



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**FRANCISCO MISAEL ALBUQUERQUE LIRA**

**UM RESGATE À GEOMETRIA DESCRITIVA**

**FORTALEZA**

**2022**

FRANCISCO MISAEL ALBUQUERQUE LIRA

UM RESGATE À GEOMETRIA DESCRITIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

L745r Lira, Francisco Misael Albuquerque.  
Um resgate à geometria descritiva / Francisco Misael Albuquerque Lira. – 2022.  
69 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Geometria descritiva - Estudo e ensino. 2. Projeção. I. Título.

CDD 510

---

## UM RESGATE À GEOMETRIA DESCRITIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 13 / 06 / 2022.

### BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro  
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAr)

À minha mãe, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado saúde, força e muita determinação para meu propósito na terra.

A minha mãe, Ana Alice, que mesmo viúva desde cedo, sempre cuidou de mim com muito amor e acreditou no poder dos estudos e me incentivou sempre.

Ao meu irmão, Anderson, pois desde cedo foi quem me fez amar matemática e o aprendizado.

A minha namorada, Helmanoela, que me ajudou com as ilustrações deste trabalho. Além de sempre me apoiar e incentivar a buscar mais meu aprimoramento em diversas áreas da minha vida.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT, que se tornaram suporte uns para os outros, em especial ao Italo Renan, companheiro de trajetória na graduação e mestrado, não seria possível eu chegar até aqui sem essa união, irei sentir muita saudades.

A todos os professores do PROFMAT da UFC por terem compartilhado com maestria seus conhecimentos durante o curso. Em especial Prof. Dr. Marcelo Melo por me orientar e incentivar a buscar aprender cada vez mais, superando os desafios e também pela paciência na construção da minha dissertação do mestrado.

“Não é conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede o maior prazer.” (GAUSS, 1820, p.58)

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre geometria descritiva, mostrando sua importância teórica no desenvolvimento da visão espacial do estudante. Inicialmente são apresentados de maneira sucinta, postulados, teoremas, definições envolvendo conceitos de geometria espacial, retas e planos, como forma de embasamento teórico para o leitor. Em seguida, apresentamos o estudo de projeções, seus elementos e as projeções cônicas e cilíndricas, que são a base para o método de dupla projeção ortogonal ou método mongeano. Criado por Gaspar Monge matemático francês que construiu e formalizou uma técnica para que possamos projetar figuras tridimensionais em planos bidimensionais que denominamos de épura, material que revolucionou a época tanto nas áreas de engenharia quanto na área de desenho. Por fim, apresentamos aplicações de geometria descritiva em diferentes áreas de estudo, desenho de arquitetura, cartografia, bem como uma ideia de abordagem deste estudo no 3º ano do ensino médio, com objetivo de aumentar e melhorar a capacidade visual do aluno.

**Palavras-chave:** projeções; geometria descritiva; aplicações.

## ABSTRACT

The present work aims to present a study on descriptive geometry, showing its theoretical importance in the development of the student's spatial vision. Initially they are succinctly presented, postulates, theorems, definitions involving concepts of spatial geometry, lines and planes, as a theoretical basis for the reader. Inside then we present the study of projections, their elements and conical and cylindrical projections, which are the basis for the double orthogonal projection method or Mongeano method. Created by Gaspar Monge French mathematician who built and formalized a technique so that we can project three-dimensional figures onto two-dimensional planes that we call epura, material that revolutionized the time in both engineering and design. Finally, we present applications of descriptive geometry in different areas of study, design of architecture, cartography, as well as an idea of approaching this study in the 3rd year of teaching medium, with the aim of increasing and improving the student's visual ability.

**keywords:** projections; descriptive geometry; applications.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	RETAS E PLANOS . . . . .	14
2.1	Construção geométrica . . . . .	14
2.2	Postulados . . . . .	17
2.2.1	<i>Postulado da Reta</i> . . . . .	17
2.2.2	<i>Postulado do Plano</i> . . . . .	17
2.3	Determinação de um plano . . . . .	19
2.4	Paralelismo entre retas . . . . .	20
2.5	Perpendicularismo entre reta e plano . . . . .	21
3	NOÇÕES DE GEOMETRIA DESCRITIVA . . . . .	23
3.1	Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano . . . . .	24
3.2	Elementos de projeção . . . . .	24
3.3	Sistemas projetivos . . . . .	25
3.3.1	<i>Projeção cônica (ou central)</i> . . . . .	26
3.3.2	<i>Projeção cilíndrica (ou paralela)</i> . . . . .	27
3.4	Método da dupla projeção ortogonal (ou método Mongeano) . . . . .	29
3.5	Estudo do ponto . . . . .	30
3.6	Cota, afastamento e épura . . . . .	31
3.7	localizando pontos através de suas coordenadas . . . . .	32
3.8	Simetria de pontos . . . . .	34
3.8.1	<i>Pontos simétricos em relação aos planos de projeção</i> . . . . .	35
3.8.2	<i>Pontos simétricos em relação à linha de terra</i> . . . . .	36
3.9	Estudo da reta . . . . .	37
3.9.1	<i>Traço de retas</i> . . . . .	38
3.10	Posições da reta . . . . .	40
3.10.1	<i>Reta qualquer</i> . . . . .	40
3.10.2	<i>Reta horizontal (ou de nível)</i> . . . . .	41
3.10.3	<i>Reta frontal (ou de frente)</i> . . . . .	42
3.10.4	<i>Reta fronto-horizontal (ou paralela a LT)</i> . . . . .	43
3.10.5	<i>Reta vertical</i> . . . . .	44

3.10.6	<i>Reta de topo</i> . . . . .	45
3.10.7	<i>Reta de perfil</i> . . . . .	46
3.11	<b>Pertinência de ponto à reta</b> . . . . .	47
3.12	<b>Estudo do plano</b> . . . . .	49
3.13	<b>Traços de plano</b> . . . . .	50
3.14	<b>Épura de planos</b> . . . . .	53
3.14.1	<i>Plano horizontal</i> . . . . .	54
3.14.2	<i>Plano frontal</i> . . . . .	55
3.14.3	<i>Plano de topo</i> . . . . .	56
3.14.4	<i>Plano vertical</i> . . . . .	57
3.14.5	<i>Plano de perfil</i> . . . . .	58
4	<b>APLICAÇÕES DE GEOMETRIA DESCRITIVA</b> . . . . .	60
4.1	<b>Desenho de Arquitetura</b> . . . . .	60
4.2	<b>Cartografia</b> . . . . .	61
4.3	<b>Geometria Descritiva em Sala de aula</b> . . . . .	63
4.4	<b>Computação</b> . . . . .	64
5	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	67
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	68

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria Descritiva, com o passar do tempo, vem deixando de ser abordada no ensino da Matemática, tanto em nível médio quanto em nível superior. A educação escolar por um longo tempo manteve em seu currículo o ensino de Geometria Descritiva no ensino médio (como suporte ao ensino de geometria espacial), mas com o passar dos anos principalmente na década de setenta, houve um grande enfraquecimento do ensino de Geometria Descritiva no ensino médio e posteriormente isto se refletiu no ensino superior principalmente na área de matemática, o que acabou gerando por parte dos estudantes uma diminuição no desenvolvimento da capacidade de observação espacial, que segundo Dalila Ribeiro (2012)

“ Qualquer pessoa, de qualquer profissão que já alguma vez teve de explicar ou memorizar o acesso a um determinado lugar, sentiu necessidade de se apoiar num esboço de diagrama espacial no percurso. Se a pessoa é dotada de capacidade espacial pode mentalmente manipular, rodar ou inverter uma figura representada.” (RIBEIRO, 2012, p.24).

A escassez de material de qualidade sobre este tema juntamente com o enfraquecimento do seu ensino ao longo dos anos tanto em nível médio como superior, torna-se um grande desafio escrever sobre este tema, mas iremos trazer de forma clara e objetiva o estudo sobre Geometria Descritiva buscando dar suporte a professores que desejam utilizá-la no Ensino médio e superior, mostrando também sua importância em algumas áreas de conhecimento.

Segundo Silva (2006), a visão dos discentes ficou prejudicada porque o contato dos mesmos com geometria descritiva no ensino médio foi pouca ou nula. Desse modo, ele relata que o aprimoramento do raciocínio lógico-matemático e da visão espacial do aluno já chega defasado no ensino superior, acarretando várias dificuldades deste aluno nas disciplinas que trabalharam com habilidades de visualização espacial.

Bernardes (2019) afirma que a Disciplina de Geometria Descritiva é comumente descrita como uma disciplina difícil e exigente, o que gera muitas vezes nos alunos algum desconforto e receio. Contudo esta é indispensável para o desenvolvimento da capacidade de observação espacial. Diante disso percebemos a importância de uma boa metodologia de ensino, bem como a utilização de material construtivo visando trabalhar essa defasagem de visão espacial na qual o aluno se encontra, pois quando corretamente estudada, a Geometria Descritiva desenvolve não só a capacidade de leitura e interpretação de desenhos técnicos, mas também a habilidade de se imaginar objetos e projetos no espaço. Por esse motivo, o estudo da Geometria

Descritiva é de fundamental importância em diversos ramos de atividade, tais como: Engenharia, Arquitetura, Geologia, Matemática, Desenho Industrial, Cartografia, etc.

A Geometria Descritiva foi idealizada pelo matemático francês Gaspar Monge, entre 1766 e 1784, período em que ele lecionou na Ecole du génie, em Mézières. Publicamente ocorreu em 1794 em uma conferência realizada na Escola Normal Superior de Paris, que Monge apresentou seu novo método para engenheiros militares. Lagrange disse após a conferência: "Eu não sabia que sabia geometria descritiva".(J.L.Lagrange-1794)(SRUIK,1984, p.24)

O geômetra francês revolucionou a engenharia militar e o desenho mecânico. Contribuiu para o avanço da matemática preparando o caminho para Gauss que, por sua vez inspirou Bernhard Riemann.

A Geometria Descritiva é um ramo da Geometria de Posição e ela tem o objetivo de representar objetos de três dimensões em um plano bidimensional e, a partir das projeções, podendo assim determinar distâncias, ângulos, áreas e volumes em suas verdadeiras grandezas.

A principal finalidade deste trabalho é trazer um embasamento teórico sobre geometria descritiva, bem como formas e métodos de trabalhar a ideia de geometria descritiva para alunos do ensino médio e suas aplicações em diferentes áreas.

Metodologicamente, este trabalho adotou o tipo de pesquisa bibliográfica, na qual foi feita, inicialmente, uma revisão bibliográfica do tema, com o objetivo de conhecer a importância da Geometria Descritiva no desenvolvimento da capacidade de observação espacial do aluno, bem como a busca por ferramentas de estudo para o embasamento ao trabalho didático do professor de matemática tanto no ensino médio como no superior e sua aplicação em diversas áreas de estudos. Posteriormente foi realizada uma pesquisa em livros, dissertações e artigos que abordassem conceitos relacionados a este tema.

## 2 RETAS E PLANOS

Apresentaremos neste capítulo definições, postulados e teoremas envolvendo as principais ideias de geometria espacial com foco em retas e planos que irão nos dar embasamento para o melhor entendimento do capítulo 3 (Projeções e Método de dupla projeção ortogonal).

Começaremos com uma introdução do Livro Construções Geométricas de Wagner (2005), trazendo um exemplo de como resolver uma equação associada a ideia de construir uma solução (geometricamente). Visto que antigamente a palavra **número** se referia apenas os inteiros e uma fração (número racional) era vista como divisão de dois números inteiros, ou seja, ainda não se conhecia a noção de número real. Como motivação, considere o seguinte exemplo.

### 2.1 Construção geométrica

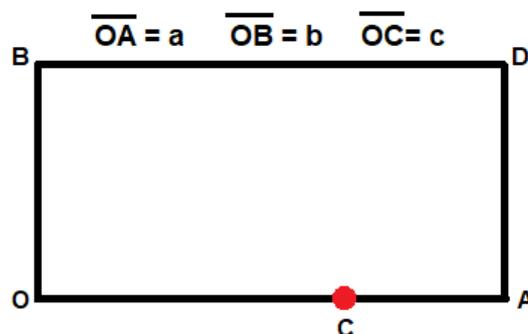
**Exemplo 2.1.1:** Encontrar, geometricamente, uma solução  $x$ , da equação  $a \cdot x = b \cdot c$ , onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  são valores conhecidos (ou seja, medidas de segmentos de retas dados, com  $a \neq 0$ ).

#### Resolução

Para se resolver esta equação geometricamente, podemos interpretar como  $x$  sendo o valor do comprimento da altura de um retângulo de comprimento de base  $a$  que tenha a mesma área de um retângulo de altura  $b$  e base  $c$ .

Primeiramente construa geometricamente um retângulo  $\square OBDA$ , de tal modo que  $\overline{OA} = a$ ,  $\overline{OB} = b$ , e sobre o lado  $\overline{OA}$  encontra-se o ponto  $c$ , onde  $\overline{OC} = c$ . (Veja figura abaixo).

Figura 1 – Construção 1

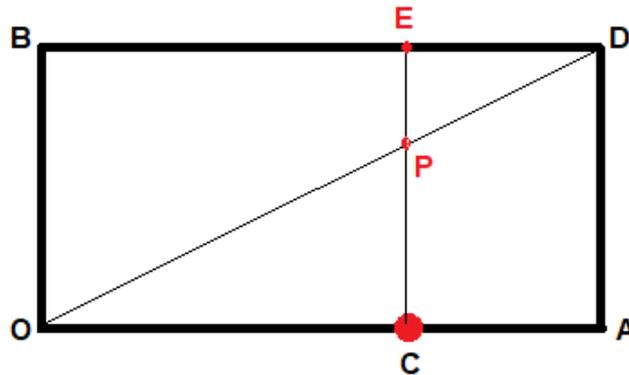


Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora trace pelo ponto C, a reta paralela à reta que contém lado  $\overline{OB}$ . Esta reta

encontrará a diagonal (ou o prolongamento da mesma)  $\overline{OD}$ , do retângulo  $\square OBDA$ , em um ponto que denotaremos por P e também encontrará o lado  $\overline{BD}$ , do retângulo  $\square OBDA$ , em um ponto que denotaremos por E (veja figura abaixo).

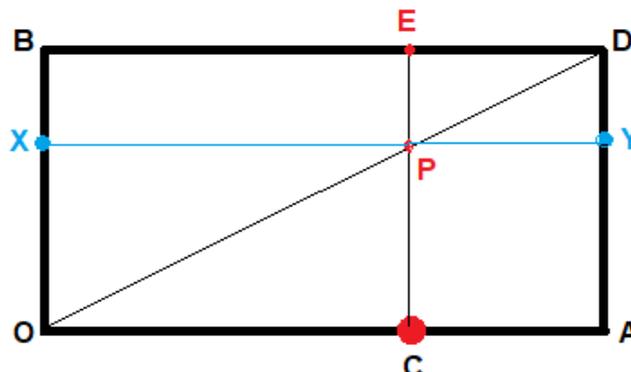
Figura 2 – Construção 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para finalizar nossa construção trace pelo ponto P, a reta paralela à reta que contém o lado  $\overline{OA}$ . Esta encontrará os lados  $\overline{OB}$  e  $\overline{AD}$ , do retângulo  $\square OBDA$ , nos pontos que denotaremos por X e Y, respectivamente (veja figura abaixo).

Figura 3 – Construção 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Mostraremos que a solução da equação será ;

$$\mathbf{OX = X.}$$

Para isto, vimos que, por construção, as retas  $\overline{OA}$  e  $\overline{XY}$ ,  $\overline{OB}$  e  $\overline{CE}$ ,  $\overline{CE}$  e  $\overline{AD}$  são paralelas, segue que os triângulos  $\triangle ODA$  e  $\triangle OBD$  são congruentes (caso LLL comum); os triângulos  $\triangle OPC$  e  $\triangle OXP$  são congruentes (caso LLL comum) e os triângulos  $\triangle PDY$  e  $\triangle PED$  também são congruentes (caso LLL comum).

Portanto, dois a dois, eles têm a mesma área.

$$\text{área}(\triangle OBD) = \text{área}(\triangle ODA), \quad (2.1)$$

$$\text{área}(\triangle OBD) = \text{área}(\triangle OXP) + \text{área}(\square XBEP) + \text{área}(\triangle PED) \quad (2.2)$$

$$\text{área}(\triangle ODA) = \text{área}(\triangle OPC) + \text{área}(\square CPYA) + \text{área}(\triangle PDY) \quad (2.3)$$

Sabemos que;

$$\text{área}(\triangle OPC) = \text{área}(\triangle OXP) \quad \text{e} \quad (2.4)$$

$$\text{área}(\triangle PDY) = \text{área}(\triangle PED) \quad (2.5)$$

Logo de (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), vem que

$$\text{área}(\square XBEP) = \text{área}(\square CPYA) \quad (2.6)$$

Logo os retângulos  $\square XBEP$  e  $\square CPYA$  têm mesma área. Desse modo ;

$$\begin{aligned} \text{area}(\square OBEC) &= \text{area}(\triangle OPC) + \text{area}(\triangle OXP) + \text{area}(\square XBEP) && (\text{por } 2.6) \\ &= \text{area}(\triangle OPC) + \text{area}(\triangle OXP) + \text{area}(\square CPYA) \\ &= \text{area}(\square OXYA) \end{aligned}$$

Portanto os retângulos  $(\square OBEC)$  e  $(\square OXYA)$  têm mesma área, ou seja,

$$OC \cdot OB = OA \cdot OX, \quad \text{isto é,} \quad b \cdot c = a \cdot x$$

O que queríamos mostrar geometricamente.

## 2.2 Postulados

Admitiremos conhecidos todos os resultados válidos em geometria Plana. Chamaremos por *figura plana* o conjunto de todos os pontos que pertencem a um mesmo plano (*pontos coplanares*). Caso não exista plano contendo uma figura, dizemos que a figura é *reversa* (*pontos não coplanares*).

Denotaremos por pontos do espaço as letras maiúsculas A,B,X, Y, . . . , retas com letras minúsculas r, s, t, . . . e planos com letras gregas maiúsculas  $\Pi, \Pi', \Gamma . . . .$

### 2.2.1 Postulado da Reta

[R1] Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e não pertencem a reta.

[R2] Por dois pontos distintos do espaço passa um única reta.

*Notação:* A reta que passa pelos pontos A e B é denotada por  $\overline{AB}$

### 2.2.2 Postulado do Plano

[P1] Por três pontos não colineares do espaço passa um único plano.

[P2] Qualquer que seja o plano, existem pontos que pertencem e não pertencem ao plano.

[P3] Se dois planos têm um ponto em comum, então eles possuem mais de um ponto em comum.

[P4] Os casos de congruência de triângulos em geometria plana também são válidos para triângulos situados em planos distintos.

*Notação:* Dados A,B,C pontos não colineares, o único plano que passa por estes pontos é denotado por  $\langle A,B,C \rangle$ . Assim, se o plano  $\Pi$  contém A, B e C então  $\Pi = \langle A,B,C \rangle$  .

**Proposição 2.2.1** *Dados dois pontos distintos existe um plano que os contém.*

*Demonstração:* Sejam A e B pontos distintos. Pelo Postulado [R2] existe uma reta r que passa por A e B. Pelo Postulado [R1] existe um ponto C tal que  $C \notin r$ . Assim, A, B e C são não colineares e, portanto, segue do Postulado [P1] que existe um plano contendo A,B e C. A partir do teorema abaixo mostraremos que a reta r da demonstração acima está contida no plano que contém os pontos A,B e C.

**Teorema 2.2.1** *Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, então ela está contida nesse plano.*

*Demonstração:* Sejam A e B pontos distintos pertencentes a um plano  $\Pi$  e seja  $r = \overline{AB}$ . Vamos mostrar que  $r \subset \Pi$ . Da Geometria Plana, existe uma reta  $s \subset \Pi$  contendo A e B. Assim, como r e s são retas contendo A e B, segue do Postulado [R2] que  $r = s$ . Logo,  $r \subset \Pi$ .

Como consequência temos as seguintes possibilidades para a posição relativa entre uma reta r e um plano  $\Pi$ :

- a)  $r \cap \Pi = \emptyset$ . Neste caso dizemos que r é paralela à  $\Pi$ ;
- b)  $r \cap \Pi$  é um único ponto. Neste caso dizemos que r é secante à  $\Pi$ ;
- c)  $r \subset \Pi$ .

*Notação:* Se uma reta r é paralela a um plano  $\Pi$ , denotamos por  $r \parallel \Pi$ .

**Teorema 2.2.2** *Seja  $\Pi$  e  $\Pi'$  dois planos distintos e A e B dois pontos distintos em  $\Pi \cap \Pi'$ . Então  $\overline{AB} = \Pi \cap \Pi'$*

*Demonstração:* Como  $A, B \in \Pi \cap \Pi'$ , então pelo teorema 2.2.1, temos  $\overline{AB} \subset \Pi \cap \Pi'$ . Suponha que exista um  $C \in \Pi \cap \Pi'$  tal que  $C \notin \overline{AB}$ . Assim A, B e C são três pontos não colineares. Logo pelo postulado [P1],  $\langle A, B, C \rangle$  é o único plano contendo A, B e C, desse modo  $\Pi = \langle A, B, C \rangle = \Pi'$  o que é absurdo, pois  $\Pi$  e  $\Pi'$  são dois planos distintos. Portanto  $\overline{AB} = \Pi \cap \Pi'$ .

**Corolário 2.2.1** *Se dois planos distintos têm um ponto em comum então sua interseção é uma reta.*

*Demonstração:* Sejam  $\Pi$  e  $\Pi'$  dois planos distintos e seja  $A \in \Pi \cap \Pi'$  pelo postulado [P3] existe um ponto  $B \neq A$  tal que  $B \in \Pi \cap \Pi'$ . Pelo teorema acima  $\overline{AB} = \Pi \cap \Pi'$ .

Como consequência do teorema acima temos as seguintes possibilidades para a **posição relativa** entre dois planos  $\Pi$  e  $\Pi'$ :

- (a)  $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$ . Neste caso dizemos que os planos são **paralelos**.
- (b)  $\Pi \cap \Pi'$  é uma reta. Neste caso dizemos que os planos são **secantes**.
- (c)  $\Pi = \Pi'$ . Neste caso dizemos que os planos são **coincidentes**.

*Notação:* Dois planos paralelos  $\Pi$  e  $\Pi'$  são denotados por  $\Pi \parallel \Pi'$ .

### 2.3 Determinação de um plano

Sabemos que pelo postulado do plano (subseção 2.2.2) [P1] diz que por três pontos distintos não colineares determinam um único plano. Desse modo, nesta seção estudaremos outros resultados para obtenção de planos.

**Teorema 2.3.1** *Por uma reta e um ponto não pertencente a ela, passa um único plano.*

*Demonstração:* Inicialmente, mostraremos que, de fato, esse plano existe. Tome uma reta  $r$  e  $P$  um ponto qualquer, tal que  $P \notin r$ . Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos sobre  $r$ . Como  $A$ ,  $B$  e  $P$  não são colineares, segue do postulado [P1] que existe um único plano  $\Pi$  contendo estes pontos, ou seja,  $\Pi = \langle A, B, P \rangle$ . Logo pelo teorema 2.2.1, vem que  $\Pi$  contém  $r$ . A unicidade é garantida pelo postulado [P1].

*Notação:* Sejam  $r$  uma reta e  $P \notin r$ . Denotamos por  $\langle r, P \rangle$  o (único) plano que contém  $r$  e  $P$ . Observe que se  $\Pi = \langle r, P \rangle$ , e  $A, B \in r$ , então  $\Pi = \langle r, P \rangle = \langle A, B, P \rangle$ .

**Definição 2.3.1:** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas no espaço:

- (a)  $r$  e  $s$  são ditas **concorrentes** se existe um ponto  $P$  tal que  $r \cap s = P$ .
- (b)  $r$  e  $s$  são ditas **paralelas** se  $r$  e  $s$  são coplanares (mesmo plano) e  $r \cap s = \emptyset$
- (c)  $r$  e  $s$  são ditas **reversas** se são não coplanares

**Teorema 2.3.2** *Por duas retas paralelas passa um único plano.*

*Demonstração:* Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas. Sendo  $r$  e  $s$  coplanares (por definição), existe um plano  $\Pi$  que as contém. Suponha que  $\Pi'$  é também um plano que contém  $r$  e  $s$ . Seja  $P \in r$ . Como  $r$  e  $s$  são paralelas, temos que  $P \notin s$ , portanto, como  $\Pi$  e  $\Pi'$  contém  $s$  e  $P$ , segue do teorema 2.3.1 que  $\Pi = \Pi'$ . Portanto é único o plano que contém  $r$  e  $s$ .

**Teorema 2.3.3** *Por duas retas concorrentes passa um único plano.*

*Demonstração:* (Existência) Sejam  $r$  e  $s$  duas retas concorrentes e  $\{P\} = r \cap s$ . Tomando dois pontos  $A \in r$  e  $B \in s$ , distintos de  $P$ , obtemos três pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  não colineares. Pelo postulado [P1], estes pontos determinam um único plano  $\Pi = \langle A, B, P \rangle$ . Como  $r = \overline{PA}$  e  $s = \overline{PB}$ , segue do teorema 2.2.1 que  $r, s \subset \Pi$ . (Unicidade) Suponhamos que  $\Pi'$  é um plano que também contém  $r$  e  $s$ . Então  $\Pi'$  contém  $P, A$  e  $B$  (pois  $A \in r$  e  $B \in s$ ). Logo  $\Pi' = \langle A, B, P \rangle = \Pi$ , pelo postulado [P1]. Portanto é único o plano que contém  $r$  e  $s$ .

Diante dos resultados acima temos as seguintes possibilidades para a *posição relativa* entre duas retas  $r$  e  $s$  :

- (a)  $r \cap s = \emptyset$ . Neste caso, as retas são **paralelas** (se coplanares) ou **reversas** (se não coplanares);
- (b)  $r \cap s$  é um ponto. Neste caso, as retas são **concorrentes**;
- (c)  $r = s$ . Neste caso, as retas são **coincidentes**.

## 2.4 Paralelismo entre retas

**Teorema 2.4.1** *Por um ponto não pertencente a uma reta  $r$  pode-se traçar uma única reta paralela à  $r$ .*

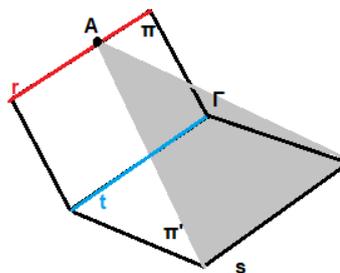
*Demonstração:* Seja  $P \notin r$ . Pelo teorema 2.3.1 existe um único plano  $\Pi$  que passa por  $P$  e que contém  $r$ . Desse modo, pelo postulado das paralelas (geometria plana) existe uma única reta  $s \subset \Pi$  passando por  $P$  tal que  $s \parallel r$ . Para mostrarmos que  $s$  é a única reta paralela à  $r$  passando por  $P$ . Suponhamos que existe uma outra reta  $s'$  paralela à  $r$  por  $P$ . Seja  $\Pi' = \langle r, s' \rangle$ . Então  $\Pi$  e  $\Pi'$  contém  $r$  e  $P$ . Logo pelo teorema 2.3.1 vem que  $\Pi = \Pi'$  e, conseqüentemente,  $s' = s$ .

**Proposição (transitividade de retas paralelas) 2.4.1** *Se  $r$  e  $s$  são retas distintas e paralelas à uma mesma reta  $t$ , então  $r$  e  $s$  são paralelas entre si.*

*Demonstração:* Se  $r$  e  $s$  são duas retas paralelas e são coplanares, isto é, estão contidas em um mesmo plano, podemos afirmar que  $r \parallel s$ . Caso contrário, suponha que  $r, s$  e  $t$  não são coplanares. Seja  $\Pi = \langle r, t \rangle$  e  $\Pi' = \langle s, t \rangle$  então  $\Pi$  e  $\Pi'$  são secantes tais que  $\Pi \cap \Pi' = t$ .

(i) Primeiramente mostraremos que  $r$  e  $s$  são coplanares. Sejam  $A \in r$  e  $\Gamma = \langle s, A \rangle$ .

Figura 4 – Transitividade de retas paralelas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então  $\Gamma \cap \Pi' = s$  (pois  $\Gamma \neq \Pi'$  uma vez que  $A \in \Gamma$  e  $A \notin \Pi'$ , além disso  $s \subset \Gamma \cap \Pi'$ ). Como  $A \in \Gamma \cap \Pi$  e estes são planos distintos (pois  $s \subset \Gamma$  e  $s \not\subset \Pi$ ) então  $\Gamma \cap \Pi$  é uma reta contendo  $A$ . Seja  $r'$  tal reta. Como  $r'$  e  $t$  são coplanares (pois ambas estão contidas em  $\Pi$ ) e não se interceptam (pois, se  $B \in r' \cap t$ , para algum ponto  $B$ , então  $r' \subset \Gamma$  e  $t \subset \Pi'$ , segue que  $B \in \Gamma \cap \Pi' = s$ , ou seja  $B \in s$  e  $B \in t$ , o que é um absurdo, pois  $s \parallel t$ ) então  $r' \parallel t$ . Consequentemente, como  $r$  e  $r'$  são duas retas paralelas à  $t$  por  $A$ , segue do teorema 2.4.1 que  $r' = r$ . Portanto  $r, s \subset \Gamma$ , ou seja,  $r$  e  $s$  são coplanares.

(ii) Mostraremos agora que  $r \cap s = \emptyset$ . De fato, se existe ponto  $P \in r \cap s$ , então  $P \in t$ , pois ( $P \in r$  e  $r \subset \Pi \Rightarrow P \in \Pi$ ) e ( $P \in s$  e  $s \subset \Pi' \Rightarrow P \in \Pi'$ ) implicam que  $P \in \Pi \cap \Pi' = t$ . Portanto  $P \in t \cap s$ , o que é absurdo, pois  $t \parallel s$ . De (i) e (ii) temos que  $r \parallel s$ .

## 2.5 Perpendicularismo entre reta e plano

Estudaremos perpendicularismo entre reta e plano. Para isto, precisamos primeiramente definir o ângulo entre duas retas que será denotado  $\angle(r, s)$  [ângulo formado entre as retas  $r$  e  $s$ ]. Suponhamos que  $r$  e  $s$  são concorrentes no ponto  $V$ . Seja  $\Pi = \langle r, s \rangle$ . Então  $r$  e  $s$  determinam em  $\Pi$  quatro ângulos com vértices em  $V$ . O ângulo entre  $r$  e  $s$  é o menor dentre esses quatro ângulos. Com o objetivo de definirmos ângulo entre retas reversas, vejamos o seguinte teorema:

**Teorema 2.5.1** *Sejam  $(r, s)$  e  $(r', s')$  dois pares de retas concorrentes, tais que  $r$  e  $r'$  são paralelas entre si, o mesmo ocorrendo com  $s$  e  $s'$ . Então o ângulo entre  $r$  e  $s$  é igual ao ângulo entre  $r'$  e  $s'$ .*

*Demonstração:* Como  $(r, s)$  e  $(r', s')$  são retas concorrentes, então esses pares de retas têm um ponto em comum, seja  $V = r \cap s$  e  $V' = r' \cap s'$ . Pelo teorema 2.2.3, temos dois planos gerados, denotado por  $\langle r, s \rangle$  e  $\langle r', s' \rangle$ . Desse modo temos duas possibilidades: (i)  $\langle r, s \rangle = \langle r', s' \rangle = \Pi$  e (ii)  $\langle r, s \rangle = \Pi$  e  $\langle r', s' \rangle = \Pi'$ . Se (i) ocorre então os planos são iguais, desse modo temos que retas paralelas  $r$  e  $r'$ ,  $s$  e  $s'$  determinam ângulos correspondentes congruentes. Se (ii) ocorre, tome pontos  $A \in r$ ,  $B \in s$ ,  $A' \in r'$  e  $B' \in s'$  tais que  $VA = V'A'$  e  $VB = V'B'$ ,  $\angle(r, s) = \widehat{AVB}$  e  $\angle(r', s') = \widehat{A'V'B'}$ . Os triângulos  $AVB$  e  $A'V'B'$  são congruentes pelo caso LLL, logo pela propriedade de transitividade de retas paralelas no espaço, obtemos que  $AB \parallel A'B'$  e  $AA' \parallel BB'$ , portanto  $AA'B'B$  é um paralelogramo, então  $B = A'B'$ . Assim  $\angle(r, s) = \widehat{AVB} = \widehat{A'V'B'} = \angle(r', s')$ .

**Definição 2.5.1:** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas distintas e  $\Pi$  um plano.

- (a) Dizemos que  $r$  e  $s$  são **ortogonais** se o ângulo entre elas é reto.
- (b) Dizemos que  $r$  é **perpendicular** a  $\Pi$  se  $r$  é ortogonal a toda reta contida em  $\Pi$ .

**Proposição 2.5.1** *Seja  $r$  uma reta que intersecta um plano  $\Pi$  no ponto  $A$ . Então  $r$  é perpendicular a  $\Pi$  se e somente se  $r$  é perpendicular a toda reta de  $\Pi$  que passa por  $A$ .*

*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Se  $r$  é perpendicular a  $\Pi$  pela definição acima, temos que  $r$  é ortogonal a toda reta contida em  $\Pi$ . Portanto  $r$  é perpendicular a toda reta  $\Pi$  que passa por  $A$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $r$  é perpendicular a toda reta de  $\Pi$  que passa por  $A$  e mostremos que  $r$  é perpendicular a  $\Pi$ . Tome  $s \subset \Pi$  uma reta qualquer. Se  $A \in s$ , então acabou, pois por hipótese  $r$  e  $s$  são perpendiculares e, portanto, ortogonais. Se  $A \notin s$ , então existe um  $s' \subset \Pi$ , paralela à  $s$  e passando por  $A$ . Como  $r$  e  $s'$  são perpendiculares e  $s$  e  $s'$  são paralelas, novamente pela definição acima,  $r$  é ortogonal à  $s$ . Portanto  $r$  e  $\Pi$  são perpendiculares.

Diante dos postulados, definições, teoremas, proposições e corolários, conceitos que são importantes para que estejamos familiarizados com o estudo da geometria descritiva, segue-se no próximo capítulo o objeto de estudo principal do meu trabalho, que visa ao leitor uma fácil compreensão de um tema pouco abordado, principalmente no âmbito matemático.

### 3 NOÇÕES DE GEOMETRIA DESCRITIVA

A Geometria, ramo da Matemática que se propõe a estudar as figuras existentes na natureza através das propriedades de seus elementos, definindo, caracterizando e padronizando suas formas e dimensões, surgiu independentemente em várias culturas antigas para calcular problemas práticos do dia a dia sobre comprimento, área e volume.

O estudo da Geometria se divide em duas grandes áreas de conhecimento: as **geometrias métricas** e as **geometrias de posição**.

As *geometrias métricas* têm como objetivo determinar as dimensões das figuras geométricas estabelecendo os teoremas que irão inter-relacionar as grandezas de seus elementos. Tendo como exemplo à Geometria Analítica e a Geometria Diferencial.

As *geometrias de posição* estudam as posições relativas entre formas geométricas presentes no espaço, sendo por isso também conhecidas como geometrias gráficas. Nesta área destaca-se a Geometria Descritiva (ou Estereografia), objeto de estudo deste trabalho, na qual estudaremos a seguir, como representar uma figura do espaço no plano bidimensional, através de suas projeções.

Gaspar Monge organizou princípios e técnicas da Geometria Descritiva, desenvolvendo métodos e indicando suas aplicabilidades. Desse modo, tornou-se tão importante na Geometria Descritiva, que desenvolveu o único método que podemos utilizar para representar no plano, uma figura de 3 dimensões (espaço), este método ainda recebeu seu nome, **método mongeano**.

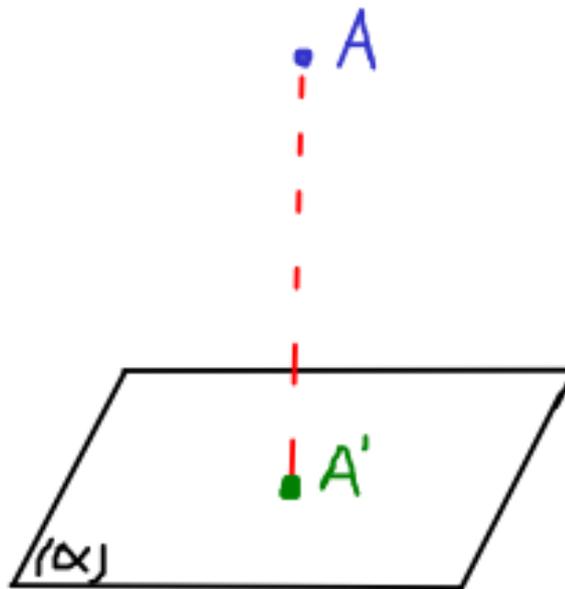
Príncipe Junior a define como “a ciência que tem por fim representar num plano as figuras do espaço de maneira tal que, nesse plano, se possam resolver todos os problemas relativos a essas figuras” (PRÍNCIPE JUNIOR, 1983, p.1). Anjos assinala que:

Monge teorizou uma prática que há muito já era utilizada pelos profissionais de engenharia daquela época. Desenvolveu métodos de ensino e indicou sua aplicação encadeando a visualização espacial e gráfica de qualquer objeto tridimensional tornando-a uma disciplina indispensável para a formação de profissionais como o engenheiro, o arquiteto, o matemático, o desenhista e o artista (ANJOS, 2003, p.2).

### 3.1 Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

A projeção ortogonal de um ponto A fora de um plano  $\alpha$  sobre esse plano. É um ponto A' no plano, obtido da interseção de  $\alpha$  com uma reta r perpendicular a  $\alpha$  que passa pelo ponto A (Figura abaixo). Diante disso, diremos que A' é a projeção do ponto A sobre o plano  $\alpha$  (Alfa). Chama-se **projetante (raios projetantes)** de um ponto, a perpendicular baixada deste ponto ao plano de projeção. Na figura abaixo,  $\overline{A'A}$  é a projetante do ponto A.

Figura 5 – Projeção ortogonal de um ponto



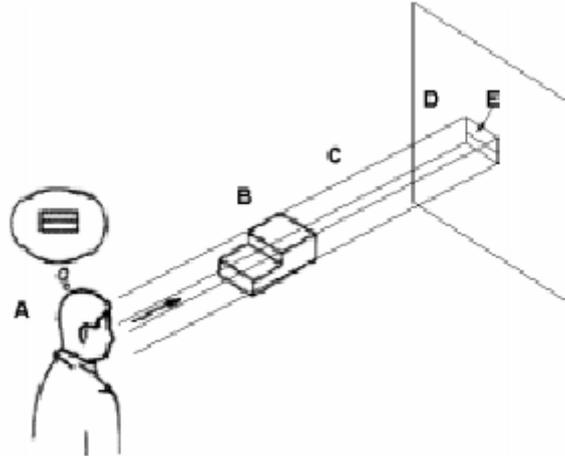
Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2 Elementos de projeção

A projeção de um objeto é sua representação gráfica num plano. Como os objetos têm três dimensões, e sua representação num plano bidimensional dá-se em conformidade com artifícios técnicos, os seus elementos principais podem ser vistos na figura abaixo:

- A) A posição do observado, denominada *centro da projeção*;
- B) O *objeto* a ser observado;
- C) Os *raios projetantes*;
- D) O plano a ser representado (*Plano de projeção*);
- E) A projeção do objeto

Figura 6 – Elementos da projeção

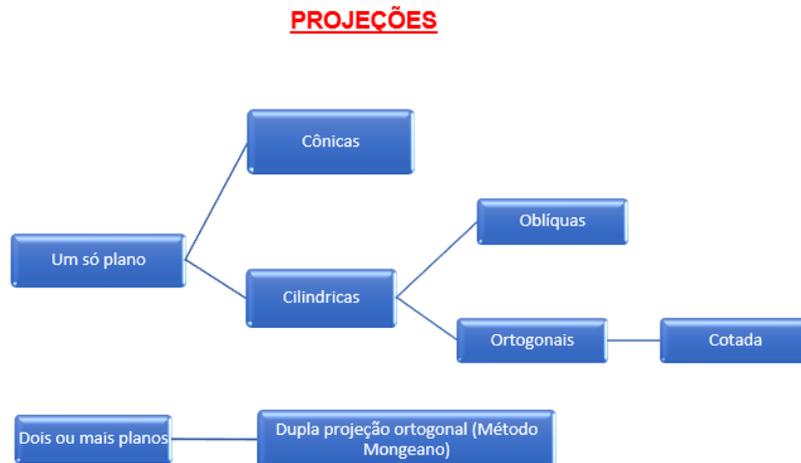


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3 Sistemas projetivos

Os sistemas projetivos serão auxiliares para que possamos projetar figuras do espaço em um plano bidimensional. Eles são divididos em sistemas de representação, sendo utilizado apenas um plano de projeção do objeto (Cônicas, Cilíndricas) ou sistemas de dois ou mais planos de projeção (Dupla Projeção Ortogonal ou Método Mongeano). Comentaremos cada um a seguir, mas o foco maior e mais detalhado será no Método Mongeano, visto que é o tema principal do nosso estudo. A figura a seguir, exemplifica melhor a divisão que temos nos sistemas projetivos.

Figura 7 – Sistemas de projeções



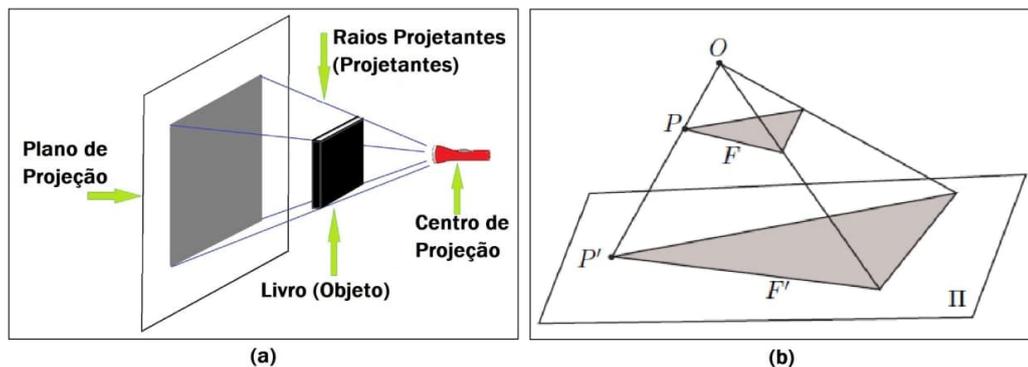
Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3.1 Projeção cônica (ou central)

O **método de projeção cônica** usa apenas um plano de projeção e a distância entre o centro de projeção e o objeto é finita e compatível com a ordem de grandeza das dimensões do objeto. Os raios que incidem no objeto e no plano de projeção são todos concorrentes no centro da projeção. Tome como cenário a situação mostrada abaixo (figura 8(a)) onde queremos projetar um livro com uma lanterna utilizando o método de projeção cônica. A partir desta lanterna (centro de projeção) será emitida uma fonte de luz (raios projetantes) que vai passar pela aba do livro (objeto) e assim projetar na parede (plano de projeção) uma sombra do livro (projeção do objeto). Observe que a sombra projetada não tem o mesmo tamanho do livro (**não tem verdadeira grandeza**) isso acontece por que existe um ângulo não desprezível entre as projetantes, o que causa distorções na projeção. Além disso, a distância entre centro de projeção e o plano de projeção define o tamanho da imagem, já a distância entre o centro de projeção e o objeto define o grau das distorções da imagem.

Analisando o mesmo cenário mas de uma maneira matemática, observe a (figura 8(b)). Aqui a projeção de cada ponto  $P \in F$  é o ponto obtido da interseção de  $\Pi$  com a reta  $\overline{OP}$ , onde  $O$  é um ponto fixo, chamado centro de projeção.

Figura 8 – Projeção cônica 1



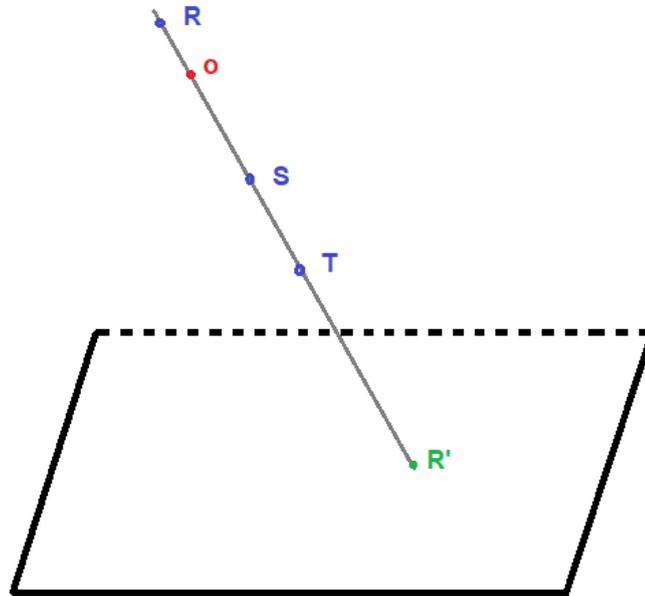
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Observação:** Seja  $A$  o conjunto formado pelos pontos do espaço que são diferentes do ponto  $O$ , que não pertencem ao plano  $\Pi$ , onde a reta  $\overline{OR}$  não seja paralela ao plano  $\Pi$ . Desse modo percebemos que a projeção cônica de um ponto, sobre o plano  $\Pi$ , não é uma aplicação biunívoca (isto é, injetora) ao conjunto  $A$ .

De fato, pois dado um ponto  $R \in A$ , todos os pontos da reta  $\overline{OR}$  serão levados pela projeção cônica no ponto  $R'$ , ou seja, a projeção cônica não é injetora. As projeções cônicas dos

pontos R, S, T sobre o plano  $\Pi$ , coincidem com o ponto R'. (Veja figura abaixo)

Figura 9 – Projeção cônica 2



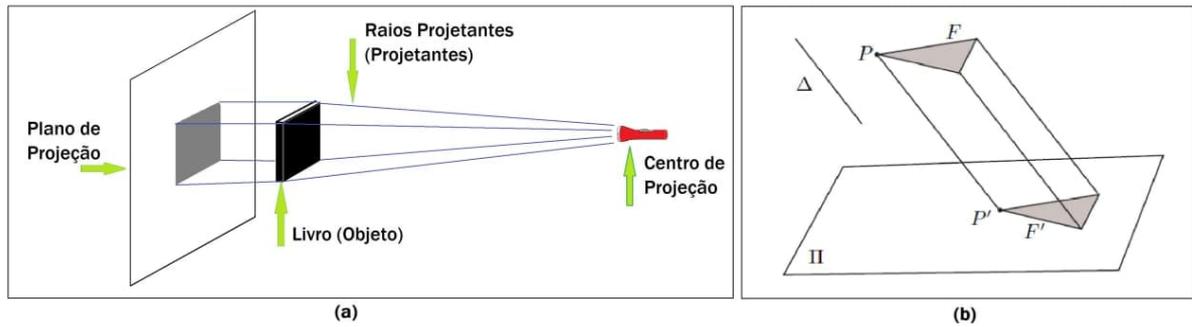
Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3.2 Projeção cilíndrica (ou paralela)

O método de **projeção cilíndrica** usa apenas um plano de projeção e a distância entre o centro de projeção e o objeto é tão grande quanto queria em relação às dimensões do objeto a ser projetado que pode ser considerada infinita. Desta forma, os raios projetantes tornam-se paralelos fazendo com que a projeção do objeto (sombra) tenha a mesma medida do objeto (livro), ou seja, tem-se (**verdadeira grandeza**). Na figura 10(a) foi utilizado o método de **projeção cilíndrica ortogonal**, pois os raios projetantes formam um ângulo de  $90^\circ$  com o plano de projeção. Desse modo, projetando sua verdadeira grandeza, não há distorções das faces, visto que a direção de projeção é ortogonal ao plano de projeção.

Na figura 10(b) foi utilizado o método de **projeção cilíndrica oblíquo**, veja que as projetantes formam um ângulo diferente de  $90^\circ$  com o plano de projeção, isto faz com que a projeção dos objetos seja distorcida em relação ao objeto, isto é, a projeção pode ser maior, menor ou igual ao tamanho do objeto. Analisando matematicamente a projeção de cada ponto  $P \in F$  é o ponto obtido da interseção com a reta que passa por P é paralela a uma direção fixada  $\Delta$ , chamada *direção de projeção*. No entanto, devido a distorções que podem ser imprevisíveis nas demais dimensões, seu uso fica restrito a desenhos perspetivos.

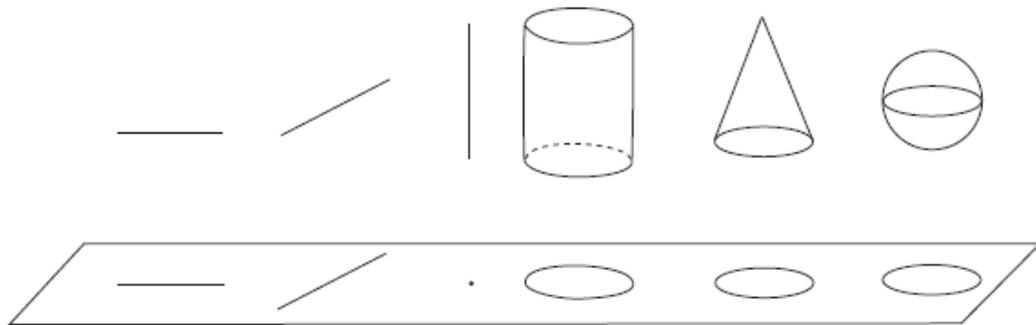
Figura 10 – Projeção cilíndrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Observação:** mesmo utilizando a projeção cilíndrica ortogonal, na qual a projeção de um segmento paralelo ao plano de projeção é um segmento de mesma medida que o segmento dado, ainda há perda de informações sobre uma figura, visto que objetos tridimensionais só são possíveis representações exatas de faces paralelas ao plano de projeção, conforme percebemos na figura abaixo. Esse problema ocorre por esses métodos projetivos utilizarem apenas um plano de projeção.

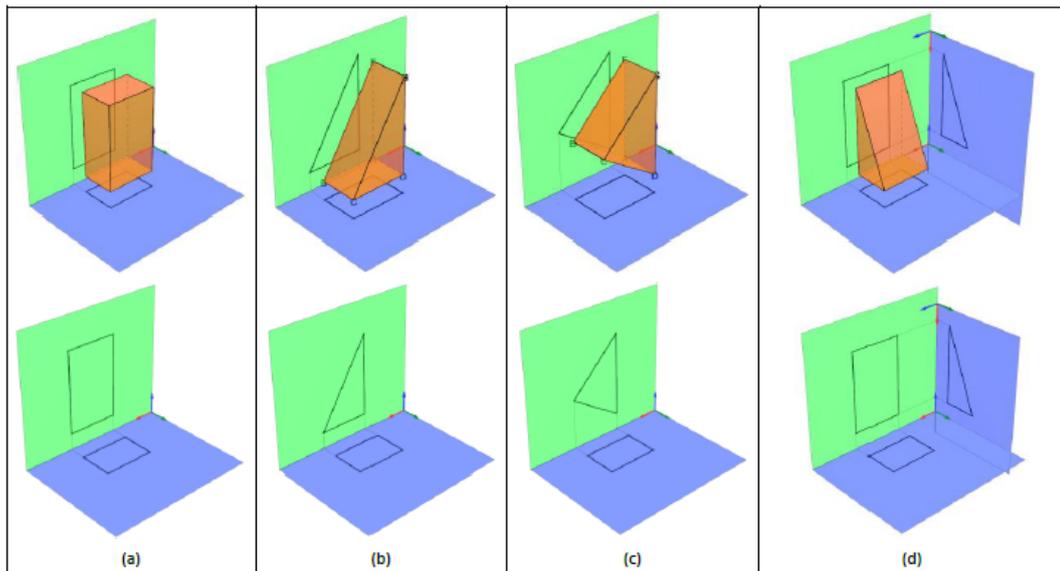
Figura 11 – Representação de figuras no plano



Fonte: Kakuta (2008, p. 37).

Assim, para obter informações mais precisas sobre uma figura, é necessário utilizar mais de um plano de projeção. Diante desse problema e considerando as propriedades dos sistemas de projeção ortogonal, Gaspar Monge propôs um sistema de dupla projeção, constituído por planos ortogonais entre si, sendo um plano horizontal (azul) e outro vertical (verde) (figura 12). Sistema o qual ficou conhecido como **Método Mongeano** ou **Dupla projeção ortogonal**, foco principal do nosso estudo e até hoje o melhor sistema de projeção de figuras tridimensionais no plano bidimensional.

Figura 12 – Representação dupla de projeção ortogonal



Fonte: Teixeira e Silva (2018,p. 12).

### 3.4 Método da dupla projeção ortogonal (ou método Mongeano)

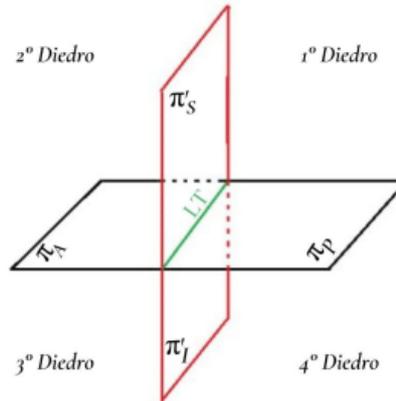
Aprenderemos nesta seção os conceitos e propriedades das projeções Mongeanas que vão nos possibilitar representar qualquer objeto, seja qual for sua forma, posição ou dimensão, em um plano bidimensional, pelas suas projeções cilíndricas ortogonais.

O Sistema Mongeano de Projeção utiliza dois planos de projeção perpendiculares entre si, onde um deles admite-se como sendo horizontal e o outro, naturalmente, vertical. Cada um dos planos de projeção está associado a um centro projetivo impróprio caracterizando, assim, um duplo sistema de projeções cilíndricas.

Gaspard Monge modelou o espaço da seguinte maneira (Figura 13) definindo os seguintes elementos:

- Plano de Projeção Horizontal ( $\pi$ )
- Plano de Projeção Vertical ( $\pi'$ )
- Linha de Terra (LT); é reta obtida da interseção de  $\pi$  com  $\pi'$
- Plano de Projeção Horizontal Posterior ( $\pi_P$ ) é o plano à direita de LT.
- Plano de Projeção Horizontal Anterior ( $\pi_A$ ) é o plano à esquerda de LT.
- Plano de Projeção Vertical Superior ( $\pi'_S$ ) é o plano acima da LT.
- Plano de Projeção Vertical Inferior ( $\pi'_I$ ) é o plano abaixo da LT.

Figura 13 – Representação Mongeana do espaço



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como foi visto na figura anterior, a linha de terra divide cada plano de projeção em dois semi-planos, e o espaço é dividido por esses semi-planos em quatro diedros, numerados no sentido anti-horário;

**1º diedro:** região limitada pelo plano vertical superior ( $\pi'_S$ ) e pelo plano horizontal anterior ( $\pi_A$ ).

**2º diedro:** região limitada pelo plano vertical superior ( $\pi'_S$ ) e pelo plano horizontal posterior ( $\pi_P$ ).

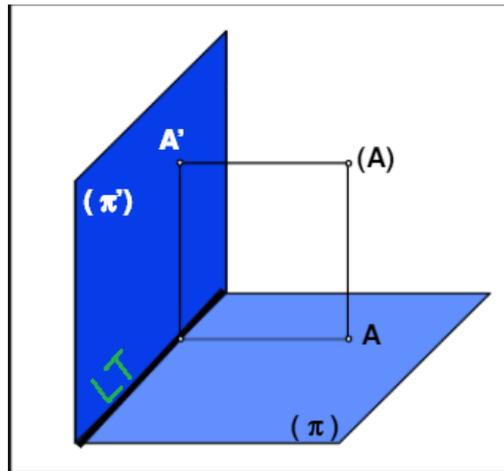
**3º diedro:** região limitada pelo plano vertical inferior ( $\pi'_I$ ) e pelo plano horizontal posterior ( $\pi_P$ ).

**4º diedro:** região limitada pelo plano vertical inferior ( $\pi'_I$ ) e pelo plano horizontal anterior ( $\pi_A$ ).

### 3.5 Estudo do ponto

Antes de podermos prosseguir no nosso estudo, precisamos estabelecer algumas convenções importantes. Todo ponto de estudo é dado por letra maiúscula e parênteses (A). O centro de projeção (O) é sempre situado na frente do plano vertical e acima do plano horizontal e, a uma distância infinita dos mesmos (lembrando que é uma característica da projeção cilíndrica). A projeção de um ponto (A) no plano horizontal ( $\pi$ ) é designada pela letra maiúscula A, sem parênteses. A projeção do mesmo ponto (A) no plano vertical ( $\pi'$ ) é designada por A'. A figura a seguir retrata essas convenções.

Figura 14 – Representação de um ponto



Fonte: Adaptado, Príncipe Junior, (1983, p. 4).

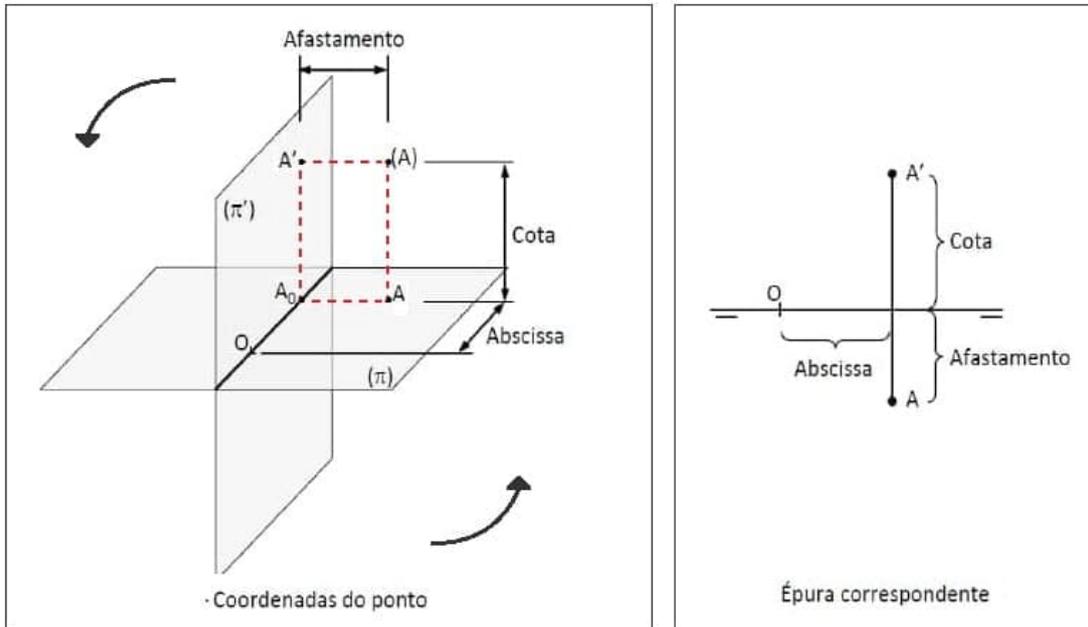
### 3.6 Cota, afastamento e é pura

Na seção 3.4 observamos quais localizações um objeto pode estar no espaço. Desse modo, precisamos definir qual posição ele se encontra, sabemos que um ponto no espaço tem três coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ . Monge definiu as coordenadas da seguinte maneira:  $x_1$  é a abscissa,  $x_2$  é o afastamento,  $x_3$  é a cota. Conceitos que mais adiante iremos defini-los. Observe o seguinte exemplo; Seja um ponto qualquer (A) do espaço inserido no 1º Diedro na figura abaixo (mais adiante aprenderemos como dado um ponto qualquer, saber qual Diedro ele está localizado), iremos representar este ponto no plano utilizando o método Mongeano. Primeiramente devemos fazer a projeção ortogonal do ponto (A) sobre o plano horizontal  $(\pi)$  (obtendo A), do mesmo modo projetando sobre plano vertical  $(\pi')$  (obtendo A') (Obs: Na seção 3.1 aprendemos sobre projeção ortogonal de um ponto).

Como os pontos A e A' projetam-se ortogonalmente, então estão situados sobre um mesmo ponto na LT, denotado por  $A_0$ . Desse modo, temos um quadrilátero com lados opostos paralelos, logo  $(A)A'A_0A$  é um paralelogramo e conseqüentemente,  $d((A), A) = d(A', A_0)$  e  $d((A), A') = d(A, A_0)$ . (Veja figura 15).

Uma vez efetuadas as projeções de (A) sobre  $\pi$  e  $\pi'$  fazemos um rebatimento do plano vertical sobre o plano horizontal, até que ambos coincidam (rotação de 90 graus em torno da LT). Desta forma, ambas as projeções do ponto A ficam no mesmo plano. O desenho assim obtido é chamado de é pura (figura 15). Na é pura, as projeções de um ponto qualquer estão sobre uma reta perpendicular à linha de terra, chamada de linha de chamada.

Figura 15 – Cota, Afastamento, Abscissa



Fonte: Elaborado pelo autor.

A **Cota** de um ponto (A) do espaço é a distância entre (A) e o plano horizontal. Logo, a cota de A é igual a medida  $A'A_0$  do segmento  $\overline{A'A_0}$ , uma vez que  $d((A), \pi) = d((A), A) = d(A', A_0)$ .

O **Afastamento** de um ponto (A) do espaço é a distância entre (A) e o plano vertical. Logo, o afastamento de A é igual medida  $AA_0$  do segmento  $\overline{AA_0}$ , uma vez que  $d((A), \pi') = d((A), A') = d(A, A_0)$ .

A **Abscissa** de um ponto (A) do espaço existe sobre LT (eixo X), é a distância entre a projeção do ponto (A) na linha terra (A<sub>0</sub>) e o ponto O (origem). Logo, a abscissa de (A) é igual a medida  $A_0O$  do segmento  $A_0O$ .

### 3.7 localizando pontos através de suas coordenadas

Vimos anteriormente como trabalhar com o ponto já inserido na figura, mas sabemos que a maioria dos problemas não irão trazer este cenário, mas sim usando as coordenadas do ponto. Aprenderemos neste tópico como localizar um ponto no espaço através de suas coordenadas, lembrando que este ponto pode estar no 1º diedro, 2º diedro, 3º diedro, 4º diedro, sobre Plano de Projeção Horizontal Posterior ( $\pi_p$ ), Plano de Projeção Horizontal Anterior ( $\pi_A$ ), Plano de Projeção Vertical Superior ( $\pi'_S$ ), Plano de Projeção Vertical Inferior ( $\pi'_I$ ).

Precisamos apenas da **cota** e do **afastamento** para saber qual plano o ponto se encontra, visto que a abscissa vai apenas me dizer qual deslocamento sobre a linha de terra ele vai estar.

A **cota** tem valor positivo quando está acima do plano de projeção horizontal ( $\pi$ ), é negativo quando está abaixo do plano de projeção horizontal ( $\pi$ ), é nula quando está sobre plano de projeção horizontal ( $\pi$ ).

O **afastamento** tem valor positivo quando está a direita do plano de projeção vertical ( $\pi'$ ), é negativo quando está a esquerda do plano de projeção vertical ( $\pi'$ ), é nulo quando está sobre plano de projeção vertical ( $\pi'$ ).

**Exemplo :** Faça a é pura que representa o ponto  $(X)(0, 3, -2)$ .

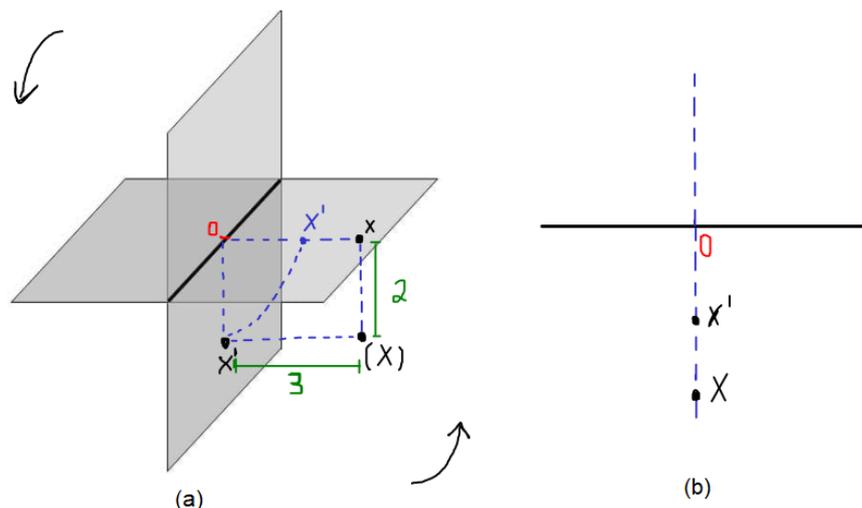
*Solução:* Primeiramente devemos identificar onde se encontra este ponto. Sabemos que para isto, necessitamos apenas da cota e do afastamento, sendo assim temos;

Cota = - 2 (negativo)

Afastamento = 3 (positiva)

Portanto, o ponto  $(X)$  se encontra no 4º diedro. A representação no espaço deste ponto foi feita na figura 16 (a), deixo a critério do leitor verificar as projeções no plano horizontal e vertical. Após a representação do ponto no modelo Mongeano, teremos que construir a é pura correspondente a este ponto, diante disso, precisamos fazer um rebatimento do plano vertical sobre o plano horizontal, até que ambos coincidam sobre a linha de terra, aonde chegamos na figura 16 (b).

Figura 16 – É pura do ponto  $(X)=(0, 3, -2)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante disso, em resumo, no estudo do ponto, de acordo com a posição dele no espaço, deve-se considerar os sinais dos diedros conforme a tabela abaixo (deixo a critério do leitor analisar cada uma das posições abaixo):

Figura 17 – Tabela dos sinais dos Diedros

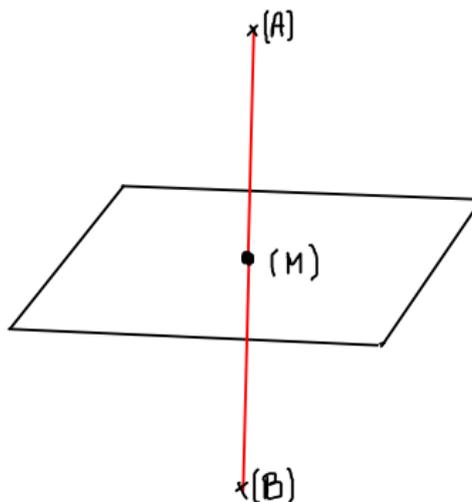
Posição no sistema	1º D	2º D	3º D	4º D	$\pi'_S$	$\pi'_I$	$\pi_A$	$\pi_P$	LT
Afastamento	+	-	-	+	0	0	+	-	0
Cota	+	+	-	-	+	-	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.8 Simetria de pontos

Dois pontos (A) e (B) são simétricos em relação a um plano, quando este plano é o mediador do segmento formado pelos dois pontos, isto é, quando o plano é perpendicular ao segmento formado por esses dois pontos e contendo o seu ponto médio (M), onde o segmento  $\overline{(A)(M)}$  é igual ao segmento  $\overline{(M)(B)}$ .

Figura 18 – Simetria de pontos



Fonte: Elaborado pelo autor.

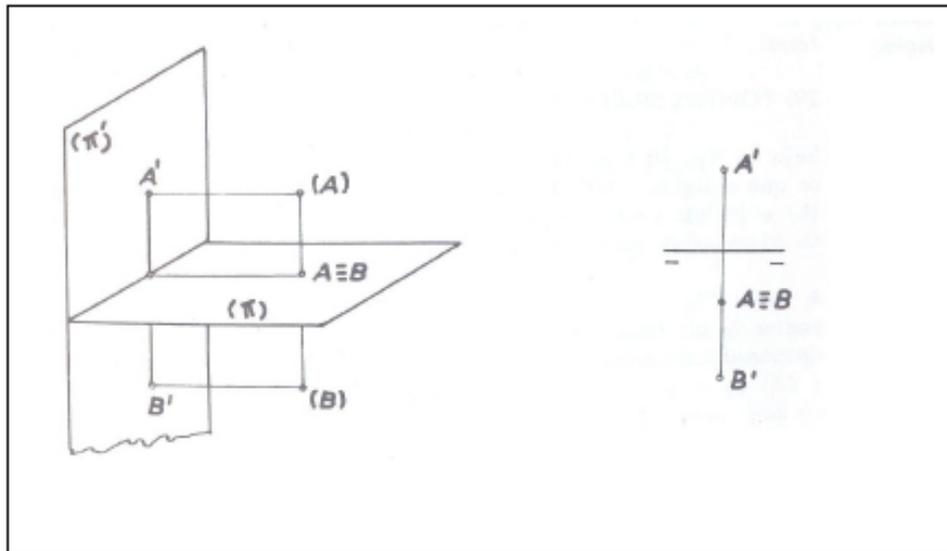
Mas então um ponto pode ser simétrico ao plano horizontal, ao plano vertical e à linha de terra.

### 3.8.1 Pontos simétricos em relação aos planos de projeção

Diz-se que um ponto (A) é simétrico a um ponto (B) em relação ao plano horizontal de projeção ( $\pi$ ) (figura 19) quando possui mesma abscissa, o mesmo afastamento em grandeza e sentido e a cota mesma grandeza porém sentido contrário, como nos mostra a écura da figura 19, onde os afastamentos dos pontos (A) e (B) são iguais e ambos positivos (mesmo sentido) e cotas iguais de sentido contrário, pois a cota de (A) é positiva por que o ponto está acima do plano ( $\pi$ ) e do ponto (B) é negativa por que o ponto está abaixo de ( $\pi$ ).

Figura 19 – Simetria ao plano de projeção horizontal

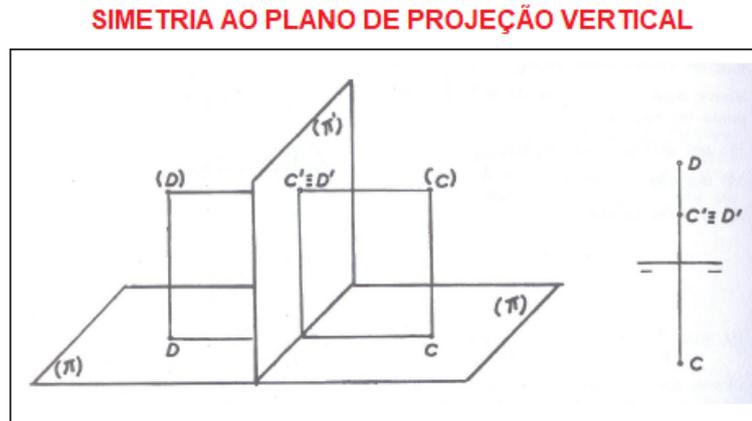
#### SIMETRIA AO PLANO DE PROJEÇÃO HORIZONTAL



Fonte: Príncipe Junior (1983, p. 17).

Diz-se que um ponto (D) é simétrico a um ponto (C) em relação ao plano vertical de projeção ( $\pi'$ ) (figura 20) quando possui mesma abscissa, a mesma cota em grandeza e sentido e o afastamento da mesma grandeza porém sentido contrário. A écura (fig.20) caracteriza-se por possuir pontos de projeções verticais coincidentes  $C' \equiv D'$  e projeções horizontais C e D simétricos em relação a linha de terra.

Figura 20 – Simetria ao plano de projeção vertical



Fonte: Príncipe Junior (1983, p. 18).

### 3.8.2 Pontos simétricos em relação à linha de terra

Observe a figura 21, onde a linha de terra  $\pi\pi'$  é mediatriz do segmento  $\overline{(A)(B)}$ . Então, são iguais os retângulos que se observam na figura, e os pontos simétricos em relação a linha de terra possuem abscissas iguais e cotas e afastamentos simétricos. A épura é caracterizada pelas projeções de mesmo nome dos dois pontos (A) e (B), simétricos em relação a linha de terra.

Figura 21 – Simetria a linha de terra



Fonte: Príncipe Junior (1983, pag 18).

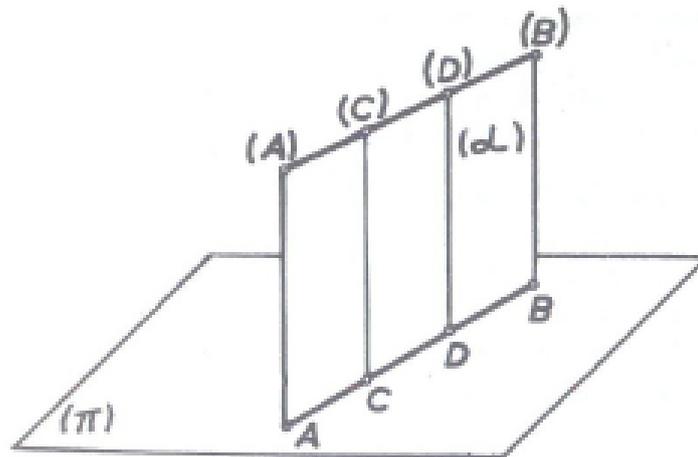
### 3.9 Estudo da reta

Em *Geometria de Posição* dizemos que uma reta está determinada em posição quando os elementos dados permitem encontrar uma única reta que tenha estes elementos, ou seja, a reta existirá e será única com os elementos dados.

Em *Geometria Descritiva* dizemos que uma reta está determinada geometricamente quando os elementos, dados geometricamente em *épura*, permitem encontrar, geometricamente, uma única reta no espaço que tenha os elementos dados, ou seja, sua posição relativa em *épura*. Nas próximas seções estaremos interessados em determinar geometricamente uma reta em *épura*.

Uma reta é formada por infinitos pontos, logo a projeção de uma reta no plano é o lugar das projeções de todos os seus pontos sobre esse plano. Mas sabemos que dois pontos são suficientes para determinar uma reta (resultados de geometria plana). A projeção de uma reta sobre um plano não perpendicular à mesma é uma reta. Assim, para obtermos as projeções da reta sobre um plano, basta projetarmos dois pontos da reta, algo aprendido na seção anterior.

Figura 22 – Reta



Fonte: Príncipe Junior (1983, p 31).

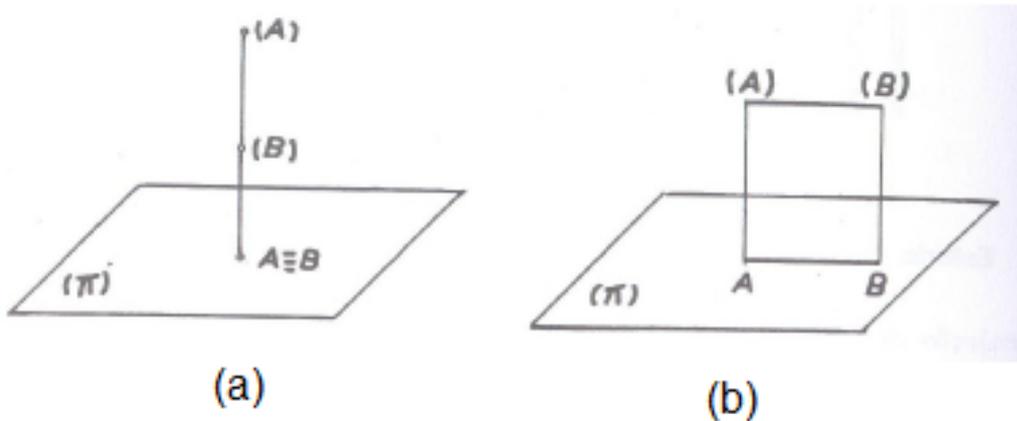
A figura acima nos mostra uma reta (A)(B) e o plano ( $\pi$ ), na qual baixando todos os pontos da reta perpendiculares ao plano, os pés das perpendiculares dão lugar à projeção

ortogonal da reta e também forma um plano ( $\alpha$ ) perpendicular ao plano ( $\pi$ ) que é o plano projetante da reta. Observamos que de fato a projeção será uma reta, visto que (A)(B) não é perpendicular ao plano ( $\pi$ ).

A projeção de uma reta sobre um plano só deixa de ser uma reta, quando ela for perpendicular ao plano de projeção, e nesse caso a projeção será um ponto, como se vê na figura 23 (a).

Seendo uma reta paralela a um plano (fig. 23 (b)) a projeção sobre esse plano é igual e paralela à própria reta. Seja a reta (A)(B) paralela ao plano ( $\pi$ ) cuja projeção nesse plano é a reta AB. As duas retas (A)(B) e AB formam com as projetantes (A)A e (B)B um paralelogramo na qual (A)(B) = AB. Diz então que a reta se projeta em *verdadeira grandeza (V.G)* .

Figura 23 – Retas perpendiculares e paralelas ao plano



Fonte: Príncipe Junior (1983, p. 31).

### 3.9.1 Traço de retas

Chama-se traço de uma reta sobre um plano o ponto que esta reta fura ou atravessa esse plano e são denotados por H e V, respectivamente. H é o traço horizontal da reta e V é o traço vertical. Assim, H é o único ponto da reta que tem cota nula e, conseqüentemente,  $H_2 \in LT$ . Analogamente, V é o único ponto da reta que tem afastamento nulo e portanto,  $V_1 \in LT$ .

Seja  $r$  uma reta. Esquemmatizando temos:

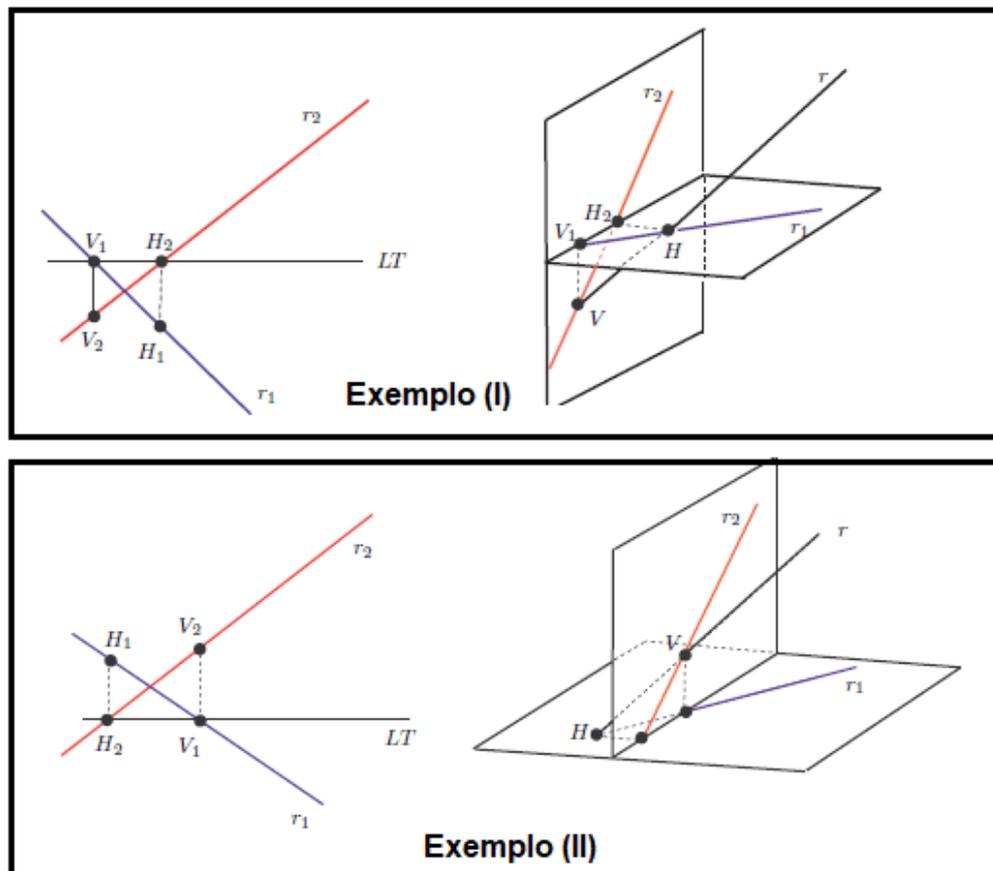
$$H \in PH \implies \begin{cases} H = H_1 \in R_1 \\ H_2 \in r_2 \cap LT \end{cases}$$

$$V \in PV \implies \begin{cases} V_1 \in R_1 \cap LT \\ V = V_2 \in r_2 \end{cases}$$

**Obs:** retas que não interceptam o PH não têm traço horizontal, e retas que não interceptam o PV não têm traço vertical.

**Exemplo:** Determine o traço da reta  $r$  dadas nas épuras abaixo:

Figura 24 – Traços de Retas



Fonte: Elaborado pelo autor.

No exemplo (I), seja  $r$  uma reta qualquer, primeiramente encontre a interseção com o plano PH e o plano PV, que são  $H = r \cap PH$  e  $V = r \cap PV$  respectivamente, agora obtenha a projeção vertical de  $H$  e a projeção horizontal de  $V$ , obtemos  $H_2$  e  $V_1$  (sempre pontos sobre a  $LT$ )

respectivamente, com os pontos  $H$  e  $V_1$  sobre o plano  $PH$ , trace a reta  $r_1$ , já com os pontos  $V$  e  $H_2$  sobre o plano  $PV$ , trace a reta  $r_2$ , por fim trace a reta perpendicular a  $LT$  que passe pelo ponto  $H_2$  e encontrará a reta  $r_1$  em um ponto, que denotaremos por  $H_1$ , logo o traço da reta  $r$  com plano  $PH$  será o ponto  $(H_1, H_2)$ . Da mesma forma trace a reta perpendicular a  $LT$  que passe pelo ponto  $V_1$  e encontrará a reta  $r_2$  em um ponto, que denotaremos por  $V_2$ , logo o traço da reta  $r$  com plano  $PV$  será o ponto  $(V_1, V_2)$ . Deixo a cargo do leitor verificar os traço da reta no exemplo (II).

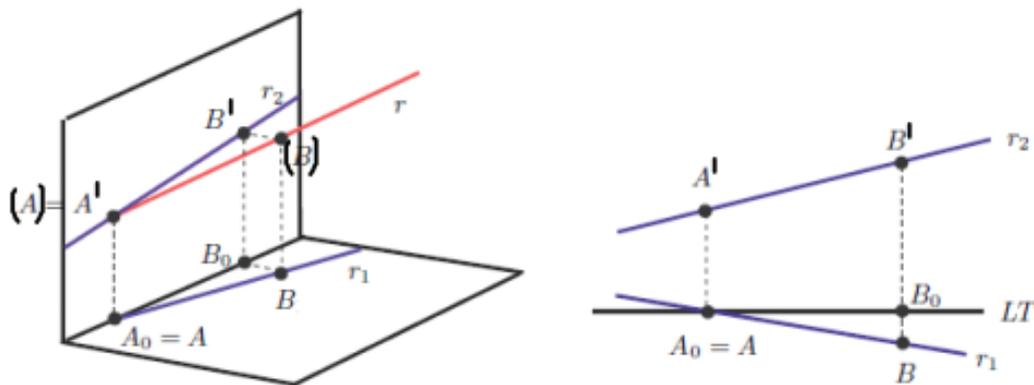
### 3.10 Posições da reta

A reta pode ocupar várias posições em relação ao plano de projeção, posições essas que determinam nomes e propriedades particulares (obs: os exemplos ilustrativos foram feitos no 1º diedro, fica a cargo do leitor analisar os outros casos).

#### 3.10.1 Reta qualquer

É uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, sua épura é caracterizada por possuir ambas as projeções oblíquas à linha de terra. Abaixo temos uma reta  $r$   $((A), (B))$ , onde a representação desta reta na épura será dada pelas retas  $r_1$  e  $r_2$  que são as projeções das retas nos planos de projeção horizontal e vertical, respectivamente.

Figura 25 – Reta Qualquer



### Propriedades:

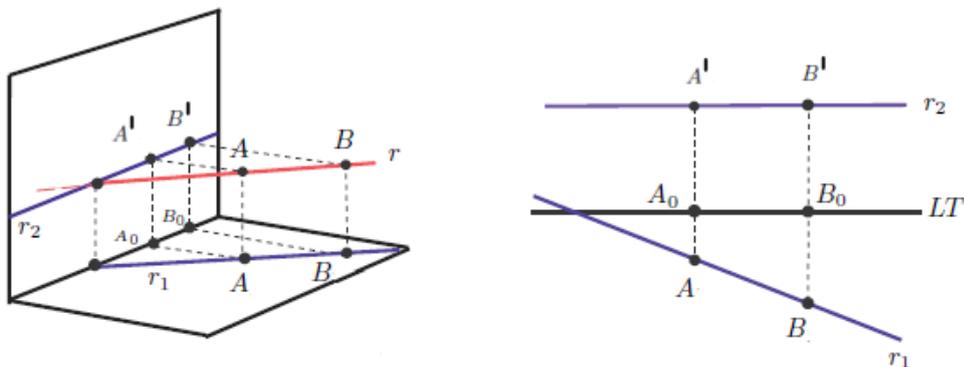
- O segmento (A)(B) é oblíquo em relação ao plano vertical e ao plano horizontal.
- Tanto as cotas como os afastamentos são diferentes ao longo do segmento.
- Nenhuma de suas projeções está em V.G.
- As projeções horizontais e as verticais são oblíquas em relação à LT.

#### 3.10.2 Reta horizontal (ou de nível)

*Reta horizontal* é qualquer reta paralela ou contida no plano de projeção horizontal, que não seja uma reta ortogonal ou paralela ao plano de projeção vertical.

Observemos que se a reta  $r$  é uma reta horizontal, então sua projeção ortogonal no plano de projeção vertical será uma reta (pois a reta  $r$  não é ortogonal ao plano de projeção vertical) que será paralela a linha de terra (pois ela é paralela a de projeção horizontal) e sua projeção ortogonal no plano de projeção horizontal não será nem paralela, nem perpendicular a linha de terra (veja a figura abaixo);

Figura 26 – Reta Horizontal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ou seja,

$$r_2 \parallel LT \quad , \quad r_1 \not\parallel LT \quad e \quad r_1 \not\perp LT.$$

Reciprocamente, se uma reta  $r$  é tal que sua projeção ortogonal no plano de projeção vertical é paralela a linha de terra e sua projeção ortogonal no plano de projeção horizontal não é

nem paralela, nem perpendicular à linha de terra, então a reta  $r$  será uma reta horizontal. Desse modo, podemos concluir que:

Uma reta  $r$  no espaço é uma reta horizontal. Se, e somente se,  
 $r_2 \parallel LT$ ,  $r_1 \not\parallel LT$  e  $r_1 \perp LT$ .

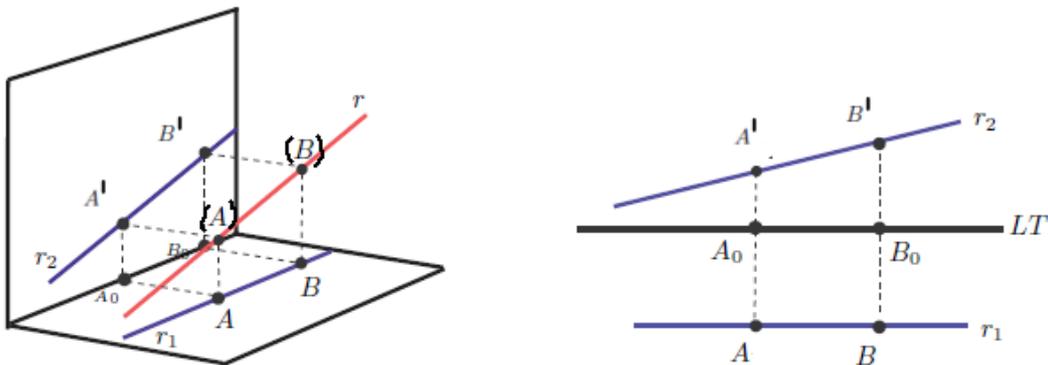
### Propriedades:

- Todos os pontos de uma reta horizontal têm a mesma cota. Portanto, sua projeção vertical é paralela à  $LT$ .
- A projeção horizontal  $AB$  do segmento horizontal  $(A)(B)$  está em V.G.
- O ângulo que uma reta horizontal faz com o plano vertical projeta-se em V.G. no plano horizontal.

### 3.10.3 Reta frontal (ou de frente)

*Reta frontal* é qualquer reta paralela ou contida no plano vertical, que não seja uma reta ortogonal ou paralela ao plano horizontal (veja a figura abaixo).

Figura 27 – Reta Frontal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos que se a reta  $r$  é uma reta frontal, então sua projeção ortogonal no plano horizontal é uma reta (pois a reta  $r$  não é ortogonal ao plano plano horizontal). e paralela a linha de terra (pois ela é paralela ao plano plano vertical) e sua projeção ortogonal no plano plano vertical, não será paralela, nem perpendicular a linha de terra (veja a figura acima).

Ou seja,

$r_1 \parallel LT$ ,  $r_2 \not\parallel LT$  e  $r_2 \perp LT$ .

Reciprocamente, se uma reta  $r$  do espaço é tal que sua projeção ortogonal no plano plano horizontal é paralela a linha de terra e sua projeção ortogonal no plano plano vertical não é paralela a linha de terra, então ela será uma reta frontal. Portanto uma reta  $r$  do espaço é uma reta frontal se, e somente se,

$$r_1 \parallel LT \quad , \quad r_2 \not\parallel LT \quad e \quad r_2 \not\perp LT.$$

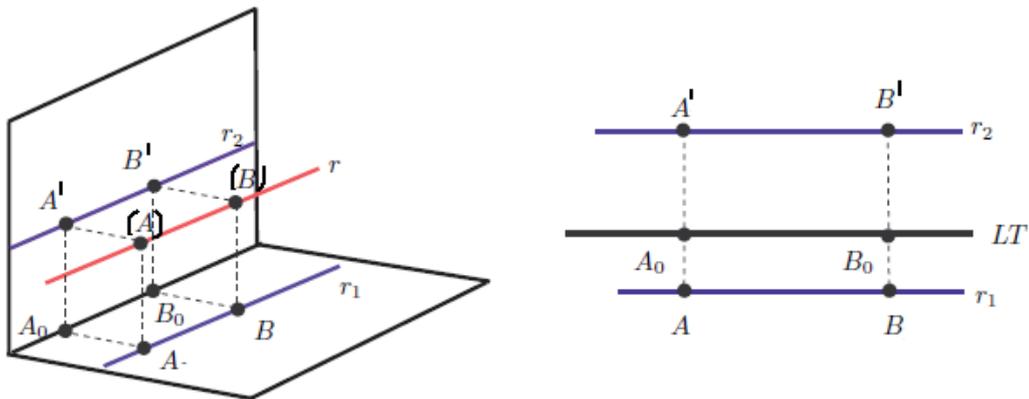
### Propriedades:

- Todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento. Portanto, sua projeção horizontal é paralela à LT.
- A projeção vertical  $A'B'$  do segmento de reta frontal  $\overline{(A)(B)}$  está em V.G.
- O ângulo que uma reta frontal faz com que a projeção horizontal projeta-se em V.G. na projeção vertical .

#### 3.10.4 Reta fronto-horizontal (ou paralela a LT)

*Reta fronto-horizontal* é uma reta paralela à LT (veja a figura abaixo).

Figura 28 – Reta fronto-horizontal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos que se  $r$  é uma reta fronto-horizontal, então suas projeções ortogonais no plano de projeção horizontal e no plano de projeção vertical, serão duas retas paralelas à linha de terra LT (veja a figura acima), ou seja,

$$r_1, r_2 \parallel LT.$$

Reciprocamente, se uma reta  $r$  do espaço é tal que, suas projeções ortogonais no plano de projeção horizontal e no plano de projeção vertical são retas paralelas à linha de terra,

então ela será uma reta fronto-horizontal. Com isto podemos concluir que: uma reta  $r$  no espaço é uma reta fronto-horizontal

se, e somente se,

$$r_1, r_2 \parallel LT.$$

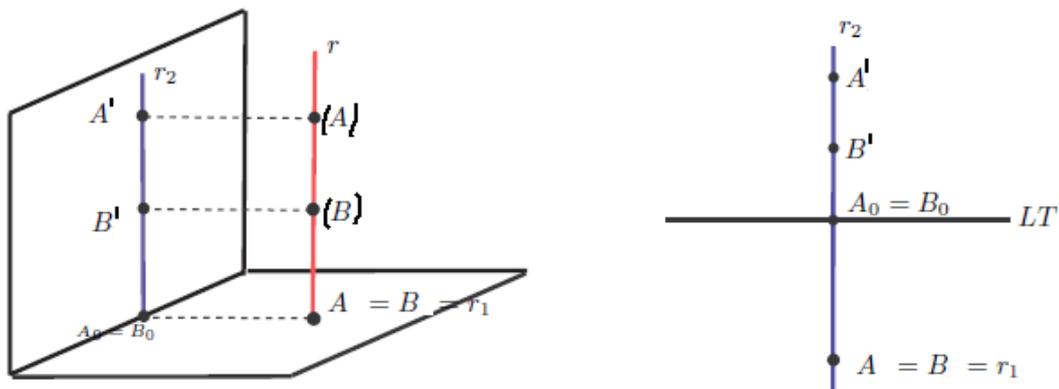
### Propriedades:

- Uma reta fronto-horizontal é paralela a ambos os planos de projeção e tem suas projeções também paralelas à LT.
- Toda reta fronto-horizontal é frontal e horizontal.
- O segmento  $\overline{(A)(B)}$  de uma reta fronto-horizontal projeta-se em V.G. nos planos de projeção.
- Todos os seus pontos têm cotas iguais e afastamentos iguais.

### 3.10.5 Reta vertical

*Reta vertical* é uma reta perpendicular ao plano horizontal.

Figura 29 – Reta vertical



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos que se  $r$  denota uma reta vertical, então sua projeção ortogonal no plano horizontal será um ponto, que indicaremos por  $A$  e, no plano vertical, será uma reta perpendicular a linha de terra  $LT$  (veja a figura acima), ou seja,

$$r_1 = \{A\} \quad e \quad r_2 \perp LT.$$

Reciprocamente, seja uma reta  $r$  do espaço, onde suas projeções ortogonais no plano  $PH$  e  $PV$  são respectivamente um ponto e um reta perpendicular à  $LT$ , então ela será uma reta

vertical. Com isto podemos concluir que: uma reta  $r$  no espaço é uma reta vertical.

Se, e somente se,

$$r_1 = \{A\} \quad e \quad r_2 \perp LT.$$

### Propriedades:

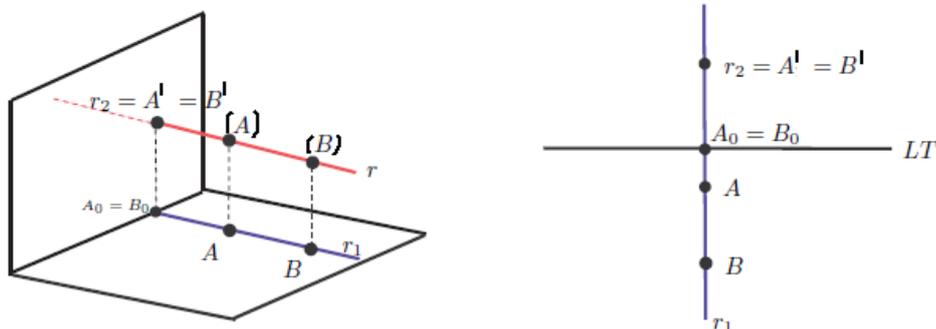
-Reta vertical é um caso particular de reta frontal.

- Sua projeção no plano vertical é perpendicular à LT e está em V.G.. Sua projeção horizontal é um ponto.

### 3.10.6 Reta de topo

*Reta de topo* é uma reta perpendicular ao plano de projeção vertical.

Figura 30 – Reta de topo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos que se  $r$  denota uma reta de topo, então sua projeção ortogonal no plano vertical será um ponto, que indicaremos por  $A'$  e, no plano horizontal, será uma reta perpendicular a linha de terra  $LT$  (veja a figura acima), ou seja,

$$r_2 = \{A'\} \quad e \quad r_1 \perp LT.$$

Reciprocamente, seja uma reta  $r$  do espaço, onde suas projeções ortogonais no plano PV e PH são respectivamente um ponto e um reta perpendicular à  $LT$ , então ela será uma reta de topo. Com isto podemos concluir que: uma reta  $r$  no espaço é uma reta de topo.

se, e somente se,

$$r_2 = \{A'\} \quad e \quad r_1 \perp LT.$$

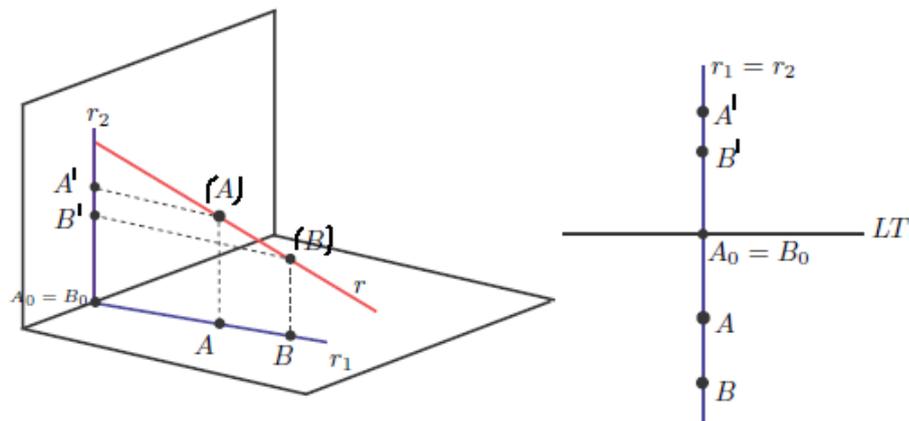
### Propriedades:

- Reta de topo é um caso particular de reta horizontal.
- Sua projeção no plano horizontal é perpendicular à LT e está em V.G.. Sua projeção vertical é um ponto.

#### 3.10.7 Reta de perfil

*Reta de perfil* é uma reta que é ortogonal à LT, mas não é horizontal nem frontal.

Figura 31 – Reta de perfil



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos que se  $r$  denota uma reta de perfil, então suas projeções ortogonais no plano vertical e no plano horizontal serão retas perpendiculares à linha de terra  $LT$ , ou seja, (veja a figura acima).

$$r_2, r_1 \perp LT.$$

Reciprocamente, seja uma reta  $r$  no espaço, que suas projeções ortogonais no plano vertical e no plano horizontal são retas perpendiculares a linha de terra  $LT$ , então ela será uma reta de perfil. Com isto podemos concluir que: uma reta  $r$  no espaço e uma reta de perfil.

se, e somente se,

$$r_2, r_1 \perp LT.$$

### Propriedades:

- Toda reta de perfil está contida em um plano perpendicular a  $LT$  e, portanto, perpendicular ao plano horizontal e ao plano vertical.

- Suas projeções nos planos plano horizontal e plano vertical são perpendiculares à LT. Na écura, as projeções são coincidentes.

### 3.11 Pertinência de ponto à reta

Em Geometria Descritiva, o estudo da pertinência do ponto à reta tem como objetivo estudar questões geométricas do ponto de vista das épuras dos elementos envolvidos permitindo concluir a posição exata da reta no espaço.

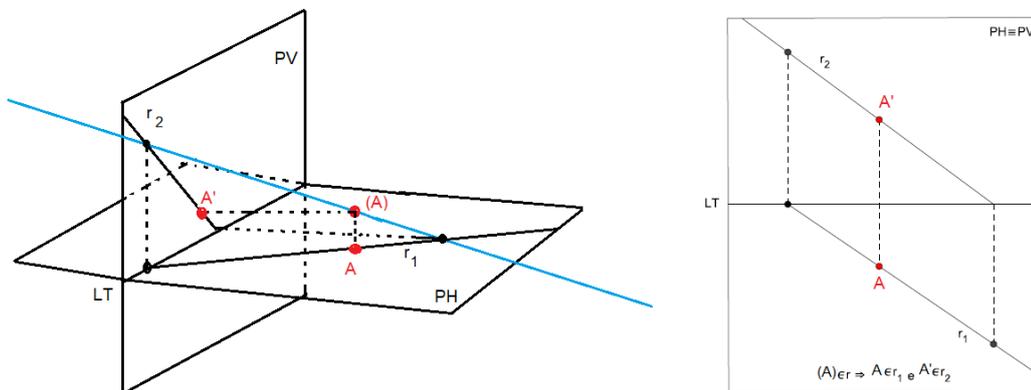
**Problema:** Um ponto (A) e uma reta r do espaço, decidir se o ponto (A) pertence ou não a reta r, ou seja, dadas as projeções ortogonais do ponto (A) (isto é,  $A \in PH$  e  $A' \in PV$ ) e da reta r (isto é,  $r_1 \subseteq PH$  e  $r_2 \subseteq PV$ ) decidir se o ponto (A) pertence ou não a reta r, do ponto de vista das épuras envolvidas e a recíproca é válida ?

Solução: Observemos que se um ponto (A), pertence a uma reta r, então suas projeções ortogonais nos planos PH e PV, devem pertencer às respectivas projeções ortogonais da reta r sobre os planos PH e PV, ou seja,

$$(A) \in r, \text{ então, } A \in r_1 \text{ e } A' \in r_2$$

Além disso, os pontos A, A' deverão pertencer a uma mesma linha de chamada (para que definem um ponto do espaço). A figura abaixo ilustra o que acabamos de mencionar.

Figura 32 – Pertinência de ponto à reta 1



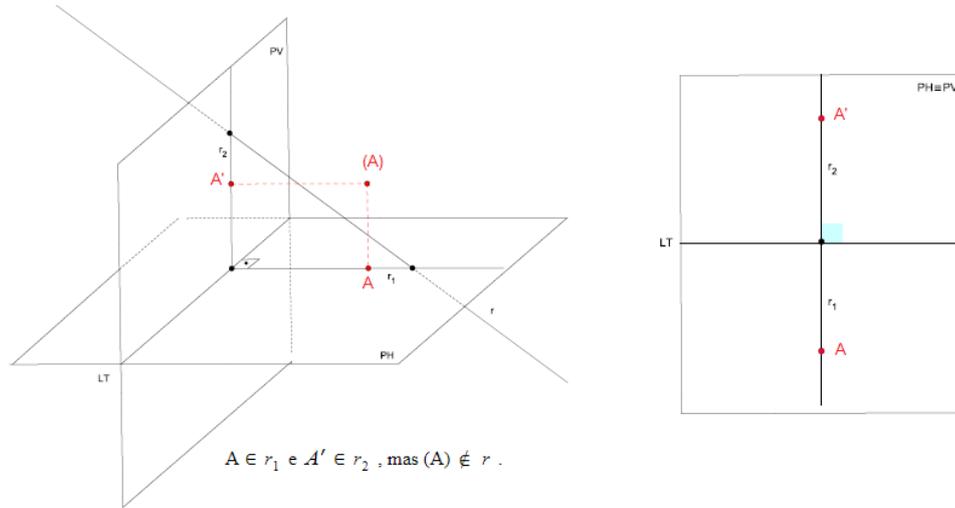
Fonte: Elaborado pelo autor.

Existe um caso em que a recíproca não é válida, a saber, o caso em que a reta r é uma reta de perfil. Neste caso, pode ocorrer de

$$A \in r_1 \text{ e } A' \in r_2, \text{ mas } (A) \notin r$$

A figura abaixo ilustra a situação:

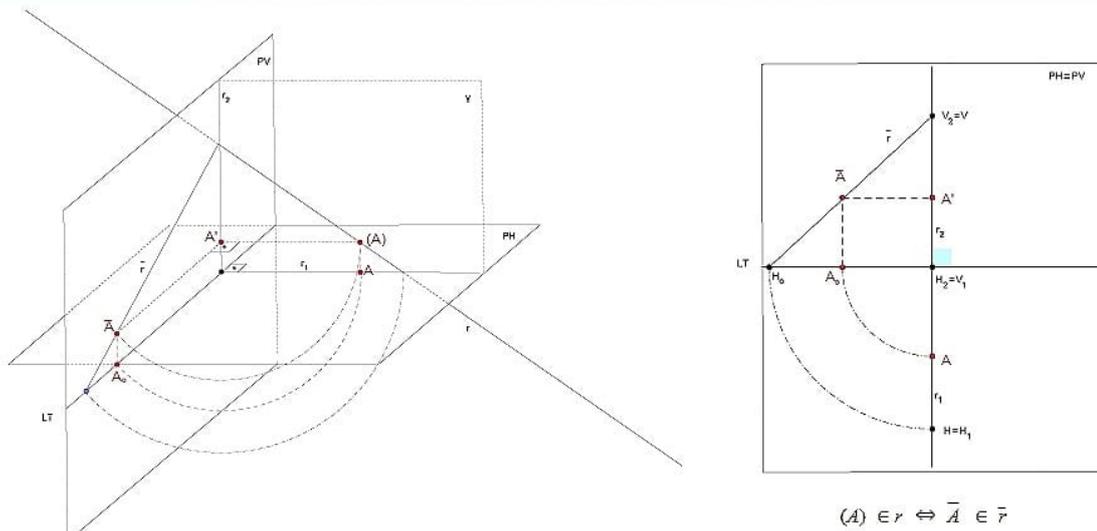
Figura 33 – Pertinência de ponto à reta 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ou seja, neste caso, só estudando as épuras do ponto (A) e da reta r não conseguiremos saber se o ponto (A) pertence ou não à reta r.

Figura 34 – Pertinência de ponto à reta 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante disso, para sabermos se um ponto (A) pertence ou não a uma reta r que é uma reta de perfil, precisaremos estudar os rebatimentos do ponto (A) e da reta r no plano PV (veja a figura 34).

Assim, para o caso de uma reta perfil r, um ponto (A) do espaço pertencerá a mesma se, e somente se,

$$A \in r_1, A' \in r_2$$

E o rebatimento do ponto (A) no plano PV (ou seja,  $\bar{A}$ ) pertence ao rebatimento da reta r no plano PV (isto é,  $\bar{r}$ ), ou seja:

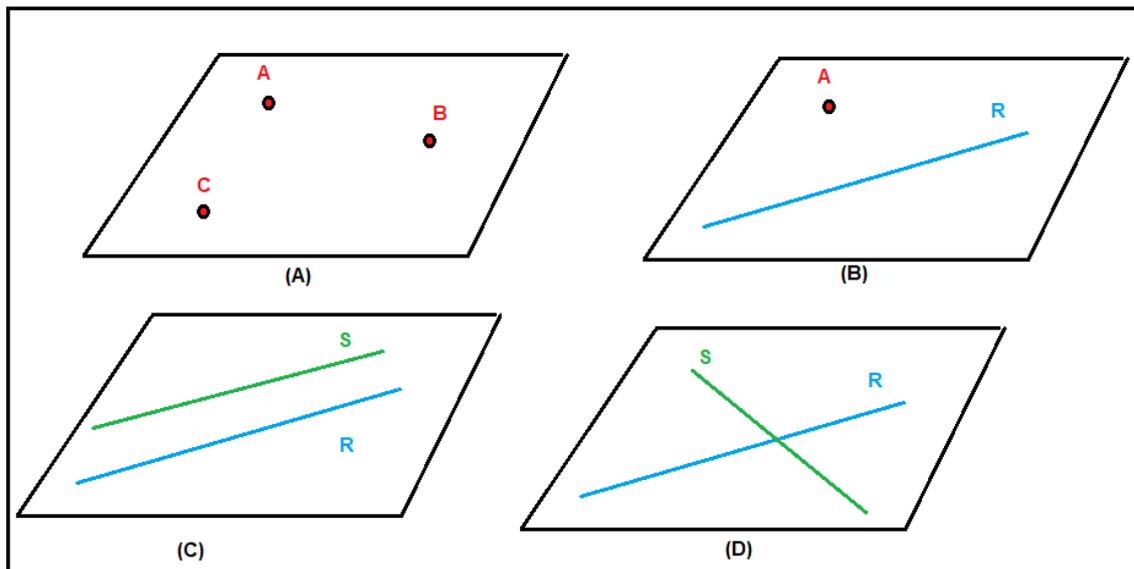
$$(A) \in r \text{ se, e somente, se } A \in r_1, A' \in r_2 \text{ e } \bar{A} \in \bar{r}.$$

### 3.12 Estudo do plano

Aprendemos quando estudamos geometria de posição, que existem quatro modos diferentes de caracterizarmos um plano, são eles:

- A) Três pontos distintos não colineares.
- B) Uma reta e um ponto não pertencente a esta reta.
- C) Duas retas paralelas e distintas.
- D) Duas retas concorrentes.

Figura 35 – Construções de um plano



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos que aprendemos na seção anterior representar cada uma das situações acima, em épura, e com isto poderemos estudar planos, dados em épura.

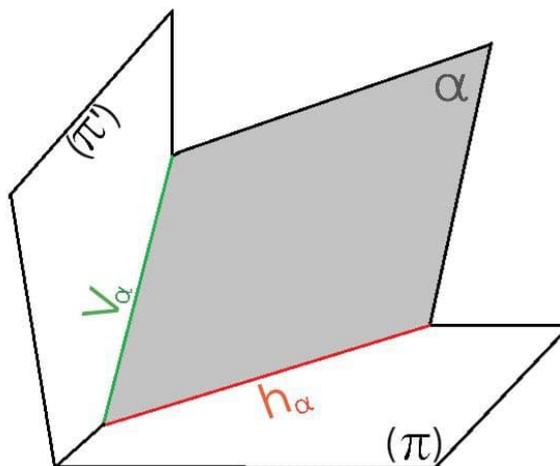
Uma grande problemática do estudo de planos é que a projeção de um plano não nos fornece informações sobre este plano. Para contornar isso, usaremos a ideia de traços para representá-lo na épura.

Quando estudamos retas, vimos que os traços de uma reta são os pontos de interseção da reta com os planos de projeção. De maneira análoga, temos os traços de um plano, que são as retas de interseção do plano com os planos de projeção.

### 3.13 Traços de plano

**Definição 3.13.1:** Dado um plano qualquer  $\alpha$ , denominaremos a interseção do plano  $\alpha$  com os planos PH e PV como sendo os traços do plano  $\alpha$ , e serão indicadas por  $h_\alpha$  e  $v_\alpha$ , respectivamente. Se  $\alpha$  não é paralelo nem coincidente com PH, o **traço horizontal** de  $\alpha$  é a reta  $h_\alpha = \alpha \cap PH$ . Se  $\alpha$  não é paralelo nem coincidente com PV, o **traço vertical** de  $\alpha$  é a reta  $v_\alpha = \alpha \cap PV$ .

Figura 36 – Traços de um plano



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Propriedade 1:** Seja  $\alpha \neq PH$  e  $\alpha \neq PV$ . Se  $\alpha$  contém a linha de terra LT, então os dois traços  $\alpha$ , coincidem com a linha de terra (LT).

De fato, temos:

$$LT \subset \alpha \Rightarrow LT \subset (\alpha \cap PH) = h_\alpha \Rightarrow LT = h_\alpha$$

$$LT \subset \alpha \Rightarrow LT \subset (\alpha \cap PV) = v_\alpha \Rightarrow LT = v_\alpha$$

Logo,  $LT = h_\alpha = v_\alpha$ .

**Propriedade 2:** Seja  $\alpha \neq PH$  e  $\alpha \neq PV$  então  $h_\alpha = LT$  se e somente se  $v_\alpha = LT$ .

Temos que;

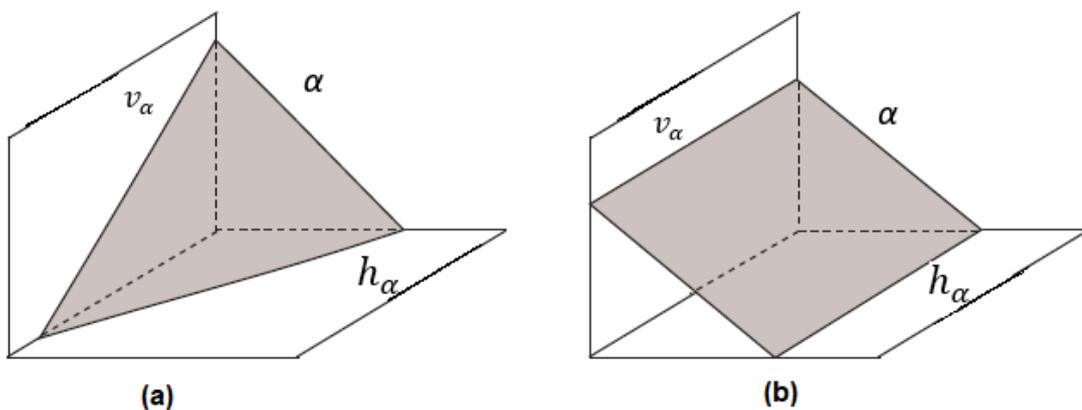
$$h_\alpha = LT \Rightarrow LT \subset \alpha \Rightarrow h_\alpha = v_\alpha = LT.$$

De modo análogo temos,

$$v_\alpha = LT \Rightarrow LT \subset \alpha \Rightarrow v_\alpha = h_\alpha = LT.$$

**Propriedade 3:** Se um plano tem os dois traços distintos então, ou os traços são concorrentes num ponto pertencente à LT (figura 37 (a)), ou são paralelos à LT (figura 37 (b)).

Figura 37 – Traços concorrentes e pertencentes a LT



Fonte: Elaborado pelo autor.

De fato, como  $h_\alpha$  e  $v_\alpha$  são retas distintas e coplanares então, ou são paralelas, ou são concorrentes. Suponhamos que  $h_\alpha$  e  $v_\alpha$  são concorrentes e seja  $O = h_\alpha \cap v_\alpha$ . Temos:

$$O \in h_\alpha \Rightarrow O \in PH$$

$$O \in v_\alpha \Rightarrow O \in PV.$$

Logo  $O \in PH \cap PV = LT$ .

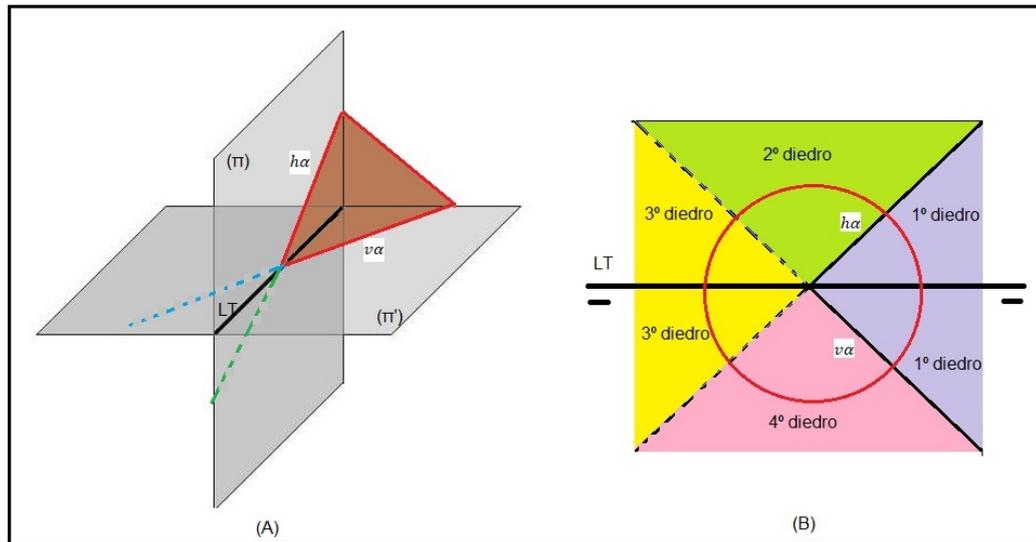
Suponhamos agora que  $h_\alpha$  e  $v_\alpha$  são paralelas. Se  $h_\alpha$  não é paralela à LT, então  $h_\alpha \cap LT = \{P\}$  ou  $h_\alpha = LT$ . Se  $h_\alpha \cap LT = \{P\}$ , então  $P \in \alpha \cap PV = v_\alpha$ , o que é um absurdo, pois  $h_\alpha$  e  $v_\alpha$  são paralelas. Se  $h_\alpha = LT$ , então  $v_\alpha = LT$ , o que é um absurdo pois  $h_\alpha \neq v_\alpha$ . Portanto  $h_\alpha$  é paralela a LT. Segue da transitividade que  $v_\alpha$  também é paralela a LT.

As vantagens das representações dos planos por seus traços, são:

- Redução no número de retas

- Permite identificar sua posição particular, saber qual o plano se trata (será melhor compreendido na próxima seção)
- Indicam as porções úteis do plano nos diedros por quais ele passar (figura abaixo)

Figura 38 – Porções úteis do plano nos diedros



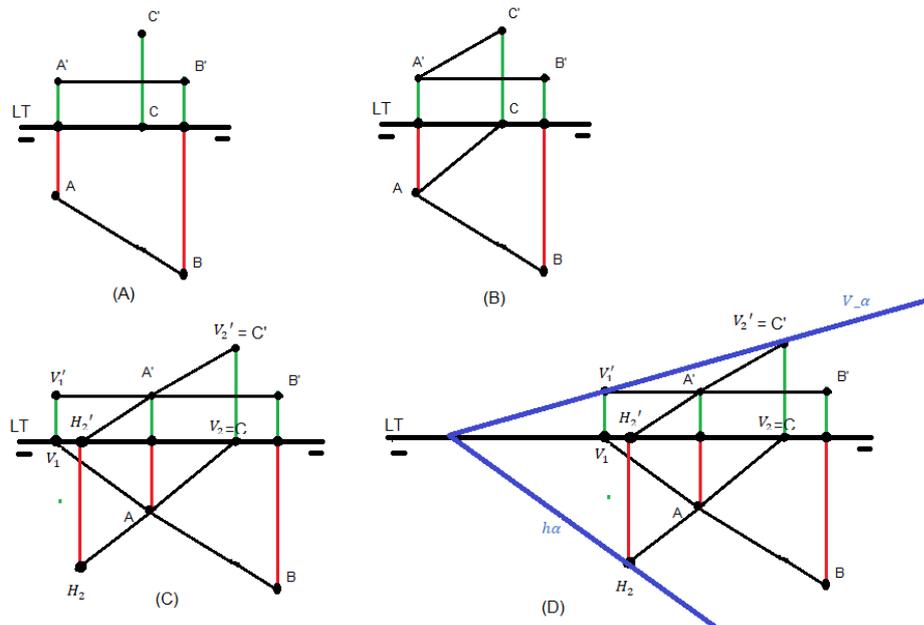
Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a figura acima, faça os prolongamentos dos traços horizontais e verticais. Quando passar para é pura correspondente, você pode perceber que o trecho entre  $h_\alpha$  e  $v_\alpha$  corresponde ao 1º diedro, o trecho entre o  $h_\alpha$  e o prolongamento do  $v_\alpha$  corresponde ao 2º diedro e assim por diante.

**Exemplo:** Determine os traços dos planos, definido pela reta  $\overline{(A)(B)}$  e um ponto (C).

*Solução:* Faça as projeções da reta  $\overline{(A)(B)}$  e a projeção do ponto (C), que são  $\overline{A'B'}$  e  $C'$  (projeções verticais) e  $\overline{AB}$  e C (projeções horizontais) (Figura 39 (A)). Observe que temos uma reta e um ponto fora dela, para determinar um plano em é pura que devemos transformar em um plano representado por duas retas, faça uma reta  $\overline{AC}$ , logo sua projeção será  $\overline{A'C'}$  (Figura 39 (B)). Agora precisamos encontrar os traços das retas para posteriormente encontrar os traços dos planos, primeiramente encontraremos o traço da reta  $\overline{AB}$ , como a projeção da reta é horizontal, teremos apenas o traço vertical que é  $(V_1, V_1')$  (estudamos isso na seção 3.9.1). Descobrimo o traço vertical da reta  $\overline{AC}$ , obtemos  $(V_2, V_2')$  e para o traço horizontal da reta, temos  $(H_2, H_2')$  (Figura 39 (C)). Por fim o traço vertical do plano será a reta que intercepta os pontos  $V_1'$  e  $V_2'$ , e o traço horizontal do plano será a reta que passe pela interceção de LT com o traço vertical do plano e o ponto  $H_2$ . (Figura 39 (D))

Figura 39 – Traço do plano (exemplo)

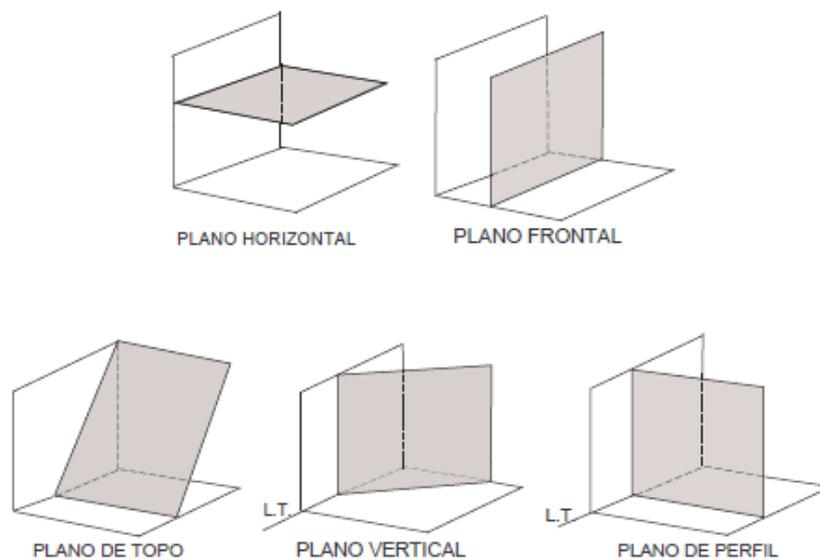


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.14 Épura de planos

Assim como no caso das retas no espaço, temos alguns planos que desempenham papéis importantes no estudo de problemas da Geometria Descritiva. Seguem, na figura abaixo, os seguintes tipos especiais de plano:

Figura 40 – Tipos de planos

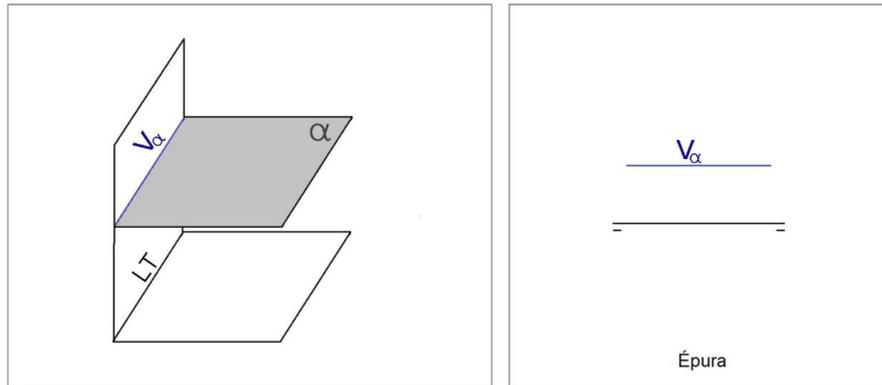


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.14.1 Plano horizontal

Um plano  $\alpha$ , que é paralelo ou coincidente com plano PH, será denominado **plano horizontal ou de nível**. (As propriedades a seguir são facilmente percebidas de acordo com a figura abaixo).

Figura 41 – Plano Horizontal 1

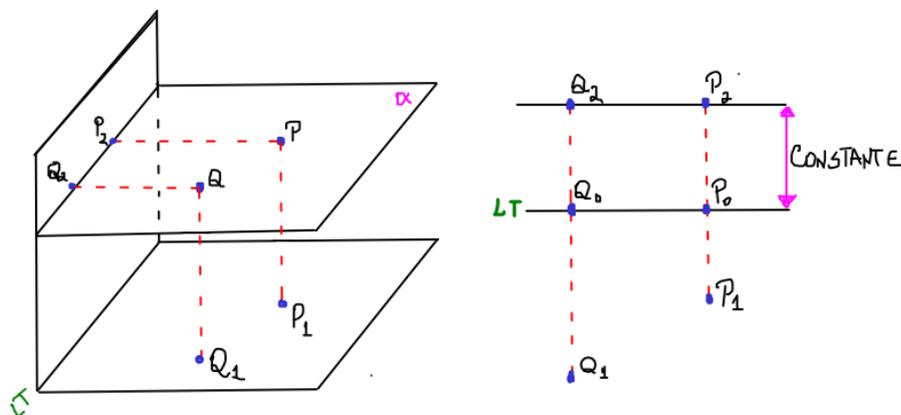


Fonte: Elaborado pelo autor.

#### Propriedades:

- Se  $\alpha$  é um plano horizontal, então seu traço com o plano PH será vazio, excetuando-se o caso em que o plano  $\alpha$  for o plano PH.
- Observemos que  $\alpha$  e um plano horizontal se, e somente se,  $v_\alpha \parallel LT$ .
- Se  $\alpha$  é um plano horizontal e  $P = (P_1, P_2)$ ,  $Q = (Q_1, Q_2) \in \alpha$ , então  $\overline{P_2P_0} = \overline{Q_2Q_0}$ , ou seja, todo ponto de um plano horizontal tem cota constante (veja a figura abaixo).

Figura 42 – Plano Horizontal 2



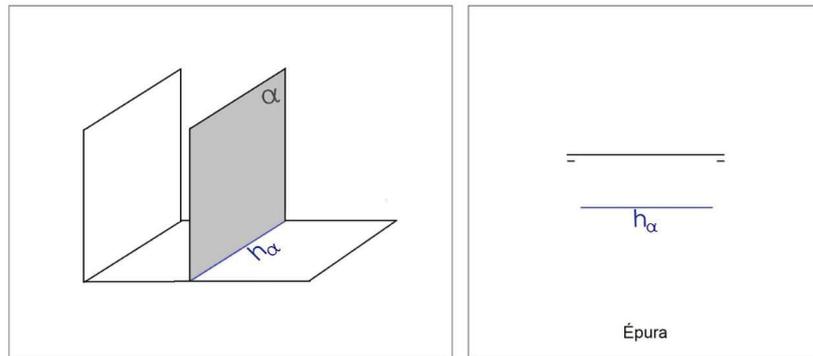
Fonte: Elaborado pelo autor.

- Qualquer figura contida em um plano horizontal tem sua projeção horizontal em V.G. e sua projeção vertical contida em  $v_\alpha$ .

### 3.14.2 Plano frontal

Um plano  $\alpha$  que é paralelo ou coincidente com plano PV, será denominado **plano frontal ou de frente**.

Figura 43 – Plano Frontal 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

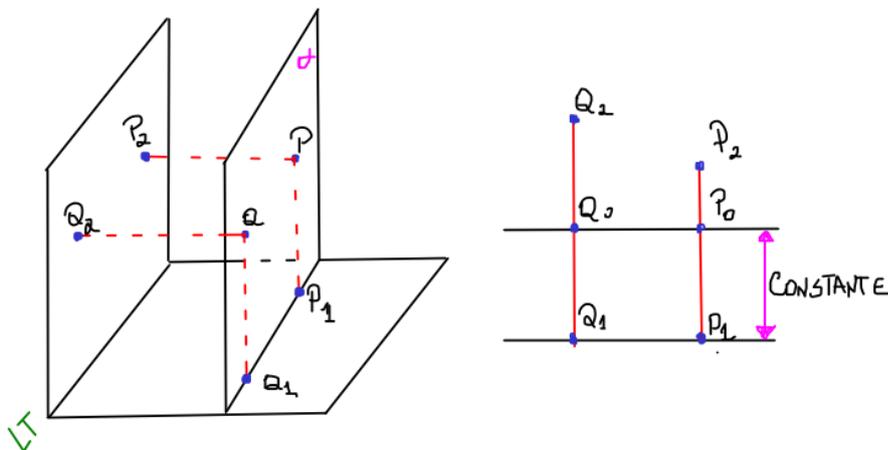
#### Propriedades:

-Se  $\alpha$  é um plano frontal, então seu traço com o plano PV, será vazio, excetuando-se o caso em que o plano  $\alpha$  for o plano PV.

- Observemos que  $\alpha$  é um plano frontal se, e somente se,  $h_\alpha \parallel LT$  (veja a figura abaixo);

-Se  $\alpha$  é um plano horizontal e  $P = (P_1, P_2)$ ,  $Q = (Q_1, Q_2) \in \alpha$ , então  $\overline{P_1P_0} = \overline{Q_1Q_0}$ , ou seja, todo ponto de um plano frontal tem afastamento constante (veja a figura abaixo).

Figura 44 – Plano Frontal 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Qualquer figura contida em um plano frontal tem sua projeção vertical em V.G. e sua projeção horizontal contida em  $h_\alpha$  (traço do plano  $\alpha$  no PH).

### 3.14.3 Plano de topo

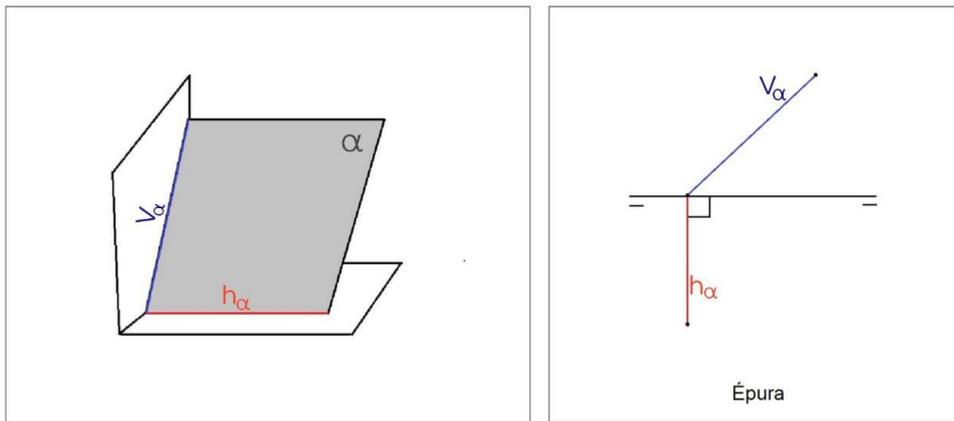
Um plano  $\alpha$  que é perpendicular ao plano PV e não forma ângulo reto com o plano PH, será denominado **plano de topo**.

#### Propriedades:

-Um plano  $\alpha$  é um plano de topo se, e somente se, seu traço, com o plano PH, e perpendicular a linha de terra LT e seu traço, com o plano PV, não é uma reta perpendicular a linha de terra LT (veja a figura abaixo), isto é,

$$h_{\alpha} \perp LT \text{ e } v_{\alpha} \not\perp LT .$$

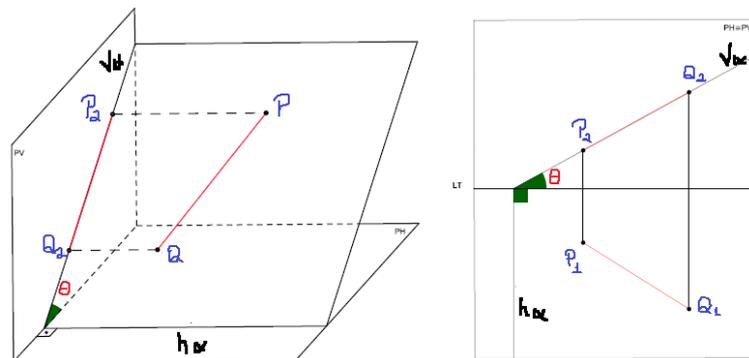
Figura 45 – Plano de topo 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

-Qualquer figura contida em um plano de topo tem sua projeção vertical contida em  $v_{\alpha}$ .

Figura 46 – Plano de topo 2



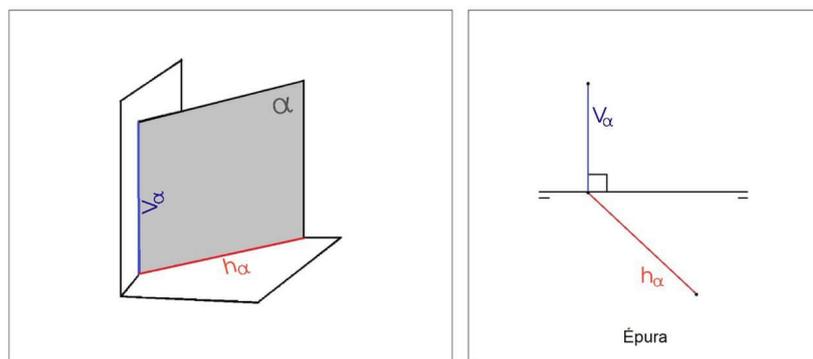
Fonte: Elaborado pelo autor.

-A medida do ângulo, que denotaremos por  $\theta$ , que o plano vertical  $\alpha$  faz com o plano PH é igual a medida do ângulo que o traço do plano  $\alpha$ , com o plano PV, faz com a linha de terra LT, isto é, que a reta  $v_\alpha$  faz com a reta LT.

### 3.14.4 Plano vertical

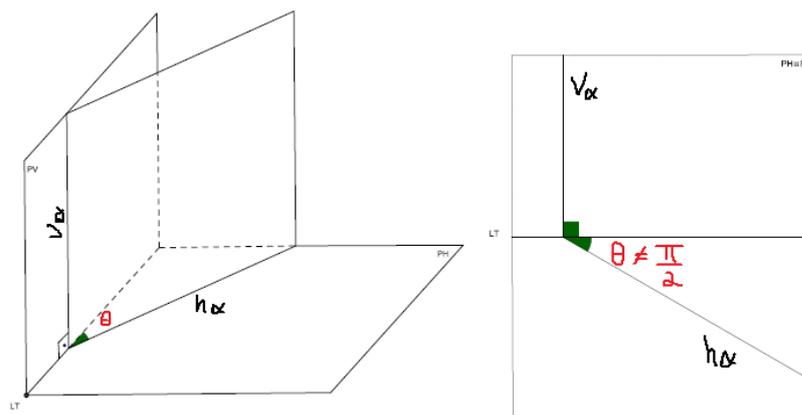
Um plano  $\alpha$  que é perpendicular ao plano PH e não forma ângulo reto com o plano PV, será denominado **plano vertical** (Figura 47).

Figura 47 – Plano vertical 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Plano vertical 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

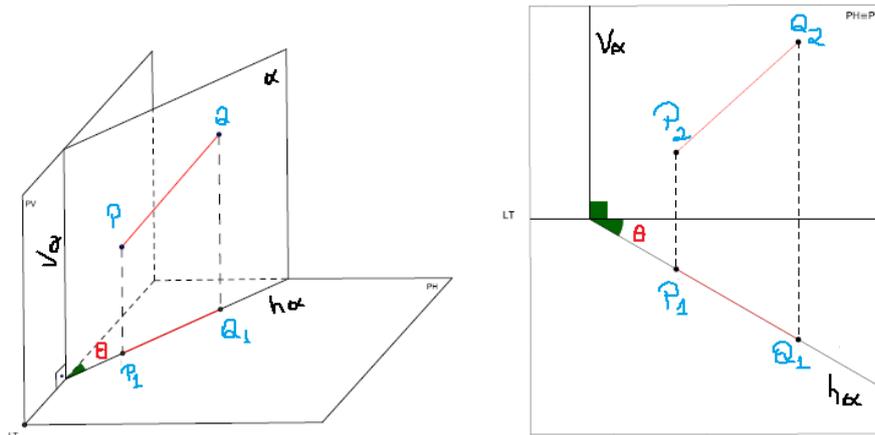
### Propriedades:

- Um plano  $\alpha$  é um plano vertical se, e somente se, seu traço com o plano PV é perpendicular a linha de terra LT e seu traço com o plano PH não é uma reta perpendicular a linha de terra LT, isto é, (veja a figura 48).

$$v_\alpha \perp LT \text{ e } h_\alpha \not\perp LT .$$

- Se  $\alpha$  é um plano vertical, então qualquer região contida no plano  $\alpha$  terá sua projeção ortogonal no plano PH contida no traço do plano  $\alpha$  no plano PH, isto é, contida na reta  $\alpha_1$  (veja a figura abaixo).

Figura 49 – Plano vertical 3



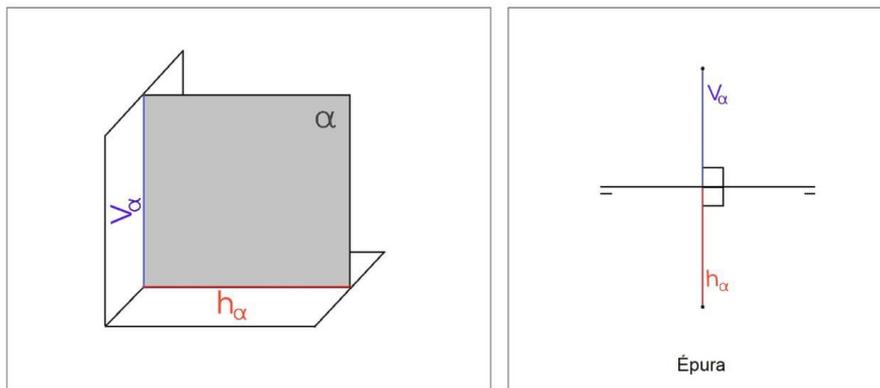
Fonte: Elaborado pelo autor.

-A medida do ângulo, que denotaremos por  $\theta$ , que o plano vertical  $\alpha$  faz com o plano PV, é igual à medida do ângulo que o traço do plano  $\alpha$ , com o plano PH, faz com a linha de terra LT, isto é, que a reta  $h_\alpha$  faz com a reta LT (veja a figura 49).

### 3.14.5 Plano de perfil

Um plano  $\alpha$  que é perpendicular à linha de terra LT será denominado **plano de perfil**.

Figura 50 – Plano de perfil 1



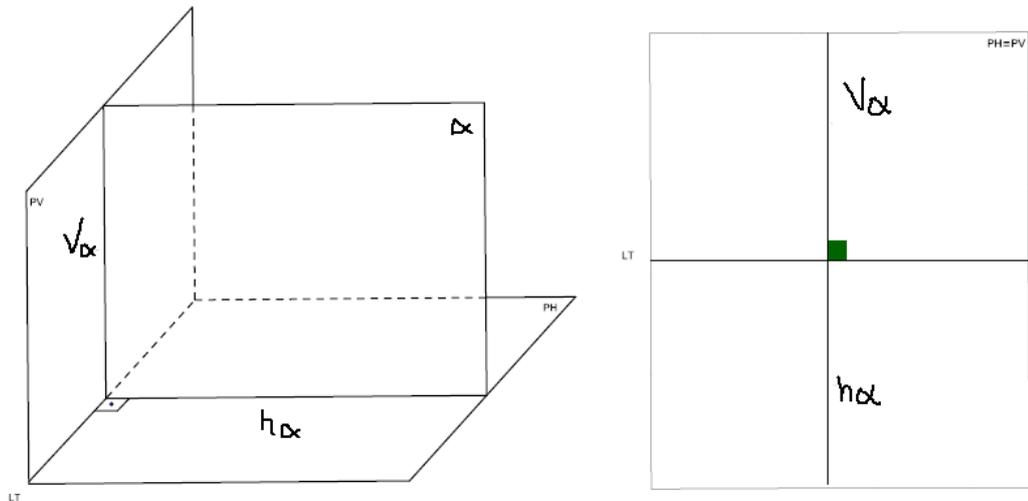
Fonte: Elaborado pelo autor.

### Propriedades:

-Um plano  $\alpha$  e um plano de perfil se, e somente se, seus traços, com o plano PH e com o plano PV, são perpendiculares à linha de terra LT (veja a figura abaixo), isto é,

$$h_{\alpha} \perp LT \text{ e } v_{\alpha} \perp LT .$$

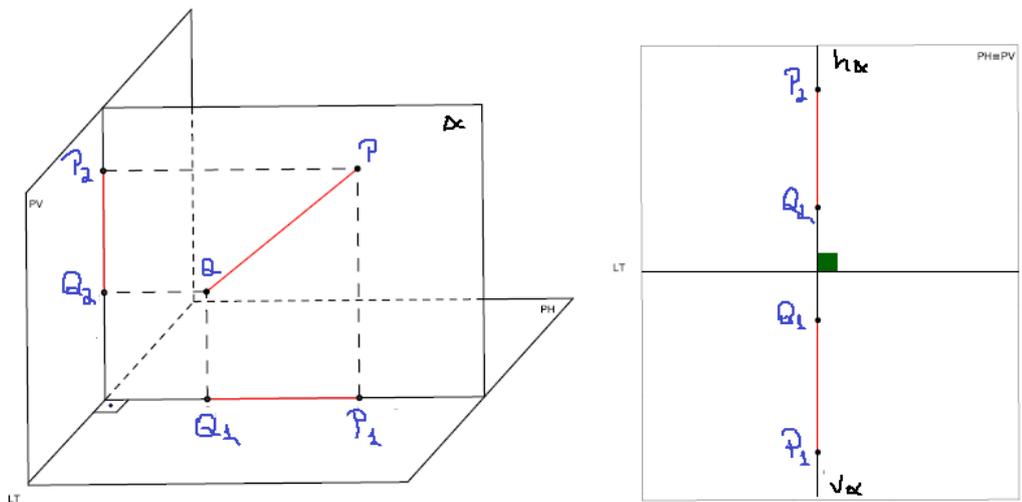
Figura 51 – Plano de perfil 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

-Toda região contida num plano de perfil  $\alpha$  tem suas projeções ortogonais nos planos PH e PV, contidas nos traços do plano  $\alpha$  com os planos PH e PV, isto é, contidas nas retas  $h_{\alpha}$  e  $v_{\alpha}$ , respectivamente (veja a figura abaixo).

Figura 52 – Plano de perfil 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4 APLICAÇÕES DE GEOMETRIA DESCRITIVA

A geometria descritiva é essencial nos dias atuais, visto que podemos perceber seu estudo em diversas áreas de conhecimento, engenharia, arquitetura, matemática, computação (modelagens em 3D). Uma das coisas bem interessantes desta área de conhecimento é que desde a antiguidade o homem já se utilizava de alguns conceitos de geometria descritiva de forma natural. Segundo Torres (2016), o homem expressa-se graficamente desde a pré-história. As gravuras e os desenhos encontrados nesta época demonstram as primeiras representações de uma imagem sobre uma superfície. Hoje nós podemos usar desses conceitos num simples desenho no caderno ou num caro software para projeto de peças. Existem várias possibilidades de atuação da geometria descritiva.

Desse modo o foco principal deste capítulo é apresentar o uso da geometria descritiva em algumas áreas de conhecimentos, bem como um modelo de apresentação para uma abordagem no ensino médio. O objetivo deste capítulo é uma apresentação básicas dos temas a seguir como motivação para que o leitor possa entender as aplicações de GD e se aprofundar cada vez mais sobre este tema.

### 4.1 Desenho de Arquitetura

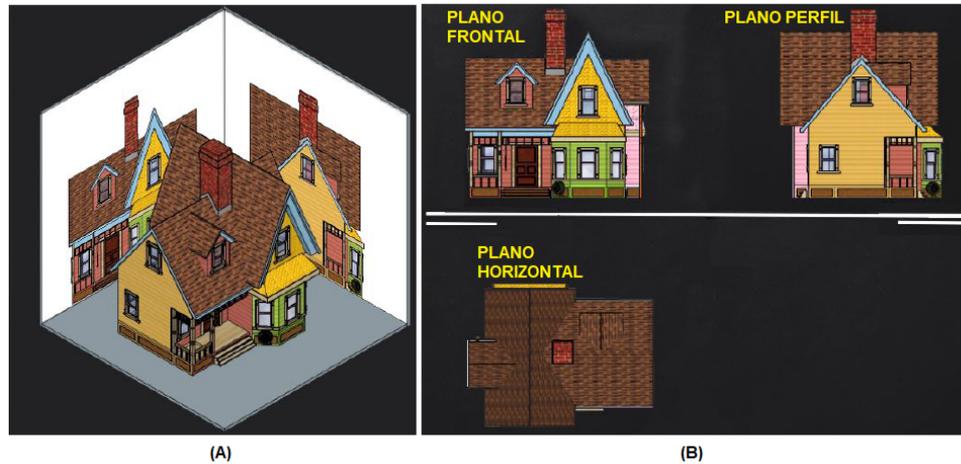
Geometria e arquitetura caminham lado a lado, visto que é possível considerar o desenho como o principal meio de comunicação entre os envolvidos no processo de projeto em arquitetura.

Segundo Helmut Pottmann ( 2007, p.1.), a “Geometria se encontra no âmago do processo de projeto da arquitetura. É onipresente, da concepção da forma até a construção (do edifício)”. Pottmann ainda complementa dizendo que atualmente a Arquitetura tem trabalhado com novas possibilidades formais proporcionadas pela tecnologia digital, e com isso ele se diz convencido que tais desafios podem ser vencidos, de forma mais eficaz, com uma sólida compreensão da geometria. E para avançar neste campo emergente, uma estreita cooperação entre a geometria e arquitetura é da mais alta importância.

O método mongeano estudado no capítulo anterior está diretamente ligado ao desenho de arquitetura. Observe a figura 52(A), visualizamos o desenho de uma casa, onde a épura pode ser ilustrada como uma prancheta de desenho, que é onde ocorre o desenvolvimento do projeto. Um desenho técnico de arquitetura nada mais é do que um desenho de geometria

descritiva aplicado. Na figura 52 (B), retiramos do desenho original a planta da cobertura (vista superior (Plano Horizontal)), fachada (vista frontal(plano frontal)) e a lateral da casa (vista lateral (plano perfil)).

Figura 53 – Desenho de arquitetura

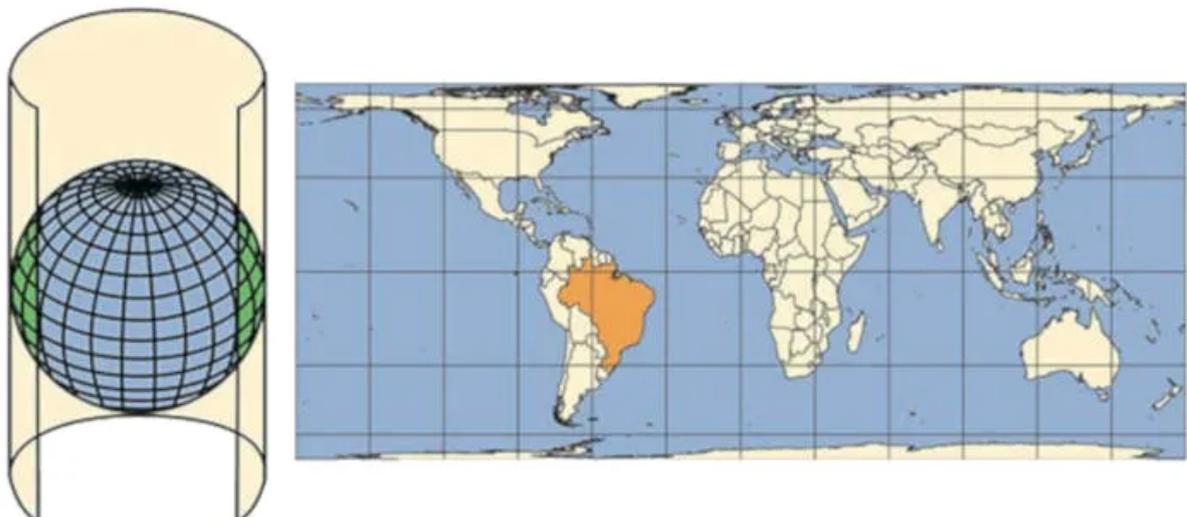


Fonte: Adaptado COSTA (2018,p. 9).

## 4.2 Cartografia

A cartografia é outra área que a geometria descritiva está inserida, pois precisamos representar áreas do globo terrestre em projeções bidimensionais, que conhecemos como mapas, tendo como uma das principais, a projeção de Mercator ( idealizada por Gerhard Mercator). A projeção de Mercator tem como característica:

Figura 54 – Projeção de Mercator



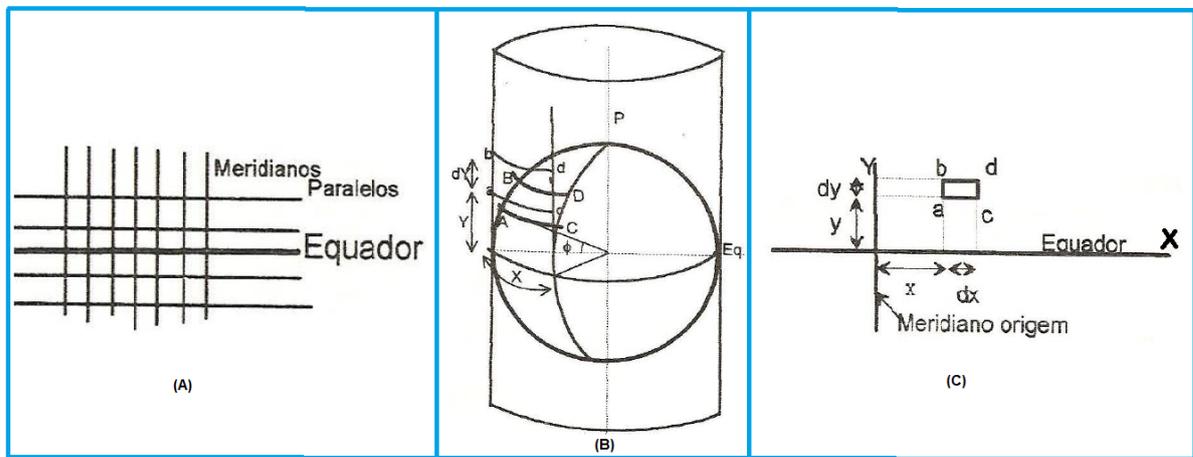
Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/geografia/projecoes-cartograficas.htm>, acesso em: 15 jan. 2022. .

- Cilindro na posição equatorial ou normal (o eixo de simetria do cilindro coincide com o eixo de rotação da Terra);

- Cilindro tangente à esfera modelo;

Considere uma projeção de Mercator para um quadrilátero ABCD. Na figura 54(A), temos a **linha do equador** (referência à linha de terra). Os **meridianos** serão linhas retas paralelas entre si e perpendiculares ao Equador, pois seus planos na esfera terrestre (esfera-modelo) contêm o eixo do cilindro e o interceptam segundo as suas geratrizes. Os **paralelos** serão também linhas retas, paralelas ao Equador e perpendiculares aos meridianos.

Figura 55 – Representação Cartográfica



Fonte: Elaborado pelo Autor. .

Seja A,B,C e D quadrilátero sobre a esfera modelo e a,b,c e d sua representação sobre o cilindro respectivamente. Chamando de  $y$  a distância entre o Equador e o ponto a, tomado evidentemente sobre a geratriz do cilindro que contém a. Chame  $d_x$  distância entre a e b,  $x$  é a distância entre a e o meridiano e  $\phi_a$  a latitude do ponto A (Figura 55 (B)).

Desse modo, os pontos a representar poderão ser referidos a um sistema de coordenadas retangulares, tomando-se para eixo X de coordenadas o Equador, e um determinado meridiano, escolhido para origem, eixo dos Y (figura 54(C)).

### 4.3 Geometria Descritiva em Sala de aula

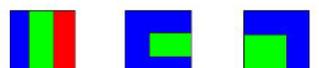
A geometria descritiva não faz parte dos programas e conteúdos previstos nos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio, por isso esta seção tem como proposta uma apresentação de abordagem dos conceitos de geometria descritiva (projeções) para alunos do 3º ano do ensino médio com o objetivo de melhorar sua visão espacial, melhorando sua capacidade de abstração e o raciocínio tridimensional. Ribeiro afirma;

“ Na prática pode-se dizer que, para interpretar um desenho, é necessário enxergar o que não é visível e a capacidade de entender uma forma espacial a partir de uma figura plana é chamada visão espacial.”(RIBEIRO, PERES e IZIDORO, 2006, p.5).

Aconselho que o docente inicie sua abordagem ao tema com atividades que instiguem o aluno a identificar e visualizar o objeto (figura 56 (A))(material físico). Nesta primeira etapa, veremos como o aluno trabalha sua visão sob o objeto de diferentes vistas.

Na figura 56(B), temos uma abordagem onde o aluno precisa identifica as vistas da figura, sem que possua o objeto em mãos.

Figura 56 – Atividade 01

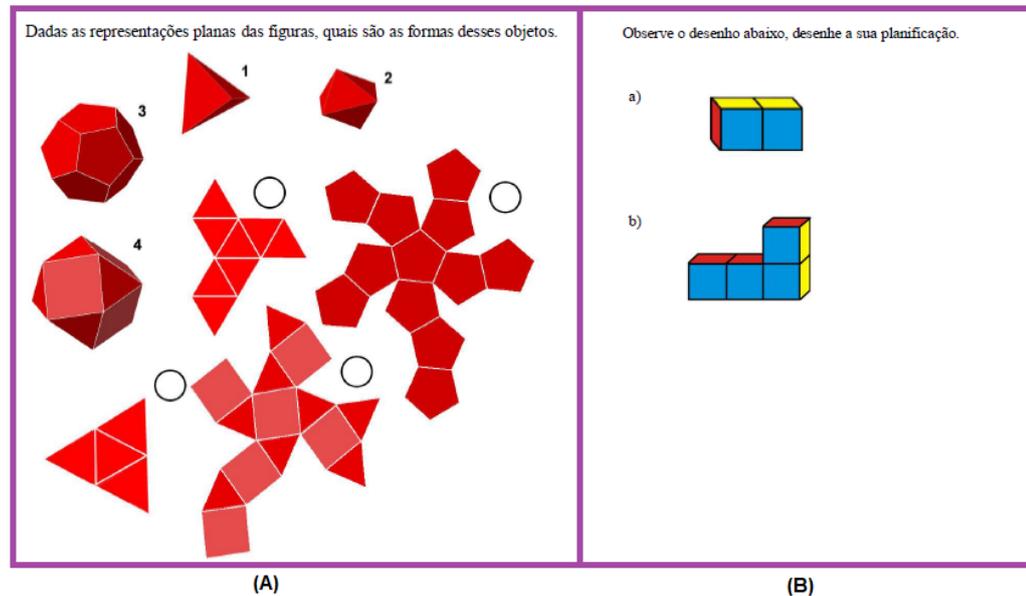
<p><b>Atividade – O que você vê?</b></p> <p>Observe o objeto e desenhe como você o enxerga visto de todos os seus lados. (vista superior, vista lateral e vista frontal).</p> <p>a) Cilindro de base circular b) Cilindro de base triangular c) Cilindro de base retangular d) Esfera</p>	<p>Associe corretamente cada sólido à figura obtida quando ele é visto de cima:</p>  <p>1      2      3</p>  
(A)	(B)

Fonte: AZEVEDO (2010, p. 39)

Na figura 57 (A), trabalhamos a capacidade visual do aluno de identificar as formas geométricas planas e representa-lás em planos bidimensionais, ideia inicial do que seria a é pura.

Outra etapa é a representação da planificação através de vistas, ou seja, agora o objetivo é observar se o aluno consegue trazer para o papel o desenho planificado (É pura) por completo, diferente da atividade anterior que foram analisado apenas algumas vistas específicas (figura 57 (B)).

Figura 57 – Atividade 02



Fonte: AZEVEDO (2010, p. 45)

A partir das respostas das atividades, o professor consegue visualizar a construção da imagem mental deste aluno, onde o desenho é uma representação de uma imagem distinta da percepção. A imagem vai sendo construída passo a passo, pois cada aluno planifica de sua forma, criando métodos para desenhar sua planificação, cada aluno se apoia em um referencial diferente, resultando no final uma gama de experiência diversificada.

#### 4.4 Computação

Existem vários programas que podemos trabalhar no estudo de geometria descritiva seja em sala de aula ou como auxílio no próprio aprendizado, HyperCAL 3D, Hypergeo, Espaço GD (deixo a cargo do leitor se aprofundar mais sobre cada um). O que iremos trabalhar nesta seção é uma atividade criada em flash por Vinicius Cardoso, Tamiris Duarte Carpin e Gabriel Wolf Flores (acadêmicos do curso licenciatura em matemática-UFRGS) e pode ser acessada no seguinte endereço eletrônico: <http://mdmat.mat.ufrgs.br/repositorio/vistas>, acessado em 17/01/2022 ( vista inicial - figura 57 (A)).

Este programa foi escolhido por ser de fácil acesso e compreensão de quem deseja utilizá-lo. Ele agrega três tipos de atividades, podendo ser dado como sequência do que foi trabalhado na seção anterior com os alunos. As atividades estão distribuídas da seguinte forma:

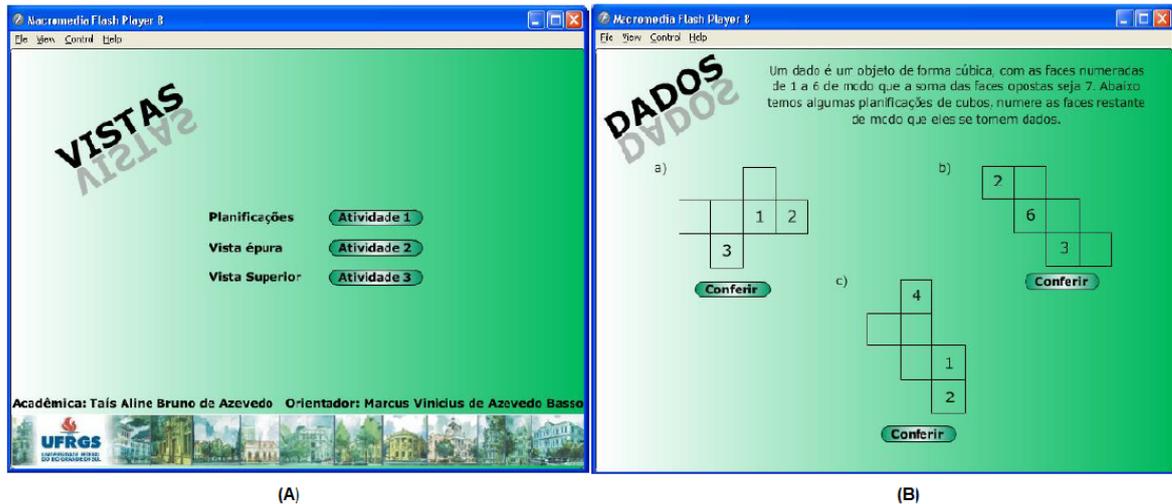
**Planificações** – atividades com planificações de dados no qual o aluno deve somar

sete em suas faces opostas. (figura 58(B))

**Vista Épura** – atividade na qual o aluno deve localizar o objeto através das projeções de suas formas. (figura 59)

**Vista Superior** – Atividade na qual o aluno deve localizar e organizar os objetos em um cômodo através da visão de duas de suas vistas. (figura 59)

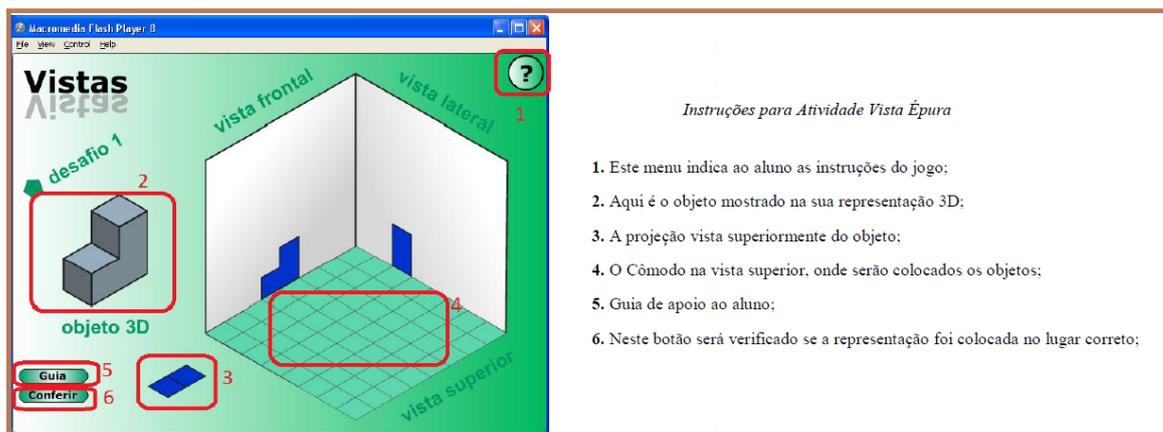
Figura 58 – Vista inicial e atividade de planificação



Fonte: AZEVEDO (2010, p. 49 e 50)

A atividade dos dados tem como objetivo a conservação da imagem do objeto planificado em que o aluno deve tentar reproduzi-lo mentalmente. O professor pode dar a dica aos alunos que a soma das faces opostas de um dado é sete.

Figura 59 – Atividade vista épura



Fonte: AZEVEDO, (2010, p. 51)

É nessa atividade (figura 58) tem como objetivo iniciar com eles a noção de localização dos objetos no espaço. Antes dos alunos acessarem a atividade, é importante o professor dar

uma ideia inicial sobre o que é vista em é pura, sobre o rebatimento das projeções.

Figura 60 – Atividade de vista superior

**Vistas Vista Superior**

**DESAFIO 1**

**1** ?

**2**

**3**

**4**

**5**

**6** Conferir

**7**

*Instruções para a atividade Vista Superior*

1. Este menu indica ao aluno as instruções do jogo;
2. Aqui é o palco dos objetos que deverão ser manipulados para a vista superior que está indicado pelo número 4;
3. O objeto que está selecionado poderá ser rotacionado de 90 em 90 graus;
4. O Cômodo na vista superior, onde serão colocados os objetos;
5. Guia de apoio ao aluno, se clicada ela aparece conforme mostra a flecha;
6. Neste botão será verificado se foi colocado o móvel no lugar correto;
7. Aqui você pode retirar e colocar o som.

Fonte: AZEVEDO (2010, p. 55)

Por fim, a última atividade tem como objetivo a noção de localização dos objetos no espaço através de sua vista superior, possibilitando ao aluno um reconhecimento de figuras espaciais e a habilidade de relacionar posições de um objeto de acordo com um referencial.

## 5 CONCLUSÃO

As representações de objetos tridimensionais em planos bidimensionais foi algo natural e que começou desde a pré-história, com os desenhos em cavernas. No século XVI e XVII, diante da expansão marítima, com o estudo da cartografia, tivemos a visualização do globo terrestre através de mapas, mas foi a partir do século XVIII que a geometria descritiva que conhecemos hoje foi idealizada pelo matemático Gaspar Monge.

Através deste trabalho, aprendemos sobre o estudo de geometria descritiva, que nos dias atuais, é muito pouco utilizada ou sequer é abordada em sala de aula ou em grades curriculares do ensino superior, em específico na matemática. O tema é considerado desafiador de ser apresentado, visto que a gama de material de qualidade, principalmente de origem nacional é escasso. Um fator que percebemos, é a dificuldade que os alunos sentem quando se deparam com o estudo sobre este tema, isto vem devido á defasagem da habilidade de visão espacial dos alunos.

Apresentamos os principais tipos de projeções, que são a base para o estudo de métodos que representam objetos tridimensionais em duas dimensões. O método mongeano é abordado a partir de conceitos pré-definidos até a representação do objeto no plano bidimensional (épura), bem como estudo de retas e tipos de planos. Por fim, apresentadas algumas aplicações do uso de geometria descritiva e também atividades a serem usadas no ensino médio, juntamente com uma proposta de desafios com o uso de um programa. Espero que este trabalho sirva de fonte de pesquisa e motivação para que leitores possam se aprofundar cada vez mais sobre este belíssimo tema.

## REFERÊNCIAS

- ANJOS, Telma Dias Silva dos. Geometria descritiva: do princípio ao “sim”. *In*: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES E NO DESENHO, 5.; SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 16., 2003, Santa Cruz do Sul, RS. **Anais [...]**. Santa Cruz do Sul, RS: [s. n.], 2003..
- AZEVEDO, Taís Aline Bruno de. **Vistas**: atividades sobre a representação do espaço. 2010. 62 f. TCC (Licenciatura em Matemática) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática, Porto Alegre, 2010.
- BERNARDES, Bruna Filipa Gonçalves. **Dificuldades no ensino e aprendizagem da Geometria Descritiva e Metodologias Didáticas Tridimensionais**. 2019. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Artes Visuais) - Curso de Artes Visuais, Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias Faculdade de Ciências Sociais, Educação e Administração., Lisboa, 2019.
- COSTA, Giovanna M.. **Como a geometria descritiva é aplicada ao desenho de arquitetura?** Niterói, RJ: UFF, 2018. 16 slides. Disponível em: <http://eau.sites.uff.br/wp-content/uploads/sites/416/2018/10/Giovanna-M.-Costa-3.pdf>. Acesso em: 14 jan. 2022.
- DIAS, C. **O recurso a ambientes virtuais no ensino-aprendizagem de geometria descritiva**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Artes Visuais) — Escola de Comunicação, Arquitetura, Artes e Tecnologias da Informação, Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, Lisboa, 2015.
- GANI, Danusa Chini. **As Lições de Gaspard Monge e o ensino subsequente da geometria descritiva**. 2004. 149 p. Tese (Mestrado em Ciências): UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.
- KAKUTA, Luciana F; MARTINS, Neuza K. **Geometria euclidiana espacial e introdução à geometria descritiva**. São José do Rio Preto: Unesp, 2008. Material em preparação.
- POTTMANN, H.; ASPERL, A.; HOFER, M.; KILIAN, A. **Architectural Geometry**. Exton: Bentley Institute Press, 2007.
- PRINCIPE JUNIOR, Alfredo dos Reis. **Noções de geometria descritiva**. São Paulo. Nobel, 1983.
- RIBEIRO, D. **Dificuldades do ensino/aprendizagem na disciplina de geometria descritiva**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Comunicação, Arquitetura, Artes e

Tecnologias de Informação, Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, Lisboa, 2012.

RIBEIRO, Antônio Clélio; PERES, Mauro Pedro; IZIDORO, Nacir. **Leitura e Interpretação de Desenho Técnico**. Disponível em: [http://www.eel.usp.br/na\\_apostila/pdf/capitulo3.pdf](http://www.eel.usp.br/na_apostila/pdf/capitulo3.pdf). Acesso em: 13 jan. 2022.

SILVA, Claudio Itarci della Nina. **Proposta de aprendizagem sobre a importância do desenho geométrico e da geometria descritiva**. 2006. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação, Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006. Disponível em: [https://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=620](https://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=620). Acesso em: 5 jan. 2022.

SOUSA, Rafaela. Projeções cartográficas. *In*: BRASIL Escola. Goiás, c2022. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/geografia/projecoes-cartograficas.htm>. Acesso em: 15 jan. 2022.

SRUIK, D.J. **A concise history of mathematics**. 4th. ed. New York: Dover Publications, 1984.

TEIXEIRA, Fábio Gonçalves; SILVA, Régio Pierre da. **Geometria Descritiva Design-Based Learning**. 2018. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/202093/001107383.pdf?sequence=1>. Acesso em: 06 jan. 2022.

TORRES, Elizabeth Amália Boscher; VIEIRA, Cláudio Luiz Baraúna; MARTINS FILHO, Protásio Dutra. A importância da geometria descritiva na engenharia. 2016. Disponível em: <https://silos.tips/download/a-importancia-da-geometria-descritiva-na-engenharia>. Acesso em: 06 jan. 2022.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 5. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2005. 109 p.