UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MAFALDA BALBINO DE SOUZA

FUNÇÕES REAIS QUE PRESERVAM A SOMA

FORTALEZA
2021

MAFALDA BALBINO DE SOUZA

FUNÇÕES REAIS QUE PRESERVAM A SOMA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S239f Souza, Mafalda Balbino de.
Funções reais que preservam a soma / Mafalda Balbino de Souza. – 2022.
50 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo .

1. Funções reais . 2. Lema de Zorn . 3. Base de Hamel . I. Título.

CDD 510

MAFALDA BALBINO DE SOUZA

FUNÇÕES REAIS QUE PRESERVAM A SOMA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 11/01/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)

A Deus, por sua infinita graça e por criar a Matemática, umas das ferramentas que me leva a conhecê-lo. Rafael, você acreditou nesse sonho comigo. Álvaro, meu pequeno bebê amado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que me deu o dom da vida e a oportunidade de gostar dessa ciência tão bela quanto a Matemática.

À minha família, que é a base de toda conquista e essa não seria menos deles.

Ao meu marido Rafael, principal incentivador, inclusive nesse tempo difícil de pandemia, que me apoiou em cada etapa desse curso.

Aos meus amigos, que mesmo sem entender, me ouviam empolgada falar sobre algum teorema que só fazia sentido na minha cabeça. Em especial, meu Professor Mestre Aurélio Lima (com ele eu acreditei que realizaria o sonho do mestrado) e meu amigo Prof. Dr. Aulísio Paiva, pois sempre me incentivou e ajudou nessa nossa área em comum.

A todos os amigos que fiz na turma PROFMAT 2019.1, essa turma sem dúvida foi a turma mais unida e genuinamente interessada no sucesso de cada um que a compunha. Com vocês a aprendizagem foi mais leve.

A todos os professores do PROFMAT UFC 2019.1, em especial, meu orientador professor Marcelo. De fato, o senhor é um mestre e serei feliz em ser pelo menos a décima parte do que o senhor é como professor.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

(NEWTON, 1676)

RESUMO

Neste trabalho, desejamos mostrar exemplos de funções reais que preservam a soma, incluindo as da forma linear ($f(x) = cx$) e as que não possuem essa forma. Para isso, falaremos inicialmente da Função Afim, da Função Linear, em seguida, traremos definições importantes como a Base de Hamel e Lema de Zorn. De posse de tais resultados e conceitos, encerraremos com os exemplos das funções desejadas.

Palavras-chave: funções reais; lema de Zorn; base de Hamel.

ABSTRACT

In this work, we want to show examples of real functions that preserve the sum, including those of the linear form ($f(x) = cx$) and those that do not have this form. For this, we will initially talk about the Affine Function, the Linear Function, then we will bring important definitions such as Hamel's Base and Zorn's Lemma. With such results and concepts in hand, we will close with examples of the desired functions.

Keywords: real functions; Zorn's lemma; Hamel's base.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o presente trabalho queremos trabalhar com uma peça matemática não tão fácil e comum, mas particularmente bonita e elegante, que é a demonstração da existência de funções reais que preservam a soma, mas não são lineares. Será também um passeio pelas funções reais mais simples e conceitos relacionados a elas.

No capítulo 1, é abordado a definição de Função Afim, como ela é caracterizada, a demonstração sobre sua continuidade e a ligação que as Funções Afins tem com as Progressões Aritméticas.

No capítulo 2, a Função Linear é definida e encontra-se também um teorema que é a chave para determinar se uma dada função é ou não linear: o Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Ainda dentro desse teorema, percebe-se que a função linear preserva a soma. Este capítulo se encerra com a pergunta: existem funções reais que preservam a soma, mas não são da forma $f(x) = cx$?

Com o objetivo de responder à pergunta final do capítulo 2, o capítulo 3 prepara o terreno para a resposta. São abordadas definições e conceitos importantes da Álgebra, tais como, espaço vetorial, combinação linear, dependência e independência linear, espaço gerado e respectivos exemplos. É apresentado o que é a Base de Hamel e alguns exemplos. É revisado Relação de Ordem, a fim de enunciarmos o Lema de Zorn e uma das suas principais aplicações: Seja U um espaço vetorial de dimensão qualquer tal que $U \neq \{0_U\}$, então U admite uma base de Hamel. Encerrando o capítulo, é mostrado uma base de Hamel do espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$.

Dentro do capítulo 4, encontra-se a densidade dos racionais e dos irracionais na reta juntamente com o Teorema do Valor Intermediário. Esses resultados embasam os exemplos de funções reais que preservam a soma, mas não do tipo linear.

Finalmente, no capítulo 5 encontra-se um resultado conhecido como Propriedade do Valor Médio, sua definição e exemplos de funções que possuem tal propriedade. Tal propriedade é relacionada com a preservação da soma e alguns coralários sobre ela são demonstrados.

2 FUNÇÃO AFIM

Segundo Lima (2014) uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1: A *função identidade* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as *translações* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. São ainda casos particulares de funções afins as funções *lineares*, $f(x) = ax$ e as funções *constantes* $f(x) = b$.

É possível, mediante alguns critérios, saber que uma certa função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam dados explicitamente. Neste caso, obtém-se b como o valor que a função dada assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$ pode se chamar às vezes de *valor inicial* da função f. Quanto ao coeficiente a, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a f asuume em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2. Então, “passamos” a ter

$$f(x_1) = ax_1 + b \ e \ f(x_2) = ax_2 + b$$

obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = [f(x + h) - f(x)]/h$ chama-se a *taxa de crescimento* (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos $x, x + h$.

Observação: Lembremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se:
crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
Em qualquer dos quatro casos, f diz-se *monótona.* Nos dois primeiros (f crescente ou

f decrescente) diz-se que f é *estritamente monótona*. Nestes dois casos, f é uma função injetiva.

Chamar apenas de não-decrescente e não-crescente as funções dos dois últimos tipos não fica muito claro, pois negar que uma função seja crescente (por exemplo) não implica necessariamente que ela seja monótona. Os casos acima não são mutuamente excludentes, pelo contrário, os dois primeiros casos são casos particulares dos dois últimos. E ainda há funções que não recebem nenhuma dessas quatro nomenclaturas. Uma função afim será crescente quando sua taxa de crescimento (dada pelo coeficiente a) é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando $a = 0$.

Exemplo 1.2: O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f : x \mapsto ax + b$, onde x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

O *gráfico* G *de uma função afim* $f : x \mapsto ax + b$ *é uma linha reta.*

Para mostrarmos isso, basta mostrar que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, ax_1 + b), P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ desse gráfico são colineares. Uma estratégia é mostrar que o maior dos três números $d(P_1P_2), d(P_2P_3)$ e $d(P_1P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Ora, podemos sempre supor que as abcissas x_1, x_2 e x_3 foram numerados de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}$$

$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$d(P_2P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

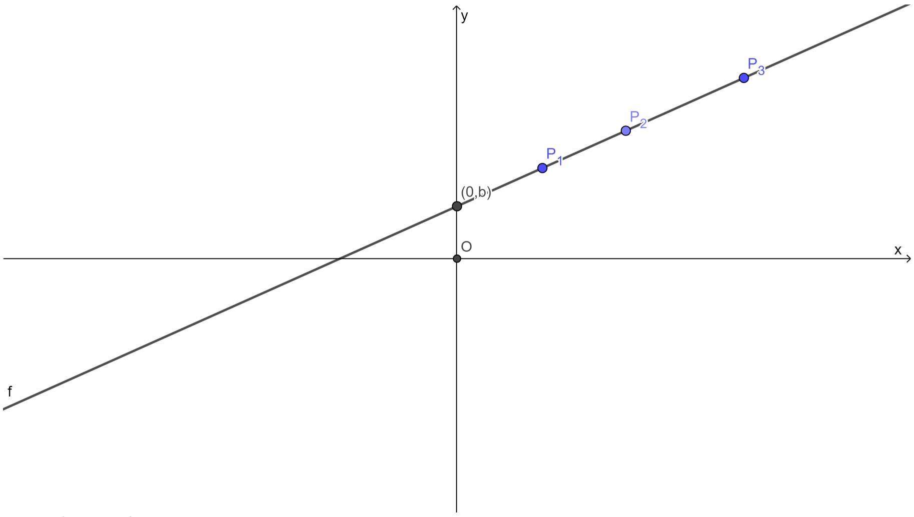
e

$$d(P_1P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Daí, é fácil ver que

$$d(P_1P_3) = d(P_1P_2) + d(P_2P_3).$$

Figura 1 – Gráfico G



Fonte: elaborada pela autora.

Do ponto de vista geométrico, temos que b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f : x \mapsto ax + b$, intersecta o eixo OY. O número a chama-se *a inclinação* ou *coeficiente angular*, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$ o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente.

De acordo com a definição, para conhecer uma função $f : X \to Y$, deve-se ter uma regra que permita (pelo menos em teoria) determinar o valor de $f(x)$ *para todo* $x \in X$. No caso particular de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como seu gráfico é uma linha reta e como uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos, resulta que basta conhecermos os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, que a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assume em dois números $x_1 \neq x_2$ (escolhidos arbitrareamente) para que f fique inteiramente determinada.

Na prática, sabendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim e que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar os coeficientes a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto corresponde a resolver o sistema

$$ax_1 + b = y_1$$

$$ax_2 + b = y_2,$$

no qual as incógnitas são a e b. A solução é:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}.$$

Evidentemente, o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo OY e reciprocamente, *toda reta não-vertical r é o gráfico de uma função afim.*

2.1 Caracterização da Função Afim

Como podemos saber se o modelo matemático a ser adotado em uma determinado problema ou situação é uma função afim? Veja a seguinte situação: Um retângulo, cujo comprimeto mede x unidades e a largura mede 10 unidades, tem seu perímetro indicado por $f(x)$. Logo, o perímetro desse retângulo é dado em função do seu comprimento, e a função obtida dessa relação é definida por $f(x) = 2x + 20$. Temos então $f(x) = ax + b$, onde $a = 2$ e $b = 20$. Mas, nem todo problema é assim tão explícito.

Vejamos um caso diferente:

> Eduardo, observou, numa sapataria, que o vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números $...36, 37, 38, ...$ O fato mais importante que ele percebeu foi que esses números estavam igualmente espaçados, isto é, a distância de cada um deles para o seguinte era constante. Isto queria dizer que a acréscimos iguais no tamanho do pé corresponderiam acréscimos iguais no número do sapato. Dito de outro modo: se um certo pé precisar crescer h centímetros para passar de tamanho 33 para 34, precisará crescer os mesmos h centímetros para passar do 38 ao 39. Isto lhe deu certeza de que a função que faz corresponder a cada comprimento x de um pé o número $f(x)$ do sapato adequado é uma função afim: $f(x) = ax + b$. (Veremos no teorema mais adiante).
>
> Eduardo sabia que, para determinar os coeficientes a, b da função afim, basta conhecer $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para dois valores diferentes quaisquer x_1 e x_2.

Ele atravessou a rua. Do outro lado havia uma papelaria, onde comprou uma régua. Voltou à sapataria e pediu emprestada a escala do vendedor. Como sua régua media até milímetros enquanto a escala só marcava pontos e meio pontos, escolheu dois valores $x_1 \neq x_2$ tais que os números de sapato correspondentes, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, assinalados na escala, fossem inteiros. Tomou $x_1 = 20$, $x_2 = 28$ e viu que $f(x_1) = 32$, $f(x_2) = 42$. A partir daí, calculou os coeficientes $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ e $b = y_1 - ax_1$ chegando à fórmula

$$f(x) = \frac{5x + 28}{4},$$

que dá o número $f(x)$ do sapato de uma pessoa em função do comprimento x do seu pé em centímetros. Para chegar à sua fórmula, Eduardo fez uso do seguinte teorema:

Teorema 1.1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim. (LIMA, 2014, p. 89)

A demonstração do teorema acima será feita no capítulo 2, pois é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Observação 1: A recíproca do teorema acima é óbvia. Se $f(x) = ax + b$ então $f(x + h) - f(x) = ah$ não depende de x. A hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x às vezes se exprime dizendo que "a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$". Outra maneira de exprimir esta hipótese consiste em dizer que os acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

Exemplo 1.3: Suponhamos um ponto que se movimenta sobre um eixo. Sua posição, em cada instante t, é determinada pela coordenada (abcissa) $f(t)$. Diz-se que se trata de um *movimento uniforme* quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido (isto é, f é uma função monótona) e, além disso, em tempos iguais percorre espaços iguais. Isto significa que $f(t+h) - f(t)$, espaço percorrido no tempo h, a partir da posição $f(t)$, depende apenas de h, mas não de t. Então f é uma função afim: $f(t) = at + b$, onde $a = f(t+1) - f(t)$, espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se a *velocidade* e $b = f(0)$ é a posição inicial.

Observação 2: Na definição usual de movimento uniforme, a condição de que o ponto móvel se desloque sempre no mesmo sentido não é imposta. A razão para que isto é que se supõe sempre que, no movimento, a função $f(t)$ que dá a posição do ponto no instante t seja contínua. E como observaremos no capítulo seguinte, no Teorema da Proporcionalidade, a monotonicidade de f pode ser substituída por sua continuidade, sem alterar a conclusão. A inclusão de uma dessas hipóteses monotonicidade, continuidade ou algo equivalente deve-se ao fato de que existem funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, incrivelmente complicadas, para os quais vale a condição $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer mas f não é da forma $f(x) = ax$.

2.2 A continuidade da Função Afim

A fim de estabelecermos a continuidade da função afim, vamos dar a definição abaixo:

Definição 1.1: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **contínua em um ponto** $x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon.$$

A função f é dita **contínua** se o for em todo $x_0 \in X$.

Vamos provar que a função afim é contínua. Sejam a e b números reais dados, sendo $a \neq 0$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = ax + b$, então f é contínua.

Prova: Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, se $\mid x - x_0 \mid < \delta$, temos

$$\mid f(x) - f(x_0) \mid = \mid (ax+b) - (ax_0 + b) \mid = \mid a \mid\mid x - x_0 \mid < \mid a \mid \delta.$$

Portanto, se $\mid a \mid \delta \leq \epsilon$ (ou equivalentemente, $\delta < \dfrac{\epsilon}{\mid a \mid}$), teremos $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$ para $\mid x - x_0 \mid < \delta$.

2.3 Conexão entre Funções Afins e Progressões Aritméticas

Uma *progressão aritmética* pode ser vista geometricamente como uma sequência (finita ou infinita) de pontos $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ igualmente espaçados na reta. Isto quer dizer que a razão $h = x_{i+1} - x_i$ não depende de i:

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = x_{i+1} - x_i = ...$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, digamos $f(x) = ax+b$ e $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ é uma progressão aritmética, então os pontos $y_i = f(x_i), i = 1, 2, ...$ também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética cuja razão é

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ah.$$

Assim, se tivermos uma reta não-vertical (gráfico de uma função afim) em $\mathbb{R}$ e tomarmos sobre ela os pontos

$$(1, y_1), (2, y_2), ..., (i, y_i), ...$$

cujas abcissas são os números naturais $1, 2, ..., i, ...$, as ordenadas $y_1, y_2, ..., y_i, ...$ desses pontos formam uma progressão aritmética.

A pergunta que fazemos agora é: *a recíproca é verdadeira?* A resposta é sim, com a condição de termos uma função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., f(x_i), ...$ então, f é uma função afim.

Prova: Tomaremos uma nova função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, que transforma qualquer progressão aritmética noutra progressão aritmética, e agora tem a propriedade $g(0) = 0$. Se mostrarmos que g é linear, nossa prova estará concluída.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, os números $-x, 0, x$ formam uma progressão aritmética, logo, por hipótese, o mesmo ocorre com os números $g(-x), 0, g(x)$. Sendo assim, $g(-x) = g(x)$.

Em seguida, consideremos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então os números $0, x, 2x, ..., nx$ formam uma progressão aritmética, o mesmo se dando com suas imagens por g : $0, g(x), g(2x), ...,$ $g(nx)$. Obtemos a razão desta progressão tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo, logo esta razão é $g(x)$. Segue-se então que $g(nx) = n \cdot g(x)$. Finalmente, se n é um inteiro negativo, temos $-n \in \mathbb{N}$ logo $g(nx) = -g(-nx) = -(-n \cdot g(x))$. Assim, vale $g(nx) = ng(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue-se que g é linear: $g(x) = ax$, portanto, pondo $f(0) = b$, temos $f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

O resultado que acabamos de mostrar acima é muito importante, contudo, precisamos estar atentos com alguns tipos de funções, pois embora sejam contínuas, crescentes e transformem infinitas (mas não qualquer) PA em PA, não são afim. Abaixo segue um exemplo de tais funções:

Exemplo 1: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 7x + \sin(2\pi x)$.

a) Provemos que f é crescente.

b) Provemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado f transforma a PA $x, x+1, x+2, ...$ numa PA.

c) E por último vamos responder à seguinte pergunta, justificando: é verdade que f transforma qualquer PA numa PA?

a) Temos que $f(x) = 7x + \sin(2\pi x)$, logo $f'(x) = 7 + 2\pi\cos(2\pi x) \geq 7 - 2\pi > 0$.
Pelo Teorema do Valor médio, f é crescente.

b) Veja que $f(x+1) - f(x) = 7(x+1) + \sin(2\pi(x+1)) - 7x - \sin(2\pi x) = 7x + 7 + \sin(2\pi x) - 7x - \sin(2\pi x) = 7$, portanto a sequência $f(x), f(x+1), f(x+2), ...$ é uma progressão aritmética de razão 7.

c) Agora, veja que se tomarmos a sequência $x - r, x, x + r, ...$ com $r = \frac{1}{2}$, por exemplo, obteremos:

$$f(x+r) = 7(x+r) + \sin(2\pi(x+r)) = 7x + 3,5 + \sin(2\pi x)$$

$$f(x-r) = 7(x-r) + \sin(2\pi(x-r)) = 7x - 3,5 - \sin(2\pi x)$$

Sendo assim: $f(x) - f(x-r) = -3,5 + 2\sin(2\pi x)$ e $f(x+r) - f(x) = 3,5 - 2\sin(2\pi x)$. Se $f(x-r), f(x), f(r+r)$ fosse uma PA, $f(x+r) - f(x)$ e $f(x) - f(x-r)$ seriam iguais. Portanto, não é verdade que f transforma qualquer PA em PA.

Vejamos outro exemplo de função que transforma infinitas PA em PA, mas não é afim:

Exemplo 2: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Q} \\ 3x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Se (x_n) é uma PA com primeiro termo e razão racionais, mostre que $(f(x_n))$ é também uma PA.

Se (x_n) é uma PA com x_1, $r \in \mathbb{Q}$, então $x_n = x_1 + (n-1)r \in \mathbb{Q}$. Daí $f(x_n) = 2x_n = 2[x_1 + (n-1)r] = 2x_1 + (n-1)2r$, logo $f(x_n)$ é uma PA.

b) Se (x_n) é uma PA com primeiro termo irracional e razão racional, mostre que $(f(x_n))$ é também uma PA.

Se (x_n) é uma PA com $x_1 \notin \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Q}$, então $x_n = x_1 + (n-1)r \notin \mathbb{Q}$. Daí $f(x_n) = 3x_n = 3[x_1 + (n-1)r] = 3x_1 + (n-1)3r$, logo $f(x_n)$ é uma PA.

c) f é monótona? f é contínua em algum ponto? Justifique.

Sejam $x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2}$ e $x_3 = 2$. Sabemos que $x_1 < x_2$ e $x_2 < x_3$. Agora vejamos: $f(x_1) = 2, f(x_2) = 2\sqrt{2}$ e $f(x_3) = 4$. Dessa forma, $f(x_1) < f(x_2)$, mas $f(x_3) < f(x_2)$. Assim, f não é monótona.

Para respondermos se f é contínua ou não, usaremos a seguinte proposição:

Proposição: Seja $I \subset \mathbb{R}$ uma função $f : I \to \mathbb{R}$ dada. Para $x_0 \in I$, temos f contínua em x_0 se, e só se,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tomando $a \notin \mathbb{Q}$, teremos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$? Vejamos que, sempre conseguiremos nos aproximar de a com uma sequências de números racionais, devido ao fato dos racionais serem densos[1] em $\mathbb{R}$ (demonstrado no Teorema 4.2). Sendo assim, $\lim_{x \to a} f(x) = 2a$. E por definição, $f(a) = 3a$, logo, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Fazendo de f uma função não-contínua nos irracionais. Semelhantemente, provamos que f não será contínua nos racionais.

d) É verdade que f transforma qualquer PA numa PA? Justifique.

Não. Vimos no item anterior que f não é monótona, logo, não pode ser afim. Não sendo afim, não transforma qualquer PA numa PA.

[1] Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se dado qualquer intervalo (a, b) em $\mathbb{R}$ existe um elemento $x \in X \bigcap (a, b)$.

3 FUNÇÃO LINEAR

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso é milenar.

Vejamos como a Aritmética Progressiva, de Antônio Trajano, tratava esse assunto. Trajano dá a seguinte definição:

> Diz-se que duas gradezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (TRAJANO, 1954, P. 142)

Traduzindo o que foi dito acima para nossa linguagem atual, trocando grandezas por suas medidas, que são números reais, teremos:

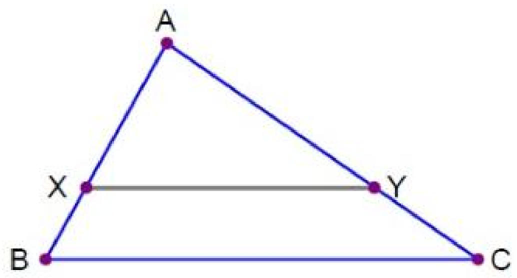
Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quais quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = f(x)/c$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Na nova versão acima, as gradezas da definição antiga são os números reais x, y e a correspondência a que Trajano se refere é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Temos ainda que se $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo c e todo x então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Adequando a notação, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f é uma função linear. Resumindo, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado a *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor x. Já na proporcionalidade inversa, as grandezas precisam ser não-nulas e seu modelo matemático é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) tal que $f(cx) = f(x)/c$ para c, $x \in \mathbb{R}^*$ tem-se $f(x) = a/x$, onde a constante a é $f(1)$.

Vamos focar nossa atenção na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de "proporcionalidade". Há situações em que a fórmula $y = ax$, que caracteriza a proporcionalidade, é dada ou quase dada explicitamente. Exemplo, se uma camisa custa a reais então x camisas custam $y = ax$. Em outros casos, a constante a de proporcionalidade não está clara e, às vezes, nem precisamos dela para o problema. Um exemplo disso é em aplicações do teorema de Tales.

Nesse teorema, tem-se um triângulo ABC e uma correspondência que a cada ponto X do lado AB associa o ponto Y do lado AC tal que XY é paralelo BC. O teorema de Tales garante que o comprimento y do segmento AY é proporcional ao comprimento x de AX. Qual importância tem a constante de proporcionalidade $a = y/x$? Se calcularmos, usando trigonometria, teremos $a = senB/senC$, mas esse valor pouco nos importa no caso.

Figura 2 – Teorema de Tales



Fonte: Lima *et al.* (2013, p.85)

.

O que nos importa muitas vezes é saber apenas que se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $y'/x' = y/x$ é constante. Quando a correnpondência $x \mapsto y, x' \mapsto y'$ é uma proporcionalidade, a igualdade $y'/x' = y/x$ permite que se determinem um desses quatro números quando se conhecem os outros três. Nisto consiste a famosa"regra de três".

Porém, há a seguinte questão inicial: como ter certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade? Pela definição de Trajano é exigido que se tenha $f(cx) = cf(x)$ para todos os valores reais de c e x. Em particular, *para todo c*. Quando c é inteiro, isso é fácil de verificar, mas e quando c for racional ou irracional? A boa nova é que basta sabermos que $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo n inteiro, desde que se suponha que f é monótona.

De modo geral, a chave para determinar, em qualquer situação, se dada função é ou não linear se encontra no Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

3.1 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(Logo $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer c, $x \in \mathbb{R}$.)

(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos provar as implicações (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2): inicialmente, vamos provar que, para todo número racional $r = m/n$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, $nr = m$, tem-se:

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x).$$

Agora, usando a hipótese inicial de (2), seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0)$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (usaremos aqui algo que detalharemos no capítulo 4: a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ - Teorema 4.2). Vamos supor, por absusrdo, que exista algum número real x (irracional) tal que $f(x) \neq ax$. Seja então $f(x) < ax$. (O caso $f(x) > ax$ é semelhante). Temos então

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Tomemos um número racional r no interior do intervalo de extremos $f(x)/a$ e x. Assim,

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Então, $f(x) < ar < ax \Rightarrow f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é um absurdo, pois f é crescente, logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Tal contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Como $a = f(1)$, podemos escrever $f(x) = ax = f(1) \cdot x$, ou seja, $f(x) = f(1) \cdot x$. Seja então $m \in \mathbb{R}$ tal que $m = x + y$, teremos então o seguinte:

$$f(x+y) = f(m) = f(1) \cdot m = f(1) \cdot (x+y) = xf(1) + yf(1) = f(x) + f(y)$$

Como queríamos mostrar.

(3) $\Rightarrow$ (1): antes de provar esse ponto, vamos inicialmente mostrar que f é ímpar.

Note que se $x = y = 0$ temos $f(0) = f(0) + f(0)$, ou seja, $f(0) = 0$. Assim, fazendo agora $y = -x$, obtemos, $0 = f(x) + f(-x)$, o que resulta em $-f(x) = f(-x)$, ou seja, f é ímpar. Agora, vamos à prova do item: se $n = 0$, então $f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(0) = 0$, o que está correto, pois $f(0) = 0$. Podemos supor que $n > 0$ (pois no caso de n ser negativo, usamos o fato de f ser ímpar). Se $y = x$, temos $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$. Se $y = 2x$, temos $f(3x) = f(x) + f(2x) = 3f(x)$ e usando indução, é fácil ver que $f(nx) = nf(x)$.

O Exemplo a seguir pode ser encontrado em Lima *et al.* (2012) na página 112.

Exemplo 2.1: Euclides dizia "dois retângulos de mesma altura estão entre si como suas bases". Isto quer dizer que, se a altura de um retângulo é fixada, a área desse retângulo é proporcional à base. Ou ainda *a área de um retângulo de altura a e base x é uma função linear de x*. É claro que esta afirmação é uma consequência super-óbvia da fórmula de área do retângulo. O ponto, todavia, é que ela é o argumento crucial para a dedução daquela fórmula, logo não pode ser deduzida como consequência. Para estabelecer sua veracidade, seja $f(x)$ a área do retângulo de altura a e base x. É claro que f é uma função crescente de x. Além disso, é claro que um retângulo de mesma altura a e base nx pode ser decomposto em n retângulos de mesma altura a, cada um com base x, logo $f(nx) = nf(x)$. Segue-se, então, do teorema que $f(x) = A \cdot x$, onde $A = f(1)$ é a área de um retângulo de altura a e base 1. Vamos mostrar que $A = a$. O mesmo argumento, aplicado aos retângulos de mesma base 1 e altura variável, mostra que $A = a \cdot U$, onde U é a área do retângulo de base e altura iguais a 1. Mas este é o quadrado de lado 1 o qual é, por definição, a unidade de área. Portanto $U = 1$ e $A = a$. Conclusão: a área de um retângulo de altura a e base x é igual a ax.

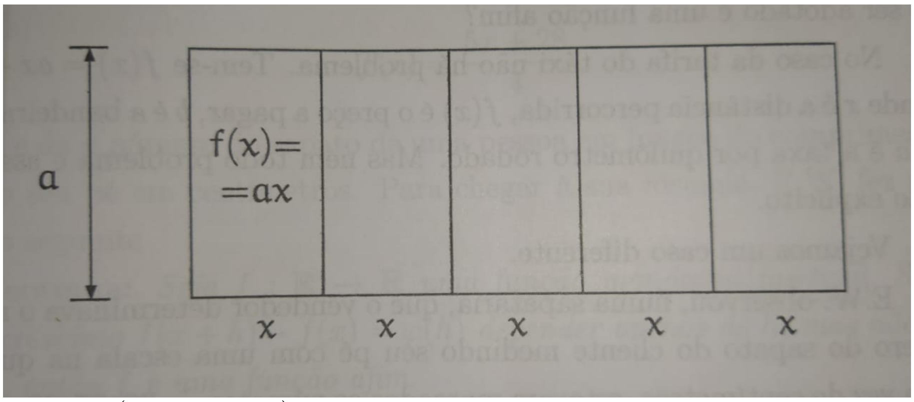
Exemplo 2.2: o presente exemplo na verdade é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que é a demonstração prometida do Teorema 1.1 do capítulo anterior.

Teorema 1.1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

Demonstração:

Para fixar ideias, suporemos que a função f seja crescente. Então $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é

Figura 3 – Área do retângulo



Fonte: Lima *et al.* (2012, p.113)

.

crescente, com $\varphi(0) = 0$. Além disso, para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos

$$\varphi(h + k) = f(x + h + k) - f(x)$$

$$f((x + k) + h) - f(x + k) + f(x + k) - f(x)$$

$$= \varphi(h) + \varphi(k).$$

Logo, pelo Teorema da Proporcionalidade, pondo $a = \varphi(1)$, tem-se que $\varphi(h) = a.h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x + h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

No Enunciado que demos para o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, usamos a hipótese de que a função f seja crescente (ou decrescente, seria o mesmo). A hipótese da monotonicidade pode ser substituída pela continuidade, neste caso. De fato, se f for contínua em $\mathbb{R}$ então para qualquer real x podemos tomar uma sequência de racionais $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ que convirja para x ($\lim_{n\to+\infty} q_n = x$), como sabemos que $f(q_n) = q_n \cdot f(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} q_n) = \lim_{n\to+\infty}(f(q_n)) = \lim_{n\to+\infty} q_n \cdot f(1) = f(1) \cdot \lim_{n\to+\infty} q_n = f(1) \cdot x.$$

Mais um ponto que vale destacarmos sobre a função linear é que ela é um caso particular da função afim, onde $b = 0$. Sendo assim, como mostrado na seção **1.2** a função linear também é contínua.

O que fizemos até aqui foi mostrar que com a preservação de soma ($f(x + y) = f(x) + f(y)$), conseguimos linearidade até os racionais. Para estender aos irracionais, mantendo a linearidade, é que se utiliza a monotonia ou a continuidade. E nossa pergunta a ser respondida é: existem funções reais que preservam a soma, mas não são da forma $f(x) = ax$? A resposta é sim e elas podem ser incrivelmente complicadas.

Rigorosamente, precisamos considerar o conjunto $\mathbb{R}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. O Axioma da Escolha, que é equivalente ao Lema de Zorn, implica que todo espaço vetorial admite uma base. Esta base de números reais r_α, $\alpha \in \omega$ (ou seja, a base é não-enumerável) é chamada Base de Hamel e podemos escrever qualquer número real r como sendo $r = \sum_{i=1}^{n} q_i r_i$ com $q_i \in \mathbb{Q}, \forall i$ de onde $f(r) = f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i r_i\right)$, então, f pode assumir diversas formas dependendo da escolha de $f(r_i)$, todas elas sendo descontínuas a menos que $f(r_i) = 0, \forall i > 1$.

Vamos então ver algumas definições e teoremas importantes para entendermos a Base de Hamel e o Lema de Zorn e assim, mostrarmos a existência de funções reais que preservam a soma mas que não são lineares.

4 BASE DE HAMEL

Apresentaremos alguns conceitos importantes com o objetivo de enunciar o Lema de Zorn e falar sobre a Base de Hamel.

Definição 3.1: Sejam V um espaço vetorial sobre K e vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ elementos de V. Diz-se que $x \in V$ é uma combinação linear de $x_1, x_2, ..., x_n$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Seja Y o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $x_1, x_2, ..., x_n$. Assim, Y é um subespaço de V e é chamado de subespaço gerado pelos vetores $x_1, x_2, ..., x_n$. Denota-se o subespaço gerado por $Y = [x_1, x_2, ..., x_n]$.

Dois conceitos importantes em Álgebra Linear e também muito utilizados em outras áreas da Matemática, são os conceitos de dependência linear e independência linear, definidos como segue.

Definição 3.2: Seja V um espaço vetorial sobre K. Considere os vetores $x_1, x_2, ..., x_n \in V$. Diz-se que os vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ são linearmente independentes (L.I.) se a combinação linear

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

implicar em $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Diz-se que os vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ são linearmente dependentes (L.D.) se não forem linearmente independentes, ou seja, se for possível encontrar ao menos um $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, ...n$, tal que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$.

A partir dos conceitos descritos acima define-se base e dimensão de um espaço vetorial.

Definição 3.3: Seja V um espaço vetorial sobre K. Diz-se que V é finitamente gerado se existe um subconjunto finito $U \subset V$ tal que $V = [U]$.

Exemplo 3.1: O espaço $\mathbb{R}^n$ é gerado pelos vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ...1)$ e escreve-se $\mathbb{R}^n = [e_1, e_2, ..., e_n]$.

Exemplo 3.2: Seja $P_n(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$. O conjunto $U = 1, x, ..., x^n$ é um conjunto gerador de $P_n(\mathbb{R})$ e escreve-se $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, ..., x^n]$.

Definição 3.4: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado, uma base para V é um conjunto $x_1, x_2, ..., x_n$ linearmente independente que gera V .

Definição 3.5: Seja A um subconjunto do espaço vetorial X. O espaço gerado por A, denotado por $\langle A \rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares de finitos vetores de A, ou seja,

$$\langle A \rangle = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j | m \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in A\}$$

Finalmente, vejamos a seguir uma primeira definição sobre a **Base de Hamel**.

Definição 3.6: Um conjunto não-vazio $B \subset X$ é dito ser uma base de Hamel para o espaço X quando B for um conjunto linearmente independente maximal, ou seja, se u é um vetor em X tal que $B \cup \{u\}$ é um conjunto linearmente independente, então $u \in B$. Em outras palavras, B é uma base de Hamel quando não for subconjunto próprio de nenhum outro conjunto lineramente independente em X (A é subconjunto próprio de B se cada elemento de A está em B mas existe pelo menos um elemento de B que não está em A).

A fim de deixarmos mais claro, segue outra definição, dessa vez sem a expressão conjunto linearmente independente maximal:

Definição 3.7: Uma base de Hamel para V é um conjunto de elementos de V linearmente independentes, $B = \{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que todo elemento $v \in V$ pode ser escrito como combinações lineares finitas de elementos de B, ou seja, existe $I \subset J$ finito e $\{k_i\}_{i \in J} \subset \mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{i \in I} k_i e_i$$

Note que, se V é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $B = \{v_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma base de Hamel, então todo vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de B de maneira única. Suponhamos por absurdo que o vetor v possa ser escrito de duas maneiras distintas, isto é,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

e

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$$

onde α_i, $\beta_i \in \mathbb{K}$. Observe que, mesmo a base B sendo infinita, podemos exprimir v como combinações lineares dos mesmos elementos de B, completando com coeficientes zero os múltiplos dos v_i que aparecem apenas numa das duas expressões. Assim,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n,$$

ou seja,

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

Como $B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ é uma base de Hamel para V, segue que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = ... = \alpha_n - \beta_n = 0$$

Logo,

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$$

contradizendo hipótese. Portanto, todo vetor $v \in V$ se exprime de modo único como combinação linear de elementos da base.

Exemplo 3.3: Um exemplo simples é o seguinte: uma base de hamel para o $\mathbb{R}^2$ é o conjunto $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Exemplo 3.4: Os monômios $\{1, x, ..., x_n\}$ formam uma base de Hamel para o espaço vetorial P_n dos polinômios de grau menor ou igual a n. Ampliando esse exemplo, também podemos obter $P(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais, onde este é um espaço vetorial real de dimensão infinita com base de Hamel $B = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}$.

A partir da noção de base é possível determinar todos os elementos de um espaço vetorial, haja vista que qualquer vetor x em X pode ser expresso como uma combinação linear de uma quantidade finita de vetores de B. Além do que, conforme verificamos, tal expressão é única. Neste caso, de acordo com a definição 3.5, segue-se que B gera o espaço X, ou que X é gerado pela base B. Dado um espaço vetorial X qualquer, sempre existe uma base para X.

4.1 Relação de Ordem

Uma ordem parcial em um conjunto não-vazio A é uma relação entre pares de elementos de A, genericamente representada pelo símbolo $\leq$, que caracteriza-se por cumprir a três propriedades, a saber:

(i) $x \leq x$, (propriedade reflexiva)

(ii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (propriedade transitiva)

(iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$, para quaisquer x, y e z em A (propriedade antissimétrica).

Parcialmente serve para enfatizar que A pode conter elementos x e y para os quais nem $x \leq y$ e nem $y \leq x$. Então x e y são chamados elementos imcomparáveis. Por outro lado, se $x \leq y$ ou $y \leq x$ (ou ambos acontecem), então x e y são chamados elementos comparáveis.

Exemplo 3.5: A relação " x divide y" : seja $\mathbb{N}^+$ o conjunto dos números naturais maiores que zero. Para $x, y \in \mathbb{N}^+$, dizemos que x divide y, em símbolos $x \mid y$ se e somente se existe um $z \in \mathbb{N}^+$, tal que $z.x = y$.

Indica-se com a notação $(A, \leq)$ um conjunto A munido com uma ordem parcial $\leq$. Dizemos nesse caso que A é um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos ainda que $(A, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado se dados quaisquer a, $b \in A$ pudermos verificar que ou $a \leq b$, ou $b \leq a$. Agora, seja M um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado A. Um elemento $a \in A$ é dito uma cota superior para M quando $x \leq a$ para todo $x \in M$. No caso em que isso se verifica com $a \in M$, dizemos que a é um elemento maximal para M (segundo a relação $\leq$). Abaixo seguem alguns exemplos para melhor compreensão de cota superior e elemento maximal.

Exemplo 3.6: 1 é uma cota superior de $S = \{1/2, 2/3, 3/4, ...\} = n/(n+1)$, com $n \in \mathbb{N}$, pois $1 > n/(n+1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Note que $1 \notin S$.

Exemplo 3.7: Seja A, tal que $A = \{1, 2, 3, 4\}$, tomando $(A, \geq)$, tal relação tem como elemento maximal 1.

Exemplo 3.8: O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a relação $\leq$ ("menor do que ou igual") é um conjunto totalmente ordenado e não possui elemento maximal. Notação: ($\mathbb{R}$, $\leq$).

Exemplo 3.9: Seja X um conjunto qualquer. O conjunto $\wp(X)$, que é conjunto de todos os subconjuntos de X, com a relação inclusão ($\subseteq$) é um conjunto parcialmente ordenado e o único elemento maximal de $\wp(X)$ é X. Notação: $(\wp(X), \subseteq)$.

Vamos agora enunciar o Lema de Zorn e um teorema onde ele pode ser utilizado na prova de tal.

4.2 Lema de Zorn

O Lema de Zorn é cercado de mistérios devido o seu verdadeiro nome e é também um dos mais importantes lemas na área de análise funcional. Por exemplo, ele está presente na demonstração do Teorema de Banach. Mas não é apenas por isso que o mesmo chama tanta atenção, mas sim por suas equivalências. O Lema de Zorn que conhecemos hoje é escrito da seguinte forma: **Lema 3.1 (Lema de Zorn):** Seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto não-vazio e totalmente ordenado M de A possui uma cota superior em A. Então A possui um elemento maximal. O Lema de Zorn pode ser provado utilizando o Axioma da Escolha. A demonstração pode ser encontrada em Halmos (1973) na página 69.

Equivalente ao Axioma da Escolha (ver Apêndice A), o Lema de Zorn é um princípio de maximalidade em conjuntos parcialmente ordenados e certamente é um dos mais difundidos.

O Teorema a seguir nos diz que um conjunto linearmente independente (L.I.) em um espaço vetorial pode ser completado à uma base para o espaço X.

Teorema 3.1: Seja U um conjunto L.I. em um espaço vetorial X. Então, existe uma base B em X tal que $U \subset B$.

Demonstração: Seja ζ o conjunto de todos os subconjuntos linearmente independentes C de X tais que $U \subset C$. Naturalmente ζ é não-vazio, pois $U \subset \zeta$. Vamos definir uma ordem parcial em ζ: Dados C_1, $C_2 \in \zeta$, dizemos que $C_1 \leq C_2$ se tivermos $C_1 \subset C_2$. Pelo Lema de Zorn, ζ possui um elemento maximal que o indicaremos por B. Portanto, B é um conjunto L.I. maximal, ou seja, uma base para X contendo U.

Podemos escrever o Lema de Zorn de outra forma também:

Lema de Zorn: Seja $X \neq \emptyset$ e (X, R) um conjunto parcialmente ordenado. Se toda cadeia C de (X, R) admitir uma cota superior em X, então o conjunto (X, R) admite um elemento maximal.

O Lema a seguir será utilizado no teorema 3.2 mais à frente.

Lema 3.2: Seja U um espaço vetorial, $P(U)$ o conjunto das suas partes e C uma cadeia em $(P(U), \subseteq)$. Descrevemos C da forma $C = \{C_\lambda : \lambda \in \wedge\}$ em que $\wedge$ é um conjunto de índices. Se a cadeia C for formada apenas por conjuntos linearmente independentes, então $\cup_{\lambda \in \bigwedge} C_\lambda$ é um conjunto linearmente independente.

4.3 Base de Hamel para os Reais

Teorema 3.2: Seja U um espaço vetorial de dimensão qualquer tal que $U \neq \{0_U\}$, então U admite uma base de Hamel.

Demonstração: Para provar que U admite uma base de Hamel, precisamos provar que existe um conjunto de vetores linearmente independentes que gera U.

Para isso, considere M o conjunto de todos os subconjuntos linearmente independentes de U. Nesse caso, temos $M \subseteq P(U)$ e a relação de ordem parcial $\subseteq$ pode ser restrita a M. Em outras palavras, o par ordenado $(M, \subseteq_M)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Como $U \neq \{0_U\}$, sabemos que existe $u \in U$ com $u \neq 0_U$. O conjunto $\{u\}$, formado apenas pelo vetor u, é linearmente independente. Logo, $\{u\} \in M$ e por isso temos $M \neq \emptyset$. Considere agora C uma cadeia qualquer em $(M, \subseteq_M)$. Pelo Lema 3.2, sabemos que a união dos conjuntos que pertencem a C é linearmente independente, pois todos os conjuntos que pertencem a C o são. Nesse caso, a união dos conjuntos que pertencem a C é uma cota superior de C. Assim, como a cadeia C era arbitrária, concluímos que toda cadeia em $(M, \subseteq_M)$ possui uma cota superior em M. O Lema de Zorn nos garante, portanto, que $(M, \subseteq_M)$ admite um elemento maximal. Seja B um elemento maximal de $(M, \subseteq_M)$.

Concluiremos que B é uma base de Hamel do espaço vetorial U. Já sabemos que os elementos de B são vetores linearmente independentes, pois $B \in M$. Para provar que B gera U, vamos supor que isso não acontece. Nesse caso, existe um vetor $z \in U$ com $z \neq 0_U$ e tal que z não é gerado pelos vetores de B. Então, o conjunto $B \cup \{z\}$ é formado por vetores linearmente independentes. Porém, isso entra em contradição com a maximalidade de B, pois teríamos $B \subseteq_M B \cup \{z\}$ e não teríamos $B = B \cup \{z\}$.

Assim, B é uma base de Hamel do espaço vetorial U. Como o espaço U era uma espaço vetorial de dimensão qualquer tal que $U \neq \{0_U\}$, a prova está completa.

Vimos então que tal resultado é válido, independentemente da dimensão do espaço vetorial. Vejamos agora um exemplo interessante que é quando o espaço vetorial tem dimensão infinita, como é o caso do espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$. Vamos mostrar isso.

Verificaremos agora que o espaço vetorial $\mathbb{R}$ (números reais) tem dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{Q}$ (números racionais): o Axioma da Escolha entra em cena neste problema se quisermos identificar uma base para $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$, quer dizer, um conjunto (infinito)

L.I. de reais x_μ tais que qualquer real y possa ser escrito como uma combinação linear (finita) de elementos desta base com coeficientes racionais:

$$y = \sum_k a_k x_{\mu(k)}$$

Aqui, $\mu(k)$ significa que tomaremos $k \ll \infty$ elementos do conjunto $x = \{x_\mu\}$. Note que como $a_k \in \mathbb{Q}$, necessariamente o conjunto x deve ter a cardinalidade do contínuo[1], caso contrário, jamais conseguiremos escrever um y real arbitrário como uma combinação linear (finita) de elementos de x.

Enunciando de maneira mais simples o Axioma da Escolha, ele nos diz que dado um conjunto A composto por subconjuntos não vazios S_k, pode-se escolher um elemento de cada um desses subconjuntos. Esta "escolha" pode ser formalizada com uma função do tipo

$$f : P(A) \to A$$

tal que $f(S_i) \subset S_i$, para todos os subconjuntos não vazios $S_i \in P(A)$. O Axioma da Escolha se resume à afirmação que, para um dado conjunto A, existe pelo menos uma " função escolha".

Exemplo: Seja $A = \mathbb{N}$. Sabemos que o conjunto das partes dos naturais tem a cardinalidade do contínuo[2].

Podemos definir uma função escolha para qualquer subconjunto não-vazio S_i de $\mathbb{N}$, por exemplo, escolhemos o **menor** elemento de S_i.

Para o nosso problema em particular, admitindo-se o Axioma da Escolha, seremos capazes de selecionar um elemento de qualquer subconjunto $S_\mu \in P(\mathbb{R})$. Assim sendo, podemos, em particular, selecionar um elemento x_μ de qualquer subespaço vetorial unidimensional S_μ de $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$, e assim teríamos $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) = span(x_\mu)$[3]. Na prática nada sabemos (além da existência) sobre S_μ, muito menos sobre os elementos $x_\mu = f(S_\mu)$, e isso é uma característica de toda

[1] Um dos resultados mais famosos do trabalho de George Cantor (foi um matemático alemão nascido em 1845 no Império Russo) é a sua prova de que a cardinalidade dos reais é maior que a dos naturais, ou seja, de que os reais não formam um conjunto contável. Na matemática, em especial na teoria dos conjuntos, a cardinalidade do contínuo é a cardinalidade do conjunto dos números reais. Este cardinal costuma ser representado por $\mathfrak{c} : \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$

[2] Cantor associou à cardinalidade dos naturais (e inteiros, e racionais) a um número transfinito denominado áleph zero - $\aleph_0$. É possível mostrar que a cardinalidade dos reais é exatamente igual à cardinalidade do conjunto das partes dos naturais. Isso pode ser feito se imaginarmos os reais como sequências de bits e nos lembrarmos de que o conjunto dos subconjuntos de naturais também pode ser entendido dessa maneira.

[3] *span* significa subespaço gerado.

construção envolvendo o Axioma da Escolha. Como $\{x_\mu\}$ é um conjunto infinito, dim $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ é infinita.

Escreveremos então o seguinte: seja $B = \{r_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma base de Hamel do espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$. Cada $x \in \mathbb{R}$ é escrito de maneira única como combinação linear de elementos de B,

$$x = p_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} r_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k} r_{\alpha_k},$$

onde p_{α_1}, p_{α_2}, ..., $p_{\alpha_k} \in \mathbb{Q}$.

5 EXEMPLO DE FUNÇÃO QUE PRESERVA A SOMA E NÃO É LINEAR

Este capítulo contém basicamente dois resultados importantes que usaremos para mostrar exemplos de funções reais que preservam a soma e não são da forma $f(x) = cx$. São eles a densidade dos racionais e irracionais nos reais e o Teorema do Valor Intermediário.

As definições a seguir serão úteis no Teorema 4.1, Teorema 4.2 e Corolário 4.1:

Definição 4.1 (**Supremo**) Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K.

Definição 4.2 (**Ínfimo**) Analogamente, um elemento $a \in K$ chama-se *ínfimo* de um conjunto $Y \subset K$, limitado inferiormente, quando a é a maior das cotas inferiores de K.

Exemplo 4.1: Seja $Y \subset \mathbb{Q}$ o conjunto das frações do tipo $\frac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\inf Y = 0$ e $\sup Y = \frac{1}{2}$.

5.1 Densidade dos racionais na reta real

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se dado qualquer intervalo (a, b) em $\mathbb{R}$ existe um elemento $x \in X \bigcap (a, b)$.

Vamos mostrar que os racionais são densos em $\mathbb{R}$. Lembremos antes da propriedade arquimediana em $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1 (Propriedade Arquimediana): Se ρ e ϵ são positivos, então $n\epsilon > \rho$ para algum inteiro n.

Demonstração: A prova será feita por contradição. Vamos supor que a afirmação seja falsa. Temos então que ρ é cota superior do conjunto

$$A = \{x = n\epsilon\},$$

onde n é um inteiro. Consequentemente A tem um supremo β. Assim, para todo inteiro n,

$$n\epsilon \leq \beta. \tag{5.1}$$

Como n é inteiro, $n + 1$ também é, assim, (5.1) implica que

$$(n + 1)\epsilon \leq \beta$$

e consequentemente,

$$n\epsilon \leq \beta - \epsilon$$

para todo inteiro n. Então, $\beta-\epsilon$ é uma cota superior de A. Como $\beta-\epsilon < \beta$, isto contradiz a definição de β, pois o supremo β deveria ser a menor das cotas superiores.

Teorema 4.2: O conjunto dos números racionais é denso nos reais ; isto é, se a e b são números reais com $a < b$; existe um número racional p/q tal que $a < p/q < b$.

Demonstração: Temos três casos, (1) $0 < a < b$, (2) $a < 0 < b$ e (3) $a < b < 0$. Vejam que só precisamos provar o caso (1), pois o caso (2) é trivial, basta tomar $p/q = 0$ e uma vez provado o caso (1), basta multiplicarmos a desigualdade de (1) por -1 e teremos a veracidade de (3). Então, provemos (1).

Se a e b forem racionais, então basta tomarmos $\frac{p}{q} = \frac{a+b}{2}$, ou seja, $p/q \in \mathbb{Q}$. Mas e se a e b forem irracionais? Tomemos $\frac{1}{n} < b-a, n \in \mathbb{N}$. Como *inf* $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, existe $\frac{1}{n} < b-a < b$. Seja agora o conjunto X tal que $X = \{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{n} \geq b\}$. Pela propriedade arquimediana dos reais, $X \neq \emptyset$ e $1 \notin X$, pois $\frac{1}{b} < b$. E pelo princípio da boa ordenação, existe $k+1 = \mathit{inf}(X) \in X$.

Afirmação: $\frac{k}{n} \in (a,b)$.

Como $k \notin X$, temos que $\frac{k}{n} < b$ e $\frac{k+1}{n} \geq b$. Agora, precisamos mostrar que $\frac{k}{n} > a$. Sabemos que $\frac{1}{n} < b-a$. Como $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n} < b-a$, então $a + \frac{1}{n} < b \Rightarrow \frac{-1}{n} - a > -b$. Agora, veja $\frac{k}{n} = \frac{k+1}{n} - \frac{1}{n} - a > \frac{k+1}{n} - b \geq 0$, ou seja, $\frac{k}{n} - a > 0$, assim, $a < \frac{k}{n}$. Portanto, achamos um racional $\frac{k}{n}$ pertencente ao intervalo (a,b).

5.2 Densidade dos irracionais na reta real

Teorema 4.3: O conjunto dos números irracionais é denso nos reais ; isto é, se a e b são reais com $a < b$; existe um número irracional t tal que $a < t < b$.

Demonstração: A partir do resultado do Teorema 2, existem números racionais q_1 e q_2 tais que

$$a < q_1 < q_2 < b \tag{5.2}$$

Seja $t = q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 - q_1)$.

Veja que t é irracional e $q_1 < t < q_2$. Comparando esta última inequação com a inequação (5.2), podemos concluir que $a < t < b$.

5.3 Teorema do Valor Intermediário

Inicialmente, apresentaremos um caso particular do Teorema do Valor Intermediário, chamado de Teorema de Bolzano. Na verdade, na maioria das aplicações, é esta versão que é utilizada com frequência. De posse do Teorema de Bolzano, mostraremos o caso geral. Antes porém, mostremos dois resultados importantes (O Teorema dos Intervalos Encaixantes e o Teorema de Bolzano).

Teorema 4.4:(Teorema dos Intervalos Encaixantes) Sejam

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$$

uma sequência de intervalos satisfazendo as seguintes condições:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ... \tag{5.3}$$

para todo $r > 0$, existe um natural n tal que

$$b_n - a_n < r \tag{5.4}$$

Então, existe um único real α que pertence a todos os intervalos da sequência, isto é, existe um único real α tal que para todo $n, a_n \leq \alpha \leq b_n$.

Demonstração: Considere o conjunto $A = a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \subset \mathbb{R}$. Note que A é não vazio e limitado superiormente, pela condição (5.3). Então, pela Propriedade do Supremo, existe $\alpha = \sup A$. Além disso, ainda por (5.3), é claro que para todo natural n, temos $a_n \leq \alpha \leq b_n$. Com isso a existência de α nas condições do teorema está provada.

Provemos agora a unicidade. Suponha que exista outro $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq \alpha$ tal que, para todo n, $a_n \leq \beta \leq b_n$. Então, neste caso teríamos $|\alpha - \beta| < b_n - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Note que à medida que n cresce, a diferença $b_n - a_n$ fica suficientemente próxima de zero. Consequentemente, a diferença $|\alpha - \beta|$ também fica suficientemente próxima de zero, o que nos permite concluir que, no limite, $\alpha = \beta$. Absurdo, pois $\alpha \neq \beta$. Portanto, α existe e é único. Esse resultado pode ser visto em Lima (2016)

A proposição a seguir será utilizada na prova do Teorema 4.5.

Proposição 4.1: Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $p \in A$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in A$ com $\lim_{n\to+\infty} x_n = p$, tem-se que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(p)$.

Teorema 4.5: (Teorema de Bolzano) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários. Então, existirá pelo menos um $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos supor que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Façamos $a = a_0$ e $b = b_0$. Seja c_0 o ponto médio do segmento $[a_0, b_0]$. Desta forma, temos

$$f(c_0) < 0 \ ou \ f(c_0) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_0) < 0$ ($f(c_0) \geq 0$ apresenta raciocínio análogo) e façamos $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$. Então $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Seja c_1 o ponto médio do segmento $[a_1, b_1]$. Desta forma

$$f(c_1) < 0 \ ou \ f(c_1) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_1) \geq 0$ ($f(c_1) < 0$ apresenta raciocínio análogo) e façamos $a_1 = a_2$ e $c_1 = b_2$. Assim, $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) \geq 0$.

Prosseguindo com este o raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos encaixados da forma:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

Note que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a_n) < 0 \, e \, f(b_n) \geq 0. \tag{5.5}$$

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq \alpha \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

As sequências (a_n) e (b_n) convergem para α devido a maneira como (a_n) e (b_n) foram construídas. Como por hipótese f é contínua, pela Proposição 1, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\alpha) \text{ e } \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\alpha). \tag{5.6}$$

De 5.5 e 5.6 conclui-se $f(\alpha) \leq 0 \, e \, f(\alpha) \geq 0$. Portanto, $f(\alpha) = 0$.

Teorema 4.6: (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se d for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = d$.

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade, que $f(a) < d < f(b)$. Considere a função $g(x) = f(x) - d$, onde $x \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, temos que g também o é.
Além disso,

$$g(a) = f(a) - d < 0 \, e \, g(b) = f(b) - d > 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [a, b]$ tal que se $g(\alpha) = 0$. Portanto, $f(\alpha) - d = 0$, donde $f(\alpha) = d$. Como queríamos mostrar. Esse resultado também pode ser observado em Muniz Neto (2015)

Vejamos agora um resultado decorrente do Teorema do Valor Intermediário, o corolário abaixo:

Corolário 4.1: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo I. Então $f(I)$ é um intervalo.
Com efeito, sejam $\alpha = \inf f(x)$ e $\beta = \sup f(x)$. (Esta notação é simbólica. Podemos ter $\alpha = -\infty$, se f for ilimitada inferiormente em I, ou $\beta = +\infty$, no caso de f ser ilimitada superiormente em I.) Afirmamos que $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β. Ou seja, dado y com $\alpha < y < \beta$, deve existir $x \in I$ tal que $y = f(x)$. De fato, pelas definições de inf e sup (ou pela definição de conjunto ilimitado, no caso de algum dos extremos α e β ser infinito) existem a, $b \in I$ tais que $f(\alpha) < y < f(\beta)$. Pelo Teorema 4.6, existe um ponto x, entre a e b tal que $f(x) = y$. Tal resultado também pode ser encontrado em Lima (2010)

5.4 Exemplo de função que preserva a soma e não é linear

Vamos enfim dar um exemplo de uma função real que preserva a soma, mas não é da forma cx.

Seja $B = \{r_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma base de Hamel do espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre os $\mathbb{Q}$. Cada $x \in \mathbb{R}$ é escrito de maneira única como combinação linear de um número finito de elementos de B com coeficientes racionais,

$$p_\alpha : x = p_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} r_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k} r_{\alpha_k},$$

onde p_{α_1}, p_{α_2}, ..., $p_{\alpha_k} \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 4.2: Tomando $x = p_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} r_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k} r_{\alpha_k}$ e definindo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$f(x) = p_{\alpha_1}f(r_{\alpha_1}) + p_{\alpha_2}f(r_{\alpha_2}) + ... + p_{\alpha_k}f(r_{\alpha_k})$, onde $f(r_{\alpha_i}) = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$, obtemos $f(x)$ tal que

$$f(x) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k}.$$

Vamos mostrar que f é aditiva, ou seja, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Sejam $x = p_{\alpha_1}r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2}r_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k}r_{\alpha_k}$ e $y = q_{\beta_1}r_{\alpha_1} + q_{\beta_2}r_{\alpha_2} + ... + q_{\beta_k}r_{\alpha_k}$, onde p_{α_1}, p_{α_2}, ..., $p_{\alpha_k} \in \mathbb{Q}$ e q_{β_1}, q_{β_2}, ..., $q_{\beta_k} \in \mathbb{Q}$.

•$x + y = (p_{\alpha_1} + q_{\beta_1})r_{\alpha_1} + (p_{\alpha_2} + q_{\beta_2})r_{\alpha_2} + ... + (p_{\alpha_k} + q_{\beta_k})r_{\alpha_k}$

• Usando a definição da função acima dada, $f(x+y) = (p_{\alpha_1} + q_{\beta_1})f(r_{\alpha_1}) + (p_{\alpha_2} + q_{\beta_2})f(r_{\alpha_2}) + ... + (p_{\alpha_k} + q_{\beta_k})f(r_{\alpha_k}) = (p_{\alpha_1} + q_{\beta_1}) + (p_{\alpha_2} + q_{\beta_2}) + ... + (p_{\alpha_k} + q_{\beta_k}) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k} + q_{\beta_1} + q_{\beta_2} + ... + q_{\beta_k}$

• Por outro lado, temos também como consequência da definição da função dada acima que $f(x) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k}$ e $f(y) = q_{\beta_1} + q_{\beta_2} + ... + q_{\beta_k}$, assim $f(x) + f(y) = f(x+y)$, como queríamos mostrar.

Em particular, como $\mathbb{R}$ é um intervalo (usando o Corolário 4.1) se f fosse contínua, $f(\mathbb{R})$ seria também um intervalo; mas, pela definição de f, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ para cada $x \in \mathbb{R}$, gerando contradição com a densidade dos irracionais na reta. Segue desse resultado decorrente do Teorema do valor intermediário que f não é contínua. Em particular, f não é da forma cx.

Exemplo 4.3: Nós agora obervamos que se $f(x)$ está definida arbitrariamente em B e se para cada x,

$$x = p_{\alpha_1}r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2}r_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k}r_{\alpha_k},$$

nós definimos $f(x)$ por

$$f(x) = p_{\alpha_1}f(r_{\alpha_1}) + p_{\alpha_2}f(r_{\alpha_2}) + ... + p_{\alpha_k}f(r_{\alpha_k}).$$

Veja que a função $f(x)$ tem a propriedade $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pois tomando

$$x = p_{\alpha_1}r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2}r_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k}r_{\alpha_k},$$

$$y = q_{\beta_1}r_{\alpha_1} + q_{\beta_2}r_{\alpha_2} + ... + q_{\beta_k}r_{\alpha_k}$$

e somando membro a membro:

$$x + y = (p_{\alpha_1} + q_{\beta_1})r_{\alpha_1} + ...(p_{\alpha_k} + q_{\beta_k})r_{\alpha_k}.$$

Apliquemos f nessa igualdade:

$$f(x+y) = (p_{\alpha_1} + q_{\beta_1})f(r_{\alpha_1}) + ...(p_{\alpha_k} + q_{\beta_k})f(r_{\alpha_k})$$

$$= f(x) + f(y).$$

Agora se $f(r_{\alpha_1}) = 1$ e $f(r_{\alpha_2}) = 0$, a função não pode ser da forma cx. Vejamos: Se $f(r_{\alpha_1}) = 1$ e $f(r_{\alpha_2}) = 0$ e fazendo $m = x + y$, teremos que $f(m) = f(x + y) = (p_{\alpha_1} + q_{\beta_1}) + 0 + ... + (p_{\alpha_k} + q_{\beta_k})f(r_{\alpha_k})$, ou seja, $f(m)$ depende de uma constante $(p_{\alpha_1} + q_{\beta_1}) \neq 0$ somada com outra parcela que depende de $f(r_{\alpha_k})$, assim $f(m)$ que não é da forma cm, sendo assim, f não é da forma cx. A ideia desse exemplo é encontrada em Goffman (1952)[1].

Vamos finalizar este capítulo com um exemplo interessante sobre as funções que preservam a soma (usaremos este fato dentro do corolário a seguir).

Corolário 4.2: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva, tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ então f é uma função do tipo $f(x) = b^{ax}$, com $b > 0$ e $b \neq 1$.

Demonstração: Se $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, então, aplicando logaritmo com uma base b qualquer ($b > 0$ e $b \neq 1$) em ambos os lado, obtemos $\log_b f(x + y) = \log_b(f(x) \cdot f(y)) \Rightarrow \log_b f(x+y) = \log_b f(x) + \log_b f(y)$. Ou seja, $\log_b f(x)$ preserva a soma. Como f é contínua e positiva, $\log_b f(x)$ também será contínua e positiva e terá a forma ax (linear). Portanto, $\log_b f(x) = ax \Rightarrow f(x) = b^{ax}$.

[1] O Livro *Real Functions* é um produto de um curso sobre Funções de uma variável real de 1953. É um livro didático. Adequadamente, possui muitos exercícios, desde os mais simples, incluídos para ajudar o estudante a fixar certas concepções na mente e outros exercícios que requerem vários graus de conhecimento e habilidade. Contempla temas desde Conjunto e operações, Números reais, limites, Funções, Sequências, passando por Derivada, Aplicações sobre a Boa Ordenação, Conjunto mensurável, finalizando com Função mensurável, Integral e Teorema Fundamental do Cálculo.

6 EXEMPLOS ESPECIAIS

Neste capítulo, valor definir a Propriedade do Valor Médio (PVM) e ver alguns de seus resultados relacionados às funções reais.

6.1 Propriedade do Valor Médio

Segundo Figueiredo (1996) uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a propriedade do valor médio se para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, temos $f(x_0) = \dfrac{1}{2}[f(x_0 + r) + f(x_0 - r)]$.

Verificamos que as funções constante, identidade, linear e afim satisfazem a PVM:

a) Função Constante: $f(x) = b$. Veja que $f(x_0) = b$, $f(x_0 + r) = b$, $f(x_0 - r) = b$. Assim, $\dfrac{[f(x_0 + r) + f(x_0 - r)]}{2} = \dfrac{b + b}{2} = \dfrac{2b}{2} = b = f(x_0)$.

b)Função Identidade: $f(x) = x$. Veja que $f(x_0) = x_0$, $f(x_0 + r) = x_0 + r$, $f(x_0 - r) = x_0 - r$. Assim, $\dfrac{[f(x_0 + r) + f(x_0 - r)]}{2} = \dfrac{x_0 + r + x_0 - r}{2} = \dfrac{2x_0}{2} = x_0 = f(x_0)$.

c)Função Linear: $f(x) = ax$. Veja que $f(x_0) = ax_0$, $f(x_0 + r) = ax_0 + ar$, $f(x_0 - r) = ax_0 - ar$. Assim, $\dfrac{[f(x_0 + r) + f(x_0 - r)]}{2} = \dfrac{ax_0 + ar + ax_0 - ar}{2} = \dfrac{2ax_0}{2} = ax_0 = f(x_0)$.

d)Função Afim: $f(x) = ax + b$. Veja que $f(x_0) = ax_0 + b$, $f(x_0 + r) = ax_0 + ar + b$, $f(x_0 - r) = ax_0 - ar + b$. Assim, $\dfrac{[f(x_0 + r) + f(x_0 - r)]}{2} = \dfrac{ax_0 + ar + b + ax_0 - ar + b}{2} = \dfrac{2ax_0 + 2b}{2} = ax_0 + b = f(x_0)$.

Por outro lado, funções como a Função Quadrática e a Exponencial não possuem a PVM:

e)Função Quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Veja que $f(x_0) = a{x_0}^2 + bx_0 + c$, $f(x_0 + r) = a({x_0}^2 + 2x_0r + r^2) + b(x_0 + r) + c$, $f(x_0 - r) = a({x_0}^2 - 2x_0r + r^2) + b(x_0 - r) + c$. Assim, $\dfrac{[f(x_0 + r) + f(x_0 - r)]}{2} = \dfrac{a({x_0}^2 + 2x_0r + r^2) + b(x_0 + r) + c}{2} = \dfrac{a({x_0}^2 - 2x_0r + r^2) + b(x_0 - r) + c}{2} = a({x_0}^2 + r^2) + bx_0 + c \neq f(x_0)$.

a) Função Exponencial: $f(x) = ab^x, (b \neq 1)$. Veja que $f(x_0) = ab^{x_0}$, $f(x_0 + r) = ab^{x_0 + r}$, $f(x_0 - r) = ab^{x_0 - r}$. Assim, $\dfrac{[f(x_0 + r) + f(x_0 - r)]}{2} = \dfrac{ab^{x_0 + r} + ab^{x_0 - r}}{2} = \dfrac{ab_0^x[b^r + \frac{1}{b^r}]}{2} \neq f(x_0)$.

6.2 Propriedade do Valor Médio e uma interpretação geométrica

Note que x é o ponto médio do segmento $[x-r, x+r]$. Quando f possui a PVM, $f(x)$ é o ponto médio do segmento $[f(x_0-r), f(x_0+r)]$, ou seja, é o valor médio de $f(x_0-r)$, $f(x_0+r)$. Geometricamente, as funções que possuem a PVM possuem gráficos que ou são retas não verticais (as funções afim, em particular, a constante, a linear e a identidade também) ou gráficos formados por pontos igualmente espaçados.

6.3 Propriedade do Valor Médio e alguns resultados

Inicialmente, vamos mostrar que toda função que preserva a soma possui a Propriedade do Valor Médio (PVM).

Proposição 5.1: Toda função que preserva a soma possui a PVM.

Se uma função preserva a soma, então, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $f(x_0 + r + x_0 - r) = f((x_0 + r) + (x_0 - r)) = f(x_0 + r) + f(x_0 + r) \Longrightarrow f(2x_0) = f(x_0 + r) + f(x_0 + r)$. Como a função preserva a soma, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade ($3 \Rightarrow 1$), obtemos $f(2x_0) = 2f(x_0) = f(x_0+r)+f(x_0+r) \Longrightarrow f(x_0) = \dfrac{[f(x_0+r)+f(x_0+r)]}{2}$, ou seja, a função possui a PVM. Como queríamos mostrar.

Será que a recíproca é verdadeira? Ou seja, se uma função possui a PVM, ela preserva a soma? A resposta é não.

Vimos no item **d** que a função afim possui a PVM, no entanto, $f(x+y) = ax + ay + b$ e $f(x) + f(y) = ax + ay + 2b$, assim, $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$.

Proposição 5.2: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a PVM e $f(0) = 0$, então f preserva a soma.

Inicialmente, vamos mostrar que $f(-x) = -f(x)$, ou seja, $f(x)$ é ímpar.

Como f possui a PVM, então, tomando $x_0 = 0$, temos $f(0) = \dfrac{[f(0-r)+f(0+r)]}{2} \Longrightarrow 2f(0) = f(-r)+f(r) \Longrightarrow 2 \cdot 0 = f(-r)+f(r) \Longrightarrow f(-r) = f(r)$, assim, f é ímpar. Nosso objetivo é mostrar que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$. A partir da definição, é possível mostrar que $f(x) = \dfrac{[f(x+r)+f(x-r)]}{2}$ vale para quaisquer x e r reais. De fato:

Caso $r = 0$**:** $f(x) = \dfrac{[f(x)+f(x)]}{2}$.

Caso $r < 0$**:** basta escrever que $-r > 0$ e podemos escrever $f(x) = \dfrac{[f(x+(-r))+f(x-(-r))]}{2} = \dfrac{[f(x-r)+f(x+r)]}{2}$. Reescrevemos a PVM, então, para x e y reais quaisquer como

(1): $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[f(x+y) + f(x-y)\right]$ e
(2): $f(y) = \dfrac{1}{2}\left[f(y+x) + f(y-x)\right]$.
Como f é ímpar, $f(y-x) = -f(x-y)$. Assim, **(2)** é reescrito como
(3): $f(y) = \dfrac{1}{2}\left[f(y+x) - f(x-y)\right]$.

Somando **(1)** e **(3)** membro a membro, obtemos: $f(x) + f(y) = \dfrac{2f(x+y)}{2} \Longrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$. Como queríamos mostrar.

Também queremos mostrar os seguintes corolários:

Corolário 5.1: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a PVM e $f(0) = 0$, então $f \mid \mathbb{Q}$ é linear (isto significa que f é função linear nos racionais).

Pela Proposição 2, f preserva a soma. Usando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade ($3 \Rightarrow 1$), temos que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,
Fazendo $x = y$ e usando a igualdade **(1)** anteriormente dada, $f(y) = \dfrac{f(0) + f(2y)}{2} \Longrightarrow f(2y) = 2f(y)$. Fazendo $x = 2y$, obtemos $f(3y) = 3f(y)$. E recursivamente assim, chegamos a $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Ainda usando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (agora $1 \Rightarrow 2$), pondo $a = f(1)$, obtemos $f(x) = f(1 \cdot x) = xf(1) = ax$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Corolário 5.2: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a PVM, então $f \mid \mathbb{Q}$ é afim.

Consideremos $b = f(0)$. Definindo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - b$, podemos verificar que g possui a PVM, veja: $A = g(x_0) = \dfrac{f(x_0 - r) + f(x_0 + r)}{2} - b$ e $B = \dfrac{g(x_0 - r) + g(x_0 + r)}{2} = \dfrac{f(x_0 - r) - b + f(x_0 + r) - b}{2} = \dfrac{f(x_0 - r) + f(x_0 + r)}{2} - b = A$, ou seja, g possui a PVM.
Por construção, $g(0) = f(0) - b = b - b = 0$. Aplicando o que foi provado no Corolário 5.1, temos então que $g \mid \mathbb{Q}$ é linear. Sendo assim, $f(x) = g(x) + b = ax + b$ (afim) para todo $x \in \mathbb{Q}$. Como queríamos mostrar.

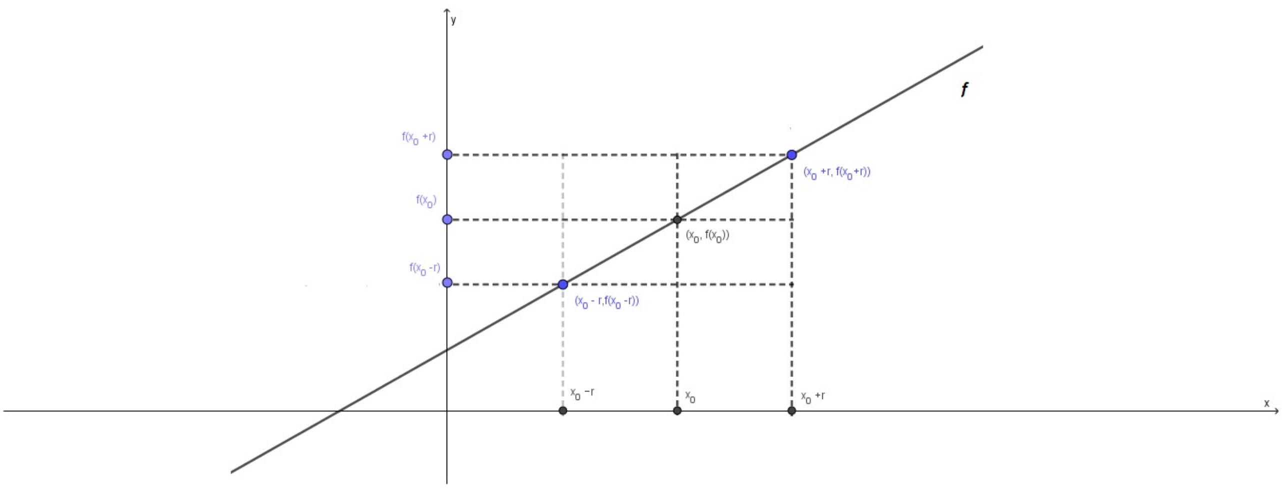
Além do que mostramos acima, pela interpretação geométrica, quando f possui a PVM, $f(x)$ é o ponto médio do segmento $[f(x_0 - r), f(x_0 + r)]$, f possuindo assim um gráfico formado por pontos igualmente espaçados, $f \mid \mathbb{Q}$ será do tipo: $f(x) = ax + b$. Veja um esboço do gráfico abaixo:

Podemos notar, como comentamos anteriormente:

$$(x_0, f(x_0)) = \left(\frac{x_0 - r + x_0 + r}{2}, \frac{f(x_0 - r) + f(x_0 + r)}{2}\right).$$

Corolário 5.3: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a PVM e é contínua, então f é afim.

Figura 4 – Esboço da função afim f



Fonte: elaborada pela autora.

Pelo Corolário 5.2, se f possui a PVM, então, já sabemos que $f \mid \mathbb{Q}$ é afim, ou seja, $f(r) = ar + b$, para r racional. Agora, temos uma hipótese a mais: f é contínua. Sabemos que todo número real x é limite de uma sequência de números racionais r_n, assim, a continuidade de f nos dá $f(x) = \lim f(r_n) = \lim ar_n + b = ax + b$ (f afim), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Corolário 5.4: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a PVM e é crescente (ou decrescente), então f é afim.

Pelo Corolário 5.2, se f possui a PVM, então, já sabemos que $f \mid \mathbb{Q}$ é afim, ou seja, $f(r) = ar + b$, para r racional. Agora, temos uma hipótese a mais: f é crescente, ou seja, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Mostraremos agora que se tem $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos por absurdo, que exista algum número real $x(x \notin \mathbb{Q})$ tal que $f(x) \neq ax + b$. Vamos admitir que $f(x) < ax + b$ (o caso $f(x) > ax + b$ é feito analogamente).

$$f(x) < ax + b \Longrightarrow \frac{f(x) - b}{a} < x$$

Tomemos um número racional r no interior do intervalo de extremos $\dfrac{f(x) - b}{a}$ e x. Assim,

$\dfrac{f(x)-b}{a} < r < x$. Então

$$f(x)-b < ar < ax \Longrightarrow f(x) < ar+b < ax+b \Longrightarrow$$

$$f(x) < f(r) < ax+b,$$

mas isto é um absurdo, pois como f é crescente e $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Assim, por contradição, $f(x) = ax+b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo de função que possui a PVM e não é afim.

Por fim, vejamos um exemplo de uma função que possui a PVM e não é afim. Lembremos do Exemplo 4.2: Tomando $x = p_{\alpha_1}r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2}r_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k}r_{\alpha_k}$ e definindo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = p_{\alpha_1}f(r_{\alpha_1}) + p_{\alpha_2}f(r_{\alpha_2}) + ... + p_{\alpha_k}f(r_{\alpha_k})$, onde $f(r_{\alpha_i}) = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$, obtemos $f(x)$ tal que

$$f(x) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + ... + p_{\alpha_k}.$$

Tal função preservava a soma e vimos logo acima que toda função que preserva a soma possui a PVM. No entanto, a função do exemplo 4.2 não era do tipo linear, nem contínua, não podendo ser afim então.

7 CONCLUSÕES

Nesta dissertação foram apresentados exemplos de funções reis que preservam a soma, ou seja, funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo x e y reais. Vimos iniciamente que a função linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$ possui a propriedade da preservação da soma. E depois, conseguimos mostrar outros exemplos que possuem essa propriedade, e tais funções eram não-contínuas. Foi usado para isto a Base de Hamel para os reais e o Lema de Zorn.

Em nosso estudo tratamos nos dois primeiros capítulos sobre as Funções Afim e Linear. Como mostrado são funções reais de uma variável real, isto é, funções $f : X \to \mathbb{R}$ que tem como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais. Caracterizamos a Função Afim, falamos da sua continuidade e mostramos exemplos sobre a ligação que a Função Afim tem com as progressões aritméticas. Definimos a Função Linear, demonstramos o Teorema Fundamental da Prporcionalidade e demos alguns exemplos. E vimos no capítulo 2 que a Função Linear preserva a soma.

Nos capítulos 3 e 4 foi demonstrado que o espaço vetorial dos reais possui uma base de Hamel sobre o corpo dos racionais, utilizando Álgebra e o Lema de Zorn para tal. Depois que falamos da densidade dos racionais e irracionais na reta real e do Teorema do Valor Intermediário, tivemos condições de exibir outras funções (nos exemplos vistos, descontínuas) que preservavam a soma e não eram lineares.

Foi definida a Propriedade do valor médio e funções que possuem essa propriedade. Provamos duas proposições e quatro corolários decorrentes da propriedade do valor médio e a relação dela com a preservação da soma das funções reais.

Todos os resultados, definições e teoremas demonstrados nesse trabalho fazem parte do estudo dos números reais e funções reais. As funções reais são uma ferramenta que nos permite descrever e analisar inúmeros problemas das ciências em geral e do nosso cotidiano. Esperamos que este trabalho seja útil ao leitor curioso e o instigue, assim como instigou a autora, a estudar mais e conhecer mais sobre não só a preservação da soma, mas também outras propriedades importantes referentes às funções reais.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

GOFFMAN, C. **Real Functions**. Holt, New York: Rinehart and Winston, 1952.

HALMOS, P. R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. São Paulo: Editora Polígono, 1973.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LIMA, E. L. **Análise Real Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. L.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

TRAJANO, A. **Aritmética Progressiva**. Rio de Janeiro: Editora Paulo Azevedo, 1954.

APÊNDICE A - O AXIOMA DA ESCOLHA

Iniciamos observando que um conjunto ou é vazio ou não é, se não é, então, por definição, há um elemento nele. Generalizando tal observação, se X e Y são conjuntos, e se um deles é vazio, então o produto cartesiano $X \times Y$ é vazio. Se nem X e nem Y são vazios, então há um elemento x em X, e há um elemento y em Y; segue que o par ordenado (x, y) pertence ao produto cartesiano $X \times Y$, e assim $X \times Y$ não é vazio. As observações anteriores constituem os casos $n = 1$ e $n = 2$ da seguinte asserção: se $\{X_i\}$ é uma sequência finita de conjuntos, para i em n, digamos, então uma condição necessária e suficiente para que seu produto cartesiano seja vazio é que pelo menos um deles seja vazio. A prova da asserção é por indução sobre n (iniciando com $n = 1$).

A generalização para famílias infinitas da parte não-trivial da asserção do parágrafo anterior (necessidade) é o seguinte importante princípio da teoria dos conjuntos.

Axioma da Escolha. *O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazio.*

E outras palavras: se $\{X_i\}$ é uma família de conjuntos não vazios indexada (ajustado ou corrigido em função de um índice definido como referência) por um conjunto não vazio I, então existe uma família $\{x_i\}$, $i \in I$, tal que $x_i \in X_i$ para cada i em I.

Suponhamos que $\mathcal{C}$ seja uma coleção não vazia de conjuntos não vazios. Podemos olhar $\mathcal{C}$ como uma família ou ainda podemos transformar $\mathcal{C}$ em um conjunto indexado, bastando usar a coleção $\mathcal{C}$ ela mesma no papel de conjunto de índices e usar a aplicação identidade de $\mathcal{C}$ no papel de indexadora. O axioma da escolha então diz que o produto cartesiano dos conjuntos $\mathcal{C}$ tem pelo menos um elemento. Um elemento de tal produto cartesiano é, por definição, uma função (família, conjunto indexado) cujo domínio é o conjunto de índices (neste caso $\mathcal{C}$) e cujo valor para cada índice pertence ao conjunto que comporta aquele índice. Concluimos que existe uma função f com domínio $\mathcal{C}$ tal que se $A \in \mathcal{C}$, então $f(A) \in A$. Essa conclusão aplica-se em particular, no caso em que $\mathcal{C}$ é a coleção de todos os subconjuntos não vazios de um conjunto não vazio X. Neste caso, a asserção é que existe uma função com domínio $\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ tal que se A está naquele domínio, então $f(A) \in A$. Em linguagem intuitiva, a função f pode ser desrita como uma escolha simultânea de um elemento de cada um dos muitos conjuntos; esta é a razão do para o nome do axioma. (Uma função que neste sentido "escolhe" um elemento de cada subconjunto não vazio de um cojunto X é chamada uma *função escolha* para X.) Se a coleção de conjuntos da qual estamos escolhendo é finita, então a possibilidade de escolha simultânea é uma fácil consequência do que conhecemos antes mesmo de ter sido enunciado o axioma da escolha; o papel do axioma é garantir essa possibilidade nos casos infinitos!

As duas consequências do axioma da escolha no parágrafo anterior (uma para conjunto potência de um conjunto e a outra para coleções mais gerais de conjuntos) são de fato simples reformulações daquele axioma.

Como uma ilustração do uso do axioma da escolha, consideremos a asserção de que se um conjunto é infinito, então ele tem um subconjunto equivalente a ω. Uma dedução informal pode ser feita como segue. Se X é infinito, então, em particular, não é vazio (isto é, não equivalente a 0); portanto tem um elemento, digamos x_0. Como X não é equivalente a 1, o conjunto $X - \{x_0\}$ não é vazio; portanto tem um elemento, digamos x_1. Repetimos esse argumento *ad infinitum*; o próximo passo, por exemplo, é dizer que $X - \{x_0, x_1\}$ não é vazio, e, portanto, tem um elemento digamos x_2. O resultado é uma sequência infinita $\{x_n\}$ de elementos distintos de X; q.e.d. Esse esboço de uma prova tem, pelo menos, a virtude de ser honesto em relação à ideia mais importante subjacente a ele; o ato de escolher um elemento de um conjunto não vazio foi repetido, com frequência, uma infinidade de vezes. O matemático experimentado com o axioma da escolha oferecerá frequentemente uma dedução informal semelhante; sua experiência o habilita a ver num relance como torná-lo preciso.

Seja f uma função de escolha para X; isto é, f é uma função da coleção de todos os subconjuntos não vazios de X em X ta que $f(A) \in A$ para todo A no domínio de f. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos os subconjutnos finitos de X. Como X é infinito, segue que $A \in \mathcal{C}$, então $X - A$ não é vazio, e, portanto, que $X - A$ pertence ao domínio de f. Definimos uma função g de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ escrevendo $g(A) = A \cup \{f(X - A)\}$. Em palavras: $f(A)$ é obtido por adjunção a A do elemento que f escolhe em $X - A$. Aplicando o teorema da recursão à função g; podemos iniciá-lo, por exemplo, com o conjunto vazio. O resultado é que existe uma função U de ω em $\mathcal{C}$ tal que $U(0) = \emptyset$ e tal que

$$U(n^+) = U(n) \cup \{f(X - U(n))\}$$

para todo número natural n.

Asserção: se $v(n) = \{f(X - U(n))\}$, então v é uma correspondência um-a-um de ω em X, e portanto, realmente, ω é equivalente a algum subconjunto de X (a saber, o contradomínio de v). Para provar a asserção, faremos uma série de observações elementares; suas provas são consequências fáceis das definições. Primeiro: $v(n) \notin U(n)$ para todo n. Segundo: $v(n) \in U(n^+)$ para todo n. Terceiro: se n e m são números naturais e $n \leq m$, então $U(n) \subset U(m)$. Quarto: se n e m são números naturais e $n < m$, então $v(n) \neq v(m)$. (Razão: $v(n) \in U(m)$, mas $v(m) \notin U(m)$.) A última observação implica que v aplica números naturais distintos sobre distintos elementos de X; tudo o que temos a recordar é que de quaisquer dois números naturais distintos um deles é estritamente menor do que o outro.

A prova está completa; sabemos agora que todo conjunto infinito tem um subconjunto equivalente a ω. Este resutado, provado aqui não tanto por seu interesse intrínseco como por ser um exemplo do uso próprio do axioma da escolha, tem um corolário interessante. A asserção é que um conjunto é infinito se e somente se é equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo. O "se" já sabemos; diz meramente que um conjunto finito não pode ser equivalente a um subconjunto próprio. Para provar o "somente se", suponhamos que X é infinito, e seja v uma correspondência um-a-um de ω em X. Se x está no contradomínio de v, digamos $x = v(n)$, escrevemos $h(x) = v(n^+)$; se x não está no contradomínio de v, escrevemos $h(x) = x$. É fácil verificar que h é uma correspondência um-a-um de X em si mesmo. Como o contradomínio de h é um subconjunto próprio de X (ele não contém $v(0)$), a prova do corolário está completa. A asserção do corolário foi usada por Dedekind como a definição de infinidade.