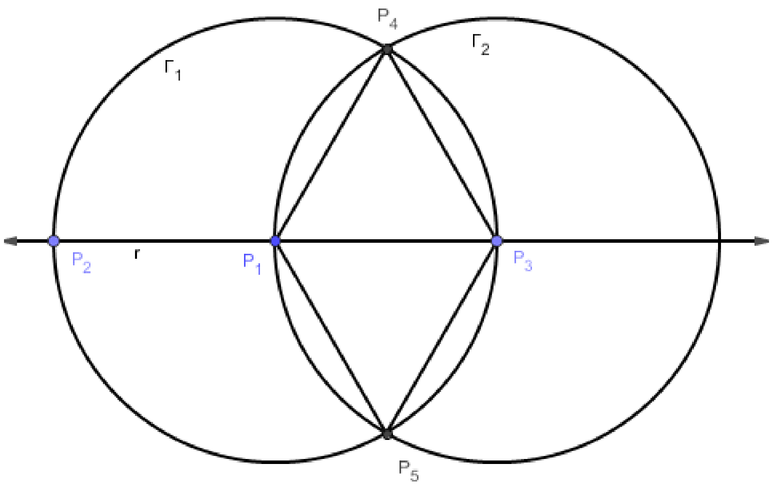
Utilizando régua e compasso, construa um triângulo equilátero com lados congruentes ao segmento AB.

Figura 24 - Representação de segmento de reta.

Fonte: Elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: trace a reta r;
2) Passo – 02: marque sobre a reta r o ponto P_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso sobre P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2 e P_3, os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, com P_3 à direita de P_1. Note que $P_1P_3 \cong AB$;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso sobre P_3 e raio AB, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: identifique por P_4 e P_5, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_1 e Γ_2. Note que $P_1P_3 \cong P_1P_4 \cong P_4P_3 \cong P_1P_5 \cong P_5P_3 \cong AB$, com isso, temos que os triângulos (P_1P_3 P_4) e (P_1P_3 P_5) são equiláteros.

Figura 25 - Traçado de triângulo equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.6.3 Construindo triângulo isósceles

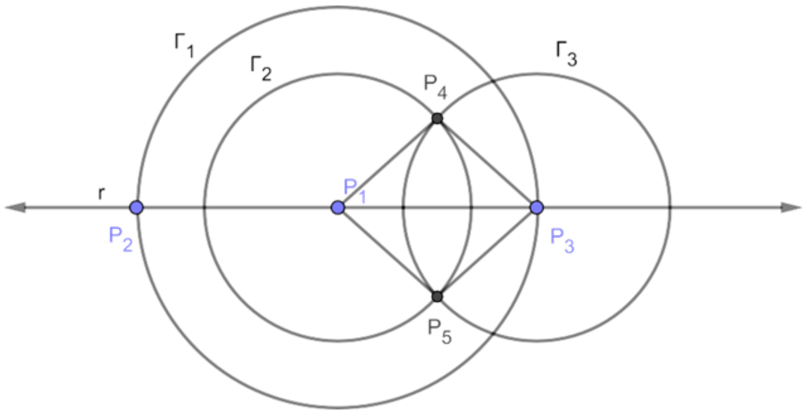
Utilizando régua e compasso, construa um triângulo isósceles, sendo o segmento AB como base, e os outros lados congruentes ao segmento CD.

Figura 26 - Representação geométrica de segmentos de reta

Fonte: Elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: trace a reta r;
2) Passo – 02: marque sobre a reta r o ponto P_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso sobre P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2 e P_3, os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, com P_3 à direita de P_1. Note que $P_1P_3 \cong AB$;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso sobre P_1 e raio CD, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: com a ponta seca do compasso sobre P_3 e raio CD, trace a circunferência Γ_3;
7) Passo – 07: identifique por P_4 e P_5, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_2 e Γ_3. Note que $P_1P_4 \cong P_3P_4 \cong P_1P_5 \cong P_5P_3 \cong CD$, com isso, temos que os triângulos $(P_1P_3\ P_4)$ e $(P_1P_3\ P_5)$ são isósceles.

Figura 27 - Traçado de triângulo isósceles



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.6.4 Construindo triângulo escaleno

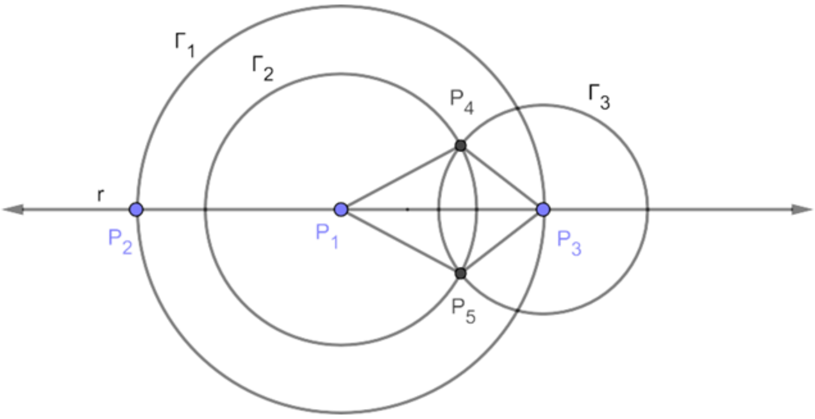
Utilizando régua e compasso, construa um triângulo escaleno, com lados congruentes as medidas dos segmentos AB, CD e EF.

Figura 28 - Representação geométrica de segmentos de reta

Fonte: Elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: trace a reta r;
2) Passo – 02: marque sobre a reta r o ponto P_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso sobre P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2 e P_3, os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1, com P_3 à direita de P_1. Note que $P_1P_3 \cong AB$;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso sobre P_1 e raio CD, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: com a ponta seca do compasso sobre P_3 e raio CD, trace a circunferência Γ_3;
7) Passo – 07: identifique por P_4 e P_5, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_2 e Γ_3. Note que, $P_1P_4 \cong P_1P_5 \cong CD$ e $P_3P_4 \cong P_3P_5 \cong EF$, com isso, temos que os triângulos (P_1P_3 P_4) e (P_1P_3 P_5) são escalenos.

Figura 29 - Traçado de triângulo escaleno



Fonte: Elaborada pelo autor.

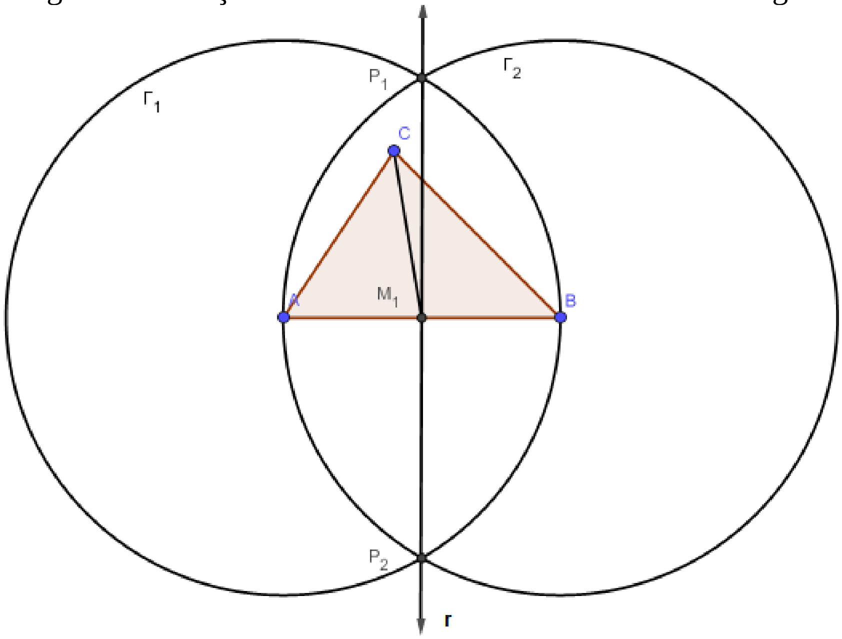
3.4.7 Cevianas no triângulo: mediana, bissetriz e altura

3.4.7.1 Mediana relativa a um dos lados do triângulo

Utilizando régua e compasso, trace a mediana relativa ao lado AB do triângulo (ABC).

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso no ponto A e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso no ponto B e raio BA, trace a circunferência Γ_2;
3) Passo – 03: identifique por P_1 e P_2, os pontos de interseção entre Γ_1 e Γ_2;
4) Passo – 04: trace a reta r que passa pelos pontos P_1 e P_2, ela é a mediatriz do segmento AB;
5) Passo – 05: identifique por M_1, o ponto de interseção entre a reta r e o segmento AB, com isso, temos que, M_1 é ponto médio do segmento AB;
6) Passo – 06: trace o segmento CM_1, ele é a mediana relativa ao lado AB do triângulo (ABC)

Figura 30 - Traçado da mediana relativa a um lado do triângulo



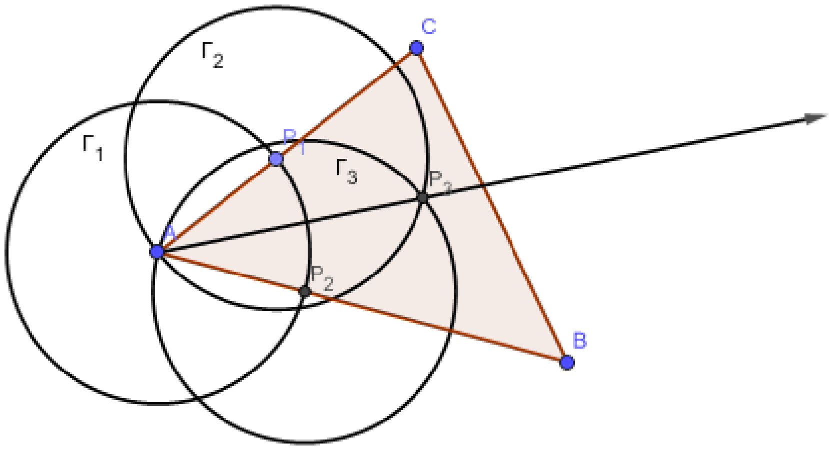
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.7.2 Bissetriz interna relativa a um dos ângulos internos do triângulo

Utilizando régua e compasso, trace a bissetriz interna relativa ao ângulo BÂC, no triângulo(ABC).

1) Passo – 01: com a ponta seca do compasso no ponto A e uma pequena abertura no mesmo, trace a circunferência Γ_1, fazendo com ela intercepte os lados do ângulo BÂC;
2) Passo – 02: identifique por P_1 e P_2, os pontos de interseção entre a circunferência Γ_1 e os lados AC e AB do ângulo BÂC, respectivamente;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio P_1A, trace a circunferência Γ_2;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio P_2A, trace a circunferência Γ_3;
5) Passo – 05: identifique por P_3, o ponto de interseção entre as circunferências Γ_2 e Γ_3, distinto de A;
6) Passo – 06: trace a semirreta com origem no ponto A e passando pelo ponto P_3, ela será a bissetriz do ângulo BÂC.

Figura 31 - Traçado da bissetriz de um dos ângulos internos do triângulo.



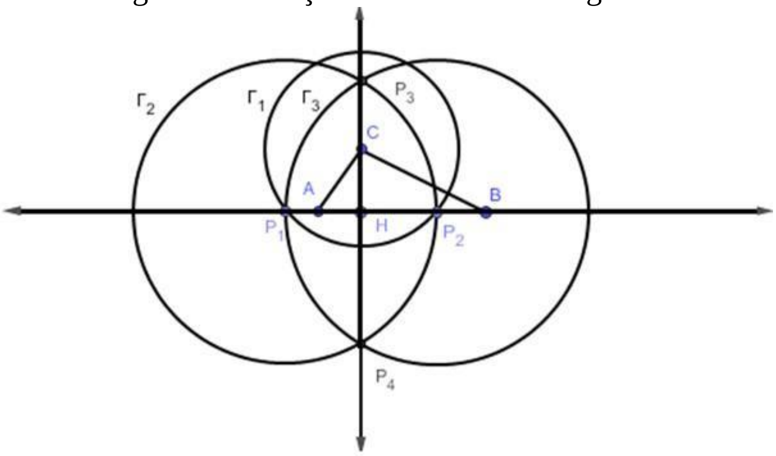
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.7.3 Altura de um triângulo

Utilizando régua e compasso, trace a altura relativa ao lado AB, no triângulo (ABC).

1) Passo – 01: com a régua, trace a reta suporte do segmento AB;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso sobre o vértice C e com abertura no compasso que ultrapasse a reta suporte do lado AB, trace a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: identifique por P_1 e P_2, os pontos de interseção entre a reta suporte do lado AB e acircunferência Γ_1;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso sobre P_1 e raio $P_1 P_2$, trace a circunferência Γ_2;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso sobre P_2 e raio $P_2 P_1$, trace a circunferência Γ_3;
6) Passo – 06: identifique por P_3 e P_4, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_2 e Γ_3;
7) Passo – 07: trace uma reta passando por P_3 e P_4, ela será a mediatriz do segmento P_1P_2, passando pelo vértice C, do triângulo (ABC);
8) Passo – 08: identifique por H, o ponto de interseção entre a reta suporte do lado AB e a mediatriz do segmento $P_1 P_2$, o segmento CH será a altura do triângulo (ABC), relativa ao lado AB.

Figura 32 - Traçado da altura do triângulo



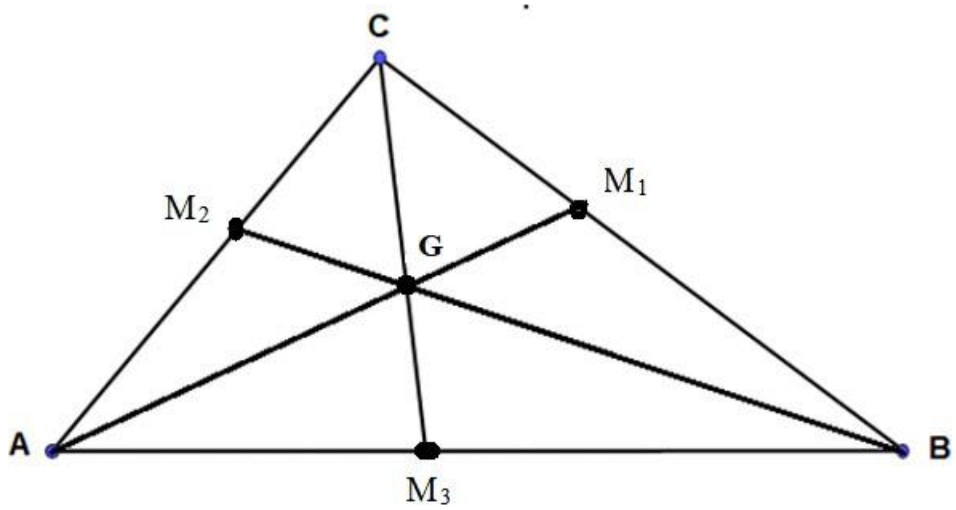
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.8 Pontos notáveis no triângulo: Baricentro, Incentro, Circuncentro e Ortocentro

3.4.8.1 Baricentro

1) Passo – 01: trace o ponto médio do segmento BC, por processos anteriores, em seguida, identifique-o por M_1;
2) Passo – 02: trace o ponto médio do segmento AC, por processos anteriores, em seguida, identifique-o por M_2;
3) Passo – 03: trace o ponto médio do segmento AB, por processos anteriores, em seguida, identifique-o por M_3;
4) Passo – 04: com a régua, trace o segmento AM_1, ele pertence à mediana relativa ao lado BC do triângulo (ABC);
5) Passo – 05: com a régua, trace o segmento BM_2, ele pertence à mediana relativa ao lado AC do triângulo (ABC);
6) Passo – 06: com a régua, trace o segmento CM_3, ele pertence à mediana relativa ao lado AB do triângulo (ABC);
7) Passo – 07: identifique por G, o ponto de interseção entre os segmentos AM_1, BM_2 e CM_3, ele é o baricentro do triângulo (ABC).

Figura 33 - Traçado do Baricentro do triângulo



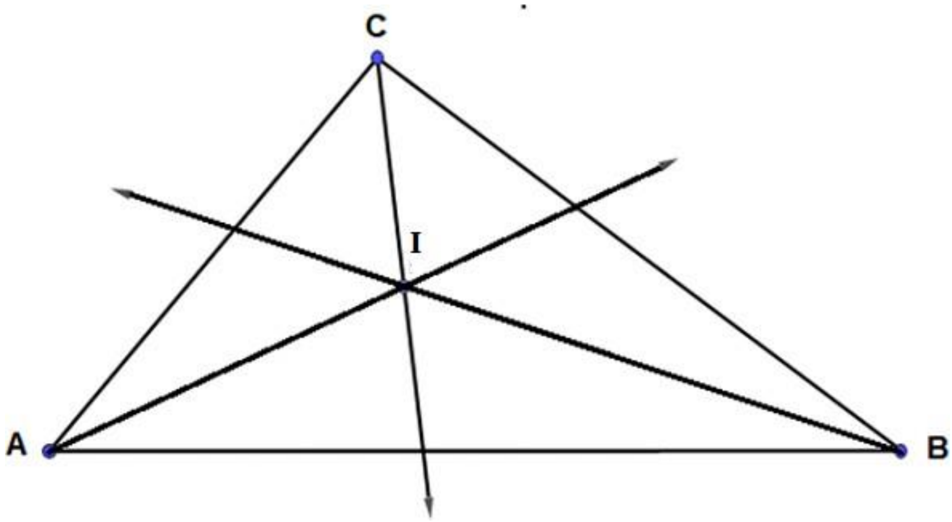
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.8.2 Incentro

Utilizando régua e compasso, determine o Incentro do triângulo (ABC).

1) Passo – 01: trace a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, por processos anteriores;
2) Passo – 02: trace a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, por processos anteriores;
3) Passo – 03: trace a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$, por processos anteriores;
4) Passo – 04; identifique por I, o ponto de interseção entre as três bissetrizes, ele é o Incentro do triângulo (ABC).

Figura 34 - Traçado do Incentro do triângulo



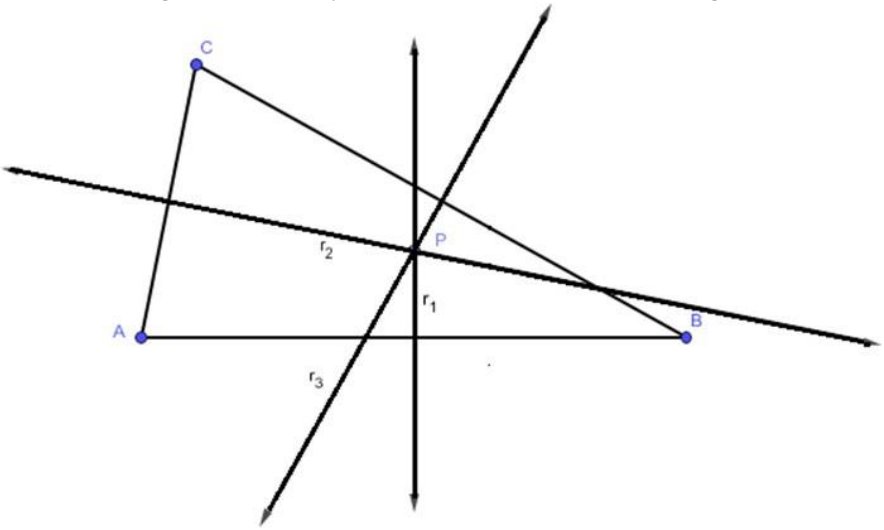
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.8.3 Circuncentro

Utilizando régua e compasso, determine o Circuncentro do triângulo (ABC);

1) Passo – 01: trace a mediatriz relativa ao lado AB, por processos anteriores, no triângulo(ABC);
2) Passo – 02: trace a mediatriz relativa ao lado AC, por processos anteriores, no triângulo(ABC);
3) Passo – 03: trace a mediatriz relativa ao lado BC, por processos anteriores, no triângulo(ABC);
4) Passo – 04: identifique por P, o ponto de interseção entre as três mediatrizes traçadas, ele é o Circuncentro do triângulo (ABC).

Figura 35 - Traçado do Circuncentro do triângulo



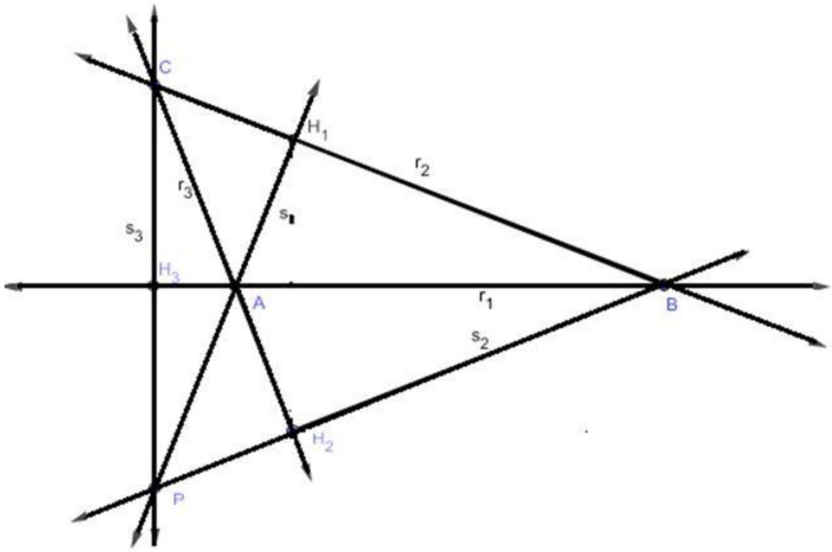
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.8.4 Ortocentro

Utilizando régua e compasso, determine o Ortocentro do triângulo (ABC);

1) Passo – 01: trace a reta suporte do lado AB, identificando-a por r_1;
2) Passo – 02: trace a reta suporte do lado BC, identificando-a por r_2;
3) Passo – 03: trace a reta suporte do lado AC, identificando-a por r_3;
4) Passo – 04: trace a altura AH_1, por processos anteriores, relativa ao lado BC, em seguida,trace sua reta suporte e a identifique-a por s_1;
5) Passo – 05: trace a altura BH_2, por processos anteriores, relativa ao lado AC, em seguida, trace sua reta suporte e a identifique-a por s_2;
6) Passo – 06: trace a altura CH_3, por processos anteriores, relativa ao lado AB, em seguida, trace sua reta suporte e a identifique-a por s_3;
7) Passo – 07: identifique por P, o ponto de interseção entre s_1, s_2 e s_3, ele é ortocentro do triângulo (ABC).

Figura 36 - Traçado do Ortocentro do triângulo



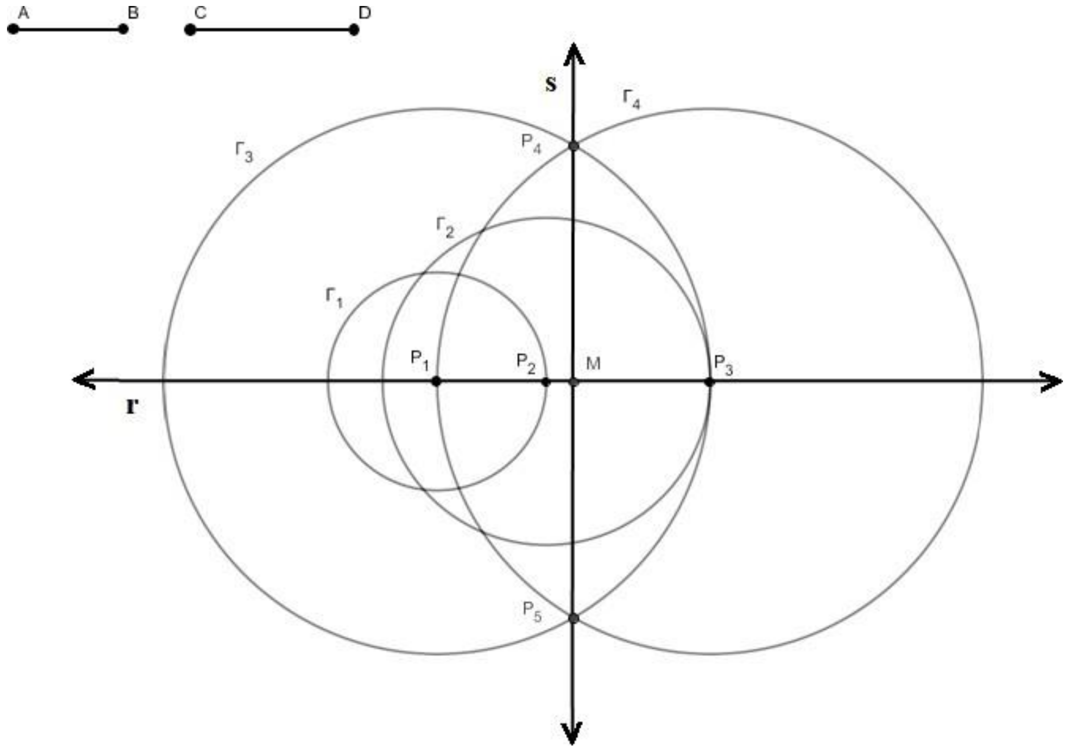
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.9 Representação geométrica, da Média Aritmética, entre dois segmentos de reta

Utilizando régua e compasso, determine a representação geométrica, da média aritmética entre os segmentos AB e CD.

1) Passo – 01: com a régua, trace a reta r;
2) Passo – 02: marque sobre a reta r o ponto P_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio CD, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta e a circunferência Γ_2, localizado à direita de P_2;
7) Passo – 07: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio $P_1 P_3$, trace a circunferência Γ_3;
8) Passo – 08: com a ponta seca do compasso em P_3 e raio $P_3 P_1$, trace a circunferência Γ_4;
9) Passo – 09: identifique por P_4 e P_5, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_3 e Γ_4;
10) Passo – 10: com a régua, trace a reta s passando por P_4 e P_5, em seguida, identifique por M, oponto de interseção entre as retas r e s;
11) Passo – 11: os segmentos de reta $P_1M \cong MP_3$, eles são a representação geométrica da média aritmética entre os segmentos AB e CD.

Figura 37 - Representação geométrica da média aritmética entre segmentos de reta



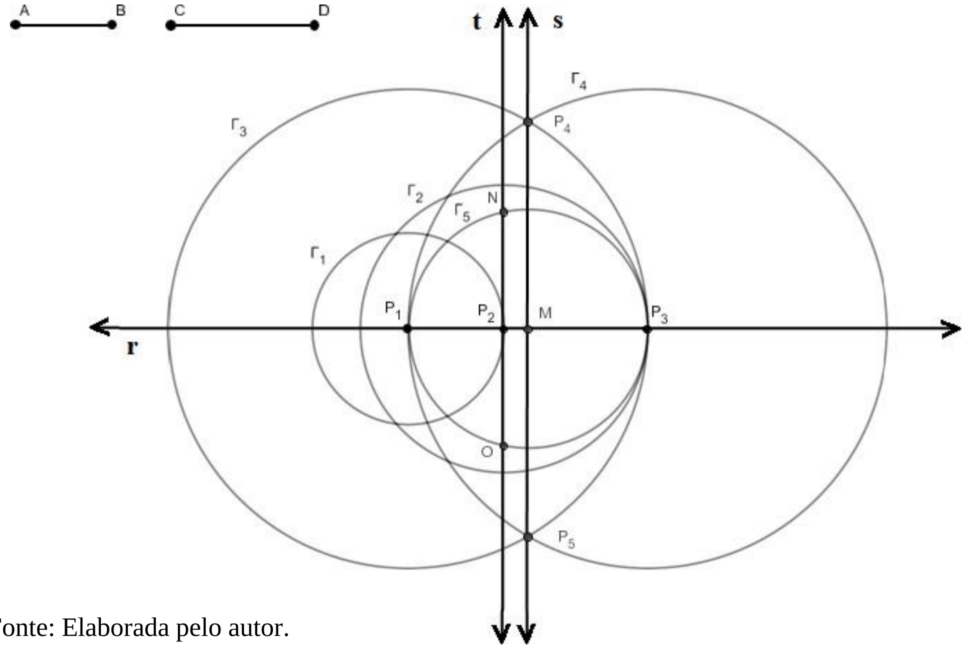
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.10 Representação geométrica, da Média Geométrica, entre dois segmentos de reta

Utilizando régua e compasso, determine a representação geométrica, da média geométrica entre os segmentos AB e CD.

1) Passo – 01: com a régua, trace a reta r;
2) Passo – 02: marque sobre a reta r o ponto P_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio CD, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta e a circunferência Γ_2, localizado à direita de P_2;
7) Passo – 07: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio $P_1 P_3$, trace a circunferência Γ_3;
8) Passo – 08: com a ponta seca do compasso em P_3 e raio $P_3 P_1$, trace a circunferência Γ_4;
9) Passo – 09: identifique por P_4 e P_5, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_3 e Γ_4;
10) Passo – 10: com a régua, trace a reta s passando por P_4 e P_5, em seguida, identifique por M, oponto de interseção entre as retas r e s;
11) Passo – 11: com a ponta seca do compasso sobre o ponto M e raio MP_1, trace a circunferência Γ_5;
12) Passo – 12: com a régua, trace a reta t passando por P_2 e paralela a reta s, por processos anteriores;
13) Passo – 13: identifique por N e O, os pontos de interseção entre a reta t e a circunferência;
14) Passo – 14: os segmentos de reta $P_2N \cong P_2O$, eles são a representação geométrica, da médiageométrica entre os segmentos AB e CD.

Figura 38 - Representação geométrica da média geométrica entre dois segmentos de reta



Fonte: Elaborada pelo autor.

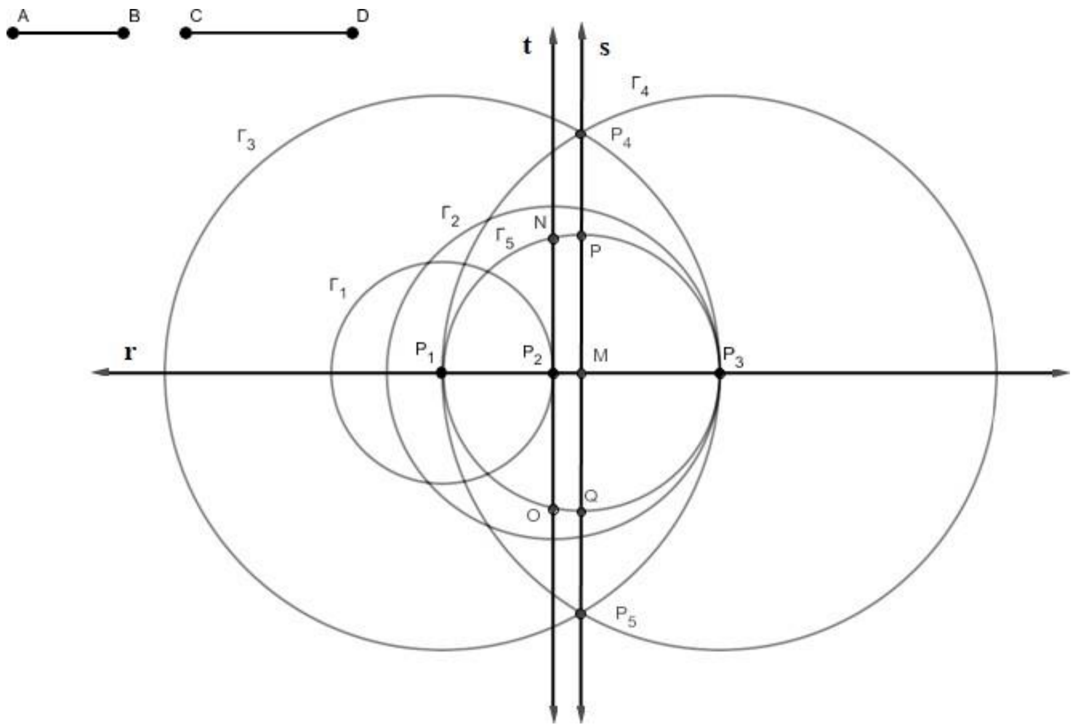
3.4.11 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

Utilizando régua e compasso, determine a representação geométrica, das médias geométrica e aritmética entre os segmentos AB e CD.

1) Passo – 01: com a régua, trace a reta r;
2) Passo – 02: marque sobre a reta r o ponto P_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio AB, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio CD, trace a circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_2, localizado à direita de P_2;
7) Passo – 07: com a ponta seca do compasso em P_1 e raio $P_1 P_3$, trace a circunferência Γ_3;
8) Passo – 08: com a ponta seca do compasso em P_3 e raio $P_3 P_1$, trace a circunferência Γ_4;
9) Passo – 09: identifique por P_4 e P_5, os pontos de interseção entre as circunferências Γ_3 e Γ_4;
10) Passo – 10: com a régua, trace a reta s passando por P_4 e P_5, em seguida, identifique por M, oponto de interseção entre as retas r e s;
11) Passo – 11: com a ponta seca do compasso sobre o ponto M e raio MP_1, trace a circunferência Γ_5, identifique por M e Q os pontos de interseção entre a reta s e a circunferência Γ_5,
12) Passo – 12: com a régua, trace a reta t passando por P_2 e paralela a reta s, por processos anteriores;
13) Passo – 13: identifique por N e O, os pontos de interseção entre a reta t e a circunferência Γ_5;
14) Passo – 14: os segmentos de reta $P_2N \cong P_2O$, eles são a representação geométrica, da média geométrica entre os segmentos AB e CD.
15) Passo – 15: os segmentos de reta $MP \cong MQ$, são a representação geométrica, da média aritmética entre os segmentos AB e CD;
16) Passo – 16: veja que $P_2N \cong P_2O \leq MP \cong MQ$. Caso ocorra $AB \cong CD$, temos

a igualdade das médias.

Figura 39 - Representação gráfica da desigualdade das médias aritmética e geométrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5 Metodologia

1) Acolhimento da turma;
2) Memórias do que foi vivenciado na aula anterior;
3) Distribuição de régua, compasso e folha de papel ofício A4;
4) Para efetuar as construções, os estudantes deverão seguir o passo-a-passo indicado pelo professor;
5) Em momento oportuno o professor fará anotações de caráter informativo a respeito de conceitos matemáticos presentes na construção, bem como sua importância para o conhecimento matemático;
6) Aos estudantes serão apresentados conceitos de caráter primitivo e a partir deles os estudantes deverão desenvolver habilidades para construir suas argumentações na defesa de suas hipóteses;
7) Na medida do possível, os estudantes serão desafiados a resolver problemas do cotidiano, aplicando os conhecimentos adquiridos na eletiva, tornando o aprendizado prazeroso e significativo;
8) Após a conclusão de cada construção o estudante poderá visualizar o que foi produzido no aplicativo de geometria dinâmica Geogebra.

3.6 Recursos didáticos

1) Sala de aula com mobília adequada para aulas de construções geométricas com régua ecompasso;
2) TV e computador com acesso à internet;
3) Régua e compasso;
4) Lapiseira, grafite e borracha;
5) Folhas de papel ofício A4.

3.7 Proposta de culminância

1) Exposição das construções geométricas produzidas durante o desenvolvimento da eletiva;

3.8 Avaliação

1) Processual e contínua com base na participação e na realização das atividades propostas;
2) Os estudantes deverão apresentar, ao final de cada aula, um relatório do que foi vivenciado na rotina diária;
3) Ao final da eletiva os estudantes, em grupos, deverão apresentar um trabalho de conclusão da eletiva. Alguns trabalhos serão selecionados para compor a apresentação da eletiva no dia da culminância.

4 PROBLEMAS PROPOSTOS

Problema – 01: Num plano são dados dois pontos fixos M e N. Determine o Lugar Geométrico do ponto P, sabendo que o ângulo $M\hat{P}N$ é reto.

Problema – 02: Num plano há três pontos fixos M, P e N, não-colineares. No triângulo apresentando esses três pontos como vértice, temos que a mediana relativa ao vértice P é igual à metade do lado MN. Quanto mede o ângulo $M\hat{P}N$?

Problema – 03: Num plano temos um triângulo cujos vértices são os pontos M, N e P. O ângulo de vértice N mede 74º e o ângulo de vértice P mede 38º. Traçada a altura MX, relativa ao lado NP e a altura NY a altura relativa ao lado MP. Quanto mede o ângulo M$\hat{X}$Y?

Problema – 04: Num plano são dadas duas retas perpendiculares. Sobre uma dessas retas marca-se um ponto P, sobre a outra reta marca-se o ponto Q, de forma que P e Q não estejam na intersecção dessas duas retas. Determine o lugar geométrico do ponto médio do segmento $\overline{PQ}$.

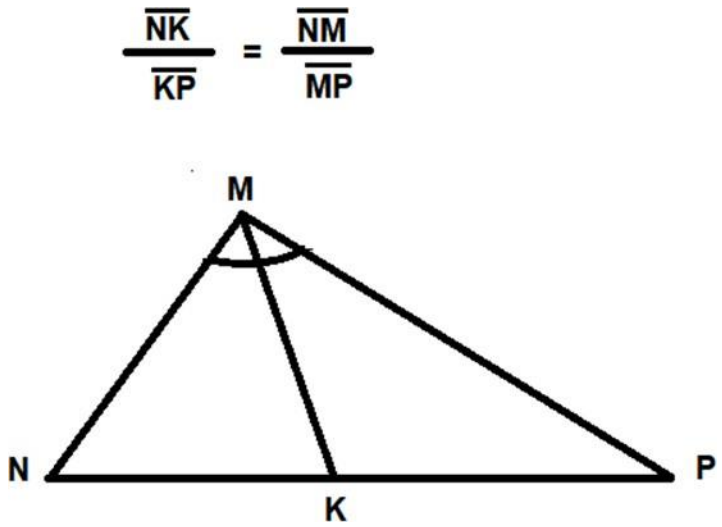
Problema – 05: Num plano são dadas duas circunferências concêntricas. Uma corda de comprimento 12 cm, pertencente à circunferência de raio maior, tangencia a circunferência de raio menor. Determine a área da região limitada por essas duas circunferências.

Problema – 06: Considere um triângulo ABC. Sejam M o ponto médio do segmento BC e a circunferência Γ, tal que, o segmento AB é um diâmetro. Prove que AB = AC se, e somente se, M pertence à circunferência Γ.

Problema – 07: Dados dois segmentos de comprimentos “s” e “q”, com s > 2q, indique a construção geométrica com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação de segundo grau $x^2 - sx + q^2 = 0$.

Problema – 08: Num plano é dado um triângulo MNP. Sendo K o pé da bissetriz interna relativa ao lado NP, prove o Teorema da Bissetriz Interna, isto é, que

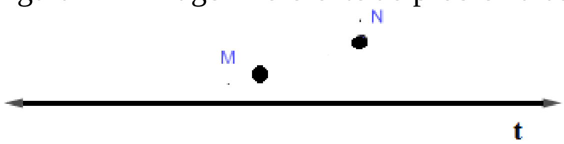
Figura 40 -Imagem referente ao problema 08



Fonte: Elaborada pelo autor.

Problema – 09: Utilizando régua e compasso, construa uma circunferência tangente à reta “**t**” e que contenha os pontos **M** e **N**.

Figura 41 - Imagem referente ao problema 09.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Problema – 10: Considerando o segmento unitário padrão de medida e o segmento MN = n. utilize régua e compasso, para construir um segmento de reta que tenha comprimento $\sqrt{n}$.

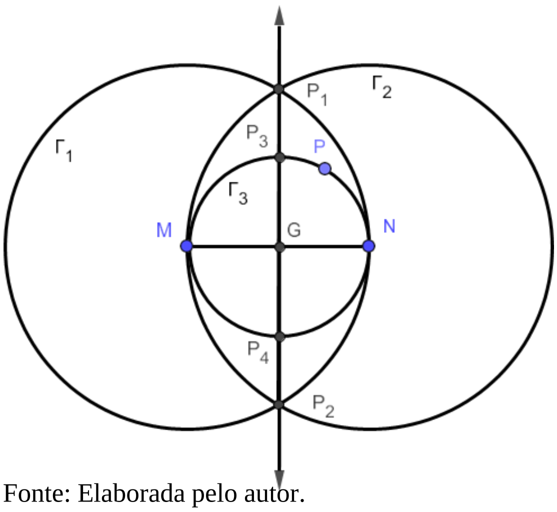
5 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

5.1 Resolução do problema 01

Num plano são dados dois pontos fixos M e N. Determine o Lugar Geométrico do ponto P, sabendo que o ângulo $M\hat{P}N$ é reto.

1) Passo – 01: com a régua, trace o segmento $\overline{MN}$;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso em M e raio $\overline{MN}$,trace a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: com a ponta seca do compasso em N e raio $\overline{NM}$, trace a circunferência Γ_2;
4) Passo – 04: identifique por P_1 e P_2, os pontos de interseção entre Γ_1 e Γ_2;
5) Passo – 05: com a régua, trace a mediatriz do segmento $\overline{MN}$ passando por P_1 e P_2;
6) Passo – 06: identifique por G, o ponto de interseção entre o segmento $\overline{MN}$ e sua mediatriz, ele é o ponto médio do segmento $\overline{MN}$;
7) Passo – 07: com a ponta seca do compasso em G e raio $\overline{GM}$, trace a circunferência Γ_3, em seguida, identifique por P_3 e P_4, os pontos de interseção entre a circunferência Γ_3 e a mediatriz do segmento $\overline{MN}$;
8) Passo – 08: marque sobre a circunferência Γ_3 o ponto P;
9) Passo – 09: qualquer ponto P, sobre os arcos $\widehat{MP_3N}$ e $\widehat{MP_4N}$, determina com os pontos M e N, ângulo $M\hat{P}N$ reto. Logo, os arcos $\widehat{MP_3N}$ e $\widehat{MP_4N}$, são os lugares geométricos que solucionam o problema.

Figura 42 - Imagem relativa à resolução do problema 01



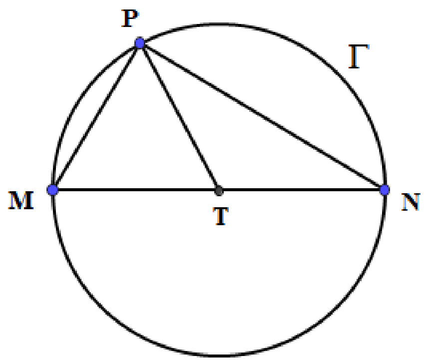
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Resolução do problema do 02

Num plano há três pontos fixos M, P e N, não-colineares. No triângulo apresentando esses três pontos como vértice, temos que a mediana relativa ao vértice P é igual à metade do lado MN. Quanto mede o ângulo $M\hat{P}N$?

1) Passo – 01: com a régua, trace os lados do triângulo (MNP);
2) Passo – 02: trace o ponto médio do segmento MN, por processos anteriores, em seguida, identifique-o por T;
3) Passo – 03: com a régua, trace a mediana PT, pelos dados do problema, temos que os segmentos PT ≅ TN ≅ TM;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso sobre T e raio TM, trace a circunferência Γ, veja que essa circunferência contém os pontos M, N e P e que MN é um dos seus diâmetros;
5) Passo – 05: observando que o ângulo $M\hat{P}N$ é inscrito à circunferência Γ, com isso, temos quemed($M\hat{P}N$) = 90º.

Figura 43 - Imagem relacionada à resolução do problema 02.



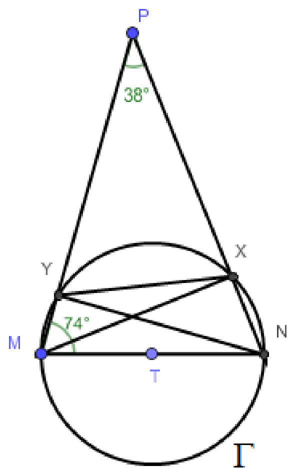
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 Resolução do problema 03

Num plano temos um triângulo cujos vértices são os pontos M, N e P. O ângulo de vértice M mede 74º e o ângulo de vértice P mede 38º. Traçada a altura MX, relativa ao lado NP e a altura NY a altura relativa ao lado MP. Quanto mede o ângulo $M\hat{X}Y$?

1) Passo – 01: trace a altura MX relativa ao lado NP, por processos anteriores;
2) Passo – 02: trace a altura NY relativa ao lado MP, por processos anteriores;
3) Passo – 03: marque o ponto médio do segmento MN, por processos anteriores, em seguida,identifique-o por T;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso sobre o ponto T e raio TM, trace a circunferênciaΓ;
5) Passo – 05: observando que o triângulo (MYN) é retângulo, sendo MN sua hipotenusa, com isso, temos que o ângulo MNY mede 16º;
6) Passo – 06: observando que os ângulos (MNY) e (MXY) são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco, com isso, temos que o ângulo $M\hat{X}Y$ mede 16º.

Figura 44 - Imagem relacionada à resolução do problema 03



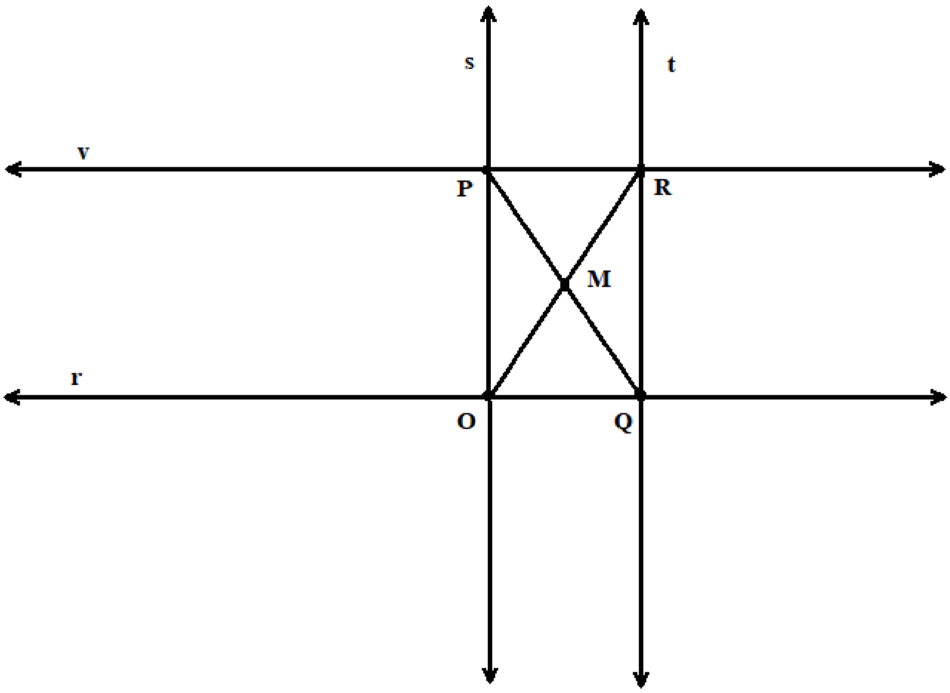
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Resolução do problema 04

Num plano são dadas duas retas perpendiculares. Sobre uma dessas retas marca-se um ponto P, sobre a outra reta marca-se o ponto Q, de forma que P e Q não estejam na intersecção dessas duas retas. Determine o lugar geométrico do ponto médio do segmento $\overline{PQ}$.

1) Passo – 01: considerando as retas r e s, como sendo as retas perpendiculares dadas noproblema, tendo o ponto O como ponto de interseção;
2) Passo – 02: marque sobre a reta s o ponto P, em seguida, marque sobre a reta r o ponto Q;
3) Passo – 03: marque o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, por construções anteriores, em seguida,identifique-o por M;
4) Passo – 04: trace a reta v, perpendicular à reta s, passando pelo ponto P;
5) Passo – 05: trace a reta t, perpendicular à reta r, passando por Q;
6) Passo – 06: identifique por R, o ponto de interseção entre as retas v e t;
7) Passo – 07: identifique por Q, o ponto de interseção entre as retas r e t;
8) Passo – 08: observando que os segmentos $\overline{PQ} \cong \overline{OR}$, são as diagonais do retângulo (OPRQ)e que se interceptam no ponto M;
9) Passo – 09: traçando uma circunferência, com a ponta seca do compasso em O e raio $\overline{OR}$, oponto M percorrerá uma circunferência com centro em O e raio $\overline{OM}$.

Figura 45 - Imagem relacionada à resolução do problema 04.



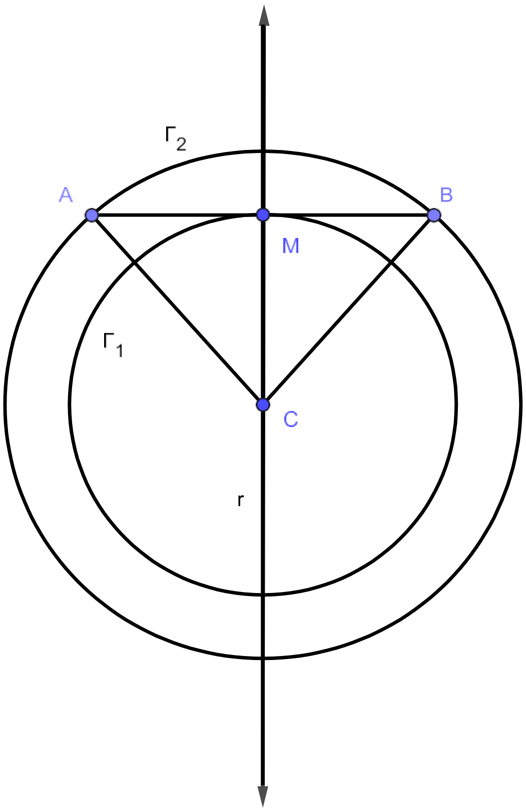
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5 Resolução do problema 05

Num plano são dadas duas circunferências concêntricas. Uma corda de comprimento 12 cm, pertencente à circunferência de raio maior, tangencia a circunferência de raio menor. Determine a área da região limitada por essas duas circunferências.

1) Passo – 01: considerando Γ_1 e Γ_2, as circunferências concêntricas dadas no problema, com centro no ponto C;
2) Passo – 02: considerando o segmento $\overline{AB}$, com med(AB) = 12 cm, a corda dada no problema;
3) Passo – 03: trace a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, por processos anteriores, em seguida identifique por M o seu ponto médio;
4) Passo – 04: temos que med(AM) = 6 cm;
5) Passo – 05: temos que med(AC) = R, onde R é a medida do raio da circunferência Γ_2;
6) Passo – 06: temos que med(CM) = r, onde r é a medida do raio da circunferência Γ_1;
7) Passo – 07: observando que o triângulo (AMC) é retângulo em M, por Pitágoras temos que $R^2 = r^2 + 6^2$, e ainda podemos escrever $R^2 - r^2 = 36$;
8) Passo – 08: a área da região limitada pelas circunferências Γ_1 e Γ_2, é dada pela relação $A = \pi.(R^2 - r^2)$, logo A = 36 cm².

Figura 46 - Imagem relacionada à resolução do problema 05



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.6 Resolução do problema 06

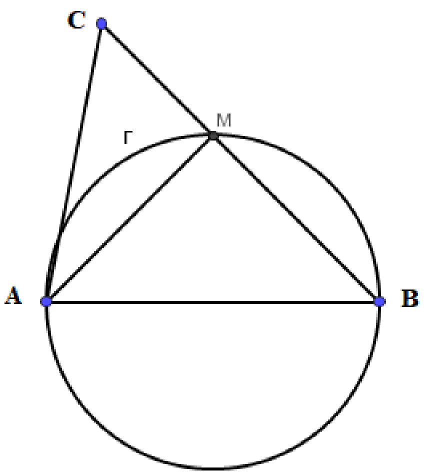
Considere um triângulo ABC. Sejam M o ponto médio do segmento BC e Γ a circunferência tal que o segmento AB é um diâmetro. Prove que AB = AC se, e somente se, M pertence à circunferência Γ.

(→) Hipóteses: AB é um diâmetro, AB = AC e M é ponto Médio de BC.

Pelo fato de AB = AC, temos que o triângulo (ABC) é isósceles, de base BC, e como M é ponto médio de BC, temos ainda que, AM é mediana e altura relativa ao lado BC. Logo, o ângulo $\boldsymbol{A\hat{M}B}$ é retângulo em M, e como AB é diâmetro, temos que M pertence à circunferência .

(←) Hipóteses: AB é um diâmetro, M pertence a circunferência Γ e M é ponto médio de BC. Pelo fato de M pertencer à circunferência Γ, temos que o ângulo $\boldsymbol{A\hat{M}B}$ é retângulo em M. Oângulo $\boldsymbol{A\hat{M}C}$ é retângulo em M e como M é ponto médio de BC, temos que os triângulos(AMB) e (AMC) são congruentes pelo caso LAL, e os lados AC e AB são lados opostos aos ângulos retos. Logo AC = AB.

Figura 47 - Imagem relacionada à resolução do problema 06



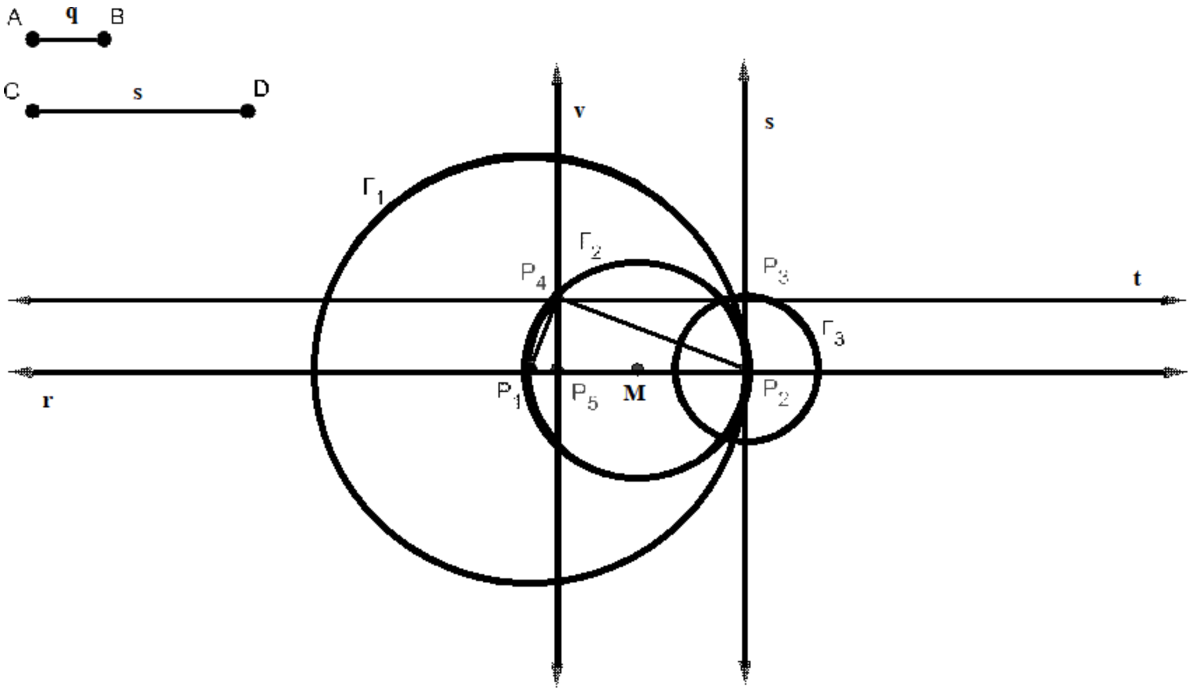
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.7 Resolução do problema 07

Dados dois segmentos de comprimentos "s" e "q", com s > 2q, indique a construção geométrica com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação de segundo grau $x^2 - sx + q^2 = 0$.

1) Passo – 01: com a régua, trace a reta r, em seguida, marque sobre ela o ponto P_1;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_1 e raio CD, trace a circunferênciaΓ_1, em seguida, identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_1; Passo – 03: marque o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$, em seguida, identifique por M;
3) Passo – 04: com a ponta seca do compasso em M e raio MP_1, trace a circunferência Γ_2;Passo – 05: com a ponta seca do compasso em P_2 e raio AB, trace a circunferência Γ_3;
4) Passo – 06: trace a reta s, perpendicular à reta r, passando pelo ponto P_2, em seguida,identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta s e a circunferência Γ_3;
5) Passo – 07: trace a reta t, paralela à reta r, passando por P_3, em seguida, identifique por P_4, oponto de interseção entre a reta t e a circunferência Γ_2;
6) Passo – 08: trace a reta v, paralela à reta s, em seguida, identifique por P_4;
7) Passo – 09: identifique por P_5, o ponto de interseção entre as retas r e v. Os segmentos P_1P_5 eP_5P_2 são as soluções geométricas do problema.

Figura 48 - Imagem relacionada à resolução do problema 07



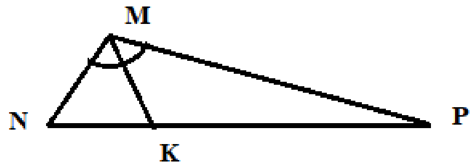
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.8 Resolução do problema 08

Num plano é dado um triângulo MNP. Sendo K o pé da bissetriz interna relativa ao lado NP,prove o Teorema da Bissetriz Interna, isto é, que

Figura 49 - Imagem relacionada ao problema 08

$$\frac{\overline{NK}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{MP}}$$



Fonte: Elaborada pelo autor.

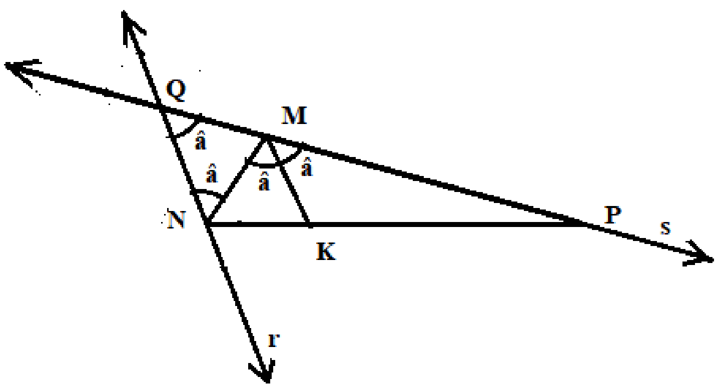
1) Passo – 01: trace a reta r, paralela ao segmento MK;
2) Passo – 02: trace a reta suporte do segmento MP, em seguida, identifique-a por s;
3) Passo – 03: identifique por Q, o ponto de interseção entre as retas r e s;
4) Passo – 04: o triângulo (MNQ) é isósceles com QM ≅ MN;
5) Passo – 05: por Tales, temos que:

$$\frac{\overline{NK}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{MP}}$$

E pelo fato de QM ≅ MN, temos que

$$\frac{\overline{NK}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{MP}}$$

Figura 50 - Imagem relacionada à resolução do problema 08.

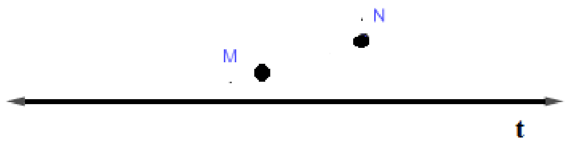


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.9 Resolução do problema 09

Utilizando régua e compasso, construa uma circunferência tangente à reta "**t**" e que contenhaos pontos **M** e **N**.

Figura 51 - Imagem relacionada ao problema 09.

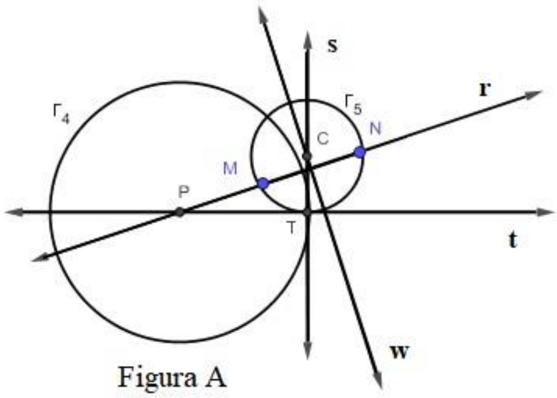


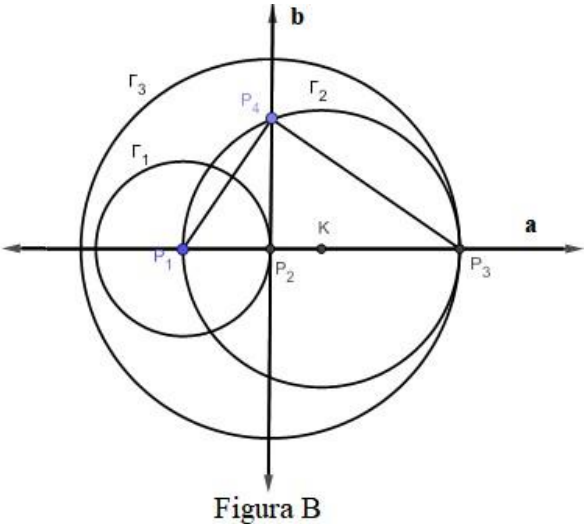
Fonte: Elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: com a régua, trace a reta r contendo os pontos M e N, em seguida, identifique por P, o ponto de interseção entre as retas r e t, na Figura A;
2) Passo – 02: com a régua, trace a reta a, de acordo com a Figura B;
3) Passo – 03: sobre a reta a, marque o ponto P_1, em seguida, com a ponta seca do compasso noo ponto P_1 e raio PM, trace a circunferência Γ_1;
4) Passo – 04: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta a e a circunferência Γ_1, localizado à direita de P_1;
5) Passo – 05: com a ponta seca do compasso sobre P_2 e raio PN, trace a circunferência Γ_3, em seguida, identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta a e a circunferência Γ_3, localizado à direita de P_2;
6) Passo – 06: determine o ponto médio do segmento P_1P_3, por processos anteriores, em seguida,identifique-o por K;
7) Passo – 07: com a ponta seca do compasso sobre o ponto K e raio KP_1, trace a circunferência Γ_2;
8) Passo – 08: trace a reta b, perpendicular à reta a, passando pelo ponto P_2, em seguida, identifique por P_4, o pontoo de interseção entre a reta b e a circunferência Γ_2, localizado acimada reta a;
9) Passo – 09: veja que $P_1P_2 \cong PM$ e $P_2P_3 \cong PN$, observe também que P_2P_4, é a média geométrica entre os segmentos PM e PN;
10) Passo – 10: com a ponta seca do compasso em P, na Figura A, e raio P_2P_4, trace a circunferência Γ_4, em seguida, identifique por T, o ponto de interseção entre a circunferência Γ_4 e a reta t;
11) Passo – 11: trace a reta s perpendicular à reta t, passando por T, por processos anteriores, em seguida, trace a mediatriz do segmento MN e identifique-a por w;

12) Passo – 12: identifique por C, o ponto de interseção entre as retas s e w. Com a ponta seca do compasso em C e raio CT, trace a circunferência Γ_5, ela será a solução do problema.

Figura 52 - Imagem relacionada à resolução do problema 09.



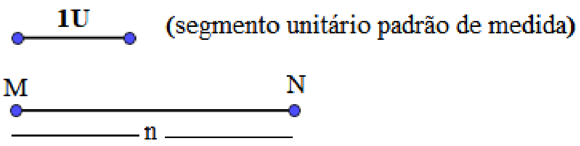


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.10 Resolução do problema 10

Considerando o segmento unitário padrão de medida e o segmento MN = n. utilize régua e compasso, para construir um segmento de reta que tenha comprimento $\sqrt{n}$.

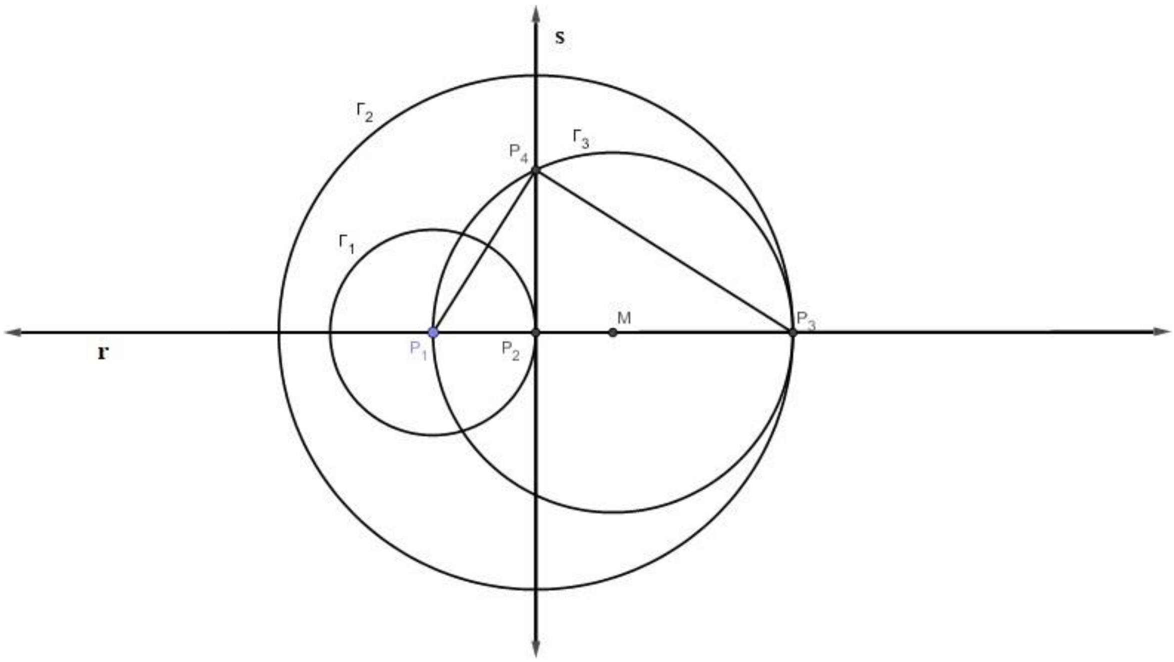
Figura 53 - Imagem relacionada ao problema 10.



Fonte: Elaborada pelo autor.

1) Passo – 01: com a régua, trace a reta r, em seguida, marque sobre ela o ponto P_1;
2) Passo – 02: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_1 , e raio igual ao comprimento unitário, trace a circunferência Γ_1;
3) Passo – 03: identifique por P_2, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência $\Gamma 1$, localizado à direita de P_1;
4) Passo – 04: com a ponta seca do compasso sobre o ponto P_2 , e raio, $\overline{MN}$ congruente ao segmento, trace a circunferência Γ_2;
5) Passo – 05; identifique por P_3, o ponto de interseção entre a reta r e a circunferência Γ_2, localizado à direita de P_2;
6) Passo – 06: marque M o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_3}$, por processos anteriores, em seguida, com a ponta seca do compasso em M e raio $\overline{MP_1}$, trace a circunferência Γ_3;
7) Passo – 07: trace a reta s perpendicular a reta r e passando pelo ponto P_2 , por processos anteriores;
8) Passo – 08: identifique por P_4, o ponto de interseção entre a reta s e a circunferência Γ_3. Osegmento $\overline{P_2P_4}$ é a solução do problema.

Figura 54 - Imagem relacionada à resolução do problema 10



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das principais mudanças com a implantação do Novo Ensino Médio (NEM), no sistema de ensino brasileiro, será a nova composição da grade curricular, que passa a ser composta pela base nacional comum e a parte diversificada.

A parte diversificada da nova grade curricular será composta por disciplinas eletivas, que serão trabalhadas em períodos semestrais, nesse contexto, se faz necessário a criação de novas disciplinas eletivas, por parte dos profissionais da educação. "Construções Geométricascom Régua e Compasso como Disciplina Eletiva" poderá fazer parte do cardápio das disciplinas eletivas que serão desenvolvidas no decorrer do ano letivo nas escolas de ensino fundamental II e médio.

"Construções Geométricas com Régua e Compasso como Disciplina Eletiva", não apresenta caráter conceitual, sendo direcionada, quase que exclusivamente para a parte construtiva de elementos estudados na geometria plana. Essa ausência de conceitos deverá ser contemplada pelo professor regente dessa disciplina eletiva.

Alguns conceitos de Geometria Plana, como semelhança e congruência de triângulos,ângulos inscritos e centrais numa circunferência, são fundamentais para justificar a maioria das construções geométricas abordadas nesse trabalho.

Um conceito estudado, se torna significativo, quando existe a possibilidade de uma aplicação prática no cotidiano do estudante. As construções geométricas abordadas nesse projeto de ensino, auxiliará na fixação de conceitos que os estudantes vivenciam na construção do seu saber matemático.

Além do aspecto formativo, as construções geométricas produzidas com régua e compasso, são produções que também têm a capacidade aprimorar o conhecimento, aguçar a criatividade e favorecer o desenvolvimento de habilidades artísticas no educando.

Existem inúmeras construções geométricas que não foram abordadas nesse projetode eletiva, e que certamente, poderão ser abordados em outras disciplinas eletivas com estrutura e objeto de estudo, semelhantes. O ponto de partida foi dado, que esse trabalho seja o norteador para os demais colegas docentes do componente curricular matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

PINTO, Nilda Helena S. Corrêa. **Desenho Geométrico 1.** São Paulo: Moderna, 1991.

PINTO, Nilda Helena S. Corrêa. **Desenho Geométrico 2**São Paulo: Moderna, 1991.

PINTO, Nilda Helena S. Corrêa. **Desenho Geométrico 3.** São Paulo: Moderna, 1991.

PINTO, Nilda Helena S. Corrêa. **Desenho Geométrico, 4.** São Paulo: Moderna, 1991.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e EquaçõesAlgébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

NASSER, L; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2.ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2010.

VILLLERS, M. de. Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.