UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

ANDRÉ DANTAS TANURE

CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS E O TEOREMA DA FINITUDE TOPOLÓGICA

FORTALEZA
2022

ANDRÉ DANTAS TANURE

CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS E O TEOREMA DA FINITUDE TOPOLÓGICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T166c Tanure, André Dantas.
Conjuntos Semialgébricos e o Teorema da Finitude Topológica / André Dantas Tanure. – 2022.
71 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

1. Conjuntos Semialgébricos. 2. Geometria Semialgébrica. I. Título.

CDD 510

ANDRÉ DANTAS TANURE

CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS E O TEOREMA DA FINITUDE TOPOLÓGICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 11/08/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jose Edson Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por ter chegado até aqui, e ter passado por esse período vivo.

Agradeço à meu pai Antonio Jorge; à minha mãe Ana Célia; à minha irmã Adriana, à Amora (in memoriam) e Nina pelo apoio e pelo suporte por esse período. Agradeço à UFC e ao PGMAT pela oportunidade de realizar o mestrado em matemática. Em especial, agradeço ao meu orientador, o professor Alexandre Fernandes, pelo aprendizado, pela paciência e pela compreensão nesse processo. Gostaria de agradecer também ao professor Diego Moreira pelos conselhos, e à professora Maria Michalska pela troca de e-mails. Agradeço à Andrea pelo suporte quando foi necessário. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Gostaria de agradecer ao Marcos e ao Lucas, pelas repetidas vezes em que me ajudaram. Gostaria de agradecer à Karen, por ter me acompanhado pelos semestres remotos. Gostaria de agradecer à Caio pelo suporte quando eu não tinha onde ficar. Gostaria de agradecer à Francehelder pelas conversas e pela companhia nos momentos que eu precisava.

Quero agradecer à Natalha pelas conversas que tivemos por esse tempo, e pelo companheirismo. Quero agradecer à Carol por ter me ajudado nos momentos que eu mais precisei. Quero agradecer à Juliana Sousa pela amizade, pelo apoio e companhia nesses dois anos, além das chamadas e conversas quando eu precisava. Quero agradecer à Paloma por todos os momentos de companhia, e por estar comigo quando precisei. Ainda vou cobrar todos os abraços. Quero agradecer à Eduardo por todas as conversas, ajudas com documentos, e pelos momentos em que se dispôs a me ajudar, mesmo quando não conhecia os assuntos em questão.

Gostaria por fim, de agradecer à Raquel. Tem várias coisas pelas quais eu poderia te agradecer e que não caberiam em um parágrafo. Nossas longas conversas recheadas com nossas piadas internas, nossos momentos de silêncio confortável, os momentos em que nos ajudamos...obrigado a você por ser você e por estar ao meu lado esse tempo. *Aishiteiru*.

Esse período de isolamento social foi (e está sendo) bastante difícil. A todos que tornaram meus dias mais leves, meu muito obrigado.

RESUMO

Apresentamos a definição de conjunto semialgébrico em $\mathbb{R}^n$, que é um conjunto definido por uma condição booleana de condições polinomiais. Demonstramos o primeiro teorema de estrutura para conjuntos semialgébricos, o Teorema da Decomposição Cilíndrica, e exploramos suas consequências, em particular o Teorema de Tarski-Seidenberg. Depois, apresentamos o segundo Teorema de estrutura para conjuntos semialgébricos, o Teorema da Estratificação. Em seguida, exploramos suas consequências, em particular a noção de dimensão, e uma versão do Teorema de Sard para funções semialgébricas. Apresentamos as noções de Decomposição Celular e de Triangulação, e provamos que todo conjunto semialgébrico compacto é triangulável. Por fim, Enunciamos o Teorema da Trivialidade Local e apresentamos duas consequências, o Teorema da Finitude de Tipos Topológicos de Conjuntos Semialgébricos e o Lema da Estrutura Cônica Local.

Palavras-chave: conjuntos semialgébricos; geometria semialgébrica.

ABSTRACT

We present the definition of a semialgebraic subset of $\mathbb{R}^n$, that is a subset defined by a boolean condition of polynomial conditions. We show the first structure theorem for semialgebraic sets, The Cylindrical Decomposition Theorem and explore some of its consequences, in particular the Tarski-Seidenberg Theorem. Then we prove the second structure theorem, The Stratification Theorem. After that, we explore some of its consequences, in particular the concept of dimension, and a version of Sard's Theorem for semialgebraic mappings. We then present the concepts of Cell Decomposition and Triangulation of a set, and we prove that every compact semialgebraic set admits both a cell decomposition and a triangulation. We then enunciate the Local Triviality Theorem and present two applications: The Theorem on the Finiteness of Topological Types of semialgebraic sets, and the Local Conical Structure Lemma.

Keywords: semialgebraic sets; semialgebraic geometry.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é entender o Teorema da Finitude de Tipos Topológicos de Conjuntos Semialgébricos, apresentado inicialmente por Robert Hardt em 1980 no seu artigo intitulado “Semi-algebraic Local-Triviality in Semi-Algebraic Mappings”. Para isto, utilizamos as referências (BENEDETTI; RISLER, 1990) e (COSTE, 2002).

O primeiro capítulo trata de conhecimentos preliminares sobre polinômios e suas raízes. Ele inclui um tratamento rápido sobre resultantes e subresultantes de dois polinômios, que nos fornecem um método conceitualmente simples para determinar quando dois polinômios dados possuem raízes em comum contando multiplicidades, e determinar seu número. Em seguida, são apresentados resultados sobre a continuidade e analiticidade das raízes de uma família de polinômios, e ele conclui com uma prova do Lema de Thom.

O segundo capítulo trata dos conjuntos semialgébricos e de seus principais resultados. É apresentada sua definição e algumas consequências iniciais, e logo em seguida é provado o primeiro Teorema de Estrutura, o Teorema da Decomposição Cilíndrica, que diz que todo conjunto semialgébrico do $\mathbb{R}^n$ tem uma quantidade finita de componentes conexas, que são semialgébricas e são de dois tipos: Gráficos de funções semialgébricas sobre elementos de uma partição finita semialgébrica de $\mathbb{R}^{n-1}$, e faixas entre cada par de gráficos. Logo após, exploramos suas consequências, em especial o Teorema de Tarski-Seidenberg, que diz que a imagem de um conjunto semialgébrico por uma aplicação semialgébrica é um conjunto semialgébrico.

Em seguida, tratamos do Teorema da Estratificação, o segundo teorema de estrutura dos conjuntos semialgébricos, que diz que podemos particionar todo conjunto semialgébrico em estratos, que são subvariedades analíticas localmente fechadas do $\mathbb{R}^n$, e além disso, elas satisfazem uma condição de fronteira: dados dois estratos A e B, se $A \cap \overline{B}$ é não-vazio, então $A \subset \overline{B}$ e $\dim A < \dim B$. Esse teorema refina a partição encontrada no primeiro teorema de estrutura, e nos permite utilizar noções da geometria diferencial para estudar conjuntos semialgébricos, permitindo por exemplo que tratemos da dimensão destes objetos.

Na seção seguinte, definimos a noção de decomposição celular e mostramos que a partição obtida no Teorema da Estratificação induz uma decomposição celular no caso compacto. Além disto, provamos o Teorema da Triangulação, que diz que todo conjunto semialgébrico compacto é triangulável, e sua triangulação induz uma estratificação no conjunto.

No capítulo final, apresentamos o Teorema da Trivialidade Local, e duas consequências: O Lema da Estrutura Cônica Local, e o Teorema da Finitude dos tipos topológicos de conjuntos semialgébricos.

2 PRELIMINARES SOBRE POLINÔMIOS

Essa seção tem um caráter introdutório, com o propósito de fornecer certos resultados necessários ao desenvolvimento da teoria de conjuntos semialgébricos. Iniciamos apresentando brevemente a teoria de resultantes e subresultantes de polinômios. Em seguida, provaremos que é possível "parametrizar" de forma contínua as soluções distintas de uma família de polinômios induzida pela correspondência $a \in \mathbb{C}^{n+1} \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. Por fim, quando essas funções parametrizam raízes simples é possível provar que elas são analíticas. Concluímos com o Lema de Thom, um resultado fundamental sobre a conexidade de certos conjuntos dados por famílias de polinômios.

2.1 Resultantes e Subresultantes

Sejam $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ e $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_q X^q$ dois polinômios com coeficientes em um domínio de fatoração única A (portanto, MDCs existem). Se não especificarmos A, considere os coeficientes como variáveis independentes e tome $A = \mathbb{Z}\left[a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q\right]$.

Sejam p, q inteiros positivos tais que $q \leq p$. Denote por $M(P,Q)$ a matriz quadrada de ordem $p+q$ dada por

$$\begin{array}{r} \text{q linhas} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \text{p linhas} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} a_0 & \ldots & a_{q-1} & \ldots & a_{p-1} & a_p & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_0 & \ldots & & & a_p \\ b_0 & \ldots & \ldots & b_q & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & b_0 & \ldots & b_q & \end{bmatrix},$$

onde as entradas não especificadas são iguais a zero. Esta também é chamada de Matriz de Sylvester.

Exemplo 2.1.1. Se $P(X) = X^2 + 6$, e $Q(X) = 5X + 7$, então

$$M(P,Q) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.1.2. Se $P(X) = X^3 + 2X^2 + 8$ e $Q(X) = X^2 + 3$, então

$$M(P,Q) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1.1. O **resultante** $R(P,Q)$ é o elemento de A definido como o determinante da matriz $M(P,Q)$.

O resultante indica quando P e Q possuem um fator em comum em $A[X]$. P e Q possuem um fator em comum não-trivial em $A[X]$ se, e somente se, o grau de MDC(P,Q) é maior ou igual a 1. Por sua vez, este último ocorre se, e somente se, a_p ou $b_q \neq 0$ e existem $U,V \in A[X] \setminus \{0\}$ tais que $\deg(U) \leq q-1$, $\deg(V) \leq p-1$ e $UP+VQ=0$.

Para a segunda equivalência, suponha $a_p \neq 0$ e note que se existem U, V como mencionados, $UP = -VQ$ implica que algum fator de grau maior que 1 de uma fatoração de P é fator de Q, pois $\deg(V) < \deg(P)$. Portanto P e Q tem um fator em comum.

A recíproca segue de escrever $P = HR$ e $Q = HS$, onde $H = $ MDC(P,Q), e logo $SP - RQ = SHR - RHS = 0$.

Agora, considere $U = u_0 + u_1X + \cdots + u_{q-1}X^{q-1}$ e $V = v_0 + v_1X + \cdots + v_{p-1}X^{p-1}$. Identificando cada polinômio $c_0 + \cdots + c_kX^k \in A[X]$ com o vetor linha $(c_0,\ldots,c_k) \in A^{k+1}$. Então, para $a_p \neq 0$ ou $b_q \neq 0$, a equação $UP+VQ=0$ pode ser escrita como um sistema linear de $p+q$ equações em $p+q$ variáveis:

$$(u_0,\ldots,u_{q-1},v_0,\ldots,v_{p-1})M = 0,$$

onde as indeterminadas consideradas são $u_0,\ldots,u_{q-1},v_0,\ldots,v_{p-1}$ e $M = M(P,Q)$ é a Matriz de Sylvester. Portanto, se a_p ou b_q são não-nulos, a condição $\det M = 0$ implica que P e Q possuem fatores não-triviais em $A[X]$. Dessa maneira, provamos a parte (2) da proposição a seguir.

Proposição 2.1.1. Com a notação estabelecida acima, temos que

1. $R(P,Q) = 0 \Leftrightarrow a_p = b_q = 0$ ou P e Q possuem um fator comum não-trivial em $A[X]$;
2. Como um polinômio nos coeficientes a_i e b_j, $R(P,Q)$ é homogêneo de grau q nos a_i's e homogêneo de grau p nos b_j's ;
3. Existem $U \in A[X], \deg(U) < q$, $V \in A[X], \deg(V) < q$ tais que $R(P,Q) = UP+VQ$.

Demonstração:

Parte das afirmações presentes em (1) foram provadas na discussão acima. Resta-nos observar que, se $a_p = b_q = 0$, então $R(P,Q)$ é 0, devido ao fato da última coluna de M ser 0.

Para a afirmação (3), seguimos a referência (LEQUAIN; GARCIA, 2012). Por definição, $R(P,Q) = \det(c_{ij})$ onde

$$\text{para } 1 \leq i \leq q,\ c_{ij} = \begin{cases} a_{j-i}, \text{ se } i \leq j \leq i+p \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$\text{para } q+1 \leq i \leq p+q,\ c_{ij} = \begin{cases} b_{q+j-i}, \text{ se } i-q \leq j \leq i \\ 0, \text{ caso contrário .} \end{cases}$$

Podemos concluir que $\det(c_{ij})$ é uma soma de termos do tipo

$$\pm c_{1j_1} \ldots c_{p+qj_{p+q}}$$

com $\{j_1, \ldots, j_q, j_{q+1}, \ldots, j_{p+q}\} = \{1, \ldots, p+q\}$. Um tal termo é igual à zero ou à $\pm a_{j_1-1} \ldots a_{j_q-q}$ $b_{j_{q+1}-1} \ldots b_{j_{p+q}-p}$.

Seja S a soma dos índices desse termo. Note que

$$\begin{aligned} S &= (j_1 - 1) + \ldots + (j_q - q) + (j_{q+1} - 1) + \ldots + (j_{p+q} - p) \\ &= \sum_{k=1}^{p+q} j_k - \sum_{u=1}^{p} u - \sum_{v=1}^{q} v \\ &= \sum_{l=1}^{p+q} l - \sum_{u=1}^{p} u - \sum_{v=1}^{q} v \\ &= pq. \end{aligned}$$

Como temos q termos a_i e p termos b_j, $R(P,Q)$ é homogêneo de grau q nos a_i e de grau p nos b_j.

Para a afirmação (4), seguimos a referência (BÜHLER, 2010). Observemos que a expressão $UP + VQ = r \in A$ pode ser expressa como

$$\begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_q & v_0 & \cdots & v_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_{q-1} & \dots & a_{p-1} & a_p & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & a_0 & \dots & & & a_p & \\ b_0 & \dots & \dots & b_q & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & & b_0 & & b_q & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Analisemos este para $r = R(P,Q)$. Se $R(P,Q)$ é diferente de zero, então o sistema indicado pela igualdade tem solução pela Regra de Cramer e portanto existem $U,V \in A[X]$ satisfazendo a igualdade. Por outro lado, se $r = 0$ então como $R(P,Q) = 0$, existe solução não-nula da equação em A, e logo vale a afirmação. $\square$

Vamos encontrar uma expressão para $R(P,Q)$ em termos das raízes de P e Q no fecho algébrico do corpo de frações de A. Se $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, seja $K = \text{Frac}(A)$ e $\overline{K}$ seu fecho algébrico. Então existem $\alpha_1,...,\alpha_p \in \overline{K}$, $\beta_1,...,\beta_q \in \overline{K}$ com

$$P = a_p(x-\alpha_1)...(x-\alpha_p)$$
$$Q = b_q(x-\beta_1)...(x-\beta_q)$$

Proposição 2.1.2. Com a notação acima, temos:

1. $R(P,Q) = a_p^q b_q^p \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j)$
2. $R(P,Q) = a_q^p \prod_{i=1}^{p} Q(\alpha_i) = (-1)^{pq} b_q^p \prod_{j=1}^{q} P(\beta_j)$

Demonstração: Seguimos a demonstração de (LEQUAIN; GARCIA, 2012). Sejam $X_1,...,X_p,Y_1,...,Y_q$ novas indeterminadas e $F(X) := a_p(X-X_1)...(X-X_p)$ e $G(X) := b_q(X-Y_1)...(X-Y_q)$. Além disso, sejam

$$\begin{cases} F_1(X) := \dfrac{F(X)}{a_p} = X^p + \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} A_i X^i \\ G_1(X) := \dfrac{G(X)}{b_q} = Y^q + \displaystyle\sum_{j=0}^{q-1} B_j Y^j \end{cases}$$

onde $A_i = A_i(X_1,...,X_p) = (-1)^i \sum_{1 \leq k_1 \leq ... \leq k_i \leq n} X_{k_1}...X_{k_i}$ é um polinômio homogêneo de grau i em $X_1,...,X_n$ e B_j tem uma forma análoga. Note que

$$F_1(X), G_1(X) \in \overline{K}[X_1,...,X_p,Y_1,...,Y_q][X]$$

logo

$$R(F_1, G_1) \in \overline{K}[X_1, ..., X_p, Y_1, ..., Y_q]$$

Note que o polinômio $\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q}(X_i - Y_j)$ divide $R(F_1, G_1)$. De fato, sejam $i \in \{1, ..., p\}$ e $j \in \{1, ..., q\}$. Substituindo X_i por Y_j, obtemos um polinômio $F_{ij}(X)$, que tem um fator em comum de grau 1, a saber $X - Y_j$, portanto $R(F_{ij}, G_1) = 0$. Como $R(F_{ij}, G_1)$ é obtida de $R(F_1, G_1)$ substituindo X_i por Y_j, Y_j é raíz de $R(F_1, G_1) \in \overline{K}[X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_p, Y_1, ..., Y_q][X_i]$ e consequentemente $(X_i - Y_j)$ divide $R(F_{ij}, G_1)$. Como os $(X_i - Y_j)$ são primos entre si, então $\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q}(X_i - Y_j)$ divide $R(F_1, G_1)$.

Além disso, $R(F_1, G_1)$ é um polinômio homogêneo em $P[X_1, ..., X_p, Y_1, ..., Y_q]$ de grau pq. De fato, pela demonstração da Proposição 2.2.1, item (c), o Resultante de F_1 e G_1 é soma de termos da forma $A_{i_0}...A_{i_{p-1}}B_{j_0}...B_{j_{q-1}}$ com $i_0 + ... + i_{p-1} + j_0 + ... + j_{q-1} = pq$. Cada um desses termos é homogêneo pois cada fator é homogêneo, e além disso,

$$\begin{aligned}\deg(A_{i_0}...A_{i_{p-1}}B_{i_0}...B_{i_{q-1}}) &= \deg A_{i_0} + ... + \deg A_{i_{p-1}} + \deg B_{j_0} + ... + \deg B_{j_{q-1}} \\ &= i_0 + ... + i_{p-1} + j_0 + ... + j_{q-1} = pq\end{aligned}$$

Assim, $R(F_1, G_1)$ é um polinômio homogêneo de grau pq, ou $R(F_1, G_1) = 0$. Porém o último caso não é possível porque F_1 e G_1 não tem raízes em comum.

Por fim, como ambos são polinômios homogêneos de mesmo grau, podemos concluir que $R(F_1, G_1) = \alpha \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q}(X_i - Y_j)$. Agora, o monômio $(Y_1...Y_q)^p$ aparece na esquerda com o coeficiente $(-1)^{pq}$, e na direita com o coeficiente $\alpha(-1)^{pq}$, portanto $\alpha = 1$.

Para concluir a demonstração, note que

$$\begin{aligned}R(P, Q) &= R(F, G)(\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q) \\ &= \alpha_p^q \beta_q^p R(F_1, G_1)(\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q) \\ &= \alpha_p^q \beta_q^p \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q}(\alpha_i - \beta_j) \\ &= \alpha_p^q \prod_{i=1}^{p}(\beta_q \prod_{j=1}^{q}(\alpha_i - \beta_j)) \\ &= \alpha_p^q \prod_{i=1}^{p} Q(\beta_i)\end{aligned}$$

De forma análoga podemos obter, $R(P,Q) = (-1)^{pq}\beta_q^p \prod_{j=1}^{q} P(\alpha_j)$. $\square$

Outro conceito útil na obtenção de informações sobre zeros comuns entre polinômios é o subresultante de dois polinômios. Ele refina a informação dada pelo resultante, nos permitindo saber qual a quantidade de raízes comuns que dois polinômios tem.

Definição 2.1.2. Sejam $P(X) = a_0 + a_1X + ...a_pX^p$ e $Q(X) = b_0 + b_1X + ...b_qX^q$ elementos de $A[X]$ e $M(P,Q)$ a matriz definida anteriormente.

Para $1 \leq j \leq \inf(p,q)$, seja M_j a matriz de ordem $(p+q-2j)\times(p+q-j)$ da aplicação $\Psi_j : P_{q-1-j}(A) \times P_{p-j-1}(A) \to P_{p+q-1-j}(A)$ definida por $(U,V) \mapsto UP+VQ$, onde $P_i(A)$ é o conjunto dos polinômios com coeficientes em A com grau até i. Ela é obtida removendo de $M(P,Q)$

- as últimas j colunas
- as últimas j linhas
- as linhas de índice $q-j+1$ até q

Indexando as colunas à partir do 0, seja $r_{j,i}, (0 \leq i \leq j)$ o determinante da submatriz de M_j de ordem $(p+q-2j)$ obtida selecionando de M_j

- as últimas $p+q-2j-1$ colunas
- a coluna de índice i

Definição 2.1.3. Na situação acima, definimos o $j-$**ésimo subresultante** $r_j(P,Q)$ de P e Q como sendo $r_{j,j}$

Proposição 2.1.3. Com a notação acima, as afirmações seguintes são equivalentes:

- (a_j) P e Q tem no mínimo $j+1$ raízes em comum (contadas com multiplicidade) no fecho algébrico de $\mathrm{Frac}(A)$.
- (b_j) $\deg \mathrm{mdc}(P,Q) \geq j+1$
- (c_j) $r_0(P,Q) = r_1(P,Q) = ... = r_j(P,Q) = 0$

Demonstração: $(a_j) \iff (b_j)$ segue do fato que se α é raíz comum à P e Q, $x-\alpha$ divide ambos, portanto se $\alpha_1,...,\alpha_j$ são as raízes em comum à ambos, $(x-\alpha_0)...(x-\alpha_j)$ divide o MDC de P e Q.

$(b_j) \iff (c_j)$ A equivalência será feita por indução em j, o caso $j=0$ segue do item (ii) da Proposição 2.1.1..

$(b_j) \implies (c_j)$. Note que (b_j) equivale a existência de $U \in P_{q-j-1}$, $V \in P_{p-1-j}$ tais que $UP+VQ=0$, por argumento análogo ao feito no início da seção. Pela hipótese de indução, sabemos que $r_0(P,Q) = ... = r_{j-1}(P,Q)$. Se $U = u_0 + u_1X + ... + u_{q-j-1}X^{q-j-1}$ e $V = v_0 + v_1X + ... + v_{p-j-1}X^{p-j-1}$, então a equação acima pode ser reescrita da forma

$$(u_0, ..., u_{q-j-1}, v_0, ..., v_{p-j-1})M_j = 0,$$

onde M_j é a matriz descrita na definição 2.1.2.. Se $UP + VQ = 0$ tem solução não-trivial, então o posto de M_j deve ser menor que $p+q-2j$. Em particular, $r_j(P,Q) = 0$.

$(c_j) \implies (b_j)$ Pela hipótese de indução, sabemos que P e Q tem no mínimo j raízes em comum (contadas com multiplicidade). Seja $\tilde{M_j}$ a submatriz de M_j obtida selecionando as últimas $p+q-2j$ colunas de M_j (note que $r_j(P,Q) = \det \tilde{M_j}$). Então a hipótese $r_j(P,Q) = 0$ implica que a matriz de ordem $(p+q-j)$ dada por

$$\begin{bmatrix} \ddots & \tilde{M_j} \\ I_j & 0 \end{bmatrix}$$

onde I_j é a matriz identidade de ordem j, e as reticências indicam as outras colunas da matriz M_j, tem determinante nulo. Note que essa matriz representa o sistema linear correspondente à equação $UP + VQ = C$, com U e V referidos acima. De fato, podemos escrevê-la na forma

$$\begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{q-j-1} & v_0 & \cdots & v_{p-j-1} & c_0 & \ldots & c_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \tilde{M_j} \\ I_j & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz tem determinante zero, o sistema tem uma solução não-trivial. Porém note que de $UP + VQ = C$, como P e Q tem j raízes em comum, estas também são raízes de C, e assim $C \equiv 0$. Logo, vale (b_j). □

Proposição 2.1.4. Com as mesmas notações da proposição anterior, são equivalentes:

1. P e Q tem exatamente $j+1$ raízes em comum (contadas com multiplicidade) em algum fecho algébrico $\overline{K}$ de $K = \mathrm{Frac}(A)$
2. $r_0(P,Q) = ... = r_j(P,Q) = 0$, mas $r_{j+1}(P,Q) \neq 0$.

Demonstração: Imediata da proposição anterior.

2.2 Continuidade das Raízes

Consideraremos $\mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto dos pontos fixos de $\mathbb{C}^n$ por $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $(z_1, ..., z_n) = (\bar{z_1}, ..., \bar{z_n})$, e $\mathbb{R}^{2n}$ como $\mathbb{C}^n$ pela identificação $(\alpha_1 + i\beta_1, ..., \alpha_n + i\beta_n) \iff (\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n)$.

Definição 2.2.1. Seja X um conjunto. Definindo em X^n a relação de equivalência

$$(a_1,...,a_n) \sim (b_1,...,b_n) \iff \exists \tau \in \mathbb{S}_n : a_i = b_{\tau(i)}, i = 1,...,n$$

onde $\mathbb{S}_n$ é o grupo das permutações em n elementos. Denotamos por $X^{(n)}$ o conjunto quociente $X/\sim$, chamado o **n-ésimo produto simétrico** de X.

Observação 2.2.1. Se X é espaço topológico, podemos munir $X^{(n)}$ da topologia quociente. Em particular, se $\pi : X^n \to X^{(n)}$ é a projeção canônica $(x_1,...,x_n) \to [x_1,...,x_n]$, os conjuntos do tipo $[U_1,...,U_n] := \{[x_1,...,x_n] \in X^{(n)} : x_i \in U_i\}$ onde U_i é aberto de X formam uma base de $X^{(n)}$. De fato, suponha que V é aberto em $X^{(n)}$ e $[x_1,...,x_n] \in V$. Temos que $(x_1,...,x_n) \in \pi^{-1}(V)$. Se $U_1 \times ... \times U_n$ é um aberto básico de X^n, e $x \in U_1 \times ... \times U_n \subset \pi^{-1}(V)$. Temos que $[x_1,...,x_n] \in \pi(U_1 \times ... \times U_n) = [U_1,...,U_n] \subset V$.

Faremos uma identificação de $\mathbb{C}^n$ com o conjunto dos polinômios mônicos de grau n com coeficientes em $\mathbb{C}$, por meio de

$$(a_0,...,a_{n-1}) \iff a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + X^n.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra nos permite fatorar $P(X) = a_0 + a_1X + ...a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ completamente, obtendo $P(X) = \prod_{i=0}^{n-1}(X - c_i)$. Com isso, obtemos um mapa

$$g(a_0,...,a_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(X - c_i) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}s_i(c_0,...,c_{n-1})X^{n-i-1}.$$

As coordenadas $g_i(c)$ são dadas por $(-1)^i s_i(c)$, e são chamadas **funções simétricas elementares em** $\mathbb{C}^n$.

Note que se existe $\tau \in \mathbb{S}_n$ tal que $(x_0,...,x_{n-1}) = (y_{\tau(0)},...,y_{\tau(n-1)})$, $g(x_0,...,x_{n-1}) = g(y_{\tau(0)},...,y_{\tau(n-1)})$, pois $X - x_i = X - y_{\tau(i)}, i = 0,...,n-1$. Logo elementos da mesma classe em $\mathbb{C}^{(n)}$ podem ser atribuídos ao mesmo polinômio mônico de ordem n, de forma que temos uma função $\tilde{g} : \mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}^n$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C}^n \\ & \mathbb{C}^{(n)} \arrow[ur, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

O Teorema Fundamental da Álgebra nos dá a sobrejetividade de g, e portanto de $\tilde{g}$. Além disso, $\tilde{g}$ é injetiva, pois $\prod_{i=0}^{n-1}(X-c_i) = \prod_{i=0}^{n-1}(X-c'_i) \implies [c_0,...,c_{n-1}] = [c'_0,...,c'_{n-1}]$. Então $\tilde{g}$ é uma bijeção, além de ser contínua, pois π é aplicação quociente e g é constante nas fibras de π.

Denotemos por h a inversa de $\tilde{g}$.

Proposição 2.2.1. *h é um homeomorfismo.*

Demonstração: Como $\tilde{g}$ é contínua, basta provarmos que h é contínua. Note que a proposição é trivial para $n = 1$, pois $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}^{(1)}$.

Suponha que $n \geq 2$. $\forall s \in \mathbb{N}$, e sejam

- $C_s = \{[x_0,...,x_{n-1}] \in \mathbb{C}^{(n)} : \|x_i\| \leq sn\}$
- $C'_s = \{(a_0,...,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : \|a_j\| \leq s\}$
- $C''_s = \tilde{g}(C_s)$

Note que

1. Se $s < s'$, então $C_{s'}$ é vizinhança de C_s;
2. C_s é um compacto de $\mathbb{C}^{(n)}$, pois $C_s = \pi(\{(a_0,...,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : \|a_i\| < sn\}$;
3. Como $\tilde{g}$ é contínua, $\tilde{g}(C_s)$ é compacto e portanto podemos concluir que $\tilde{g}_s := \tilde{g}\mid_{C_s}$ é homeomorfismo de C_s em C''_s, pois $\mathbb{C}^n$ é de Hausdorff, então $\tilde{g}_s^{-1} = h\mid_{C''_s} = h_s$ é contínua.

Afirmação 1: A proposição segue do fato de que, $\forall s > 0, C'_s \subset C''_s$, e $\tilde{g}_s^{-1} = h\mid_{C''_s} = h_s$.

Demonstração: Se $a \in \mathbb{C}^n$, temos $s > 0$ tal que $a \in C'_s$. Como $C'_s \subset C'_{2s} \subset C''_{2s}$, temos que h é igual a h_{2s} numa vizinhança de a. Logo, h é contínua em a, e como a é arbitrário, h é contínua.

Afirmação 2: $\forall s > 0, C'_s \subset C''_s$.

Demonstração: Suponha por absurdo que existe $a \in C'_s \setminus C''_s$. Temos em particular que $\hat{h}(a) = [x_0,...,x_{n-1}]$ não pertence à C_s. Isso significa que existe j tal que $\|x_j\| > sn \geq 1$. Temos que

$$\left\|x_j^n + a_{n-1}x_j^{n-1} + ... + a_0\right\| = 0.$$

De $\|a+b\| = 0$ e $\|\|a\| - \|b\|\| \leq \|a+b\|$ segue que $\|x\| = \|y\|$. Então

$$\begin{aligned}\|x_j\|^n &\le \left\|a_{n-1}x_j^{n-1}+...+a_0\right\| \\ &\le s(\left\|\left\|x_j^{n-1}\right\|+...+1\right\|) \\ &\le sn\|x_j\|^{n-1}\end{aligned}$$

Concluímos que $\|x_j\| \le sn$. $\square$

Observação 2.2.2. Considere a função $\hat{h} : \{a = (a_0,...,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : a_n \neq 0\} \to \mathbb{C}^{(n)}$ definida por $(a_0,...,a_n) \mapsto h\left(\frac{a_0}{a_n},...,\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$. Temos que $\hat{h} = h \circ \pi_{\mathbb{C}^n} \circ f$, onde $f(z_0,...,z_n) = \left(\frac{z_0}{z_n},...,\frac{z_{n-1}}{z_n},1\right)$, é contínua.

Definição 2.2.2. Suponha $(n,k) \in \mathbb{N}\times(\mathbb{N}\cup\infty)$, definimos:

$B_k^n := \{(a_0,...,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ tem exatamente k raízes complexas distintas$\}$

$$M_k^n := B_k^n \cap \{a \in \mathbb{C}^{n+1} : a_n \neq 0\}$$

,

$$B_k^n(\mathbb{R}) := B_k^n \cap \mathbb{R}^{n+1}$$

$$M_k^n(\mathbb{R}) := M_k^n \cap \mathbb{R}^{n+1}$$

Proposição 2.2.2. Para todo a em M_k^n, existe uma vizinhança U de a em M_k^n e funções contínuas $F_j : U \to \mathbb{C}$, $j = 1,...,k$ tais que para todo $b \in U$,

1. $F_i(b) \neq F_j(b)$, para $i \neq j$;
2. $P_b(F_i(b)) = 0, \forall i = 1,...,k$, onde $P_b(\cdot) := P(b,\cdot)$.

Demonstração: Considere $\hat{h}\mid_{M_k^n}$ a aplicação definida na observação 2.2.2.. Temos $\hat{h}(a) = [m_1x_1,...,m_kx_k]$, onde $\{x_1,...,x_k\}$ é o conjunto de raízes distintas de $P_a(X)$ e m_k é a multiplicidade da raíz x_k.

Seja $\varepsilon = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_k) \in \mathbb{R}^k$, $\varepsilon_i > 0$ tais que se $B_j = \{z \in \mathbb{C} : \|z - x_j\| < \varepsilon_j\}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$. Como $\hat{h}$ é contínua, existe vizinhança U de a tal que $\hat{h}(U) \subset [m_1B_1,...,m_kB_k]$. Isso implica em particular que cada B_j contém apenas uma raíz de $P_b(X)$ para todo $b \in U$.

Definimos por fim $F_j : U \to B_j$ por $F_j(b) =$ "a raíz de $P_b(X)$ contida em B_j". A continuidade de F_j segue da continuidade de $\hat{h}$. De fato, como $\hat{h} = \pi \circ (m_1F_1,...,m_kF_k)$, provaremos em duas etapas:

Etapa 1: π é aberta.

Seja $[x] \in \pi(V)$. Temos que $\pi^{-1}(V)$ é união de abertos V_i que são difeomorfos(pois as permutações são difeomorfismos). Para cada V_i, e $x \in V_i$ com $\pi(x) = [x]$, tomemos $U_1 \times ... \times U_n$

aberto básico com $x \in U_1 \times ... \times U_n \subset V_i$. Portanto $[x] \in [U_1, ..., U_n] \subset V$, e $[x]$ é ponto interior de V. Como $[x]$ e arbitrário, V é aberto. $\square$

Etapa 2: $f : U \to B_j$ definida por $x \mapsto (m_1F_1(x), ..., m_kF_k(x))$ é contínua.

Seja V vizinhança de $f(x)$ em B_j. Como $\pi(V)$ é aberto, e $\hat{h}$ é contínua, $\hat{h}^{-1} \circ \pi(V)$ é aberto contendo x. Seja $r > 0$ tal que $x \in B(x, r) \subset \hat{h}^{-1} \circ \pi(V)$. Diminuindo r se necessário de forma que $B(x, r) \subset f^{-1}(V)$, temos $f(B(x, r)) \subset V$.

A continuidade da f implica a continuidade das F_j, e a proposição está provada.

Corolário 2.2.1. Seja $A \subset M_k^n$ conexo. Denotando como r_a o número de raízes reais distintas de $P_a(X)$, temos

1. r_a é constante em A.
2. Existem funções contínuas $f_j : A \to \mathbb{R}$ tais que
   - $f_j(a) < f_{j+1}(a), \forall a \in A$
   - $P_a(f_j(a)) = 0$.

Demonstração: Seja $a_0 \in A$ e $U, F_1, ..., F_k$ como na proposição anterior. Como a_0 é real, para cada $j = 1, ..., k$, temos duas possibilidades:

1. $F_j(a_0) = \overline{F_j(a_0)}$. (ou seja, $F_j(a_0)$ é raíz real de $P_{a_0}(X)$.)
2. Para cada j, existe i tal que $\overline{F_j(a_0)} = F_i(a_0)$.

Afirmação: Existe uma vizinhança $U' \subset U$ de a_0 tal que se vale (1)(ou (2)) para a_0, então a_0 vale para todo ponto de U'. Em particular, r_a é localmente constante.

Demonstração da Afirmação: Suponha que $F_j(a_0) = \overline{F_j(a_0)}$, e que para toda vizinhança W de a_0, existe $b \in W$ e $i \neq j$ tal que $F_j(b) = \overline{F_j(b)}$. Dessa forma, podemos construir uma sequência $(b_s)_{s \in \mathbb{N}}$ tal que $b_s \to a_0$, e $F_i(b_s) = \overline{F_i(b_s)}$. Mas $\overline{F_j(a_0)} = F_j(a_0) = lim F_j(b_s) = lim \overline{F_i(b_s)} = \overline{F_i(a_0)}$. Pořem como $F_i(a_0) \neq F_j(a_0)$, isso é um absurdo.

Se supusermos que $F_i(a_0) = \overline{F_j(a_0)}$ e que para toda vizinhança W de a_0, $F_j(a_0) = \overline{F_j(a_0)}$. Assim, podemos construir uma sequência $(b_s)_{s \in \mathbb{N}}$ tal que $b_s \to a_0$ e $F_j(b_s) = \overline{F_j(b_s)}$. Porém $F_i(a_0) = \overline{F_j(a_0)} = lim \overline{F_j(b_s)} = lim F_j(b_s) = F_j(a_0)$, o que é um absurdo.

Em particular, a quantidade de funções que dão as raízes reais distintas de $P_a(X)$ é constante em U', logo r_a é localmente constante.

Para verificar a segunda propriedade do corolário, definimos

$$F = (f_1, ..., f_r) : A \to \{(t_1, ..., t_r) \in \mathbb{R}^n \mid t_i < t_{i+1}\}$$

Pela regra: para todo $a \in A, \{f_1(a), ..., f_r(a)\}$ é o conjunto das raízes reais distintas de $P_a(X)$. Suponha $a_0 \in A$. Podemos assumir, a menos de uma reordenação, que $F(a_0) = (F_1(a_0), ..., F_r(a_0))$. Pela continuidade das F_j, existe uma vizinhança $U'' \subset U'$ de a_0 em A tal que, para todo $b \in U'', F_j(b) < F_{j+1}(b)$. Logo, $F = (F_1, ..., F_r)$ em U'' e logo, é uma função contínua. $\square$

Corolário 2.2.2. Seja T um espaço topológico conexo, $a_0(t), ..., a_n(t) : T \to \mathbb{C}$ (resp $T \to \mathbb{R}$) funções contínuas tais que:

1. $a_n(t) \neq 0, \forall t \in T$.
2. O número de raízes complexas distintas de $P_t(X) = a_0(t) + a_1(t)X ... + a_n(t)X^n$ é constante para todo $t \in T$.

Então

(i) se $a_i(t) \in \mathbb{R}$ o número de raízes reais de $P_t(X)$ é constante.

(ii) Existem funções contínuas $g_j : T \to \mathbb{C}$(resp. $T \to \mathbb{R})(1 \leq j \leq r)$ tais que

  (a) $g_j(t)$ é uma raíz real de $P_j(X), 1 \leq j \leq r$

  (b) $g_j(t) \neq g_k(t), \forall t \in T$ para $j \neq k$.

Demonstração: Hipóteses 1 e 2 mostram que a função $\varphi : T \to \mathbb{C}^{n+1}, t \mapsto (a_0(t), ..., a_n(t))$ tem sua imagem contida em $M_k^n(\mathbb{C})$ (resp. $M_k^n(\mathbb{R})$, mas $Im(\varphi)$ é conexo (pois T é conexo), então podemos usar a proposição 2.2.0. e o corolário 2.2.1. para obter $(F_1, ..., F_r)$ (resp $f_1, ..., f_r$) que dão as raízes complexas (resp. reais) distintas de $P_t(X)$. As funções g_j são obtidas pela composição $f_j \circ \varphi$. $\square$

2.2.1 Analiticidade de raízes simples e o Lema de Thom

Proposição 2.2.3. Suponha que nas condições da conclusão do corolário 2.2.1., $f_j(b)$ é raíz simples de $P_b(X)$, então f_j é na verdade analítica.

Demonstração: Definamos a função

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$
$$(d, b) \mapsto (X - d)(X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_1X + b_0)$$

onde estamos identificando $\mathbb{R}^n$ com o espaço dos polinômios mônicos de grau até n.

Utilizando a proposição 2.2.2., podemos ver que o jacobiano de G é igual à $R(X - d, X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_1X + b_0)$. De fato, temos

$$\mathrm{Jac}(G(d,b)) = \begin{bmatrix} -b_0 & -d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & 1 & -d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -d \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

fazendo a expansão de Laplace na primeira coluna, obtemos

$$\det \mathrm{Jac}(G(d,b)) = \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j-1})(-1)^{j+1} \det M_j + (-1)^{n+1}(-d)^{n-1}(-1)$$

onde M_j é a matriz obtida retirando a j-ésima linha. Como $\det M_j = (-d)^{j-1}$, temos

$$\det \mathrm{Jac}(G(d,b)) = \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j-1})(-1)^{j+1}(-d)^{j-1} - d^{n-1} = -(b_0 + b_1 d + ... + b_{j-1} d^{j-1} + d^j).$$

No caso de d ser uma raíz simples de $G(d,b)$, isso implica que o jacobiano é não-nulo em (d,b), e portanto pelo Teorema da função inversa analítico, G tem uma inversa local em uma vizinhança de (d,b). Seja $d = f(a^0)$. Como f é contínua, podemos tomar a vizinhança de a^0 sendo V tal que $\pi(G^{-1}(V)) \subseteq W$, onde W é vizinhança de $f(a^0)$. Logo, f coincide com $\pi \circ G^{-1}$ nessa vizinhança V de a^0 e portanto f é analítica em a^0. Como a^0 é arbitrário, f é analítica. □

Terminamos o capítulo com o Lema de Thom.

Lema 2.2.1 (Lema de Thom)**.** Se $\mathscr{F}$ é família finita de polinômios fechada por derivação(ou seja: $0 \notin \mathscr{F}$ e se $f \in \mathscr{F}$ então $f' \in \mathscr{F}$), e $X = \bigcap_{i=1}^{k} \{t \in \mathbb{R} : P_i(t) s_i 0\}$, $s_i \in \{<,=,>\}$, então X é conexo, e vale um dos seguintes:

1. $X = \emptyset$;
2. $X = \{pt\}$(que acontece se, e somente se $X \neq \emptyset$ e existe j com $s_j =$ " $=$ ");
3. X é um intervalo não-trivial.

Além disso, $\overline{X}$ é obtido "relaxando" as desigualdades $<$ (resp $>$), ou seja, trocando-as por $\leq$ (resp $\geq$).

Demonstração: Seguiremos em parte a demonstração de (KUHLMANN, 2010). Faremos indução em k.

Se $k = 1$, então como $\mathscr{F}$ é fechado por derivação, $P = 0$ e $X = \mathbb{R}$ (se $s_j =$ "$=$") ou $X = \emptyset$. Suponha que a tese vale para $k-1$. Podemos assumir a menos de reordenação que $\deg P_k = \underset{i-1,\ldots,k}{\mathrm{mx}} \deg\{P_i\}$. Se $\mathscr{F}' = \{P_1, \ldots, P_{k-1}\}$, $\mathscr{F}'$ satisfaz a tese pela hipótese de indução. Portanto, se escrevermos $X = \{t \in \mathbb{R} : P_k(t) s_k 0\} \cap X'$, onde $X' = \bigcap_{i=1}^{k-1} \{t \in \mathbb{R} : P_i(t) s_i 0\}$, temos o seguinte:

- Se $X' = \emptyset$, segue que $X = \emptyset$.
- Se X' é um ponto então ou $X \neq \emptyset$, ou $X \neq \emptyset$. No último caso X também o é e, por hipótese, existe i em $\{1, \ldots, k-1\}$ com $s_k =$ "$=$".
- Se X' é um intervalo, temos 2 casos: ou P_k é constante em X' (que acontece se $P_k' = 0$ em X'), logo X é um intervalo ou o conjunto vazio. Seja agora P_k estritamente monótona em X', e suponha que $P_k > 0$. Então $X = \{x \in X' : P_k(x) > 0\}$ é um intervalo ou vazio. De fato, se $X = \{x \in X' : P_k(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : P_k(x) > 0\} \cap X'$ é interseção de abertos. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= \{x \in \overline{X'} : P_k(x) \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : P_k(x) \geq 0\} \cap \overline{X'} \\
&= \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R} : P_i(x) \bar{s}_i 0\} \text{ pela hipótese de indução.}
\end{aligned}
$$

O caso $P_k(x) < 0$ segue analogamente. □

3 CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS

Neste capítulo, abordamos a noção de conjunto semialgébrico, apresentamos o primeiro teorema de estrutura e exploramos suas consequências, em especial as propriedades de estabilidade topológicas e algébricas que ele garante. Em seguida, apresentamos o segundo Teorema de Estrutura, e exploramos suas consequências e por fim apresentamos o Teorema da Triangulação.

Definição 3.0.1. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **semialgébrico** se existem polinômios $P_{i,j} \in \mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcap_{j=1}^{s_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j} s_{i,j} 0\}, s_{i,j} \in \{<,=,>\}.$$

Equivalentemente, um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ é semialgébrico se existe uma combinação booleana (obtida por disjunção, conjunção e negação) $\mathscr{B}(x)$ de igualdades e desigualdades polinomiais estritas em x.

Exemplo 3.0.1. Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é dito **algébrico** quando ele é zero de um conjunto finito de polinômios em $\mathbb{R}$. É imediato que conjuntos algébricos são semialgébricos.

Conjuntos algébricos são uma classe importante de conjuntos semialgébricos, sendo um dos objetos elementares estudados na geometria algébrica. Além disso, é possível caracterizar conjuntos semialgébricos utilizando estes, como veremos na seção seguinte.

Exemplo 3.0.2. *Conjuntos semialgébricos em $\mathbb{R}$ são uniões finitas de pontos ou intervalos.* De fato, note que se $X \subset \mathbb{R}$ é semialgébrico, X é união finita de soluções de igualdades e desigualdades polinomiais. As soluções de desigualdades são uniões finitas de intervalos que não contém zeros, e as de igualdades são um conjunto finito de pontos. Reciprocamente, pontos são conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R} : x - a = 0\}$, e intervalos são conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R} : x - a > 0\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} : x - a < 0\}$ com $a \in \mathbb{R}$, ambos semialgébricos.

Proposição 3.0.1. A coleção de conjuntos semialgébricos é a menor coleção de conjuntos que contém

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\},$$

e é fechada por uniões e interseções finitas e complementares.

Demonstração: Suponha que $\mathscr{S}$ seja uma família de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que contém todos os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ fechada para uniões e interseções finitas, e complementares.

Seja $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ um elemento de $\mathscr{S}$. Então $\mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}$. Tome agora $g \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ como sendo $g = -f$. O conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ é um elemento de $\mathscr{S}$, e assim, o conjunto $\mathbb{R}^n \setminus B = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq f(x)\}$.

Como a família $\mathscr{S}$ é fechada por interseções finitas, segue que o conjunto $C = (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap (\mathbb{R}^m \setminus B) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ é um elemento de $\mathscr{S}$. Dessa forma, temos que a família $\mathscr{S}$ contém todos os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$, $\forall f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$.

Como consequência, temos que a família $\mathscr{S}$ contém todos os conjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^n$.

Para concluirmos, precisamos provar que a família de conjuntos semialgébricos está contida na interseção de todas as famílias $\mathscr{S}$. Porém pelo mesmo argumento, podemos concluir que a interseção de todas as famílias contém todos os conjuntos do tipo $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ e é fechada por interseções e uniões finitas, e complementares, portanto a família de conjuntos semialgébricos também está contida nela, e podemos concluir a igualdade. $\square$

Proposição 3.0.2. Todo conjunto semialgébrico do $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma união finita de conjuntos semialgébricos da forma:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = ... = P_k(x) = 0, Q_1(x) > 0, ..., Q_l(x) > 0\}$$

, onde $P_1, ..., P_k, Q_1, ..., Q_l$ são elementos de $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$.

Demonstração: Um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = ... = P_k(x) = 0, Q_1(x) > 0, ..., Q_l(x) > 0\}$ pode ser escrito como $\bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : R_i s_i 0\}$, com $s_j \in \{>, =\}$ a menos de uma reordenação dos índices, e uma renomeação dos polinômios. Então a família de uniões finitas de conjuntos do tipo indicado na proposição forma uma subfamília da família de conjuntos semialgébricos. Além disso, ela contém os conjuntos do tipo $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$, pois $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0(x) = 0, f(x) > 0\}$. Basta provarmos então que ela é fechada por uniões e interseções finitas, e complementares.

O fecho pela união finita segue da definição da família, e o pela interseção finita segue da propriedade distributiva da interseção pela união. Para o fecho por complementar, basta notarmos que

$$\bigcap_{i=1}^{m}\{x\in\mathbb{R}^n : R_i s_i 0\} = \bigcup_{i=1}^{m}\{x\in\mathbb{R}^n : R_i \neg s_i 0\},\ \text{onde } \neg s_i \in \{\neq, <\}.$$

Se $\neg s_i = \neq$, podemos escrever $\{x\in\mathbb{R}^n : R_i(x)\neg s_i 0\}$ como $\{x\in\mathbb{R}^n : R_i(x) > 0\}\cup\{x\in\mathbb{R}^n : -R_i(x) > 0\}$, obtendo um conjunto do mesmo tipo. Portanto, podemos concluir que essa união é de conjuntos do tipo do enunciado. □

Proposição 3.0.3. Se $X\subset\mathbb{R}^m$ e $Y\subset\mathbb{R}^n$ são semialgébricos, então $X\times Y\subset\mathbb{R}^{m+n}$ é semialgébrico.

Demonstração: Sejam $X=\{x\in\mathbb{R}^m : \mathscr{B}(x)\}$ e $Y=\{y\in\mathbb{R}^n : \mathscr{B}(y)\}$ conjuntos semialgébricos. Se consideramos os polinômios envolvidos nas combinações booleanas como elementos de $\mathbb{R}[X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n]$, $\mathscr{B}(x)$ e $\mathscr{B}(y)$ é combinação booleana de igualdades e desigualdades polinomiais em (x,y), e o conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^{m+n} : \mathscr{B}(x) \text{ e } \mathscr{B}(y)\}$ é semialgébrico. □

Existe uma noção similar a de conjuntos semialgébricos para o espaço complexo.

Definição 3.0.2. Um subconjunto $X\subset\mathbb{C}^n$ é dito **construtível** se existem polinômios $P_1,...,P_k\in\mathbb{C}[X]$ tais que

$$X=\bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=1}^{r_i}\{z\in\mathbb{C}^n : P_{i,j}(z)s_{i,j}0\}; s_{i,j}\in\{=,\neq\}.$$

Se identificarmos $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$, a condição $P(z)\neq 0$ pode ser escrita como $P(z)>0$ ou $P(z)<0$, logo um conjunto construtível em $\mathbb{C}^n$ pode ser visto como um conjunto semialgébrico em $\mathbb{R}^{2n}$. Além disso, identificando $\mathbb{R}^n$ com a "parte real"de $\mathbb{C}^n$ como feito na seção 1.3, o conjunto $V_{\mathbb{R}} := V\cap\mathbb{R}^n$ é semialgébrico.

Proposição 3.0.4. Com as notações acima, valem

1. B_k^n e M_k^n são subconjuntos construtíveis de $\mathbb{C}^n$
2. $B_k^n(\mathbb{R})$ e $M_k^n(\mathbb{R})$ são subconjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^n$

Demonstração: É suficiente provarmos o primeiro item. Pela definição de M_k^n, é suficiente provarmos que B_k^n é construtível. Procedemos por indução em n.

Se $n = 0$, $B_0^0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $B_k^0 = \emptyset$ para todo $0 < k < \infty$, e $B_\infty^0 = \{0\}$.

Note que B_0^n pode ser identificado com $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pois um polinômio de grau n que não tenha raízes deve ser constante e não-nulo.

Suponha que a proposição vale para $n-1$, e seja $\mathbb{C}^{n+1} := \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Escrevendo $a = (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ como $a = (a', a_n)$. Podemos identificar $B_k^n = B_k^{n-1} \times \{0\} \cup M_k^n$. Então basta provarmos que M_k^n é construtível.

Identificando $a \in \mathbb{C}^n$ com polinômios $P_a(Z) = a_0 + a_1 Z + ... + a_n Z^n$, definimos

$$W_k = \{a \in \mathbb{C}^{n+1} : a_n \neq 0 \text{ e } P_a(Z) \text{ tem no máximo } k \text{ raízes complexas distintas}\}.$$

Note que $M_k^n = W_k \setminus W_{k-1}$. Pela proposição 2.2.3., W_k pode ser descrito da seguinte forma

$$W_k = \{a \in \mathbb{C}^{n+1} : a_n \neq 0 \text{ e } \deg\text{MDC}(P_a(Z), P_a'(Z)) \geq n-k\}.$$

ou seja, W_k é a interseção de $\{a_n \neq 0\}$ com polinômios que satisfazem a condição polinomial $r_0(P, P') = ... = r_{n-k}((P, P') = 0$, portanto é construtível. Consequentemente, M_k^n é construtível. $\square$

3.1 O Teorema da Decomposição Cilíndrica

Teorema 3.1.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico, e notemos um elemento de $\mathbb{R}^n$ por $(x,t) = ((x_1, ..., x_{n-1}), t)$. Então:

(a_n) X tem uma quantidade finita de componentes conexas, e cada uma delas é semialgébrica.

(b_n) Existe uma partição finita $\mathscr{I}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ em conjuntos semialgébricos conexos de forma que, para todo $A \in \mathscr{I}$, podemos definir

$$f_k^A : A \to \overline{\mathbb{R}}, k = 0, 1, ..., s_A, s_A + 1$$

tais que

i) $f_0^A \equiv -\infty$, $f_{s_A+1}^A \equiv +\infty$

ii) $f_k^A : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua para todo $k = 0, 1, ..., s_A, s_A + 1$, e para todo $x \in A$, $f_k^A(x) < f_{k+1}^A(x)$.

iii) Todos os conjuntos da forma

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n : f_k^A(x) < t < f_{k+1}^A(x)\}, k = 0, 1, ..., s_A, \text{ditos de tipo } \mathscr{B}$$

e

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n : f_k^A = t\}, k = 1, ..., s_A, \text{ ditos de tipo } \mathscr{G}$$

são semialgébricos.

iv) A coleção de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ indicados em (iii) forma uma partição de $\mathbb{R}^n$. A coleção destes subconjuntos que está contida em X forma uma partição de X.

Demonstração: Faremos por indução em n. Note que a_0 é trivial, pois X é um ponto. Também temos que $b_n \implies a_n$, pois os conjuntos do tipo faixa e gráfico são conexos. Provaremos que $a_{n-1} \implies b_n$.

Seja $\{q_1, ..., q_N\}$ a família de polinômios de uma representação de X. Estendemos ela adicionando todas as derivadas parciais $\left(\dfrac{d^c q_r}{dt^c}\right)$,$r = 1, ..., N$, $c = 1, 2, ...$. Notando a família estendida como $\{P_1, ..., P_R\}$, definimos

- $Q_T = \prod_{j \in T} P_j$
- $B_{T,k} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : Q_{T,x}(t) = Q_T(x,t) = a_0(x) + a_1(x)t + ... + a_n(x)t^n$ tem exatamente k raízes distintas$\}$

Para construirmos a partição $\mathscr{I}$, usaremos os conjuntos $B_{T,k}$.

Afirmação 1: $B_{T,k}$ é semialgébrico.

Definimos $G : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}^{m(T)+1}$ por $x \mapsto (a_0(x), ..., a_{m(T)+1}(x))$, onde os $a_i(x)$ são os coeficientes de $Q_{T,x}(t)$ e $m(T) = \deg(Q_{T,x}(t))$. Pela definição de $B_{T,k}$, podemos concluir que $B_{T,k} = G^{-1}(B_k^{m(T)}(\mathbb{R}))$. A afirmação então segue do fato que a imagem inversa de um conjunto semialgébrico por uma função polinomial é um conjunto semialgébrico. Para ver isso, tome Y em $\mathbb{R}^n$ com $Y = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{y \in \mathbb{R}^n : P_{i,j} s_{i,j} 0\}$, e $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ polinomial. Temos que

$$F^{-1}(Y) = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{y \in \mathbb{R}^n : P_{i,j} \circ F(y) s_{i,j} 0\},$$

que é semialgébrico. Como $B_k^{m(T)}(\mathbb{R})$ é semialgébrico, $B_{T,k}$ é semialgébrico também.

Como $B_{T,k} = G^{-1}(B_k^{m(T)}(\mathbb{R})) = G^{-1}(M_k^0(\mathbb{R})) \cup ... \cup M_k^{m(T)}(\mathbb{R})) = G^{-1}(M_k^0(\mathbb{R})) \cup ... \cup G^{-1}(M_k^{m(T)}(\mathbb{R}))$. Definindo $M_{T,k}^i = G^{-1}(M_k^i(\mathbb{R}))$, temos uma partição

$$B_{T,k} = M_k^0 \cup ... \cup M_k^{m(T)}$$

que segue da demonstração da construtividade de B_k^n.

Com os $B_{T,k}$, podemos construir a nossa partição $\mathscr{I}$. Para isto, definimos:

1. Uma partição de $\mathbb{R}^{n-1}$ $\mathscr{M}(T) = \{M^i_{T,k}\}_{\{i=1,..,m(T);k=0,...,k=\infty\}}$;
2. Uma partição $\mathscr{I} = \bigcap_{T\subset\{1,...,R\}} \mathscr{M}(T)$;
3. $\tilde{\mathscr{I}} = \{$componentes conexas de cada elemento de $\mathscr{I}\}$.

Afirmação 2: Cada elemento de $\tilde{\mathscr{I}}$ é semialgébrico.

Isto segue da hipótese de indução a_{n-1}, pois como cada elemento de $\mathscr{I}$ é semialgébrico, suas componentes conexas são semialgébricas.

Agora, vamos definir as funções f^A_h. Para isto, dado $A \in \tilde{\mathscr{I}}$, definimos

$$C_A = \{j \in 1,...,R : \exists(x,t) \in A\times\mathbb{R} : P_j(x,t) \neq 0\}.$$

Note que C_A pode ser vazio. Caso não seja, pela definição de $\tilde{\mathscr{I}}$ existem i,k tais que $A \subset M^i_{C_A,k}$. Definimos então o polinômio

$$Q_{C_A} = \prod_{j\in C_A} P_j.$$

Note que como $A \subset M^i_{C_A,k}$, Q_{C_A}, tem grau fixo i.

Como A é conexo, temos que $G(A) = A'$ é conexo e pelo Corolário 2.2.1., existem funções

$$f^{A'}_1 < ... < f^{A'}_{s_{A'}}$$

definidas em A' que dão as raízes de $Q_{C'_A}$. Definimos então

$$f^A_j := f^{A'}_j \circ G, j = 1,...,s_A - 1, s_{A'} = s_A.$$

Afirmação 3**:** Os conjuntos Γ do tipo $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ satisfazem *iii*).

Provaremos a afirmação 3 em 2 passos:

Afirmação $3'$**:** Γ está contido em um conjunto do tipo
$\Gamma' = \bigcap_{i=1}^{R}\{(x,t) \in A\times\mathbb{R} : P_i(x,t)s_i 0\}$.

Se Γ é do tipo $\mathscr{F}$, note que $j \in C_A \implies \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : P_j(x,t) s_j 0\} \cap \Gamma = \emptyset$, pois as faixas não contém zeros de Q_{C_A}, e logo, dos P_j. Se $j \notin C_A \implies \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : P_j(x,t) = 0\} \cap \Gamma = \Gamma$.

No caso que Γ é do tipo $\mathscr{G}$, se existe P_j tal que $P_j = 0$ em Γ, então está feito. Caso exista $(x_0,t_0) \in A \times \mathbb{R}$ tal que $P_j(x_0,t_0) \neq 0$, então pela definição de A, existem i,k tais que $A \subset M^i_{\{j\},k}(\mathbb{R})$. Pelo lema (da continuidade das raízes), temos que existem $\{g_1,...,g_v\}$ tais que

$$\{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : P_j(x,t) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{v} \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : t = g_i(x)\}.$$

Como os zeros de P_j são zeros de Q_{C_A}, $\bigcup_{i=1}^{v} \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : t = g_i(x)\}$ é subconjunto conexo de

$$\{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : Q_{C_A}(x,t) = 0\} = \bigcup_{j=1}^{s_A} \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : t = f_j^A(x)\}.$$

E como cada elemento dessa última união é aberto e fechado, então para cada i existe j tal que

$$\{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : t = g_i(x)\} = \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : t = f_j^A(x)\}.$$

Em resumo, $P_j = 0$ em Γ se existem $i, j = j_0$ tais que vale a igualdade acima. Caso contrário, $P_j \neq 0$ em Γ.

Afirmação $3''$**:** Em realidade, $\Gamma' = \Gamma$

Suponha que existe $(x_0,t_0) \in \Gamma' \setminus \Gamma$, e seja $t_1 \in \Gamma$ tal que $t_0 \leq t_1$. Como a família de polinômios $\{P_{j,x_0}(T)\}$ são fechados por derivação, $(\{x_0\} \times \mathbb{R}) \cap \Gamma'$ é conexo, e portanto $\{x_0\} \times [t_0,t_1]$ está contido em Γ'. Note que $\{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : Q_{C_A}(x,t) = 0\} \cap \Gamma = \Gamma$ se existe $j \in C_A$ tal que $P_j = 0$ em Γ. Caso contrário a interseção é vazia.

Como Γ é do tipo faixa, temos que $Q_{C_A}(x_0,t_1) \neq 0$, e existe $t_2 \in [t_0,t_1]$ tal que $Q_{C_A}(x_0,t_2) = 0$, pela definição de conjunto do tipo faixa, pois $(x_0,t_0) \notin \Gamma$.

Mas isso é uma contradição, pois pela definição de Γ', (x_0,t_1) e (x_0,t_2) satisfazem as mesmas condições polinomiais.

No caso que Γ é do tipo gráfico, temos que $Q_{C_A}(x_0,t_1) = 0$, e existe $t_2 \in [t_0,t_1]$ tal que $Q_{C_A}(x_0,t_2) \neq 0$. De novo, isso é uma contradição pois (x_0,t_1) e (x_0,t_2) devem satisfazer as mesmas condições polinomiais na definição de Γ'.

Isso conclui a prova da afirmação 3 e de iii). Para iv), se $x \in X$ e Γ é cilindro tal que $x \in \Gamma \cap X$, temos que as condições polinomiais de Γ e X devem coincidir, e logo $\Gamma \subset X$. □

3.2 Aplicações do Teorema da Decomposição Cilíndrica

Teorema 3.2.1. Conjuntos semialgébricos são localmente conexos.

Demonstração: Seja X um conjunto semialgébrico, e $x_0 \in X$. Como $B(x_0, r)$ é semialgébrico para todo $r > 0$, $X_r = B(x_0, r) \cap X$ é semialgébrico. Portanto, pelo Teorema da Decomposição Cilíndrica, cada X_r tem um número finito de componentes conexas. Em particular, pela finitude, cada uma delas também é aberta. Tomando a componente conexa de x_0 em cada X_r, obtemos uma base local de abertos conexos de x_0, e como x_0 é arbitrário, concluímos que X é localmente conexo. □

Uma consequência importante do Teorema da Decomposição Cilíndrica é o Teorema de Tarski-Seidenberg. Para enunciá-lo, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.2.1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos semialgébricos. Dizemos que $f : X \to Y$ é **semialgébrica** se $\mathrm{graph}(f)$ é conjunto semialgébrico em $\mathbb{R}^{n+m}$.

Observação 3.2.1. Note que as funções f_j^A definidas no Teorema da Decomposição Cilíndrica são semialgébricas.

Teorema 3.2.2. (Teorema de Tarski-Seidenberg) Sejam X e Y conjuntos semialgébricos, e $f : X \to Y$ uma função semialgébrica. Então $f(X)$ é semialgébrico.

Demonstração: De f ser semialgébrica, temos que $\mathrm{graph}(f)$ é semialgébrico. Como $f(X) = \pi(X \times Y \cap \mathrm{graph}(f))$, onde $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é a projeção natural. Note que π é semialgébrica, pois $\mathrm{graph}(\pi) = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^{m+n+m} : x - t = 0\}$. Com isto, é suficiente provar que:

Afirmação: Seja $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a projeção natural. Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, então $\pi(V)$ também o é.

Procedemos por indução em m. Caso $m = 1$, o Teorema da Decomposição Cilíndrica permite que escrevamos V como união de conjuntos semialgébricos conexos dos tipos $\mathscr{B}$ e $\mathscr{G}$ sobre conjuntos semialgébricos que particionam $\mathbb{R}^n$. Ao aplicar π em V os conjuntos resultantes são elementos que particionam $\pi(V)$. Como união finita de conjuntos semialgébricos é semialgébrica, então $\pi(V)$ é semialgébrico.

Supondo que a afirmação vale para o caso m, em $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$, podemos expressar $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ como a composição de $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ composto com $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Pelo caso base $\pi_1(V)$ é semialgébrico, e pela hipótese de indução, $\pi_2(\pi_1(V))$ é semialgébrico. □

O Teorema de Tarski-Seidenberg mostra que funções semialgébricas se comportam de forma análoga à homomorfismos de estruturas algébricas no que toca à preservação de estruturas por imagem direta, diferente de outras noções topológicas ou geométricas. Sabemos que imagem direta de um grupo por homomorfismos é um subgrupo da imagem, por exemplo, mas nem sempre uma função contínua entre espaços topológicos é aberta, ou a imagem de uma variedade por uma aplicação diferenciável é uma subvariedade do contradomínio.

Além disso, a demonstração desse teorema revela um princípio recorrente na geometria semialgébrica: Quando temos uma função semialgébrica $f : X \to Y$, e queremos demonstrar afirmações envolvendo a estrutura da sua imagem, pode-se considerar no lugar a projeção $\pi : \mathrm{graph}(f) \to f(X)$.

Proposição 3.2.1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos semialgébricos, e $f : X \to Y$ uma bijeção semialgébrica. Temos que $f^{-1} : Y \to X$ também é semialgébrica.

Demonstração: Como f é semialgébrica, $\mathrm{graph}(f)$ é semialgébrico. Definimos a função que permuta coordenadas $T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definida por $(x,y) \mapsto (y,x)$. Como $\mathrm{graph}(T) = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^{m+n+n+m} : x - t = 0 \text{ e } y - s = 0\}$, T é semialgébrica. Concluímos a prova notando que $\mathrm{graph}(f^{-1}) = T(\mathrm{graph}(f))$. □

Uma das aplicações mais importantes do Teorema de Tarski-Seidenberg é a possibilidade de caracterização de conjuntos semialgébricos utilizando lógica de primeira ordem.

Definição 3.2.2. Uma **linguagem de primeira ordem na língua de corpos ordenados com parâmetros em** $\mathbb{R}$ é definida da seguinte forma:

1. As fórmulas atômicas são dadas por $P(x) > 0$ e $Q(x) = 0$, onde $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.
2. Se Φ e Ψ são fórmulas de primeira ordem, então $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\neg\Phi$ são linguagens de primeira ordem
3. Fórmulas do tipo $\exists X \Phi$ e $\forall X \Phi$ são fórmulas de primeira ordem

Note que todo conjunto semialgébrico pode ser escrito dessa forma, por meio das relações

$$z \in \{x \in \mathbb{R}^n : P(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x)\} \iff P(z) \vee Q(z);$$

$$z \in \{x \in \mathbb{R}^n : P(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x)\} \iff P(z) \wedge Q(z);$$

$$z \in \{x \in \mathbb{R}^n : P(x)\}^C \iff \neg P(z).$$

Provaremos que vale a recíproca do citado:

Teorema 3.2.3. Se Ψ é fórmula de primeira ordem na linguagem de corpos ordenados com parâmetros em $\mathbb{R}$, então $\{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x)\}$ é um conjunto semialgébrico.

Demonstração: Procedemos por indução na quantidade de constantes lógicas (símbolos de conectivos e quantificadores) da fórmula.

Inicialmente, para as fórmulas atômicas, note que ambas definem conjuntos semialgébricos por definição. Portanto, a tese vale para estas.

Hipótese de indução: Dada $\Psi(x)$, suponha que a tese seja válida para toda fórmula com número de constantes lógicas menor que o de $\Psi(x)$.

1. Para $\neg\Psi(x_1,...,x_n)$, pela hipótese de indução, $\{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x)\}$ é semialgébrico. Mas

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \neg\Psi(x_1,...,x_n)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x_1,...,x_n)\}^C,$$

que é semialgébrico.

2. Para $\Phi \wedge \Psi$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) \wedge \Psi(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x)\},$$

pela hipótese de indução, ambos são semialgébricos, logo vale a tese.

3. Para $\Psi \vee \Phi$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) \vee \Psi(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x)\},$$

pela hipótese de indução, ambos são semialgébricos, portanto vale a tese.

4. Para $\exists X \in \mathbb{R} : \Psi(x_1,...,x_n,x)$, temos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_{n+1} \in \mathbb{R} \mid \Psi(x,x_{n+1})\} = \pi(\{(x,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Psi(x,x_{n+1})\},$$

pela hipótese de indução, $\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Psi(x, x_{n+1})\}$ é semialgébrico, então podemos concluir o desejado.

5. Para $\exists X \in \mathbb{R} : \Psi(X)$, basta notar que $\exists X \in \mathbb{R} : \Psi(X) \iff \neg(\forall X \in \mathbb{R} : \neg\Psi(X))$. Pelos itens anteriores, a fórmula da direita define um conjunto semialgébrico. Podemos assim concluir o teorema. $\square$

Uma consequência deste resultado é que vale a *eliminação de quantificadores* nesta linguagem, isto é, dado um conjunto A descrito por uma fórmula de primeira ordem na linguagem de corpos ordenados com parâmetros em $\mathbb{R}$, existe uma fórmula sem quantificadores na mesma linguagem que descreve o mesmo conjunto.

Tarski-Seidenberg também tem consequências topológicas agradáveis, além de garantir boas propriedades de estabilidade às funções semialgébricas.

Proposição 3.2.2. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, temos que $\text{int}(X)$,$\overline{X}$, e ∂X são semialgébricos.

Demonstração: Note que

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, \exists y \in X(\|y-x\| < \varepsilon)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, \exists y \in \mathbb{R}^n[(\|y-x\| < \varepsilon) \wedge P(y)]\},$$

onde $P(y)$ é uma fórmula de primeira ordem que define X. Como o segundo conjunto é descrito por uma fórmula de primeira ordem, temos que $\overline{X}$ é semialgébrico.

O bordo ∂X é semialgébrico pois $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$.

O interior de X é semialgébrico pois $\text{int}(X) = \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus X})$. $\square$

Proposição 3.2.3. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ são conjuntos semialgébricos, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ são funções semialgébricas. Então:

1. $g \circ f : X \to Z$ é semialgébrica.
2. Se $B \subset Y$ é semialgébrico, então $f^{-1}(B)$ também o é.
3. $S(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{é semialgébrica}\}$ é um anel comutativo com unidade.
4. $f : X \to Y$ é semialgébrica se, e somente se, cada coordenada f_i de f também o é.
5. $h : X \to Y$ é semialgébrica $\iff g \circ h \in S(X), \forall g \in S(Y)$.
6. $f \in S(X) \iff \frac{1}{f} \in S(X)$, onde $f(x) \neq 0$ em X.
7. Se $f, g \in S(X)$, então $\min(f, g)$ e $\max(f, g)$ são semialgébricas. Em particular, $\|f(x)\|^2$ é semialgébrica.
8. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ semialgébrica, com U aberto semialgébrico. Se existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ para $i \in \{1, ..., n\}$, então ela é semialgébrica.

9. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é não-vazio e semialgébrico, então a função $d(x,A) = \inf\{\|x-y\| : y \in A\}$ é semialgébrica.

Demonstração:

1. Note que $\text{graph}(g \circ f) = \pi((\text{graph}(f) \times \mathbb{R}^p) \cap (\mathbb{R}^n \times \text{graph}(g))$, onde $\pi : \mathbb{R}^{n+m+p} \to \mathbb{R}^{n+p}$ é a projeção natural. Por Tarski-Seidenberg, $\text{graph}(g \circ f)$ é semialgébrico.
2. Escrevendo $f^{-1}(B) = \pi(X \times B \cap \text{graph}(f))$, temos por Tarski-Seidenberg que $f^{-1}(B)$ é semialgébrico.
3. Provaremos que $S(X)$ é um subanel de $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, logo um anel comutativo com unidade. Primeiro, note que as funções constantes são semialgébricas, pois se f é constante com imagem $c \in \mathbb{R}$, $\text{graph}(f) = X \times \{c\}$, que é semialgébrico. Portanto as funções 0 e 1 são semialgébricas. Temos que as funções $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são semialgébricas, pois

$$\text{graph}(+) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - y = 0\}$$

$$\text{graph}(\cdot) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - xy = 0\}$$

são semialgébricos. Por último, note que $-f = 0 - f$ é composição de funções semialgébricas. Portanto, temos que dadas $f,g \in S(X)$, $f - g \in S(X)$ e $f \cdot g \in S(X)$, de onde podemos concluir o desejado.

4. Se f é semialgébrica, então cada $f_i = \pi_i \circ f$ é semialgébrica por ser composição de funções semialgébricas. Reciprocamente, note que $f(x) = (f_1(x), 0, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, f_m(x))$, onde $(0, ..., 0, f_i(x), 0, ..., 0) = j_i \circ f_i(x)$, onde j_i é a injeção $x \mapsto (0, ..., 0, x, 0, ..., 0)$. Note que j_i é semialgébrica, pois $\text{graph}(j_i) = \{(x, x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_i - x = 0 \text{ e } x_j = 0, \text{ para } j \neq i\}$. Portanto cada elemento da soma é semialgébrico, e portanto f é semialgébrica.
5. Se $h : X \to Y$ é semialgébrica, por (1) $g \circ h$ é semialgébrica pra toda $g : Y \to \mathbb{R}$. Se $g \circ h \in S(X), \forall g \in S(Y)$, então $h_i = \pi_i \circ h$ é semialgébrica e por (4), h é semialgébrica.
6. $f \in S(X) \iff \forall g \in S(\mathbb{R}), g \circ f \in S(X)$. Em particular, como $\text{Inv} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \to \frac{1}{x}$ é semialgébrica, $\text{Inv} \circ f$ também o é.
7. Como $\text{graph}(\min) = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : (t - x < 0 \wedge t - y = 0) \vee (t - y < 0 \wedge t - x = 0)\}$, a tese segue da (4) e (1). O caso de $\max(f,g)$ é análogo.

   Note que $\|f(x)\| = \sup(f(x), -f(x))$ é semialgébrica, então $\|f(x)\|^2$ é semialgébrico.
8. Podemos escrever o gráfico de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ como

$$\left\{ (x,y) \in U \times \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in (0,\delta), \left\| y - \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t} \right\|^2 < \varepsilon \right\}$$

e por Tarski-Seidenberg, concluímos que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ é semialgébrica.

9. Como A é semialgébrico, podemos escrever $A = \{z \in \mathbb{R}^n : P(z)\}$ onde P é fórmula de primeira ordem, o gráfico de $d(x,A)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\text{graph}(d(\cdot,A)) &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t = \inf\{\|x-y\| : y \in A\}\} \\ &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists z \in A : \|x-z\| < t+\varepsilon\} \\ &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbb{R}^n : (\|x-z\| < t+\varepsilon) \wedge P(z)\}.\end{aligned}$$

Note que o item 8 implica que a propriedade de ser semialgébrica é fechada por diferenciação, mas como veremos mais à frente, não é fechada por integração.

Exemplo 3.2.1. Polinômios $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções semialgébricas, pois seus gráficos são os conjuntos algébricos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y - f(x) = 0\}$.

Exemplo 3.2.2. O exemplo anterior e o item (4) da Proposição 3.2.3. têm como consequência que funções polinomiais $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são semialgébricas. Em particular, transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são semialgébricas. Este fato, junto do exemplo 3.0.1 e do Teorema de Tarski-Seidenberg nos permitem concluir que subespaços vetoriais são conjuntos semialgébricos, pois todo subespaço do $\mathbb{R}^n$ pode ser obtido por meio de um isomorfismo de um subespaço E de mesma dimensão gerado por vetores da base canônica, e este é semialgébrico pois pode ser descrito como $\bigcap_i \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$ onde i percorre os índices dos elementos da base canônica que não pertencem a E.

Exemplo 3.2.3. Funções racionais $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são semialgébricas, pois se

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}; g(x), h(x) \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n], h(x) \neq 0, \forall x \in \text{dom}(h)$$

pelos itens (6) e (1) da Proposição 3.2.3., f é semialgébrica.

Proposição 3.2.4. A família de conjuntos semialgébricos do $\mathbb{R}^n$ é a menor família de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que contém todos os subconjuntos da forma $\pi(Y)$, onde Y é um conjunto algébrico de $\mathbb{R}^{n+m}$ e $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ é a projeção natural.

Demonstração: Por Tarski-Seidenberg, todo conjunto da forma $\pi(Y)$ é semialgébrico. É suficiente provarmos que dado $X \subset \mathbb{R}^n$, existe $Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ semialgébrico tal que $\pi(Y) = X$. Pela **Proposição 3.0.2.**, podemos escrever $X = \bigcup_i X_i$, onde $X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : P_1^i(x) =$

$... = P^i_{h_i}(x) = 0, Q^i_1(x) > 0, ..., Q^i_{k_i}(x) > 0\}$. Dessa forma, é suficiente provar a proposição para cada X_i. Seja $X = X_i$, $P_j = P^i_j$, $Q^i_j = Q_j$, $m = k_i$ e $h = h_i$.

Seja $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} : P_1^2(x) + ... + P_h^2(x) + (y_1^2 Q_1(x) - 1)^2 + ... + (y_m^2 Q_k(x) - 1)^2 = 0\}$. Note que como

$$\pi(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}^m \; P_1^2(x) + ... + P_h^2(x) + (y_1^2 Q_1(x) - 1)^2 + ... + (y_m^2 Q_j(x) - 1)^2 = 0\}$$

Como temos uma soma de quadrados na descrição, cada termo é igual à zero. Dessa forma, obtemos $P_i(x) = 0$ e $(y_j^2 Q_j(x) - 1)^2 = 0$ para todo $i \in \{1, ..., h\}$ e $j \in \{1, ..., k\}$. Além disso, $(y_j^2 Q_j(x) - 1)^2 = 0$ implica em $Q_j(x) = \dfrac{1}{y_i^2}$, e logo $Q_j(x) > 0$ o que prova que $\pi(Y) \subset X$. Para a recíproca, se $x \in X$ então cada $Q_j(x) > 0$ e portanto existe $y_j(x) > 0$ com $Q_j(x) = \dfrac{1}{y_j^2(x)}$. Logo, $(y_j^2 Q_j(x) - 1)^2 = 0$, e como em X vale $P_i(x) = 0$, a soma indicada em Y também é 0. Portanto, $\pi(Y) = X$. □

As funções semialgébricas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em especial possuem uma propriedade em que seu crescimento pode ser controlado por um polinômio. Para isso, precisamos de um lema:

Lema 3.2.1. Seja $P(X) = a_d X^d + ... + a_1 X + a_0$ com $a_d \neq 0$. Se $c \in \mathbb{C}$ é raíz de $P(X)$, então

$$\|c\| \leq \max_{i=1,...,d} \left(d \frac{\|a_i\|}{\|a_d\|} \right)^{\frac{1}{i}}.$$

Demonstração: Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $\|z\| > \max_{i=1,...,d} \left(d \frac{\|a_i\|}{\|a_d\|} \right)^{\frac{1}{i}}$, então para todo i, $\|a_d\| \, \|z\|^i / d > \|a_i\|$.

Portanto, segue que

$$\left\| a_{d-1} z^{d-1} + ... + a_1 z + a_0 \right\| \leq \|a_{d-1}\| \, \|z\|^{d-1} + ... \|a_0\| < \left\| a_d z^d \right\|$$

e logo $P(z) \neq 0$. □

Proposição 3.2.5. Seja $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função semialgébrica. Existe $C > A$ e $N \in \mathbb{R}$ tais que em $(C, +\infty)$, $\|f(x)\| \leq x^N$.

Demonstração: Se $f : (A, +\infty) \to \mathbb{R}$ é semialgébrica, então graph(f) é união finita de conjuntos

$$G_i = \{x \in \mathbb{R}^n : P_i(x,y) = 0, Q_1(x,y) > 0, ..., Q_{k_i}(x,y) > 0\}.$$

Temos que $\deg(P_i) > 0$, caso contrário, e $(x_0, y_0) \in G_i$ como polinômios são funções continuas, e $Q_j(x_0, y_0) > 0$, tomando

$$U = \bigcap_{i=1}^{k_i} Q_j^{-1}(x_0, y)$$

temos que $\{x_0\} \times U \subset \mathrm{graph}(f)$, o que é absurdo.

Se $P = \prod_i P_i$, então

$$P(x,y) = a_d(x)y^d + \ldots + a_1(x)y + a_0(x).$$

tome $c = \max_{i=1,\ldots,n}\{\|b_i\|, A\}$, com $a_0(b_i) = 0$ de forma que $a_0 \mid_{(C,+\infty)} \neq 0$.

Pelo Lema 3.2.1, temos que

$$f(x) \leq \max \left(d \frac{\|a_i(x)\|}{\|a_0(x)\|}^{\frac{1}{i}} \right)$$

como $\left\| \frac{a_i(x)}{a_0(x)} \right\| = \frac{\|a_i(x)\|}{\|a_0(x)\|}$, o comportamento quando $x \to +\infty$ é determinado dividindo ambos por

$$x^{\min\{\deg(a_i), \deg(a_0)\}},$$

onde todos os termos menos um são irrelevantes, logo o quociente equivale a uma expressão da forma λx^α, onde $\lambda > 0$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$. Se $B = \lambda^{\frac{1}{N-\alpha}}$, $x \geq B \implies \lambda x^\alpha \leq x^N$. Logo, em $(B, +\infty)$

$$\|f(x)\| \leq \lambda x^\alpha \leq x^N.$$

$\square$

Teorema 3.2.4. (Desigualdade de Lojasiewicz) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções semialgébricas, com X semialgébrico compacto, e suponha que o conjunto dos zeros de f esteja contido no conjunto dos zeros de g. Então existe $N \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tais que

$$\|g(x)\|^N \leq c\,\|f(x)\|.$$

Demonstração: Seja $F_t = \{x \in X : t\,\|g(x)\| = 1\}$. Como F_t é imagem inversa de $\frac{1}{t}$ por $\|g(x)\|$, F_t é fechado em X, logo compacto. Suponha que $F_t \neq \emptyset$. Nesse caso, f não se anula em F_t e $\frac{1}{\|f(x)\|}$ tem máximo em F_t. Denotando $\theta(t) = \max\limits_{F_t}\left\{\frac{1}{\|f(x)\|}\right\}$. Note que θ é semialgébrica pois podemos escrever

$$\begin{aligned}
\operatorname{graph}(\theta) &= \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \theta(t)\} \\
&= \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y - \theta(t) = 0\} \\
&= \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y - \max_{F_t} \frac{1}{\|f(x)\|} = 0\} \\
&= \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y - s = 0, s = \max_{F_t} \frac{1}{\|f(x)\|}\right\} \\
&= \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y - s = 0, s - \frac{1}{\|f(x)\|} > 0 \vee s - \frac{1}{\|f(x)\|} = 0, \forall x \in F_t\right\}
\end{aligned}$$

Pela proposição anterior, existe $B > 0$, e $N \in \mathbb{N}$ tais que $\|\theta(t)\| \leq t^N$, $\forall t > B$. Mas isso equivale a dizer que

$$\forall x \in X, \left(0 < \|g(x)\| = \frac{1}{t} < \frac{1}{B} \implies \frac{1}{\|f(x)\|} \leq \frac{1}{\|g(x)\|^N}\right).$$

Se $D = \max\left\{\frac{\|g(x)\|^N}{\|f(x)\|}\right\}$ em $\{x \in X : \|g(x)\| \geq \frac{1}{B}\}$ e $C = \max\{1, D\}$. Obtemos assim $\|g(x)\|^N \leq C\,\|f(x)\|, \forall x \in X$. Se $F_t = \emptyset$, $g \equiv 0$, e a conclusão segue. □

Observação 3.2.2. No Teorema anterior, podemos substituir a hipótese sobre a compacidade de X com "$\forall \varepsilon > 0, \{x \in X : \|g(x)\| \geq \varepsilon\}$ é compacto". Para todo t, existe um $\varepsilon > 0$ tal que F_t está contido em $\{x \in X : \|g(x)\| \geq \varepsilon\}$. Como F_t é fechado, e $\{x \in X : \|g(x)\| \geq \varepsilon\}$ é compacto, F_t é compacto e segue a mesma demonstração. Essa observação será importante ao tratarmos do problema de separação de conjuntos semialgébricos fechados por funções semialgébricas.

3.3 O Teorema da Estratificação

A decomposição dada pelo Teorema da Decomposição cilíndrica tem boas propriedades: Todo conjunto semialgébrico têm uma quantidade finita de componentes conexas, elas são semialgébricas, e elas tem "formas" bem-definidas: são gráficos de funções ou faixas sobre conjuntos semialgébricos. Nesta seção provaremos que a menos de uma mudança linear de coordenadas, os cilíndros obtidos podem ser tomados como subvariedades analíticas do $\mathbb{R}^n$.

Antes de apresentar os conceitos desta seção, relembremos a noção de k-subvariedade analítica do $\mathbb{R}^n$:

Definição 3.3.1. ((KRANTZ; PARKS, 2002)) Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma **k-subvariedade analítica** se para todo ponto $p \in S$, existe $U \subset \mathbb{R}^k$ aberto e função analítica $f : U \to \mathbb{R}^n$ que mapeia abertos de U em abertos relativos de S tal que a derivada de f tem posto k em todo ponto de U.

Definição 3.3.2. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma **estratificação** de E é uma partição $\{E_i\}_{i\in I}$ de E onde

1. Cada E_i é uma subvariedade analítica localmente fechada do $\mathbb{R}^n$;
2. Se $E_i \cap \overline{E_j} \neq \emptyset$, então $E_i \subset \overline{E_j}$ e $\dim(E_i) < \dim(E_j)$.

A estratificação é **finita** se I é finito, e **semialgébrica** se cada E_i é semialgébrico.

O teorema desta seção nos permite concluir que é possível ter estratificação do $\mathbb{R}^n$ formada por conjuntos semialgébricos. Para isto, precisamos de uma definição:

Definição 3.3.3. Um **algoritmo de separação para** $\mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ é um algoritmo que estende qualquer família finita $\{P_1,...,P_k\}$ de polinômios a uma família $\{P_1,...,P_R\}$ de forma que

1. Os conjuntos da forma

$$X = \bigcap_{j=1}^{R} \{x \in \mathbb{R}^n : P_j(x) s_j 0\}, s_j \in \{<,=,>\}$$

chamados de **conjuntos elementares** definidos por $\{P_1,...,P_R\}$, são conexos.

2. O fecho de X é obtido relaxando as desigualdades s_j, i.e.,

$$\overline{X} = \bigcap_{j=1}^{R} \{x \in \mathbb{R}^n : P_j(x) \overline{s_j} 0\}, \overline{s_j} \in \{\leq,=,\geq\}.$$

Definição 3.3.4. Um **algoritmo de estratificação-separação** é um algoritmo de separação cujos conjuntos elementares QA591formam uma estratificação do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.1. (Estratificação) Para todo n, existe algoritmo de estratificação-separação para $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $\{P_1,...,P_k\} \subset \mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ uma família finita. O algoritmo consiste de três passos:

1. (A,n) - Faremos uma mudança de variáveis $x_i \mapsto x_i + a_i x'_n$ para $i = 1,...,n-1$, e $x'_n = x_n$. Essa mudança de variáveis existe pelo lema da normalização de Noether, vide (EISENBUD, 2004).
2. (B,n) - Acrescentamos à família inicial os polinômios

$$\frac{\partial^c P_i}{\partial X_n^c}, c = 1,2,...$$

   que não são nulos, obtendo a família $\{P_1,...,P_r\}$.
3. (C,n) - Denotando $X = \{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = 0\} \cup ... \cup \{x \in \mathbb{R}^n : P_r(x) = 0\}$, aplicamos o Teorema da Decomposição Cilíndrica a X.

Com o Teorema da decomposição cilíndrica, obtemos uma partição de $\mathbb{R}^{n-1}$ em conjuntos semialgébricos. Tomando todos os polinômios de uma representação de cada conjunto, aplicamos o algoritmo novamente, e assim sucessivamente, até chegar à $n = 1$.

Denotamos por $\{P_1,...,P_r,P'_1,...,P'_s,...\}$ a família que consiste de todos os polinômios obtidos ao final de cada aplicação dos passos (A,k), (B,k) e (C,k), para $k = 1,...,n$. Note que estamos aqui fazendo uma identificação: Se $l < n$, um polinômio de $\mathbb{R}[X_1,...,X_l]$ é visto como um polinômio de $\mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ escrevendo suas coordenadas em X_{l+1} até X_n com coeficientes nulos.

Antes de prosseguir com a prova, da definição do algoritmo segue algumas observações:

1. A decomposição obtida ao fim do algoritmo é compatível com as projeções $\pi_j : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}^{j-1}$, i.e., se S é estrato de $\mathbb{R}^j$, $\pi_j(S)$ é estrato de $\mathbb{R}^{j-1}$, e se A é estrato de $\mathbb{R}^{j-1}$, $\pi_{j-1}^{-1}(A)$ é união de estratos de $\mathbb{R}^j$.
2. Todo estrato de $\mathbb{R}^{j+1}$ é um gráfico ou uma faixa sobre um estrato de $\mathbb{R}^j$.
3. Os estratos de $\mathbb{R}^j$ são conjuntos elementares definidos por uma família de polinômios com coeficientes constantes com respeito à X_j.

Afirmação 1: O algoritmo construído é de separação.

Demonstração da Afirmação 1: Por indução em n.

Para $n = 1$, a conclusão segue do Lema de Thom. Suponha que vale a tese para $n-1$.

Suponhamos que $\mathscr{D} = \{P'_1, ..., P'_s, ...\}$ é família de separação para $\mathbb{R}^{n-1}$. Na prova do Teorema de Decomposição Cilíndrica, temos que os cilindros da decomposição de X tem a forma

$$\bigcap_{j=1}^{r} \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : P_j(x,t) s_j 0\}.$$

Como $A = \bigcap_i \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : Q_i(y) s_i 0\}$, onde $Q_i \in \mathscr{D}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\bigcap_{j=1}^{r} \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : P_j(x,t) s_j 0\} &= \bigcap_{j=1}^{r} \{(x,t) \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ e } P_j(x,t) s_j 0\} \\ &= \bigcap_{u} \{x \in \mathbb{R}^n : R_u(x) s_u 0\}\end{aligned}$$

com $R_u \in \{P_1, ..., P_s, Q_1, ...\}$.

Nos resta provar a segunda propriedade para conjuntos elementares. Neste trecho, será útil denotarmos a família de polinômios obtida ao final do processo de duas formas diferentes:

- $\{P_1, ..., P_r, V_1, ..., V_u\}$, com $P_1, ..., P_r$ sendo a família resultante após a aplicação do passo (B,n) e $\{V_1, ..., V_u\} = \mathscr{D}$;
- $\{Q_1, ..., Q_s\}$, listando todos os polinômios da mesma forma.

Seja $E = \bigcap_{i=1}^{s} = \{x \in \mathbb{R}^n : Q_i(x) s_i 0\}$, e $E^0 = \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n : Q_i(x) \bar{s}_i 0\}$. Provaremos que $\overline{E} = E^0$.

Note que $\overline{E} = \overline{\bigcap_{i=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n : Q_i(x) s_i 0\}} \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : Q_i(x) s_i 0\}} = \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n : Q_i(x) \bar{s}_i 0\}$. Para ver que $E^0 \subset \overline{E}$, seja

$$A = \bigcap_{i=1}^{u} \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : V_i(x) s_i 0\}.$$

Por indução, temos que

$$\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{u} \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : V_i(x) \bar{s}_i 0\}.$$

Sejam $f_1, ..., f_m$ as funções que dão as raízes dos polinômios $P_{1,y}(T), ..., P_{r,y}(T)$, onde $y \in A$.

Seja $a^0 \in \overline{A}$. Existe uma vizinhança U de a^0 e $M > 0$ tal que

$$\|f_i(x)\| \leq M, \forall x \in U \cap A.$$

De fato, caso contrário, para toda vizinhança U de a^0, e para todo $M > 0$, $\|f_i(x)\| > M$. Em particular, temos que $\lim_{x \to a^0} f_i(x) = \infty$. De $P(x, f_i(x)) = 0$, temos

$$0 = \lim_{x \to a^0} P(x, f_i(x)) = P(a^0, \lim_{x \to a^0} f_i(x)).$$

Porém,

$$0 = \lim_{x \to a^0} \frac{P(x, f_i(x))}{f_i(x)} = \lim_{x \to a^0} \left(1 + \frac{a_{n-1}(x)}{f_i(x)} + \ldots + \frac{a_0(x)}{f^n(x)}\right) = 1$$

O que é um absurdo.

Seja (a_n) uma sequência de pontos de $U \cap A$ com $a_n \to a^0$, e considere o conjunto compacto

$$K = \{\{a^0\} \cup \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}\} \times [-M, M] \subset \mathbb{R}^n.$$

Da observação sobre a limitação das f_i, segue que $K \cap \overline{E} \neq \emptyset$. De fato, note que E é um gráfico ou uma faixa sobre A. Caso E seja um gráfico, pela observação sobre a limitação das funções que dão os zeros de $P_{i,y}(T)$ perto do bordo, $E \cap K \neq \emptyset$ e logo $\overline{E} \cap K \neq \emptyset$. Se E for uma faixa entre dois gráficos, pela mesma observação temos que $\overline{E} \cap K \neq \emptyset$. Caso E seja uma das faixas determinadas por $f_0^A = -\infty$ ou $f_{s_A+1}^A = +\infty$, o gráfico da função seguinte f_1^A ou $f_{s_A}^A$ pertence à $\overline{E}$ e assim $\overline{E} \cap K \neq \emptyset$.

Portanto existe $t_n \in E$ para cada a_n com $(a_n, t_n) \in K \cap \overline{E} \subset \overline{E}$. Como $K \cap \overline{E}$ é compacto, existe t_0 com $(a_n, t_n) \to (a^0, t_0)$. Portanto, $\{\{a^0\} \times \mathbb{R}\} \cap \overline{E} \neq \emptyset$, e portanto, $\{\{a^0\} \times \mathbb{R}\} \cap E^0 \neq \emptyset$.

Aplicando o Lema de Thom à família $\{P_j(a_i, T)\}_{i,j}$, concluímos que

1. $\{\{a^0\} \times \mathbb{R}\} \cap E^0 = (a^0, t_0)$;
2. $\{\{a^0\} \times \mathbb{R}\} \cap E^0 =$ um intervalo não-trivial.

No segundo caso, se t pertence ao interior do intervalo,

$$P_j(a^0,t) < 0 \quad \text{ou} \quad P_j(a^0,t) > 0 \quad \text{para} \quad j = 1,...,s.$$

pois cada P_j tem coeficiente líder constante. Consequentemente, $\{\{a^0\} \times \mathbb{R}\} \cap E^0 \subseteq \overline{E}$. Como a_0 é arbitrário, obtemos $E^0 \subset \overline{E}$.

Afirmação 2: O algoritmo obtido é de estratificação-separação.

Demonstração da afirmação 2: Por indução em n. Caso $n = 1$, os conjuntos semialgébricos são intervalos abertos (variedades de dimensão 1) e pontos (variedades de dimensão 0).

Assumindo que vale a tese para $n-1$, suponhamos por indução que os conjuntos elementares gerados por $\{V_1,...,V_u\}$ formam uma estratificação de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Seja E um desses conjuntos elementares. Como visto anteriormente, $E \times \mathbb{R}$ tem decomposição cilíndrica em conjuntos do tipo $\mathscr{F}$ ou $\mathscr{G}$, e os conjuntos elementares definidos por $\{Q_1,...,Q_s\}$ citados são desse tipo. Seja E^0 um desses conjuntos.

Se E^0 é do tipo $\mathscr{F}$, então ele é um conjunto aberto na subvariedade analítica localmente fechada, portanto herda a estrutura de subvariedade analítica. Por ser aberto em um conjunto localmente fechado, também possui essa propriedade.

Se E^0 é do tipo $\mathscr{G}$, existem $f : E \to \mathbb{R}$ contínua, $P \in \{Q_1,...,Q_s\}$ tais que

1. $E^0 = \{(x_n,y) : y = f(x_n)\}$;
2. $P(y, f(y)) = 0, \forall y \in E$, com $f(y)$ sendo raíz simples de $P(y,X_n)$. Isso segue do seguinte: Se $f(y)$ é raíz múltipla de $P(y,X_n)$, então podemos escolher $\dfrac{\partial P}{\partial X_n}(y,X_n)$, pois $\{Q_{1,y}(X_n),...,Q_{s,y}(X_n)\}$ é fechada por $\dfrac{\partial}{\partial X_n}$. Caso $f(y)$ seja raíz múltipla de $\dfrac{\partial P}{\partial X_n}(y,X_n)$, tomamos $\dfrac{\partial^2 P}{\partial X_n^2}(y,X_n)$ e assim sucessivamente até obtermos um polinômio no qual $f(y)$ é raíz simples.

Além disso, pelo passo (A,n), $P(y,X_n)$ tem coeficiente líder constante, e logo podemos concluir que f é analítica. Como E é subvariedade analítica de $\mathbb{R}^{n-1}$, E^0 também o é.

Para provar a condição sobre o bordo, sejam $E_1 = \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n : Q_i(x)s_i 0\}$ e $E_2 = \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n : Q_i(x)s_i' 0\}$. Se $x \in E_1 \cap \overline{E_2}$, vale $Q_i(x)s_i 0$ e $Q_i(x)\bar{s}_i' 0$, portanto $s_i = s_i'$ ou $s_i = " = "$, $i = 1,...,s$.

A condição da dimensão segue também por indução. Se $n = 1$, $E_1 \cap \overline{E_2} \neq \emptyset$ quando E_1 é um ponto e E_2 é um intervalo, portanto $\dim E_1 < \dim E_2$.

Assumindo a tese para $n-1$, se E_1 e E_2 são estratos, para avaliar o que acontece com $E_1 \cap \overline{E}_2$, precisamos de 3 informações sobre o comportamento de estratos nos seus fechos.

Afirmação 3: Se B é estrato do tipo $\mathscr{G}$ sobre $A = \pi_{j-1}(B)$ e C é estrato contido em $\overline{B}$, então C é do tipo $\mathscr{G}$ sobre $D = \pi_{j-1}(C)$, e $D \subset \overline{A}$.

Demonstração da Afirmação 3: Se C é estrato e $C \subset \overline{B}$, por definição de estratificação $C \cap B = \emptyset$ e portanto $C \subset \partial B$. Logo, temos que $\pi_{j-1}(C) \subset \pi_{j-1}(\partial B) \subset \pi_{j-1}(\overline{B}) = \overline{\pi_{j-1}(B)} = \overline{A}$.

Para provar que C é do tipo $\mathscr{G}$, seja $x' \in D$, e $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $B = \operatorname{graph}(f)$. Sabemos que existe $M > 0$ e $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ vizinhança de x' com $\|f(x)\| \leq M, \forall x \in U \cap D$. Seja (x_n) sequência em A convergindo para x'. A sequência $f(x_n)$ é limitada, e portanto existe $y = \limsup f(x_n)$. Consequentemente, $(x', y) \in \overline{B}$.

Cada ponto da forma (x', t) em $\overline{B}$ satisfaz $P(x', t) = 0, P'(x', t)\bar{s}_1 0, \ldots, P^{(j)}(x', t)\bar{s}_j 0$, onde $P(x, f(x)) = 0, \forall x \in A$. Pelo lema de Thom, só existe um (x', t) que satisfaz essas condições. Como x' é arbitrário, C é o gráfico de uma função definida em D.

Afirmação 4: Nas hipóteses da afirmação 3, se $B = \operatorname{graph}(f)$ e $C = \operatorname{graph}(g)$, podemos estender f continuamente à $\hat{f}$ sobre $\overline{A}$ com $\hat{f}\,|_D = g$.

Demonstração da afirmação 4: Definimos $\hat{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ por

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in D. \end{cases}$$

Dado $x' \in D$, existe (x_n) em A convergindo para x'. Pela demonstração da afirmação 3, $\bar{f}(x) = g(x') = \lim f(x_n)$. Como $x' \in D$ arbitrário, $\bar{f}$ é contínua.

Afirmação 5: Seja B como nas afirmações 3 e 4, e suponha que $A \subset \overline{S}$, com S estrato de $\mathbb{R}^{j-1}$. Então existe um estrato T sobre S do tipo $\mathscr{G}$ tal que $B \subset \overline{T}$.

Demonstração da Afirmação 5: Pelas observações na afirmação 2, como B é do tipo $\mathscr{G}$, existe um polinômio P no qual $f(x)$ é raíz simples de P_x. Portanto, pelo Teorema da função implícita, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, e um aberto $V \subset \mathbb{R}$ uma função $r : U \to V$ tal que $P_x(r(x)) = 0$ para todo x em U. Porém, B ser estrato do tipo gráfico sobre A implica, pela demonstração da parte 2 do Teorema da Decomposição Cilíndrica, que P faz parte do produto Q_{C_A} e portanto existe um ponto (x, t) em $A \times \mathbb{R}$ tal que $P(x, t) \neq 0$; como polinômios são funções contínuas, numa vizinhança de (x,t) vale $P > 0$. Porém esta vizinhança contém pontos de $S \times \mathbb{R}$ e portanto P também faz parte do produto Q_{C_S},e portanto existe $h : S \to \mathbb{R}$ tal que $P(x,h(x)) = 0$ em S. Por fim, em $U \cap S$, h coincide com r e pela afirmação (4), pode ser estendida continuamente à f. $\square$

Com estas afirmações, podemos concluir a demonstração. Sejam E_1 e E_2 estratos, com $E_1 \cap \overline{E_2} \neq \emptyset$. Temos os casos:

– Se E_2 é do tipo $\mathscr{G}$, temos que da afirmação 3 e de $E_1 \subset \overline{E_2}$, E_1 é do tipo $\mathscr{G}$ sobre $\pi_{n-1}(E_1) \subset \overline{\pi_{n-1}(E_2)}$. Da hipótese de indução, $\dim \pi_{n-1}(E_1) < \dim \pi_{n-1}(E_2)$. Portanto $\dim E_1 < \dim E_2$.

– Se E_1 é do tipo $\mathscr{G}$ e E_2 é do tipo $\mathscr{F}$, então $\pi_{n-1}(E_1) \cap \overline{\pi_{n-1}(E_2)} \neq \emptyset$ e portanto $\pi_{n-1}(E_1) \subset \overline{\pi_{n-1}(E_2)}$. Pela afirmação 5, temos que existe estrato E_2' sobre $\pi_{n-1}(E_2)$ tal que $E_1 \subset \overline{E_2'}$. Porém, nessa situação $E_2' \cap E_2 \neq \emptyset$, o que é absurdo. Logo a única possibilidade de $E_1 \cap \overline{E_2}$ ser não vazia é se E_1 for o gráfico de uma das funções que determinam E_2, onde temos $\dim E_1 < \dim E_2$.

– Se E_1 e E_2 são do tipo $\mathscr{F}$, então pelo item anterior, as funções f_2, g_2 que determinam E_2 podem ser estendidas à f_1, g_1 que determinam E_1. Portanto, pelo item anterior $\dim(E_1) = \dim \pi_{n-1}(E_1) < \dim \pi_{n-1}(E_2) < \dim E_2$.

$\square$

Corolário 3.3.1. Cada estrato de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $d \geq 1$ obtido pelo algoritmo de estratificação-separação é semialgebricamente homeomorfo à bola aberta de dimensão d, centro 0 e raio 1.

Demonstração: Faremos por indução em n. Para $n = 1$, dado um estrato J de dimensão 1, existem $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tais que $J = (a,b)$.

Então temos o homeomorfismo semialgébrico

$$
\begin{aligned}
f : (a,b) &\to (0,1) \\
t &\mapsto \frac{t-a}{b-a}.
\end{aligned}
$$

Caso $b = +\infty$, temos

$$
\begin{aligned}
f : (a, +\infty) &\to (0,1) \\
t &\mapsto \frac{\|t-a\|}{1+\|t-a\|}.
\end{aligned}
$$

Caso $a = -\infty$, temos

$$
\begin{aligned}
f : (-\infty, b) &\to (0,1) \\
t &\mapsto \frac{\|b-t\|}{1+\|b-t\|}.
\end{aligned}
$$

Assumindo a tese para $n-1$, temos dois casos a avaliar. Seja A é estrato de $\mathbb{R}^n$ de dimensão d. Se A é do tipo $\mathscr{G}$, temos que A é semialgebricamente homeomorfo à $\pi_{n-1}(A)$, e pela hipótese de indução, $\pi_{n-1}(E)$ é semialgebricamente homeomorfo à bola aberta de dimensão d centrada em 0 e com raio 1. Se A é estrato de $\mathbb{R}^n$ de dimensão d do tipo $\mathscr{F}$

1. Se $A = \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : f_h^A(x) < t < f_{h+1}^A\}$, podemos definir

$$
\begin{aligned}
F : A &\to]0,1[^d \\
t &\mapsto \left(x, \frac{t - f_h^A(x)}{f_{h+1}^A(x) - f_h^A(x)} \right).
\end{aligned}
$$

2. Se $A = \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : f_h^A(x) < t < +\infty\}$, definimos

$$
\begin{aligned}
F : A &\to]0,1[^d \\
(x,t) &\mapsto \frac{t - f_h^A(x)}{1 + t - f_h^A(x)}.
\end{aligned}
$$

3. Se $A = \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : -\infty < t < f_h^A(x)\}$, definimos

$$
\begin{aligned}
F : A &\to]0,1[^d \\
(x,t) &\mapsto \frac{f_h^A(x) - t}{1 + f_h^A(x) - t}.
\end{aligned}
$$

Como cada função envolvida é semialgébrica, as funções descritas são semialgébricas. Ainda mais, como f_h^A pode ser tomada analítica, elas são difeomorfismos analíticos. Como a composição de $y \in]0,1[^d \mapsto \left(\frac{y_1}{1-\|y_1\|}, \ldots, \frac{y_d}{1-\|y_d\|} \right) \in \mathbb{R}^d$ com $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{x}{1+\|x\|} \in B^d(0,1)$ é um homeomorfismo semialgébrico, $]0,1[^d$ é semialgebricamente homeomorfo à $B^d(0,1)$. $\square$

Corolário 3.3.2. Todo conjunto semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^n$ tem uma estratificação finita e semialgébrica.

Demonstração: Seja $\{P_1, ..., P_k\}$ uma família de polinômios de uma representação de X. Pelo Teorema da estratificação, essa família determina uma estratificação do $\mathbb{R}^n$ pelo algoritmo indicado na demonstração.

A menos da mudança de variáveis indicada no teorema, como os estratos são elementos de uma decomposição cilíndrica a partir dos polinômios de uma representação de X, os estratos contidos em X formam uma estratificação de X. $\square$

3.4 Aplicações do Teorema da Estratificação

Um aspecto útil do Teorema da Estratificação é que podemos utilizar noções da geometria diferencial para auxiliar no estudo de conjuntos semialgébricos.

Começamos com a noção de dimensão.

Definição 3.4.1. Sejam X um conjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ e $\mathscr{S}$ uma estratificação de X. Definimos a **dimensão** de X como sendo $\sup_{S \in \mathscr{S}} \dim S$.

Note que a dimensão de um conjunto semialgébrico X é bem-definida. De fato, se $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$ são duas estratificações de X com $\dim S'$ dim $\sup_{S \in \mathscr{S}} \dim S < \sup_{S' \in \mathscr{S}'} \dim S'$ e sejam $S_1 \in \mathscr{S}$ e $S_2 \in \mathscr{S}'$ de forma que $\dim S_1 = \sup_{S \in \mathscr{S}} \dim S$ e $\dim S_2 = \sup_{S' \in \mathscr{S}'} S'$. Temos que como $\mathscr{S}$ é estratificação de X, S_2 está contido numa união finita de variedades de dimensão menor, o que é um absurdo. Portanto a noção de dimensão está bem definida.

Proposição 3.4.1. Sejam $X, X_1, ..., X_k \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos semialgébricos. Valem as seguintes propriedades:

(i) $\dim \bigcup_{i=1}^{k} X_i = \sup_{i=1,...,k} \dim X_i$;

(ii) $\dim(X \times Y) = \dim X \cdot \dim Y$;

(iii) $\dim X = \dim \overline{X}$;

(iv) Se $f : X \to Y$ é semialgébrica, então $\dim X \geq \dim f(X)$.

Demonstração:

(i) De fato, usando todos os polinômios envolvidos nas representações dos X_i, existe estratificação $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^n$ compatível com cada X_i. Seja $\mathscr{S}_i$ o conjunto dos estratos de $\mathscr{S}$

que estão contidos em X_i e $\mathscr{S}'$ os estratos que estão contidos em $\bigcup_{i=1}^{k} X_i$. Por definição de dimensão, temos que $\dim X_i = \sup_{\mathscr{S}\in\mathscr{S}_i} \dim \mathscr{S}_i$ e $\dim \bigcup_{i=1}^{k} X_i = \sup_{\mathscr{S}\in\mathscr{S}'} \dim \mathscr{S}$. Porém, por construção, $\mathscr{S}' = \bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{S}_i$, portanto $\dim \bigcup_{i=1}^{k} X_i = \sup_{i=1,\ldots,k} \dim X_i$.

(ii) Seja $\mathscr{S}_1$ estratificação finita e semialgébrica de X, e $\mathscr{S}_2$ estratificação finita e semialgébrica de Y. Note que o produto $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$ define uma estratificação de $X \times Y$. De fato, o produto de variedades analíticas é uma variedade analítica, e dados elementos $A \times B$, $C \times D$ de $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$, se $(A\times B)\cap\overline{(C\times D)} \neq \emptyset$, então $(A\times B)\cap\overline{(C\times D)} = (A\times B)\cap(\overline{C}\times\overline{D}) \neq \emptyset$ se, e somente se $A\cap\overline{C}\neq\emptyset$ e $B\cap\overline{D}\neq\emptyset$. Isso implica $A\subset\overline{C}$ e $B\subset\overline{D}$, além de $\dim A < \dim C$ e $\dim B < \dim D$. Portanto, $A\times B\subset\overline{C\times D}$ e $\dim A\times B < \dim C\times D$.

Segue dessa observação que a dimensão de $X\times Y$ é igual ao sup das dimensões dos produtos de estratos de estratificações finitas e semialgébricas de X e Y. Porém, a dimensão do produto de duas variedades é igual ao produto das suas dimensões, e como as estratificações são finitas, podemos tomar $A\in\mathscr{S}_1$ e $B\in\mathscr{S}_2$ com $\dim X = \dim A$ e $\dim B = \dim Y$. Então $\dim X\times Y = \dim A\times\dim B = \dim A\times \mathrm{B} = \dim X\cdot\dim Y$

(iii) Seja $\mathscr{S}$ estratificação de $\mathbb{R}^n$ compatível com X. Como $X = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, com S_i estrato de $\mathscr{S}$, temos $\overline{X} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i}$, onde $\overline{S_i}$ é obtido relaxando as desigualdades. Considerando $\leq$ ($\geq$) por $<$ ou $=$ ($>$ ou $=$) e desenvolvendo as interseções, obtemos que $\overline{S_i}$ pode ser escrito como união de estratos A de $\mathscr{S}$. Pela segunda propriedade de uma estratificação, a dimensão de cada um destes estratos de $\mathscr{S}$ é menor que a dimensão de S_i, portanto os estratos que aparecem ao desenvolver a interseção têm todos dimensão menor do que a de S_i, e logo $\dim\overline{S_i} = \dim S_i$ para cada $i = 1,\ldots,k$, e portanto $\dim X = \dim\overline{X}$.

(iv) Dividiremos a demonstração em duas etapas:

Afirmação 1: Se $A\subset\mathbb{R}^{n+k}$ é um conjunto semialgébrico, e $\pi:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n$ é a projeção natural, então $\dim(\pi(A))\leq\dim(A)$. Se a restrição de π à A é injetiva, então $\dim(\pi(A)) = \dim(A)$.

Demonstração da Afirmação 1: Faremos indução em k. Se $k=1$, dividimos em casos: Primeiro, se A é um estrato do tipo $\mathscr{G}$ ou $\mathscr{F}$, a conclusão segue do Corolário 3.3.1.. Se A é um conjunto semialgébrico, então como A pode ser escrito como união finita de estratos $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$, e nestes vale $\dim E_i \geq \dim\pi(E_i)$, então pelo item (i) e o argumento anterior vale o resultado.

Suponha agora que temos $\pi : \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^n$. Podemos escrevê-la como a composição de $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{n+k}$ com $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$. Se $A \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$, então $\dim \pi_1(A) < \dim(A)$ pelo caso inicial da indução, e $\dim \pi_2(\pi_1(A)) < \dim(\pi_1(A))$ pela hipótese de indução.

Afirmação 2: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico e $f : S \to \mathbb{R}^k$ uma função semialgébrica. Então $\dim f(S) \leq \dim S$, e se f é injetiva, então $\dim S = \dim f(S)$.

Demonstração da Afirmação 2: Seja $A = \text{graph}(f) \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Como a projeção $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ restrita à A é uma bijeção, da afirmação anterior segue que $\dim A = \dim S$. Se $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$, então $\dim A \geq \dim \pi_2(A) = \dim f(S)$. Se f é injetiva, π_2 é uma bijeção entre A e S e segue que $\dim S = \dim f(S)$.

$\square$

Observação 3.4.1. Uma outra prova do item (iv), utilizando conceitos de topologia diferencial é a seguinte: Suponha que $\dim X < \dim f(X)$ e tome $M = \text{graph}(f)$. Seja $\mathscr{S}_{f(X)}$ uma estratificação de $f(X)$, e $N \in \mathscr{S}_{f(X)}$ com $\dim N = \dim f(X)$. Temos que $N = \pi_m(\pi_m^{-1}(N) \cap \text{graph}(f))$. Como $A = \pi_m^{-1}(N) \cap \text{graph}(f))$ é semialgébrico, existe estratificação $\mathscr{S}_A = \{S_i\}_{i=1}^k$. Como graph$(f)$ tem dimensão $\dim X$, $\dim A \leq \dim X$. Tome $\{S_{i_j}\}_{j=1,\dots,q} \subset \mathscr{S}_A$ com $\pi(\bigcup_{j=1}^{q} S_{i_j}) = N$. Como a projeção é uma submersão, $\dim S_{i_j} \geq \dim \pi(S_{i_j})$, portanto cada $\pi(S_{i_j})$ tem medida nula em N, logo $\bigcup_{j=1}^{q} \pi(S_{i_j}) = N$ tem medida nula em N. $\square$

Em particular, temos pela Proposição 3.4.1. que a dimensão de um conjunto semialgébrico é preservada por homeomorfismos semialgébricos.

O Teorema de Estratificação também pode ser usado para dar uma caracterização de conjuntos semialgébricos que são abertos ou fechados em termos de sua representação por polinômios. Mais especificamente, temos

Proposição 3.4.2. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto semialgébrico de um conjunto semialgébrico X. Temos que U é aberto em X se, e somente se existem $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tais que

$$U = \bigcup_{j=1}^{r} \bigcap_{i=1}^{s_j} \{x \in X : P_{i,j} > 0\}.$$

Demonstração: Se U tem a forma indicada na proposição, então ele é aberto. Reciprocamente, podemos assumir que $X = \mathbb{R}^n$, pois um aberto de X é interseção de um aberto de $\mathbb{R}^n$ com X.

Pelo Teorema da estratificação, se $\{P_1,...,P_r\}$ é família de polinômios de uma representação de U, podemos estendê-la a uma família $\{P_1,...,P_k\}$ de forma que os conjuntos elementares formam uma estratificação do $\mathbb{R}^n$.

Então temos que U é união de conjuntos elementares da forma

$$T_i = \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^n : P_j s_j 0\}.$$

Retirando os P_j com s_j sendo $=$, temos

$$T_i' = \bigcap_{j, s_j = '>'} \{x \in \mathbb{R}^n : P_j > 0\}.$$

Seja

$$U' = \bigcup_i T_i'.$$

Afirmação: $U = U'$.

De fato, temos $U \subset U'$ por definição. Para a inclusão oposta, é suficiente mostrar que $T_i' \subset U, \forall i$. Como os polinômios envolvidos na representação de T_i' fazem parte da família estendida de polinômios, T_i' é união de conjuntos elementares E_j da estratificação obtida inicialmente. Mas para cada E_j desse tipo, temos a mesma desigualdade $>$ presente nos polinômios de T_i', que é a mesma que T_i. Como o T_i difere do T_i' pelas condições $P_j = 0$, temos $\overline{E_j} \cap T_i \neq \emptyset$ e logo $T_i \subset \overline{E_j}$, pela segunda propriedade de uma estratificação.

Como $T_i \subset U$ e U é aberto, $E_j \cap U \neq \emptyset$. Como U e U^C são uniões de conjuntos elementares, então $E_j \subset U$, para todo j, logo $T_i' \subset U$. □

Proposição 3.4.3. Se F é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$, então F tem a representação

$$F = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) \geq 0\}.$$

Demonstração: Como F é fechado semialgébrico, $U = F^C$ é aberto semialgébrico, e pela proposição anterior, podemos escrever

$$U = \bigcup_{j=1}^{r} \bigcap_{i=1}^{s_j} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j} > 0\}.$$

Como $F = U^C$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
F = U^C &= \bigcap_{j=1}^{r} \bigcup_{i=1}^{s_j} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) \leq 0\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{s_1} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,1}(x) \leq 0\} \cap \ldots \cap \bigcup_{i=1}^{s_r} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,r}(x) \leq 0\} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{s_1} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,1}(x) \leq 0\} \cap \ldots \cap \bigcup_{i=1}^{s_{r-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,r-1}(x) \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : P_{1,r}(x) \leq 0\} \right) \\
&\cup \left(\bigcup_{i=1}^{s_1} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,1}(x) \leq 0\} \cap \ldots \cap \bigcup_{i=1}^{s_{r-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,r-1}(x) \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : P_{2,r}(x) \leq 0\} \right) \\
&\ldots \\
&\cup \left(\bigcup_{i=1}^{s_1} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,1}(x) \leq 0\} \cap \ldots \cap \bigcup_{i=1}^{s_{r-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j-1}(x) \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : P_{s_r,r}(x) \leq 0\} \right)
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo as interseções para cada s_j, fazendo $Q_{i,j}(x) = -P_{i,j}(x)$ e reordenando os polinômios obtemos uma combinação booleana de desigualdades $Q_{i,j} \geq 0$, o que conclui o Teorema. $\square$

Uma outra aplicação do Teorema da Estratificação é o problema de separação de conjuntos semialgébricos fechados:

Dados conjuntos semialgébricos fechados X e Y de $\mathbb{R}^n$, existe função semialgébrica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $f > 0$ em X e $f < 0$ em Y. Tal problema pode ser resolvido por funções mais simples, como mostram os exemplos a seguir.

1. Se $f(x) = \chi_X(x) - \chi_Y(x)$, onde χ é a função característica, temos que χ é semialgébrica, $f|_X = 1 > 0$ e $f|_Y = -1 < 0$, e portanto satisfaz o problema. Note que f não é contínua.
2. Se $f(x) = d(x,Y) - d(x,X)$, temos que $f|_X > 0$, $f|_Y < 0$, portanto f satisfaz o problema. Em adição, temos que f é contínua.
3. Usando a proposição anterior, podemos sempre encontrar uma solução mais regular para esse problema.

   Como X é fechado, podemos escrever $X = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) \geq 0\}$. Podemos definir

$$
\begin{aligned}
g_i : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \sum_{j=1}^{s} \left\| P_{i,j}(x) \right\| - P_{i,j}(x),
\end{aligned}
$$

e $g := \prod_{i=1}^{s} g_i$, então g é contínua, semialgébrica e $g\,|_X = 0$ e $g\,|_{\mathbb{R}^n \setminus X} > 0$. Podemos definir $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de forma análoga com $h\,|_Y = 0$, e $h\,|_{\mathbb{R}^n \setminus Y} > 0$, e definindo $f = h - g$ podemos resolver o problema.

Iremos mostrar que o problema pode ser resolvido para funções ainda mais bem-comportadas.

Definição 3.4.2. Seja $B(\mathbb{R}^n)$ o menor subanel de $S(\mathbb{R}^n)$ composto das funções que satisfaçam:

1. $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n] \subset B(\mathbb{R}^n)$
2. Toda função de $B(\mathbb{R}^n)$ é contínua.
3. Se $f \in B(\mathbb{R}^n)$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, então $\frac{1}{f} \in B(\mathbb{R}^n)$.
4. Se $f > 0$ em $\mathbb{R}^n$, então $\sqrt{f} \in B(\mathbb{R}^n)$.

Provaremos que toda função de $B(\mathbb{R}^n)$ é analítica. Note que no anel H das funções analíticas reais, valem as quatro propriedades. No subanel F das funções semialgébricas contínuas, valem as quatro propriedades, pois $\sqrt{x}$ é a inversa da função semialgébrica x^2.

Como H é subanel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $G := H \cap S(\mathbb{R}^n)$ é subanel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. G e F são subaneis de $S(\mathbb{R}^n)$, logo $G \cap F$ é subanel de $S(\mathbb{R}^n)$ contendo $B(\mathbb{R}^n)$, portanto toda função em $B(\mathbb{R}^n)$ é analítica.

Proposição 3.4.4. Sejam X e Y conjuntos semialgébricos fechados e disjuntos em $\mathbb{R}^m$. Existe $f \in B(\mathbb{R}^n)$ com $f > 0$ em X e $f < 0$ em Y.

Demonstração: Considere uma representação de $X = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) \geq 0\} = \bigcup_{i=1}^{s} X_i$, além das funções

$$
g_i = \sum_{j=1}^{s} \left\| P_{i,j}(x) \right\| - P_{i,j}(x),
$$

definidas anteriormente.

Note que $g_i\mid_{X_i}\equiv 0$ e $g_i\mid_Y>0$. Pela desigualdade de Lojasiewicz, temos que existem $m\in\mathbb{N}$, $c>0$

$$cr^m\leq g_i \quad \text{em } Y,$$

como $\mathrm{Im}(r)\subset(0,1)$,

$$r^{m+1}(x)<r^m(x),\forall x\in Y.$$

Nomeando $n:=m+1$, temos que $g_i>cr^n$ em Y. Defina

$$k_i'=\sum_{j=1}^{r_i}\left(\sqrt{P_{i,j}^2+\frac{c^2r^{2n}}{(r_i+1)^2}}-P_{i,j}\right).$$

Note que $k_i'>g_i$. De fato, $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Como $g_i\mid_Y>0$, existe $P_{i,j}$ com $P_{i,j}\mid_Y<0$, logo a desigualdade segue de $\sqrt{x}$ ser estritamente crescente em $(0,+\infty)$. Além disso

$$k_i'=\sum_{j=1}^{r_i}\left(\sqrt{P_{i,j}^2+\frac{c^2r^{2n}}{(r_i+1)^2}}-P_{i,j}\right)<\sum_{j=1}^{s}\left\|P_{i,j}(x)\right\|-P_{i,j}(x)+cr^n=g_i+cr^n.$$

Portanto, em X_i, $k_i'<cr^n$. Definindo $k_i:=k_i'-cr^n$, temos $k_i<0$ em X_i e $k_i>0$ em Y.

Consideremos agora $\overline{f}(x)=\sum\limits_i\|k_i\|-k_i$. Temos que $\overline{f}\mid_Y=0$ e $\overline{f}\mid_X>0$. Repetindo o processo acima com uma representação de Y, obtemos uma função h com $h\mid_X=0$ e $h\mid_Y>0$. A função $g:=\overline{f}-h$ pertence à $B(\mathbb{R}^n)$ e é tal que $g\mid_Y<0$ e $g\mid_X>0$. □

Outra consequência do Teorema da estratificação é a existência de versões do Teorema de Sard para conjuntos semialgébricos.

Teorema 3.4.1. Seja $M\subset\mathbb{R}^n$ uma variedade suave que é um conjunto semialgébrico. Se $f:M\to\mathbb{R}$ uma função semialgébrica suave. Sejam $C=\{x\in M:\mathrm{rank}(df_x)=0\}$ e $S=\{t\in\mathbb{R}: t=f(x),x\in C\}$. Então S é um conjunto finito.

Antes da demonstração, faremos uma observação sobre o posto de uma matriz A. A coleção $\{\mathrm{rank}(A)s_jn\}$, onde $s_j\in\{<,=,>\}$ é uma coleção finita de condições polinomiais, pois o determinante é um polinômio $det:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}$.

Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é semialgébrica, cada entrada $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ é semialgébrica e portanto df_x é semialgébrica.

Demonstração: Note que C é semialgébrico pela observação anterior. Portanto, existe estratificação $\{C_1, ..., C_k\}$. Como cada C_i é uma subvariedade analítica semialgébrica, e $\text{rank}(df_x) = 0, \forall x \in C_i$, então $df \mid_{C_i} = 0$, logo $f \mid_{C_i}$ é constante e portanto S é finito. $\square$

Teorema 3.4.2. (Teorema de Morse-Sard para funções semialgébricas) Seja $f : M \to N$ uma função suave semialgébrica entre duas subvariedades semialgébricas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Sejam

$$C = \{x \in M : \text{rank}(df_x) < \dim N\};$$

e

$$S = \{y \in N : y = f(x), x \in C\}.$$

Então S é semialgébrico e $\dim S < \dim N$.

Demonstração: Como C é semialgébrico, existe estratificação $\{C_1, ..., C_k\}$ de C. Visto que $\text{rank}(df)$ é localmente constante, e cada C_i é conexo, então $\text{rank}(df \mid_{C_i})$ é constante para todo $i = 1, ..., k$.

Por Tarski-Seidenberg, $S = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \{f(C_i)\}$ é semialgébrico, e pelo teorema do posto, $\dim f(C_i) < \dim N$ para cada $i = 1, ..., k$, e portanto $\dim S < \dim N$. $\square$

3.5 O Teorema da Triangulação

Nesta seção, estudaremos o comportamento da estratificação de um conjunto semialgébrico compacto. Mostraremos que essa induz neste a estrutura de uma *decomposição celular*. Além disso, provaremos que todo conjunto semialgébrico compacto X admite uma triangulação.

Vamos fixar algumas notações: $\overline{B_d} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$ é a *d-célula fechada padrão*, $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\} = \partial \overline{B_d}$, e $B_d = \overline{B_d} \setminus S^{d-1}$ é a *d-célula aberta padrão*.

Definição 3.5.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto com a topologia induzida. Uma **decomposição celular** de X é uma coleção finita de conjuntos fechados $\{C_j^q : q = 1, ..., k, j \in J_q\}$ satisfazendo:

1. Se $J_q = \{1, ..., h_q\}$, definimos

$$X^{-1} := \emptyset, X^q := \{C_j^p : j \in J_p, p \leq q\}$$

com X^q sendo o **q-esqueleto** da decomposição. Além disso, $F_j^q := C_j^q \cap X^{q-1} = \{C_j^q \cap C_l^p : l \in J_p, p \leq q-1\}$. Os C_j^q satisfazem $X = \bigcup\limits_{q,j} C_j^q$;

2. $(C_i^p \setminus F_i^p) \cap (C_j^q \setminus F_j^q) = \emptyset \iff p = q$ e $i = j$;
3. Para todo C_j^q, existe uma função contínua

$$\Phi_j^q : \overline{B}_q \to X$$

tal que

a) $\Phi_j^q(S^{q-1}) = F_j^q$;

b) $\Phi_j^q \mid_{B_q}$ induz um homeomorfismo sobre $C_j^q \setminus F_j^q$.

A função Φ_j^q é chamada **função característica de** C_j^q, e $C_j^q \setminus F_j^q$ é chamada de q**-célula** da decomposição.

Se X é semialgébrico, todo C_j^q é semialgébrico, todo Φ_j^q é uma função semialgébrica e toda $\Phi_j^q \mid_{B_q}$ é um homeomorfismo semialgébrico, então dizemos que a decomposição celular é semialgébrica.

Uma consequência importante da definição é que

$$\Phi_j^q(\overline{B_d}) = \Phi_j^q(B_d \cup S^{d-1}) = \underbrace{\Phi_j^q(B_d)}_{\cong C_j^q \setminus F_j^q} \cup \underbrace{\Phi_j^q(S^{d-1})}_{=F_j^q} \cong C_j^q.$$

Portanto cada C_j^q é compacto.

Observação 3.5.1. 1. Se X tem uma decomposição celular, então X é compacto. De fato, como cada C_j^q é compacto, X é união finita de compactos, logo compacto.

2. Os conjuntos $C_j^q \setminus F_j^q$ formam uma partição de X em q-células. Note que todo elemento de $\bigcup\limits_{q,j} C_j^q \setminus F_j^q$ pertence à X pois $C_j^q \setminus F_j^q \subset C_j^q$. Por outro lado, se $x \in X$, existe um q e um j tais que $x \in C_j^q$. Se além disso $x \notin F_j^q$, então $x \in \bigcup\limits_{q,j} C_j^q \setminus F_j^q$. Caso $x \in F_j^q$, então existe l tal que $x \in C_l^{q-1}$. Pela finitude da quantidade de C_r^q, e como $X = \bigcup\limits_{q,r} C_r^q$ podemos repetir a análise anterior até obter um r e um k tais que $x \in C_k^r$.

3. X é obtido de $(X \setminus C_j^q) \cup F_j^q$ pela identificação de $\overline{B_q}$ via $\Phi\,|_{S^{q-1}}$.

Exemplo 3.5.1. Seja $X = \overline{B^1} \cup \{(x,0) : x \in [1,2]\}$.

1. Uma decomposição celular para X pode ser obtida tomando $C_1^2 = \overline{B^1}$, $C_1^1 = \mathbb{S}^1$, $C_2^1 = \{(x,0) : x \in [1,2]\}$, $C_1^0 = \{(1,0)\}$ e $C_2^0 = \{(2,0)\}$.
2. Um contraexemplo de decomposição celular é obtido mudando C_2^1 para $\{(x,0) : x \in [0,2]\}$ e $C_1^0 = \{(0,0)\}$ pois $C_1^1 \setminus F_1^1 \cap C_2^1 \setminus F_2^1 \neq \emptyset$.

Definição 3.5.2. Um **simplexo (aberto) de dimensão** k em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma

$$S = S(x_0,...,x_k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^{k} t_i x_i, t_i > 0, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\},$$

onde $x_0,...,x_k$ satisfazem a seguinte condição: se E é um subespaço que contém $x_0,...,x_k$, então $\dim E \geq k$.

Um **simplexo fechado** de dimensão k é um conjunto da forma

$$T = T[x_0,...,x_k] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^{k} t_i x_i, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\},$$

onde os pontos $\{x_0,...,x_k\}$ satisfazem a mesma propriedade citada anteriormente.

Uma **face** de um simplexo $S(a_0,...,a_k)$ de dimensão $h \leq k$ é qualquer simplexo T com $T(b_0,...,b_h)$ e $\{b_0,...,b_h\} \subset \{a_0,...,a_k\}$.

Note que por Tarski-Seidenberg, simplexos são conjuntos semialgébricos. A menos de menção explícita, simplexos são sempre abertos.

Definição 3.5.3. Um **poliedro** (finito) X de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ admitindo uma decomposição simplicial finita, i.e., uma coleção finita de simplexos disjuntos $K = \{S_j\}_{j=1,...,k}$ tais que

1. para todo $i = 1,...,k$, toda face de S_i pertence a K;
2. $X = \bigcup_{i=1}^{K} S_i$.

Usaremos a notação $X = |K|$ para indicar que X é um poliedro.

Definição 3.5.4. Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma **triangulação** de Y é um homeomorfismo $F : Y \to |K|$ para algum poliedro $|K| \subset \mathbb{R}^m$. Se Y é semialgébrico e F é semialgébrica, dizemos que F é uma **triangulação semialgébrica** de Y.

Observação 3.5.2. 1. Qualquer triangulação $F : Y \to |K|$ de um conjunto Y induz uma decomposição celular do mesmo (e semialgébrica se F o for). Provaremos isto mostrando que um poliedro admite uma decomposição celular onde suas células são os simplexos fechados, e transportando-a para o conjunto pela triangulação. Definindo $X^q = \{\overline{S_j}, S_j$ é simplexo de $|K|$ de dimensão $\leq q\}$. A condição (1) da Definição 3.5.1 é imediata. Para a condição (2), note que F_r^q consiste das faces de S_j que por definição são disjuntas. A construção das funções características segue do fato que todo simplexo fechado é homeomorfo à $\overline{B^d}$. Provaremos um fato mais geral, de onde resultarão as funções que procuramos.

Lema 3.5.1. Todo conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto e convexo com interior não-vazio é homeomorfo à $\overline{\mathbb{B}^n}$.

Seguiremos a prova de (BREDON, 1993):

Afirmação 1: *Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto convexo e $0 \in \operatorname{int}(C)$, então toda semi-reta partindo do 0 toca ∂C apenas uma vez.* De fato, suponha que R é uma semi-reta saindo da origem e $p, q \in R \cap C$, ambos diferentes de 0. Além disso, suponha que $\|q\| > \|p\|$. Como $0 \in \operatorname{int}(C)$, existe $\delta > 0$ com $B(0,\delta) \subset C$. Se S é o cone com vértice em q sobre $B(0,\delta)$, como C é conexo, $S \subset C$. Por fim, como p pertence à R, p pertence à S. $\square$

Afirmação 2: *Seja C um conjunto compacto e convexo com $0 \in \operatorname{int}(C)$. Então a função $f : \partial C \to \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$ é um homeomorfismo.* De fato, como f é a composição da inclusão $\partial C \to \mathbb{R}^n$ com a função $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$, ela é contínua. Pela afirmação 1, f é injetiva. Afirmamos que f é sobrejetiva. De fato, suponha por absurdo que não seja. Então existe $a \in S^{n-1}$ que não é imagem de nenhum ponto de ∂C. A semi-reta $\Gamma = \{xa : x \leq 0\}$ intersecta ∂C, e como $0 \in \operatorname{int} C$, então $\Gamma \cap C$ é um segmento no $\mathbb{R}^n$. Como C é limitado, então $\{x > 0 : xa \in \Gamma \cap C\}$ tem supremo. Denotamos este supremo por L. Note que La pertence à ∂C, por construção. Porém, $g(La) = a$, o que é um absurdo pois assumimos que a não pertence à imagem de g. Por fim, como ela é uma bijeção contínua definida em um conjunto compacto com imagem em um espaço de Hausdorff, ela é homeomorfismo. $\square$

Afirmação 3: *Um conjunto convexo compacto em $\mathbb{R}^n$ com interior não-vazio é homeomorfo à $\overline{B^d}$. Além disso, ∂C é homeomorfo à S^{n-1}.* De fato, a menos de uma translação podemos assumir que $0 \in \operatorname{int}(C)$. Definimos a função $k : \overline{B^n} \to C$ dada por

$x \mapsto \|x\| f^{-1}\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ para $x \neq 0$ e $k(0) = 0$. Se $x \neq 0$, k é contínua por ser composição de funções contínuas. Afirmamos que k é sobrejetiva. De fato, todo ponto de y de C pertence ao segmento entre 0 e y, ao qual, pela Afirmação 1, se estende ao bordo o intersectando em apenas um ponto $f^{-1}(a)$. Portanto, podemos escrever $y = tf^{-1}(a)$. Dessa forma, podemos escolher $x \in D$ com $\|x\| = t$ e $a = \dfrac{x}{\|x\|}$. Como f^{-1} é bijeção, k é injeção. Como f^{-1} é homeomorfismo e a norma é contínua, k é uma função contínua em $D \setminus \{0\}$. Para concluir a continuidade da função em 0, basta notar que como C é compacto, então existe $M > 0$ tal que $\|k(x)\| \leq M\|x\|$, de onde concluímos que $\lim_{x\to 0} k(x) = k(0) = 0$. Como k é contínua e tem domínio compacto, ela é homeomorfismo. $\square$

Podemos utilizar as funções k obtidas na demonstração como funções características, pela Afirmação 3. Observe que no caso da decomposição simplicial, como simplexos são conjuntos semialgébricos, as funções são semialgébricas, e portanto temos uma decomposição celular semialgébrica de $|K|$, logo, de X.

2. Note que uma decomposição simplicial de um poliedro $|K|$ induz uma estratificação no mesmo. Para ver isto, note que todo simplexo S é uma subvariedade analítica do $\mathbb{R}^n$. De fato, se $S = S(v_0,...,v_d)$ é d-simplexo no $\mathbb{R}^n$, tomemos o $d-$subespaço afim V gerado pelos seus vértices, e a função inclusão $i : V \to \mathbb{R}^n$. Note que V é isomorfo à $\mathbb{R}^k$ e i é afim, logo analítica, e como S é aberto em $V \cong \mathbb{R}^k$, S é uma $k-$subvariedade analítica de $\mathbb{R}^n$.

   Para a segunda, se $S_i(x_0,...,x_k)$ e $S_j(y_0,...,y_h)$ são simplexos com $S_i \cap \overline{S_j} \neq \emptyset$ então como S_i e S_j são disjuntos, $\{x_0,...,x_k\} \subset \{y_0,...,y_h\}$ de forma que S_i é face de S_j. Além disso, $\dim S_i < \dim S_j$.

Proposição 3.5.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto semialgébrico, e $\mathscr{S}$ uma estratificação de X. Então $\mathscr{S}$ induz uma decomposição celular de X na qual a fronteira de cada célula é uma união finita de células de dimensão inferior.

Demonstração: Provaremos mais do que isto. Na verdade, a decomposição celular de X faz parte de um "sistema" de decomposições celulares para $X_j = \pi_j \circ ... \circ \pi_{n-1}(X)$, onde $\pi_j : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}^{j-1}$ é a projeção natural, e além disso, as funções características fazem o seguinte diagrama comutar para todo j

$$\begin{tikzcd} B_q \arrow[r, "\Phi_r^q"] \arrow[d, "\pi_{j-1}"] & C_r^q \arrow[d, "\pi_{j-1}"] \\ B_{q-1} \arrow[r, "\Phi_r^{q-1}"] & C_r^{q-1} \end{tikzcd}$$

Definimos $X^q := \{\overline{A} : A \in \mathscr{S} \text{ e } \dim A \leq q\}$.

Para mostrar que isso nos dá uma decomposição celular, note primeiro que temos por definição que a união dos fechos de todos estratos é igual à X, pois uma estratificação particiona X.

Para a segunda condição, se A_r^k é estrato de dimensão k note que $F_r^q = \{\overline{A_r^q} \cap \overline{A_l^p} : \overline{A_l^p}, l \in J_p, p \leq q-1\}$. Provaremos que

$$\overline{A^q} \setminus \bigcup_{p,i} (\overline{A^q} \cap \overline{A_i^p}) = A^q.$$

Se $x \in \overline{A^q} \setminus \bigcup_{p,i} (\overline{A^q} \cap \overline{A_i^p})$, então $x \in \overline{A^q}$ mas $x \notin \overline{A^q} \cap \overline{A_i^p}$ para todos $p < q$, $i \in J_p$. Isso implica que $x \notin \overline{A_i^p}$ para todo $p < q$ e $i \in J_p$. Se $x \in \partial \overline{A^q}$, então existe um estrato B^k com $x \in B^k$. Porém isso implica que $B^k \cap \overline{A^q} \neq \emptyset$ e portanto $\dim B^q < \dim A^q = q$, o que é absurdo, pois se $x \in B^k \cap \overline{A^q}$ então $x \in \overline{B^k} \cap \overline{A^q}$. Portanto, $x \in A^q$.

Se $x \notin \overline{A^q} \setminus \bigcup_{p,i} (\overline{A^q} \cap \overline{A_i^p})$, então $x \notin \overline{A^q}$ ou $x \in \bigcup_{p,i} (\overline{A^q} \cap \overline{A_i^p})$. No segundo caso, se $x \in A^q$ então existem p, i com $x \in A^q \cap \overline{A_i^p}$ e portanto $\dim A^q < \dim A_i^p$, o que é absurdo. Portanto em ambos os casos $x \notin A^q$ e a segunda condição de uma decomposição celular segue do fato de estratos serem uma partição de X.

Nos resta construir as funções características. Para tal, faremos a construção indutivamente em j.

Para o caso $j = 1$, note que os estratos de X_1 serão intervalos abertos ou pontos. Logo, para $A = (a, b)$ estrato de dimensão 1, sabemos que $t \mapsto (1-t)a + tb$ é homeomorfismo semialgébrico entre $(0, 1)$ e A. Podemos estendê-lo para $[0, 1]$ definindo a função no 0 e no 1 sendo a e b respectivamente.

Suponha que as funções características Φ tenham sido definidas para a decomposição celular de X_{j-1}. Seja B um estrato de X_j de tipo $\mathscr{F}$ sobre $A = \pi_{j-1}(B)$. Podemos escrever

$$B = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : f_2(x) < y < f_1(x)\}.$$

Sejam $\bar{f}_1$ e $\bar{f}_2$ as extensões de f_1 e f_2 obtidas pela afirmação 4 do teorema da estratificação e usaremos F_D é usado para indicar F_r^q com $C_r^q = D$). Identificando $[0,1]^d$ com $\overline{B_d}$, definimos a função

$$\Phi_{\overline{B}} : [0,1]^{d-1} \times [0,1] \to \overline{B}$$
$$(u,v) \mapsto (\Phi_{\overline{A}}(u), (1-v)\bar{f}_1(u) + v\bar{f}_2(u))$$

Se $(u,v) \in \partial[0,1]^d$, então temos dois casos:

- Se $u \in \partial[0,1]^{d-1}$, $\Phi_{\overline{B}}(u,v) \notin B$ pra todo ponto $v \in [0,1]$ pois $\Phi_{\overline{A}}(u) \in F_A$. Então para todo $\Phi_{\overline{B}}(u,v)$, seja C um estrato ao qual ele pertence. Como pela afirmação 3 do Teorema da Estratificação, $\bar{f}_1(u)$ e $\bar{f}_2(u)$ são limites de sequências de pontos de $\mathrm{graph}(f_1)$ e $\mathrm{graph}(f_2)$, $(1-v)\bar{f}_1(u) + v\bar{f}_2(u)$ é limite de pontos de B. Então $C \cap \overline{B} \neq \emptyset$ e portanto $\overline{B} \cap \overline{C} \neq \emptyset$, logo $\Phi_{\overline{B}}(u,v) \in F_B$.
- Caso $v \in \{0,1\}$, então $\Phi_{\overline{B}}(u,v)$ pertence ao gráfico de f_1 ou f_2 e logo pertence à F_B.

Portanto $\Phi_{\overline{B}}(S^{d-1}) = F_B$. Além disso, $\Phi_{\overline{B}} |_{B_d}$ é homeomorfismo semialgébrico pois as funções coordenadas são homeomorfismos semialgébricos.

No caso de B ser um estrato do tipo $\mathscr{G}$ sobre A, definimos

$$\Phi_{\overline{B}} : [0,1]^d \to \overline{B}$$
$$u \mapsto (\Phi_{\overline{A}}(u), \bar{f}(\Phi_{\overline{A}}(u)))$$

Se $u \in \partial[0,1]^d$, então como $\Phi_{\overline{A}}(u) \in \partial\overline{A}$, $\bar{f}(\Phi_{\overline{A}}(u))$ pertence à fronteira de B pela afirmação 3 do Teorema da estratificação. Seja D estrato contendo $\bar{f}(\Phi_{\overline{A}}(u))$. Como $D \cap \overline{B} \neq \emptyset$, então $\overline{D} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ e $\dim D <$ B. Portanto $\Phi_{\overline{B}}(S^d) = F_B$.

Além disso, $\Phi_{\overline{B}}$ é um homeomorfismo de $[0,1]^d$ em $\overline{B}$ pois $\Phi_{\overline{A}}$ é homeomorfismo entre $[0,1]^d$ e $\overline{A}$.

A comutatividade dos diagramas segue da construção de $\Phi_{\overline{B}}$. $\square$

Observação 3.5.3. Podemos obter uma versão do teorema anterior para o caso $Y \subset X$, onde Y é semialgébrico e compacto. Para isto basta estratificarmos o $\mathbb{R}^n$ utilizando a família de polinômios de uma representação de X junto com uma família de polinômios de uma representação de Y, e seguir a prova.

Demonstraremos agora o Teorema da Triangulação. Antes, porém, precisamos da definição de subdivisão baricêntrica de um poliedro:

Definição 3.5.5. Dado um simplexo $S(x_0,...,x_k)$, o seu **baricentro** é o ponto de S definido pelas coordenadas $\frac{x_0+...+x_k}{k}$, ou seja, é o ponto b_S de S com todas as coordenadas iguais à $\frac{1}{k}$. Note que o baricentro de um 0-simplexo é o próprio 0-simplexo. A **primeira subdivisão baricêntrica** de S é um poliedro definido pelos vértices $\{b_{S_1},...,,b_{S_k}\}$, onde b_{S_i} é o baricentro de cada uma das faces de S. A coleção de vértices $\{b_{S_{i_1}},...,b_{S_{i_k}}\}$ forma uma face da subdivisão baricêntrica se S_{i_r} é face de $S_{i_{r+1}}$.

A subdivisão baricêntrica pode ser estendida para poliedros e iterada indutivamente. Mais detalhes podem ser encontrados em (CROOM, 1978).

Teorema 3.5.1. (Triangulação) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico compacto, e $\{W_1,...,W_r\}$ uma partição finita e semialgébrica de X. Existe uma triangulação semialgébrica $F : X \to |K|$ satisfazendo:

1. Cada W_i é união de $F^{-1}(S_j)$, com $S_j \in K$;
2. $\{F^{-1}(S_j)\}_{j=1,...,k}$ é uma estratificação de X;
3. Para todo j, $F_| : F^{-1}(S_j) \mapsto S_j$ é isomorfismo de variedades analíticas.

Demonstração: Procedemos por indução em n. Aplicamos o algoritmo da estratificação-separação na família de polinômios constituida dos polinômios de uma representação de X e de cada W_i. Com isso, obtemos uma estratificação $\mathscr{S} = \{E_i\}_{i=1,..,r}$ de X na qual cada W_i é união de estratos.

Pela Proposição 3.5.1., temos que uma estratificação de X induz uma decomposição celular em X_j, para todo $j = 1,...,n$, compatível com as projeções.

Iremos construir uma triangulação $F_j : X_j \to |K_j|$ satisfazendo as seguintes:

1. $|K_j| \subset \mathbb{R}^j$ e a triangulação induz uma subdivisão da decomposição celular de X_j;
2. Satisfaz os itens (2) e (3) do enunciado do Teorema (relativa à X_j);
3. Os F_j são compatíveis com as projeções, ou seja, o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "F_j"] \arrow[d, "\pi_{j-1}"] & {|K_j|} \arrow[d, "\pi_{j-1}"] \\ X_{j-1} \arrow[r, "F_{j-1}"] & {|K_{j-1}|} \end{tikzcd}$$

A prova será por indução em j. Para $j = 1$, o teorema segue da estrutura dos conjuntos semialgébricos na reta.

Suponha que já tenhamos construído $F_1, ..., F_{j-1}$, e seja $K_{j-1} = \{T_1, ..., T_h\}$. Para todo i, seja $T_i' = F_{j-1}^{-1}(T_i)$. Dizemos que T_i' é face de T_j' se T_i é face de T_j. Como $\{T_i'\}$ induz uma subdivisão da decomposição celular de X_{j-1}, podemos assumir que $\pi^{-1}(T_i') \cap X_j$ é estratificado por conjuntos do tipo $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ sobre T_i'. Podemos assumir que vale o seguinte:

Afirmação: Seja $B_u = \{(x,y) \in T_i' \times \mathbb{R} : y = f_u(x)\}$ com $u = 1,2$ estratos do tipo $\mathscr{G}$ sobre T_i'. Seja $\bar{f}_u : \overline{T_i'} \to \mathbb{R}$ as extensões dadas pela afirmação (4) do Teorema da Estratificação. Então existe um vértice de $\overline{T_i'}$ tal que $f_1(v_0) \neq f_2(v_0)$.

Se acontecer de para todo vértice v_i de T_i', $f_1(v_i) = f_2(v_i)$, então podemos usar a primeira subdivisão baricêntrica de T_i no seu lugar. O baricêntro v_0 de T_i é um vértice de cada simplexo da subdivisão, e como ele pertence ao interior de T_i, $f_1(v_0) \neq f_2(v_0)$.

Fixe uma ordem nos vértices de X_{j-1} e seja T um simplexo de dimensão d de $|K_{j-1}|$. Como X_j é compacto, podemos escrever

$$\pi^{-1}(T') \cap X_j = \bigcup_{r=1}^{k} E_r,$$

onde $E_i = \{(x,y) \in T' \times \mathbb{R} : f_r(x) \leq y \leq f_{r+1}(x)\}$ onde $f_r < f_{r+1}, \forall r \in 1,...,k$. Para simplificar a notação, escolhamos um E_r e denotemos $E = E_r$, $g = f_r$ e $f = f_{r+1}$.

Sejam $a_i = \bar{g}(v_i)$ e $b_i = \bar{f}(v_i)$, para cada $i = 0,...,d$. Definimos

$$\begin{aligned}
&F_E' : E \to \mathbb{R}^j \\
&(x,y) \mapsto (F_{j-1}(x), H(x,y)) \\
&H(x,y) = \left[\frac{y - g(x)}{f(x) - g(x)}\right] \sum_{i=0}^{d} t_i(x) b_i + \left[\frac{f(x) - y}{f(x) - g(x)}\right] \sum_{i=0}^{d} t_i(x) a_i,
\end{aligned}$$

onde os $t_i(x)$ dependem de x da seguinte forma: se $x \in T_i'$, os t_i são as coordenadas de $F_{j-1}(x)$ em T_i. Esta função leva o segmento entre os pontos $[(x,g(x)),(x,y)]$ onde $g(x) < y < f(x)$ ao segmento correspondente entre os simplexos determinados pelos gráficos de g e f. Em particular, $H(x,y)$ leva o gráfico de g sobre o simplexo $\sum_{i=0}^{d} t_i(v_i, b_i)$ e o gráfico de f sobre o simplexo $\sum_{i=0}^{d} t_i(v_i, a_i)$. Além disso, ela leva o segmento $[(x,g(x)),(x,f(x))]$ linearmente ao segmento

$\left[\sum_{i=0}^{d} t_i(x)(v_i,b_i), \sum_{i=0}^{d} t_i(x)(v_i,a_i)\right]$.

A inversa de H é dada por uma função que leva o segmento $[(x,\sum_{i=1}^{k} t_i(x)a_i),(x,y)]$ no segmento correspondente entre os estratos determinados pelos simplexos, ou seja:

$$H^{-1}(x,y) = \left[\frac{y - \pi_2\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(x)b_i\right)}{\pi_2\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(x)a_i\right) - \pi_2\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(x)b_i\right)}\right] g(x) +$$

$$\left[\frac{\pi_2\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(x)a_i\right) - y}{\pi_2\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(x)a_i\right) - \pi_2\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(x)b_i\right)}\right] f(x)$$

onde y está entre $\sum_{i=1}^{k} t_i(x)a_i$ e $\sum_{i=1}^{k} t_i(x)b_i$, com π_2 sendo a projeção natural na última coordenada.

Por fim, subdividimos $F_E(E)$ considerando todos os $(d+1)-$simplexos de $\mathbb{R}^j$ da forma $(v_0,a_0),...,(v_m,a_m),(v_m,b_m)),...,(v_d,b_d))$ onde $(v_m,a_m) \neq (v_m,b_m)$ e denotemos K_E o conjunto dos simplexos de E obtidos. Dessa forma, obtemos uma triangulação $F_E : E \to K_E$.

Se repetirmos o processo para $E' = \{x \in T' \times \mathbb{R} : f_{i+1} \leq y \leq f_{i+2}(x)\}$ e definirmos $F_{E'}$ de forma análoga, F_E e $F_{E'}$ coincidem no gráfico de f_{i+1}, que é um conjunto fechado, e portanto podemos estender F_E ao longo da faixa sobre T'.

Para estendermos a triangulação para o X_j inteiro, basta mostrarmos que podemos estendê-la para uma face S' de X_{j-1}. Seguindo a discussão anterior, $\pi_{j-1}(S') \cap X_j$ é estratificado por conjuntos do tipo $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ sobre S'. Podemos então escrever

$$\pi_{j-1}^{-1}(S') \cap X_j = \bigcup_{i=0}^{r} D_i,$$

onde $D_i = \{(x,y) \in S' \times \mathbb{R} : h_i(x) \leq y \leq h_{i+1}(x)\}$ onde $h_i < h_{i+1}, \forall i \in 1,...,r$. Escolhamos um D_i e notemos $D_i = D$, $h_i = u$ e $h_{i+1} = h$, $a_i' = \bar{u}(v_i)$ e $b_i = \bar{h}(v_i)$. Definimos $G_D'(x,y)$ de forma análoga à $F_E'(x,y)$, ou seja

$$
\begin{aligned}
G'_D &: D \to \mathbb{R}^n \\
&(x,y) \mapsto (F_{j-1}(x), K(x,y)) \\
K(x,y) &= \left[\frac{h(x)-y}{h(x)-u(x)}\right] \sum_{i=0}^{l} t'_i(x) b'_i + \left[\frac{y-u(x)}{h(x)-u(x)}\right] \sum_{i=0}^{l} t'_i(x) a'_i
\end{aligned}
$$

os t'_i dependem de $x \in S'$ de forma análoga aos t_i.

Note que, se $D' = \text{graph}(w)$ é estrato sobre S', como $S' \subset \partial T'$, então pela Afirmação 5 do Teorema da Estratificação, existe $j' \in \{1,\ldots,k\}$ com $\bar{f}_{j'} \mid_{S'} = w$. Temos agora dois casos a avaliar para funções f e g do algoritmo de estratificação-separação sobre T':

1. Se $\bar{f}(x) \neq \bar{g}(x)$ em S', então f e g se estendem continuamente à h_i e h_j distintas e portanto $H(x,y)$ pode ser estendida continuamente à $K(x,y)$ estendendo f e g na fórmula de $H(x,y)$. Além, disso, note que se x tende ao bordo de T'_i, $t_i(x) \mapsto 0$, onde t_i não é índice dos vértices de S';
2. Se $\bar{f}(x) = \bar{g}(x) = w(x)$ em S', seja (x_n, y_n) sequência de E convergindo para $(x, w(x))$. Como $f(x_n) \leq y_n \leq g(x_n)$ para todo n, e $\lim\limits_n f(x_n) = \lim\limits_n g(x_n) = w(x)$, então $y_n \to w(x)$. Portanto $H(x,y)$ se estende à $K(x,y)$ sobre S'.

Por construção, todo $d-$simplexo de X_j é face de um $(d+1)-$simplexo. Portanto F_j é uma triangulação semialgébrica.

Note que por construção $H(x,y)$ é analítica em cada estrato de X, pois podemos tomar as funções obtidas do Teorema da Estratificação como analíticas. O mesmo vale para sua inversa pois simplexos são subvariedades analíticas. Segue desse fato que a imagem inversa de cada simplexo obtido na subdivisão da imagem por F_j é uma subvariedade analítica do $\mathbb{R}^n$, e por ser homeomorfismo semialgébrico, os conjuntos obtidos satisfazem a propriedade de fronteira de uma estratificação. Portanto, vale o item (2). Como por indução, F_{j-1} é isomorfismo de variedades analíticas quando restrito aos simplexos de $|K_{j-1}|$, e concluímos que $F_j \mid_{S_i}$ é isomorfismo de variedades analíticas. $\square$

Teorema 3.5.2. Seja $f : V \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ uma função semialgébrica contínua sobre Y, onde V é compacto. Considere $X = \text{graph}(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Se $s = m+n$, seja $(x,y) = (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ com

$$\mathbb{R}^s \supseteq \mathbb{R}^{s-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\} \supseteq \ldots \supseteq \mathbb{R}^m.$$

e $\pi_{j-1} : \mathbb{R}^{j+1} \to \mathbb{R}^j$ com $j = s-1, ..., m$ as projeções naturais. Assuma que, para todo j, os polinômios envolvidos numa representação de $X_j = \pi_j \circ \pi_{j-1} \circ ... \circ \pi_1(X)$ tem coeficientes constantes em relação à variável Y_j. Existem triangulações $F : V \to |K|$, $G : Y \to |H|$ e uma aplicação simplicial $f' : |K| \to |H|$ tal que

1. F e G satisfazem as condições do Teorema da Triangulação;
2. o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & |K| \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xrightarrow{G} & |H|. \end{array}$$

Demonstração: Seja X o gráfico de f com as coordenadas (x,y) permutadas. Pelo Teorema da Triangulação, existe $F : X \to |K|$ triangulação compatível com as projeções π_j. Como $Y = \pi_n(X)$, Y herda uma triangulação $|H| = \pi_n(|K|)$ de X, na qual pela construção do Teorema 3.5.2., se x pertence a um simplexo T de $|K|$, $\pi'_n(x)$ pertence ao simplexo $\pi'_n(T)$, e portanto π'_n é simplicial.

Para obter a triangulação de V, note que como X_j tem uma representação dada por polinômios com coeficiente líder constante em Y_j, podemos aplicar o algoritmo de estratificação-separação fazendo a mudança de variáveis dada pelo ponto $(a_1, ..., a_{m+j-1}, a_{m+j}) = (0, ..., 0, 1)$ em cada $j = n-m, ..., m$. Dessa forma, a projeção $\pi_2 : \mathbb{R}^{m+j} \to \mathbb{R}^j$ induz uma representação de V dada pelos polinômios $P(x,Y)$ obtidos pelo processo avaliados em algum $x \in \mathbb{R}^m$.

Dessa forma, V pode ser estratificado por conjuntos do tipo $A = \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in \mathbb{R}^n : P_i(x,y)s_i 0\}$ onde P_i está avaliado em $x \in \mathbb{R}^m$. Porém note que se $A' = \bigcap_{i=1}^{k} \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n} : P_i(x,y)s_i 0\}$, então $A = \pi_2(A')$, então os estratos de X e de V estão em correspondência por π_2.

Como π_2 é homeomorfismo, os estratos de X e V tem a mesma dimensão. Além disso, estratos são subvariedades analíticas, e logo π_2 restrita a eles é analítica, e portanto um difeomorfismo analítico. Portanto valem as conclusões (2) e (3) do Teorema da triangulação para a triangulação induzida em V.

Por fim, note que o diagrama a seguir é comutativo, pois os diagramas que o compõem o são:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi_2^{-1}"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_n"] & {|K|} \arrow[d, "\pi'_n"] \\
& Y \arrow[r, "G"] & {|H|.}
\end{tikzcd}$$

□

Observação 3.5.4. Seja

$$h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}.$$

h é um homeomorfismo semialgébrico de $\mathbb{R}^m$ em B_m. Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto semialgébrico, e denote $X' = \overline{h(X)}$. Pelo Teorema da Triangulação, existe uma triangulação de X' relativa à partição $\{h(X), \overline{h(X)} \setminus h(X)\}$, onde $h(X)$ é união de simplexos.

O Teorema da Triangulação nos permite fazer uma prova simples do seguinte:

Lema 3.5.2 (Lema da Seleção da Curva.)**.** Seja X um subconjunto semialgébrico do $\mathbb{R}^n$, e seja $x_0 \in \overline{X}$. Então existe uma curva contínua e semialgébrica $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que

(i) $f(0) = x_0$;

(ii) $f\mid_{]0,1]}$ é análitica;

(iii) $f(]0,1]) \subset X$.

Demonstração: Seja $B(x_0,1)$ a bola aberta centrada em x_0 e de raio 1. Como o resultado do teorema é local, podemos substituir X por $X \cap B(x_0,1)$. Dessa forma, podemos assumir que $\overline{X}$ é compacto. Aplicando o teorema da triangulação para $\overline{X}$ relativo à partição $\{x_0, \overline{X} \setminus (X \cup \{x_0\}), X \setminus \{x_0\}\}$, obtemos uma triangulação de $\overline{X}$ onde cada elemento das partição é união de simplexos. Dessa forma, existe um simplexo T em $|K|$ com $F(X \setminus \{x_0\}) \subset T$ e $F(x_0)$ é vértice de T. Definimos $f' : [0,1] \to |K|$ como sendo o segmento ligando $F(x_0)$ e o baricentro da subdivisão baricêntrica de T. Dessa forma, f' satisfaz

(i) $f'(0) = x_0$;

(ii) $f\mid_{]0,1]}$ é análitica;

(iii) $f(]0,1]) \subset T$.

Por fim, a função definida por $f := F^{-1} \circ f'$ satisfaz o pedido. □

4 O TEOREMA DA TRIVIALIDADE LOCAL E APLICAÇÕES

Teorema 4.0.1. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e semialgébrica entre dois conjuntos semialgébricos, e $\{X_1, ..., X_h\}$ uma partição semialgébrica de X.

1. Então existem
   a) uma estratificação $\{Y_1, ..., Y_k\}$ de Y;
   b) uma coleção de conjuntos semialgébricos $\{F_i\}$ junto com partições $\{F_{ih}\}_h$ semialgébricas de cada F_i;
   c) e homeomorfismos semialgébricos $g_i : F_i' = f^{-1}(Y_i) \to Y_i \times F_i$ tais que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} F_i' \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f"] & Y_i \times F_i \arrow[dl, "\pi"] \\ Y_i & \end{tikzcd}$$

   ou seja, f é *semialgebricamente trivial sobre* Y_i. Além disso, $g_i(F_i' \cap X_j) = Y_i \times F_{ij}$ para todos i, j.

2. Em particular, f é semialgebricamente trivial sobre cada componente conexa do conjunto semialgébrico aberto $Y \setminus Y'$, onde Y' é a união de estratos Y_j tais que $\dim Y_j < \dim Y$.

Note que segue do item (c) que podemos tomar F_i como $f^{-1}(c)$, para qualquer $c \in Y_i$. De fato, se c é ponto de Y_i, o diagrama nos dá

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(c) \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f"] & \{c\} \times F_i \arrow[dl, "\pi"] \\ \{c\} & \end{tikzcd}$$

de forma que $f^{-1}(c) \cong \{c\} \times F_i \cong F_i$. A mesma análise feita com outro ponto nos dá um homeomorfismo de F_i com outra fibra. Além disso, pela segunda parte do item (c), temos $g_i(f^{-1}(c) \cap X_j) = \{c\} \times F_{ij}$, donde podemos assumir que $F_{ij} = f^{-1}(c) \cap X_j$. Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em (BENEDETTI; RISLER, 1990), ou em (BOCHNAK *et al.*, 1998).

Uma aplicação importante do Teorema da Trivialidade Local é a finitude de tipos topológicos de conjuntos semialgébricos. Mais especificamente, seja $X = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n :$

$P_{i,j}(x)s_{i,j}0\}$ um conjunto semialgébrico. Denotando uma representação por (R), e associando a cada (R) os números

- $P(R) = \sum_{i=1}^{s} r_i$;
- $C(R) = \sup_{i,j} \deg P_{i,j}$.

Podemos definir o conjunto

$$S(n,r,s) = \{X \subset \mathbb{R}^n : X \text{ é conjunto semialgébrico com } P(R) \leq r, C(R) \leq s\}.$$

Teorema 4.0.2. (Finitude Topológica) Para todo $(n,r,s) \in \mathbb{N}^3$, existem $W_1,...,W_k$ em $S(n,r,s)$ de forma que

1. W_i não é semialgebricamente homeomorfo à W_j, para $i \neq j$;
2. Todo $W \in S(n,r,s)$ é semialgebricamente homeomorfo a algum W_i dessa lista.

Demonstração: Nesta prova a idéia é "parametrizar"$S(n,r,s)$ por $\mathbb{R}^N$ para algum $N \in \mathbb{N}$, e então utilizar o teorema da trivialidade local.

Seja $\mathbb{R}_s[X_1,...,X_n] \subset \mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ o subconjunto dos polinomios de grau no máximo s. Podemos identificar $\mathbb{R}_s[X_1,...,X_n]$ com $\mathbb{R}^N$, onde N depende de n e s, de forma análoga a identificação de $\mathbb{R}_n[X]$ com $\mathbb{R}^n$.

Sejam $\mathscr{R} = \underbrace{\mathbb{R}^N \times ... \times \mathbb{R}^N}_{r\text{vezes}}$ e $\mathscr{S} = \underbrace{\{<,=,>\} \times ... \times \{<,=,>\}}_{r\text{vezes}}$, e $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ e $q : \mathbb{R}^n \times \mathscr{R} \to \mathbb{R}^n$ as projeções naturais.

Para cada $t \in \mathscr{S}$, definimos

$$V_t = \{(x, P_1, ..., P_r) \in \mathbb{R}^n \times \mathscr{R} : P_i(x)t_i0\}.$$

Por Tarski-Seidenberg, temos que V_t é semialgébrico.

Definimos

$$\mathscr{V} = \{V : V \text{ pode ser escrito como } V_{t(1)} \cup ... \cup V_{t(k)}, \text{ onde } t(i) \in \mathscr{S}\}.$$

Como $\mathscr{S}$ é finito, $\mathscr{V}$ é finito também.

Podemos escrever todo $W \in S(n,r,s)$ como $q(\pi^{-1}(v_0) \cap V)$ para $v_0 \in \mathscr{R}$ e $V \in \mathscr{V}$. Para ver isto, seja $W = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x)s_{i,j}0\}$ e v_0 o ponto de $\mathscr{R}$ que parametriza os polinomios de uma representação de W. Vamos definir, para cada interseção $\bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x)s_{i,j}0\}$, três conjuntos da forma V_t de forma que a projeção de sua união é igual a esse. Seja $V^1_{t_{(l)}} =$

$\{(x, P_{1,1}, ..., P_{s,r_s}) : P_{i,j}(x) t_{i,j} 0, t_{l,j} = s_{l,j}$ para $j = 1, ..., r_l$, e $t_{i,j} =$ " $>$ " para pares (i,j) com $i = l$ e $j > r_l$ e (i,j) com $j \neq l\}$. Definimos $V^2_{t_{(l)}}$ e $V^3_{t_{(l)}}$ analogamente, trocando $>$ por $=$ no primeiro conjunto e por $<$ no segundo. Dessa forma, temos que

$$\bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) s_{i,j} 0\} = q((V^1_{t_{(l)}} \cup V^2_{t_{(l)}} \cup V^3_{t_{(l)}}) \cap \pi^{-1}(v_0)).$$

Repetindo esse processo para os outros conjuntos de condições polinomiais de W e tomando sua união, obtemos um conjunto V em $\mathscr{V}$ que satisfaz o que desejávamos. Note que, além disso, q é um homeomorfismo de $\pi^{-1}(v_0) \cap V$ em W. De fato, q é sobrejetiva por construção e contínua por ser a restrição de uma projeção. Se $(x, v_0) \neq (y, v_0)$ em $\pi^{-1}(v_0) \cap V$, então $x \neq y$ e portanto $q(x, v_0) \neq q(y, v_0)$, logo q é injetiva e portanto uma bijeção. Além disso, q^{-1} é contínua porque dada uma sequência (x_n) convergindo para x_0, como $q^{-1}(x) = (x, v_0)$, então $q^{-1}(x_n) = (x_n, v_0)$ converge para $q^{-1}(x_0) = (x_0, v_0)$.

Para finalizar a prova, aplicamos o Teorema da Trivialidade Local à projeção natural restrita à cada V de $\mathscr{V}$. Obtemos assim, para cada V, uma estratificação $\{Y^V_1, ..., Y^V_k\}$ de $\mathscr{R}$ e conjuntos $F^V_1, ..., F^V_k$ semialgébricos tais que

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(Y_i^V) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\pi"] & & Y_i^V \times F_i^V \arrow[dll, "\pi"] \\
Y_i^V & &
\end{tikzcd}$$

comuta para cada i. Pela prova do Teorema da Trivialidade Local, cada F_i é da forma $\pi^{-1}(v_0) \cap V$, para $v_0 \in Y^V_i$. Portanto, pela argumentação anterior, a coleção $\mathscr{H} = \{F^V_i\}_{V,i}$ é tal que todo elemento de $S(n, r, s)$ é semialgebricamente homeomorfo à um elemento dela. Para obter a condição (1), quocientamos a coleção pela relação de equivalência dada por $A \sim B \iff A \cong B$. Como nossa coleção inicial é finita, $\mathscr{H}/\sim$ é finito, e qualquer escolha de representantes das classes satisfaz as duas condições. Portanto, vale o Teorema. $\square$

Proposição 4.0.1. (Lema da Estrutura Cônica Local) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico, e $x_0 \in X$. Seja $\overline{B_r} = \overline{B_r}(x_0)$ a bola fechada de centro x_0 e raio r, e $S_r = S_r(x_0)$ a esfera de centro x_0 e raio r. Então existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r < r_0$, o par $(\overline{B_r}, \overline{B_r} \cap X)$ é semialgebricamente homeomorfo ao cone sobre o par $(S_r, S_r \cap X)$ com vértice em x_0.

Demonstração: Consideremos a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\|$. Aplicando o Teorema da Trivialidade Local à f com respeito à partição $\{\mathbb{R}^n \setminus X, X\}$, temos uma estratificação $\{Y_i\}_{i=1,\dots,k}$ de $\mathbb{R}$, e conjuntos semialgébricos $\{F_i\}_{i=1,\dots,k}$, tais que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Y_i) \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f"] & Y_i \times F_i \arrow[dl, "\pi"] \\ Y_i & \end{tikzcd}$$

onde $g_i : f^{-1}(Y_i) \to Y_i \times F_i$ é homeomorfismo. Como os estratos são subconjuntos semialgébricos da reta, então eles são uma coleção finita de pontos e intervalos, de forma que existe i com $0 \in Y_i$. Se $Y_i = \{0\}$ ou se Y_i é intervalo da forma $(a, 0]$ então existe $r_0 > 0$ tal que o intervalo $]0, r_0] \subset Y_{i+1}$. Caso contrário, Y_i contém um intervalo do tipo $[0, r_0]$ e podemos tomar $]0, r_0] \subset Y_i$.

"Restringindo" o diagrama à $]0, r_0]$, temos a situação seguinte:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(]0, r_0]) \arrow[r, "g_i|"] \arrow[d, "f"] &]0, r_0] \times f^{-1}(r) \arrow[dl, "\pi"] \\ ]0, r_0] & \end{tikzcd}$$

onde $r \in]0, r_0[$. Dessa forma, temos um homeomorfismo $\overline{B_r}(x_0) \setminus \{x_0\} \cong]0, r_0] \times S_r$. Denotando o cone sobre um conjunto X com vértice x_0 por $C_X^{x_0}$, podemos definir um homeomorfismo semialgébrico entre $]0, r_0] \times S_r$ e $C_X^{x_0} \setminus \{x_0\}$ por $h(t, a) = \left(\frac{t}{r_0}\right) a + \left(\frac{r_0 - t}{r_0}\right) x_0$. Definimos agora uma bijeção

$$\begin{aligned} H : \overline{B_r} &\to C_{S_r}^{x_0} \\ x &\mapsto \begin{cases} x_0, \text{ se } x = x_0 \\ g_i \circ h(x), \text{ se } x \neq x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como H é homeomorfismo em $\overline{B_r} \setminus \{x_0\}$ e x_0 é ponto interior tanto do domínio quanto da imagem, H é homeomorfismo semialgébrico. Para o segundo espaço, note que pelo Teorema da Trivialidade Local, $\overline{B_r} \cap X \cong]0, r_0] \times (S_r \cap X)$, de forma que o homeomorfismo semialgébrico entre $\overline{B_r} \cap X$ e $C_{S_r \cap X}^{x_0}$ segue de forma análoga ao anterior. $\square$

REFERÊNCIAS

BENEDETTI, R.; RISLER, J.-J. **Real algebraic and semi-algebraic sets**. [*S. l.*]: Hermann, Éditeurs Sciences Des Arts, 1990.

BOCHNAK, J.; ROY, M.-F.; COSTE, M. **Real algebraic geometry**. [*S. l.*]: Springer-Verlag, 1998.

BREDON, G. **Topology and Geometry**. [*S. l.*]: Springer-Verlag, 1993.

BÜHLER, J. . **Resultants, Discriminants, Bézout, Nullstellensatz, etc**. 2010. Disponível em: http://people.reed.edu/~jpb/alg/notes/101.pdf. Acesso em: 16 abr. 2022.

COSTE, M. **An introduction to semialgebraic geometry**. 2002. Disponível em: https://gcomte.perso.math.cnrs.fr/M2/CosteIntroToSemialGeo.pdf. Acesso em: 14 out. 2021.

CROOM, F. **Principles of Algebraic Topology**. [*S. l.*]: Springer-Verlag, 1978.

EISENBUD, D. **Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry**. [*S. l.*]: Springer-Verlag, 2004.

KRANTZ, S.; PARKS, H. **A Primer of Real Analytic Functions**. [*S. l.*]: Birkhäuser Boston, 2002.

KUHLMANN, S. **Real algebraic geometry lecture notes**. 2010. Disponível em: http://www.math.uni-konstanz.de/algebra/WS0910/Notes21.pdf. Acesso em: 15 mai. 2022.

LEQUAIN, Y.; GARCIA, A. **Elementos de Álgebra**. [*S. l.*]: IMPA, 2012.